

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Дипломна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

на тему: **«Вісісиметрична задача кручення складеного
циліндру з міжфазною круговою тріщиною»**

«Axisymmetric torsion problem of a composite cylinder with interfacial circular crack»

Виконала: студентка денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Марокко Алла Владиславівна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю. С. _____

Рецензент: докт. фіз.-мат. наук, проф. Вайсфельд Н. Д.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ 2021 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від _____ 2021 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

Одеса — 2021 р.

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Основна частина	4
1.1 Постановка задачі	4
1.2 Зведення задачі до розривної одновимірної за допомогою інтегрального перетворення	8
1.3 Розв’язок одновимірної розривної задачі	9
1.4 Знаходження дотичного напруження	17
1.5 Отримання інтегрального рівняння та його рішення методом ортогональних багаточленів	19
1.6 Знаходження коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) . .	28
2 Додаток 1	31
2.1 Підбір інтегрального перетворення	31
Висновки	37
Список літератури	38

ВСТУП

Вісесиметричним задачам кручення складеного циліндра присвячено значне число робіт, що зумовлено їх широким застосуванням в інженерній практиці. Традиційний метод рішення задач кручення - це зведення їх до крайових задач відносно функції напруження або функції переміщення. Тож у цій роботі ми використаємо саме зведення відносно функції переміщення. Суть цього підхода в застосуванні інтегрального перетворення до рівняння Ламе та умовам спряженості шарів(в цій задачі передбачається, що між ними має місце ідеальний механічний контакт). Між шарами циліндра знаходиться кругова тріщина. Наявність дефектів у вигляді тріщин послаблює механічні характеристики складених циліндрів. За допомогою інтегрального перетворення Ханкеля задача зводиться до одновимірної розривної крайової задачі. Після її розв'язку отримаємо інтегро-диференціальне рівняння щодо стрибка переміщення під час переходу через тріщину. Це рівняння розв'язується за допомогою метода ортогональних многочленів. Та наприкінці отримаємо вирази для обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень в околі тріщини. Цей підхід дозволяє ефективно знаходити переміщення та напруження в кожному з шарів.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНА ЧАСТИНА

1.1. Постановка задачі

Розглядається пружний круговий циліндр, займаючий в циліндричній системі координат

$$(r, \varphi, z)$$

область

$$0 \leq r \leq R, -\pi \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq z \leq H.$$

Циліндр складається з двох шарів: перший з них розташований в області

$$0 \leq r \leq R, -\pi \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq z \leq d$$

та його матеріал має модуль зсуву

$$G_1,$$

другий -

$$0 \leq r \leq R, -\pi \leq \varphi \leq \pi, d \leq z \leq H$$

та його матеріал має модуль зсуву

$$G_2.$$

Між шарами виконуються умови ідеального механічного контакту, що полягає в рівності переміщень і напружень обох шарів в площині їх сполучення

$$z = d.$$

Між шарами знаходиться кругова тріщина з радіусом

$$a.$$

Нижня основа циліндра

$$z = 0$$

є нерухомо фіксованою, а верхня основа

$$z = H$$

вільна від напружень. До бічної поверхні циліндру

$$r = R$$

прикладене вісесиметричне дотичне навантаження інтенсивністю

$$p(z),$$

що викликає кручення циліндра. Потрібно визначити переміщення та напруження в обох шарах циліндра. (Рис. 1.1)

Задача, що розглядається, є вісесиметричною та всі величини не залежать від кутової координати

$$\varphi.$$

Відмінними від нуля будуть лише кутове переміщення циліндра

$$u_{\varphi}(r, z) = u(r, z)$$

та дотичне напруження в ньому

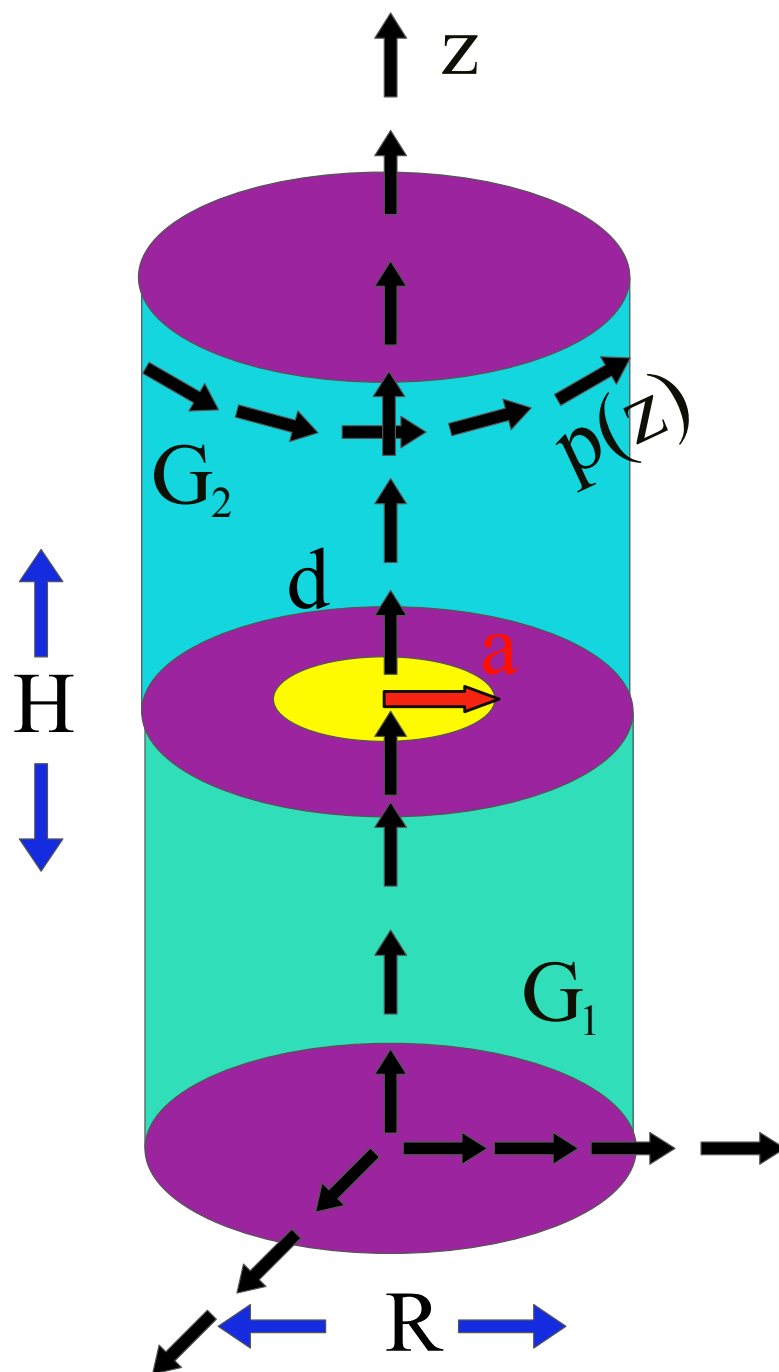
$$\tau_{z\varphi}(r, z) = G \frac{\partial u}{\partial z}$$

та

$$\tau_{r\varphi}(r, z) = G \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} u \right);$$

В цих формулах будемо вважати, що

$$G = G_1$$



, якщо

$$z < d$$

та

$$G = G_2,$$

якщо

$$z > d.$$

Переміщення

$$u(r, z)$$

зобов'язане задовольняти рівнянню Ламе

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, 0 \leq r < R, 0 < z < H. \quad (1.1)$$

Крайові умови на нижній і верхній основах циліндра будуть такими:

$$u|_{z=0} = 0; \tau_{z\varphi}|_{z=H} = G_2 \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=H} = 0,$$

звідки

$$\frac{\partial u}{\partial z}|_{z=H} = 0. \quad (1.2)$$

На боковій поверхні циліндра крайові умови мають вигляд:

$$\tau_{r\varphi}(r, z)|_{r=R} = G \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} u \right) |_{r=R} = \begin{cases} p(z), & d < z < H \\ 0, & 0 < z < d \end{cases} \quad (1.3)$$

Умови сполучення шарів циліндра будуть такими:

$$\langle u \rangle = u(r, d-0) - u(r, d+0) = \begin{cases} \chi(r), & 0 \leq r < a \\ 0, & a \leq r \leq R, \end{cases}$$

де

$\chi(r)$ - невідома функція, яка означає стрибок через береги тріщини,

$$\chi(a) = 0$$

та

$$\tau_{z\varphi}(r, d-0) = \tau_{z\varphi}(r, d+0),$$

тобто

$$G_1 \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=d-0} = G_2 \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=d+0}, 0 \leq r < a \quad (1.4)$$

Математичний вигляд задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, 0 \leq r < R, 0 < z < H \\ u \Big|_{z=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0 \\ \tau_{r\varphi}(r, z) \Big|_{r=R} = \begin{cases} p(z), d < z < H \\ 0, 0 < z < d \end{cases} \\ u(r, d-0) - u(r, d+0) = \begin{cases} \chi(r), 0 \leq r < a \\ 0, a \leq r \leq R, \end{cases} \\ \tau_{z\varphi}(r, d-0) = \tau_{z\varphi}(r, d+0) \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Для зведення сформульованої задачі до одновимірної скористуємося методом інтегральних перетворень.

