

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра оптимального керування та економічної кібернетики

## Дипломна робота

магістра

на тему: «Моделювання волатильності криптовалютних ринків»

«Modeling the volatility of cryptocurrency markets»

Виконала: студентка денної форми навчання

спеціальності 113 Прикладна математика

Ялимова Іванна Валентинівна

Керівник: к. т. н., доц. Мороз В.В.

Рецензент: к. ф. – м. н., доц. Страхов Є.М.

Рекомендовано до захисту:  
Протокол засідання кафедри  
№ \_\_\_ від «\_\_\_» \_\_\_\_\_ р.  
Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_

Захищено на засіданні ЕК № \_\_\_\_\_  
протокол № \_\_\_ від \_\_\_\_\_ р.  
Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_  
Голова ЕК

\_\_\_\_\_

# ЗМІСТ

<b>Анотація</b>	3
<b>Вступ</b>	4
<b>1. Огляд літератури</b>	6
1.1. Основні поняття броунівського руху.....	6
1.2. Огляд моделей броунівського руху.....	7
<b>2. Математичні моделі та методи дослідження</b>	9
2.1. Теорія Ейнштейна.....	9
2.2. Теорія Ланжевена, співвідношення Стокса-Ейнштейна та формула Гріна-Кубо.....	13
2.3. Стохастичні диференціальні рівняння та рівняння Фоккера-Планка.....	17
<b>3. Модифікація алгоритму моделі GBM</b>	20
<b>4. Апробація алгоритму моделі GBM</b>	28
<b>Висновок</b>	34
<b>Список літератури</b>	35

## Анотація

В роботі розглянута теорія Ейнштейна про броунівський рух та експеримент Перріна. Описано підхід і теорію Ланжевена в термінах випадкової сили, а також співвідношення Стокса - Ейнштейна. Розглянуто поняття стохастичного диференціального рівняння та його еквівалентний опис у термінах рівнянь Фоккера-Планку. Використано стохастичний метод для побудови моделі геометричного броунівського руху, в результаті якого отримано різні сценарії волатильності цін на криптовалютній біржі.

## Вступ

Головною проблемою використання інформації на ринках/біржах є збереження активів та вміння прогнозувати ціни. У русі цін на криптовалютному ринку беруть участь багато факторів, які складно змодельовати. Такими факторами є новини, ліквідність, розмір ринку та навіть людська психологія. Інвестори, безумовно, ухвалюють рішення на основі емпіричних даних та індикаторів фондового ринку. Однак вони можуть інтерпретувати дані по-різному, як через їхню схильність до ризику, так і через свій настрій на даний момент. У той час як одна з останніх новин в країні спонукає одного інвестора купувати акції, іншого вона змушує продавати самі ці акції. Отже, прогнозування цін на біржі валют є складною роботою, але все ще є цінні інструменти, які можуть допомогти нам зрозуміти рух цін до певного моменту.

Проблеми випадковості та детермінованості поведінки біржових ринків продовжують хвилювати економістів та стрімко обговорюються у сучасній економічній літературі. Методи випадкового блукання зайняли міцне становище в економічній теорії та біржовій практиці.

В роботі розглядається метод побудови геометричного броунівського руху (GBM) з використанням мови програмування Python для моделювання ціноутворення криптовалют. GBM технічно є Марківським процесом, тобто, ціни наслідують випадкове блукання. Ця модель безперервних випадкових процесів є моделлю з дискретним часом.

Аргументами на користь використання GBM є [1]:

- Очікувані результати GBM не залежать від значення ціни, що узгоджується з тим, що ми очікуємо насправді;
- Процес GBM приймає лише позитивні значення, як і реальні ціни;

- Процес GBM демонструє таку ж «непередбачуваність» на своєму шляху, що і реальні ціни;
- Розрахунки з процесами GBM відносно прості.

Однак GBM не є повністю реалістичною моделлю, зокрема вона не відповідає дійсності за наступними пунктами [1]:

- У реальних цінах на біржі валют волатильність змінюється з часом (можливо, стохастично), але GBM волатильність передбачається постійною;
- У реальному житті ціни часто показують стрибки, викликані різними факторами, але у GBM цей шлях є безперервним (без розривів).

**Метою роботи** є дослідження волатильності криптовалют і поліпшення методів цієї оцінки.

**Об'єктом дослідження** є динамічні процеси на фінансових ринках.

**Предмет дослідження** – волатильність криптовалют на основі моделювання геометричного броунівського руху.

**Ціль роботи** – дослідити GBM на реальних даних і оцінити можливості застосування даної моделі.

# 1. Огляд літератури

## 1.1. Основні поняття броунівського руху

**Броунівський рух** — випадковий безладний рух мікроскопічних частинок, зважених у рідині або газі [2]. Було відкрито у 1827 році Робертом Броуном. Броунівський рух ніколи не припиняється. Також є наслідком та свідченням існування теплового руху.

Під мікроскопом такий рух може виглядати як на наступних фотографіях, де чорні крапки - це молекули, а жовта (або червона) точка - пил (частки, що досліджуються):

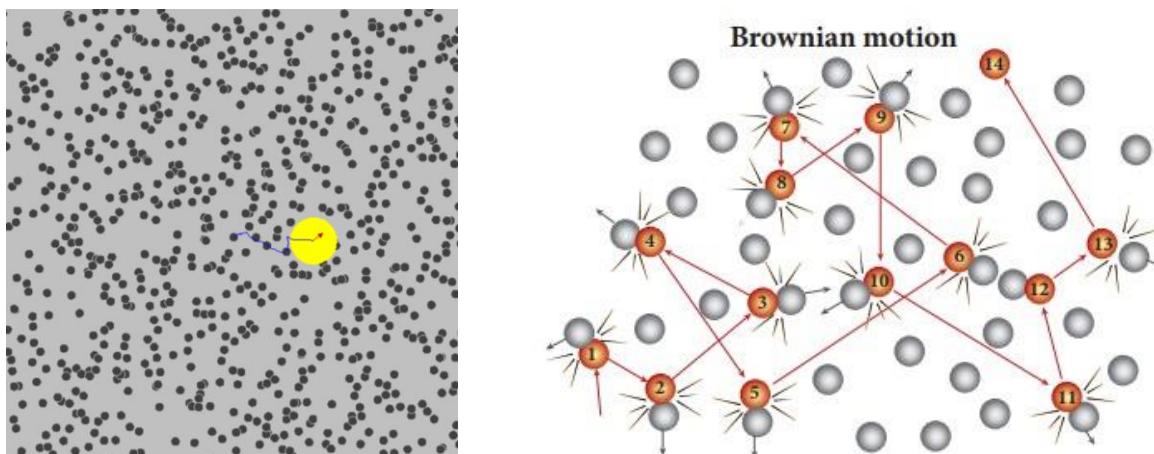


Рис. 1. Зображення броунівського руху

Цей випадковий процес має наступні властивості [1]:

- броунівський рух – це гаусівський процес, тобто вектори руху, викликані процесом, мають нормальний розподіл;
- броунівський рух має стаціонарний приріст, тобто, його розподіл ймовірностей не змінюється з часом;
- броунівський рух - це мартингал, тобто його вектори руху створюють послідовність випадкових величин, умовне очікування наступного

значення в послідовності, враховуючи всі попередні значення, дорівнює поточному значенню.

## 1.2 Огляд моделей броунівського руху

Дивлячись у мікроскоп на частинки, що застрягли в порожнині всередині пилку квіткового у воді, Броун зазначив, що частинки хаотично переміщалися у воді. Він повторив свої експерименти з різними частинками: з мертвих рослин, суспензії мінералів, вулканічного попелу або будь-якої подрібненої субстанції. Після завершення досліджень він вважав випадкові рухи ознаками життя.

До досліджень Броун у 1785 році Ян Інгенхауз описав нерегулярний рух деревного вугілля на поверхні спирту [3].

Цей випадковий процес розглядав Луї Башельє (1900) [4], який цікавився моделюванням коливань цін на фінансових ринках. Він встановив ряд властивостей цього процесу. Запропонована модель корисна для прогнозування змін цін на фінансових ринках і тепер становить основу багатьох кількісних моделей фінансових ринків, включаючи модель Блека-Шоулза. Описаний ним процес став частиною його дисертації «The Theory of Speculation», в якій обговорюється використання броунівського руху для розрахунку цін опціонів.

