Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра Методів Математичної Фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

«Антиплоська задача теорії пружності для складеної смуги з міжфазним дефектом»

«Antiplane problem of the theory of elasticity for a composite band with an interfacial defect»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Василевський Іван Юрійович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю. С. ______
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Журавльова З.Ю.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від ______________ 2022 р.

Завідувач кафедри

__________ ____________________

Захищено на засіданні ЕК № ____________

Протокол № ____ від ______________ 2022 р.

Оцінка __________ / __________ / __________

Голова ЕК

__________ _________________________

Одеса — 2022 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Для характеристики різних процесів, що відбуваються у природі та техники, зокрема у побудові складних конструкцій, використовується математичний апарат, який розробляє спеціальні математичні методи. Ці методи дозволяють побудувати математичні моделі, що дають змогу у деякому спрощеному варіанті дослідити процеси, що проходять у реальних структурах та згодом провести розширення на більш загальні випадки.

Багато моделей грунтуються на вивченні систем, які складаються з диференціальних рівнянь у часткових похідних другого порядка. Моделі, які використовує математична фізика, враховують ще додаткові умови, у даному випадку граничні, яким повинен задовільняти побудований розв'язок.

В наш час досить багато інженерних контрукцій мають шарувату структуру, які згодом можуть бути послаблені різного видами дефектами під впливом як механічних так и природних умов.

Дана дипломна робота присвячена антиплоській задачі теорії пружності для складеної смуги, яка послабелена міжфазним дефектом. Зазначимо, що подана задача розв'язуються за допомогою методу інтегральних перетворень,тому її розв'язок зведено до одновимірної розривної задачі. Остання розв'зана з використанням розривних властивостей функції Гріна.

Невідому функцію, що описує дефект будо знайдено за допомогою побудови Сінгулярного Інтегро-Диференціального рівнння та використання методу ортогональних поліномів.

Отриман точний розв'язок поставленої задачі.

Наведено формули для обчислення зсуву і напруження в шарі. Проведено розрахунки представлені у вигляді графіків.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНА ЧАСТИНА

1.1. Постановка задачі

Розглянемо пружне тіло в вигляді шару $-\infty < x < \infty$; $0 < y < h$, $-\infty < z < \infty$. Нижня основа $y = 0$ нерухомо закріплена, до верхньої основи $y = h$ прикладено дотичне навантаження уздовж осі Oz величина якої не залежить від z. На лінії $y = a$ сполучення шарів є тріщина на ділянці $(-b; b)$, береги якої вільні від навантаження. (Рис. 1)

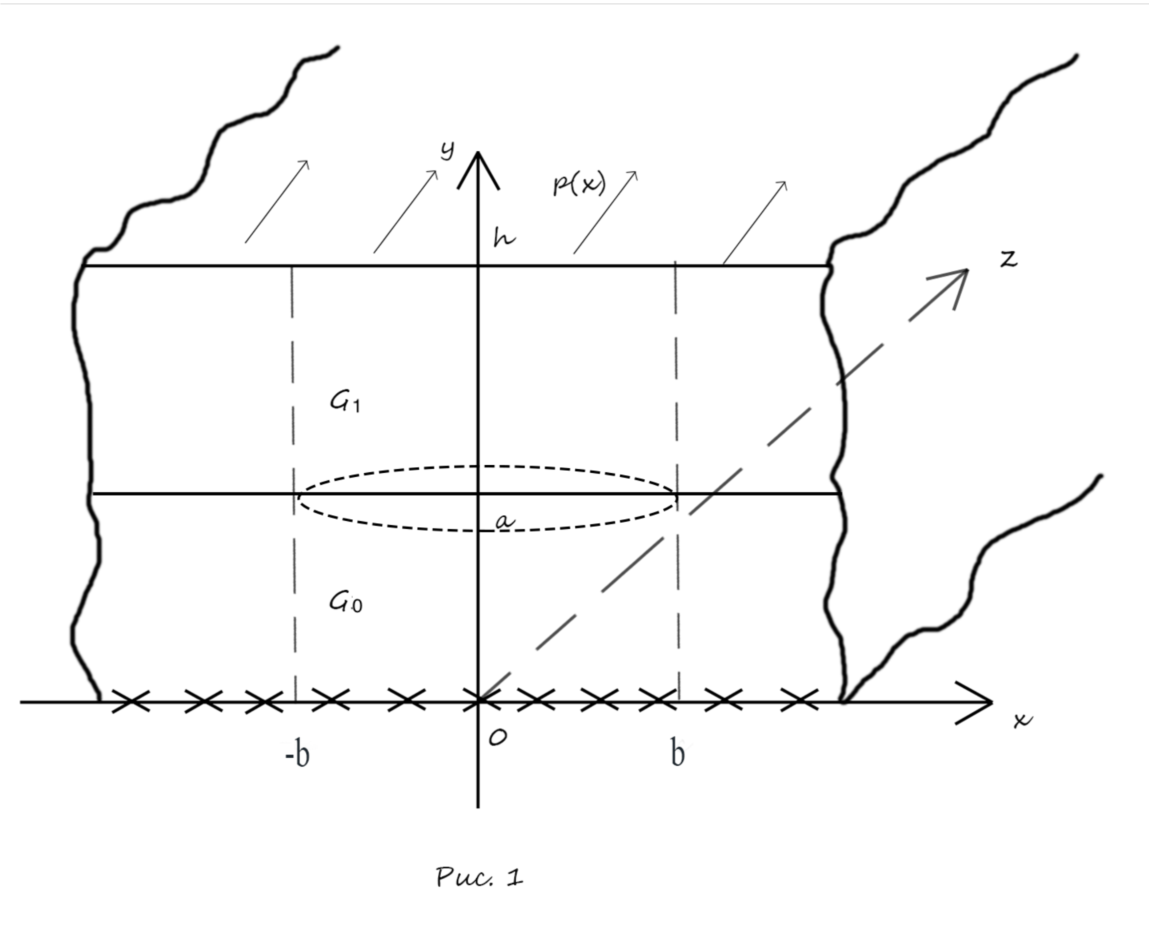

Рис. 1.1. Пружнє тіло.