1.2. Зведення задачі до розривної одновимірної за допомогою інтегрального перетворення

Кінцеве інтегральне перетворення за змінною

$r :$

$$u_k(z) = \int_0^R u(r, z) J_1(\lambda_k r) r dr,$$

де $J_1(\lambda_k r)$ функції Беселя, а λ_k знаходяться з рівняння

$$J_2(\lambda_k R) = 0$$

Формула обернення має вигляд:

$$u(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \frac{J_1(\lambda_k r)}{\|J_1(\lambda_k r)\|^2} = \frac{2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \frac{J_1(\lambda_k r)}{J_1^2(\lambda_k r)}$$

Детальні викладки щодо інтегрального перетворення та зведення задачі знаходяться у Додатку 1.

Таким чином ми отримали одновимірну розривну задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k''(z) - \lambda_k^2 u_k(z) = -\frac{R}{G} p(z) J_1(\lambda_k R), 0 < z < H, z \neq d \\ u_k(0) = 0; u_k'(H) = 0 \\ \langle u_k \rangle = u_k(d-0) - u_k(d+0) = \chi_k, \\ \langle G u_k' \rangle = G_1 u_k'(d-0) - G_2 u_k'(d+0) = 0 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

1.3. Розв'язок одновимірної розривної задачі

Розв'язком розривної крайової задачі (1.6) буде функція

$$u_k(z) = -\frac{R}{G} J_1(\lambda_k R) \int_d^H G_k(z, \xi) p(\xi) d\xi - A_1 G_k(z, d) + A_0 \frac{\partial G_k(z, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=d},$$

де

$$G_k(z, \xi)$$

функція Гріна крайової задачі (1.6), а

$$A_0 \text{ та } A_1$$

невідомі досі постійні, рівні стрибкам функції

$$u_k(z)$$

та її похідної

$$u_k'(z)$$

при переході через точку

$$z = d.$$

Побудуємо функцію Гріна за допомогою фундаментальної функції:

$$\Phi(z, \xi) = -\frac{1}{2\lambda_k} e^{-\lambda_k |z - \xi|}$$

$$G(z, \xi) = \Phi(z, \xi) - \psi_0(z) U_0 [\Phi(z, \xi)] - \psi_1(z) U_1 [\Phi(z, \xi)]$$

Оператори крайових умов:

$$\begin{cases} U_1 [\Phi] = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=H} = \frac{1}{2} e^{-\lambda_k (H - \xi)} \\ U_2 [\Phi] = \Phi \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\lambda_k} e^{-\lambda_k \xi} \end{cases}$$

Фундаментальна базова система рішень має вигляд:

$$\begin{cases} \psi_0 = \frac{ch \lambda_k (H - z)}{ch \lambda_k H} \\ \psi_1 = \frac{sh \lambda_k z}{\lambda_k ch \lambda_k H} \end{cases}$$

Тоді функція Гріна буде дорівнювати:

$$G_k(z, \xi) = -\frac{1}{2\lambda_k} e^{-\lambda_k |z - \xi|} + \frac{1}{2\lambda_k} \frac{ch \lambda_k (H - z)}{ch \lambda_k H} e^{-\lambda_k \xi} - \frac{1}{2\lambda_k} \frac{sh \lambda_k z}{ch \lambda_k H} e^{-\lambda_k (H - \xi)}$$

В цій задачі

$$A_0 = \langle u_k \rangle = \chi_k$$

$$A_1 = \langle u_k' \rangle,$$

яке знайдемо з умови

$$\langle G u_k' \rangle = 0$$

$$u_k(z) = -\frac{R}{G} J_1(\lambda_k R) \int_d^H G_k(z, \xi) p(\xi) d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& + A_1 \frac{1}{2\lambda_k} \left[e^{-\lambda_k|z-d|} - \frac{ch\lambda_k(H-z)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} + \frac{sh\lambda_k z}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right] + \\
& + A_0 \frac{1}{2} \left[\operatorname{sgn}(z-d) \cdot e^{-\lambda_k|z-d|} - \frac{ch\lambda_k(H-z)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} + \frac{sh\lambda_k z}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right] \\
u'_k(z) = & -\frac{R}{G} J_1(\lambda_k R) \int_d^H \left[\frac{1}{2} e^{-\lambda_k|z-\xi|} \cdot \operatorname{sgn}(z-\xi) - \frac{1}{2} \frac{sh\lambda_k(H-z)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k \xi} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \frac{ch\lambda_k z}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-\xi)} \right] \cdot p(\xi) d\xi + A_1 \cdot \frac{1}{2} \left[e^{-\lambda_k|z-d|} \operatorname{sgn}(z-d) + \right. \\
& \left. + \frac{sh\lambda_k(H-z)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} + \frac{ch\lambda_k z}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right] + \\
& + \frac{\lambda_k}{2} \chi_k \left[e^{-\lambda_k|z-d|} + \frac{sh\lambda_k(H-z)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} - \frac{ch\lambda_k z}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle Gu'_k \rangle &= G_1 u'_k(d-0) - G_2 u'_k(d+0) = \\
&= \frac{RG_1}{2G_2} J_1(\lambda_k R) \int_d^H \left[-e^{-\lambda_k|d-\xi|} - \frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k \xi} - \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-\xi)} \right] p(\xi) d\xi + \\
&+ \frac{A_1}{2} G_1 \left[1 + \frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} + \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right] p(\xi) d\xi + \\
&+ \frac{\chi_k}{2} G_1 \lambda_k \left[1 + \frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} - \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right] p(\xi) d\xi + \\
&+ \frac{R}{2} J_1(\lambda_k R) \int_d^H \left[-e^{-\lambda_k|d-\xi|} - \frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k \xi} - \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-\xi)} \right] p(\xi) d\xi - \\
&- \frac{A_1}{2} G_2 \left[1 + \frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} + \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right] - \\
&- \frac{\lambda_k}{2} G_2 \chi_k \left[1 + \frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} - \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned}
Q_k &= \left(1 - \frac{G_2}{G_1} \right) R J_1(\lambda_k R) \int_d^H p(\xi) \cdot \\
&\cdot \left[e^{-\lambda_k|d-\xi|} - \frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k \xi} - \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-\xi)} \right] d\xi
\end{aligned}$$

Звідси:

$$\begin{aligned} A_1 & \left[-(G_1 + G_2) + (G_1 - G_2) \left(\frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} + \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right) \right] = \\ & = Q_k - (G_1 - G_2) \left[1 + \frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} - \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right] \lambda_k \chi_k \end{aligned}$$

Позначимо

$$\Delta_k = -(G_1 + G_2) + (G_1 - G_2) \left(\frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} + \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right)$$

Тоді

$$A_1 = \frac{Q_k}{\Delta_k} - \frac{(G_1 - G_2) \lambda_k}{\Delta_k} \chi_k \left[1 + \frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} - \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right]$$

Таким чином знайдено

$$\begin{aligned} & u_k(z) : \\ & u_k(z) = -\frac{R}{G} J_1(\lambda_k R) \int_d^H G_k(z, \xi) p(\xi) d\xi - \\ & - (G_1 - G_2) \frac{\chi_k}{2\Delta_k} \left[1 + \frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} - \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right] \cdot \\ & \cdot \left[e^{-\lambda_k|z-d|} - \frac{ch\lambda_k(H-z)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} + \frac{sh\lambda_k z}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right] + \\ & + \frac{Q_k}{2\lambda_k \Delta_k} \left[e^{-\lambda_k|z-d|} - \frac{ch\lambda_k(H-z)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} + \frac{sh\lambda_k z}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right] - \\ & - \frac{\chi_k}{2} \left[sgn(z-d) \cdot e^{-\lambda_k|z-d|} - \frac{ch\lambda_k(H-z)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} + \frac{sh\lambda_k z}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right] \end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} F_k(z) & = -\frac{R}{G} J_1(\lambda_k R) \int_d^H G_k(z, \xi) p(\xi) d\xi + \\ & + \frac{Q_k}{2\lambda_k \Delta_k} \left[e^{-\lambda_k|z-d|} - \frac{ch\lambda_k(H-z)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} + \frac{sh\lambda_k z}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right], \end{aligned}$$

залежить від прикладеного навантаження.

$$u_k(z) = F_k(z) - \frac{\chi_k}{2} \left[sgn(z-d) \cdot e^{-\lambda_k|z-d|} - \frac{ch\lambda_k(H-z)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} + \frac{sh\lambda_k z}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} + \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{G_1 - G_2}{\Delta_k} \left(e^{-\lambda_k |z-d|} - \frac{ch\lambda_k(H-z)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} + \frac{sh\lambda_k z}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} + \right. \\
& + \frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k |z-d| - \lambda_k d} - \frac{sh\lambda_k(H-d) \cdot ch\lambda_k(H-z)}{ch^2\lambda_k H} e^{-2\lambda_k d} + \\
& + \frac{sh\lambda_k(H-d) \cdot sh\lambda_k z}{ch^2\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d) - \lambda_k d} - \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k |z-d| - \lambda_k(H-d)} + \\
& \left. + \frac{ch\lambda_k d \cdot ch\lambda_k(H-z)}{ch^2\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d) - \lambda_k d} - \frac{ch\lambda_k d \cdot sh\lambda_k z}{ch^2\lambda_k H} e^{-2\lambda_k(H-d)} \right) \Bigg]
\end{aligned}$$

