МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І.І. МЕЧНИКОВА

Кафедра теплофізики

Фізика теплопровідності та експериментальні методи визначення коефіцієнту теплопровідності речовин

О д е с а
2012

УДК 536.075

В методичному посібнику розглянуті основні задачі стаціонарної теплопровідності та основні методи визначення коефіцієнту теплопровідності. Посібник містить короткі теоретичні відомості про теплопровідність тіл різного агрегатного стану. Рекомендується для студентів старших курсів теплофізичних спеціальностей.

Автори:
В.В. Калінчак,
доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теплофізики

С.Г. Орловська,
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теплофізики

О.С. Черненко,
кандидат фізико-математичних наук, ст. викладач кафедри теплофізики

Р е ц е н з е н т и:

В.П. Желєзний, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедрою інженерної теплофізики Одеської державної академії холоду

В.В. Головко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри загальної та хімічної фізики ОНУ імені І.І.Мечникова.

Затверджено до друку
Вченою радою фізичного факультету
ОНУ імені І.І. Мечникова.
Протокол № 1 від 10 вересня 2012 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Останнім часом постійно йдуть пошуки нових матеріалів з певними теплофізичними властивостями для різних технічних цілей. Знання теплофізичних властивостей речовин грає немалу роль при їх використанні.

На даний момент актуальним є створення експериментальних методів визначення коефіцієнтів теплопровідності речовин, основаних на використанні розв'язків задач стаціонарної теплопровідності. Експеримент є джерелом додаткової інформації про поводження речовин, що дозволяє поглибити існуючі фізичні уявлення про механізми переносу теплоти.

Всім цим повинні володіти в достатній мірі студенти теплофізичних спеціальностей. Посібник побудований таким чином, щоб допомогти їм в отриманні необхідних знань з механізмів теплопровідності в речовинах з різними фізичними властивостями та тіл правильної форми.

В першому розділі приводиться огляд найважливіших емпіричних та теоретичних формул для визначення коефіцієнту теплопровідності тіл різного агрегатного стану та пояснюється, яким саме чином проводиться тепло за рахунок теплопровідності. Тут же вводяться основні поняття та закони теплопровідності, а саме: температурне поле, градієнт температури, густина потоку тепла, закон Фур'є.

В другому розділі розглянуто теплопровідність через тіла різної геометричної форми при відсутності і наявності джерел тепла. Також акцентується увага на випадку, коли коефіцієнт теплопровідності залежить від температури.
В третьому розділі наведені експериментальні методи дослідження коефіцієнту теплопровідності.

Посібник призначається для студентів старших курсів теплофізичних спеціальностей вищих навчальних закладів, в тому числі фізичного факультету, що навчаються за спеціалізаціями «теплофізика дисперсних систем та фізика плазми» і «загальна і хімічна фізика».

1. ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ РЕЧОВИН

1.1 Коефіцієнт теплопровідності речовин

Необернений процес передачі теплоти від більш нагрітої області речовини (середовища) до менш нагрітої, наслідком якого є вирівнювання температур, характеризує теплопровідність речовини. Кількість теплоти, що при такому процесі передається через нескінченно малу поверхню в середовищі, що заповнює простір між по-різному нагрітими областями, за одиницю часу вздовж напряму x визнається на основі експериментального закону:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} = \lambda \left| \frac{\Delta T}{\Delta x} \right|, \qquad (1.1)$$

де ΔQ – кількість теплоти, перенесеної за час Δt через поверхню площею ΔS у напрямку x до цієї поверхні в бік зменшення температури; ΔT – різниця температур; Δx – відстань між областями, яку намагаються вибрати як найменшу, для збільшення точності, λ – коефіцієнт теплопровідності середовища. Величина, що стоїть в лівій частині (1.1), називається поверхневою густиною теплового потоку: $q = \frac{d^2 Q}{dSdt}$, Вт/м^2. Густина потоку направлена в бік зменшення температури. Тепловим потоком називається величина $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$, Вт.

Фізичний зміст коефіцієнта λ, Вт/(м·К), випливає безпосередньо з виразу (1.1) і чисельно дорівнює поверхневій густині теплового потоку при $\left.\frac{\Delta T}{\Delta x}\right|_{\Delta x \to 0} =$ 1К/м.

Аналітична теорія теплопровідності ігнорує атомарну будову речовини, розглядаючи її як суцільне середовище (континіум). Однак, сам процес переносу тепла обумовлений саме рухом мікрочастинок. Щоб врахувати особливості цього руху, в той же час залишаючись в рамках гіпотези континіуму, вводиться його узагальнена характеристика – коефіцієнт теплопровідності. Величина λ може бути визначена з статистичних міркувань, але в реальних розрахунках використовуються дані, отримані експериментальним шляхом, як більш надійні. При розв'язку задач теплопровідності значення коефіцієнту теплопровідності λ можна вважати заданим за умовою.

Для кожної речовини коефіцієнт теплопровідності залежить від структури (природи), вологості, температури і, в меншій мірі, від тиску. Це пояснюється різним механізмом переносу теплоти в різних речовинах. Важливо знати те, що теплофізичні властивості різних тіл, в тому числі коефіцієнт теплопровідності, залежать від хімічного складу, мікроструктури, пористості, наявності вологи, попередньої термообробки та ін.

Так як при розповсюдженні тепла температура в різних частинах тіла різна, то, насамперед, необхідно знати залежність коефіцієнта теплопровідності від температури. Як показує дослід, для більшості матеріалів маємо лінійну залежність:

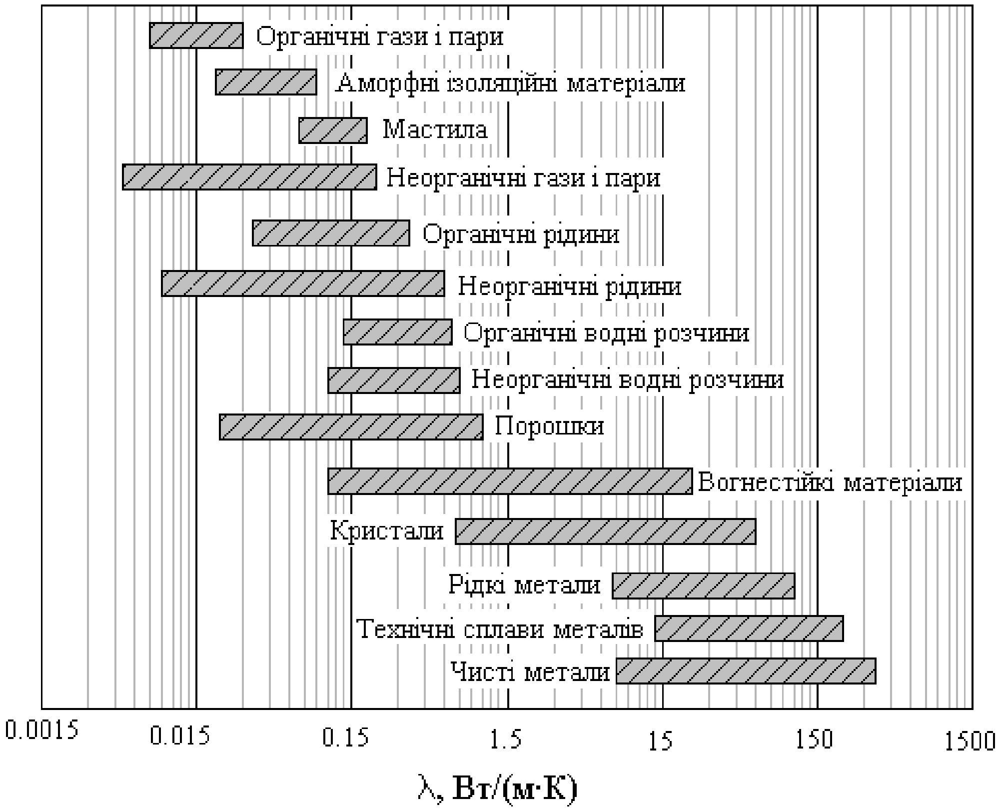


Рис. 1.1 *Значення коефіцієнту теплопровідності речовин*

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + b(T - T_0)\right), \tag{1.2}$$

де λ_0 – значення коефіцієнта теплопровідності при T_0 = 273.15 К, Вт/(м·К), T – абсолютна температура, К, b – константа, що визначаться експериментальним шляхом, $К^{-1}$.

Часто в практичних розрахунках значення коефіцієнту теплопровідності вважається постійним і визначається з формули (1.2) як середнє арифметичне значення при граничних температурах тіла.

Розглянемо більш детально три агрегатні стани різних тіл: твердий, рідинний, газоподібний.

Коефіцієнт теплопровідності газів змінюється в межах таких значень: від λ = 0.006 Вт/(м·К) до λ = 0.18 Вт/(м·К). Наприклад, при температурі 300 К:

– для повітря λ = 0.026 Вт/(м·К);

– для водню λ = 0.18 Вт/(м·К);

– для ксенону λ = 0.006 Вт/(м·К).

Гази є найгіршими провідниками тепла. Причиною цього є мала густина газів. Теплопровідність у газах здійснюється шляхом молекулярного переносу енергії при зіткненні молекул між собою при їхньому русі. Найбільш високий коефіцієнт теплопровідності мають водень і гелій, що пояснюється невеликою масою окремих молекул. Ксенон, навпаки, відрізняється низьким коефіцієнтом теплопровідності, тому що він складається з відносно важких молекул, яким відповідає менша молекулярна швидкість руху.

З підвищенням температури він зростає ($\lambda \sim T^{n}$, де $n = 0,6 - 1,0$); від тиску практично не залежить, за виключенням дуже високих (більш ніж $2 \cdot 10^{9}$ Па) та дуже низьких (менш ніж 200 Па.) тисків. При температурах до 20000 К і нормальному тиску на коефіцієнт теплопровідності можуть впливати реакції дисоціації та іонізації.

Користуючись основними співвідношеннями молекулярно-кінетичної теорії газів, коефіцієнт теплопровідності для ідеального газу можна визначити, знаючи середню довжину вільного пробігу молекул:

$$\lambda = \frac{1}{3}\rho \bar{v} \bar{\ell} c_V, \tag{1.3}$$

де ρ – густина газу, кг/м^3, $\bar{v}$ – середня квадратична швидкість руху молекул, м/с, $\bar{\ell}$ – середня довжина вільного пробігу молекул, м, c_V – питома теплоємність газу, Дж/(кг·К).

Так як густина ρ пропорційна тиску ρ, а $\bar{\ell}$ обернено пропорційна густині, то коефіцієнт теплопровідності не залежить від густини газу, а отже і від тиску. Виняток складають області дуже малих і дуже великих тисків. Це пояснюється тим, що у випадку великої густини в переносі імпульсу та енергії беруть участь багато молекул, але передача імпульсу та енергії проводиться малими порціями і на малі відстані, і навпаки. Та якщо густина газу така, що середня довжина вільного пробігу порівнювана з характерними розмірами посудини, де знаходиться газ, і, як наслідок цього, коефіцієнт теплопровідності пропорційний густині газу. На цьому оснований принцип дії посудини Дьюара.

Середня швидкість руху молекул пропорційна $\sqrt{T}$. Теплоємність газів росте з підвищенням температури. Тому коефіцієнт теплопровідності зростає з температурою в степені, більшій ніж $\sqrt{T}$.

Чисельне значення коефіцієнта теплопровідності газів можна визначити і з формули Сазєрленда:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{T_0 + C}{T + C} \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}, \tag{1.4}$$

де C – константа, К. Для деяких газів значення констант в виразах (1.2) та (1.4) наведені в табл. 1.

Боровик, вивчаючи теплопровідність азоту під тиском, запропонував наступну формулу для розрахунку теплопровідності газів:

$$\lambda = \left(c_V M + \frac{9}{4} R\right) \frac{\eta}{M},$$

де c_V – питома теплоємність при сталому об’ємі, Дж/(кг·К), R – універсальна газова стала, Дж/(кг·К), η – в’язкість газу, $\frac{кг}{(м^2 \cdot С)}$, M – молекулярна маса, кг/моль.

