Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

«Динамічна задача теорії пружності для півнескінченного шару»

«The dynamic problem of the elasticity theory for an infinite layer»

Виконав(ла): здобувач(ка) денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Бондаренко Кирило Сергійович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Фесенко Г. О. ________
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Журавльова З. Ю.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від ____________ 2022 р.
Завідувач кафедри
________ _________________

Захищено на засіданні ЕК № ___________
Протокол № ___ від ____________ 2022 р.
Оцінка ________ / ________ / ________
Голова ЕК
________ _____________________

Одеса — 2022 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Під час побудови та експлуатації споруд та конструкцій з'являються динамічні або статичні навантаження, через які у пружних тілах виникають та концентруються напруження. Ці напруження можуть деформувати та навіть зламати конструкцію. Тому треба їх враховувати під час будівництва. Через це у математичній фізиці з'являються задачі теорії пружності. Ці задачі розглядались у статичних та динамічних постановці багатьма авторами для різних об'єктів за різних початкових та граничних умов [1, 2, 5, 9]. Такий об'єкт, як чверть простору, можна розглядати як модель перед розв'язанням подібних задач для нескінченного або напівнескінченного шару, а потім для плити. Чверть простору - це особливий випадок просторового клину. Зокрема, для другої крайової задачі для просторового клину точний розв'язок було побудовано Я. С. Уфлянд [12]. В іншій роботі [13] було побудовано точний розв'язок для випадку, коли задані нормальні переміщення та тангенціальне напруження. Точний розв'язок мішаної задачі теорії пружності для чверті простору у статичній постановці знайшов Г. Я. Попов у [5]. Важливо, що при розв'язанні цієї задачі був використаний новий метод, заснований на поданні нових функцій, які є сумою похідних переміщень [6]. Цей метод було успішно застосовано до розв'язання задачі Лемба [7]. Також за допомогою цього методу знаходили розв'язок для однорідних та неоднорідних задач теорії пружності для напівкінцевого шару [6]. Розробкою методів для задач теорії пружності для різних об'єктів, зокрема для чверті простору, також займався А. М. Александров в [14]. Загальний розв'язок для проблеми пружного контактного простору з чвертю було представлено в [16]. Динамічні напруження в пружному напівпросторі були проаналізовані в [18]. Проблема площинного контакту на тиск штампа з прямокутною основою на шорсткий пружний напівпростір розглядалася в [17].

На основі результатів [5, 7], а також методу подання рівнянь руху в термінах двох спільно та одного самостійно розв'язуваних рівнянь, запропонованого в [6], метою цієї роботи є отримати точні формули переміщень, які з'являються в чверті простору та шару, коли динамічне стискаюче навантаження діє на одну з його граней.

У роботі розглядається задача для шару. Результати спираються на метод запропонований і реалізований у задачі для чверті у бакалаврській роботі, де було знайдено переміщення W. У роботі була розглянута динамічна задача теорії пружності для чверть простору, та знайдено переміщення. У першому розділі магістерської роботи знайдено усі переміщення для динамічної задачі теорії пружності для шару, та у другому буде знайдено ще два переміщення для чверть простору. Обидва об'єкти мають практичне значення як моделі при побудові переміщень та напружень у конструюванні об'єктів інфраструктури.

У другому розділі знайдено переміщення U, V пружного чвертьпростору, коли одну границю жорстко закріплено, а на іншій по прямокутній ділянці діє нестаціонарне нормальне стискаюче навантаження в початковий момент часу. Інтегральні перетворення Лапласа та Фур'є застосовано послідовно до рівнянь руху та до граничних умов, на відміну традиційним підходам, коли інтегральні перетворення застосовуються до подання розв'язків через гармонічні функції. Це приводить до одновимірної векторної однорідної крайової задачі відносно невідомих трансформант переміщень. Задачу розв'язано за допомогою матричного диференціального числення. Поле вихідних переміщень знайдено після застосування обернених інтегральних перетворень. Для випадку стаціонарних коливань вказано спосіб обчислення у розв'язку квадратур у ближній зоні навантаження. Для аналізу коливань у віддаленій зоні побудовано асимптотичні формули. Досліджено амплітуду вертикальних коливань в залежності від форми ділянки навантаження, власних частот коливань та матеріалу середовища.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНА ЧАСТИНА

1.1 Постановка задач.

Розглянемо пружний шар $x > 0,\ -\infty < y < \infty$, $0 < z < h$. У момент часу $t = 0$ динамічне нормальне навантаження $\sigma_z\left(x, y, z, t\right)|_{z=h}$, що діє на границі шару $z = h$ по прямокутній зоні $0 \le x \le A$, $-B \le y \le B$. Дотичне напруження на площині $z = h$ дорівнює нулю. На границі $x = 0$ задано умови гладкого контакту. Границя $z = 0$ жорстко закріплена. Потрібно знайти нестаціонарні переміщення точок шару $U(x, y, z, t)$, $V(x, y, z, t)$, $W(x, y, z, t)$ за нульових початкових умов. З постановки маємо такі крайові умови

$$
\begin{aligned}
\sigma_z(x, y, h, t) &= -p(x, y)P(t),\ 0 \le x \le A;\ -B \le y \le B \\
\sigma_z(x, y, 0, t) &= 0 \\
\tau_{zx}(x, y, 0, t) &= 0,\ \tau_{zy}(x, y, 0, t) = 0 \\
U(0, y, z, t) &= \frac{\partial V(0, y, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial W(0, y, z, t)}{\partial x} = 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Рівняння руху у векторній формі мають вигляд [7]

$$
\Delta(u, v, w) + \frac{2}{\kappa - 1}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}, \frac{\partial\Theta}{\partial y}, \frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) = \frac{\rho}{G}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) \tag{1.2}
$$

Де Δ — оператор Лапласа, κ — коефіцієнт Мусхелішвілі, $\kappa = 3 - 4\mu$, μ — коефіцієнт Пуассона, $\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ — об'ємне розширення, ρ — щільність матеріалу середовища, G — модуль зсуву.

Для отримання розв'язку поставленої задачі необхідно отримати розв'язок від зосередженої в довільній точці межі $z = h$ динамічної сили, а потім розподілити її по необхідній ділянці:

$$
p(x,y) = -P(t)\delta(x - a)\delta(y - b)
$$

Введемо нові функції [6]

$$
\begin{aligned}
Z(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}u(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y}v(x,y,z) \\
\widetilde{Z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}v(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}u(x,y,z)
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Тоді система рівнянь руху (1.2) і граничні умови (1.1) враховуючи нові функції перепишуть у вигляді:

$$
\begin{cases}
\Delta W + \dfrac{2}{\kappa-1}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(Z + \dfrac{\partial W}{\partial z}\right) = \dfrac{\rho}{G}\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\
\Delta Z + \dfrac{2}{\kappa-1}\nabla_{xy}\left(Z + \dfrac{\partial W}{\partial z}\right) = \dfrac{\rho}{G}\dfrac{\partial^2 Z}{\partial t^2}
\end{cases}
\tag{1.4}
$$

$$
\Delta\widetilde{Z} = \frac{\partial^2 \widetilde{Z}}{\partial t^2}
\tag{1.5}
$$

$$
\begin{gathered}
(3-\kappa)Z(x,y,h,t) + (1+\kappa)\frac{\partial}{\partial z}W(x,y,h,t) = -\frac{\kappa-1}{G}\delta(x-a)\delta(y-b)P(t) \\
\nabla_{xy}W(x,y,h,t) + \frac{\partial}{\partial z}Z(x,y,h,t) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial z}Z(x,y,0,t) = \widetilde{Z}(x,y,0,t) = w(x,y,0,t) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial z}\tilde{Z}(x,y,0,t) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial x}Z(0,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial x}W(0,y,z,t) = \tilde{Z}(0,y,z,t) = 0
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

де $\nabla_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Вихідна початкова крайова задача набуває вигляду (1.4)-(1.6) при початкових умовах

$$
\left[W, Z, \widetilde{Z}\right]\Big|_{t=0} = 0 \;\; \frac{\partial}{\partial t}\left[W, Z, \widetilde{Z}\right]\Big|_{t=0} = 0
\tag{1.7}
$$

Після знаходження невідомих функцій $W, Z, \widetilde{Z}$ для відшукання переміщень u і v слід розв'язати рівняння Пуассона

$$
\nabla_{xy}u = \frac{\partial}{\partial x}Z - \frac{\partial}{\partial y}\widetilde{Z},\; \nabla_{xy}v = \frac{\partial}{\partial y}Z + \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{Z}
\tag{1.8}
$$

1.2 Зведення до векторної одновимірної задачі

Застосуємо послідовно до (1.4), (1.5) перетворення cos-Фур'є за змінною x, повне перетворення Фур'є по змінній y і перетворення Лапласа за змінною t з параметрами α, β і p відповідно.

$$\begin{bmatrix} W_{\alpha\beta p}(z) \\ \\ Z_{\alpha\beta p}(z) \end{bmatrix} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \begin{bmatrix} W(x,y,z,t) \\ \\ Z(x,y,z,t) \end{bmatrix} e^{i\beta y}\cos\alpha x\, e^{-pt}\, dy\, dx\, dt \tag{1.9}$$

Введемо параметр $N^2 = \alpha^2 + \beta^2$.
Вважаємо також, що додатково виконуються такі умови [5]

$$Z_{\beta}(0,z,t) = 0,\, \widetilde{Z}_{\beta}(0,z,t) = 0 \tag{1.10}$$

Функція $\widetilde{Z}_{\alpha\beta}(z)$ задовольняє однорідній задачі

$$\widetilde{Z}''_{\alpha\beta p}(z) - (N^2 + p^2)\widetilde{Z}_{\alpha\beta p}(z) = 0,\, 0 < z < \infty,\, \widetilde{Z}'_{\alpha\beta p}(0) = 0 \tag{1.11}$$

і тому $\widetilde{Z}(x,y,z,t) \equiv 0$.

Перейдемо до усталенних коливанть підставляючи до системи рівнянь та крайових умов $p = i\omega$. Введемо величини $k_1^2 = \frac{\omega^2\rho}{G}, k_2^2 = \frac{(\kappa-1)}{\kappa+1}\frac{\omega^2\rho}{G}$ — хвильові числа.