В цьому випадку дане тіло буде знаходитися в умовах антиплоскої деформації, при якій відмінні від нуля тільки зміщення $W(x,y)$ вздовж осі Oz і два дотичних напруження $\tau_{xz} = G\dfrac{\partial W}{\partial x}$ та $\tau_{yz} = G\dfrac{\partial W}{\partial y}$, де G - модуль зсуву матеріалу тіла.

Припустимо, що смуга складається з двох шарів: $-\infty < x < \infty$, $0 < y < a$ та $-\infty < x < \infty$, $a < y < h$ з різними модулями зсуву G_0 та G_1 відповідно.

Між цими шарами виконуються умова спряження:

$$< W(x,a) >= W(x,a-0) - W(x,a+0) = \varphi(x)$$

$$< \tau_{yz}(x,a) >= G_0 \frac{\partial W}{\partial y}(x,a-0) - G_1 \frac{\partial W}{\partial y}(x,a+0) = 0$$

де $\varphi(x)$ — невідома функція стрибка зміщення при перетині тріщини.

Відмітимо, що при цьому $\varphi(x) = 0$ поза проміжком $(-b;b)$.

Також слід додати умови на трішину:

$\left.\dfrac{\partial W}{\partial y}\right|_{y=a\pm 0} = 0$ — відсутність напруження τ_{yz} на берегах тріщини.

$\varphi(\pm b) = 0$— умова замикання кінців тріщини

Завдання зводиться до знаходження зміщення $W(x,y)$ з рівняння Лапласа:

$\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \ -\infty < x < \infty, \ 0 < y < h, y \neq a$

Тоді задача матеме вид:

$$\begin{cases} \triangle W(x,y) = 0, -\infty < x < \infty; \ 0 < y < h, \ y \neq a \\ W \mid_{y=0} = 0, \dfrac{\partial W}{\partial y} \mid_{y=h} = \dfrac{p(x)}{G_1}, \\ < W(x,a) >= W \mid_{y=a-0} - W \mid_{y=a+0} = \varphi(x) \\ < \tau_{yz}(x,a) >= G_0 \dfrac{\partial W}{\partial y} \mid_{y=a-0} - G_1 \dfrac{\partial W}{\partial y} \mid_{y=a+0} = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

1.2. Зведення до одномірної розривної задачі.

Застосуємо повне Перетворення Фур'є за змінної x:

$$W_\lambda(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x,y)e^{i\lambda x}\,dx; \tag{1.2}$$

З формулою обернення:

$$W(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_\lambda(y)e^{-i\lambda x}\,d\lambda \tag{1.3}$$

Застосуємо формулу інтегрального перетворення до рівняння Лапласу:

$$\begin{gathered} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} e^{i\lambda x}\,dx = -\lambda^2 W_\lambda(y) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} e^{i\lambda x}\,dx = W_\lambda^{''}(y) \end{gathered} \tag{1.4}$$

Рівняння Лапласа набуде вигляду:

$$W_\lambda^{''}(y) - \lambda^2 W_\lambda(y) = 0 \tag{1.5}$$

Крайові умови у просторі трансформант:

$$W_\lambda(0) = 0; W_\lambda^{'}(h) = \frac{p_\lambda}{G_1}; p_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{i\lambda x}\,dx \tag{1.6}$$

Умови спряження у просторі трансформант:

$$< W_\lambda(a) >= W_\lambda(a-0) - W_\lambda(a+0) = \varphi_\lambda$$
$$< \tau_{yz,\lambda}(a) >= G_0 W_\lambda^{'}(a-0) - G_1 W_\lambda^{'}(a+0) = 0. \tag{1.7}$$
$$\varphi_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\lambda x}\, dx$$

Тоді одновимірна задача набуде вигляду:

$$\begin{cases} W_\lambda(y) - \lambda^2 W_\lambda(y) = 0, 0 < y < h, y \neq a \\ W_\lambda(0) = 0; W_\lambda^{'}(h) = \dfrac{p_\lambda}{G_1} \\ < W_\lambda >= \varphi_\lambda; < \tau_{yz,\lambda} >= 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Зазначимо:

$W_\lambda(0) = 0 \Leftrightarrow V_0[W_\lambda] = 0;$

$W_\lambda^{'}(h) = \dfrac{p_\lambda}{G_1} \Leftrightarrow V_1[W_\lambda] = \dfrac{p_\lambda}{G_1}$

В загальному вигляді розв'язок будується у вигляді:

$$W_\lambda(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) G(y,\eta) d\eta + \sum_{i=0}^{1} \gamma_i \psi_i(y) + \sum_{i=0}^{1} \varphi_m W^*(y) \tag{1.9}$$

де:

- $f(\eta)$ — права частина диференціального рівняння. В цій задачі дорівнює нулеві
- $G(y,\eta)$ — функція Грина
- γ_i — значення крайових умов. $\gamma_0 = 0$ та $\gamma_1 = \frac{p_\lambda}{G_1}$
- $\psi_i(y)$ — ФБСР
- φ_m — функції стрибка
- $W^*(y)$ — розривний розв'язок задачі

Функцію Гріна будуємо у вигляді:

$$G(y,\eta) = \Phi(y,\eta) - V_0[\Phi]\psi_0(y) - V_1[\Phi]\psi_1(y) \tag{1.10}$$

де $\Phi(y,\eta) = -\dfrac{1}{2|\lambda|}e^{|\lambda||y-\eta|}$ - фундаментальна функція. $V_n[\Phi]$ - оператори крайових умов, застосовані за змінною y.