Якщо використати формулу Майєра для ідеальних газів у вигляді: $c_P - c_V = R/M$, і використовуючи $\gamma = c_P / c_V$, де c_P – питома теплопровідність при сталому тиску, то отримаємо нову формулу для визначення теплопровідності газів:

Таблиця 1. Значення λ_0, C, b в формулах (1.2) та (1.4) для деяких газів

Газ	λ_0, Вт/м·К	С, К	$b \cdot 10^5$, $К^{-1}$.
Повітря (від 82 до 485 К)	0.0224	125	–
Кисень (від 82 до 373 К)	0.028	144	–
Азот (від 82 до 373 К)	0.0228	114	–
Водень (від 82 до 373 К)	0.159	94	–
Вуглекислий газ (від 195 до 773 К)	0.0138	–	5,5
Аміак (від 213 до 373 К)	0.0201	–	8.85

$$\lambda = \frac{1}{4}(9\gamma - 5)c_V\eta .$$

Для газової суміші коефіцієнт теплопровідності може бути визначеним тільки експериментальним шляхом, так як в цьому випадку не діє закон адитивності, хоча існують довідкові данні та різні теоретичні та інтерполяційні формули. Для газових сумішей пропонується універсальний метод розрахунку:

$$\lambda_{ab} = \frac{\lambda_a c_a}{c_a + c_b\psi_{ab}} + \frac{\lambda_b c_b}{c_b + c_a\psi_{ab}} ,$$

де λ_a, λ_b – теплопровідності чистих газів a і b при температурі суміші; c_a і c_b – масові концентрації компонентів суміші; ψ_{ab} та ψ_{ba} – безрозмірні поправки. Ці поправки визначаються як:

$$\psi_{ab} = \frac{M_a/M_b}{\sqrt{8(1+M_a/M_b)}^{1/2}} \cdot \left[1 + \left(\frac{\mu_a}{\mu_b}\right)^{1/2}\left(\frac{M_b}{M_a}\right)^{1/4}\right]^2 ,$$

$$\psi_{ba} = \frac{M_b/M_a}{\sqrt{8(1+M_b/M_a)}^{1/2}} \cdot \left[1 + \left(\frac{\mu_b}{\mu_a}\right)^{1/2}\left(\frac{M_a}{M_b}\right)^{1/4}\right]^2 ,$$

де $M_а$ і $M_в$ – молекулярні маси компонентів; $\mu_а$ і $\mu_в$ – динамічні в’язкості газів a і b при температурі суміші. Метод розрахунку по цій формулі дає середню похибку приблизно 4%.

Коефіцієнт теплопровідності твердих тіл. У твердому стані, на відміну від рідин і газів, теплопередача не супроводжується переносом маси (конвекцією); основний характер руху – коливальний. При наявності сил взаємодії між атомами коливання передаються від атома до атома, тобто створюється хвиля, яка переносить енергію коливання зі швидкістю звуку. Для спрощення математизації даного процесу доцільно розглядати перенос теплоти фіктивними частинками, які називають фононами. Для твердих тіл, що характеризуються наявністю вільних носіїв заряду (електронів), необхідно враховувати електронну складову теплопровідності

$$\lambda = \lambda_ф + \lambda_е .$$

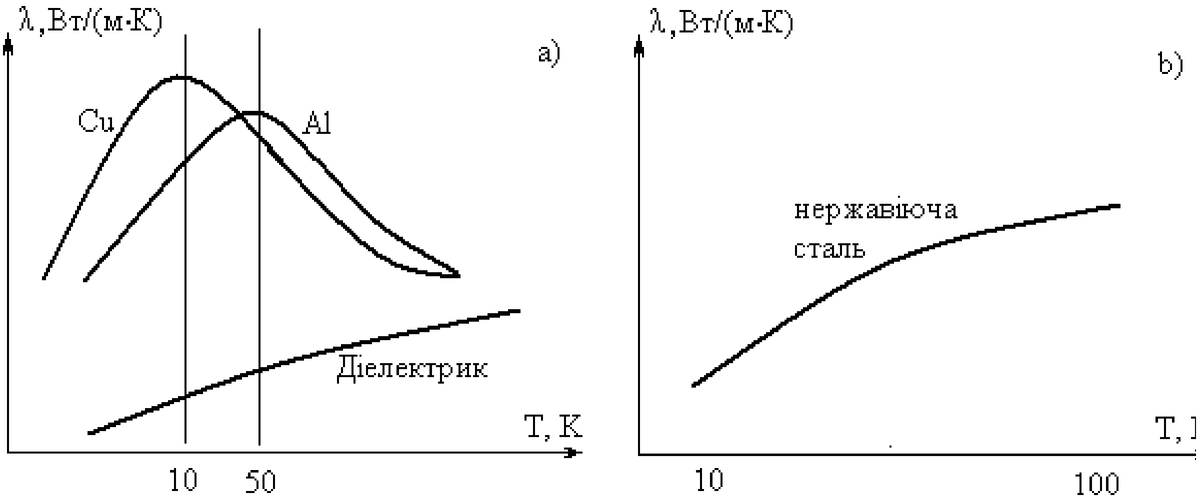


Рис. 1.2 *Залежність коефіцієнту теплопровідності від температури:*
а) чисті матеріали та діелектрики, б) сплави.

Ці два коефіцієнта теплопровідності залежать від взаємодії електронів і фононів. Теоретично цей зв'язок вивчити поки неможливо без введення суттєвих спрощень. В металах основним носієм теплоти є вільні електрони. Електронну теплопровідність металів можна вивчити при температурах вище 273 К, бо теплопровідність решітки при цих температурах складає малу частку від загальної теплопровідності ($\lambda_e >> \lambda_Ф$).

Для напівпровідників характерна наявність електронного збудження – ексітона, не пов'язанного з переносом електричного заряду і маси, що виникає при поглинанні світла. Ексітон можна представити як зв'язані електрон і дірка, які знаходяться в різних чи одному і тому ж вузлі гратки. Його переміщення по кристалу можна представити у вигляді хвилі. Ексітонна теплопровідність обумовлена дифузією ексітонів при створенні градієнту температур. Ексітонною теплопровідністю при невисоких температурах можна знехтувати.

Коефіцієнт теплопровідності металів лежить у межах таких значень: від λ = 2 Вт/м·К до λ = 420 Вт/м·К. Найбільш теплопровідними металами є срібло (λ = 420 Вт/м·К), червона руда (λ = 397 Вт/м·К), золото (λ = 303 Вт/м·К), алюміній (λ = 210 Вт/м·К). З підвищенням температури коефіцієнт теплопровідності для більшості металів зменшується, бо внаслідок підсилення теплових неоднорідностей розсіювання електронів збільшується. У деяких металів на залежності $\lambda(T)$ спостерігається максимум (рис.1.2). Так як теплопровідність металів λ і електропровідність σ визначається вільно дифундуючими електронами, то ці параметри для чистих металів пропорційні один іншому (закон Відемана і Франца):

$$\lambda/\sigma = L\,T,$$

де L – стала, Вт·Ом/К^2.

Використовуючи статистику Фермі-Дірака до електронного газу, можна отримати вираз для L:

$$L = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k}{e}\right)^2, \qquad \text{або} \qquad L = 2.445 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт}\cdot\text{Ом/К}^2.$$

При наявності різного роду домішок коефіцієнт теплопровідності чистих металів швидко зменшується, що пояснюється збільшенням структурних неоднорідностей. Так, наприклад, для чистої міді λ = 397 Вт/м·К, для тієї ж міді, але з домішкою арсену, λ = 142 Вт/м·К. Для заліза з 0.1% вуглецю λ = 52.5 Вт/м·К, з 1.0% вуглецю λ = 40 Вт/м·К і з 1.5% – λ = 36.2 Вт/м·К. Для загартованої вуглецевої сталі коефіцієнт теплопровідності на 10-25% нижче, ніж для м'якої. Однак, встановити будь-яку загальну залежність поки неможливо. Тому безпосередній дослід є єдиним методом для визначення коефіцієнта теплопровідності металів.

В діелектриках, де відсутні вільні електрони, λ суттєво нижче і складає близько 1 Вт/м·К. Для ізоляційних матеріалів λ < 0.3 Вт/м·К. Для сплавів і діелектриків коефіцієнт теплопровідності монотонно зростає зі збільшенням температури (рис. 1.2).

Коефіцієнт теплопровідності рідин по величині займає проміжне місце між значеннями для твердих тіл і газів і лежить у межах від λ=0.01 Вт/м·К (гелій) до λ=0.7 Вт/м·К (вода). З підвищенням температури для більшості рідин він зменшується, за винятком води.

Механізми теплопровідності рідин і твердих тіл подібні, рідин і газів – різні. Співвідношення для теплопровідності рідин виводять на підставі того, що основним рухом молекул у рідині є коливання навколо положення рівноваги.

Теплопровідність рідин зменшується зі збільшенням температури, за винятком асоційованих рідин (рідин з водневими зв'язками). В асоційованих рідинах спостерігається додатковий перенос теплоти за рахунок утворення водневих зв'язків. Утворення цих зв'язків відбувається з виділенням або поглинанням теплоти в залежності від температури рідини. Тому, наприклад, для води ця залежність має складний характер: зі збільшенням температури спочатку теплопровідність збільшується, а потім, досягши максимуму (приблизно при 130°С), зменшується.

Асоційовані рідини мають більшу щільність і питому теплоємність, тому вони характеризуються і більшою теплопровідністю. Коефіцієнт теплопровідності рідин практично не залежить від тиску. Він помітно збільшується лише при дуже високих тисках (вище 50 МПа).

Розглянувши теплопровідність як процес переносу енергії хвилями, енергія яких дорівнює енергії поступального і коливального руху частинок рідини, Широков отримав наступний вираз для теплопровідності рідин:

$$\lambda = \frac{1}{3}\overline{U} c_v \rho \overline{\ell},$$

де $\overline{U}$ – середня швидкість розповсюдження хвиль (швидкість звуку в рідині), м/с; ρ – густина рідини кг/м^3; $\overline{\ell}$ – середня відстань між центрами молекул (середня довжина вільного пробігу молекули в рідині), м; c_v – питома теплоємність при сталому об'ємі, Дж/(кг·К).

Існує ряд співвідношень для експериментального визначення коефіцієнта теплопровідності рідин, наприклад, співвідношення Бріджмена:

$$\lambda = \frac{2R\overline{U}}{\overline{\ell}^{2}}.$$

Емпіричний вираз для визначення коефіцієнта теплопровідності рідин для інтервалу температур від 9 до 15 °С одним з перших представив Вебер:

$$\lambda = A(T)\, c_p M^{-1/3} \rho^{4/3},$$

де c_p – питома теплоємність при сталому тиску, Дж/(кг·К), М – молярна маса, кг/моль, ρ – густина рідини, кг/м^3, А(Т) – функція від температури ($A = 3\cdot 10^{-8}$ при Т = 303 К).

Боровик запропонував свою емпіричну формулу для розрахунку коефіцієнту теплопровідності рідин в широкому інтервалі температур:

$$\lambda = B\left(c_V + \frac{9}{4}R\right)\frac{\overline{U}}{r^2},$$

де В – стала, r – радіус молекули, м.

Залежність теплових властивостей речовин від великої кількості взаємно зв'язаних один з одним факторів робить експеримент практично єдиним джерелом одержання даних для визначення цих властивостей. Одночасно з цим експеримент є джерелом додаткової інформації про поводження речовин, що дозволяє поглибити існуючі фізичні представлення про механізми переносу теплоти, оскільки ці механізми відносяться звичайно не до реальних тіл, а до деяких їх ідеалізованих моделей. Модельні представлення про речовину дають можливість побудувати відповідні розрахункові методи для визначення деяких теплових властивостей.

1.2 Температурне поле. Закон Фур'є

Процес розповсюдження тепла нероздільно пов'язаний з розподілом температури. В загальному випадку температура Т в будь-якій точці простору являється функцією координат і часу. Наприклад, для декартової системи координат

$$T = T(x, y, z, t). \tag{1.5}$$

Сукупність значень температур в даний момент часу для всіх точок простору називається температурним полем. Температура є величиною скалярною, тому і температурне поле – скалярне. Рівняння (1.5) є математичним записом трьохвимірного температурного поля. Хоча можливі і більш прості випадки: одновимірні або двовимірні температурні поля, якщо температура залежить від однієї або двох координат відповідно. Розрізняють стаціонарне та нестаціонарне температурні поля.