Система рівнянь (1.4) та граничні умови (1.6) приймають вигляд

$$\begin{cases} W''_{\alpha\beta}(z) + \dfrac{2}{\kappa+1}Z'_{\alpha\beta}(z) - N^2\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}W_{\alpha\beta}(z) + k_2^2 W_{\alpha\beta} = 0 \\ Z''_{\alpha\beta}(z) - \dfrac{2}{\kappa-1}N^2 W'_{\alpha\beta}(z) - N^2\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}Z_{\alpha\beta}(z) + k_1^2 Z_{\alpha\beta}(z) = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

$$
\begin{gathered}
-N^2 W_{\alpha\beta}(h) + Z'_{\alpha\beta}(h) = 0 \\
(3-\kappa) Z_{\alpha\beta}(h) + W'_{\alpha\beta}(h) = -\frac{\kappa - 1}{G} \cdot \cos\alpha a e^{ib\beta} \cdot P \\
\frac{\partial}{\partial z} Z(x, y, 0; k_1) = w(x, y, 0; k_1) = 0 \\
N^2 = \alpha^2 + \beta^2;
\end{gathered}
\tag{1.13}
$$

Для зведення задач (1.12) (1.13) до векторної одномірної, вводиться невідомий вектор трансформант переміщень

$$
\vec{\mathbf{y}}(z) = \begin{pmatrix} W_{\alpha\beta}(z) \\ \\ Z_{\alpha\beta}(z) \end{pmatrix}
$$

а також матриці

$$
\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\kappa+1} \\ \\ \frac{-2N^2}{\kappa-1} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ \\ 0 & \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \end{pmatrix}, \mathbf{T} = \begin{pmatrix} k_2^2 & 0 \\ \\ 0 & k_1^2 \end{pmatrix}
$$

Отже, система (1.12) набуває форми

$$
\mathrm{L}_2 \vec{\mathbf{y}}(z) = 0, \, 0 < z < h \tag{1.14}
$$

де диференціальний оператор L_2 має вигляд

$$
\mathrm{L}_2 \vec{\mathbf{y}}(z) = \mathbf{I} \vec{\mathbf{y}}''(z) + \mathbf{Q} \vec{\mathbf{y}}'(z) - N^2 \mathbf{P} \vec{\mathbf{y}}(z) + \mathbf{T} \vec{\mathbf{y}}(z)
$$

Рішення векторного рівняння (1.2) будується на основі рішення матричного рівняння $\mathrm{L}_2\left[\mathbf{Y}(z)\right] = 0$. Підстановка $\mathbf{Y}(z) = e^{Nz}\mathbf{I}$ зроблена для формування характеристичної матриці $\mathbf{M}(s) = \mathbf{I}s^2 + \mathbf{Q}s - N^2\mathbf{P} + \mathbf{T}$. Обернена матриця має вигляд

$$
\mathbf{M^{-1}}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{4}(s - s_i)} \begin{pmatrix} s^2 - N^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} + k_2^1 & -\frac{2s}{\kappa+1} \\ \\ \frac{2s}{\kappa-1} N^2 & s^2 - N^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} + k_2^2 \end{pmatrix}
$$

$$
s_1 = \sqrt{N^2 - k_2^2}, \, s_2 = -\sqrt{N^2 - k_2^2}, \, s_3 = \sqrt{N^2 - k_1^2}, \, s_4 = -\sqrt{N^2 - k_1^2}
$$

Тут s_i $(i = \overline{1,4})$ - це корені характеристичного рівняння $\det[\mathbf{M}(s)] = 0$. Розв'язок матричного рівняння будується за формулою [8]

$$\mathbf{Y}_-(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C e^{sz}\mathbf{M}^{-1}(s)ds$$

де C – це замкнутий контур, що охоплює всі нулі визначника матриці $\mathbf{M}(s)$. Залишки на полюсах s_1 і s_3 дають зростаючий різв'язок, який має вигляд.

$$\mathbf{Y}_+(z) = -\frac{1}{2k_1^2}e^{\Delta_1 z}\begin{pmatrix} -\frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)\Delta_1} & -1 \\ \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)} & \Delta_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2k_1^2}e^{\Delta_2 z}\begin{pmatrix} \frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)}\Delta_2 & 1 \\ -\frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)}N^2 & -\frac{N^2}{\Delta_2} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Залишки на полюсах s_2 і s_4 дають розв'язок, якій спадає. Після обчислення спадне рішення отримує форму

$$\mathbf{Y}_-(z) = -\frac{1}{2k_1^2}e^{-\Delta_1 z}\begin{pmatrix} \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)\Delta_1} & -1 \\ \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)} & -\Delta_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2k_1^2}e^{-\Delta_2 z}\begin{pmatrix} -\frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)}\Delta_2 & 1 \\ -\frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)}N^2 & \frac{N^2}{\Delta_2} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

де $\Delta_1 = \sqrt{N^2 + k_1^2},\ \Delta_2 = \sqrt{N^2 + k_2^2}$

Розв'язок векторного рівняння (1.2) будується у вигляді

$$\vec{\mathbf{y}}(z) = \mathbf{\Psi}_0\mathbf{\Theta}_0 + \mathbf{\Psi}_1\mathbf{\Theta}_1$$

де $\mathbf{\Psi}_i$, $i = 0, 1$ - фундаментальні базисні матриці розв'язків, $\mathbf{\Theta}_i$, $i = 0, 1$ - праві частини крайових умов.

Фундаментальні базисні матриці побудуємо через фундаментальну систему розв'язків однорідного диференційного рівняння , використовуючи формули $\mathbf{\Psi}_i = \mathbf{Y}_-(z)C_i^0 + \mathbf{Y}_+(z)C_i^1$, $i = 0, 1$. $C_i^{0,1}$, - це матриці невідомих постійних. Невідомі постійні знайдемо з співвідношенн задовольнивши крайовим умовам $\mathbf{U}_i[\mathbf{\Psi}] = \delta_{ij}\mathbf{I}$ i,$j = 0$,1

$$C_1^1 = (\mathbf{U}_1[\mathbf{Y}_+(z)] - \mathbf{U}_1[\mathbf{Y}_-(z)] \cdot (\mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_-(z)])^{-1} \cdot \mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_-(z)])^{-1}$$

$$C_1^0 = -(\mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_-(z)])^{-1} \cdot \mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_+(z)] \cdot C_1^1$$

Введемо матриці

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -N^2 & 0 \\ 0 & (3-\kappa) \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1+\kappa) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Theta}_0 = (0,0)^T$$
$$\mathbf{\Theta}_1 = (0, -\frac{P(\kappa-1)}{G}\cos\alpha a e^{ib\beta})^T$$

Крайові функціонали мають вигляд

$$\mathbf{U}_0[\mathbf{Y}(z)] = \mathbf{I}\mathbf{y}(\mathbf{z})$$

$$\mathbf{U}_1[\mathbf{Y}(z)] = \mathbf{A}\mathbf{y}(\mathbf{z}) + \mathbf{B}\mathbf{y}'(\mathbf{z})$$

$$\mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_+(z)] = -\frac{1}{2k_1^2}\left(e^{\Delta_1 z}\begin{pmatrix} -\frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)\Delta_1} & -1 \\ \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)} & \Delta_1 \end{pmatrix} + e^{\Delta_2 z}\begin{pmatrix} \frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)}\Delta_2 & 1 \\ -\frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)}N^2 & -\frac{N^2}{\Delta_2} \end{pmatrix}\right) \quad (1.17)$$

$$\mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_-(z)] = -\frac{1}{2k_1^2}\left(e^{\Delta_1 z}\begin{pmatrix} \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)\Delta_1} & -1 \\ \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)} & -\Delta_1 \end{pmatrix} + e^{\Delta_2 z}\begin{pmatrix} -\frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)}\Delta_2 & 1 \\ -\frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)}N^2 & \frac{N^2}{\Delta_2} \end{pmatrix}\right) \quad (1.18)$$

$$\mathbf{U}_1[\mathbf{Y}_+(z)] = -\frac{1}{2k_1^2}\begin{pmatrix} \frac{\kappa+1}{\kappa-1}N^2\left(\left(\frac{N^2}{\Delta_1}+\Delta_1\right)e^{\Delta_1 h} - 2\Delta_2 e^{\Delta_2 h}\right) & \left(2N^2-k_1^2\right)e^{\Delta_1 h} - 2N^2 e^{\Delta_2 h} \\ (\kappa+1)\left(-2N^2 e^{\Delta_1 h} + \left(2N^2-k_1^2\right)e^{\Delta_2 h}\right) & (\kappa-1)\left(-2\Delta_1 e^{\Delta_1 h} + \frac{1}{\Delta_2}\left(2N^2-k_1^2\right)e^{\Delta_2 h}\right) \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

$$\mathbf{U}_1[\mathbf{Y}_-(z)] = -\frac{1}{2k_1^2}\begin{pmatrix} \frac{\kappa+1}{\kappa-1}N^2\left(2\Delta_2 e^{\Delta_2 h} - \left(\frac{N^2}{\Delta_1}+\Delta_1\right)e^{\Delta_1 h}\right) & \left(2N^2-k_1^2\right)e^{\Delta_1 h} - 2N^2 e^{\Delta_2 h} \\ (\kappa+1)\left(-2N^2 e^{\Delta_1 h} + \left(2N^2-k_1^2\right)e^{\Delta_2 h}\right) & (\kappa-1)\left(2\Delta_1 e^{\Delta_1 h} - \frac{1}{\Delta_2}\left(2N^2-k_1^2\right)e^{\Delta_2 h}\right) \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

Враховуючи, що $\mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_-(z)]^{-1}\mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_+(z)] = -\mathbf{I}$ отримуємо, що $C_1^1 = C_1^0$

$$\mathbf{U}_1[\mathbf{Y}_-(z)] + \mathbf{U}_1[\mathbf{Y}_-(z)] =$$

$$= -\frac{1}{2k_1^2}\begin{pmatrix} \frac{\kappa+1}{\kappa-1}N^2\left(\left(\frac{N^2}{\Delta_1}+\Delta_1\right)\sinh\Delta_1 h - 2\Delta_2\sinh\Delta_2 h\right) & \left(2N^2-k_1^2\right)\cosh\Delta_1 h - 2N^2\cosh\Delta_2 h \\ (\kappa+1)\left(-2N^2\cosh\Delta_1 h + \left(2N^2-k_1^2\right)\cosh\Delta_2 h\right) & (\kappa-1)\left(\frac{1}{\Delta_2}\left(2N^2-k_1^2\right)\sinh\Delta_2 h - 2\Delta_1\sinh\Delta_1 h\right) \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

Так як $\mathbf{\Theta}_0 = (0,0)^T$ то $\mathbf{\Psi_0}$ нас нецікавить. Знайдемо $\mathbf{\Psi_1}$

$$\mathbf{\Psi_1} = -\frac{1}{2k_1^2}\begin{pmatrix} \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\left(\Delta_2\sinh\Delta_2 z - \frac{N^2}{\Delta_1}\sinh\Delta_1 z\right) & \cosh\Delta_2 z - \cosh\Delta_1 z \\ \frac{\kappa+1}{\kappa-1}N^2\left(\cosh\Delta_1 z - \cosh\Delta_2 z\right) & \Delta_1\sinh\Delta_1 z - \frac{N^2}{\Delta_2}\sinh\Delta_2 z \end{pmatrix}\cdot C_1^1 \tag{1.22}$$

Після спрощення, були знайдені вирази для трансформантів

$$
\begin{aligned}
W_{\alpha\beta p}(z) = -\frac{\cos\alpha a e^{ib\beta}}{G}\cdot P\frac{\Delta_2}{\widetilde{\Delta}}\Big[\big(\Delta_1\Delta_2\sinh\Delta_2 z - N^2\sinh\Delta_1 z\big)\times\\
\times\big(2N^2\cosh\Delta_2 h - (2N^2-k_1^2)\cosh\Delta_1 h\big)+\\
+N^2\left(\cosh\Delta_2 z - \cosh\Delta_1 z\right)\times\\
\times\big((2N^2-k_1^2)\sinh\Delta_1 h - 2\Delta_1\Delta_2\sinh\Delta_2 h\big)\Big]\\
Z_{\alpha\beta p}(z) = -\frac{\cos\alpha a e^{ib\beta}}{G}\cdot P_p\frac{N^2}{\widetilde{\Delta}}\left[\Delta_1\Delta_2\left(\cosh\Delta_1 z - \cosh\Delta_2 z\right)\times\right.\\
\times\big(2N^2\cosh\Delta_2 h - (2N^2-k_1^2)\cosh\Delta_1 h\big)+\\
+\big(\Delta_1\Delta_2\sinh\Delta_1 z - N^2\sinh\Delta_2 z\big)\times\\
\times\big((2N^2-k_1^2)\sinh\Delta_1 h - 2\Delta_1\Delta_2\sinh\Delta_2 h\big)\Big]
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Delta} = 4N^2\Delta_1\Delta_2(2N^2-k_1^2) - (8N^4-4N^2k_1^2+k_1^4)\Delta_1\Delta_2\cosh\Delta_1 k\cosh\Delta_2 k+\\
+N^2(8N^4-4N^2k_1^2\frac{3\kappa+1}{\kappa+1}+k_1^4\frac{5\kappa-3}{\kappa+1})\sinh\Delta_1 k\sinh\Delta_2 k
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

На основі формул (1.8), (1.11), знайдені трансформанти решти переміщень

$$
u_{\alpha\beta p}(z) = \frac{\alpha}{N^2}Z_{\alpha\beta p}(z),\; v_{\alpha\beta p}(z) = \frac{i\beta}{N^2}Z_{\alpha\beta p}(z) \tag{1.25}
$$

Таким чином, було отримано точне рішення поставленої векторної задачі (1.12) (1.13) у просторі трансформант.