Також Альберт Ейнштейн (1905) [5] дав математичну модель нерегулярного руху колоїдних частинок і пояснив, як рух, який спостерігав Браун, був результатом переміщення пилку окремими молекулами води. Він пояснив його приблизно так: зважена у воді частка зазнає постійного «бомбардування» з боку молекул води, що хаотично рухаються. Головний результат статті Ейнштейна свідчить, що середньоквадратичне відхилення  $\langle r^2(t) \rangle$  сферичної броунівської частки росте лінійно з часом  $t$  з амплітудою, обернено пропорційною кількості молекул у рідині [6], де  $\langle r^2(t) \rangle = \langle |r(t) - r_0|^2 \rangle =$

$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |r^{(i)}(t) - r^{(i)}(0)|^2$ ,  $N$  - кількість частинок, які необхідно усереднити; вектор  $r^{(i)}(0)$  - це вихідне становище  $i$ -ї частки, а  $r^{(i)}(t)$  - це становище  $i$ -ї частки в момент часу  $t$ . Кутові дужки означають взяття середньої величини (усереднення) від множини значень виразу, укладеного в дужки.

Маріан Смолуховський (1906) [5] незадовго до Ейнштейна розробив аналогічне теоретичне пояснення броунівського руху у термінах зіткнень молекул.

У 1908 році французький фізик Поль Ланжевен [7] і сучасник Ейнштейна застосував закон Ньютона до броунівської частки. Таким чином, він винайшов  $F = ma$  стохастичної фізики, яка тепер називається «рівнянням Ланжевена», де  $F$  - це сила, що діє на тіло або частинку,  $m$  - маса тіла і  $a$  - прискорення, яке набуває тіло під дією цієї сили.

У 1908 році Жан Перрен провів серію дослідів та зробив хорошу оцінку числа Avogadro [8] (кількість структурних одиниць в одному молі).



## 2. Математичні моделі та методи дослідження

### 2.1 Теорія Ейнштейна

А. Ейнштейн у 1905 році успішно ввів перше математичне трактування безладного руху броунівських частинок. Аргументи Ейнштейна складаються із трьох концепцій [9].

По-перше, він ввів поняття грубого опису, що визначається часом  $\tau$  так, що різні частини траєкторії, розділені часом  $\tau$  або більш великим часом, можна вважати незалежними. Не передбачається охарактеризувати динаміку часу, меншого, ніж час  $\tau$ .

Друга концепція, введена Ейнштейном, – це концепція функції щільності ймовірності  $f(\Delta)$  у разі коли  $\Delta = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$  – координати точки, шлях до якої проходить броунівська частка за фіксований інтервал часу  $\tau$ . Варто зауважити, що функція  $f(\Delta)$ , крім загальної умови невід'ємності та нормування (площа під кривою щільності розподілу дорівнює одиниці, тобто ймовірність, що швидкість молекули лежить у  $[0, \infty)$ ) має ще умову симетрії

$$f(-\Delta) = f(\Delta), \quad \forall \Delta \in \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

так як зіткнення молекул рідини та броунівської частинки відбуваються з однаковою ймовірністю у будь-якому напрямку.

Третя частина його опису - розгляд параметра  $N$  броунівських частинок у досить великій системі. Якщо сфокусуватися на великих просторових масштабах, які набагато перевищують розмір броунівської частинки, то можна визначити щільність частки  $n(x, t)$  так, що  $n(x, t)dx$  - кількість частинок в інтервалі  $(x; x + dx)$  в момент часу  $t$ .

З припущення, що частини траєкторій, розділених тимчасовим інтервалом, є статистично незалежними, і збереження кількості частинок, впливає, що кількість частинок у місці розташування  $x$  в момент часу  $t + \tau$

визначатиметься числом частинок у місцезнаходження  $x - \Delta$  в момент часу  $t$ , помножений на ймовірність того, що частка перескоче з  $x - \Delta$  на  $x$  на елементарному часовому кроці, який дорівнює  $f(\Delta)$ , та інтегрований для всіх можливих  $\Delta$  значень, тобто

$$n(x, t + \tau) = \int_{\mathbb{R}^3} n(x - \Delta, t) f(\Delta) d\Delta \quad (2)$$

Це основне рівняння еволюції числової густини  $n(x, t)$ . З технічного погляду, це рівняння нерозривності, що виражає збереження частинок, тобто те, що броунівські частки не можуть бути створені і не можуть зникнути внаслідок зіткнень із молекулами рідини.

Використовуючи ряд Тейлора для виразу (2) отримаємо:

$$n(x, t + \tau) \approx n(x, t) + \tau \frac{\partial n(x, t)}{\partial t}, \quad (3)$$

$$n(x - \Delta, t) \approx n(x, t) - \Delta \cdot \nabla n(x, t) + \frac{\Delta^2}{2} \nabla^2 n(x, t). \quad (4)$$

Отже

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} n(x - \Delta, t) f(\Delta) d\Delta \approx \\ & \approx n(x, t) \int_{\mathbb{R}^3} f(\Delta) d\Delta - \nabla n(x, t) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \Delta f(\Delta) d\Delta + \\ & + \frac{1}{2} \nabla^2 n(x, t) \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta, \end{aligned} \quad (5)$$

та використовуючи нормалізацію PDF (Probability density function) функції  $f$  та співвідношення симетрії  $f(-\Delta) = f(\Delta)$ , спростимо перший член у правій частині цього рівняння і позбудемося другого.

Отже, отримуємо рівняння дифузії для поля густини частинок:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \nabla^2 n(x, t), \quad (6)$$

де коефіцієнт дифузії  $D$  задається через функцію щільності ймовірності  $f(\Delta)$  як

$$D = \frac{1}{2\tau} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta = \frac{\langle \Delta^2 \rangle}{2\tau} \quad (7)$$

Щоб вирішити це рівняння у часткових похідних, спочатку потрібна початкова умова. Якщо спочатку всі броунівські частки розташовані на початку координат, то маємо  $n(x, 0) = \bar{n}(k, t) \delta(x)$ . Рівняння дифузії можна розв'язати різними методами. Одне з найпоширеніших - це перетворення Фур'є поля щільності частинок. Зокрема, визначаємо

$$\bar{n}(k, t) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{ik \cdot x} n(x, t) dx \quad (8)$$

і виводимо його щодо часу, щоб отримати рівняння (9) (після подвійного інтегрування частинами та ігнорування граничних членів при  $\infty$ ):

$$\frac{\partial \bar{n}(k, t)}{\partial t} = -Dk^2 \bar{n}(k, t) \rightarrow n(x, t) = \bar{n}(k, t) e^{-Dk^2 t} \quad (9)$$

де ми вже використовували згадану вище початкову умову.  $n(k, t)$  є гаусова крива, тому її зворотне перетворення Фур'є також є гаусовою, а саме

$$n(x, t) = \frac{\bar{n}(k, t)}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (10)$$

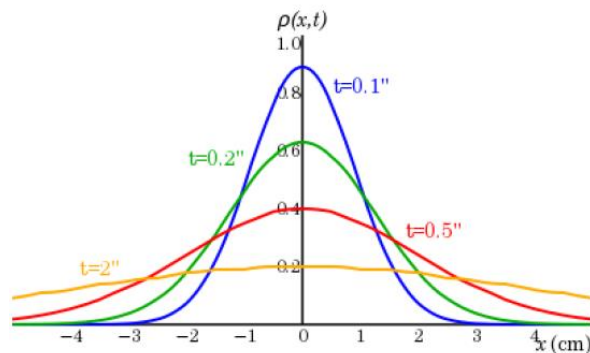
Інший спосіб вирішення рівняння дифузії – аналіз розмірів. Для цього спочатку потрібно звернути увагу, що  $n(x, t)$  – це поле густини частинок, тому воно має одиниці зворотного об'єму,  $[n(x, t)] = L^{-d}$  у розмірності  $d$ , де  $L$  - одиниця довжини. Більш того, постійна дифузії  $D$ , визначена вище, має одиниці  $[D] = \frac{L^2}{T}$ , де  $T$  - одиниця часу, та, очевидно,  $[t] = T$ .