Треба обернути інтегральне перетворення та підставити $u(r, z)$ в умову в умову відсутності навантажень на берегах тріщини $z = d \pm 0$. Але в це рівняння буде входити похідна $\frac{\partial u}{\partial z}$ та відповідна частина ряду буде розбіжною. Тому слабозбіжну частину треба виділити до диференціювання. Розглянемо:

$$\begin{aligned}
& \frac{ch\lambda_k(H-z)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} + \frac{sh\lambda_k z}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} = \frac{e^{\lambda_k(H-z)} - e^{-\lambda_k(H-z)}}{e^{\lambda_k H} + e^{-\lambda_k H}} e^{-\lambda_k d} + \\
& \frac{e^{\lambda_k z} - e^{-\lambda_k z}}{e^{\lambda_k H} + e^{-\lambda_k H}} e^{-\lambda_k(H-d)} = \text{домножимо чисельник і знаменник на } e^{-\lambda_k H} \\
& \frac{e^{-\lambda_k z} - e^{-\lambda_k(2H-z)}}{1 + e^{-2\lambda_k H}} e^{-\lambda_k d} + \frac{e^{-\lambda_k(H-z)} - e^{-\lambda_k(H+z)}}{1 + e^{-2\lambda_k H}} e^{-\lambda_k(H-d)} = \\
& = \frac{1}{1 + e^{-2\lambda_k H}} \left[e^{-\lambda_k(z+d)} + e^{-\lambda_k(2H+d-z)} + e^{-\lambda_k(2H-d-z)} - e^{-\lambda_k(2H-d+z)} \right]
\end{aligned}$$

спадає експоненційно при всіх z від 0 до H .

$$\begin{aligned}
\Delta_k & = -(G_1 + G_2) + (G_1 - G_2) \left[\frac{e^{\lambda_k(H-d) - \lambda_k H} - e^{-\lambda_k(H-d) - \lambda_k H}}{1 + e^{-2\lambda_k H}} e^{-\lambda_k d} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{e^{-\lambda_k d - \lambda_k H} - e^{-\lambda_k d - \lambda_k H}}{1 + e^{-2\lambda_k H}} e^{-\lambda_k(H-d)} \right] = \\
& = -(G_1 + G_2) + \frac{G_1 - G_2}{1 + e^{-2\lambda_k H}} \left[e^{-2\lambda_k d} - e^{-2\lambda_k H} + e^{-2\lambda_k(H-d)} + e^{-2\lambda_k H} \right] = \\
& = -(G_1 + G_2) + \frac{G_1 - G_2}{1 + e^{-2\lambda_k H}} \left[e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)} \right] \rightarrow -(G_1 + G_2) \text{ при } \lambda_k \rightarrow +\infty \\
& \quad - \frac{ch\lambda_k(H-z)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} + \frac{sh\lambda_k z}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k|z-d|-\lambda_k d} - \frac{sh\lambda_k(H-d) \cdot ch\lambda_k(H-z)}{ch^2\lambda_k H} e^{-2\lambda_k d} + \\
& + \frac{sh\lambda_k(H-d) \cdot sh\lambda_k z}{ch^2\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)-\lambda_k d} - \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k|z-d|-\lambda_k(H-d)} + \\
& + \frac{ch\lambda_k d \cdot ch\lambda_k(H-z)}{ch^2\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)-\lambda_k d} - \frac{ch\lambda_k d \cdot sh\lambda_k z}{ch^2\lambda_k H} e^{-2\lambda_k(H-d)} = \\
& = - \frac{e^{\lambda_k(H-z)-\lambda_k H} + e^{-\lambda_k(H-z)-\lambda_k H}}{1 + e^{-2\lambda_k H}} e^{-\lambda_k d} + \frac{e^{-\lambda_k z - \lambda_k H} - e^{-\lambda_k z - \lambda_k H}}{1 + e^{-2\lambda_k H}} e^{-\lambda_k(H-d)} + \\
& + \frac{e^{\lambda_k(H-d)-\lambda_k H} - e^{-\lambda_k(H-d)-\lambda_k H}}{1 + e^{-2\lambda_k H}} e^{-\lambda_k|z-d|-\lambda_k d} - \\
& - \frac{e^{\lambda_k d - \lambda_k H} - e^{-\lambda_k d - \lambda_k H}}{1 + e^{-2\lambda_k H}} e^{-\lambda_k|z-d|-\lambda_k(H-d)} - \\
& - \frac{sh\lambda_k(H-d+H-z) + sh\lambda_k(H-d-H+z)}{2ch^2\lambda_k H} e^{-2\lambda_k d} + \\
& + \frac{ch\lambda_k(H-d+z) - ch\lambda_k(H-d-z)}{2ch^2\lambda_k H} e^{-\lambda_k H} + \\
& + \frac{ch\lambda_k(d+H-z) - ch\lambda_k(d-H+z)}{2ch^2\lambda_k H} e^{-\lambda_k H} - \\
& - \frac{sh\lambda_k(z+d) + sh\lambda_k(z-d)}{2ch^2\lambda_k H} e^{-2\lambda_k(H-d)} = \\
& = - \frac{e^{\lambda_k(z+d)-\lambda_k(2H+d-z)} + e^{-\lambda_k(H-z)-\lambda_k H}}{1 + e^{-2\lambda_k H}} + \frac{e^{-\lambda_k(2H-d-z)} - e^{-\lambda_k(2H-d+z)}}{1 + e^{-2\lambda_k H}} + \\
& + \frac{e^{-2\lambda_k d} - e^{-2\lambda_k H}}{1 + e^{-2\lambda_k H}} e^{-\lambda_k|z-d|} - \frac{e^{-2\lambda_k(H-d)} - e^{-2\lambda_k H}}{1 + e^{-2\lambda_k H}} e^{-\lambda_k|z-d|} - \\
& - \frac{e^{\lambda_k(2H-d-z)-2\lambda_k H} - e^{-\lambda_k(2H-d-z)-2\lambda_k H} + e^{\lambda_k(z-d)-2\lambda_k H} - e^{-\lambda_k(z-d)-2\lambda_k H}}{(1 + e^{-2\lambda_k H})^2} e^{-2\lambda_k d} + \\
& + \frac{e^{\lambda_k(H-d+z)-2\lambda_k H} + e^{-\lambda_k(H-d+z)-2\lambda_k H} - e^{\lambda_k(H-d-z)-2\lambda_k H} - e^{-\lambda_k(H-d-z)-2\lambda_k H}}{(1 + e^{-2\lambda_k H})^2} e^{-\lambda_k H} + \\
& + \frac{e^{\lambda_k(H+d-z)-2\lambda_k H} + e^{-\lambda_k(H+d-z)-2\lambda_k H} - e^{\lambda_k(d+z-H)-2\lambda_k H} - e^{-\lambda_k(d+z-H)-2\lambda_k H}}{(1 + e^{-2\lambda_k H})^2} e^{-\lambda_k H} - \\
& - \frac{e^{\lambda_k(z+d)-2\lambda_k H} - e^{-\lambda_k(z+d)-2\lambda_k H} + e^{\lambda_k(z-d)-2\lambda_k H} - e^{-\lambda_k(z-d)-2\lambda_k H}}{(1 + e^{-2\lambda_k H})^2} e^{-2\lambda_k(H-d)} = \\
& = \frac{1}{1 + e^{-2\lambda_k H}} \left[- e^{-\lambda_k(z+d)} - e^{-\lambda_k(2H+d-z)} + e^{-\lambda_k(2H-d-z)} - e^{-\lambda_k(2H-d+z)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(e^{-2\lambda_k d} - e^{-2\lambda_k H} - e^{-2\lambda_k(H-d)} - e^{-2\lambda_k H} \right) e^{-\lambda_k|z-d|} \Big] + \\
& + \frac{1}{(1 + e^{-2\lambda_k H})^2} \Big[-e^{-\lambda_k(z+3d)} + e^{-\lambda_k(4H+d-z)} - e^{-\lambda_k(2H+3d-z)} + e^{-\lambda_k(2H+d+z)} + \\
& + e^{-\lambda_k(2H+d-z)} + e^{-\lambda_k(4H-d+z)} - e^{-\lambda_k(2H+d+z)} - e^{-\lambda_k(4H-d-z)} + \\
& + e^{-\lambda_k(2H-d+z)} + e^{-\lambda_k(4H+d-z)} + e^{-\lambda_k(4H-d-z)} + e^{-\lambda_k(2H+d+z)} - \\
& - e^{-\lambda_k(4H-3d-z)} + e^{-\lambda_k(4H-d+z)} - e^{-\lambda_k(4H-d-z)} + e^{-\lambda_k(4H-3d+z)} \Big] \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

при $\lambda_k \rightarrow \infty$

Позначимо

$$\begin{aligned}
M_k(z) &= \frac{1}{1 + e^{-2\lambda_k H}} \left[e^{-\lambda_k(z+d)} + e^{-\lambda_k(2H+d-z)} + e^{-\lambda_k(2H-d-z)} - e^{-\lambda_k(2H-d+z)} \right] \\
N_k(z) &= \frac{1}{1 + e^{-2\lambda_k H}} \Big[-e^{-\lambda_k(z+d)} - e^{-\lambda_k(2H+d-z)} + e^{-\lambda_k(2H-d-z)} - e^{-\lambda_k(2H-d+z)} + \\
& + \left(e^{-2\lambda_k d} - 2e^{-2\lambda_k H} - e^{-2\lambda_k(H-d)} \right) e^{-\lambda_k|z-d|} \Big] + \\
& + \frac{1}{(1 + e^{-2\lambda_k H})^2} \Big[-e^{-\lambda_k(z+3d)} + 2e^{-\lambda_k(4H+d-z)} - e^{-\lambda_k(2H+3d-z)} + \\
& + e^{-\lambda_k(2H+d+z)} + e^{-\lambda_k(2H+d-z)} + e^{-\lambda_k(4H-d+z)} + 2e^{-\lambda_k(2H-d+z)} - \\
& - e^{-\lambda_k(4H-d-z)} - e^{-\lambda_k(4H-3d-z)} + e^{-\lambda_k(4H-3d+z)} \Big] \\
u_k(z) &= F_k(z) - \frac{\chi_k}{2} \left[\operatorname{sgn}(z-d) \cdot e^{-\lambda_k|z-d|} + M_k(z) + \frac{G_1 - G_2}{\Delta_k} \left(e^{-\lambda_k(z-d)} + N_k(z) \right) \right]
\end{aligned}$$