Нестаціонарним або невстановленим температурним полем називають поле, температура якого змінюється і в просторі, і з часом. Стаціонарним або встановленим температурним полем називають поле, температура якого в будь-якій точці не змінюється з часом, тобто являється лише функцією координат:

$$T = T(x, y, z), \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

Переміщення з будь-якої точки в довільному напрямку супроводжується деякою зміною температури. Якщо нескінченно малим приростам просторових координат відповідають нескінченно малі зміни температури, то таке температурне поле називають неперервним. В протилежному випадку температурне поле є розривним. Надалі розглядатимемо лише неперервні температурні поля.

Якщо з'єднати точки тіла, що мають однакову температуру, то отримаємо поверхню рівних температур, яка називається ізотермічною. А криві, отримані в перерізі таких поверхонь площиною, – ізотермами. Ізотермічні поверхні та ізотерми не перетинаються, а лише замикаються на себе або на границю тіла (інакше в одній точці може бути дві температури, що неможливо). Зміна температури спостерігається лише при переміщенні вздовж довільно вибраного напряму x, що перетинає ізотерму (рис.1.3). Найбільш різке збільшення температури спостерігається при переміщенні вздовж нормалі n до ізотермічної поверхні. Границя відношення температури ΔT до відстані між ізотермами по нормалі називають температурним градієнтом:

$$\lim_{\Delta n \to 0}\left(\frac{\Delta T}{\Delta n}\right)\vec{n}_0 = \frac{\partial T}{\partial n}\vec{n}_0 = \operatorname{grad} T = \vec{\nabla} T\text{, К/м.}$$

де $\vec{n}_0$ – одинична нормаль.

Температурний градієнт є вектором, що направлений по нормалі до ізотермічної поверхні в точці O. Додатнім напрямком вважають напрям зростання температури. Значення температурного градієнту, взятого з протилежним знаком, називають падінням температури.

Вектор $\vec{\nabla}$ в різних системах координат представляється через одиничні орти наступним чином:

–декартова: $$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z};$$

–циліндрична: $$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z};$$

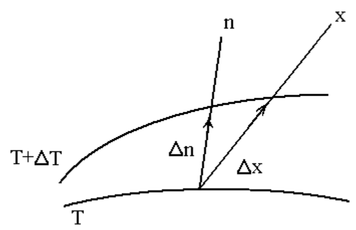


Рис.1.3 *До визначення температурного градієнту*

–сферична: $$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Вивчаючи явище теплопровідності в твердих тілах, Фур'є встановив, що тепловий потік через елемент ізотермічної поверхні визначається значенням температурного градієнту в вибраній точці. Численні дослідні дані дали змогу встановити пряму пропорційну залежність між густиною теплового потоку і градієнтом температури:

$$\vec{q} = -\lambda\, \mathrm{grad}T, \tag{1.6}$$

або в величинах $$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}.$$

Це є основний закон теплопровідності Фур'є, який формулюється наступним чином: густина теплового потоку прямо пропорційна градієнту температури. Закон справедливий при переносі теплоти на відстать, більшу за розмір молекули (атома).

Знак "–" показує на взаємно протилежні напрямки векторів градієнту температури та теплового потоку.

Для проекцій вектора густини теплового потоку на осі x,y,z маємо:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Для теплового потоку маємо $\dot{Q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} S$.

Для багатьох твердих тіл характерне явище анізотропії, яке полягає в тому, що фізичні властивості тіла різні в різних напрямках. Найбільш часто це проявляється в кристалічних і волокнистих твердих тілах. Тому замість (1.6) має місце більш загальна залежність, що полягає в тому, що кожний компонент вектора густини теплового потоку являється лінійною функцією компонентів градієнту температури в цій точці:

$$q_x = -\left(\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz}\frac{\partial T}{\partial z}\right),$$

$$q_y = -\left(\lambda_{yx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz}\frac{\partial T}{\partial z}\right),$$

$$q_x = -\left(\lambda_{zx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}\right).$$

Тут коефіцієнти λ_{ij} (i, j = x, y, z) являються компонетами тензора другого рангу – тензора теплоповідності λ

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix},$$

причому λ – симметричний тензор $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$.

1.3 Диференційне рівняння теплопровідності для нерухомого середовища

Аналітичне вивчення процесів теплопровідності неможливе без встановлення залежності між величинами, що характеризують ці процеси і являються функціями просторових координат та часу. В основу виведення диференційного рівняння теплопровідності покладено закон збереження енергії, який в даному випадку може бути сформульований в наступному вигляді: кількість теплоти, що введено в елементарний об'єм ззовні внаслідок теплопровідності, а також від внутрішніх джерел дорівнює зміні внутрішньої енергії або ентальпії речовини (в залежності від розгляду ізохорного або ізобарного процесу), яка міститься в цьому об'ємі.

Розглянемо елементарний об'єм $dxdydz$ в прямокутній системі координат (рис. 1.4). Через поверхню $dydz$ за час dt повздовж осі Ox підводиться кількість тепла:

$$\delta Q_x = q_x dydzdt.$$

Через протилежну сторону $x + dx$ відводиться кількість теплоти δQ_{x+dx}.

Розкладемо функцію $\delta Q_{x+\Delta x}$ в ряд Тейлора і збережемо перші два члени:

$$\delta Q_{x+dx} = \delta Q_x + \frac{\partial}{\partial x}(\delta Q_x)dx + ...$$

Кількість теплоти, що залишилася в елементарному об'ємі за час dt вздовж осі Ox:

$$\delta Q_{Ox} = \delta Q_x - \delta Q_{x+dx} = -\frac{\partial}{\partial x}(q_x)dxdydzdt. \qquad (1.7)$$

Аналогічно запишемо для зміни кількості теплоти вздовж осей Oy і Oz:

$$\delta Q_{Oy} = -\frac{\partial}{\partial y}(q_y)dxdydzdt, \qquad \delta Q_{Oz} = -\frac{\partial}{\partial z}(q_z)dxdydzdt. \qquad (1.8)$$

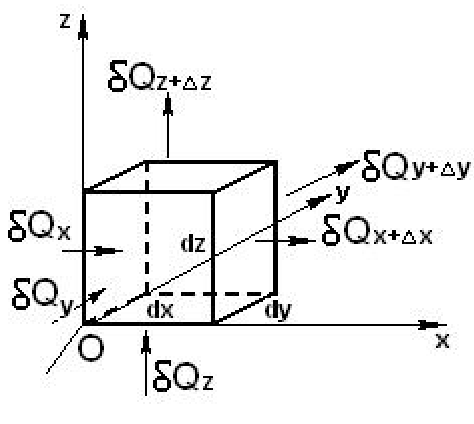


Рис. 1.4 *До виведення диференційного рівняння теплопровідності*

Складемо (1.7) і (1.8) та знайдемо кількість теплоти δQ_λ, що була підведена до елементарного об'єму за час dt за рахунок теплопровідності

$$\delta Q_\lambda = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(q_x)+\frac{\partial}{\partial y}(q_y)+\frac{\partial}{\partial z}(q_z)\right]dxdydzdt. \tag{1.9}$$

Всередині тіла може виділятися або поглинатися теплота в результаті, наприклад, хімічних або фазових перетворень, дії електричного струму та ін. Кількість теплоти, що виділяється внутрішніми джерелами теплоти в об'ємі dV за час dt є

$$\delta Q_V = q_V dxdydzdt, \tag{1.10}$$

де $q_V = q_V(x,y,z,t)$ – потужність внутрішніх джерел теплоти.

Згідно закону збереження енергії для ізохорного процесу ($V = const$)

$$\delta Q_x + \delta Q_V = dU,$$

де dU – приріст внутрішньої енергії елементарного об'єма за час dt.

Так, як $dU = c_V \rho \frac{\partial T}{\partial t} dxdydzdt$ і з урахуванням (1.9) і (1.10) маємо:

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right)+q_V$$

або

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{q} + q_V, \tag{1.11}$$

де ρ – густина речовини, кг/м^3; c_V – ізохорна теплоємність одиниці маси, Дж/кг$\cdot$К.

Для ізобарного процесу ($P = const$) маємо

$$\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} = -div\,\vec{q} + q_V. \tag{1.12}$$

Рівняння (1.11) і (1.12) являються диференційними рівняннями теплопровідності для ізохорного і ізобарного процесів відповідно. Для твердих тіл $c_P = c_V = c$. Використовуючи закон Фур'є отримаємо диференційне рівняння теплопровідності в наступному вигляді:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\lambda \cdot \mathrm{grad}T) + q_V. \tag{1.13}$$

Аналіз саме рівняння (1.13) для різних умов і тіл різної форми проводитиметься в подальшому.

1.4 Окремі випадки диференціальних рівнянь теплопровідності. Класифікація задач теплопровідності

В загальному випадку теплофізичні властивості ρ, c, λ залежать від температури. Тоді рівняння (1.13) є нелінійним, що ускладнює його розв'язок. Найбільш помітно властивості змінюються в області критичної точки стану речовини (для текучих середовищ) і при низьких температурах (нижче приблизно

120 К) – для твердих матеріалів. Такий випадок є типовим для кріогенної техніки. Але можливі і більш прості варіанти.

1. **Стаціонарна задача** $(\partial T/\partial t = 0)$ зводиться до розгляду наступного рівняння

$$\mathrm{div}(\lambda \mathrm{grad} T) + q_V = 0. \tag{1.14}$$

При умові λ(T) = const, рівняння спрощується:

$$\lambda \nabla^2 T + q_V = 0$$

і у випадку відсутності внутрішніх джерел тепла, набуває вигляду рівняння Лапласа:

$$\nabla^2 T = \Delta T = 0.$$

Оператор Δ в різних системах координат представляється наступним чином:

–декартова: $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

–циліндрична: $$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

–сферична: $$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right).$$

2. За умов, що **теплофізичні властивості не залежать від температури**, рівняння (1.13) спрощується:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T + \frac{q_V}{c\rho}, \tag{1.15}$$

де $a = \lambda/(c\rho)$ – коефіцієнт температуропровідності, $м^2/с$, що являється мірою теплоінерційних властивостей тіла. Чим вище це значення, тим більше швидкість зміни температури у визначеній точці при всіх інших рівних умовах. При $q_V = 0$ рівняння (1.15) зводиться до лінійного однорідного диференційного рівняння.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T. \tag{1.16}$$

Запис диференційного рівняння теплопровідності у будь-якій з наведених раніше форм припускає, що температура змінюється за всіма трьома координатами (тривимірна задача). На практиці часто приходиться мати справу із задачами, в яких суттєвим є зміна температури за двома або навіть за однією координатами. Такі задачі носять назву відповідно двовимірної $T = T(x, y, t)$ та одновимірної $T = T(x, t)$.

Рівняння теплопровідності в одновимірному випадку може бути переписане в узагальненому вигляді

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{q_V}{c\rho},$$

де n = 0; 1; 2 відповідають декартовій, циліндричній і сферичній системі координат; x – узагальнена координата.

Для моделювання процесів теплопровідності в тілах однакової форми, але з різними властивостями і розмірами, використовують безрозмірні величини:

$$\theta = \frac{T - T_g}{T_b - T_g}, \qquad \xi = \frac{x}{L}, \qquad Fo = \frac{at}{L^2}.$$

1.5 Умови однозначності

Для розв'язку конкретної задачі теплопровідності середовища необхідно додати крайові умови, які б визначали розглядаючий процес. Таким чином, повний математичний опис тієї чи іншої задачі теплопровідності повинен містити в собі не тільки рівняння теплопровідності, але й особливості, що виступають у вигляді геометричних та фізичних характеристик, а також крайових умов, які іменуються умовами однозначності і включають:

а) геометричні умови, що характеризують розмір та форму тіла;

б) фізичні умови, які визначають теплофізичні властивості та розподіл внутрішніх джерел тепла;

в) початкові умови (тільки для нестаціонарних задач), які задають поле температур в початковий момент часу (τ=0). Загальний вигляд початкової умови можна записати як

$$t = 0,\ T = T(x, y, z).$$

В найпростішому і доволі розповсюдженому випадку

$$t = 0, T = T_b = \text{const}.$$

г) граничні умови. Вони можуть задаватися різними способами:

– граничні умови 1-го роду – задаються розподілом температури на границях системи, яку ми розглядаємо $T_s = T_s(x, y, z, t)$, де x,y,z – координати точок, які належать поверхні тіла. В найпростішому випадку температура на поверхні може підтримуватись постійною, тобто $T_s = \text{const}$;

– граничні умови 2-го роду означають, що задано розподіл теплового потоку на границях системи $q_s = q_s(x, y, z, t)$. В найпростішому випадку $q_s = \text{const}$. На підставі закону Фур'є можна записати

$$q_s = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n \to 0},$$

де n – напрямок нормалі до границі. Таким чином, при λ = const можна стверджувати, що граничні умови 2-го роду задають поле похідних від температури на поверхні, тобто

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n \to 0} = f(x, y, z, t);$$

– граничні умови 3-го роду припускають, що умови теплообміну на поверхні задано. При цьому виходять з природного припущення, що теплові потоки, які підходять зсередини тіла до границі і ті, що знімаються з поверхні, дорівнюють один одному (рис. 1.5), тобто $q_s\big|_{-0} = q_s\big|_{+0}$.