1.3 Побудова оригіналів розв'язків.

Введемо функції залежні від N

$$
\begin{aligned}
F_W(N,z) = \Big[\big(\Delta_1\Delta_2\sinh\Delta_2 z - N^2\sinh\Delta_1 z\big)\times\\
\times\big(2N^2\cosh\Delta_2 h - (2N^2-k_1^2)\cosh\Delta_1 h\big)+\\
+N^2\left(\cosh\Delta_2 z - \cosh\Delta_1 z\right)\times\\
\times\big((2N^2-k_1^2)\sinh\Delta_1 h - 2\Delta_1\Delta_2\sinh\Delta_2 h\big)\Big]
\end{aligned}
$$

$$F_Z(N,z) = [\Delta_1\Delta_2 \left(\cosh\Delta_1 z - \cosh\Delta_2 z\right) \times \\ \times \left(2N^2\cosh\Delta_2 h - (2N^2 - k_1^2)\cosh\Delta_1 h\right) + \\ + \left(\Delta_1\Delta_2 \sinh\Delta_1 z - N^2\sinh\Delta_2 z\right) \times \\ \times \left((2N^2 - k_1^2)\sinh\Delta_1 h - 2\Delta_1\Delta_2\sinh\Delta_2 h\right)]$$

Після застосування обернених інтегральних перетворень до розв'язку (1.23) було отримано вихідні переміщення

$$W(x,y,z;k_1) \quad = \quad -\frac{1}{G\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\Delta_2}{\widetilde{\Delta}}PF_W(N,z)\cos\alpha a\, e^{i\beta(y-b)}\cos\alpha x\, d\beta\, d\alpha$$

$$V(x,y,z;k_1) = -\frac{1}{G\pi^2}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\Delta_2}{\widetilde{\Delta}}P\cdot F_Z(N,z)\cos\alpha a\, e^{i\beta(y-b)}\cos\alpha x\, d\beta\, d\alpha$$

$$U(x,y,z;k_1) = -\frac{1}{G\pi^2}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\Delta_2}{\widetilde{\Delta}}P\cdot F_Z(N,z)\cos\alpha a\, e^{i\beta(y-b)}\cos\alpha x\, d\beta\, d\alpha$$

Використовуючи парність інтегралу та застосовуючи формулу Ейлера, переміщення переписуються у формі

$$W(x,y,z;k_1) = \frac{1}{2G\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P\frac{\Delta_2}{\widetilde{\Delta}}F_W(N,z)d\beta\, d\alpha$$

$$V(x,y,z;k_1) = \frac{1}{2G\pi^2}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P\frac{\Delta_2}{\widetilde{\Delta}}F_Z(N,z)d\beta\, d\alpha$$

$$U(x,y,z;k_1) = \frac{1}{2G\pi^2}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P\frac{\Delta_2}{\widetilde{\Delta}}F_Z(N,z)d\beta\, d\alpha$$

Для того, щоб позбутися подвійного інтегралу за параметрами перетворень Фур'є, було використано відношення, що з'єднує перетворення Фур'є і Ганкеля [10]

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\chi_i^2}\right)e^{-i\alpha x-i\beta y}d\alpha d\beta=\int\limits_{0}^{\infty}sF(\sqrt{s^2+\chi_i^2})\times$$
$$\times J_0(s\sqrt{x^2+y^2})ds$$

де $J_0(s)$ - функція Бесселя, $\chi_1=k_1$, $\chi_2=k_2$. Після спрощення формула переміщення приймає форму

$$W(x,y,z;k_1)=-\frac{1}{\pi G}\int\limits_{0}^{\infty}P\frac{F_W(s,z)}{\Delta_s}\cdot s\left[J_0(s\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})+\right.$$
$$\left.+J_0(s\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2})\right]ds$$

$$V(x,y,z;k_1)=-\frac{1}{\pi G}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{0}^{\infty}P\frac{F_Z(s,z)}{\Delta_s}\cdot s\left[J_0(s\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})+\right.$$
$$\left.+J_0(s\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2})\right]ds$$

$$U(x,y,z;k_1)=-\frac{1}{\pi G}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{0}^{\infty}P\frac{F_Z(s,z)}{\Delta_s}\cdot s\left[J_0(s\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})+\right.$$
$$\left.+J_0(s\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2})\right]ds$$

$$F_W(s,z)=\Big[\big(\Delta_1\Delta_2\sinh\Delta_2 z-s^2\sinh\Delta_1 z\big)\times$$
$$\times\left(2s^2\cosh\Delta_2 h-(2s^2-k_1^2)\cosh\Delta_1 h\right)+$$
$$+s^2\left(\cosh\Delta_2 z-\cosh\Delta_1 z\right)\big((2s^2-k_1^2)\sinh\Delta_1 h-2\Delta_1\Delta_2\sinh\Delta_2 h\big)\Big]$$

$$F_Z(s,z) = [\Delta_1\Delta_2 \left(\cosh\Delta_1 z - \cosh\Delta_2 z\right) \times$$
$$\times \left(2s^2\cosh\Delta_2 h - (2s^2 - k_1^2)\cosh\Delta_1 h\right) +$$
$$+ \left(\Delta_1\Delta_2\sinh\Delta_1 z - s^2\sinh\Delta_2 z\right)\left((2s^2 - k_1^2)\sinh\Delta_1 h - 2\Delta_1\Delta_2\sinh\Delta_2 h\right)]$$

$$\widetilde{\Delta}_s = 4s^2\Delta_1\Delta_2(2s^2 - k_1^2) - (8s^4 - 4s^2k_1^2 + k_1^4)\Delta_1\Delta_2\cosh\Delta_1 h\cosh\Delta_2 h +$$
$$+ s^2(8s^4 - 4s^2k_1^2\frac{3\kappa+1}{\kappa+1} + k_1^4\frac{5\kappa-3}{\kappa+1})\sinh\Delta_1 h\sinh\Delta_2 h$$

Використовуючи парність функції Бесселя $J_0(s)$, продовжимо інтегрування непарним чином до інтервалу $(-\infty,\ 0)$, знайдемо переміщення від розподіленого по прямокутній площі навантаження

$$W^{AB}(x,y,z;k_1) = \frac{1}{\pi G}\int\limits_0^A\int\limits_{-B}^B\int\limits_{-\infty}^\infty P\frac{F_W(s,z)}{\Delta_s}\cdot s\left[J_0(s\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}) + \right.$$
$$\left. + J_0(s\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}\right] ds\,da\,db \quad (1.26)$$

$$V^{AB}(x,y,z;k_1) = \frac{1}{\pi G}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^A\int\limits_{-B}^B\int\limits_{-\infty}^\infty P\frac{F_Z(s,z)}{\Delta_s}\cdot s\left[J_0(s\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}) + \right.$$
$$\left. + J_0(s\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}\right] ds\,da\,db \quad (1.27)$$

$$U^{AB}(x,y,z;k_1) = \frac{1}{\pi G}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^A\int\limits_{-B}^B\int\limits_{-\infty}^\infty P\frac{F_Z(s,z)}{\Delta_s}\cdot s\left[J_0(s\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}) + \right.$$
$$\left. + J_0(s\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}\right] ds\,da\,db \quad (1.28)$$

1.4 Перетворення інтеграла $J_{s,1}^{A,B}(x,y)$.

За схемою [7] розглянемо інтеграл $J_{s,1}^{A,B}(x,y)$. Використаймо інтегральне подання для функції Бесселя [11]

$$J_0(s\sqrt{(x\mp a)^2+(y-b)^2}) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left[s(x\mp a)\cos\psi\right]\cdot\cos\left[s(y-b)\sin\psi\right]d\psi$$

Сумма функцій Бесселя для переміщення $W(x,y,z;k_1)$:

$$J_0(s\sqrt{(x\mp a)^2+(y-b)^2}) = \frac{-2}{N}\sum_{k=1}^{N}\cos sa\tau_k\cos sx\tau_k\cos s(y-b)\tau_k$$

для переміщення $V(x,y,z;k_1)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}J_0(s\sqrt{(x\mp a)^2+(y-b)^2}) =$$

$$= \frac{-2s}{N}\sum_{k=1}^{N}\cos sx\sqrt{1-\tau_k^2}\cos sa\sqrt{1-\tau_k:2}\cos s(y-b)\tau_k\tau_k$$

для переміщення $U(x,y,z;k_1)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}J_0(s\sqrt{(x\mp a)^2+(y-b)^2}) =$$

$$= \frac{-2s}{N}\sum_{k=1}^{N}\cos s(y-b)\sqrt{1-\tau_k^2}\sin sa\tau_k\cos sa\tau_k\tau_k$$

для переміщення $W^{AB}(x,y,z;k_1)$:

$$\int\limits_0^A\int\limits_{-B}^B J_0(s\sqrt{(x\mp a)^2+(y-b)^2})da\,db =$$

$$= \frac{4}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\cos sx\sqrt{1-\tau_k^2}\sin sA\sqrt{1-\tau_k^2}\cos sy\tau_k\sin sBtau_k}{s^2\tau_k\sqrt{1-\tau_k}}$$

для переміщення $V^{AB}(x, y, z; k_1)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^A\int\limits_{-B}^B J_0(s\sqrt{(x\mp a)^2+(y-b)^2})da\,db =$$
$$= \frac{-4}{N}\sum_{k=1}^N \frac{\cos sx\sqrt{1-\tau_k^2}\sin sA\sqrt{1-\tau_k^2}\sin sy\tau_k\sin sBtau_k}{s\sqrt{1-\tau_k^2}}$$

для переміщення $U^{AB}(x, y, z; k_1)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^A\int\limits_{-B}^B J_0(s\sqrt{(x\mp a)^2+(y-b)^2})da\,db =$$
$$= \frac{-4}{N}\sum_{k=1}^N \frac{\sin sx\tau_k\sin sA\tau_k\cos sy\sqrt{1-\tau_k^2}\sin sBtau_k}{s\sqrt{1-\tau_k^2}}$$

де

$$\tau_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)$$

нулі полінома Чебишова 1-го роду.