При цьому $M_k(z)$ та $N_k(z)$ спадають експоненційно при $\lambda_k \rightarrow \infty$ при всіх z , тобто вони дадуть добре збіжний ряд, який можна диференціювати. Перетворимо

$$\begin{aligned}
\frac{G_1 - G_2}{\Delta_k} &= \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2) + \frac{G_1 - G_2}{1 + e^{-2\lambda_k H}} (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)})} = \\
&= \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} + \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2) + \frac{G_1 - G_2}{1 + e^{-2\lambda_k H}} (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)})} - \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(G_1 + G_2) \frac{G_1 - G_2 - (G_1 + G_2) - \frac{G_1 - G_2}{1 + e^{-2\lambda_k H}} (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)})}{-(G_1 + G_2) \left[G_1 + G_2 + \frac{G_1 - G_2}{1 + e^{-2\lambda_k H}} (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)}) \right]} + \\
&\quad + \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} = \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} + \\
&\quad + \frac{(G_1 - G_2)^2 (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)})}{(G_1 + G_2) (1 + e^{-2\lambda_k H}) \left[G_1 + G_2 + \frac{G_1 - G_2}{1 + e^{-2\lambda_k H}} (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)}) \right]} = \\
&= \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} + \frac{(G_1 - G_2)^2 (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)})}{(G_1 + G_2)^2 (1 + e^{-2\lambda_k H}) + (G_1^2 - G_2^2) (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)})} \\
&\quad + \frac{(G_1 - G_2)^2 (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)})}{(G_1 + G_2)^2 (1 + e^{-2\lambda_k H}) + (G_1^2 - G_2^2) (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)})} \rightarrow 0, \\
&\quad \text{при } \lambda_k \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned}
K_k(z) &= \frac{(G_1 - G_2)^2 (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)}) e^{-\lambda_k |z-d|}}{(G_1 + G_2)^2 (1 + e^{-2\lambda_k H}) + (G_1^2 - G_2^2) (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)})} + \\
&\quad + M_k(z) + \frac{G_1 - G_2}{\Delta_k} N_k(z)
\end{aligned}$$

Тоді

$$u_k(z) = F_k(z) - \frac{\chi_k}{2} \left[\operatorname{sgn}(z - d) \cdot e^{-\lambda_k |z-d|} + \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} e^{-\lambda_k |z-d|} + K_k(z) \right]$$

Тепер обернемо

$$\begin{aligned}
u(r, z) &= \frac{2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_k r)}{J_1^2(\lambda_k R)} F_k(z) - \frac{2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\operatorname{sgn}(z - d) \cdot e^{-\lambda_k |z-d|} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} e^{-\lambda_k |z-d|} + K_k(z) \right] \frac{J_1(\lambda_k r)}{J_1^2(\lambda_k R)} \chi_k \\
&\quad \text{Врахуємо, що } \chi_k = \int_0^a \chi(t) J_1(\lambda_k t) t \, dt \\
u(r, z) &= \frac{2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_k r)}{J_1^2(\lambda_k R)} F_k(z) - \frac{2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_k r)}{J_1^2(\lambda_k R)} \left[\operatorname{sgn}(z - d) \cdot e^{-\lambda_k |z-d|} + \right.
\end{aligned}$$

$$\frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} e^{-\lambda_k |z-d|} + K_k(z) \Big] \int_0^a \chi(t) J_1(\lambda_k t) t \, dt$$

Для покращення збіжності ряду скористуємося тим, що

$$J_1(\lambda_k t) = -\frac{1}{\lambda_k t} J'_0(\lambda_k t)$$

та проінтегруємо по частинах

$$\begin{aligned} \int_0^a \chi(t) J_1(\lambda_k t) t \, dt &= \left[\begin{array}{ll} U = \chi(t)t & dU = (t\chi(t))' dt \\ dV = J_1(\lambda_k t) dt = -\frac{1}{\lambda_k t} J'_0(\lambda_k t) & V = -\frac{1}{\lambda_k t} J_0(\lambda_k t) \end{array} \right] = \\ &= -\frac{t\chi(t)}{\lambda_k} J_0(\lambda_k t) \Big|_0^a + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^a (t\chi(t))' J_0(\lambda_k t) dt = \end{aligned}$$

Враховуючи те, що $\chi(a) = 0$ та позначаючи $\psi(t) = t\chi(t)$, отримаємо

$$\int_0^a \chi(t) J_1(\lambda_k t) t \, dt = \frac{1}{\lambda_k} \int_0^a J_0(\lambda_k t) \psi'(t) dt$$

Замінімо ще $J_1(\lambda_k t) = -\frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial}{\partial r} J'_0(\lambda_k r)$ отримаємо

$$\begin{aligned} u(r, z) &= \frac{2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_k r)}{J_1^2(\lambda_k R)} F_k(z) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k r)}{\lambda_k^2 J_1^2(\lambda_k R)} \left[\operatorname{sgn}(z-d) \cdot e^{-\lambda_k |z-d|} + \right. \\ &\quad \left. \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} e^{-\lambda_k |z-d|} + K_k(z) \right] \int_0^a J_0(\lambda_k t) \psi'(t) dt = \\ &= \frac{2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_k r)}{J_1^2(\lambda_k R)} F_k(z) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k^2 J_1^2(\lambda_k R)} \cdot \\ &\quad \cdot \left[\left(\operatorname{sgn}(z-d) + \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} \right) e^{-\lambda_k |z-d|} + K_k(z) \right] \psi'(t) dt \end{aligned}$$

1.4. Знаходження дотичного напруження

$$\tau_{z\varphi}(r, z) = G_1 \frac{\partial u}{\partial z}$$

Для цього знайдемо окремо

$$M'_k(z) = \frac{1}{1 + e^{-2\lambda_k H}} \left[-\lambda_k e^{-\lambda_k(z+d)} + \lambda_k e^{-\lambda_k(2H+d-z)} + \lambda_k e^{-\lambda_k(2H-d-z)} + \lambda_k e^{-\lambda_k(2H-d+z)} \right]$$

$$N'_k(z) = \frac{1}{1 + e^{-2\lambda_k H}} \left[\lambda_k e^{-\lambda_k(z+d)} - \lambda_k e^{-\lambda_k(2H+d-z)} + \lambda_k e^{-\lambda_k(2H-d-z)} + \lambda_k e^{-\lambda_k(2H-d+z)} - \right. \\ \left. - \left(e^{-2\lambda_k d} - 2e^{-2\lambda_k H} - e^{-2\lambda_k(H-d)} \right) e^{-\lambda_k|z-d|} \right] +$$

$$+ \frac{1}{(1 + e^{-2\lambda_k H})^2} \left[e^{-\lambda_k(z+3d)} + 2e^{-\lambda_k(4H+d-z)} - e^{-\lambda_k(2H+3d-z)} - \right. \\ \left. - e^{-\lambda_k(2H+d+z)} + e^{-\lambda_k(2H+d-z)} - e^{-\lambda_k(4H-d+z)} - 2e^{-\lambda_k(2H-d+z)} - \right. \\ \left. - e^{-\lambda_k(4H-d-z)} - e^{-\lambda_k(4H-3d-z)} - e^{-\lambda_k(4H-3d+z)} \right]$$

$$K_k(z) = \frac{(G_1 - G_2)^2 (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)}) \cdot \lambda_k \cdot \operatorname{sgn}(z-d) e^{-\lambda_k|z-d|}}{(G_1 + G_2)^2 (1 + e^{-2\lambda_k H}) + (G_1^2 - G_2^2) (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)})} + \\ + M'_k(z) + \frac{G_1 - G_2}{\Delta_k} N'_k(z)$$

$$(G_k(z, \xi))'_z = \frac{1}{2\lambda_k} \operatorname{sgn}(z - \xi) e^{-\lambda_k|z-\xi|} - \frac{1}{2\lambda_k} \frac{2\lambda_k ch \lambda_k H \cdot sh \lambda_k(H-z)}{ch 2\lambda_k H + 1} e^{-\lambda_k \xi} - \\ - \frac{1}{2\lambda_k} \frac{2\lambda_k ch \lambda_k H \cdot ch \lambda_k z}{ch 2\lambda_k H + 1} e^{-\lambda_k(H-\xi)}$$

$$F'_k(z) = -\frac{R}{G} J_1(\lambda_k R) \int_d^H (G_k(z, \xi))'_z p(\xi) d\xi + \\ + \frac{Q_k}{2\lambda_k \Delta_k} \left[-\operatorname{sgn}(z-d) e^{-\lambda_k|z-d|} + \frac{2\lambda_k ch \lambda_k H \cdot sh \lambda_k(H-z)}{ch 2\lambda_k H + 1} e^{-\lambda_k d} + \right. \\ \left. + \frac{2\lambda_k ch \lambda_k H \cdot ch \lambda_k z}{ch 2\lambda_k H + 1} e^{-\lambda_k(H-d)} \right]$$