Якщо відома функція Гріна $G(y,\eta)$ цієї задачі, то її розривний розв'язок матемо вигляд:

$$W_\lambda(y) = \frac{p_\lambda}{G_1}\psi_1(y) + \sum_{i=0}^{1}\varphi_m W^*(y) \tag{1.11}$$

де $\psi_1(y)$ ФБСР.

Для того, щоб знайти значення ФБСР треба розв'язати наступну задачу:

$$\begin{aligned} \psi_k^2(y) - \lambda^2\psi_k(y) = 0, \quad k = 0,1 \\ V_i[\psi_k(y)] = \delta_{ik}, \qquad i = 0,1 \end{aligned} \tag{1.12}$$

де δ_{ik}— символ Кронокера і дорівнює:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, k \neq i \\ 1, k = i \end{cases}$$

Отже потрібно знайти розв'язки наступних двох допоміжних задач:

$$\psi_0^2(y) - \lambda^2\psi_0(y) = 0 \qquad\qquad \psi_1^2(y) - \lambda^2\psi_1(y) = 0$$

$$\psi_0(y)\Big|_{y=0} = 1, \psi_0'(y)\Big|_{y=h} = 0 \qquad\qquad \psi_1(y)\Big|_{y=0} = 0, \psi_1'(y)\Big|_{y=h} = 1$$

Розв'язок данних підзадач:

$$\psi_0(y) = \frac{\operatorname{ch}\lambda(h-y)}{\operatorname{ch}\lambda h} \qquad\qquad \psi_1(y) = \frac{\operatorname{sh}\lambda y}{\lambda\operatorname{ch}\lambda h}$$

Тоді отримаємо функцію Грина у наступному вигляді:

$$G(y,\eta) = -\frac{1}{2\lambda}e^{\lambda|y-\eta|} + \frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda|-\eta|}\frac{\operatorname{ch}\lambda(h-y)}{\operatorname{ch}\lambda h} - \frac{1}{2}e^{-\lambda|h-\eta|}\frac{\operatorname{sh}\lambda y}{\lambda\operatorname{ch}\lambda h}$$

Отримали, що неперервним розв'язком буде:

$$W_{continious,\lambda}(y) = \frac{p_\lambda}{G_1}\frac{\operatorname{sh}\lambda y}{\lambda \operatorname{ch}\lambda h}$$

Для того щоб знайти розривний розв'язок потрібно скориститись властивістю функціїї Грина. А сама функція Грина на лінії $y = \eta$ потерпає стрибок. У загальноми вигляді даний розвязок матиме вигляд:

$$W_{break,\lambda}(y) = \phi_\lambda^0 W_{0,\lambda}^*(y) + \phi_\lambda^1 W_{1,\lambda}^*(y)$$

де:

$$W_{1-m,\lambda}^*(y) = (-1)^{m+1}\left[v(a)G^{0,m}(y,\eta) + \sum_{i=0}^{m} C_{mi}G^{0,m-i}\right], m = 0,1$$

де:$v(a)$— коефіцієнт у точці стрибка при старшій похідній. В даній задачі дорівнює 1.

Для $m = 0$:

$$W_{1,\lambda}^*(y) = (-1)v(a)G^{0,0}(y,\eta) = -G(y,\eta)$$

Для $m = 1$:

$$W_{0,\lambda}^*(y) = G^{0,1}(y,\eta) + C_{11}G(y,\eta) = G^{0,1}(y,\eta)$$

де: $C_{11} = v^2(a) < G_a^{2-1,1} >=< G_a^{1,1} >= 0$ Отримали:

$$W_{break,\lambda}(y) = \phi_\lambda^0 G^{0,1}(y,\eta) + \phi_\lambda^1(-G(y,\eta))$$

Користуючись умовами спряження отримаємо:

$$W_{break,\lambda}(y) = \varphi_\lambda G^{0,1}(y,\eta)$$

В результаті розв'язок у просторі трансформант матиме вигляд:

$$W_\lambda(y) = W_{continious,\lambda}(y) + W_{break,\lambda}(y) = \frac{p_\lambda}{G_1}\frac{\operatorname{sh}\lambda y}{\lambda \operatorname{ch}\lambda h} + \varphi_\lambda G^{0,1}(y,\eta)$$

де: $G^{0,1}(y,\eta)$— похідна за змінною η

1.3. Обернення інтегрального перетворення.

За формулою обернення(1.3):

$$W(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{p_\lambda}{G_1}\frac{\operatorname{sh}\lambda y}{\lambda\operatorname{ch}\lambda h} + \varphi_\lambda G^{0,1}(y,\eta)\right]e^{-i\lambda x}d\lambda \tag{1.13}$$