РОЗДІЛ 2

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ЧВЕРТЬ ПРОСТОРУ

2.1 Постановка задачі.

Розглянемо пружний чверть простір $x > 0, \ -\infty < y < \infty$, $0 < z < \infty$, . У момент часу $t = 0$ динамічне нормальне навантаження $\sigma_z \left(x, y, z, t\right)\big|_{z=0} = -p(x, y)P(t)$ задано на межі $z = 0$ по прямокутній зоні $0 \leq x \leq A$, $-B \leq y \leq B$. Дотичне напруження у всій площині XOY дорівнює нулю. Грань $x = 0$ жорстко закріплена. Потрібно знайти нестаціонарні зміщення точок чверті простору $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ при нульових початкових умовах. Постановка призводить до наступних крайових умов

$$\begin{aligned}
\sigma_z(x, y, 0, t) &= -p(x, y)P(t), \ 0 \leq x \leq A; \ -B \leq y \leq B \\
\sigma_z(x, y, 0, t) &= 0, \ x > A; \ |y| > B \\
\tau_{zx}(x, y, 0, t) &= 0, \ \tau_{zy}(x, y, 0, t) = 0 \\
u(0, y, z, t) &= v(0, y, z, t) = w(0, y, z, t) = 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Рівняння руху у векторній формі мають вигляд [7]

$$\Delta(u, v, w) + \frac{2}{\kappa - 1}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}, \frac{\partial\Theta}{\partial y}, \frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) = \frac{\rho}{G}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) \tag{2.2}$$

Де Δ — оператор Лапласа, $\kappa = 3 - 4\mu$, μ — коефіцієнт Пуассона, $\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ — об'ємне розширення, ρ — щільність матеріалу середовища, G — модуль зсуву; $\frac{\rho}{G} = \frac{1}{c^2}$, c — швидкість поширення хвилі.

Для отримання розв'язку поставленої задачі необхідно отримати розв'язок від зосередженої в довільній точці межі $z = 0$ динамічної сили, а потім розподілити її по необхідній ділянці:

$$p(x,y) = \delta(x - a)\delta(y - b)$$

Перейдемо до безрозмірної системи координат

$$\tilde{x} = \frac{x}{a},\ \tilde{y} = \frac{(y-b)}{a},\ \tilde{z} = \frac{z}{a},\ \tilde{t} = \left(\frac{1}{c^2}\right)t \tag{2.3}$$

Далі "хвилі" опускаємо, маючи на увазі заміну (2.3) і введемо нові функції [6]

$$\begin{aligned} Z(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}u(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y}v(x,y,z) \\ \widetilde{Z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}v(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}u(x,y,z) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Тоді система рівнянь руху (2.2) і граничні умови (2.1) враховуючи нові функції перепишуть у вигляді:

$$\begin{cases} \Delta W + \dfrac{2}{\kappa-1}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(Z + \dfrac{\partial W}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\ \Delta Z + \dfrac{2}{\kappa-1}\nabla_{xy}\left(Z + \dfrac{\partial W}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial t^2} \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\Delta\widetilde{Z} = \frac{\partial^2 \widetilde{Z}}{\partial t^2} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered} \mu Z(x,y,0,t) + (1-\mu)\frac{\partial}{\partial z}W(x,y,0,t) = -\frac{\kappa-1}{4Ga}\delta(x-1)\delta(y)P(t) \\ \nabla_{xy}W(x,y,0,t) + \frac{\partial}{\partial z}Z(x,y,0,t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}\tilde{Z}(x,y,0,t) = 0 \\ u(0,y,z,t) = v(0,y,z,t) = w(0,y,z,t) = 0 \end{gathered} \tag{2.7}$$

де $\nabla_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Вихідна початкова крайова задача набуває вигляду (2.5)-(2.7) при початкових умовах

$$\left[W, Z, \widetilde{Z}\right]\Big|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t}\left[W, Z, \widetilde{Z}\right]\Big|_{t=0} = 0 \tag{2.8}$$

Після знаходження невідомих функцій $W, Z, \widetilde{Z}$ для відшукання переміщень

u і v слід розв'язати рівняння Пуассона

$$\nabla_{xy}u = \frac{\partial}{\partial x}Z - \frac{\partial}{\partial y}\widetilde{Z},\ \nabla_{xy}v = \frac{\partial}{\partial y}Z + \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{Z} \tag{2.9}$$

2.2 Зведення до векторної одновимірної задачі

Застосуємо послідовно до (2.5), (2.6) перетворення sin-Фур'є за змінною x, повне перетворення Фур'є по змінній y і перетворення Лапласа за змінною t з параметрами α, β і p відповідно.

$$\begin{bmatrix} W_{\alpha\beta p}(z) \\ \\ Z_{\alpha\beta p}(z) \end{bmatrix} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \begin{bmatrix} W(x,y,z,t) \\ \\ Z(x,y,z,t) \end{bmatrix} e^{i\beta y}\sin\alpha x\, e^{-pt}\, dy\, dx\, dt \tag{2.10}$$

Вважаємо також, що додатково виконуються такі умови [5]

$$Z_\beta(0,z) = 0,\ \widetilde{Z}_\beta(0,z) = 0 \tag{2.11}$$

Функція $\widetilde{Z}_{\alpha\beta p}(z)$ задовольняє однорідній задачі

$$\widetilde{Z}''_{\alpha\beta p}(z) - (N^2 + p^2)\widetilde{Z}_{\alpha\beta p}(z) = 0,\ 0 < z < \infty,\ \widetilde{Z}'_{\alpha\beta p}(0) = 0 \tag{2.12}$$

і тому $\widetilde{Z}(x,y,z,t) \equiv 0$. Система рівнянь (2.5) та граничні умови (2.7) приймають вигляд

$$\begin{cases} W''_{\alpha\beta p}(z) + \dfrac{2}{\kappa+1}Z'_{\alpha\beta p}(z) - N^2\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}W_{\alpha\beta p}(z) - \dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2 W_{\alpha\beta p} = 0 \\ Z''_{\alpha\beta p}(z) - \dfrac{2}{\kappa-1}N^2 W'_{\alpha\beta p}(z) - N^2\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}Z_{\alpha\beta p}(z) - p^2 Z_{\alpha\beta p}(z) = 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

$$
\begin{gathered}
-N^2 W_{\alpha\beta p}(0) + Z'_{\alpha\beta p} = 0 \\
(3-\kappa)\mu Z_{\alpha\beta p}(0) + (1-\mu) W'_{\alpha\beta p}(0) = -\frac{\kappa-1}{4Ga}\cdot \sin\alpha \cdot P_p \\
P_p = \int\limits_0^\infty P(t) e^{-pt} dt;\ N^2 = \alpha^2 + \beta^2;
\end{gathered}
\tag{2.14}
$$

Для подання системи (2.13) у векторній формі вводиться невідомий вектор трансформант переміщень

$$
\vec{\mathbf{y}}(z) = \begin{pmatrix} W_{\alpha\beta p}(z) \\ Z_{\alpha\beta p}(z) \end{pmatrix}
$$

а також матриці

$$
\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa+1} \\ \frac{-N^2}{\kappa-1} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \end{pmatrix}, \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Отже, система (2.13) набуває форми

$$
\mathrm{L}_2 \vec{\mathbf{y}}(z) = 0,\ 0 < z < \infty \tag{2.15}
$$

де диференціальний оператор L_2 має вигляд

$$
\mathrm{L}_2 \vec{\mathbf{y}}(z) = \mathbf{I}\vec{\mathbf{y}}''(z) + 2\mathbf{Q}\vec{\mathbf{y}}'(z) - N^2 \mathbf{P}\vec{\mathbf{y}}(z) - p^2 \mathbf{T}\vec{\mathbf{y}}(z)
$$

Рішення векторного рівняння (2.15) будується на основі рішення матричного рівняння $\mathrm{L}_2\left[\mathbf{Y}(z)\right] = 0$. Підстановка $\mathbf{Y}(z) = e^{Nz}\mathbf{I}$ зроблена для формування характеристичної матриці $\mathbf{M}(s) = \mathbf{I}s^2 + 2\mathbf{Q}sN^2\mathbf{P} - p^2\mathbf{T}$. Обернена матриця має вигляд

$$
\mathbf{M^{-1}}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^4 (s - s_i)} \begin{pmatrix} s^2 - \frac{\kappa+1}{\kappa-1}N^2 - p^2 & -\frac{2s}{\kappa+1} \\ \frac{2s}{\kappa-1}N^2 & s^2 - N^2\frac{\kappa-1}{\kappa+1} - p^2\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \end{pmatrix}
$$

$$
s_1 = -\sqrt{N^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2},\ s_2 = -\sqrt{N^2+p^2},\ s_3 = \sqrt{N^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2},\ s_4 = \sqrt{N^2+p^2}
$$

Тут s_i $(i = \overline{1,4})$ - це корені характеристичного рівняння $\det[\mathbf{M}(s)] = 0$. Розв'язок матричного рівняння будується за формулою [8]

$$\mathbf{Y}_{-}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C} e^{sz} \mathbf{M}^{-1}(s) ds$$

де C – це замкнутий контур, що охоплює всі нулі визначника матриці $\mathbf{M}(s)$. Залишки на полюсах s_3 і s_4 дають зростаючий різв'язок на нескінченності і тому відкидаються. Залишки на полюсах s_1 і s_2 дають розв'язок, якій спадає на нескінченності. Після обчислення спадне рішення отримує форму

$$\mathbf{Y}_{-}(z) = \frac{1}{2p^2} e^{-\Delta_1 z} \begin{pmatrix} \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)\Delta_1} & -1 \\ \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)} & -\Delta_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2p^2} e^{-\Delta_2 z} \begin{pmatrix} -\frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)}\Delta_2 & 1 \\ -\frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)}N^2 & \frac{N^2}{\Delta_2} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

де $\Delta_1 = \sqrt{N^2 + p^2}$, $\Delta_2 = \sqrt{N^2 + \frac{p^2(\kappa-1)}{(\kappa+1)}}$

Розв'язок векторного рівняння (2.15) будується у вигляді

$$\vec{\mathbf{y}}(z) = \mathbf{Y}_{-}(z) \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix}$$

де константи C_i, $i = 0, 1$ знаходять, задовольняючи граничні умови (2.14). Таким чином, отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{2N^2}{\Delta_1} \left[\Delta_1\Delta_2 - N^2 - \frac{p^2}{2} \right] C_0 + p^2 C_1 = 0 \\ p^2 C_0 + 2\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{\Delta_2} \left[\Delta_1\Delta_2 - N^2 - \frac{p^2}{2} \right] C_1 = -\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{2p^2}{Ga} \sin\alpha \cdot P_p \end{cases}$$

після її розв'язання були знайдені вирази для трансформантів

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta p}(z) &= \frac{\sin\alpha}{Ga} \cdot P_p \frac{\Delta_2}{\widetilde{\Delta}} \left[-2N^2 e^{-\Delta_1 z} + (2N^2 + p^2) e^{-\Delta_2 z} \right] \\ Z_{\alpha\beta p}(z) &= \frac{\sin\alpha}{Ga} \cdot P_p \frac{N^2}{\widetilde{\Delta}} \left[-2\Delta_1\Delta_2 e^{-\Delta_1 z} + (2N^2 + p^2) e^{-\Delta_2 z} \right] \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\widetilde{\Delta} = 4N^4 + 4N^2 p^2 + p^4 - 4N^2 \Delta_1 \Delta_2 \tag{2.18}$$

На основі формул (2.9), (2.12), знайдені трансформанти решти переміщень

$$u_{\alpha\beta p}(z) = -\frac{\alpha}{N^2} Z_{\alpha\beta p}(z),\, v_{\alpha\beta p}(z) = \frac{i\beta}{N^2} Z_{\alpha\beta p}(z) \tag{2.19}$$

Таким чином, було отримано точне рішення поставленої векторної задачі (2.13) (2.14) у просторі трансформант.