Єдина нетривіальна величина, яку не можна визначити за допомогою одиниць довжини в задачі – це  $\sqrt{Dt}$ , тому  $(Dt)^{d/2} n(x, t)$  - безрозмірна величина, яка має залежати лише від інших безрозмірних величин. Зі змінних  $x, t, D$  можна скласти єдину безрозмірну величину  $\frac{x}{\sqrt{Dt}}$ . Отже, найбільш загальна залежність поля щільності від основних змінних, що допускається аналізом розмірів, така:

$$n(x, t) = \frac{1}{(Dt)^{\frac{d}{2}}} \rho(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{Dt}} \quad (11)$$

Щільність залежить від однієї масштабної змінної, а не від двох основних змінних  $x$  і  $t$ . Ця особливість полегшує аналіз диференціальних рівнянь у часткових похідних, що описують нерівноважні системи. Рівняння (11) часто називають масштабним анзацом (the scaling ansatz). Для рівняння дифузії підстановка в анзац (11) зводить це рівняння у часткових похідних до виду

$$2\nabla^2 \rho(\xi) + \xi \nabla \rho(\xi) + d\rho(\xi) = 0 \quad (12)$$



*Рис. 2 Еволюція у часі поля щільності для локалізованої групи броунівських частинок. Це гауссова крива, дисперсія якої лінійно росте з часом, рівняння (10) [5]*

Застосовуючи умову нормалізації та симетрії  $\rho(\xi)$  навколо  $\xi = 0$ , і двічі інтегруючи вказане вище рівняння, отримуємо  $\rho(\xi) = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$  для довільної розмірності  $d$ , та використовуючи  $\xi = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$ , ми відновлюємо гауссівське рішення для  $n(x, t)$ , яке описане вище.

Яким би не був метод рішення, з гаусівського рішення  $n(x, t)$  випливає, що середнє становище броунівської частки  $\langle x(t) \rangle = 0$  і що середньоквадратичне становище лінійно збільшується з часом, а саме  $\langle x(t)^2 \rangle = 6Dt$  в  $d = 3$  вимірах. Як згадувалося вище, це передбачення було успішно підтверджено в експериментах Перріна і зробило вирішальний внесок у прийняття атомно-молекулярної теорії речовини.

## 2.2. Теорія Ланжевена, співвідношення Стокса-Ейнштейна та формула Гріна-Кубо

Підхід Ейнштейна більш феноменологічний (узагальнений) і не може дати явного висловлювання, наприклад, для коефіцієнта дифузії в термінах мікроскопічних величин.

Поль Ланжевен ініціював інший додатковий підхід [9]. У ньому Ланжевен зосередився на траєкторії окремої броунівської частинки та записав рівняння Ньютона: Сила = маса  $\times$  прискорення ( $F = ma$ ).

Траєкторія броунівської частки непостійна, і тому її опис вимагатиме особливого роду сили. Ланжевен розглянув два типи сил, що діють на броунівську частинку: звичайні сили тертя, які, згідно з законом Стокса, були б пропорційні швидкості, і сила, що «флуктує»  $\zeta(t)$ , являє собою «нестійку» силу, що відбувається через вплив молекул рідини на броунівську частинку.

Рівняння руху броунівської частки стає тоді

$$m \frac{dv}{dt} = -6\pi\eta a v + \zeta, \quad (13)$$

де  $\eta$  - коефіцієнт в'язкості,  $a$  – радіус броунівської частки (яка вважається сферичною). Помножуючи обидві частини на  $x$  і вважаючи, що  $v = \frac{dx}{dt}$ , отримаємо рівняння (14).

$$\frac{m}{2} \frac{d^2 x^2}{dt^2} - m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = -3\pi\eta a \frac{dx^2}{dt} + x \cdot \zeta \quad (14)$$

Ланжевен зробив два припущення щодо флюктуючої сили  $\zeta(t)$ : вона має середнє значення 0 (зіткнення не штовхають броунівську частинку в якомусь напрямку) і що вона не корелює з фактичним положенням броунівської частки (дія молекул рідини на броунівській частинці однаково незалежно від її розташування), тобто

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0; \quad \langle x \cdot \zeta(t) \rangle = \langle x \rangle \cdot \langle \zeta(t) \rangle = 0 \quad (15)$$

Приймаючи середні значення за всіма реалізаціями випадкової сили  $\zeta(t)$  у диференціальному рівнянні (15) та використовуючи попередні умови для статистики  $\zeta(t)$ , отримуємо

$$\frac{m}{2} \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} = m \langle v^2 \rangle - 3\pi\eta a \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} \quad (16)$$

що є рівнянням для середнього квадрата положення броунівської частки.

Ланжевен припустив, що ми зараз перебуваємо в режимі, в якому досягнуто теплової рівноваги між броунівською часткою та навколишньою рідиною. Зокрема, це означає, що згідно з теоремою про рівнорозподіл середня кінетична енергія броунівської частки дорівнює  $\langle \frac{mv^2}{2} \rangle = \frac{3kT}{2}$  ( $k$  - постійна Больцмана (фізична постійна, що визначає зв'язок між температурою та енергією [10]), а  $T$  - температура рідини).

Вирішуючи попереднє рівняння можна побачити, що після деякого перехідного часу дається асимптотичне середньоквадратичне зміщення, яке задається

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{kT}{\pi\eta a} t \quad (17)$$

Це закон дифузії Ейнштейна  $\langle x(t)^2 \rangle = 6Dt$ , але тепер є явний вираз для коефіцієнта дифузії у термінах інших макроскопічних змінних, що виражається через співвідношення Стокса-Ейнштейна:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a} = \frac{RT}{\pi\eta a N_{Av}} \quad (18)$$

де використано визначення постійної Больцмана  $k$  через постійну ідеального газу  $R$  (поведінка реального газу при помірних тисках та температурах) та число Авогадро  $N_{Av}$ , тобто  $k = \frac{R}{N_{Av}}$ .

Таким чином, вимірюючи коефіцієнт дифузії броунівських частинок і в'язкість рідини, можемо отримати непрямий вимір розміру  $a$  молекул рідини або, що еквівалентно, числа Авогадро.

Зв'язок між постійною дифузиею та інтегралом від рівноважної тимчасової кореляційної функції швидкості броунівської частки - це частковий приклад формул Гріна-Кубо, що зв'язують коефіцієнти перенесення та рівноважні функції тимчасової кореляції.

Розглянемо усунення положення броунівської частки в інтервалі  $[0, t]$ . Це можна записати як

$$x(t) = \int_0^t ds v(s), \quad (19)$$

де  $v(s)$  - швидкість частки у момент часу  $s$ .

Середнє по ансамблю середнього квадрата зміщення дорівнює

$$\langle x(t)^2 \rangle = \left\langle \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 v(s_1)v(s_2) \right\rangle = \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \langle v(s_1)v(s_2) \rangle \quad (20)$$

Інтеграл містить тимчасову кореляційну функцію швидкості у моменти часу  $s_1$  и  $s_2$ .

Візьмемо похідну за часом і об'єднаємо два еквівалентні члени у правій частині,

$$\frac{d}{dt}\langle x(t)^2 \rangle = 2 \int_0^t ds \langle v(t)v(s) \rangle \quad (21)$$

Кореляційна функція швидкості є рівноважним середнім і може залежати від довільного початку осі часу. Він може залежати тільки від різниці в часі  $t - s = u$ , тоді маємо рівняння (22):

$$\frac{d}{dt}\langle x(t)^2 \rangle = 2 \int_0^t ds \langle v(t-s)v(0) \rangle = 2 \int_0^t du \langle v(u)v(0) \rangle \quad (22)$$

Кореляційна функція швидкості зазвичай за короткий час знижується до нуля; у простих рідинах це може бути близько пікосекунд. З іншого боку, очікується, що рівняння дифузії буде справедливим лише за часів, які набагато перевищують молекулярний час.

У межі великої  $t$ , згідно з теорією Ейнштейна  $\langle x(t)^2 \rangle = 6Dt$ , ліва частина наведеного вище рівняння наближається до  $6D$ . У тому режимі права частина наближається до інтегралу за часом від нуля до нескінченності.

Таким чином, виведено приклад зв'язку Гріна-Кубо коефіцієнта перенесення з функцією тимчасової кореляції,

$$D = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} du \langle v(u)v(0) \rangle \quad (23)$$



### 2.3. Стохастичні диференціальні рівняння та рівняння Фоккера-Планка

Рівняння Ланжевена [11] є прикладом стохастичного диференціального рівняння, а довільна сила Ланжевена  $\zeta(t)$  є ілюстрацією випадкового процесу [9]. Природна мова розуміння обох концепцій - це теорія ймовірностей.

Стохастичне диференціальне рівняння – це диференціальне рівняння, що містить випадковий процес  $\hat{\eta}(t)$ , тобто рівняння виду

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = G(\hat{x}(t), t, \hat{\eta}(t)) \quad (24)$$

де  $G$  - задана функція, яка залежить від змінної  $x(t)$ , від часу  $t$  та випадкового процесу  $\hat{\eta}(t)$ .

Випадковий процес - це сімейство  $\hat{x}(t)$  випадкових величин, що залежать від деякого безперервного дійсного параметра  $t$ .

У більшості випадків,  $t$  – це фізичний час, і стохастичний процес можна розглядати як виконання кількох імовірнісних експериментів по одному у кожний момент часу.