Враховуючи: $\varphi_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{i\lambda x}\,dx; p_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty}p(x)e^{i\lambda x}\,dx;$, отримаємо:

$$\begin{gathered}
W_\lambda(y) = \frac{p_\lambda}{G_1}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|y}{|\lambda|\operatorname{ch}|\lambda|h} - \frac{\varphi_\lambda}{2}[\operatorname{sgn}(y-a)e^{-|\lambda||y-a|} + e^{-|\lambda|a|}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|(y-h)}{\lambda\operatorname{ch}|\lambda|h} +\\
+e^{-|\lambda||h-a|}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|y}{\lambda\operatorname{ch}|\lambda|h}] + \frac{1}{2|\lambda|}[e^{-|\lambda||y-a|} - e^{-|\lambda|a|}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|(y-h)}{\lambda\operatorname{ch}|\lambda|h} -\\
-e^{-|\lambda||h-a|}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|y}{\lambda\operatorname{ch}|\lambda|h}]\cdot(2(G_1-G_0)\frac{p_\lambda}{G_1\Delta(\lambda)}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|a}{\operatorname{ch}|\lambda|h} +\\
+\varphi_\lambda\frac{(G_1-G_0)|\lambda|}{\Delta(\lambda)}\left[1 - e^{-|\lambda|a}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|(a-h)}{\operatorname{ch}|\lambda|h} - e^{-|\lambda|(h-a)}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|a}{\operatorname{ch}|\lambda|h}\right]) =\\
= \frac{p_\lambda}{G_1}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|y}{|\lambda|\operatorname{ch}|\lambda|h} + (G_1-G_0)\frac{p_\lambda}{G_1|\lambda|\Delta(\lambda)}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|a}{\operatorname{ch}|\lambda|h} -\\
-\left[e^{-|\lambda||y-a|} - e^{-|\lambda|a|}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|(y-h)}{\lambda\operatorname{ch}|\lambda|h} - e^{-|\lambda||h-a|}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|y}{\lambda\operatorname{ch}|\lambda|h}\right] -\\
-\frac{1}{2}\varphi_\lambda(\operatorname{sgn}(y-a)e^{-|\lambda||y-a|} + e^{-|\lambda|a|}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|(y-h)}{\lambda\operatorname{ch}|\lambda|h} + e^{-|\lambda||h-a|}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|y}{\lambda\operatorname{ch}|\lambda|h} -\\
-\frac{G_1-G_0}{\Delta(\lambda)}\left[e^{-|\lambda||y-a|} - e^{-|\lambda|a|}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|(y-h)}{\lambda\operatorname{ch}|\lambda|h} - e^{-|\lambda||h-a|}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|y}{\lambda\operatorname{ch}|\lambda|h}\right]\cdot\\
\cdot\left[1 - e^{-|\lambda|a}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|(a-h)}{\operatorname{ch}|\lambda|h} - e^{-|\lambda|(h-a)}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|a}{\operatorname{ch}|\lambda|h}\right])
\end{gathered} \tag{1.14}$$

Позначимо

$$\begin{gathered}
F_\lambda(y) = \frac{p_\lambda}{G_1}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|y}{|\lambda|\operatorname{ch}|\lambda|h} + \frac{p_\lambda(G_1-G_0)}{G_1|\lambda|\Delta(\lambda)}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|a}{\operatorname{ch}|\lambda|h}\cdot\\
\cdot\left[e^{-|\lambda||y-a|} - e^{-|\lambda|a}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|(y-h)}{\operatorname{ch}|\lambda|h} - e^{-|\lambda|(h-a)}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|y}{\operatorname{ch}|\lambda|h}\right]
\end{gathered}$$

$$M_\lambda(y) = e^{-|\lambda|a}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|(y-h)}{\operatorname{ch}|\lambda|h} + e^{-|\lambda|(h-a)}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|y}{\operatorname{ch}|\lambda|h} +$$
$$+\frac{G_1-G_0}{\Delta(\lambda)}e^{-|\lambda|(y-a)}\left[e^{-|\lambda|a}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|(a-h)}{\operatorname{ch}|\lambda|h} + e^{-|\lambda|(h-a)}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|a}{\operatorname{ch}|\lambda|h}\right]+$$
$$+\frac{G_1-G_0}{\Delta(\lambda)}\left[e^{-|\lambda|a}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|(y-h)}{\operatorname{ch}|\lambda|h} + e^{-|\lambda|(h-a)}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|y}{\operatorname{ch}|\lambda|h}\right]\cdot$$
$$\cdot\left[1 - e^{-\lambda a}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|(a-h)}{\operatorname{ch}|\lambda|h} - e^{-|\lambda|(h-a)}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|a}{\operatorname{ch}|\lambda|h}\right]$$

Тоді

$$W_\lambda(y) = F_\lambda(y) - \frac{1}{2}\varphi_\lambda(\left[\operatorname{sgn}(y-a)e^{-|\lambda||y-a|} - \frac{G_1-G_0}{\Delta(\lambda)}e^{-|\lambda||y-a|} + M_\lambda(y)\right] =$$
$$= \frac{\varphi_\lambda}{2}\left[\left[\operatorname{sgn}(y-a) - \frac{G_1-G_0}{\Delta(\lambda)}\right]e^{-|\lambda||y-a|} + M_\lambda(y)\right] + F_\lambda(y) \tag{1.15}$$

Тепер звернемо та поставимо сюди $\varphi_\lambda = \int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)e^{i\lambda\varsigma}\,d\varsigma$:

$$W(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\operatorname{sgn}(y-a) - \frac{G_1-G_0}{\Delta(\lambda)}\right]e^{-|\lambda||y-a|}e^{-i\lambda x}d\lambda\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)e^{i\lambda\varsigma}\,d\varsigma-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}M_\lambda(y)e^{-i\lambda x}d\lambda\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)e^{i\lambda\varsigma}\,d\varsigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_\lambda(y)e^{-i\lambda x}dx =$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)d\varsigma\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\operatorname{sgn}(y-a) - \frac{G_1-G_0}{\Delta(\lambda)}\right]e^{-|\lambda||y-a|}e^{-i\lambda(x-\varsigma)}d\lambda-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)d\varsigma\int\limits_{-\infty}^{\infty}M_\lambda(y)e^{-i\lambda(x-\varsigma)}d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_\lambda(y)e^{-i\lambda x}dx \tag{1.16}$$

Для отримання інтегрального рівняння щодо стрибка $\varphi(\varsigma)$ треба скористатися умовою на тріщині:

$$\left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{y=a+0} = 0$$

Тут перший інтеграл містить особливість, яку треба виділити.