Для системи, яку ми розглядаємо

$$q_s\big|_{-0} = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{n=0}.$$

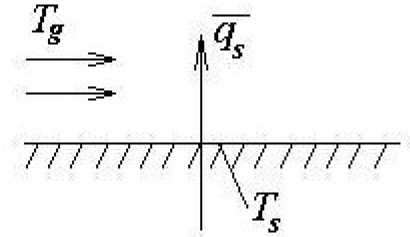
Що ж стосується теплового потоку, який знімається з поверхні, то він обчислюється залежно від конкретних умов теплообміну. Якщо тепло, наприклад, відводиться рідиною або газом, то

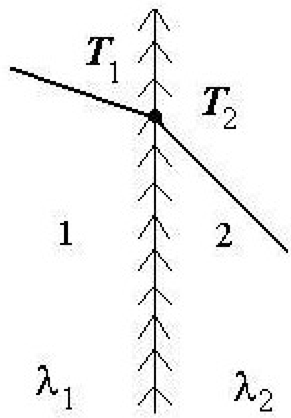
$$q_s\big|_{+0} = \alpha\left(T_s - T_g\right). \tag{1.17}$$

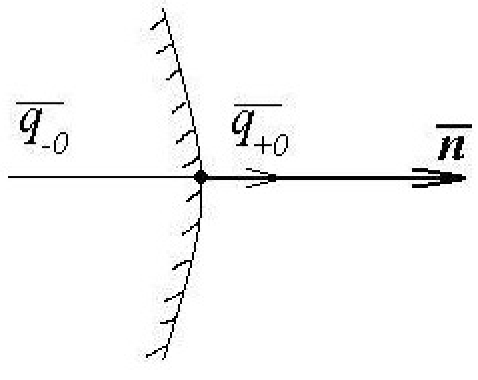
Рівняння (1.17) – це математичний вираз закону Ньютона – Ріхмана і встановлює зв’язок між густиною теплового потоку, який знімають або підводять до поверхні теплообміну, і різницею температур між цією поверхнею і рідиною (газом). Коефіцієнт пропорційності α носить назву коефіцієнта теплопередачі. При аналізі задач теплопровідності величина α вважається відомою і входить в умови однозначності. Таким чином, граничні умови 3-го роду при наявності конвективного теплообміну на поверхні твердого тіла приймають вигляд

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)\bigg|_{n=0} = \alpha\left(T_s - T_g\right) \quad \text{або} \quad -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\bigg|_{x_s-0} = \alpha\left(T_{s+0} - T_g\right).$$

– граничні умови 4-го роду. Вірогідний і такий випадок, коли розглядаюче тіло граничить з іншим тілом або з об’ємом рідини (газу), яка знаходиться в стані спокою. У випадку ідеального теплового контакту граничні умови приймають вигляд:







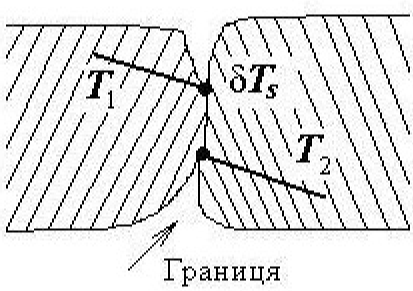


Рис. 1.5 *До визначення граничних умов 3-го роду*

Рис. 1.6 *Температурне та теплове зрощення у випадку ідеального (а) та неідеального контакту* $\lambda_1 > \lambda_2$.

$$\lambda_1\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{n=-0}=\lambda_2\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{n=+0} \quad \text{або} \quad \lambda_1\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_s-0}=\lambda_2\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_s+0}.$$

При цьому одночасно виконується рівність температур середовищ, що наведені в доторканні в місці контакту $T_1 = T_2$ (рис.1.6). На практиці часто приходиться мати справу з неідеальним тепловим контактом (наприклад, в механічних з'єднань). При передачі тепла на такій границі з'являється перепад температури, що визначається контактним термічним опором.

1.6 Гіперболічне рівняння теплопровідності

У феноменологічній теорії теплопровідності передбачається, що швидкість розповсюдження теплоти в тілі нескінченно велика. При виведенні основного рівняння теплопровідності Фурье неявно використовується те, що градієнт температури і густина теплового потоку для будь-якого моменту часу відповідають один одному. Абсолютна більшість процесів теплопереносу, що зустрічаються на практиці, є процесами помірної інтенсивності, для яких припущення про нескінченну швидкість розповсюдження теплоти підтверджується численними теоретичними і експериментальними дослідженнями. Проте при розгляді високоінтенсивних нестаціонарних процесів в розріджених середовищах (наприклад, тепловий вибух, обтікання тіла надзвуковим потоком газу та інш.) використання цього припущення приводить до помилок, тому необхідно враховувати, що розповсюдження теплоти хоч і дуже велике, але все таки проходить з кінцевою швидкістю.

Дійсно, при різкій зміні теплового потоку на поверхні тіла зміни температурного поля і градієнта температури відбуваються повільніше, ніж якби швидкість розповсюдження теплоти $\omega_r \to \infty$. Таким чином, унаслідок теплової інерції відбувається запізнювання в часі зміни градієнта температури. Цей час запізнювання називають часом *релаксації*. Швидкість розповсюдження теплоти ω_r пов'язана з часом релаксації τ_r співвідношенням

$$\omega_r=\sqrt{\frac{\lambda}{c\rho\tau_r}}=\sqrt{\frac{a}{\tau_r}}.$$

Отже, час релаксації збільшується із збільшенням теплової інерції тіла і зменшується із збільшенням швидкості розповсюдження теплоти. Величина τ_r дуже мала, тому експериментальне її визначення скрутне. Можна, проте, теоретично оцінити порядок величини τ_r. Наприклад, для азоту $\tau_r \approx 10^{-9}$ c ($\omega_r \approx 150$ $м/c$). Для металів час релаксації τ_r менше на декілька порядків, ніж для газів. Так, для алюмінію $\tau_r \approx 10^{-11}$ c ($\omega_r \approx 4000$ $м/c$).

З урахуванням скінченності швидкості розповсюдження теплоти залежність густини теплового потоку і градієнта температури для високоінтенсивних процесів можна представити у вигляді

$$\vec{q}=-\lambda\nabla T-\tau_r\frac{\partial\vec{q}}{\partial\tau}. \tag{1.18}$$

Для стаціонарних процесів $\left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial \tau} = 0\right)$ і при прагненні швидкості розповсюдження теплоти до нескінченності $(\tau_r \to 0)$ отримане рівняння співпадає з класичним законом теплопровідності Фурьє (для високоінтенсивних нестаціонарних процесів другий член в рівнянні стає порівняним з першим).

Скориставшись рівнянням балансу теплоти (1.18) для випадку $q_V = 0$, отримаємо рівняння теплопровідності

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\vec{\nabla} q = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right).$$

Підставляючи сюди значення для теплового потоку, знаходимо при постійних τ_r і λ

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \tau_r\left(\frac{\partial^2 q_x}{\partial x \partial \tau} + \frac{\partial^2 q_y}{\partial y \partial \tau} + \frac{\partial^2 q_z}{\partial z \partial \tau}\right) = \lambda \nabla^2 T + \tau_r \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\vec{\nabla} q\right). \quad (1.19)$$

Продиференціювавши отримане рівняння по τ отримаємо

$$c\rho \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\vec{\nabla} q\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial \tau} + \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial \tau} + \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial \tau}\right).$$

З урахуванням останньої рівності вираз (1.19) перетвориться до вигляду

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_r c\rho \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right),$$

або

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = a \nabla^2 T. \quad (1.20)$$

Отримане рівняння теплопровідності є гіперболічним у відмінності від отриманого раніше параболічного рівняння (1.16).

Слід зазначити, що справедливість рівняння (1.20) доведено лише для одновимірного випадку, розповсюдження його на багатовимірний випадок є формальним.

1.7 Інші види теплопередачі. Конвекція і теплове випромінювання

Передача теплоти конвекцією. Не дивлячись на те, що рідини і гази є, як правило, не дуже хорошими провідниками тепла, вони можуть забезпечувати досить швидку передачу його завдяки явищу конвекції. Конвекція – це процес, завдяки якому теплота переноситься за рахунок переміщення великого числа молекул з одного місця в інше.

Відмінність між явищами теплопровідності і конвекції в тому, що в першому з них молекули переміщуються лише на дуже малі відстані (порядка довжини вільного пробігу) і потім зіштовхуються, тоді як в другому випадку молекули переміщуються на значні відстані.

Конвекція може бути як вимушеною, так і природною. Прикладом вимушеної конвекції може служити нагрівач з вентилятором, за допомогою якого нагріте повітря вдувається в кімнату. Відомим прикладом природної конвекції є підйом вверх нагрітого повітря. Наприклад, поблизу радіатора опалювання (або іншого нагрівача) повітря у міру нагрівання розширюється і, отже, його густина в порівнянні з іншими шарами зменшується, що і приводить до його підйому. Великомасштабний прояв природної конвекції можна спостерігати на прикладі теплих або холодних океанських течій (наприклад, Гольфстріму). Погодні умови також обумовлені конвективними рухами повітря.

Для опису теплового потоку $\dot{Q}$ між тілом і середовищем, що мають різні температури, який враховує внесок конвекції спільно з теплопровідністю, використовують закон Ньютона – Ріхмана:

$$\dot{Q} = \alpha S\left(T_1 - T_2\right).$$

де α – коефіцієнт теплообміну (тепловіддачі), *S* – бічна площа тіла, T_1 і T_2 – температури тіла і газового середовища.

Коефіцієнт теплообміну для тіла визначається як

$$\alpha = \frac{\lambda_g Nu}{d},$$

де d – характерний розмір тіла (для циліндра і сфери – діаметр), Nu – число Нуссельта.

Число Нуссельта Nu у випадку нехтування конвекцією (теплопередача тільки за рахунок теплопровідності) є постійною величиною. Наприклад, для циліндра він дорівнює 0.5, для сфери – 2. За наявності конвекції він є функцією є чисел Рейнольдса і Грасгофа, які і визначають, відповідно, рівень вимушеної і природної конвекції. Області зміни значень чисел Рейнольдса і Грасгофа і визначають вид емпіричної залежності $Nu = f(Re, Gr, Pr)$ де Pr – число Прандтля, яка зазвичай наводиться в літературі.

Теплообмін випромінюванням. Для того, щоб передати теплоту як за допомогою конвекції, так і за рахунок теплопровідності, необхідна наявність речовини. Проте, наприклад, життя на Землі цілком і повністю залежить від сонячної енергії, яка переноситься від Сонця до Землі крізь порожній (точніше, майже порожній), тобто не заповнений речовиною, простір. Така форма передачі енергії може бути здійснена лише за рахунок теплообміну і називається тепловим випромінюванням.

Теплове випромінювання – це электромагнітне випромінювання, енергія якого отримана за рахунок збудження тепловим рухом атомів, молукул і інших частинок речовини. Теплове випромінювання може переходит в різноманітні форми енергії, однак основною формою перетворення являється перехід в форму хаотичного руху атомів і молекул і обернений перехід внутрішньої енергії частинок в випромінювання. Цей процес перетворення внутрішньої енергії в сукупності з процесом переносу випромінювання і називається теплообміном випромінювання.

При цьому вважається, що між випромінюванням та речовиною не відбувається взаємодія, в результаті якої відбуваються будь-які зміни в тілах (наприклад, іонізація, поляризація, зміна властивостей, хімічні реакції, фазові переходи та інше).