2.3 Побудова оригіналів розв'язків.

Після застосування обернених інтегральних перетворень до розв'язку (2.17) було отримано вихідне вертикальне переміщення

$$W(x,y,z,t) = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{Ga}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\Delta_2}{\widetilde{\Delta}}P_p\left[-2N^2 e^{-\Delta_1 z} + \right.$$
$$\left. +(2N^2+p^2)e^{-\Delta_2 z}\right]\sin\alpha\, e^{i\beta y}\sin\alpha x\, e^{pt}dp\, d\beta\, d\alpha$$

$l = (\lambda - i\infty, \lambda + i\infty)$

Використовуючи парність інтегралу та застосовуючи формулу Ейлера, переміщення переписується у форму

$$W(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{Ga}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}P_p\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta_2}{\widetilde{\Delta}}\left[-2N^2 e^{-\Delta_1\cdot z} + \right.$$
$$\left. +(2N^2+p^2)e^{-\Delta_2\cdot z}\right]e^{i\beta y}\left[e^{-i(x-1)\alpha} - e^{-i(x+1)\alpha}\right]e^{pt}dp\, d\beta\, d\alpha$$

Для того, щоб позбутися подвійного інтегралу за параметрами перетворень Фур'є, було використано відношення, що з'єднує перетворення Фур'є і Ганкеля [10]

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\chi_i^2}\right)e^{-i\alpha x - i\beta y}d\alpha d\beta = \int\limits_{0}^{\infty}sF(\sqrt{s^2+\chi_i^2})\times$$
$$\times J_0(s\sqrt{x^2+y^2})ds$$

де $J_0(s)$ - функкція Бесселя, $\chi_1 = p$, $\chi_2 = \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}p$. Після спрощення формула переміщення приймає форму

$$W(x,y,z,t) = \frac{1}{\pi G a}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l} P_p \int\limits_{0}^{\infty} \frac{F(s)}{\Delta_s}\cdot s\left[J_0(s\sqrt{(x-1)^2+y^2})-\right.$$

$$\left.-J_0(s\sqrt{(x+1)^2+y^2})\right]e^{pt}ds\,dp$$

$$F(s) = \sqrt{s^2+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2}\cdot\left[-4s^2e^{-\sqrt{s^2+p^2}}+(2s^2+p^2)e^{-\sqrt{s^2+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2}}\right]$$

$$\Delta_s = 4s^4+4s^2p^2+p^4-4s^2\sqrt{s^2+p^2}\sqrt{s^2+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2}$$

Використовуючи парність функції Бесселя $J_0(s)$, продовжимо інтегрування непарним чином до інтервалу $(-\infty, 0)$

$$W(x,y,z,t) = \frac{1}{\pi G a}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l} P_p \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s)}{\Delta_s}\cdot s\left[J_0(s\sqrt{(x-1)^2+y^2})-\right.$$

$$\left.-J_0(s\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right]e^{pt}ds\,dp$$

Відповідно до отриманого розв'язку можна знайти переміщення від розподіленого по прямокутній площі навантаження

$$W^{AB}(x,y,z,t) = \frac{1}{\pi G a}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{A}\int\limits_{-B}^{B}\int\limits_{l} P_p \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s)}{\Delta_s}\cdot s\left[J_0(s\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})-\right.$$

$$\left.-J_0(s\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}\right]e^{pt}ds\,dp\,da\,db \quad (2.20)$$

Формула була записана у вихідній системі координат.

2.4 Випадок усталених коливань.

Припустимо, що навантаження, прикладене до площі $0 < x < A$; $-B < y < B$ над площиною XOY змінюється відповідно до гармонічного закону $P(t) = e^{i\omega t}$ і $p(x,y) = P$, де P — постійна інтенсивність навантаження, ω—

це природна частота коливань. У цьому випадку, підставляючи до побудованого розв'язку (2.20) $p = i\omega$, переміщення записується у вигляді

$$W^{AB}(x,y,z;\omega) = \frac{P}{\pi G a}\int\limits_0^A\int\limits_{-B}^{B}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F(s;\omega)}{\Delta_{s\omega}}\cdot s\left[J_0(s\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})-\right.$$

$$\left.-J_0(s\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2})\right]ds\,da\,db \quad (2.21)$$

$$F(s;\omega) = \delta_2\left[-2s^2e^{-\delta_1 z} + (2s^2-\omega^2)e^{-\delta_2 z}\right]$$

$$\Delta_{s\omega} = 4s^4 - 4s^2\omega^2 + \omega^4 - 4s^2\delta_1\delta_2 = (2s^2-\omega^2)^2 - 4s^2\delta_1\delta_2. \quad (2.22)$$

$$\delta_1 = \sqrt{s^2-\omega^2},\ \delta_2 = \sqrt{s^2 - \tfrac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2} \quad (2.23)$$

Оскільки вираз (2.23) включає багатозначні функції [2], вони повинні бути виправлені. А після зрізів, використовуючи методи інтегрування контуру, обчислюється переміщення. Необхідно, щоб із завантаженого прямокутника на грані чверті простору, де застосовується навантаження, енергія виносилася до нескінченності кожним із двох типів можливих хвиль. Ці вимоги дозволяють виправити багатозначні функції $\sqrt{s^2-\omega^2}$ и $\sqrt{s^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2}$ [2, 7]

$$\begin{aligned}&\text{when } |s| > \omega;\ |s| > \tfrac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega:\ \delta_1 = \sqrt{s^2-\omega^2};\ \delta_2 = \sqrt{s^2-\tfrac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2}\\ &\text{when } |s| < \omega;\ |s| < \tfrac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega:\ \delta_1 = -i\sqrt{\omega^2-s^2};\ \delta_2 = -i\sqrt{\tfrac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2-s^2}\end{aligned} \quad (2.24)$$

Було введено загасання в середовище. Потік енергії повинен бути спрямований убік від місця, де прикладено навантаження. Корінь рівняння (2.22), [2], - це число $s = \pm k_R$ — число хвилі, пов'язане зі швидкістю поширення хвилі Релея. Знаменник має інших коренів для такої фіксації δ_1 і δ_2 немає. Об'їжджаючи точки гілки у відповідних циклах, вибираючи δ_1 і δ_2 на відповідних ділянках циклу, щоб відповідати вимогам (2.24). Також, беручи до уваги залишок у корені Релея, отримується рішення для площини $z = 0$

$$\frac{G}{P}W^{AB}(x,y,0;\omega) = -\frac{2i\omega^2\sqrt{k_R^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2}}{F'(k_R)}J^{A,B}_{k_R,1}(x,y) +$$
$$+\frac{2i}{\pi}\omega^2\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}\omega}\frac{s\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2 - s^2}}{\left(2s^2-\omega^2\right)^2 + 4s^2\sqrt{\omega^2-s^2}\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2 - s^2}}J^{A,B}_{s,1}(x,y)ds +$$
$$+\frac{8i}{\pi}\omega^2\int\limits_{\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}\omega}^{\omega}\frac{s^2\left(s^2-\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2\right)\sqrt{\omega^2-s^2}}{\left(2s^2-\omega^2\right)^4 + 16s^4\left(s^2-\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2\right)\left(\omega^2-s^2\right)}J^{A,B}_{s,1}(x,y)ds \quad (2.25)$$

$$\text{Де } J^{A,B}_{s,1}(x,y) = \int\limits_0^A\int\limits_{-B}^B\left[J_0\left(s\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right) - \right.$$
$$\left. -J_0\left(s\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}\right)\right]da\,db \quad (2.26)$$

$$F'(s) = 8s\left(2s^2-\omega^2\right) - \frac{4s^3\sqrt{s^2-w^2}}{\sqrt{s^2-\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2}} - \frac{12s^3-8s\omega}{\sqrt{s^2-\omega^2}}$$

$k_R = \frac{7-\kappa}{6.84-1.12\kappa}\omega$, де була використана приблизна формула з [2].

Далі формула (2.25) переписується з точки зору хвильових чисел

$$k_2 = \frac{\omega}{c_2},\, k_1 = \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}\omega = \frac{\omega}{c_1}$$

c_1 - поздовжня швидкість хвилі; c_2 - швидкість зсувної хвилі. Значення інтегралу в (2.21) $\frac{F(s;\omega)\cdot s}{\Delta_{s\omega}}$ збігається зі значенням у задачі Лемба [2]. Різниця з роботою [7] полягає у вигляді функції $J^{A,B}_{s,1}(x,y)$. Таким чином, за припущенням (2.11), що функції $Z_\beta(0,z)$ and $\tilde{Z}_\beta(0,z)$ дорівнюють нулю, рішення виявилося практично ідентичним вирішенню задачі Лемба.

2.5 Зміщення для великих частот коливань.

Для великих значень частоти ω, використовується асимптотичне подання

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \ldots \quad x^2 \leq 1$$

і на основі формул (2.21) – (2.23), була отримана розрахункова формула переміщення у вигляді

$$\frac{G}{P}W^{AB}(x,y,0;\omega) = -\frac{i}{\pi}\int\limits_0^\infty F(s;\omega)J_{s,1}^{A,B}(x,y)ds, \tag{2.27}$$

де $F(s;\omega) =$

$$\frac{\omega^3 s - \frac{1}{2}\kappa_0\omega s^3 - \frac{1}{8}\kappa_0^2\frac{s^5}{\omega} - \frac{1}{16}\kappa_0^3\frac{s^7}{\omega^3} - \frac{5}{128}\kappa_0^4\frac{s^9}{\omega^5}}{4s^4\left(\sqrt{\kappa_0} - \frac{\kappa}{\kappa-1}\right) + \omega^4\sqrt{\kappa_0} + 4s^2\omega^2\left(\sqrt{\kappa_0} - 1\right) - 4s^2\left\{\frac{s^4}{\omega^2}\kappa_1 + \frac{s^6}{\omega^4}\kappa_2 + \frac{s^8}{\omega^6}\kappa_3\right\}}$$

$$\kappa_0 = \frac{\kappa+1}{\kappa-1},\ \kappa_1 = \frac{1}{8}\kappa_0^2 + \frac{1}{4}\kappa_0,\ \kappa_2 = \frac{1}{16}\kappa_0^2 + \frac{1}{16}\kappa_0,\ \kappa_3 = \frac{1}{64}\kappa_0^2 + \frac{1}{32}\kappa_0$$

2.6 Перетворення інтеграла $J_{s,1}^{A,B}(x,y)$.