Так як $\Delta(\lambda), F_\lambda(y), M_\lambda(y)$ парні по λ, ς

$$W(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)d\varsigma\int_{0}^{\infty}\left[\operatorname{sgn}(y-a) - \frac{G_1 - G_0}{\Delta(\lambda)}\right]e^{-|\lambda||y-a|}\cos\lambda(x-\varsigma)d\lambda -$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)d\varsigma\int_{0}^{\infty}M_\lambda(y)\cos\lambda(x-\varsigma)d\lambda + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}F_\lambda(y)\cos\lambda x d\lambda \tag{1.17}$$

1.4. Побудова сінгулярного інтегро-диференціального рівняння

Розглянемо умову $\left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{y=a+0} = 0$. Будемо поки рахувати, що $y > a$. Тоді

$$\operatorname{sgn}(y-a) - \frac{G_1 - G_0}{\Delta(\lambda)} = 1 - \frac{G_1 - G_0}{\Delta(\lambda)} = \frac{2G_0 + (G_1 - G_0)A_\lambda}{G_1 + G_0 + (G_1 - G_0)A_\lambda}, \text{ де}$$

$$A_\lambda = e^{-\lambda a}\frac{\operatorname{sh}\lambda(a-h)}{\operatorname{ch}\lambda h} + e^{-\lambda(h-a)}\frac{\operatorname{ch}\lambda a}{\operatorname{ch}\lambda h}$$

Так як $A_\lambda \to 0$ при $\lambda \to \infty$, то $1 - \frac{G_1 - G_0}{\Delta(\lambda)} \to \frac{2G_0}{G_1 + G_0}$, $\lambda \to \infty$ і ми можемо виділити це граничне значення.

$$1 - \frac{G_1 - G_0}{\Delta(\lambda)} = \frac{2G_0}{G_1 + G_0} + B_\lambda, \text{ де}$$
$$B_\lambda = \frac{(G_1 - G_0)^2 A_\lambda}{(G_1 + G_0)\left[G_1 + G_0 + (G_1 - G_0)A_\lambda\right]} \to 0$$

Тоді

$$W(x,y)=\frac{G_0}{\pi(G_1+G_0)}\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)d\varsigma\int\limits_0^\infty e^{-\lambda(y-a)}\cos\lambda(x-\varsigma)d\varsigma-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)d\varsigma\int\limits_0^\infty\left[M_\lambda(y)-B_\lambda e^{-\lambda(y-a)}\right]\cos\lambda(x-\varsigma)d\varsigma+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty F_\lambda(y)\cos\lambda xd\lambda$$

Скористаємося відомим інтегралом

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda(y-a)}\cos\lambda(x-\varsigma)d\varsigma=\frac{y-a}{(x-\varsigma)^2+(y-a)^2}$$

та співвідношенням

$$\frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\varsigma)^2+(y-a)^2}}=-\frac{y-a}{(x-\varsigma)^2+(y-a)^2}$$

Тоді

$$W(x,y)=-\frac{G_0}{\pi(G_1+G_0)}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\varsigma)^2+(y-a)^2}}d\varsigma-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)d\varsigma\int\limits_0^\infty\left[M_\lambda(y)-B_\lambda e^{-\lambda(y-a)}\right]\cos\lambda(x-\varsigma)d\varsigma+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty F_\lambda(y)\cos\lambda xd\lambda$$

Продиференціюємо отриманий вираз за y

$$\frac{\partial W}{\partial y}=-\frac{G_0}{\pi(G_1+G_0)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\varsigma)^2+(y-a)^2}}d\varsigma-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)d\varsigma\int\limits_0^\infty\left[M'_\lambda(y)+B_\lambda e^{-\lambda(y-a)}\right]\cos\lambda(x-\varsigma)d\varsigma+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty F_\lambda(y)\cos\lambda xd\lambda$$

При цьому врахуємо, що в другому доданку знаходиться равномірно збіжний інтеграл, який можна диференціювати за параметром. Тепер врахуємо, що функція $\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\varsigma)^2+(y-a)^2}}$ є гармонійною, тобто

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\varsigma)^2+(y-\eta)^2}}=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\varsigma)^2+(y-\eta)^2}}$$

і можемо записати

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{G_0}{\pi(G_1+G_0)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\varsigma)^2+(y-a)^2}}d\varsigma-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)d\varsigma\int\limits_{0}^{\infty}\left[M_\lambda'(y)+B_\lambda e^{-\lambda(y-a)}\right]\cos\lambda(x-\varsigma)d\varsigma+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}F_\lambda(y)\cos\lambda x d\lambda \qquad (1.18)$$

Переходячи до границі при $y\to a+0$, отримаємо інтегральне рівняння для визначення $\varphi(\varsigma)$:

$$\frac{G_0}{\pi(G_1+G_0)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)\ln\frac{1}{|x-\varsigma|}d\varsigma-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)K(x,\varsigma)d\varsigma=-\frac{1}{\pi}g(x) \qquad (1.19)$$

$$K(x,\varsigma)=\int\limits_{0}^{\infty}[M_\lambda'(y)+B_\lambda]\cos\lambda(x-\varsigma)d\lambda,\, g(x)=\int\limits_{0}^{\infty}F_\lambda'(a)\cos\lambda x dx \qquad (1.20)$$