Як показали експерименти (і підтвердила теорія), потік випромінювання (енергія, що випромінюється нагрітим тілом в одиницю часу), пропорційна четвертій степені його абсолютної температури T_1 та площі поверхні випромінюючого тіла:

$$W = \varepsilon\sigma S T_1^4$$

де $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 К^4) – стала Стефана- Больцмана.

Безрозмірне число ε, величина якого знаходиться в межах від 0 до 1, називається коефіцієнтом випромінювальної здатності (ступінню чорноти) і характеризує властивість самої речовини. Дуже чорні поверхні (наприклад, деревне вугілля) мають значення ε, близьке до одиниці, тоді як у блискучих поверхонь величина ε близька до нуля, і тому вони випромінюють менше енергії. Взагалі кажучи, значення ε слабо залежить від температури тіла.

Будь-яке тіло не тільки випромінює енергію, але також і поглинає енергію, що випромінюється іншими тілами. У разі, коли тіло оточене середовищем, що знаходиться при температурі T_2 і випромінює енергію, що поглинається тілом в одиницю часу, визначається як $a\sigma S T_2^4$, де а – безрозмірна величина, що називається поглинальною здатністю тіла.

З закону Кірхгофа для рівноважного теплового випромінювання слідує, що коефіцієнт випромінювальної здатністі (коефіцієнт чорноти) дорівнює поглинальній здатності при тій же довжині хвилі та температурі $\varepsilon = a$.

Таким чином, тіло, яке добре випромінює, також добре і поглинає випромінювання. Чорні або дуже темні, добре випромінюючі тіла поглинають майже повністю все падаюче на них випромінювання. З іншого боку, блискучі поверхні не тільки мало випромінюють, але також мало і поглинають падаюче на них випромінювання (велика частина цього випромінювання відбивається).

Таким чином, результуючий тепловий потік випромінювання (кількість теплоти, що переноситься за одиницю часу через довільну поверхню), що випромінюється тілом, запишеться у вигляді

$$\dot{Q} = \varepsilon\sigma S\left(T_1^4 - T_2^4\right).$$

Оскільки як саме тіло, так і його оточення, випромінюють енергію, завжди існує результуюче перенесення енергії в тому або іншому напрямі. Він відсутній лише у разі, коли температури тіла і оточення однакові.

Якщо різні частини навколишнього середовища знаходяться при різних температурах, то вираз для теплового потоку випромінюванням набирає складнішого вигляду.

2. СТАЦІОНАРНА ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ

2.1 Теплопровідність плоского шару при відсутності внутрішніх джерел тепла з граничними умовами 1-го та 3-го роду.

Досліджуваному матеріалові надається форма тонкої круглої або квадратної пластинки. Для створення температурного перепаду по товщині пластини одна її поверхня нагрівається, а інша – охолоджується. З метою одержання одновимірного теплового потоку при виборі розмірів плоского зразка δ для тіл з поганою провідністю теплоти ($\lambda \le 2.3\,\text{Вт/(м}\cdot\text{К)}$) прагнуть виконати наступну умову:

$$\delta \le \left(\frac{1}{7} \div \frac{1}{10}\right) d,$$

де d – діаметр круглої пластини (або сторона квадратної пластини).

Товщину пластини звичайно вибирають у межах від 5 до 50 мм. При цьому приймаються заходи для захисту бічної поверхні дослідного зразка і нагрівача від втрат теплоти в навколишнє середовище, особливо при високих температурах. Істотною умовою правильності визначення коефіцієнту теплопровідності є відсутність повітряних зазорів між поверхнею зразка і плоских поверхонь нагрівача і холодильника. Помилка за рахунок цього контактного опору може досягати 15 – 30% при товщині пластини 0.3 – 1.5 мм і 10 – 20% при товщині 1.5 – 3 мм. Зі збільшенням теплопровідності досліджуваного матеріалу вплив контактного теплообміну збільшується, зі збільшенням температури – зменшується через значне зростання теплообміну випромінюванням. З метою зменшення теплового опору застосовуються стискаючі пристрої, гарна обробка поверхонь як приладу , так і зразків, а також проміжні матеріали з гарною провідністю (графітові, алюмінієві, карборундові й ін. порошки).

Задача теплопровідності для однорідної плоскої пластини у випадку незалежності коефіцієнту теплопровідності від температури формулюється наступним чином:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

з граничними умовами:

$$x = 0, \qquad T = T_1;$$
$$x = d, \qquad T = T_2.$$

В результаті розв’язку необхідно знайти розподіл температур в тілі і потік, що переноситься. Розв’язок в кінцевому вигляді запишеться так (рис. 2.1):

$$T = T_1 - \left(T_1 - T_2\right)\frac{x}{d}.$$

Маючи рівняння, що описує температурне поле, легко розрахувати тепловий потік, використовуючи закон Фур’є:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d}.$$

Очевидно, величина q визначається не абсолютними значеннями температури, а лише їх різницею. Відношення λ/d називають термічною провідністю, а

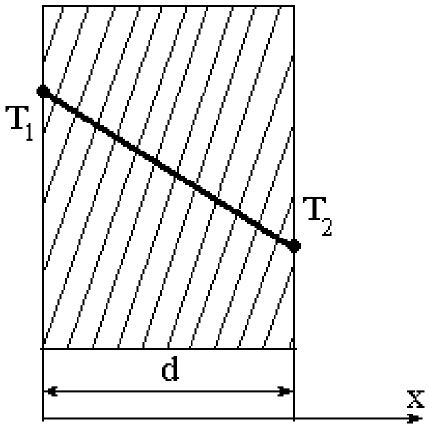


Рис. 2.1 *Розподіл температури в однорідній плоскій стінці*

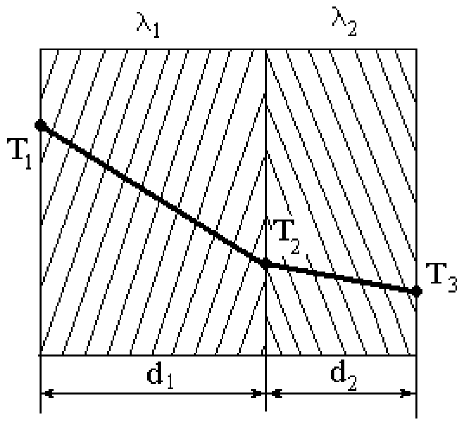


Рис. 2.2 *Розподіл температури в багатошаровій плоскій стінці.*

обернену величину – термічним опором R_λ. З урахуванням цього вираз для густини теплового потоку може бути записаний у вигляді:

$$q = \Delta T / R_\lambda\,,\ R_\lambda = \frac{d}{\lambda}.$$

Для багатошарової стінки (рис. 2.2), враховуючи, що в стаціонарному режимі величина теплового потоку, що проходить через кожний шар, не змінюється, для кожного шару можна записати:

$$q = \frac{\lambda_1}{d_1}\left(T_1 - T_2\right) = \frac{\lambda_2}{d_2}\left(T_2 - T_3\right).$$

Тут враховується, що контактний опір відсутній. Виключаючи невідому температуру T_2, отримаємо

$$q = \frac{T_1 - T_2}{d_1/\lambda_1 + d_2/\lambda_2}.$$

Отже, у випадку багатошарової стінки сумарний термічний опір є алгебраїчною сумою термічних опорів кожного шару.

У випадках, коли на границі стінки виконуються граничні умови третього роду (рис 2.3.), то вони записуються у вигляді:

$$x = 0\,,\ \ \alpha_1\left(T_{g_1} - T_1\right) = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)\Bigg|_{x=0}; \qquad x = d\,,\ \ \alpha_2\left(T_2 - T_{g2}\right) = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)\Bigg|_{x=d}.$$

В стаціонарному випадку тепловий потік все-таки залишається незмінним. Дійсно,

$$q = \alpha_1\left(T_{g1} - T_1\right) = \frac{T_1 - T_2}{d/\lambda} = \alpha_2\left(T_2 - T_{g2}\right).$$

Кожне з рівнянь розв’язується відносно різниці температур, які потім додаються. В результаті густина теплового потоку прийме вигляд:

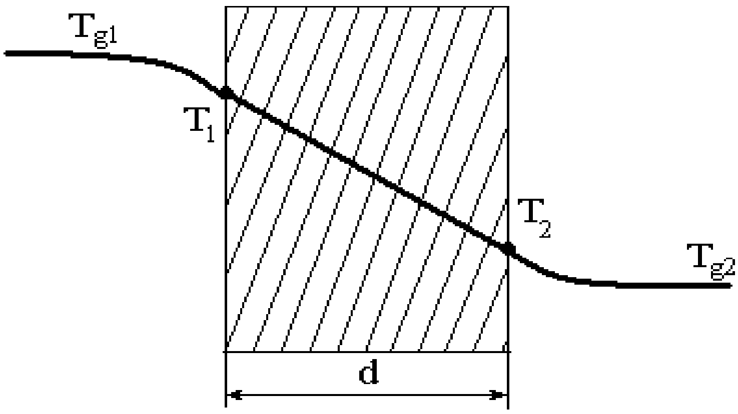


Рис. 2.3 *Розподіл температури при теплопередачі через плоску стінку (граничні умови 3-го роду)*

$$q = \frac{T_{g1} - T_{g2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{T_{g1} - T_{g2}}{\frac{1}{\alpha}}.$$

Величина $1/\alpha = R_\alpha$ називається термічним опором тепловіддачі. Для багатошарової стінки подібний вираз для густини теплового потоку запишеться як:

$$q = K\left(T_{g1} - T_{g2}\right),$$

де $K = \left[\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{\lambda}\right)_i + \frac{1}{\alpha_2}\right]^{-1}$ – коефіцієнт теплопередачі, Вт/(м^2·К), і характеризує інтенсивність передачі тепла від одного нагрітого середовища до іншого. Так як величина K менша за найменшу з величин $\alpha_1, \lambda/d, \alpha_2$, то для збільшення інтенсивності теплопередачі необхідно збільшити мінімальну з цих величин.

2.2 Теплопровідність стрижня з зовнішніми стоками тепла з граничними умовами 1-го та 3-го роду

Оскільки метали характеризуються високою провідністю теплоти, то дослідний зразок повинен мати значні розміри в напрямку теплового потоку, що забезпечують перепади температури, достатні для надійного їхнього виміру. Для цього зразкам додають витягнуту форму стрижнів. Стрижень або циліндр кінцевих розмірів можна представити в цьому випадку як циліндричну вирізку з нескінченної плоскопаралельної пластини, що має довжину, рівну товщині цієї пластини. Товщина шару в осьовому напрямку вибирається відповідно до залежності

$$\delta = (15 \div 20)d.$$

В цьому випадку доводиться враховувати теплообмін з навколишнім середовищем, адже збільшення довжини пластини призводить до збільшення поверхні контакту тіла з навколишнім середовищем.

Розглянемо розповсюдження теплоти в прямому однорідному стрижні з постійним поперечним перерізом. Нехай один з кінців стрижня підтримується при сталій температурі T_1, а його другий кінець знаходяться у газовому середовищі з температурою T_g, яка також не змінюється ($T_g<T_1$). Обмін теплом між нагрітим стрижнем і відносно холодним середовищем відбувається через бічну поверхню стрижня. При невеликій різниці температур стрижня й середовища ($T-T_0$), цей процес теплообміну з достатньою точністю може бути описаний за допомогою закону Ньютона-Ріхмана:

$$d\dot{Q} = \alpha\left(T - T_g\right)dS = \alpha\left(T - T_g\right)p\,dx\,. \tag{2.1}$$

Тут $d\dot{Q}$ – кількість теплоти, якою обмінюється елемент стрижня із середовищем за одиницю часу, α – коефіцієнт теплообміну, $dS = pdx$ – площа бічної поверхні стрижня, p – периметр бічного перерізу. Це рівняння має інтегральний характер. Взагалі, температура стрижня є функцією координат стрижня $T(x,y,z)$. Якщо вважати, що коефіцієнт теплообміну не залежить від температури $\alpha=\text{const}$, саме вид цієї функції визначає, як відбувається обмін тепла між стрижнем і середовищем в будь-якій точці на бічній поверхні стрижня.