Стохастичний процес можна розглядати як сукупність всіх цих можливих траєкторій, а стохастичне диференціальне рівняння як сімейство звичайних диференціальних рівнянь, по одному на кожен результат усіх послідовних імовірнісних експериментів, пов'язаних із випадковим процесом  $\hat{\eta}(t)$ . Як наслідок, для будь-якої заданої початкової умови  $x_0$  в момент часу  $t_0$  є сімейство можливих траєкторій.

Отже, сімейство  $\hat{x}(t)$ , яке є сукупністю всіх цих можливих траєкторій, слід розглядати також як випадковий процес, і тому позначаємо його символом «капелюх». Однак  $\hat{x}(t)$  не є довільним випадковим процесом, скоріше він залежить від  $\hat{\eta}(t)$  таким чином, яке визначає стохастичне диференціальне рівняння, і, як наслідок, статистичні властивості  $\hat{x}(t)$  залежать від статистичної якості  $\hat{\eta}(t)$ .

Строго кажучи, «вирішення стохастичного диференціального рівняння» означає дати повну характеристику випадкового процесу  $\hat{x}(t)$ , а саме дати всі  $m$ -кратні функції щільності ймовірності  $f(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m)$  у термінах статистичних властивостей  $\hat{\eta}(t)$ . Однак, для повної характеристики узагальненого випадкового процесу необхідно знати функцію довільного числа параметрів.

У багатьох випадках можна отримати лише одновимірну функцію щільності ймовірності  $f(x; t)$  і двовірну функцію щільності ймовірності  $f(x_1, x_2; t_1, t_2)$ . Виходячи з цього, можна вирахувати середні траєкторії

$$\langle \hat{x}(t)^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n f(x; t) \quad (25)$$

та тимчасові кореляції

$$\langle \hat{x}(t_1)^n \hat{x}(t_2)^m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x_1^n x_2^m f(x_1, x_2; t_1, t_2) \quad (26)$$

Загалом функція  $G$  в рівнянні (24) може залежати від випадкового процесу  $\hat{\eta}(t)$  довільним чином. Припустимо, що рівняння можна записати так, що  $\hat{\eta}(t)$  входить лінійно:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = q(\hat{x}(t)) + g(\hat{x}(t))\hat{\eta}(t) \quad (27)$$

Стохастичні диференціальні рівняння такого типу називаються рівняннями Ланжевена.

У цьому випадку незалежний випадковий процес  $\hat{\eta}(t)$  у рівнянні Ланжевена зазвичай називають шумом.

Дотримуючись цих позначень, член  $g(\hat{x}(t))\hat{\eta}(t)$  у рівнянні (27) називається шумовим або дифузійним членом, тоді як  $q(\hat{x}(t))$  - детермінованим членом чи дрейфовим членом. Виділяється випадок, коли функція  $g(\hat{x}(t))$  є константою,

і в цьому випадку шум називається адитивним. В іншому випадку шум називається мультиплікативним.

Для простоти позначень запишемо диференціальне рівняння Ланжевена як

$$\frac{dx(t)}{dt} = q(x(t)) + g(x(t))\eta(t) \quad (28)$$

Вище розглянуто траєкторії, що описують випадкові процеси відповідно до початкового ланжевенівського підходу до броунівського руху.

Далі визначимо рівняння для одноразового розподілу ймовірностей для випадкового процесу, що описується рівнянням Ланжевена з білим гаусовим шумом. Воно називається рівнянням Фоккер-Планка і є узагальненням рівняння дифузії, отриманого Ейнштейном для опису броунівського процесу.

Необхідно знайти рівняння для одновимірної функції розподілу ймовірностей  $f(x, t)$  для випадкового процесу  $x(t)$ , який виникає, як рішення стохастичного диференціального рівняння з гауссівським білим шумом  $\zeta(t)$ , визначений таким чином, що  $\langle \zeta(t) \rangle = 0$  та  $\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \delta(t - t')$ , тобто,

$$\frac{dx(t)}{dt} = q(x(t)) + g(x(t))\zeta(t) \quad (29)$$

Щоб отримати це рівняння, потрібно усереднити всі можливі початкові умови та всі реалізації випадкового процесу  $\zeta(t)$ . В результаті отримуємо рівняння Фоккера-Планка для функції щільності ймовірності:

$$\frac{\partial f(x; t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [q(x)f(x; t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ g(x) \frac{\partial}{\partial x} [g(x)f(x; t)] \right] \quad (30)$$

### 3. Модифікація алгоритму в моделі GBM

Геометричний броунівський рух  $B(t)$  може бути представлений у вигляді рішення стохастичного диференціального (31), яке має лінійний дрейф і коефіцієнти дифузії:

$$dB(t) = \mu B(t)dt + \sigma B(t)dW(t) \quad (31)$$

або

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (32)$$

Якщо початкове значення броунівського руху дорівнює  $B(t) = B_0$  та обчислення  $\sigma B(t)dW(t)$  може бути застосовано з лемою Іто (лема Іто - формула заміни змінної у стохастичному диференціальному рівнянні) [ $F(X) = \log(X)$ ], то отримаємо рівняння (33):

$$\begin{aligned} B_k &= e^{\log B_0 + drift_k \cdot t + diffusion_k} = \\ &= B_0 e^{drift_k t + diffusion_k}, \quad \text{for } \forall k \text{ points,} \end{aligned} \quad (33)$$

де

$$drift_k = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (34)$$

$$diffusion_k = \sigma W_k \quad (35)$$

Таким чином, маємо

$$B_k = B_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_k}, \quad \forall k \quad (36)$$

де  $\hat{\mu} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ .

Тут  $W(t)$  є логарифмічно нормально розподіленим.

Щільність складає

$$f(t, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\log x - \log x_0 - \hat{\mu}t}{2\sigma^2 t}} \quad (37)$$

Геометричне броунівський рух широко використовується для моделювання цін на акції у фінансовій сфері. Нижче наведено вхідні параметри, які прийматиме модель GBM [13]:

$B_0$  – початкова ціна

$dt$  – часовий приріст (наприклад, день)

$T$  – довжина часового інтервалу для прогнозу (в днях)

$N$  – кількість тимчасових точок

$t$  – масив для тимчасових точок

$\mu$  – середнє значення для історичної прибутковості

$\sigma$  – стандартне відхилення

$b$  – масив для броунівських прирощень

$W$  – масив для броунівського шляху

Нижче наведено алгоритм моделювання цін на фінансовому ринку, використовуючи GBM [13]:

### 1. Визначення початкової ціни $B_0$

Моделювання цін бере свій початок від початкової вартості  $B_0$  – остання ціна історичної прибутковості.

### 2. Визначення тимчасового кроку $dt$

Приріст часу  $dt$  у нашій моделі означає тимчасовий крок, який може становити, наприклад, 1 день або місяць. Це значення впливає з тимчасових

кроків у історичних даних. Наприклад, якщо дані публікуються кожні 12 годин, то  $dt = 0.5$  дня.

### 3. Визначення довжини часу $T$ для прогнозування цін

Довжина часу  $T$  означає тривалість часового проміжку нашого прогнозу цін. Наприклад, нам необхідно зробити прогноз на місяць, отже  $T = 30$  торгових днів.

### 4. Визначення параметра часових точок $N$

Параметр часових точок  $N$  на часовому проміжку  $T$  виходить автоматично після встановлення параметрів  $dt$ ,  $T$  і дорівнює

$$N = \frac{T}{dt} \quad (38)$$

Це масив, де ми показуємо хід часу в нашій моделі. Це схоже на тікер часу, де вимірюємо час, підраховуючи кількість минулих часових точок.

### 5. Побудова масиву $t$ для тимчасових точок

Далі побудова масиву  $t$  впливає з обчислення часових точок  $N$ . Це масив часу, на який потрібно робити прогнози. Наприклад, прогноз потрібно зробити на місяць, отже, масив  $t$  починається з 1 і збільшується до 30.

### 6. Знаходження середньої прибутковості $\mu$

Параметр  $\mu$  - це середня прибутковість історичних цін і перш ніж розраховувати  $\mu$ , потрібно розрахувати прибутковість для кожного торговельного часу за допомогою рівняння (39):

$$r_k = \frac{B_k - B_{k-1}}{B_{k-1}}, \quad \forall k - \text{time period} \quad (39)$$

Тоді

$$\mu = \frac{1}{|k|} \sum_{\forall k} r_k. \quad (40)$$

Після розрахунку прибутковості потрібно обчислити середнє арифметичне, використовуючи цю прибутковість, щоб остаточно отримати  $\mu$ , яке будемо застосовувати для обчислення дрейфу. Також можемо взяти до уваги, що при негативному значенні  $\mu$  буде спостерігатися негативна прибутковість.