Де

$$F_\lambda'(y)=\frac{P_\lambda}{G_1}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|y}{\operatorname{ch}|\lambda|h}+\frac{P_\lambda(G_1-G_0)}{G_1|\lambda|\Delta(\lambda)}\frac{\operatorname{ch}|\lambda a}{\operatorname{ch}|\lambda|h}\cdot$$
$$\cdot\left[-|\lambda|e^{-|\lambda||y-a|}\operatorname{sgn}(y-a)-e^{-|\lambda|a}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|(y+h)}{\operatorname{ch}|\lambda|h}|\lambda|-e^{-|\lambda||h-a|}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|y}{\operatorname{ch}|\lambda|h}|\lambda|\right]$$

Та

$$M'_\lambda(y)=e^{-|\lambda|a}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|(y-h)}{\operatorname{ch}|\lambda|h}|\lambda|+e^{-|\lambda|(h-a)}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|y}{\operatorname{ch}|\lambda|h}|\lambda|+$$
$$+\frac{G_1-G_0}{\Delta(\lambda)}e^{-|\lambda||(y-a)|}-|\lambda|\left[e^{-|\lambda|a}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|(a-h)}{\operatorname{ch}|\lambda|h}+e^{-|\lambda|(h-a)}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|a}{\operatorname{ch}|\lambda|h}\right]+$$
$$+\frac{G_1-G_0}{\Delta(\lambda)}\left[e^{-|\lambda|a}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|(y-h)}{\operatorname{ch}|\lambda|h}|\lambda|+e^{-|\lambda|(h-a)}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|y}{\operatorname{ch}|\lambda|h}|\lambda|\right]\cdot$$
$$\cdot\left[1-e^{-|\lambda|a}\frac{\operatorname{sh}|\lambda|(a-h)}{\operatorname{ch}|\lambda|h}-e^{-|\lambda|(h-a)}\frac{\operatorname{ch}|\lambda|a}{\operatorname{ch}|\lambda|h}\right]$$

Ми отримаємо інтегральне диференціальне рівняння:

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)\ln\frac{1}{|x-\varsigma|}d\varsigma-\frac{1}{2\pi}(1+\frac{G_1}{G_0})\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)K(x,\varsigma)d\varsigma=$$
$$=-\frac{1}{\pi}(1+\frac{G_1}{G_0})g(x),-b<x<b \tag{1.21}$$

Яке можна розв'язати шляхом застосування методів ортогональних поліномів. Розі'язок шукаємо у вигляді розкладання за поліномами Чебешева II роду

$$\varphi(\varsigma)=\sqrt{b^2-\varsigma^2}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_nU_n(\frac{\varsigma}{b}),\varsigma\in(-b,b) \tag{1.22}$$

Наведене розкладання підставимо в рівняння:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{b^2-\varsigma^2}U_n(\frac{\varsigma}{b})\ln\frac{1}{|x-\varsigma|}d\varsigma-$$
$$-\frac{1}{2\pi}(1+\frac{G_1}{G_0})\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{b^2-\varsigma^2}U_n(\frac{\varsigma}{b})K(x,\varsigma)d\varsigma=-\frac{1}{\pi}(1+\frac{G_1}{G_0})g(x) \tag{1.23}$$

І скористаємося спектральним співвідношенням

$$\frac{b^2}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{b^2-\varsigma^2}U_n(\frac{\varsigma}{b})\ln\frac{1}{|x-\varsigma|}d\varsigma=-(n+1)U_n(\frac{x}{b}):$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(n+1)U_n(\frac{x}{b})+\frac{b^2}{2\pi}(1+\frac{G_1}{G_0})\int\limits_{-b}^{b}\varphi(\varsigma)\sqrt{b^2-\varsigma^2}U_n(\frac{\varsigma}{b})K(x,\varsigma)d\varsigma=$$
$$=\frac{b^2}{\pi}(1+\frac{G_1}{G_0})g(x)$$

Помножимо обидві частини рівняння на $\sqrt{b^2-x^2}U_m(\frac{x}{b})$ проінтегруємо по x на проміжку $(-b;b)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(n+1)\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{b^2-x^2}U_n(\frac{x}{b})U_m(\frac{x}{b})dx+$$
$$+\frac{b^2}{2\pi}(1+\frac{G_1}{G_0})\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{b^2-x^2}U_m(\frac{x}{b})dx\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{b^2-\varsigma^2}U_n(\frac{\varsigma}{b})K(x,\varsigma)d\varsigma=$$
$$=\frac{b^2}{\pi}(1+\frac{G_1}{G_0})\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{b^2-x^2}U_m(\frac{x}{b})g(x)dx \tag{1.24}$$

Скористаємося ортогональністю поліномів Чебишева:

$$\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{b^2-x^2}U_n(\frac{x}{b})U_m(\frac{x}{b})dx=\frac{\pi}{2}b^2\delta_{nm},\delta_{nm}=\begin{cases}1,n=m\\0,n\neq m\end{cases}$$

В результаті отримаємо:

$$\frac{\pi}{2}b^2(m+1)\varphi_m+\frac{b^2}{2\pi}(1+\frac{G_1}{G_0})\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{b^2-x^2}U_m(\frac{x}{b})dx\cdot$$
$$\cdot\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{b^2-\varsigma^2}U_n(\frac{\varsigma}{b})K(x,\varsigma)d\varsigma=\frac{b^2}{\pi}(1+\frac{G_1}{G_0})\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{b^2-x^2}U_m(\frac{x}{b})g(x)dx \tag{1.25}$$

Позначимо $\varphi_n^* = \sqrt{m+1}\varphi_m$ та поділемо на $\sqrt{m+1}$:

Отримаємо нескінченну систему лінійних рівнянь алгебри:

$$\varphi_n^* + \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}\varphi_n^* = b_m, m = 0,1,...$$