Пошук розподілу температури у стрижні значно спроститься, якщо не враховувати зміну температури впоперек стрижня, тобто вважати, що температура стрижня змінюється тільки вздовж стрижня. Це припущення буде тим більш справедливим, чим менше критерій $Bi<<1$ для стрижня.

Складемо рівняння теплопровідності для елементу довжини стрижня, використавши І закон термодинаміки:

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} = d\dot{Q}\,.$$

Тут $\dot{Q}_x$ – кількість тепла, що входить через площу поперечного перерізу S у ліву грань елементу за одиницю часу, $\dot{Q}_{x+dx}$ – кількість тепла, що виходить із протилежної грані елементу за той же час, $d\dot{Q}$ – кількість тепла, яким обмінюється за одиницю часу елемент стрижня з навколишнім середовищем через бічну поверхню елементу.

Отже, рівняння теплопровідності для елементу довжини стрижня можна записати у вигляді

$$\left[\lambda\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x+dx} - \lambda\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x}\right]\cdot S - \alpha p\left(T - T_0\right) = 0\,,$$

або

$$\lambda\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\alpha p}{S}\left(T - T_0\right) = 0\,.$$

Зробивши заміни $\theta = \left(T - T_0\right)$ та $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\alpha p}{\lambda S}}$, отримаємо остаточне стаціонарне диференціальне рівняння теплопровідності:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \varepsilon^2\theta = 0\,. \tag{2.2}$$

Напівнескінченний стрижень. Якщо припустити, що стрижень є нескінченно довгим, граничні умови будуть такими:

$$x = 0, \quad \theta = \theta_1; \qquad x \to \infty, \quad \theta = 0. \tag{2.3}$$

Подвійне інтегрування рівняння (2.2) дозволяє отримати загальний розв'язок у вигляді:

$$\theta = C_1 \exp(\varepsilon x) + C_2 \exp(-\varepsilon x).$$

Тоді, використавши граничні умови (2.3), для профілю температури у стрижні маємо:

$$\theta = \theta_1 \exp(-\varepsilon x). \tag{2.4}$$

Аналіз цього виразу показує, що температура стрижня вздовж координати *x* змінюється за законом експоненти, і чим більший параметр *ε*, тим сильніше температура убуває за довжиною стрижня. Геометричний зміст параметра *ε* стає зрозумілим після представлення розподілу температури у напівлогарифмічних координатах $\ln\theta(x)$. Звідси видно, що за модулем *ε* дорівнює тангенсу кута нахилу прямих, тобто: $\varepsilon = \frac{1}{x}\ln\frac{\theta_1}{\theta}$.

Кількість тепла $\dot{Q}$, що розсіюється через усю бічну поверхню нескінченного довгого стрижня може бути знайдена, застосовуючи (2.4) як інтеграл рівняння (2.1) в межах від 0 до ∞:

$$\dot{Q} = \int d\dot{Q} = \int_0^\infty \alpha p \theta_1 \exp(-\varepsilon x) dx = \frac{\alpha p}{\varepsilon}\theta_1 = \lambda S \varepsilon \theta_1.$$

Останній вираз є базовим для визначення величини коефіцієнта теплопровідності λ. Остаточно знаходимо, що:

$$\lambda = \frac{\dot{Q}x}{S\theta_1 \ln\frac{\theta_1}{\theta}}. \tag{2.5}$$

Стрижень скінченної довжини. На практиці мають справу із стрижнями, які мають цілком певну довжину L, але чим стрижень довший, тим точніше можна визначити коефіцієнт теплопровідності за формулою (2.5). Похибку розрахунків ΔQ можна знайти, якщо проінтегрувати рівняння (2.1) у межах від x = L до x = ∞. Маємо:

$$\Delta Q = \frac{\alpha p}{\varepsilon}\theta_1 \exp(-\varepsilon L).$$

Відносна похибка за рахунок скінченої довжини стрижня L становитиме:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \exp(-\varepsilon L).$$

2.3 Одношарова стінка з внутрішніми джерелами тепла

Цей випадок може бути практично реалізований при пропусканні електричного струму по достатньо довгій металевій смужці. Математично задача формулюється наступним чином. Диференційне рівняння теплопровідності

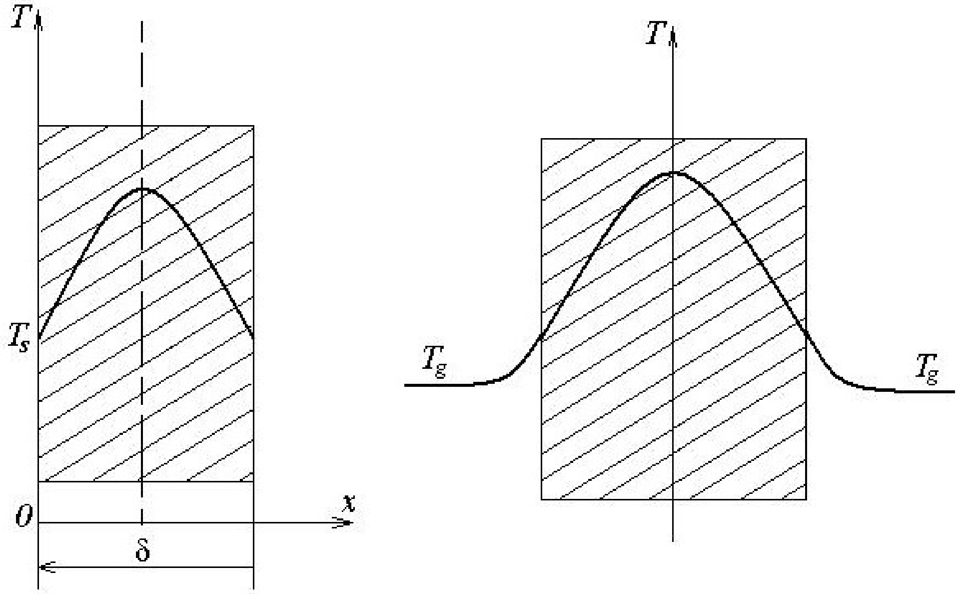


Рис. 2.4 *Розподіл температури при теплопровідності плоскої пластини з внутрішніми джерелами тепла.*

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} + q_V = 0$$

з граничними умовами

$$x = 0,\; T = T_s,$$
$$x = \delta,\; T = T_s,$$

(в загальному випадку температури поверхонь можуть бути різними). Двічі інтегруючи наведене диференційне рівняння і визначаючи постійні інтегрування, отримаємо

$$T = T_s + \frac{q_V \delta^2}{2\lambda} \cdot \frac{x}{\delta}\left(1 - \frac{x}{\delta}\right). \tag{2.6}$$

Таким чином, розподіл температур представляє собою квадратичну параболу, що має максимум в середині пластини ($x = \delta/2$):

$$T_{\max} = T_s + \frac{q_V \delta^2}{8\lambda}. \tag{2.7}$$

Тепловий потік на поверхні пластини легко розрахувати, продиференціювавши (2.6) і використовуючи закон Фур'є (1.6), але ще легше визначити його з рівняння теплового балансу. В розрахунку на одиницю поверхні тепла виділяється $q_V\delta$, а знімається з поверхонь половина цієї величини, тобто

$$q_c = \frac{1}{2} q_V \delta. \tag{2.8}$$

Відмітимо також, тут q залежить від x, обертаючись в нуль в середині пластинки і досягаючи максимуму на її поверхні.

Для того, щоб розповсюдити отриманий розв'язок на випадок граничних умов 3-го роду, достатньо використати умови спряження теплового потоку на

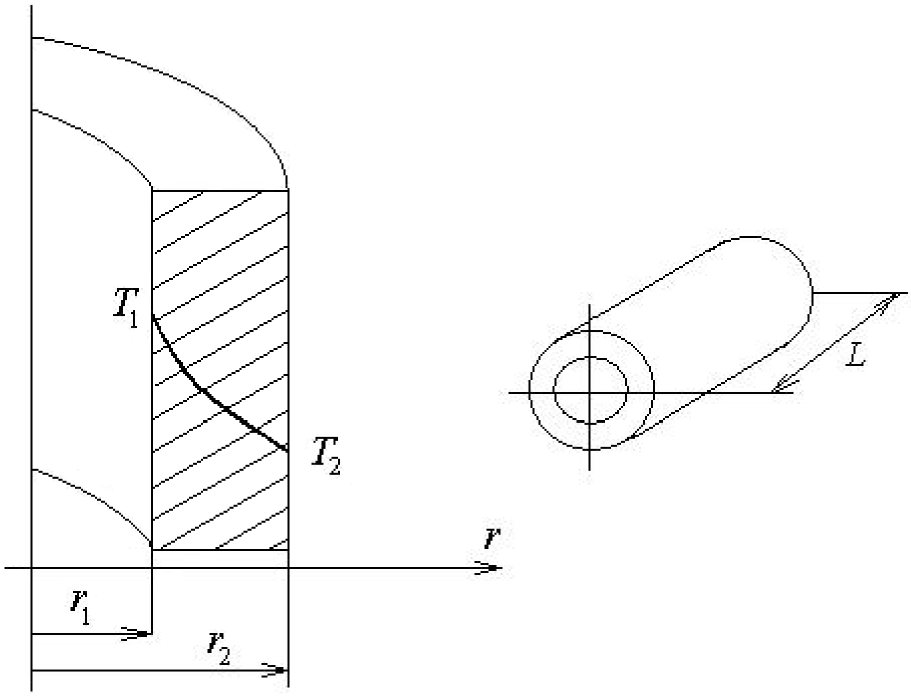


Рис. 2.5 *Теплопередача через одношарову циліндричну стінку*

границі. Дійсно, з однієї сторони, справедливо (2.8), а з іншої – закон Ньютона – Ріхмана $q_c = \alpha(T_c - T_g)$. Отож,

$$T_c - T_g = \frac{q_V \delta}{2\alpha},$$

$$T = T_g + \frac{q_V \delta}{2\alpha} + \frac{q_V \delta^2}{2\lambda} \frac{x}{\delta}\left(1 - \frac{x}{\delta}\right),$$

$$T_{max} = T_g + \frac{q_V \delta}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4}\frac{\delta}{\lambda}\right).$$

Зазначимо, що отримані в даному розділі формули справедливі при відсутності або малості теплообміну через бічну поверхню тіла.

2.4 Одно- та багатошарова циліндрична стінка при відсутності внутрішніх джерел тепла

Рівняння, що описує процес теплопровідності в циліндричних координатах, у випадку незалежності коефіцієнта теплопровідності від температури та відсутності внутрішніх джерел тепла, для розглянутої задачі запишеться у вигляді

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

при граничних умовах

$$r = r_1,\ T = T_1, \qquad \text{та} \qquad r = r_2,\ T = T_2.$$

З граничних умов випливає (оскільки $r \neq 0$), що $r\dfrac{dT}{dr} = C_1$ і

$$T = C_1 \ln r + C_2 .$$

Отриманий вираз представляє собою рівняння логарифмічної кривої. Визначаючи константи інтегрування з крайових умов, в результаті отримаємо

$$T = T_1 - \left(T_1 - T_2\right)\frac{\ln\left(r/r_1\right)}{\ln\left(r_2/r_1\right)}.$$

Підкреслимо, що якщо для плоскої стінки при відсутності внутрішніх тепловиділень для всіх ізотермічних поверхонь густина теплового потоку стала, то для циліндричної стінки по зрозумілим причинам густина теплового потоку спадає зі збільшенням радіусу (оскільки зростає площа тепловідводу). Диференціюючи останній вираз по радіальній координаті, отримаємо

$$q = -\lambda\frac{dT}{dr} = \lambda\frac{\left(T_1 - T_2\right)}{r\ln(r_2/r_1)}.$$

В той же час величина загального теплового потоку залишається сталою:

$$Q = q \cdot 2\pi r L = \frac{2\pi\lambda L\left(T_1 - T_2\right)}{\ln\left(r_2/r_1\right)}.$$

Природно, що і лінійна густина теплового потоку, що визначається як $q_L = Q/L$, Вт/м, також залишається незмінною. Величина $\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}$ носить назву лінійного термічного опору. Сталість q_L робить її зручною при розрахунках тепловіддачі через циліндричні стінки. У випадку необхідності її можна легко зв'язати з густиною теплового потоку на зовнішній і внутрішній поверхнях

$$q_L = \pi d_1 q_1 = \pi d_2 q_2 .$$

На практиці часто доводиться зустрічатися з циліндричними стінками невеликої товщини. Коли, наприклад, $r_2/r_1 \le 2$, то з похибкою менше 4 % для лінійної густини теплового потоку можна записати

$$q_L = 2\pi r_{cp}\frac{\lambda}{\delta}\left(T_1 - T_2\right),$$

де $\delta = r_2 - r_1$ – товщина стінки, а $r_{cp} = \frac{1}{2}\left(r_1 + r_2\right)$.