За схемою [7] розглянемо інтеграл $J_{s,1}^{A,B}(x,y)$. Використання інтегрального подання для функції Бесселя [11]

$$J_0(s\sqrt{(x\mp a)^2 + (y-b)^2}) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left[s(x\mp a)\cos\psi\right]\cdot\cos\left[s(y-b)\sin\psi\right]d\psi$$

який слід підставити у формулу (2.26). Після зміни порядку інтегрування та обчислення інтегралів, як повторюється, процедура була детально описана в [1], формула (2.26) була переписана у форму

$$J_{s,1}^{A,B}(x,y) = \frac{8AB}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} S_s^{A,B}(\psi)\sin\left[sx\cos\psi\right]\cdot\cos\left[sy\sin\psi\right]d\psi, \tag{2.28}$$

$$\text{де } S_s^{A,B}(\psi) = \frac{\sin[sB\sin\psi]}{sB\sin\psi}\cdot\frac{1-\cos[sA\cos\psi]}{sA\cos\psi}$$

функція $S_s^{A,B}(\psi)$ нескінченно диференційована щодо ψ, а також парна, отже, шлях інтеграції можна прийняти рівним $[-\pi/2, \pi/2]$. Подальша заміна змінних $\sin\psi = \tau$ дозволяє переписати (2.28) як

$$J_{s,1}^{A,B}(x,y) = \frac{4AB}{\pi}\int_{-1}^{1} F_{s,\tau}^{A,B}(x,y)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \tag{2.29}$$

$$\text{де } F_{s,\tau}^{A,B}(x,y) = \frac{\sin[sB\tau]}{sB\tau}\cdot\frac{1-\cos\left[sA\sqrt{1-\tau^2}\right]}{sA\sqrt{1-\tau^2}}\cdot\sin\left[sx\sqrt{1-\tau^2}\right]\cdot\cos[sy\tau]$$

Для переміщення $V^{AB}(x,y,z;\omega)$ потрібно підставити:

$$F_{s,\tau}^{A,B}(x,y) = \frac{\sin[sB\tau]}{B}\cdot\frac{1-\cos\left[sA\sqrt{1-\tau^2}\right]}{sA\sqrt{1-\tau^2}}\cdot\sin\left[sx\sqrt{1-\tau^2}\right]\cdot\sin[sy\tau]$$

Для переміщення $U^{AB}(x,y,z;\omega)$ потрібно підставити:

$$F_{s,\tau}^{A,B}(x,y) = \frac{\sin[sB\tau]}{sB\tau}\cdot\frac{1-\cos\left[sA\sqrt{1-\tau^2}\right]}{A}\cdot\cos\left[sx\sqrt{1-\tau^2}\right]\cdot\cos[sy\tau]$$

Квадратурна формула найвищого ступеня точності [4] була застосована до інтеграла (2.29)

$$J_{s,1}^{A,B}(x,y) = \frac{4AB}{N}\sum_{i=1}^{N} F_{s,\tau_i}^{A,B}(x,y) \tag{2.30}$$

де $\tau_i = \cos\frac{2i-1}{2N}\pi$, $i = \overline{1,N}$ - нулі полінома Чебишева 1-го роду.

$$F_{s,\tau_i}^{A,B}(x,y) = \frac{\sin[sB\tau_i]}{sB\tau_i}\cdot\frac{1-\cos\left[sA\sqrt{1-\tau_i^2}\right]}{sA\sqrt{1-\tau_i^2}}\cdot\sin\left[sx\sqrt{1-\tau_i^2}\right]\cdot\cos[sy\tau_i] \tag{2.31}$$

Для переміщення $V^{AB}(x,y,z;\omega)$ потрібно підставити:

$$F_{s,\tau_i}^{A,B}(x,y) = \frac{\sin[sB\tau_i]}{B}\cdot\frac{1-\cos\left[sA\sqrt{1-\tau_i^2}\right]}{sA\sqrt{1-\tau_i^2}}\cdot\sin\left[sx\sqrt{1-\tau_i^2}\right]\cdot\sin[sy\tau_i]$$

Для переміщення $U^{AB}(x,y,z;\omega)$ потрібно підставити:

$$F^{A,B}_{s,\tau_i}(x,y) = \frac{\sin\left[sB\tau_i\right]}{sB\tau_i}\cdot\frac{1-\cos\left[sA\sqrt{1-\tau_i^2}\right]}{A}\cdot\cos\left[sx\sqrt{1-\tau_i^2}\right]\cdot\cos\left[sy\tau_i\right]$$

Підставивши вирази у формулу переміщення (2.25) та (2.27), буде побудований кінцевий вираз для $W^{AB}(x,y,z;\omega)$, $V^{AB}(x,y,z;\omega)$ або $U^{AB}(x,y,z;\omega)$

$$\begin{aligned}\frac{G}{P}W^{AB}(x,y,0;\omega) = \frac{4AB}{N}\Bigg[&-\frac{2i\omega^2\sqrt{k_R^2-\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2}}{F'(k_R)}\sum_{i=1}^{N}F^{A,B}_{k_R,\tau_i}(x,y)+\\ &+\frac{2i}{\pi}\omega^2\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}\omega}\frac{s\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2-s^2}}{\left(2s^2-\omega^2\right)^2+4s^2\sqrt{\omega^2-s^2}\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2-s^2}}F^{A,B}_{s,\tau_i}(x,y)ds+\\ &+\frac{8i}{\pi}\omega^2\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}\omega}^{\omega}\frac{s^2\left(s^2-\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2\right)\sqrt{\omega^2-s^2}}{\left(2s^2-\omega^2\right)^4+16s^4\left(s^2-\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2\right)\left(\omega^2-s^2\right)}F^{A,B}_{s,\tau_i}(x,y)ds\Bigg]\end{aligned} \tag{2.32}$$

де $F'(s)$ визначено в (2.26), а $F^{A,B}_{s,\tau_i}(x,y)$ - у (2.31). Для великих значень частоти ω формула приймає вигляд

$$\frac{G}{P}W^{AB}(x,y,0;\omega) = -\frac{4ABi}{N\pi}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^{\infty}F(s;\omega)F^{A,B}_{s,\tau_i}(x,y)ds, \tag{2.33}$$

де функція $F(s;\omega)$ визначена в (2.27)

Таким чином, формула була спрощена для обчислення одиничних інтегралів неперервних функцій, що не представляє труднощів, якщо цікавлять коливання в ближній зоні.

2.7 Вирази для зміщення у далекому полі.

Розрахунок інтегралів у (2.32), (2.33) для великих значень x і y важко через наявність коливальної функції в інтегралі. Щоб усунути цю складність для великих значень $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, бажано отримати асимптотичні вирази для аналізу дальнього поля. В інтегралі (2.28) зміна змінних $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $\lambda = tr$ зроблено

$$J_{s,1}^{A,B}(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{4AB}{\pi}\operatorname{Im}\left\{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} S_s^{A,B}(\psi)e^{i\lambda\cos(\phi-\psi)}d\psi + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} S_s^{A,B}(\psi)e^{i\lambda\cos(\phi+\psi)}d\psi \right\} 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.34)$$

Для аналізу асимптотики був використаний метод стаціонарної фази [3, 7], де роль функції для аналізу асимптотики, $f(\psi)$ відіграє $\cos(\phi \mp \psi)$, а функція $\phi(\psi)$ є нескінченно диференційованою функцією $S_s^{A,B}(\psi)$. Перший інтеграл має нерухому точку а другий, отже, не може нехтувати його внеском в асимптотику (2.34). Перший інтеграл у (2.34) може бути представлений як сума

$$J_{s,1}^{A,B}(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{4AB}{\pi}\operatorname{Im}\left(\int\limits_0^{\phi} + \int\limits_{\phi}^{\frac{\pi}{2}}\right) S_s^{A,B}(\psi)e^{i\lambda\cos(\phi-\psi)}d\psi.$$

де в першому інтегралі нерухома точка знаходиться в кінці шляху інтегрування $f'(\psi) = \frac{\partial}{\partial\psi}\cos(\psi - \phi) = 0$ для $\psi = \phi$ та $f''(\psi) = -1 < 0$, а у другому інтегралі — на початку шляху інтегрування. Після застосування теорем 2 та 3 [3], формула (2.34) була переписана

$$J_{s,1}^{A,B}(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{2AB}{\sqrt{\pi s r}}\left[\sin sr - \cos sr\right] \cdot S_s^{A,B}(\phi) + O\left(\frac{1}{r}\right) \; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.35)$$

$$S_s^{A,B}(\phi) = \frac{\sin\left[sB\sin\psi\right]}{sB\sin\psi} \cdot \frac{1 - \cos\left[sA\cos\psi\right]}{sA\cos\psi}$$

Підстановка (2.35) у формули (2.25) та (2.27) дає можливість визначити переміщення $W(x, y, 0; \omega)$ у далеке поле $r \to \infty$. Оскільки в роботі [2, 7] лише член Релея вносить основний внесок в асимптотичну поведінку переміщення в дальньому полі, найвищі значення досягаються з кути $\phi = 0$ та $\phi = \frac{\pi}{2}$

$$J^{A,B}_{k_R,1}(r\cos\phi, r\sin\phi)\Big|_{\phi=0;\phi=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2k_R}}\,(\sin k_R r - \cos k_R r) \times \\ \times \left[-\frac{\cos k_R A}{k_R A};\ \frac{\sin k_R B}{k_R B}\right] + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.36)$$

2.8 Результати чисельних розрахунків.

Для числової реалізації зміщення слід помножити на $e^{i\omega t}$, а дійсну або уявну частину слід відокремити. Графіки наведені для функції $\frac{G}{\rho}\operatorname{Im} W^{AB}(x, y, 0; \omega)$ з (2.32) для значень коефіцієнта Пуассона $\mu = \frac{1}{3}$ та $\mu = \frac{1}{4}$ для частот $\omega = 0.3;\ 1;\ 3$. Для великих значень частот була використана формула (2.33). Коди програм які використовувались для побудови графіків наведені відповідно у додатку А та додатку В для великих частот власних коливань. Розглянуто три форми ділянки розподілу навантаження по забою $z = 0$

1) $B = A/2$ - навантаження розподіляється по квадрату;
2) $B = A$ - навантаження розподіляється по прямокутнику, витягнутому вздовж осі Oy;
3) $B = A/4$ - навантаження розподіляється по прямокутнику, витягнутому вздовж осі Ox.

Для аналізу віддаленої зони $r \to \infty$, використовувались асимптотичні рівності (2.35), (2.36), замінені на вирази переміщення (2.25), (2.27). Код програми за допомогою якої були побудовані графіки для віддалені зони наведено у додатку С.

Порівняння графіків вертикальних переміщень для однієї і тієї ж частоти $\omega = 0.3$ та коефіцієнта Пуассона $\mu = 1/3$ при різних ділянках розподілу навантаження (Рис. 2.15, Рис. 2.16, Рис. 2.17), видно, що максимальні абсолютні значення, що дорівнюють 2.5, досягнуті за формою перерізу $B = A$, який відповідає прямокутнику, витягнутому вздовж осі у. У той же час переміщення має максимальну амплітуду, яка становить приблизно 2 одиниць. У випадку, коли навантаження розподіляється по прямокутнику, витягнутому вздовж осі x, переміщення має мінімальну амплітуду 0.6, а його максимальне переміщення становить близько 0.7 одиниць.