#### 7. Знаходження стандартного відхилення $\sigma$

Далі стандартне відхилення  $\sigma$  є важливим параметром, оскільки буде корисно включити випадкові поштовхи до наших прогнозів. Цей параметр сприятиме масштабуванню величини випадкового удару так, щоб невеликі коливання відбувалися відповідно до історичної волатильності цін:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{|k|} \sum_{\forall k} (r_k - \mu)^2} \quad (41)$$

#### 8. Побудова масиву $b$ броунівського приріста

Масив  $b$  – це масив  $[z_1, \dots, z_k]$ , де ми додаємо випадковість до нашої моделі, тому що хочемо мати різні сценарії поведінки ціни в межах тимчасового горизонту прогнозу. Для цього потрібний параметр *size\_scenarios*. Якщо йому надати значення  $n$ , це означає, що зрештою ми матимемо  $n$  різних рядів цін. Масив  $b$  для кожного відповідного моменту часу прогнозування зберігає випадкове число, отримане зі стандартного нормального розподілу. Ці випадкові числа додадуть до моделі випадкові поштовхи. Для цього скористаємося в Python `numpy.random.normal()` для генерації випадкових значень стандартного нормального розподілу.

#### 9. Побудова масиву $W$ броунівського шляху

Параметр  $W$  – це броунівський шлях, який визначає, як ціни коливаються від початкової точки  $B_0$  до деякої іншої точки часу  $t$ . Наприклад, припустимо, що в момент часу  $t = 2$  ціна дорівнює  $B_2$ . При прогнозуванні моменту часу  $t = 3$ ,  $b(3)$  застосовується до  $B_2$  як випадковий поштовх. З іншого боку,  $W$  - шлях, означає, що він включає ефекти всіх випадкових ударів з початку в інтервалі

тимчасового прогнозу. Це загальний ефект випадковості, включений в  $B_0$  до певного моменту часу, який нас цікавить.  $B_0$ , припустимо, прогнозуємо в момент часу  $t = 3$ . Нам потрібно застосувати всі випадкові удари аж до моменту часу  $t = 3$  включно  $B_0$ . Тому замість  $b(3)$  ми використовуємо  $W(3)$ , який є сукупною сумою елементів масиву  $b$  з індексом меншим або рівним 3.

$$W_k = \sum_{i=1}^k b_i, \quad k = 1, \dots, N \quad (42)$$

### 10. Знаходження дрейфу та дифузії

Компонентами GBM є дрейф та дифузія. Будемо називати довгострокові тренди дрейфом, а короткострокові коливання – дифузیهю. Припустимо, що ми знаходимося у певній тимчасовій точці  $(k - 1)$ , і збираємось передбачити тимчасову точку  $(k)$ . Тривалість періоду між  $(k - 1)$  і  $(k)$ , рівна  $dt$ , відповідає частоті історичних даних.

Ми знаходимося на момент часу  $(k - 1)$ . Ціна в цей момент часу повинна задовольняти довгостроковій тенденції цін, при цьому, яка піддається на випадковому удару, який використаємо для створення прогнозу в момент часу  $(k)$ . Таким чином, потрібно застосувати два компоненти GBM до цієї ціни:

- Дрейф

Маємо рівняння дрейфу (43) для точки  $k$

$$drift_k = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (43)$$

Отже

$$B_k = B_{k-1} e^{drift_k} = B_{k-1} e^{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2} \quad (44)$$

Дрейф відображає довгостроковий тренд цін. Як згадувалося вище  $\mu$  та  $\sigma$  - це постійні значення, розраховані на основі історичних даних про ціни. Наш дрейф є постійною величиною, і якщо припустимо, що випадкового удару немає, то можемо застосувати його до ціни в момент



часу  $(k - 1)$ , як у наведеному вище виразі. Якщо ми продовжуємо застосовувати дрейф без випадкового удару, ціни плавно піднімаються, якщо дрейф позитивний, або знижується, якщо дрейф негативний. Можна зауважити, що ціни ніколи не зможуть прийняти значення 0, тому що дрейф застосовується через експоненційну функцію.

- Дифузія

Маємо рівняння дифузії (45) для кожної точки часу  $k$ :

$$diffusion_k = \sigma b_k = \sigma z_k \quad (45)$$

Дифузія відображає більш короткострокові коливання. Як згадувалося раніше, в масиві  $b$  зберігається необхідна випадкова інформація про поштовхи, і він отримує випадкову інформацію про поштовхи зі стандартної нормальної випадкової величини  $z$ . При обчисленні дифузійної складової помножимо випадкову величину  $z(k)$  на  $\sigma$ . Тут можна побачити, як випадковість включена в модель GBM. Крім того, компонент дифузії дозволяє створювати різні сценарії прогнозування цін. Компонент дрейфу є постійним. Ми не можемо створювати з цього різні сценарії, але компонент дифузії допомагає створювати стільки сценаріїв, скільки потрібно, оскільки він включає вінерівський процес (він створює незалежні, стаціонарні та нормально розподілені випадкові поштовхи).

## 11. Знаходження геометричного броунівського руху для кожної наступної точки (ціни) $B_k$

Таким чином, при прогнозуванні на момент часу  $(k)$  з урахуванням ціни на момент часу  $(k - 1)$  потрібно додати ефекти від обох компонент. Загальний комбінований ефект дає прогноз для моменту часу  $(k)$ . Якби був лише компонент дрейфу, ми завжди знали б, якою стане ціна в наступний момент часу, але компонент дифузії порушує цю плавність, створюючи випадковий

поштовх. Таким чином, ми не спостерігаємо поступового зростання чи зниження цін. Нижче показано, як загальний комбінований ефект застосовується до ціни в момент часу  $(k - 1)$ .

$$B_k = B_{k-1} e^{(drift_k + diffusion_k)} = B_{k-1} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z_k\right)} \quad (46)$$

Таким чином, отримана побудова моделі GBM із дискретним часом для прогнозування цін на один момент часу вперед. Далі розглянемо, як можна побудувати модель та передбачити  $B_k$ , використовуючи відому початкову ціну  $B_0$ :

$$\begin{aligned} B_k &= B_{k-1} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z_k\right)} \\ B_k &= B_{k-2} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z_{k-1}\right)} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z_k\right)} \\ B_k &= B_{k-3} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z_{k-2}\right)} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z_{k-1}\right)} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z_k\right)} \\ B_k &= B_{k-4} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z_{k-3}\right)} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z_{k-2}\right)} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z_{k-1}\right)} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z_k\right)} \\ &\dots \end{aligned}$$

Зробивши заміну  $B_{k-1}$  на  $B_{k-2} e^{(drift_{k-1} + diffusion_{k-1})}$ , далі  $B_{k-2}$  на  $B_{k-3} e^{(drift_{k-2} + diffusion_{k-2})}$  і роблячи ці заміни далі ітераційно, отримаємо початкову ціну  $B_0$ , помножену на  $k$  експоненційних членів:

$$B_k = B_0 \prod_{i=1}^k e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z_i\right)}, \quad k = 1, \dots, N \quad (47)$$

Якщо розкласти рівняння (47) і виразити дрейф і дифузю окремо, то отримаємо наступне:

$$B_k = B_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)} \dots e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)} e^{\sigma b_1} \dots e^{\sigma b_k} \quad (48)$$

$$B_k = B_0 e^{k\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)} e^{\sigma \sum_{i=1}^k b_i} \quad (49)$$

$$B_k = B_0 e^{k(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma \sum_{i=1}^k b_i} \quad (50)$$

Дрейф не змінюється від однієї часової точки до іншої, тому щоб передбачити  $k$  моментів часу вперед, додаємо дрейф (зміщення)  $k$  багато разів.

Зробивши заміну  $t_k = k$  та  $W_k = \sum_{i=1}^k b_i$  маємо остаточне геометричне рівняння (51) броунівського руху:

$$B_k = B_0 e^{t_k(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma W_k} \quad (51)$$

Для того щоб створювати прогнози, спочатку потрібно обчислити дрейф для всіх тимчасових точок на тимчасовому горизонті прогнозу, множимо  $t$  на зміщення і отримуємо масив зміщень. Цей масив дрейфу містить загальний дрейф для всіх часових точок на часовому горизонті прогнозу.

Що стосується дифузії, то ми матимемо масив дифузії для кожного *size\_scenarios*.

## 4. Апробація алгоритму моделі GBM

В якості вхідних даних були використані ціни BTC/USD за 2021 рік з джерела Yahoo Finance [14] (провайдер фінансової інформації, що належить американської компанії Yahoo!, що володіє пошуковою системою і надає ряд сервісів).