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi^2}(1+\frac{G_1}{G_0})\frac{1}{\sqrt{(m+1)(n+1)}}\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{b^2-x^2}U_n(\frac{x}{b})dx\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{b^2-\varsigma^2}U_n(\frac{\varsigma}{b})K(x,\varsigma)d\varsigma$$

$$b_m = \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{m+1}}(1+\frac{G_1}{G_0})\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{b^2-x^2}U_m(\frac{x}{b})g(x)dx$$

При обчисленні інтегралів корисні формули:

$$\int\limits_{-b}^{b}\cos\lambda x\sqrt{b^2-x^2}U_n(\frac{x}{b})dx \tag{1.26}$$

та

$$\int\limits_{-b}^{b}\sin\lambda x\sqrt{b^2-x^2}U_n(\frac{x}{b})dx \tag{1.27}$$

Використаємо квадратні формули:

$$\int\limits_{-b}^{b}f(x)\sqrt{b^2-x^2}U_n(\frac{x}{b})dx = \frac{\pi b^2}{m+1}\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\pi i}{m+1}\sin\frac{\pi(n+1)}{m+1}f(b\cdot\cos\frac{\pi i}{m+1}) \tag{1.28}$$

Далі обчислимо a_{mn}, b_m та розв'язуємо систему методом редукції.

1.5. Знаходження коефіцієнтів інтенсивності напружень.

При розгляді завдань теорії пружності для тіл з дефектами у вигляді як тріщин найбільший інтерес представляє коефіцієнт інтенсивності напруження (КІН) в окілі кінців тріщин. Це пов'язано з тим, що поданий коефіцієнт використовується в механіці руйнувань при дослідженні питання про можливість збільшення тріщини та її вплив на міцність відповідної конструкції.

У разі антиплосної деформації КІН визначається таким чином:

$$K_+ = \lim_{x \to b+0} \sqrt{2\pi(x-b)}\tau_{yz}\Big|_{y=a} \qquad (1.29)$$

$$K_- = \lim_{x \to b-0} \sqrt{2\pi(-b-x)}\tau_{yz}\Big|_{y=a} \qquad (1.30)$$

Для випадку, коли прикладене парне зовнішнє навантаження $p(x)$, то в силу симетрії моделі щодо осі Oy обидва ці коефіцієнти співпадатимуть.

Розглянемо, наприклад:

$$\tau_{yz}\Big|_{y=a+0} = G_1 \frac{\partial W}{\partial y}\Big|_{y=a+0} \qquad (1.31)$$

Враховуючи отриманий вираз для $\dfrac{\partial W}{\partial y}\Big|_{y=a+0}$ і відкидаючи в ньому доданки, що мають кінцеву межу при $x \to b+0$, маємо:

$$\frac{\partial W}{\partial y}\Big|_{y=a+0} = \frac{G_0}{\pi(G_1+G_0)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_{-b}^{b} \varphi(\varsigma) \ln \frac{1}{|x-\varsigma|} d\varsigma + ... \qquad (1.32)$$

Підставимо сюди розвинення функції стрибка за поліномами Чебишева II роду:

$$\varphi(\varsigma) = \sqrt{b^2-\varsigma^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi_m^*}{\sqrt{m+1}} U_m(\frac{\varsigma}{b}) \qquad (1.33)$$

і запишемо вираз для КІН:

$$K_+ = \frac{G_0 G_1}{\pi(G_1+G_0)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi_m^*}{\sqrt{m+1}} \lim_{x\to b+0} \sqrt{2\pi(x-b)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \\ \cdot \int_{-b}^{b} \sqrt{b^2-\varsigma^2} U_m(\frac{\varsigma}{b}) \ln \frac{1}{|x-\varsigma|} d\varsigma \tag{1.34}$$

Оскільки тут $x > b$, то скористаємося значенням наступного інтегралу:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b} \sqrt{b^2-\varsigma^2} U_m(\frac{\varsigma}{b}) \ln \frac{1}{|x-\varsigma|} d\varsigma = \frac{|x|}{\sqrt{x^2-b^2}} U_m(\frac{x}{b}) + \\ + \sqrt{x^2-b^2}\,\mathrm{sgn}\,x U_m'(\frac{x}{b}) - \frac{1}{2}(m+1) U_m(\frac{x}{b}), |x| > b \tag{1.35}$$

Тоді:

$$K_+ = \frac{G_0 G_1}{G_1+G_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi_m^*}{\sqrt{m+1}} \lim_{x\to b+0} \sqrt{2\pi(x-b)} \frac{x}{\sqrt{x^2-b^2}} U_m(\frac{x}{b}) = \\ = \frac{G_0 G_1}{G_1+G_0} \sqrt{\pi b} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m+1} \varphi_m^*, \tag{1.36}$$

враховуючи що $U_m(1) = m+1$.

Аналогічно знаходимо:

$$K_- = \frac{G_0 G_1}{G_1+G_0} \sqrt{\pi b} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sqrt{m+1} \varphi_m^*, \tag{1.37}$$

враховуючи що $U_m(-1) = (-1) U_m(1)$.

РОЗДІЛ 2

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

2.1. Графік переміщення.