Розглянемо

$$\left[\operatorname{sgn}(z-d) + \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} \right] e^{-\lambda_k|z-d|} \\ z > d : \quad - \left(1 + \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} \right) \lambda_k e^{-\lambda_k(z-d)} = \\ = -\frac{G_1 + G_2 - G_1 + G_2}{G_1 + G_2} \lambda_k e^{-\lambda_k(z-d)} = -\frac{2G_1}{G_1 + G_2} \lambda_k e^{-\lambda_k(z-d)}$$

$$\begin{aligned}
z < d : \quad & \left(-1 + \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} \right) \lambda_k e^{\lambda_k(z-d)} = \\
& = -\frac{G_1 + G_2 + G_1 - G_2}{G_1 + G_2} \lambda_k e^{-\lambda_k(d-z)} = -\frac{2G_1}{G_1 + G_2} \lambda_k e^{-\lambda_k(d-z)}
\end{aligned}$$

Тоді дотичне напруження буде дорівнювати

$$\begin{aligned}
\tau_{z\varphi}(r, z) = G_1 \left[\frac{2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_k r)}{J_1^2(\lambda_k R)} F'_k(z) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^a \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2G_1}{G_1 + G_2} \cdot \right. \right. \\
\left. \left. \cdot \lambda_k e^{-\lambda_k(z-d)} + K'_k(z) \right) \frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k^2 J_1^2(\lambda_k R)} \psi'(t) dt \right]
\end{aligned}$$

1.5. Отримання інтегрального рівняння та його рішення методом ортогональних багаточленів

Для знаходження невідомої функції $\psi(t)$ слід скористатися умовою

$$\text{відсутності напружень на берегах тріщини: } \frac{\partial u}{\partial z} \bigg|_{z=d \pm 0} = 0, \quad 0 < r < a$$

Оскільки умови призводять до однакового результату, то розглянемо тільки при

$$z > d.$$

Позначемо через

$$\begin{aligned}
B(r) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_k r)}{J_1^2(\lambda_k R)} F'_k(d+0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_k r)}{J_1^2(\lambda_k R)} \left\{ \frac{R}{G_2} J_1(\lambda_k R) \cdot \right. \\
\cdot \int_d^H \left[e^{-\lambda_k|d-z|} + \frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k \xi} + \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-\xi)} \right] p(\xi) d\xi - \\
\left. - \frac{Q_k}{\Delta_k} \left[1 - \frac{sh\lambda_k(H-d)}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k d} - \frac{ch\lambda_k d}{ch\lambda_k H} e^{-\lambda_k(H-d)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Тепер

$$\frac{d}{dz} \left[\left(\operatorname{sgn}(z-d) + \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} \right) e^{-\lambda_k |z-d|} \right] =$$

при $z > d$:

$$\frac{d}{dz} \left[\left(1 + \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} \right) e^{-\lambda_k |z-d|} \right] = -\lambda_k \left(1 + \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} \right) e^{-\lambda_k (z-d)}$$

при $z < d$:

$$\frac{d}{dz} \left[\left(-1 + \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} \right) e^{-\lambda_k |z-d|} \right] = \lambda_k \left(-1 + \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} \right) e^{-\lambda_k (z-d)}$$

при $z = d + 0$ отримуємо

$$-\lambda_k \left(1 + \frac{G_1 - G_2}{-(G_1 + G_2)} \right) = -\lambda_k \frac{G_1 + G_2 - G_1 + G_2}{-(G_1 + G_2)} = -\lambda_k \frac{2G_2}{-(G_1 + G_2)}$$

Також знайдемо

$$\begin{aligned} K'_k(z) &= -\lambda_k \frac{(G_1 - G_2)^2 (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k (H-d)}) e^{-\lambda_k |z-d|} \cdot \operatorname{sgn}(z-d)}{(G_1 + G_2)^2 (1 + e^{-2\lambda_k H}) + (G_1^2 - G_2^2) (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k (H-d)})} + \\ &\quad + M'_k(z) + \frac{G_1 - G_2}{\Delta_k} N'_k(z) = \\ &= \lambda_k \left\{ \frac{1}{1 + e^{-2\lambda_k H}} \left[e^{-\lambda_k (z+d)} + e^{-\lambda_k (2H+d-z)} + e^{-\lambda_k (2H-d-z)} - e^{-\lambda_k (2H-d+z)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(G_1 - G_2)^2 (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k (H-d)}) e^{-\lambda_k |z-d|} \cdot \operatorname{sgn}(z-d)}{(G_1 + G_2)^2 (1 + e^{-2\lambda_k H}) + (G_1^2 - G_2^2) (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k (H-d)})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{G_1 - G_2}{\Delta_k} \left\{ \frac{1}{1 + e^{-2\lambda_k H}} \left[e^{-\lambda_k (z+d)} - e^{-\lambda_k (2H+d-z)} + e^{-\lambda_k (2H-d-z)} + e^{-\lambda_k (2H-d+z)} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(e^{-2\lambda_k d} - 2e^{-2\lambda_k H} - e^{-2\lambda_k (H-d)} \right) e^{-\lambda_k |z-d|} \cdot \operatorname{sgn}(z-d) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(1 + e^{-2\lambda_k H})^2} \left[e^{-\lambda_k (z+3d)} + 2e^{-\lambda_k (4H+d-z)} - e^{-\lambda_k (2H+3d-z)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-\lambda_k (2H+d+z)} + e^{-\lambda_k (2H+d-z)} - e^{-\lambda_k (4H-d+z)} - 2e^{-\lambda_k (2H-d+z)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-\lambda_k (4H-d-z)} - e^{-\lambda_k (4H-3d-z)} - e^{-\lambda_k (4H-3d+z)} \right] \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$K'_k(z) = -\lambda_k \cdot R_k, \text{ де}$$

$$\begin{aligned}
R_k = & \frac{1}{1 + e^{-2\lambda_k H}} \left[-e^{-2\lambda_k d} - 2e^{-2\lambda_k H} + e^{-2\lambda_k(H-d)} \right] - \\
& - \frac{(G_1 - G_2)^2 (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)})}{(G_1 + G_2)^2 (1 + e^{-2\lambda_k H}) + (G_1^2 - G_2^2) (e^{-2\lambda_k d} + e^{-2\lambda_k(H-d)})} + \\
& + \frac{G_1 - G_2}{\Delta_k} \left\{ \frac{1}{1 + e^{-2\lambda_k H}} \left[e^{-2\lambda_k d} - e^{-2\lambda_k H} + e^{-2\lambda_k(H-d)} + e^{-2\lambda_k H} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(e^{-2\lambda_k d} + 2e^{-2\lambda_k H} + 2e^{-2\lambda_k(H-d)} \right) \right] + \right. \\
& + \frac{1}{(1 + e^{-2\lambda_k H})^2} \left[e^{-4\lambda_k d} + 2e^{-4\lambda_k H} - e^{-2\lambda_k(H+d)} - \right. \\
& \quad \left. - 2e^{-2\lambda_k(H+d)} + e^{-2\lambda_k H} - e^{-2\lambda_k H} - 2e^{-4\lambda_k H} - \right. \\
& \quad \left. - 2e^{-2\lambda_k(2H-d)} - e^{-4\lambda_k(H-d)} - e^{-2\lambda_k(2H-d)} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

Тоді

$$\frac{1}{R^2} B(r) + \frac{1}{R^2} \frac{d}{dr} \int_0^a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k^2 J_1^2(\lambda_k R)} \left[-\lambda_k \frac{2G_2}{-(G_1 + G_2)} + \lambda_k R_k \right] \psi'(t) dt = 0$$

Прийшли до інтегрально-диференційного рівняння

$$\begin{aligned}
& \frac{2G_2}{-(G_1 + G_2)} \frac{d}{dr} \int_0^a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k R)} \psi'(t) dt - \\
& - \frac{d}{dr} \int_0^a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k R)} R_k \psi'(t) dt = B(r)
\end{aligned}$$

Сингулярне ядро має вигляд:

$$S(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k R)},$$

регулярне ядро:

$$-\frac{d}{dr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k R)} R_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k R)} R_k = R_1(r, t)$$

$$\frac{2G_2}{-(G_1 + G_2)} \frac{d}{dr} \int_0^a S(r,t) \psi'(t) dt + \int_0^a R_1(r,t) \psi'(t) dt = B(r)$$

Проінтегруємо рівняння по r :

$$\frac{2G_2}{-(G_1 + G_2)} \int_0^a S(r,t) \psi'(t) dt - \int_0^a R_1^*(r,t) \psi'(t) dt = B^*(r) + C, \text{ де}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k R)} R_k = R_1^*(r, t)$$

Тепер із сингулярного ядра потрібно виділити логарифмічну особливість.