Для граничних умов 3-го роду вираз для теплового потоку, що передається через циліндричну стінку, легко отримати, використовуючи незмінність лінійної густини теплового потоку (рис. 2.6):

$$\left.\begin{aligned} q_L &= \pi d_1\alpha_1\left(T_{g1} - T_1\right) \\ q_L &= \frac{\pi\left(T_1 - T_2\right)}{\frac{1}{2\lambda}\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)} \\ q_L &= \pi d_2\alpha_2\left(T_2 - T_{g2}\right) \end{aligned}\right\}$$

Розв'язуючи систему стандартним прийомом відносно q_L, будемо мати

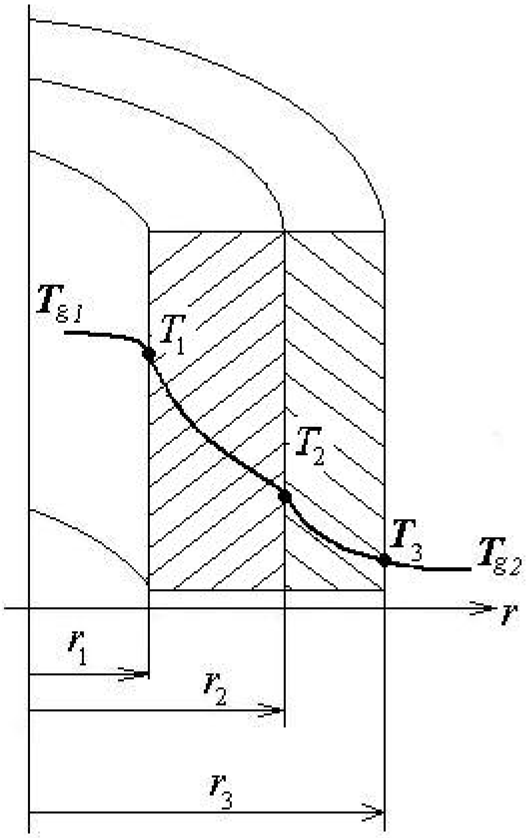


Рис. 2.6 *Теплопередача через багатошарову циліндричну стінку.*

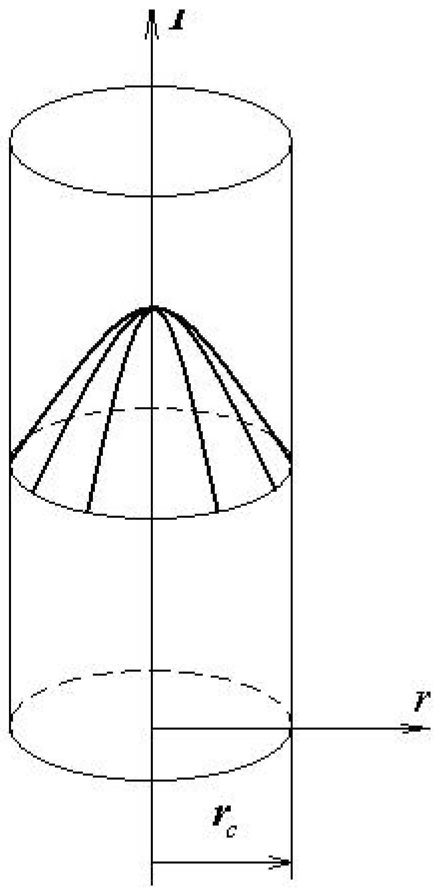


Рис. 2.7 *Теплопровідність однорідного циліндра з внутрішніми джерелами тепла.*

$$q_L = \frac{\pi\left(T_{g1} - T_{g2}\right)}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \dfrac{1}{2\lambda}\ln\left(d_2/d_1\right) + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2}},$$

де

$$K_L = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \dfrac{1}{2\lambda}\ln\left(d_2/d_1\right) + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2}}$$

– лінійний коефіцієнт теплопередачі через циліндричну стінку.

Для багатошарової циліндричної стінки використовується той же підхід, що і раніше: в стаціонарному випадку тепловий потік залишається незмінним. В загальному випадку для n-шарової циліндричної стінки лінійна густина теплового потоку запишеться у вигляді:

$$q_L = \frac{\pi\left(T_{g1} - T_{g2}\right)}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2\lambda_i}\ln\left(d_{i+1}/d_i\right) + \dfrac{1}{\alpha_2 d_{i+1}}}.$$

В багатьох випадках на практиці доводиться зустрічатися з дротами. Інколи необхідно знати про те, як саме матеріал дроту проводить тепло вздовж радіальної змінної. У випадку граничних умов 1-го роду вихідне диференційне рівняння теплопровідності має вигляд

$$\lambda \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+q_V=0 \tag{2.9}$$

з граничними умовами

$$r=0,\ \frac{dT}{dr}=0\ \text{(в силу симетрії)};$$
$$r=r_C;\ T=T_C.$$

Інтегруючи (2.9) і використовуючи граничні умови, отримаємо

$$T=T_C+\frac{q_V r_C^2}{4\lambda}\left[1-\left(\frac{r}{r_C}\right)^2\right] \tag{2.10}$$

Очевидно, максимальна температура буде спостерігатися на вісі стрижня і буде дорівнювати

$$T_{max}=T_C+\frac{q_V r_C^2}{4\lambda}.$$

Отриманий вираз для максимальної температури співпадає з виразом, отриманим для пластини, відрізняючись лише величиною числового коефіцієнту, що являється, таким чином, функцією геометрії системи.

Величина q_C може бути знайдена з рівняння теплового балансу

$$\pi r_C^2 q_V=2\pi r_C q_C,$$

звідки випливає, що густина потоку через бічну поверхню

$$q_C=\frac{q_V r_C}{2}.$$

У разі граничних умов 3-го роду використовуємо умову спряження теплових потоків на границі $q_C=\frac{q_V r_C}{2}=\alpha\left(T_C-T_g\right)$. Таким чином, знайдемо величину T_C і, підставляючи її в (2.10), отримаємо в результаті

$$T=T_g+\frac{q_V r_C}{2\alpha}+\frac{q_V r_C^2}{4\lambda}\left[1-\left(\frac{r}{r_C}\right)^2\right].$$

2.5 Визначення критичної товщини ізоляції трубопроводів

Більша частина апаратури і трубопроводів низькотемпературних пристроїв, як і самі кріорідини, мають температуру, суттєво нижчу за температуру навколишнього середовища. Тому завжди існує суттєвий тепловий потік, направлений з навколишнього середовища в низькотемпературну частину кріогенного пристрою. Компенсація цих теплопритоків вимагає додаткових енергетичних та капітальних затрат. Призначення теплової ізоляції в кріогенній техніці , таким чином, в основному зводиться до зменшення до мінімуму притоку тепла з навколишнього середовища. При нанесенні теплової ізоляції на трубопровід цей теплопритік зменшується непропорційно збільшенню товщини ізоляції. Більш

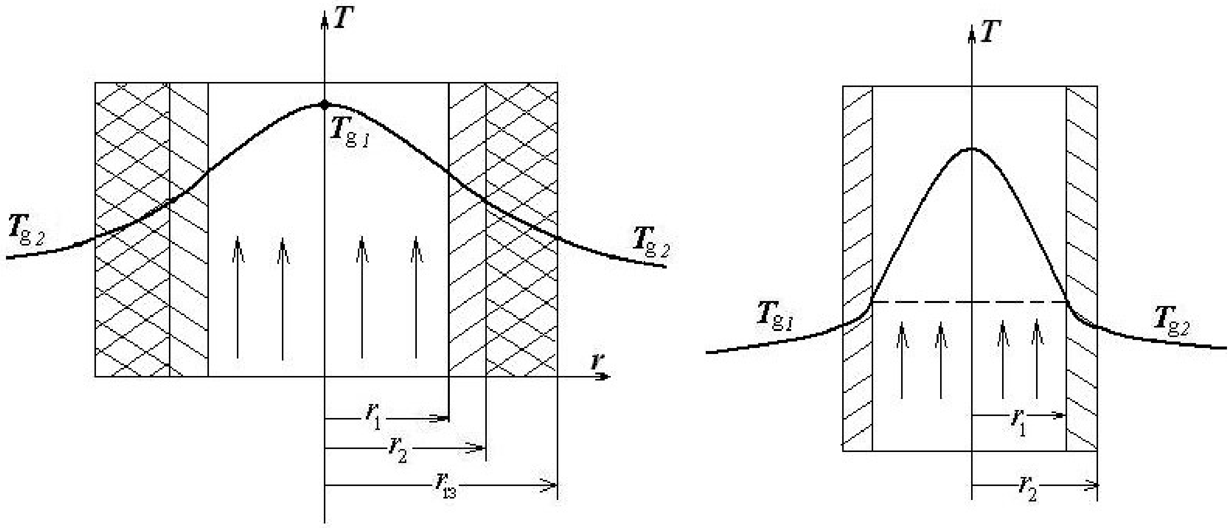


Рис. 2.8 *До умови вибору матеріалу теплової ізоляції трубопроводу*

того, можливий випадок, коли в результаті неправильного вибору товщини і матеріалу ізоляції теплоприток (або навпаки, теплові втрати) зростуть. Дійсно, для обох варіантів, зображених на рис. 2.8, справедливе рівняння

$$q_L = \frac{\pi\left(T_{g1} - T_{g2}\right)}{R_L},$$

де R_L – повний лінійний термічний опір, К/(Вт·м).

Без ізоляції: $R_{L0} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\ln\left(d_2/d_1\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2}$; (2.11)

з ізоляцією: $R_L = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\ln\left(d_2/d_1\right) + \frac{1}{2\lambda_{із}}\ln\left(d_{із}/d_2\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_{із}}$. (2.12)

Таким чином, накладення ізоляції викликає два протилежних ефекти:

– зростання термічного опору теплопровідності шару ізоляції;

– зменшення зовнішнього термічного опору тепловіддачі за рахунок збільшення зовнішнього діаметру (збільшення поверхні теплообміну).

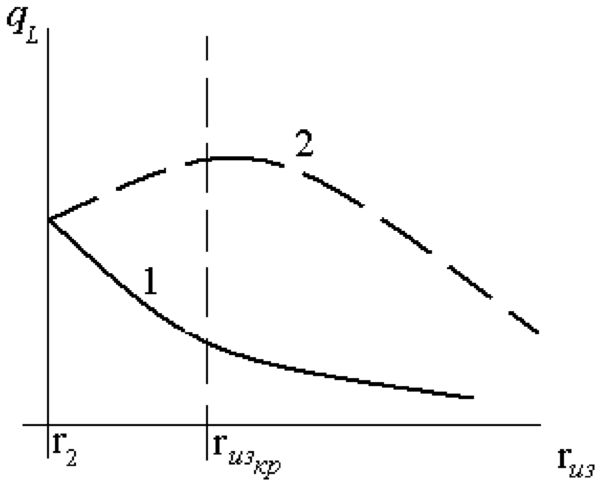
Очевидно, вибір ізоляції може вважатися правильним, якщо $\Delta R_L = R_L - R_{L0} > 0$, тоді і $Q_{із} < Q_0$. Використовуючи (2.11) і (2.12), запишемо

$$\Delta R_L = \frac{1}{2\lambda_{із}}\ln\left(d_{із}/d_2\right) - \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_{із}}\right).$$

Щоб $\Delta R_L \geq 0$ при будь-яких $d_{із}$, необхідно також вимагати, щоб

$$\lambda_{із} \leq \frac{1}{2}\alpha_2 d_2. \qquad (2.13)$$

Отже, при правильному виборі матеріалу ізоляції виконується умова (2.13) і теплові втрати представляють собою монотонно спадаючу функцію $d_{із}$ (крива 1 на рис. 2.9). В протилежному випадку теплові втрати при нанесенні ізоляції



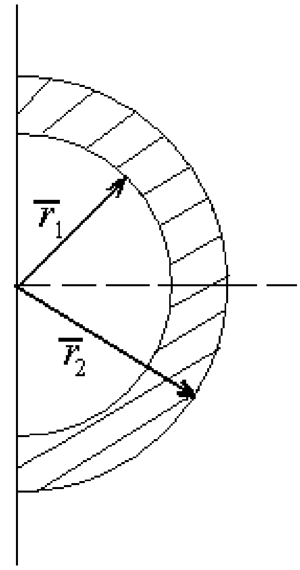


Рис. 2.9 *Залежність теплових втрат трубопровода від товщини ізоляційного шару*

Рис. 2.10 *Однорідна сферична стінка*

зростають (крива 2) і досягають максимуму при величині $\left(d_{із}\right)_{кр} = 2\dfrac{\lambda_{із}}{\alpha_2}$, що називається критичним діаметром теплової ізоляції. Очевидно, щоб ізоляція була ефективною, необхідна умова $d_2 \geq \left(d_{із}\right)_{кр}$. Це безпосередньо випливає з (2.13). Відмітимо ще одну важливу обставину: оскільки $\alpha_2 \approx 10$ Вт/(м^2·К) (коефіцієнт тепловіддачі при природній конвекції в повітрі), а $\lambda_{із} \leq 0.2$ Вт/(м·К), то $\left(d_{із}\right)_{кр} \approx 40$мм. Це означає, що для труб більшого діаметру будь-яка ізоляція являється ефективною, а задача раціонального вибору теплової ізоляції актуальна лише для трубопроводів малого діаметру.