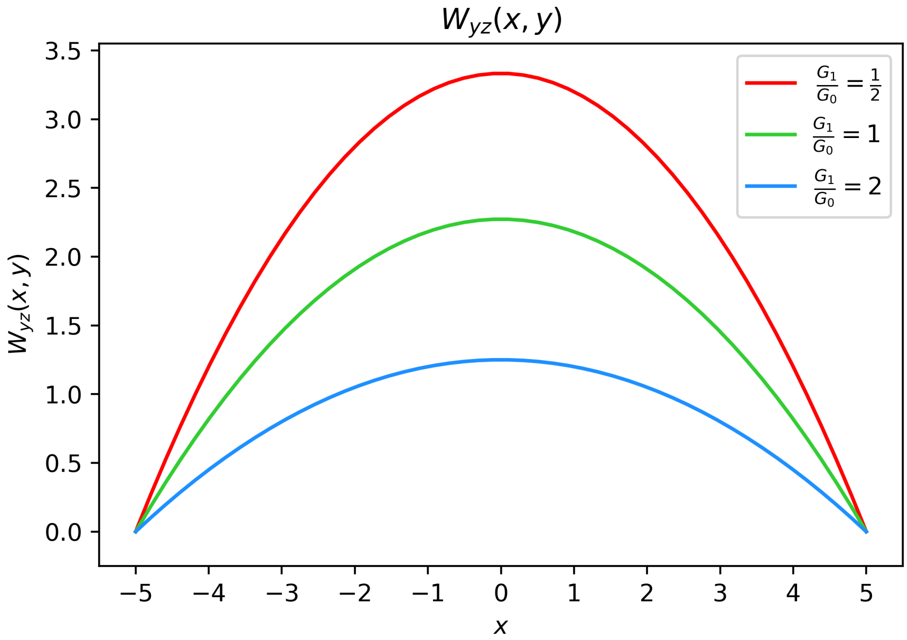

Рис. 2.1. Графік переміщення.

$$h = 2$$

$$G_0 = 26 \cdot 10^9 \text{Гпа} \mid \text{алюминий}$$

$$-b = -5$$

$$G_1 = 40.7 \cdot 10^9 \text{Гпа} \mid \text{медь}$$

$$b = 5$$

2.2. Графік напруження.

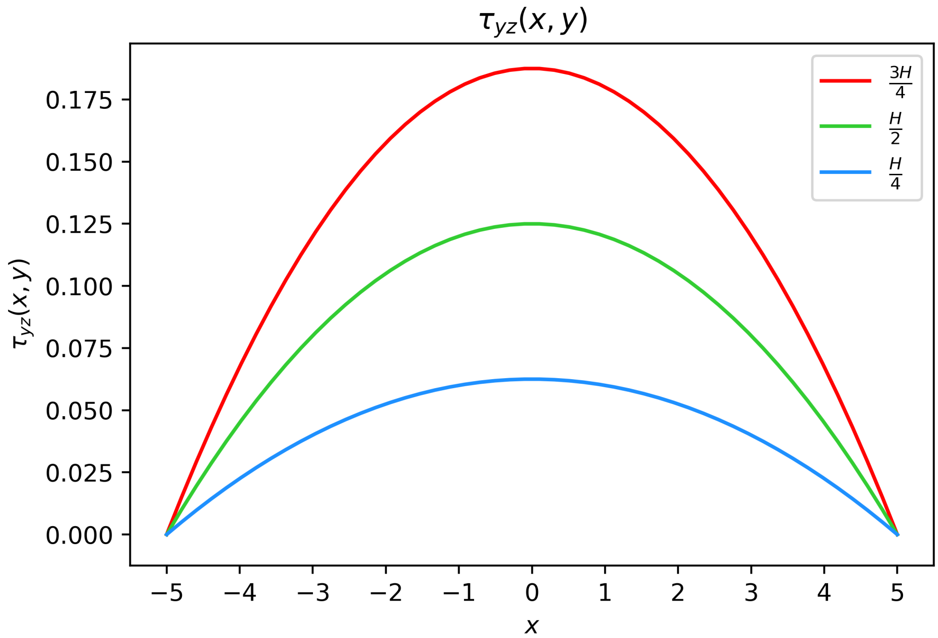

Рис. 2.2. Графік напруження.

$$h = 2$$

$$G_0 = 26 \cdot 10^9 \text{Гпа} \mid \text{алюминий}$$

$$-b = -5$$

$$G_1 = 40.7 \cdot 10^9 \text{Гпа} \mid \text{медь}$$

$$b = 5$$

ВИСНОВКИ

Досліджена а нтиплоська задача теорії пружності для складеної смуги з міжфазним дефектом під впливом навантаження, що задано по вісі Oz.

1) За допомогою методу інтегральних перетворень розв'язок звелен до одновимірної розривної задачі, яка була розв'язана з використання розривних властивостей функції Грина
2) Наведено формули для обчислення зсуву і напруження в шарі
3) Проаналізовані коефіцієнти інтенсивності напружень стосовно довжини тріщини.
4) Навели графики напруження та переміщення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Попов Г. Я. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень/ Попов Г. Я., Реут В. В., Вайсфельд Н. Д. — М.:Одеса, Астропринт, 2005, - 18с.
2. Градштейн І. С., Рижик І. М. Таблиці інтегралів, сум, рядів та назв. М.: Фізматгіз, 1963.— 1100 с.
3. Попов Г. Я.,В. В. Реут, М. Г. Моісеєв, Н. Д. Вайсфельд. Рівняння математичної фізики. Метод ортоганальний многочленів: навчальний посібник — Одеса: Астропрінт, 2010,— 120с.
4. Попов Г. Я. Концентрація пружних напруг біля штампів розрізів тонких включень та підкріплень. М: Наука. Головна редакція фізико-математичної літератури,— 1982.— 344 с.
5. Тихонов А. Н., Самарський А. А. Рівняння математичної фізики. - М.: Наука, 1972. – 736 с.
6. Абрамовиц М., Стиган І. Довідник спеціальних функцій. - М.: Наука, 1979. – 832 с.
7. Новацький В. Теорія пружності - М.: Мир, 1975. – 372 с.