Для цього врахуємо асимптотику функцій Беселя:

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$J_1(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

Та нулів рівняння

$$J_2(\lambda_k R) = 0 :$$

Тоді

$$\frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k R)} \sim \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_k r}} \cos\left(\lambda_k r - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_k t}} \cos\left(\lambda_k t - \frac{\pi}{4}\right)}{\lambda_k \frac{2}{\pi \lambda_k R} \cos^2\left(\lambda_k R - \frac{3\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{R}{\sqrt{rt}} \frac{\cos\left(\lambda_k r - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\lambda_k t - \frac{\pi}{4}\right)}{\lambda_k \cos^2\left(\lambda_k R - \frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$\lambda_k R \sim \pi \left(k + \frac{3}{4}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\cos^2\left(\lambda_k R - \frac{3\pi}{4}\right) \sim \cos^2\left(\pi k + \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos^2 \pi k = ((-1)^k)^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\lambda_k r - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\lambda_k t - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2} \left[\cos\left(\lambda_k r - \frac{\pi}{4} + \lambda_k t - \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ &+ \cos\left(\lambda_k r - \frac{\pi}{4} - \lambda_k t + \frac{\pi}{4}\right) \left. \right] = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\lambda_k (r + t) - \frac{\pi}{2}\right) + \cos \lambda_k (r - t) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [\cos \lambda_k (r - t) + \sin \lambda_k (r + t)] \end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{aligned} \frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k R)} &\sim R \frac{\cos \lambda_k (r-t) + \sin \lambda_k (r+t)}{2\sqrt{rt} \cdot \lambda_k} \sim \\ &\sim \frac{R}{2\sqrt{rt}} \frac{\cos \frac{\pi}{R} \left(k + \frac{3}{4}\right) (r-t) + \sin \frac{\pi}{R} \left(k + \frac{3}{4}\right) (r+t)}{\frac{\pi}{R} \left(k + \frac{3}{4}\right)} = \\ &= \frac{2R^2}{\pi\sqrt{rt}} \frac{\cos \frac{\pi}{4R} (4k+3) (r-t) + \sin \frac{\pi}{4R} (4k+3) (r+t)}{4k+3} \end{aligned}$$

Тепер потрібно знайти суми рядів

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos (4k+3) x}{4k+3} \text{ та } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (4k+3) x}{4k+3}, \text{ де } x = \frac{\pi}{4R}(r \pm t).$$

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\pi}{4R}(r+t) \leq \frac{\pi}{4R}2a = \frac{\pi a}{2R} < \frac{\pi}{2} \text{ та } \sin (4k+3) x > 0 \\ \left| \frac{\pi}{4R}(r-t) \right| < \frac{\pi a}{4R} < \frac{\pi}{4} \text{ та } \cos (4k+3) x > 0 \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos (4k+3) x}{4k+3} &= -\frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{\pi}{8} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin (4k+3) x}{4k+3} &= \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| + \frac{\pi}{8} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos (4k+3) x}{4k+3} &= -\frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{3} \cos 3x - \frac{\pi}{8} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (4k+3) x}{4k+3} &= \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Виділимо із сингулярного ядра особливість:

$$S(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k R)} = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k R)} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k R)},$$

де n_0 таке, що у другій сумі можливо замінити вираз на асимптотику:

$$S(r, t) = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k R)} + \frac{2R^2}{\pi\sqrt{rt}} \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{4R} (4k+3) (r-t)}{4k+3} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2R^2}{\pi\sqrt{rt}} \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\sin \frac{\pi}{4R} (4k+3) (r+t)}{4k+3} = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k R)} - \\
& - \frac{2R^2}{\pi\sqrt{rt}} \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{4R} (4k+3) (r-t) + \sin \frac{\pi}{4R} (4k+3) (r+t)}{4k+3} + \\
& + \frac{2R^2}{\pi\sqrt{rt}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{4R} (4k+3) (r-t)}{4k+3} + \frac{2R^2}{\pi\sqrt{rt}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{4R} (4k+3) (r+t)}{4k+3} = \\
& = \frac{2R^2}{\pi\sqrt{rt}} \left[-\frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi(r-t)}{8R} \right| - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{4R} (r-t) - \frac{\pi}{8} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi(r+t)}{8R} \right) \right| - \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{4R} (r+t) + \frac{\pi}{8} \right] + \\
& + \sum_{k=1}^{n_0} \left[\frac{J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k t)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k R)} - \frac{2R^2}{\pi\sqrt{rt}} \frac{\cos \frac{\pi}{4R} (4k+3) (r-t) + \sin \frac{\pi}{4R} (4k+3) (r+t)}{4k+3} \right]
\end{aligned}$$

Щоб отримати "чистий" логорифм $\ln \frac{1}{|r-t|}$:

$$\begin{aligned}
\ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi(r-t)}{8R} \right| &= -\ln \frac{1}{|r-t|} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi(r-t)}{8R} \right| + \ln \frac{1}{|r-t|} = \\
&= -\ln \frac{1}{|r-t|} + \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi(r-t)}{8R}}{r-t} \right|,
\end{aligned}$$

при цьому

$$\lim_{r-t \rightarrow 0} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi(r-t)}{8R}}{r-t} \right| = \lim_{r-t \rightarrow 0} \ln \left| \frac{\pi(r-t)}{8R(r-t)} \right| = \ln \frac{\pi}{8R}.$$

$$\begin{aligned}
S(r,t) &= \frac{2R^2}{\pi\sqrt{rt}} \left[\ln \frac{1}{|r-t|} - \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi(r-t)}{8R}}{r-t} \right| \right] + \\
&+ \frac{2R^2}{\pi\sqrt{rt}} \left[\frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi(r+t)}{8R} \right) \right| - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{4R} (r-t) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{4R} (r+t) + \frac{\pi}{8} \right] = \frac{2R^2}{\pi\sqrt{rt}} \ln \frac{1}{|r-t|} + \\
&+ \frac{2R^2}{\pi\sqrt{rt}} \left[-\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi(r-t)}{8R}}{r-t} \right| + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi(r+t)}{8R} \right) \right| - \frac{4}{3} \cos \frac{3\pi}{4R} (r-t) - \frac{4}{3} \sin \frac{3\pi}{4R} (r+t) \right]
\end{aligned}$$

Позначимо регулярну частину цього виразу через:

$$R_2(r,t) = -\ln \left| \frac{tg \frac{\pi(r-t)}{8R}}{r-t} \right| + \ln \left| tg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi(r+t)}{8R} \right) \right| - \frac{4}{3} \cos \frac{3\pi}{4R}(r-t) - \frac{4}{3} \sin \frac{3\pi}{4R}(r+t)$$

Тоді рівняння набуде вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{2G_2}{-(G_1 + G_2)} \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^a \ln \frac{1}{|r-t|} \psi'(t) \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^a \left[-\frac{G_2 R^2}{G_1 + G_2} \frac{1}{\sqrt{rt}} R_2(r,t) + \right. \\ & \quad \left. + R_1^*(r,t) \right] \psi'(t) dt = B^*(r) + C, \quad 0 \leq r \leq a \\ & \int_0^a \ln \frac{1}{|r-t|} \psi'(t) \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^a R_3(r,t) \psi'(t) dt = -\frac{\pi(G_1 + G_2)}{G_2 R^2} \sqrt{r} (B^*(r) + C) \\ & R_3(r,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot R_2(r,t) - \frac{\pi(G_1 + G_2)}{G_2 R^2} \sqrt{r} \cdot R_1^*(r,t) \end{aligned}$$

Візьмемо спектральне співвідношення:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \frac{T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy = \begin{cases} \ln 2, & n = 0 \\ \frac{1}{n} T_n(x), & n \geq 1 \end{cases}$$

і зробимо у ньому заміну $(-1; 1) \rightarrow (0; a)$

$$x = 2\frac{t}{a} - 1, t \in (0; a)$$

$$y = 2\frac{\tau}{a} - 1, dy = \frac{2}{a} d\tau$$

$$x - y = 2\frac{t}{a} - 1 - 2\frac{\tau}{a} + 1 = \frac{2}{a}(t - \tau)$$

$$\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1 - 4\frac{\tau^2}{a^2} + 4\frac{\tau}{a}} = 2\sqrt{\frac{\tau}{a}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\tau}{a}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^a \left[\ln \frac{1}{|t-\tau|} + \ln \frac{a}{2} \right] \frac{T_n(2\frac{\tau}{a} - 1)}{\sqrt{\tau} \cdot \sqrt{a-\tau}} d\tau = \begin{cases} \ln 2, & n = 0 \\ \frac{1}{n} T_n(2\frac{t}{a} - 1), & n \geq 1 \end{cases}$$

Умова ортогональності багаточленів Чебишова:

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \delta_{n \cdot m} \cdot \begin{cases} \pi, & n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^a T_n\left(2\frac{t}{a} - 1\right) T_m\left(2\frac{t}{a} - 1\right) \frac{-\frac{2}{a} dt}{2\sqrt{\frac{t}{a}} \cdot \sqrt{1 - \frac{t}{a}}} = \int_0^a T_n\left(2\frac{t}{a} - 1\right) T_m\left(2\frac{t}{a} - 1\right) \cdot \frac{dt}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{a-t}} = \delta_{n \cdot m} \cdot \begin{cases} \pi, & n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n \geq 1 \end{cases}$$

Тоді

$$\frac{1}{\pi} \int_0^a \ln \frac{a}{2} \cdot \frac{T_n\left(2\frac{\tau}{a} - 1\right)}{\sqrt{\tau} \cdot \sqrt{a-\tau}} d\tau = \frac{1}{\pi} \cdot \ln \frac{a}{2} \cdot \pi \cdot \delta_{0n}$$

і спектральне співвідношення прийме вигляд:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^a \ln \frac{1}{|t-\tau|} \cdot \frac{T_n\left(2\frac{\tau}{a} - 1\right)}{\sqrt{\tau} \cdot \sqrt{a-\tau}} d\tau = \begin{cases} \ln 2 - \ln \frac{a}{2} = \ln \frac{4}{a}, & n = 0 \\ \frac{1}{n} - T_n\left(2\frac{t}{a} - 1\right), & n \geq 1 \end{cases}$$