На лінійному графіку нижче вісь абсцис показує дні з 1 січня 2021 року по 30 квітня 2021 року, а вісь ординат вказує ціни в доларах. Можна сказати, що загальна тенденція висхідна. Щодня відбуваються випадкові потрясіння падаючих (плавно) цін, що призводять до неправильної кривої графіка.

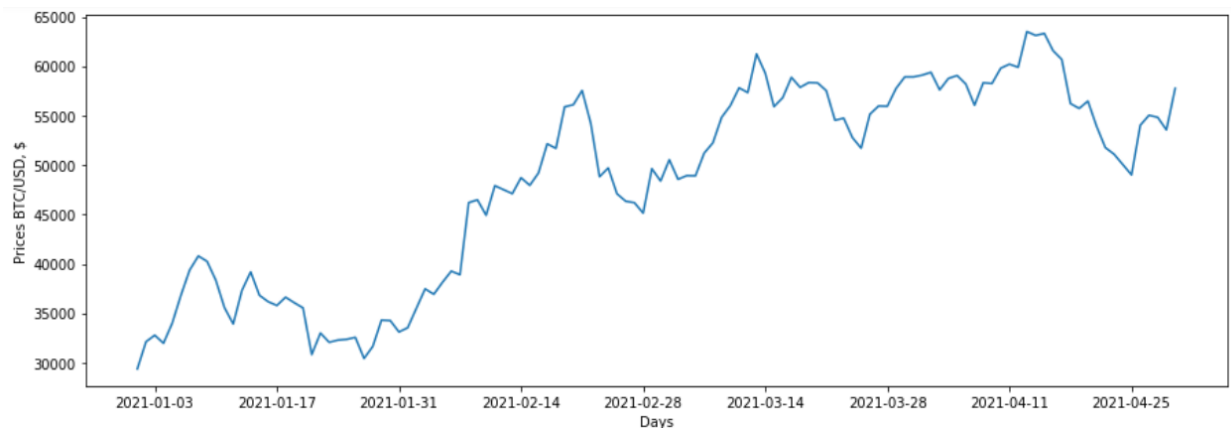


Рис. 3. Ціни BTC/USD за січень - квітень 2021 року

Період для історичних цін візьмемо один місяць - березень, а для прогнозу цін – квітень. В результаті обчислень програми [13] отримали дані для всіх параметрів:

```
Initial price (Bo): 58918.83203099999
Time step (dt): 1
Length of time period of prediction (T): 30
Number of time points in the prediction (N): 30.0
Time ticker (t): [ 1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
20 21 22 23 24
25 26 27 28 29 30]
Mu (μ): 0.009261895880993515
Sigma (σ): 0.03576288491351628
Brownian increments (b): {'1': array([-0.70918054, 0.88496649, -
0.09736363, 1.97470019, -0.48776466,
-0.89355565, -0.25065084, 1.38211753, 0.66068367, 0.69869084,
```

```

0.00255395, -0.08204863, 1.25198089, 0.05578107, -1.31331823,
0.22462879, -0.28739816, -0.14725542, 1.39647622, 0.69758219,
1.59939418, 0.06905448, -0.12685821, 0.34367492, 1.17787778,
1.06526941, 1.00034894, -0.1565933, -0.6901311, 0.09538925]),
'2': array([-0.86706665, -0.11985046, -0.95291332, -1.67847109,
0.57433072,
0.65372015, 0.24032315, -1.08128658, -1.43618242, -2.18894054,
0.32937844, -1.36519986, 0.59958553, 0.62695162, -0.00590589,
-0.22487578, 0.33921697, 0.03561456, 0.62518381, 0.07354412,
-0.36299474, 1.45403327, 0.59080934, 0.75438136, -1.53415321,
0.99953917, -0.2167493, 0.73812844, -1.5873136, -0.01515633])}
Brownian path (W) {'1': array([-0.70918054, 0.17578595, 0.07842232,
2.0531225, 1.56535784,
0.67180219, 0.42115135, 1.80326889, 2.46395256, 3.1626434,
3.16519735, 3.08314872, 4.3351296, 4.39091068, 3.07759245,
3.30222124, 3.01482308, 2.86756766, 4.26404388, 4.96162608,
6.56102026, 6.63007473, 6.50321652, 6.84689144, 8.02476922,
9.09003863, 10.09038757, 9.93379426, 9.24366317, 9.33905242]),
'2': array([-0.86706665, -0.9869171, -1.93983042, -3.61830152, -3.0439708
,
-2.39025065, -2.1499275, -3.23121408, -4.6673965, -6.85633704,
-6.5269586, -7.89215846, -7.29257293, -6.66562131, -6.6715272,
-6.89640299, -6.55718601, -6.52157145, -5.89638764, -5.82284352,
-6.18583826, -4.73180499, -4.14099565, -3.38661429, -4.9207675,
-3.92122833, -4.13797762, -3.39984918, -4.98716278, -5.00231911])}
drift:
[0.0086224 0.01724481 0.02586721 0.03448962 0.04311202 0.05173442
0.06035683 0.06897923 0.07760164 0.08622404 0.09484644 0.10346885
0.11209125 0.12071365 0.12933606 0.13795846 0.14658087 0.15520327
0.16382567 0.17244808 0.18107048 0.18969289 0.19831529 0.20693769
0.2155601 0.2241825 0.23280491 0.24142731 0.25004971 0.25867212]
diffusion:
{'1': array([-0.02536234, 0.00628661, 0.00280461, 0.07342558,
0.05598171,
0.02402558, 0.01506159, 0.0644901, 0.08811805, 0.11310525,
0.11319659, 0.11026229, 0.15503674, 0.15703163, 0.11006358,
0.11809696, 0.10781877, 0.10255249, 0.15249451, 0.17744206,
0.23464101, 0.2371106, 0.23257378, 0.24486459, 0.2869889,
0.32508601, 0.36086137, 0.35526114, 0.33058006, 0.33399146]),
'2': array([-0.0310088, -0.035295, -0.06937393, -0.1294009, -0.10886118,
-0.08548226, -0.07688761, -0.11555754, -0.16691956, -0.24520239,
-0.23342287, -0.28224635, -0.26080345, -0.23838185, -0.23859306,
-0.24663527, -0.23450389, -0.23323021, -0.21087183, -0.20824168,
-0.22122342, -0.169223, -0.14809395, -0.1211151, -0.17598084,
-0.14023444, -0.14798602, -0.12158841, -0.17835533, -0.17889736])}

```

Нижче отримали графік прогнозів і можемо бачити 2 сценарії прогнозування цін (рис. 4). Один сценарій (синя лінія) йде вгору, другий (жовта лінія) – коливається щодо відносно одного рівня, на початку ціни трохи знижуються, потім поступово піднімаються. Можемо спостерігати з масиву дрейфу, що

значення позитивні, тобто, довгостроковий тренд цін є висхідним. При негативному дрейфі, може бути прогноз, який зростає, і це пов'язано з випадковими ударами, які ми створюємо, використовуючи стандартну нормальну випадкову величину. Чорна пунктирна лінія – це дійсні ціни за квітень. Також можемо бачити значення коефіцієнта кореляції для двох прогнозів щодо дійсних цін. Більший зв'язок становить  $r = -0.7547$  у жовтої лінії прогнозу, що можемо помітити це і на графіку.