У випадку, коли навантаження розподіляється по квадрату $B = A/2$, із збільшенням частоти коливань (Рис. 2.15, Рис. 2.18, Рис. 2.7), амплітуда переміщення зростає. Крім того, у випадку, коли частота коливань дорівнює 3, спостерігаються негативні переміщення, що означає підняття грані чверті простору. Також зростання амплітуди зі збільшенням частоти видно з Рис. 2.16 та Рис. 2.19, що відповідає випадку $B = A$, коли амплітуда збільшилась із 2 одиниці ($\omega = 0.3$) до 4 одиниць ($\omega = 1$). Існує також ефект підняття краю чверті простору через наявність зон негативних амплітуд (Рис. 2.19).

Порівнюючи значення вертикальних переміщень для різних значень коефіцієнта Пуассона (Рис. 2.19, Рис. 2.20), можна побачити, що поведінка графіків аналогічно, але для значень $\mu = 1/3$ амплітуда коливань більше.

Графіки вертикальних переміщень у віддаленій зоні прикладання навантаження залежно від частоти коливань з коефіцієнтом Пуассона, рівним 1/3, та перерізу навантаження $B = A$, представлені на Рис. 8. Як відстань від ділянки розподілу навантаження збільшується, коливання занепадають. Подібно до результатів для зони ближнього навантаження, максимальні переміщення відбуваються у разі форми ділянки навантаження $B = A$. Амплітуда більша для великих значень частот коливань. При зменшенні частоти коливань амплітуди практично дорівнюють нулю.

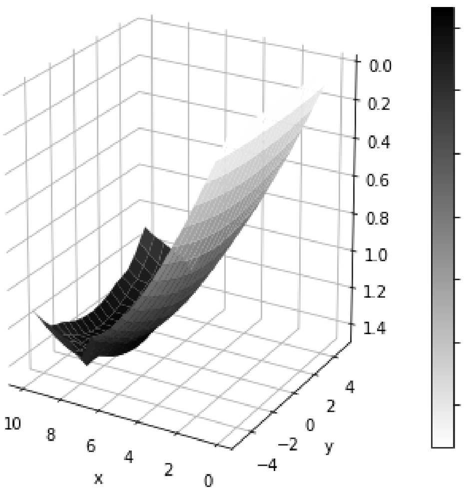

Рис. 2.1. $W : B = A/2, \omega = 0.3, \mu = 1/3$

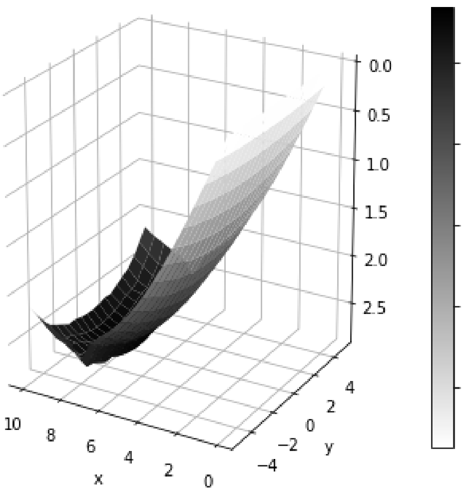

Рис. 2.2. $W : B = A, \omega = 0.3, \mu = 1/3$

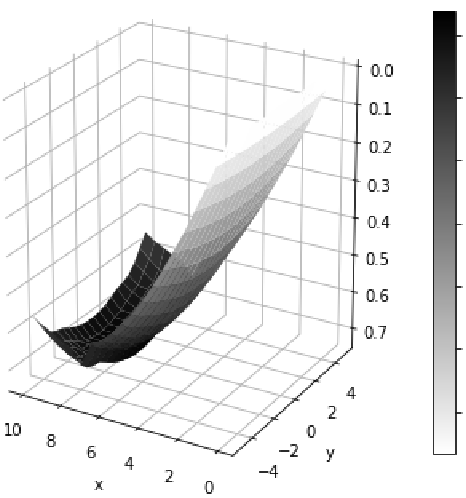

Рис. 2.3. $W : B = A/4, \omega = 0.3, \mu = 1/3$

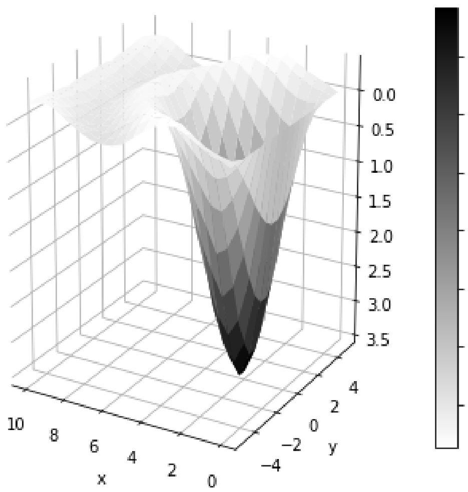

Рис. 2.4. $W : B = A/2, \omega = 1, \mu = 1/3$

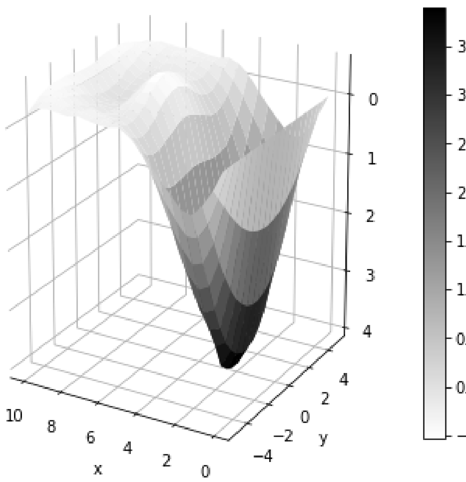

Рис. 2.5. $W : B = A, \omega = 1, \mu = 1/3$

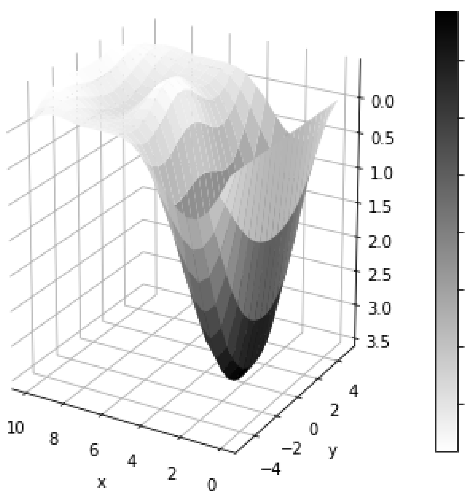

Рис. 2.6. $W : B = A, \omega = 1, \mu = 1/4$

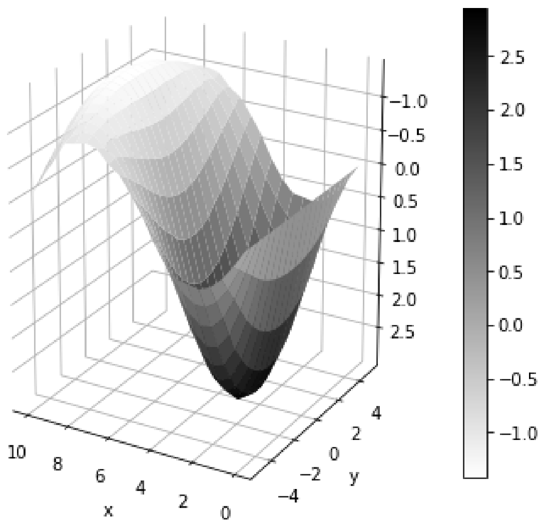

Рис. 2.7. $W : B = A/2$, $\omega = 3$, $\mu = 1/3$

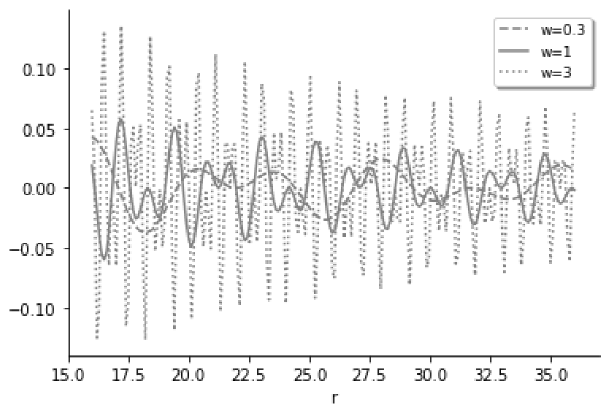

Рис. 2.8. $W : B = A$, $\mu = 1/3$.