Звідси рішення отриманого інтегрального рівняння слід шукати у вигляді:

$$\psi'(t) = \frac{1}{\sqrt{a-t}} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \cdot T_n\left(2\frac{t}{a} - 1\right)$$

Підставимо в рівняння:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \int_0^a \ln \frac{1}{|t-r|} \frac{T_n\left(2\frac{t}{a} - 1\right)}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{a-t}} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \int_0^a R_3(r,t) \frac{T_n\left(2\frac{t}{a} - 1\right)}{\sqrt{a-t}} dt = \\ = -\frac{\pi(G_1 + G_2)}{G_2 R^2} \sqrt{r} (B^*(r) + C) \end{aligned}$$

Скористаємося спектральним співвідношенням:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \cdot \delta_n \cdot T_n\left(2\frac{t}{a} - 1\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \int_0^a R_3(r,t) \frac{T_n\left(2\frac{t}{a} - 1\right)}{\sqrt{a-t}} dt =$$

$$= -\frac{\pi(G_1 + G_2)}{G_2 R^2} \sqrt{r}(B^*(r) + C), \text{ де } \delta_n = \begin{cases} \pi \ln \frac{4}{a}, & n = 0 \\ \frac{\pi}{n}, & n \geq 1 \end{cases}$$

Помножимо отриманий вираз на $\frac{T_m(2\frac{r}{a} - 1)}{\sqrt{r} \cdot \sqrt{a - r}}$ і проінтегруємо по r від 0 до a :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \cdot \delta_n \int_0^a T_n(2\frac{r}{a} - 1) \frac{T_m(2\frac{r}{a} - 1)}{\sqrt{r} \cdot \sqrt{a - r}} dr + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \int_0^a \frac{T_m(2\frac{r}{a} - 1)}{\sqrt{r} \cdot \sqrt{a - r}} dr \cdot \\ & \cdot \int_0^a R_3(r, t) \frac{T_n(2\frac{t}{a} - 1)}{\sqrt{a - t}} dt = -\frac{\pi(G_1 + G_2)}{G_2 R^2} \int_0^a \sqrt{r}(B^*(r) + C) \frac{T_m(2\frac{r}{a} - 1)}{\sqrt{r} \cdot \sqrt{a - r}} dr \end{aligned}$$

В силу ортогональності:

$$\psi_m \cdot \delta_m^* + \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \cdot \psi_n = b_m^\alpha + c \cdot b_m^c, \quad m = 0, 1, \dots$$

$$\delta_m^* = \begin{cases} \pi^2 \ln \frac{4}{a}, & m = 0 \\ \frac{\pi^2}{2m}, & m \geq 1 \end{cases}$$

$$a_{mn} = \psi_n \int_0^a \frac{T_m(2\frac{r}{a} - 1)}{\sqrt{r} \cdot \sqrt{a - r}} dr \cdot \int_0^a R_3(r, t) \frac{T_n(2\frac{t}{a} - 1)}{\sqrt{a - t}} dt$$

$$b_m = -\frac{\pi(G_1 + G_2)}{G_2 R^2} \int_0^a B^*(r) \frac{T_m(2\frac{r}{a} - 1)}{\sqrt{a - r}} dr$$

$$b_m^c = -\frac{\pi(G_1 + G_2)}{G_2 R^2} \int_0^a \frac{T_m(2\frac{r}{a} - 1)}{\sqrt{a - r}} dr$$

При цьому ψ_m треба шукати теж у вигляді $\psi_m = \psi_m^\alpha + c \cdot \psi_m^c$,

де ψ_m^α - рішення з правою частиною b_m^α , а ψ_m^c - з правою частиною b_m^c .

Для знаходження константи c :

$$\psi'(t) = \psi(t) \Big|_0^a = t\chi(t) \Big|_0^a = 0,$$

так як

$$\chi(a) = 0.$$

Тоді

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a-t}} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n T_n\left(2\frac{t}{a} - 1\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \int_0^a T_n\left(2\frac{t}{a} - 1\right) \frac{dt}{\sqrt{a-t}} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^{\alpha} \int_0^a T_n\left(2\frac{t}{a} - 1\right) \frac{dt}{\sqrt{a-t}} + c \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^c \int_0^a T_n\left(2\frac{t}{a} - 1\right) \frac{dt}{\sqrt{a-t}} = 0$$

1.6. Знаходження коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН)

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(r-a)} \tau_{z\varphi} \Big|_{z=d+0}$$

Шукаємо саме цей коефіцієнт, тому що він є коефіцієнтом інтенсивності напруження для умов навантаження, при якому краї тріщини зміщуються в площині тріщини паралельно щодо фронту розповсюдження тріщини (також відома як поздовжньо-зсувна (III) мода деформації).

В отриманому вище вираженні для дотичного напруження

$$\tau_{z\varphi} \Big|_{z=d+0} = G_1 \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=d+0}$$

відкинемо доданки, що мають кінцеву межу при

$$r \rightarrow a + 0$$

$$\tau_{z\varphi} \Big|_{z=d+0} = \frac{G_1 R^2}{(G_1 + G_2) \pi} \frac{d}{dr} \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^a \ln \frac{1}{|r-t|} \psi'(t) \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^a R_2(r,t) \psi'(t) dt - f(z)$$

і підставимо в нього розкладання

$$\psi'(t) = \frac{1}{\sqrt{a-t}} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n T_n\left(\frac{2}{a}t - 1\right)$$

Тоді

$$K_{III} = \frac{G_1 R^2}{G_1 + G_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{r \rightarrow a+0} \sqrt{r-a} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \frac{d}{dr} \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^a \ln \frac{1}{|r-t|} \frac{T_n(\frac{2}{a}t-1)}{\sqrt{t}\sqrt{a-t}} dt$$

Наведеним вище спектральним співвідношенням скористатися не можна, оскільки тут

$$r > a$$

Для з'ясування поведінки даного інтеграла при

$$r \rightarrow a + 0$$

скористаємося наступними результатами роботи:

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \frac{T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy,$$

$$\text{при } x \rightarrow 1 + 0$$

$$\frac{d}{dx} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \frac{T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy \sim -\frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{x-1}},$$

$$\text{при } x \rightarrow 1 + 0$$

$$\text{Зробивши в цих інтегралах заміну } x = \frac{2}{a}r - 1 \text{ та } y = \frac{2}{a}t - 1,$$

що переводить проміжок $(-1; 1)$ у проміжок $(0; a)$, отримаємо, що

$$\int_0^a \ln \frac{1}{|r-t|} \frac{T_n(\frac{2}{a}t-1)}{\sqrt{t}\sqrt{a-t}} dy$$

$$\text{обмежен при } r \rightarrow a + 0$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^a \ln \frac{1}{|r-t|} \frac{T_n(\frac{2}{a}t-1)}{\sqrt{t}\sqrt{a-t}} dy \sim -\frac{\pi}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{r-a}},$$

$$\text{при } r \rightarrow a + 0$$

З урахуванням цього запишемо вираз для КІН наступним чином:

$$K_{III} = \frac{G_1 R^2}{G_1 + G_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \left[\lim_{r \rightarrow a+0} \sqrt{r-a} \left(-\frac{1}{2r\sqrt{r}} \right) \right].$$

$$\cdot \int_0^a \ln \frac{1}{|r-t|} \frac{T_n(\frac{2}{a}t-1)}{\sqrt{t}\sqrt{a-t}} dt + \lim_{r \rightarrow a+0} \sqrt{r-a} \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{d}{dr} \int_0^a \ln \frac{1}{|r-t|} \frac{T_n(\frac{2}{a}t-1)}{\sqrt{t}\sqrt{a-t}} dt \Big]$$

Звідки, з урахуванням поведінки при $r \rightarrow a+0$ вказаних інтегралів, маємо

$$\begin{aligned} K_{III} &= \frac{G_1 R^2}{G_1 + G_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \left[\lim_{r \rightarrow a+0} \sqrt{r-a} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \left[-\frac{\pi}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r-a}} \right] \right] = \\ &= -\frac{G_1 R^2 \sqrt{2\pi}}{a(G_1 + G_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \end{aligned}$$

Таким чином для обчислення КІН отримано формулу:

$$K_{III} = -\frac{G_1 R^2 \sqrt{2\pi}}{a(G_1 + G_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n.$$

РОЗДІЛ 2

ДОДАТОК 1

2.1. Підбір інтегрального перетворення

$$u_\lambda(z) = \int_0^R u(r,z) K(\lambda,z) r dr, \quad (2.1)$$

де

$$K(\lambda,z)$$

ядро інтегрального перетворення, що подлягає визначенню. Застосуємо його до рівняння (1.1):

$$\int_0^R \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) K(\lambda,r) r dr - \int_0^R \frac{1}{r^2} u K(\lambda,r) r dr + \int_0^R \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} K(\lambda,r) r dr = 0 \quad (2.2)$$

У першому додатку інтеграл двійчи проінтегруємо по частинах:

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) K(\lambda,r) r dr &= \left[\begin{array}{ll} U = K(\lambda,r) & dU = \frac{d}{dr} K(\lambda,r) dr \\ dV = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr & V = r \frac{\partial u}{\partial r} \end{array} \right] = \\ &= r \frac{\partial u}{\partial r} K(\lambda,r) \Big|_0^R - \int_0^R r \frac{\partial u}{\partial r} \frac{d}{dr} K(\lambda,r) dr = \left[\begin{array}{ll} U = r \frac{dK(\lambda,r)}{dr} & dU = \frac{d}{dr} \left(r \frac{dK(\lambda,r)}{dr} \right) dr \\ dV = \frac{\partial u}{\partial r} dr & V = u \end{array} \right] = \\ &= r \frac{\partial u}{\partial r} K(\lambda,r) \Big|_0^R - u r \frac{dK(\lambda,r)}{dr} \Big|_0^R + \int_0^R u \frac{d}{dr} \left(r \frac{dK(\lambda,r)}{dr} \right) dr = \\ &= R \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} K(\lambda,R) - R u \Big|_{r=R} \frac{dK(\lambda,r)}{dr} \Big|_{r=R} + \int_0^R u \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dK(\lambda,r)}{dr} \right) r dr \end{aligned}$$