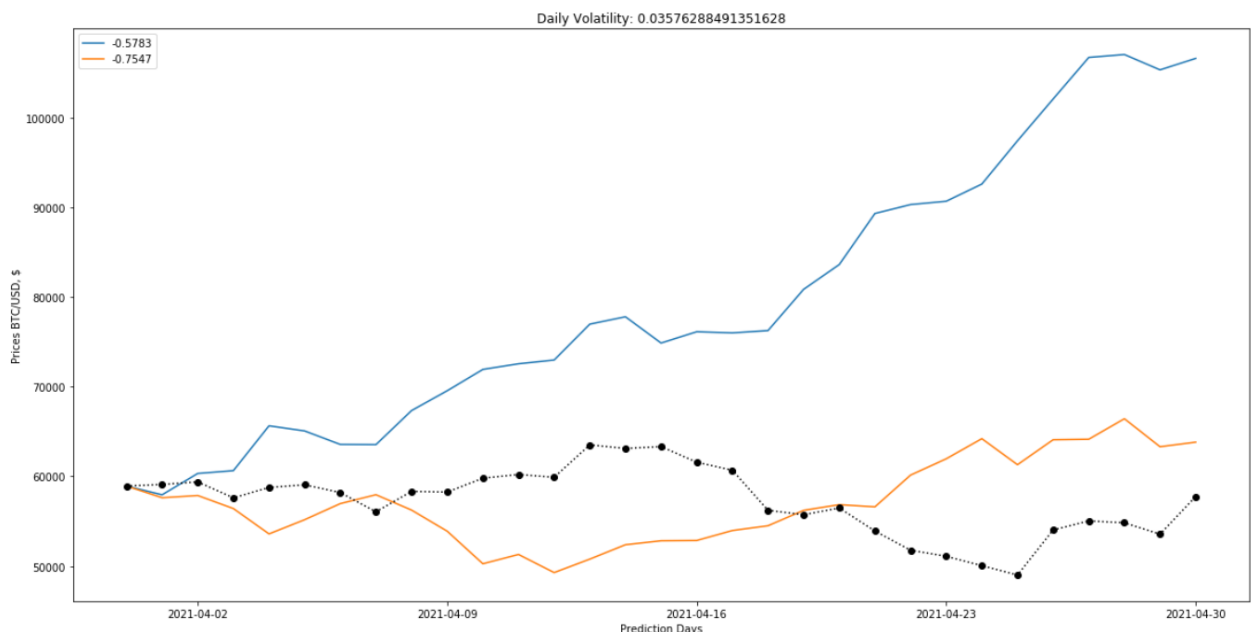


Рис. 4. Два різні сценарії цін за квітень (1 місяць для іст. цін, 1 місяць для прогнозу)

Якщо  $size\_scenarios = 25$ , то отримаємо графік нижче (Рис. 5). У кожному прогоні є різні сценарії цін. Щоразу, коли запускаємо модель, то буде інший масив  $W$ , і це призведе до різних прогнозів.

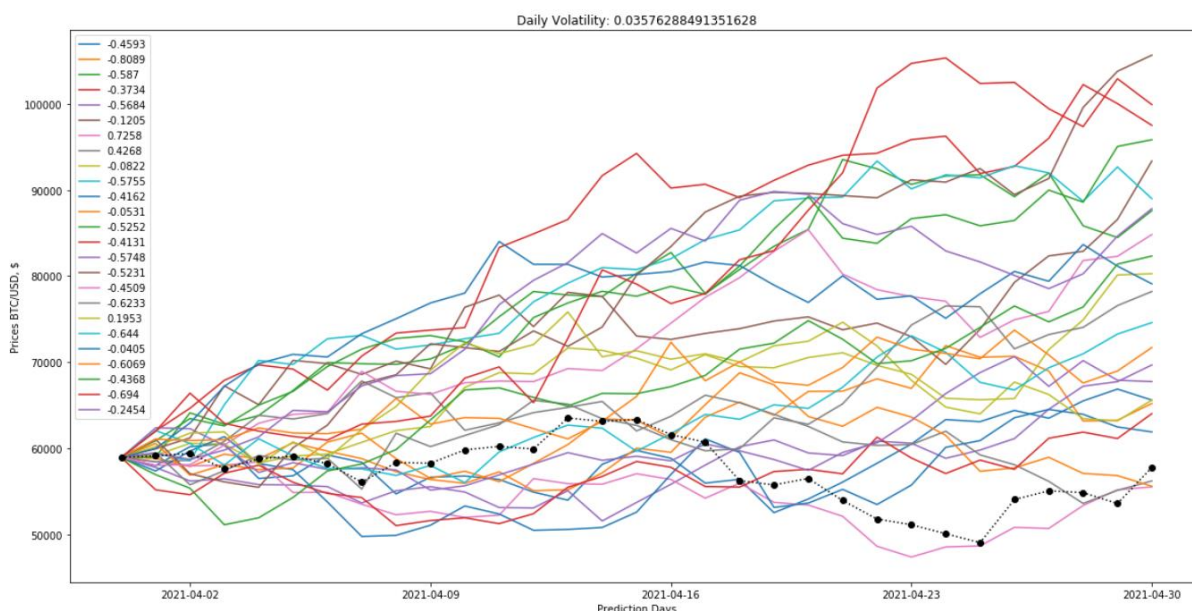


Рис. 5. 25 різних сценаріїв цін за квітень

Візьмемо період історичних цін для обчислення  $\mu$  та  $\sigma$  3 місяці – січень, лютий та березень, а для прогнозу також квітень. Тоді отримаємо наступний результат (рис. 6). Результати практично не змінилися при  $\mu = 0.008997$  та  $\sigma = 0.048229$ .

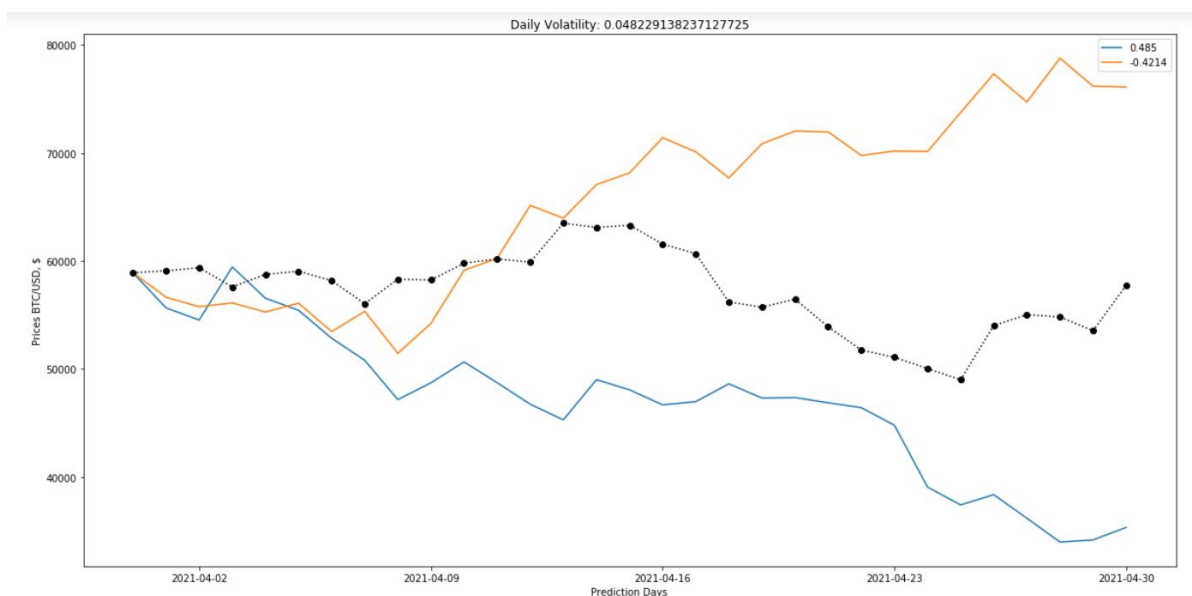
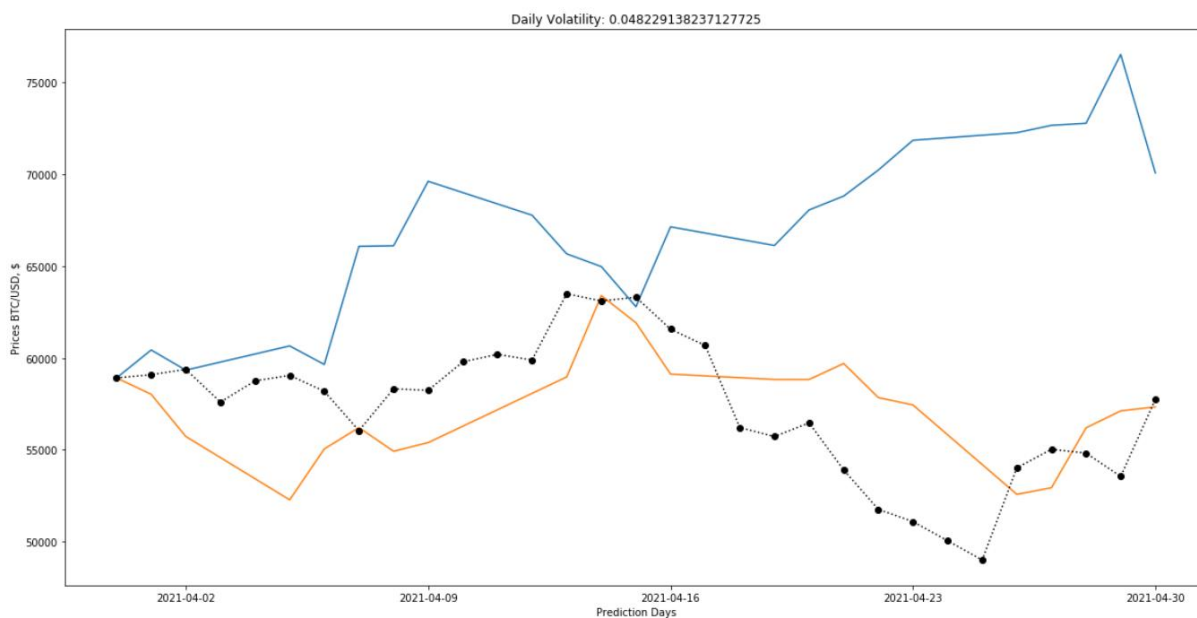