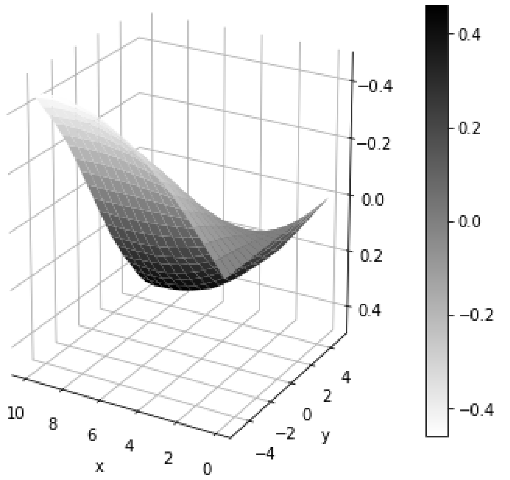

Рис. 2.9. $V : B = A/2, \ \omega = 0.3, \mu = 1/3$

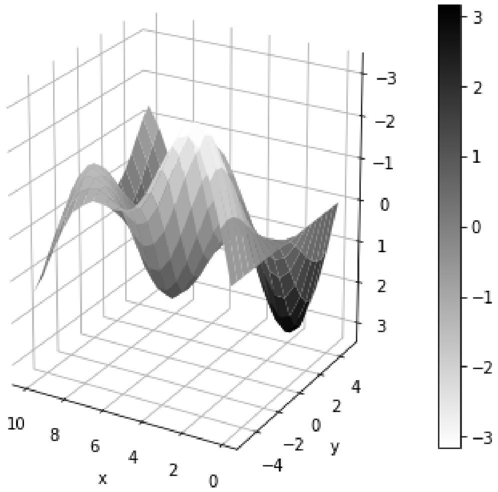

Рис. 2.12. $V : B = A, \omega = 1, \mu = 1/3$

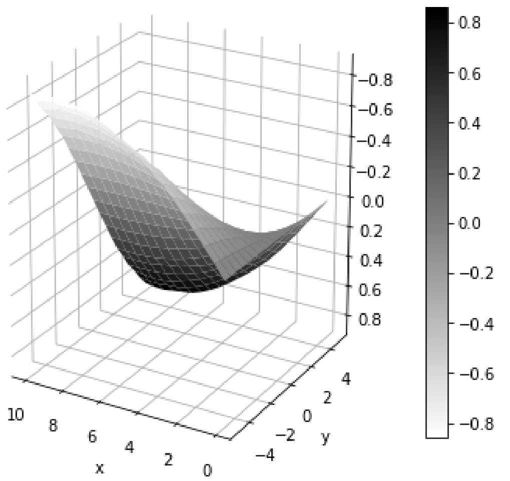

Рис. 2.10. $V : B = A, \ \omega = 0.3, \mu = 1/3$

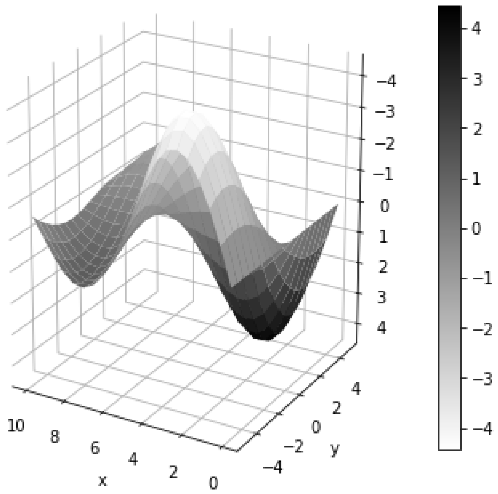

Рис. 2.13. $V : B = A, \ \omega = 0.7, \mu = 1/3$

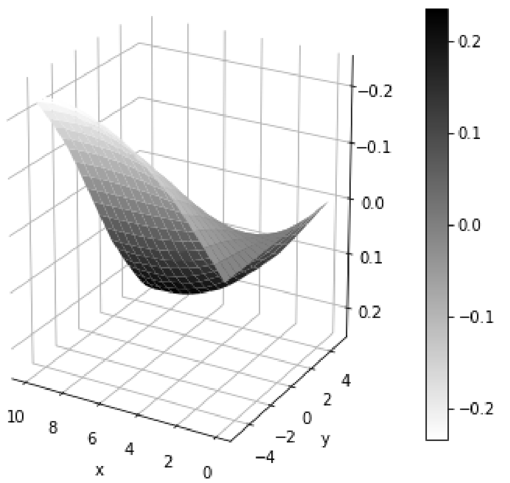

Рис. 2.11. $V : B = A/4, \ \omega = 0.3, \mu = 1/3$

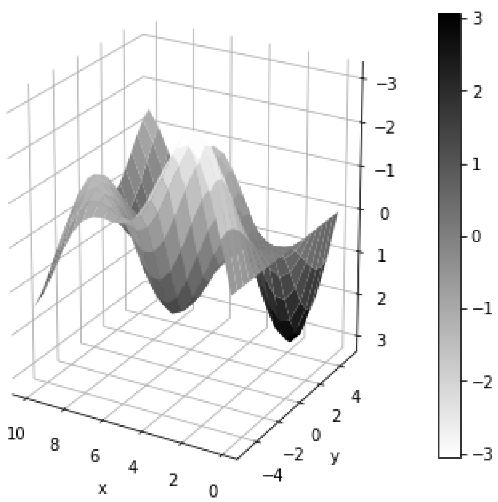

Рис. 2.14. $V : B = A, \omega = 1, \mu = 1/4$

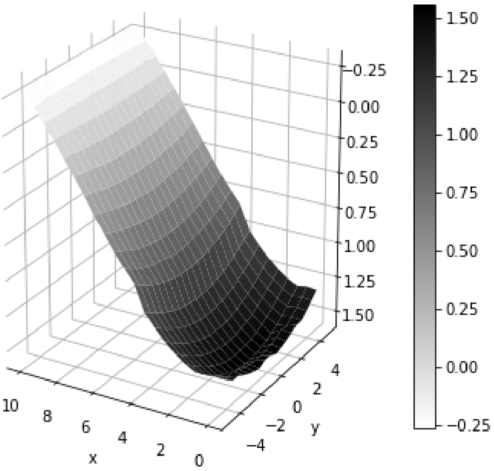

Рис. 2.15. $U : B = A/2, \ \omega = 0.3, \mu = 1/3$

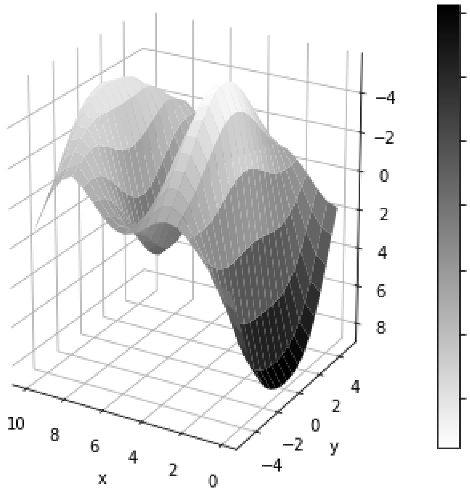

Рис. 2.18. $U : B = A, \omega = 1, \mu = 1/3$

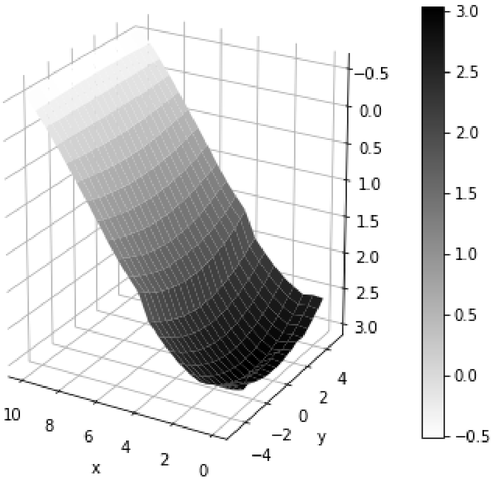

Рис. 2.16. $U : B = A, \ \omega = 0.3, \mu = 1/3$

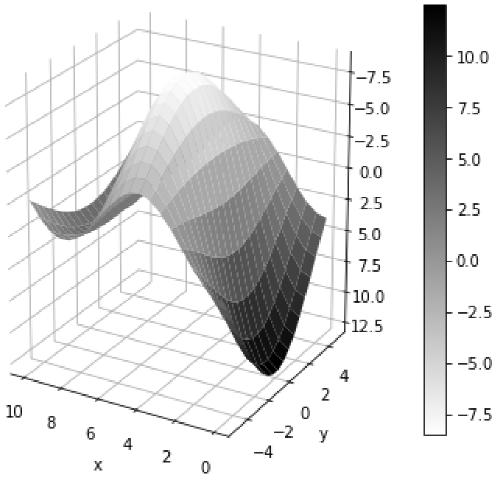

Рис. 2.19. $U : B = A, \ \omega = 0.7, \mu = 1/3$

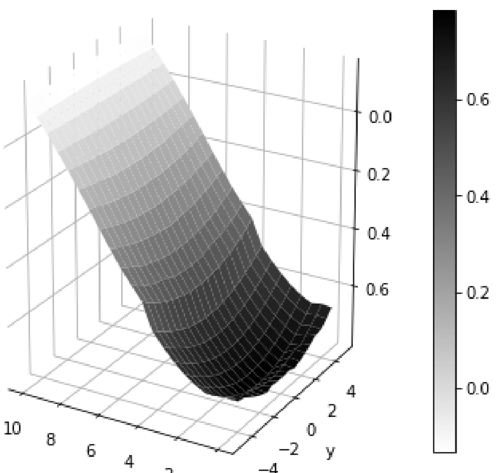

Рис. 2.17. $U : B = A/4, \ \omega = 0.3, \mu = 1/3$

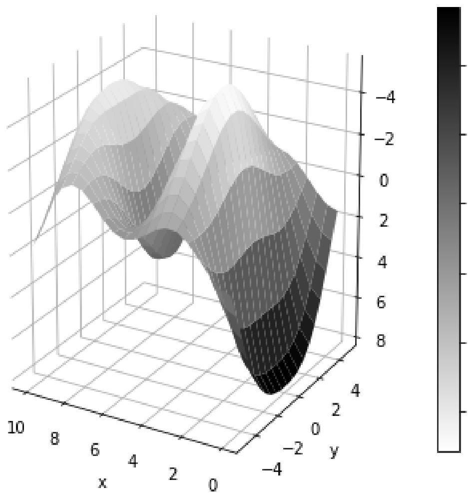

Рис. 2.20. $U : B = A, \omega = 1, \mu = 1/4$

ВИСНОВКИ

Знайдено розв'язок динамічної задачі теорії пружності для півнескінечного шару, коли одна грань жорстко закріплена, по торцю задано умови гладкого контакту, а інша знаходиться під впливом нормального динамічного стискаючого навантаження, що застосовується в початковий момент часу і розподіляється за прямокутним перерізом. Застосування методу інтегрального перетворення безпосередньо до рівнянь руху зводило початкову задачу до одновимірної векторної задачі. Остання була розв'язана за допомогою матричного диференціального числення. Запропонований підхід дає можливість отримати точний розв'язок задачі в просторі перетворення.

Також побудувано та вивчено три переміщення, що виникають в чверті простору. Використовуючи запропонований підхід, розглядається подібна динамічна задача для пружної плити, коли на усіх гранях встановлюються різні граничні умови.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вайсфельд Н. Д. Мішані задачі теорії пружності для півнескінченного шару / Н. Д. Вайсфельд, Г. О. Фесенко — Одеса: Астропринт, 2019. — 120 с.
2. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах. / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко — Киев: Наукова думка, 1981. — 284с.
3. Копсон Э. Т. Асимптотические разложения / Э. Т. Копсон. — М.: Мир, 1966. — 159 с.
4. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. — М.: Наука, 1967. — 500 с.
5. Попов Г. Я. Точное решение смешанной задачи теории упругости для четверти пространства / Г. Я. Попов // Известия РАН. Мех. твердого тела. — 2003. — №6. — С. 31–39.
6. Попов Г. Я. О приведении уравнений движения упругой среды к одному независимому и к двум совместно решаемым уранениям / Г. Я. Попов // ДАН. — 2002. — 384, №2. — С. 193–196.
7. Попов Г. Я. Об одном новом подходе к решению задачи Лэмба / Г. Я. Попов, Н. Д. Вайсфельд // ДАН.— 2010.— Т. 432, №3.— С. 337–342.
8. Попов Г. Я. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г. Я. Попов, С. А. Абдыманапов, В. В. Ефимов. — Алматы: Рауан, 1999. — 133 с.
9. Поручников В. Б. Методы динамической теории упругости. / В. Б. Поручников. — М.: Наука, 1986. — 328с.
10. Снеддон, И. Н. Преобразование Фурье / И. Н. Снеддон. — М.: Изд-во иностр. лит., 1955. — 668 с.
11. Сонин Н. Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. — Гостехтеориздат, 1954.
12. Уфлянд Я. С. Вторая основная задача теории упругости для клина // Тр. Ленинград. политехн. ин–та. — 1960. — №210. — С. 87–94.
13. Уфлянд Я. С. Некоторые пространственные задачи теории упругости для клина // Механика сплошной среды и родственные проблемы

анализа. — М.: Наука.— 1972.— С. 549–553.

14. Alexandrov A. M., Pozharskii D. A. Three-dimensional contact problems. — Springer Science & Business Media, 2001. — T. 93.
15. Fesenko A. A., Bondarenko K. S. The dynamical problem on acting concentrated load on the elastic quarter space // Researches in Mathematics and Mechanics. — 2020. — V. 25, Is. 2 (36). – P. 7–26.
16. Hetényi M. A General Solution for the Elastic Quarter Space. / M. Hetényi // ASME J. Appl. Mech. — 1970. — T. 37 — №1. — C. 70–76.
17. Rabinovich, A. S. Plane contact problem on the pressure of a stamp with a rectangular base on a rough elastic half-space. / Rabinovich, A. S. // Izv. Akad. Nauk. ArmSSR, Mekhanika. — 1974. — Vol. 27(4).
18. Schepers W., Savidis S., Kausel E. Dynamic stresses in an elastic half-space //Soil Dynamics and Earthquake Engineering. — 2010. — T. 30. — №. 9. — C. 833-843.