Об'єднуючи цей результат з другим додатком, отримаємо:

$$\int_0^R \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) K(\lambda,r) r dr - \int_0^R \frac{1}{r^2} u K(\lambda,r) r dr = R \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} K(\lambda,R) -$$

$$-Ru \big|_{r=R} \frac{dK(\lambda, r)}{dr} \big|_{r=R} + \int_0^R u \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dK(\lambda, r)}{dr} - \frac{1}{r^2} K(\lambda, r) \right) \right] r dr$$

З крайової умови (1.3) виразимо

$$\frac{\partial u}{\partial r} \big|_{r=R} = \frac{1}{R} u_{r=R} + \frac{1}{G} p(z)$$

та підставимо в поза інтегральні складові:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} u_{r=R} K(\lambda, R) - Ru \big|_{r=R} \frac{\partial K(\lambda, r)}{\partial r} \big|_{r=R} &= \left[u \big|_{r=R} + \frac{R}{G} p(z) \right] K(\lambda, R) - \\ - Ru \big|_{r=R} \frac{\partial K(\lambda, r)}{\partial r} \big|_{r=R} &= u \big|_{r=R} \left[K(\lambda, R) - R \frac{\partial K(\lambda, r)}{\partial r} \big|_{r=R} \right] + \frac{R}{G} p(z) K(\lambda, R) \end{aligned}$$

В останньому додатку вираження (2.2) змінимо місцями операції інтегрування та диференціювання, оскільки вони проводяться за різними змінними:

$$\int_0^R \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} K(\lambda, r) r dr = \frac{d^2}{dz^2} \int_0^R u K(\lambda, r) r dr = \frac{d^2}{dz^2} u_\lambda(z) = u''_\lambda(z)$$

Таким чином, вираження (2.2) має вигляд:

$$\begin{aligned} u \big|_{r=R} \left[K(\lambda, R) - R \frac{\partial K(\lambda, r)}{\partial r} \big|_{r=R} \right] + \frac{R}{G} p(z) K(\lambda, R) + \\ + \int_0^R u \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dK(\lambda, r)}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} K(\lambda, r) \right] r dr + u''_\lambda(z) = 0 \end{aligned}$$

Вимагатимемо, щоб ядро

$$K(\lambda, r)$$

задовольняло рівнянню:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dK(\lambda, r)}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} K(\lambda, r) = -\lambda^2 K(\lambda, r), 0 \leq r \leq R \quad (2.3)$$

та умові

$$K(\lambda, R) - R \frac{\partial K(\lambda, r)}{\partial r} \big|_{r=R} = 0 \quad (2.4)$$

Тоді останнє вираження набуде вигляду:

$$\frac{R}{G}p(z)K(\lambda, R) - \lambda^2 \int_0^R uK(\lambda, r)rdr + u''_{\lambda}(z) = 0$$

тобто:

$$u''_{\lambda}(z) - \lambda^2 u_{\lambda}(z) = -\frac{R}{G}p(z)K(\lambda, R)$$

Розглянемо отримане звичайне диференціальне рівняння (2.7) для визначення ядра

$$K(\lambda, r) :$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dK(\lambda, r)}{dr} \right) + \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2} \right) K(\lambda, r) = 0 \quad (2.5)$$

Це є рівнянням Беселя та його лінійно-незалежним рішеннями є функції Беселя

$$J_1(\lambda r)$$

та

$$K_1(\lambda, r).$$

При цьому функція

$$J_1(\lambda r)$$

обмежена при

$$r = 0,$$

а

$$K_1(\lambda, r)$$

не обмежена при

$$r \rightarrow 0.$$

Так як точка

$$r = 0$$

входить в область, що розглядається, а значить ядро має бути обмеженим при

$$r = 0,$$

то візьмемо

$$K(\lambda, r) = J_1(\lambda r)$$

Для визначення параметру

$$\lambda$$

візьмемо умову (2.4), підставивши в нього функцію Беселя

$$J_1(\lambda r) :$$

$$J_1(\lambda R) - \lambda R J_1'(\lambda R) = 0$$

З теорії функції Беселя скористаємося формулою диференціювання

$$x J_1'(x) = J_1(x) - x J_2(x),$$

з якої випливає, що

$$J_1(\lambda R) - \lambda R J_1'(\lambda R) = \lambda R J_2(\lambda R).$$

Тоді для визначення

$$\lambda$$

отримаємо умову

$$J_2(\lambda R) = 0.$$

Функція Беселя має зліченну множину дійсних коренів і всі вони додатні. Позначимо через

$$\lambda_k (k = 1, 2, \dots)$$

корні рівняння

$$J_2(\lambda_k R) = 0.$$

Таким чином, ми побудували інтегральне перетворення:

$$u_k(z) = \int_0^R u(r, z) J_1(\lambda_k r) r dr, k = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

та рівняння (2.5) відносно трансформанти

$$u_k(z)$$

набуде вигляду:

$$u_k''(z) - \lambda_k^2 u_k(z) = -\frac{R}{G} p(z) J_1(\lambda_k R)$$

Для отримання формули обернення побудованого інтегрального перетворення (2.6) необхідно знайти норму ядра

$$J_1(\lambda r)$$

цього перетворення

$$\|J_1(\lambda_k r)\|^2 = \int_0^R J_1^2(\lambda_k r) r dr = \frac{R^2}{2} \left(J_1'(\lambda_k R) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(R^2 - \frac{1}{\lambda_k^2} \right) J_1^2(\lambda_k R)$$

тут використана формула 1.8.3.11 [3] З рівняння

$$J_1(\lambda_k R) - \lambda_k R J_1'(\lambda_k R) = 0$$

для визначення

$$\lambda_k,$$

виразимо

$$J_1'(\lambda_k R) = \frac{1}{\lambda_k R} J_1(\lambda_k R)$$

та підставимо його в отриманий вираз для квадрату норми ядра:

$$\|J_1(\lambda_k r)\|^2 = \frac{R^2}{2} \frac{1}{\lambda_k^2 R^2} J_1^2(\lambda_k R) + \frac{1}{2} \left(R^2 - \frac{1}{\lambda_k^2} \right) J_1^2(\lambda_k R) = \frac{R^2}{2} J_1^2(\lambda_k R)$$

Тоді згідно теореми Стеклова, формула обернення має вигляд:

$$u(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \frac{J_1(\lambda_k r)}{\|J_1(\lambda_k r)\|^2} = \frac{2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \frac{J_1(\lambda_k r)}{J_1^2(\lambda_k R)} \quad (2.7)$$

Застосуємо тепер побудоване інтегральне перетворення до крайових умов (1.2):

$$\int_0^R u|_{z=0} J_1(\lambda_k r) r dr = 0,$$

звідки

$$u_k(0) = 0$$

$$\int_0^R \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} J_1(\lambda_k r) r dr = \frac{d}{dz} \int_0^R u J_1(\lambda_k r) \Big|_{z=H} r dr = 0,$$

звідки

$$u_k'(H) = 0$$

та до умов спряженості (1.4):

$$\langle u_k \rangle = u_k(d-0) - u_k(d+0) = \chi_k, \chi_k = \int_0^a \chi(r) J_1(\lambda_k r) r dr$$

$$G_1 \int_0^R \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=d-0} J_1(\lambda_k r) r dr = G_2 \int_0^R \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=d+0} J_1(\lambda_k r) r dr,$$

звідки

$$u_k(d-0) = u_k(d+0),$$

$$G_1 u_k'(d-0) = G_2 u_k'(d+0)$$

ВИСНОВКИ

Для розв'язку вісесиметричної задачі про кручення двошарового циліндра використан підхід, що заключається в використанні інтегрального перетворення до рівняння Ламе відносно переміщення. В результаті розв'язку отриманої задачі виведені формули для знаходження переміщень та напружень в обох шарах циліндру, а також коефіцієнту інтенсивності напруження, що дозволяє швидко та ефективно їх розраховувати. На практиці доведено, що значення модулів зсуву обох частин циліндра сильно впливають на значення кутового переміщення та коефіцієнту інтенсивності напруження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Беитмен Г. Висші трансцендентні функції. Т. 2 / Беитмен Г., Ердеї А. -М.: Наука, 1974. - 296 с.
2. Попов Г. Я. Концентрація пружних напруг біля штампів, розрізів, тонких включень та подкріплень / Попов Г. Я. - М.: Наука, 1982. - 344 с.
3. Попов Г. Я. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень/ Попов Г. Я., Реут В. В., Вайсфельд Н. Д. — М.:Наука, 1999. — 26-27.
4. Прудніков А. П. Інтеграли та ряди. Т. 2. Спеціальні функції/ Прудніков А. П., Бричков Ю. А., Марічев О. І. — М.: Наука, 1983. — 752 с.
5. Vaysfeld N. Torsion problems of finite cylinders weakened by ring-shaped cracks/Vaysfeld N., Protserov Yu. - Procedia Structural Integrity Vol. 3, 2017. — 526-544.