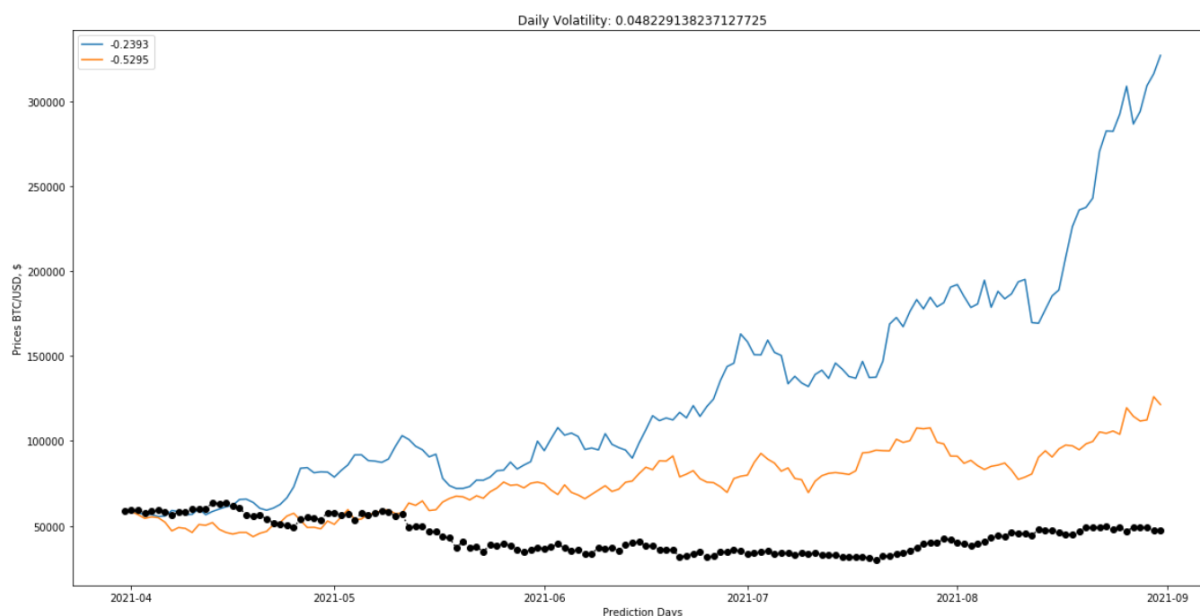
Рис. 6. Два сценарії цін за квітень (3 місяці для іст. цін, 1 місяць для прогнозу)

Якщо встановимо довжину часових точок  $T = 22$  для прогнозу, отримаємо наступний графік (Рис. 7). Також можемо бачити аналогічний результат.



*Рис. 7. Два сценарії цін за квітень (3 місяці для іст. цін, 1 місяць для прогнозу,  $T = 22$ )*

Візьмемо період прогнозування 5 місяців із квітня по серпень і отримаємо такі результати (Рис. 8):



*Рис. 8. Два сценарії цін від квітня по серпень (3 місяці для іст. цін, 5 місяців для прогнозу,  $T = 153$ )*

На графіку вище можемо бачити, що чим більший заданий період для прогнозу, тим більше ціни прогнозування віддаляються від дійсних значень.



Другий сценарій жовтого кольору краще прогнозує тренд реальних цін, ніж перший сценарій синього кольору.

## Висновок

Дана робота дає змогу зробити висновок, що метод побудови геометричного броунівського руху дозволяє моделювати ціни криптовалют на фінансовому ринку, будувати прогнози та дає можливість бачити тренд ціноутворень.

Тестові результати даного алгоритму показали, що чим більший заданий період прогнозу на вхід програми, тим більше прогнозовані ціни відхиляються від реальних цін. Також можна помітити, що якщо збільшувати значення параметра історичних цін, то результат прогнозу цін не буде кращим, як, наприклад, у машинному навчанні. Тобто  $\mu$  та  $\sigma$  залишаються аналогічними за значенням.

В роботі показані математичні моделі та методи дослідження броунівського руху, як випадкового процесу: метод Ейнштейна, Ланжевена, використання стохастичного диференціального рівняння. Також показано модифікацію алгоритму GBM, яка допомагає побачити, якими шляхами можуть йти ціни, що дає нам можливість створювати надійні стратегії торгівлі та хеджування, на які можемо покластися або орієнтуватися.

## Список літератури

1. Geometric Brownian motion [Електронний ресурс]: Вікіпедія. Вільна енциклопедія - Режим доступу:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric\\_Brownian\\_motion](https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_Brownian_motion)
2. Броуновское движение [Електронний ресурс]: Вікіпедія. Вільна енциклопедія - Режим доступу:  
[https://ru.wikipedia.org/wiki/Броуновское\\_движение](https://ru.wikipedia.org/wiki/Броуновское_движение)
3. Microscopy UK [Електронний ресурс]: – Електрон. журн. – режим доступу до журн.: <http://www.microscopy-uk.org.uk/mag/indexmag.html>?<http://www.microscopy-uk.org.uk/mag/artaug15/dw-ingenhousz.html>
4. Louis Bachelier [Електронний ресурс]: Вікіпедія. Вільна енциклопедія - Режим доступу: [https://en.wikipedia.org/wiki/Louis\\_Bachelier](https://en.wikipedia.org/wiki/Louis_Bachelier)
5. Brownian motion [Електронний ресурс]: Вікіпедія. Вільна енциклопедія - Режим доступу: [https://en.wikipedia.org/wiki/Brownian\\_motion](https://en.wikipedia.org/wiki/Brownian_motion)
6. Среднеквадратичное смещение [Електронний ресурс]: Вікіпедія. Вільна енциклопедія - Режим доступу:  
[https://www.hmong.press/wiki/Mean\\_squared\\_displacement](https://www.hmong.press/wiki/Mean_squared_displacement)
7. Don S. Lemonsa. Paul Langevin's 1908 paper "On the Theory of Brownian Motion" [Електронний ресурс]: – Електрон. журн. – режим доступу до журн.: <https://www.physik.uni-augsburg.de/theo1/hanggi/History/Langevin1908.pdf>
8. Lew Brubacher. An experiment to measure Avogadro's constant. Repeating Jean Perrin's confirmation of Einstein's Brownian motion equation [Електронний ресурс]: – Електрон. журн. – режим доступу до журн.:  
[https://uwaterloo.ca/chem13news/sites/ca.chem13news/files/uploads/files/may06\\_2006\\_page\\_14.pdf](https://uwaterloo.ca/chem13news/sites/ca.chem13news/files/uploads/files/may06_2006_page_14.pdf)

9. Physics of Complex Systems. Brownian Motion [Электронный ресурс]: – Электрон. журн. – режим доступа до журн.:  
<http://ic1.ugr.es/members/phurtado/wp-content/uploads/sites/3/2017/12/Brownian-motion.pdf>
10. Постоянная Больцмана [Электронный ресурс]: Вікіпедія. Вільна енциклопедія - Режим доступа:  
[https://ru.wikipedia.org/wiki/Постоянная\\_Больцмана](https://ru.wikipedia.org/wiki/Постоянная_Больцмана)
11. Уравнение Ланжевена [Электронный ресурс]: Вікіпедія. Вільна енциклопедія - Режим доступа:  
[https://www.wikiwand.com/ru/Уравнение\\_Ланжевена](https://www.wikiwand.com/ru/Уравнение_Ланжевена)
12. Лемма Ито [Электронный ресурс]: – Электрон. стат. – режим доступа до стат.: <https://habr.com/ru/post/549202/>
13. Umut Yildiz. Simulating stock prices in Python using Geometric Brownian Motion [Электронный ресурс]: – Электрон. стат. – режим доступа до стат.:  
<https://towardsdatascience.com/simulating-stock-prices-in-python-using-geometric-brownian-motion-8dfd6e8c6b18>
14. Yahoo Finance [Электронный ресурс]: – режим доступа:  
<https://finance.yahoo.com/cryptocurrencies/>