2.6 Сферична одношарова стінка з граничними умовами 1-го роду при відсутності внутрішніх джерел тепла.

Рівняння теплопровідності в сферичних координатах для розглянутого випадку (рис. 2.10) запишеться в наступному вигляді:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

з граничними умовами

$$r = r_1, \quad T = T_1; \qquad\qquad r = r_2, \quad T = T_2.$$

Введемо в розгляд нову змінну $x = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_1}$.

Тоді диференційне рівняння теплопровідності може бути перетворене до вигляду

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0$$

з граничними умовами

$$x=0,\quad T=T_1;\qquad\qquad x=\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1},\ \ T=T_2.$$

В такій формі математичний опис задачі повністю співпадає з розглянутою раніше задачею для плоскої стінки, тому розв'язок може бути записаний зразу. Повертаючись до попередніх позначень, отримаємо

$$T=T_1-\frac{T_1-T_2}{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right).$$

Тепловий потік через сферичну стінку отримаємо шляхом диференціювання:

$$Q=-4\pi r^2\lambda\frac{dT}{dr}=\frac{4\pi\lambda\left(T_1-T_2\right)}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}.$$

Відмітимо одну цікаву особливість, характерну для тіл сферичної геометрії. Спрямуємо $r_2\to\infty$, тоді

$$Q_{r_2\to\infty}=4\pi\lambda r_1\left(T_1-T_2\right),$$

в той час як для плоскої і циліндричної стінок в аналогічному випадку $Q=0$. Таким чином, сферичне теплове джерело, що поміщене в нескінченне середовище, утворює стаціонарний тепловий потік.

2.7 Врахування температурної залежності коефіцієнту теплопровідності

Більшість експериментальних методів ґрунтується на спостереженні за температурним полем у досліджуваному тілі при нагріванні (охолодженні). Стосовно до стаціонарних умов використовуються закон Фур'є (1.6) у вигляді:

$$\dot{Q}=-\lambda\frac{\partial T}{\partial n}S=\mathrm{const}\tag{2.14}$$

та диференційне рівняння теплопровідності для одновимірного температурного поля

$$\frac{1}{r^k}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r^k\frac{\partial T}{\partial r}\right)+q_V=0.\tag{2.15}$$

Воно справедливе для тіл, фізичні властивості яких не залежать від температури. Тут r – поточна координата; $k=1{,}2{,}3$ – відповідно для пластини, циліндра і кулі ; n – нормаль до ізотермічної поверхні; q_V – густина теплового потоку, що створюється внутрішніми джерелами тепла.

Приведені рівняння справедливі для твердих тел. Для рідин і газів вони можуть бути використані, якщо відсутні інші способи переносу теплоти (конвекцією, випромінюванням і т.д.). Ці рівняння не мають загального рішення . Отримано їхні частинні розв'язки стосовно до тіл правильної геометричної форми при конкретно заданих умовах однозначності, що і використовуються при постановці експерименту. Розв'язок диференційних рівнянь (2.14) і (2.15) для тіл простої геометричної форми при граничних умовах першого роду дозволяють знайти коефіцієнт теплопровідності зі співвідношення:

$$\lambda = \frac{Q}{T_{w1} - T_{w2}} K,$$

де K – коефіцієнт форми, що виражається залежностями відповідно для необмежених плоских, циліндричного, а також сферичних шарів досліджуваної речовини:

$$K_1 = \frac{\delta}{S}; \quad K_2 = \ln\frac{d_2}{d_1}\frac{1}{2\pi L}; \quad K_3 = \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)\frac{1}{2\pi},$$

де $\delta = r_2 - r_1$ (або $\delta = x_2 - x_1$) – товщина плоского шару, м; S – розрахункова поверхня, нормальна до напрямку теплового потоку, м^2; L – довжина циліндричного шару, м; d_1 і d_2 – відповідно внутрішній і зовнішній діаметри циліндричного і кульового шарів досліджуваної речовини, м; T_{w1}, T_{w2} – температури на ізотермічних поверхнях, що відповідають цим діаметрам.

Раніше в першому розділі зазначається, що в загальному випадку коефіцієнт теплопровідності залежить від температури $\lambda = \lambda(T)$. В цьому випадку стаціонарне диференційне рівняння теплопровідності при відсутності внутрішніх джерел тепла прийме наступний вигляд:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = 0. \tag{2.16}$$

Введемо в розгляд нову змінну (вона носить назву змінної Кірхгофа)

$$E = \int_0^T \lambda(T) dT. \tag{2.17}$$

Очевидно, що $\operatorname{grad} E = \frac{dE}{dT} \operatorname{grad} T = \lambda \operatorname{grad} T$, і тоді рівняння (2.16) перетворюється до відомого рівняння Лапласа, що описує стаціонарну теплопровідність з теплофізичними властивостями, що не залежать від температури:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} E) = \nabla^2 E = 0. \tag{2.18}$$

Якщо задані, наприклад, граничні умови 1-го роду і конкретний вигляд залежності $\lambda(T)$, тоді до рівняння (2.18) можна записати наступні крайові умови:

$$x = x_1, \quad E = E_1 = \int_0^{T_1} \lambda(T) dT;$$

$$x = x_2, \quad E = E_2 = \int_0^{T_2} \lambda(T) dT.$$

Постановка задачі у такому вигляді формально аналогічна розглянутим вище, і, отже, всі отримані результати залишаються в силі, але з тією різницею, що вони відносяться до нової змінної E. Наприклад, для плоскої стінки

$$E = E_1 - (E_1 - E_2)\frac{x}{\delta}.$$

Для розрахунку поля температур необхідно скористатися рівнянням (2.17), яке встановлює функціональну залежність $E(T)$. Якщо необхідно обчислити тільки величину густини теплового потоку, то ситуація ще більш спрощується. Оскільки $q = -\lambda \operatorname{grad} T = -\operatorname{grad} E$, то в співвідношеннях для q з'являється лише різниця величин $E_1 - E_2$, наприклад, для плоскої стінки

$$q = \frac{E_1 - E_2}{\delta}. \tag{2.19}$$

В той же час

$$E_1 - E_2 = \int_0^{T_1} \lambda dT - \int_0^{T_2} \lambda dT = \int_{T_1}^{T_2} \lambda dT.$$

Останнє рівняння може бути переписано у вигляді

$$E_1 - E_2 = \bar{\lambda}(T_1 - T_2),$$

де $\bar{\lambda} = \frac{1}{T_1 - T_2} \int_{T_1}^{T_2} \lambda dT$ – середньоінтегральна величина коефіцієнту теплопровідності в інтервалі температур [T_1, T_2]. Отже, формула (2.19) може бути представлена так:

$$q = \bar{\lambda} \frac{T_1 - T_2}{\delta}.$$

Таким чином, для розрахунків теплового потоку при коефіцієнті теплопровідності, що залежить від температури, можна скористатися звичайними формулами, отриманими при λ = const, підставляючи в них середньоінтегральні значення $\bar{\lambda}$. Величина $\bar{\lambda}$ найбільш розповсюджених матеріалів міститься в додатку.

3. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ СТАЦІОНАРНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТУ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

3.1 Вимірювання коефіцієнту теплопровідності діелектриків стаціонарним методом

За допомогою ламбдаколориметра Геращенко безпосередньо вимірюють усі величини, необхідні для визначення коефіцієнту теплопровідності. Тепловий потік q вимірюється датчиком теплового потоку, товщина зразка x – вмонтованим у прилад індикатором з точністю до 10^{-5} м, різниця температур ΔT, температура поверхні нагрівача $T_н$ і холодильника $T_х$) – диференційною хромель-алюмелевою термопарою. Конструкція датчика дає змогу значно зменшити розміри зразків і не потребує запобіжних пристроїв для забезпечення одновимірності теплового потоку.

Пластина досліджуваного матеріалу 3 розміщена між плоским електронагрівачем 2 і вирівнюючою плитою з високотеплопровідного матеріалу 4 та холодильником 9 з проточною термостатованою рідиною.

При дослідженні сипких матеріалів використовують кільце 1 з маслотермостійкої гуми для формування і герметизації камери, в якій міститься сипкий матеріал. Спаї термопари 7 запаяні в плиті 4 і пластині 5 безпосередньо в околі контакту з матеріалом.

Пластину 5 і датчик 6 заливають епоксидною смолою 8, що забезпечує тепловий контакт з холодильником. Датчиком теплового потоку установки можна вимірювати малі величини теплового потоку q у вузькому діапазоні температур (1...3К). Внаслідок невисокого термічного опору датчик не спричиняє значних спотворень поля теплового потоку.

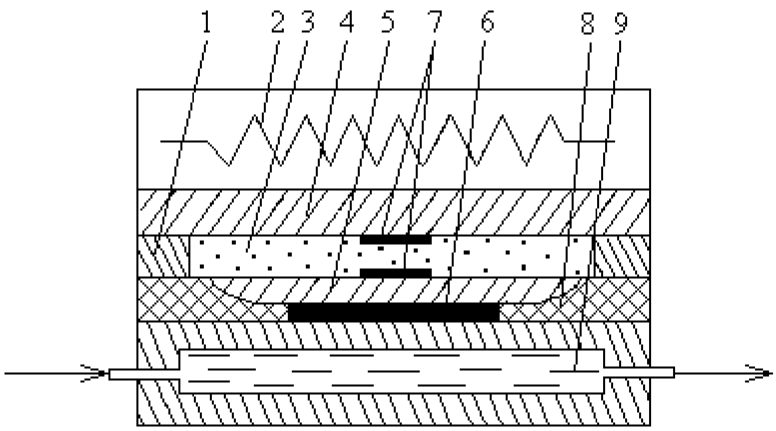


Рис. 3.1 *Ламбдакалориметр Геращенко:*
1 – кільце з масло термостійкої гуми; 2 – електронагрівач; 3 – пластина з досліджуваного матеріалу; 4 – плита високотермопровідного матеріалу; 5 – пластина; 6 – датчик; 7 – спаї термопар; 8 – епоксидна смола; 9 – холодильник.

Коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К), визначається за формулою

$$\lambda = \frac{q\Delta x}{\Delta T} = \frac{\varepsilon_D}{\Delta T} K_D \Delta x\,,$$

де ε_D – сигнал датчика, мВ; K_D – коефіцієнт датчика, Вт/м^2·мВ (наведений у паспорті).

3.2 Визначення коефіцієнту теплопровідності методом Хрістіансена

Метод плоского шару (метод Хрістіансена) є відносним методом для визначення коефіцієнту теплопровідності λ_x, тобто ґрунтується на використанні еталонного матеріалу, для якого коефіцієнт теплопровідності заздалегідь відомий λ_{et}.

Розглянемо систему з двох щільно з'єднаних циліндричних пластин, виготовлених з різного матеріалу (один з яких і є еталонним) (Рис.3.2). Контакт між поверхнями є досконалим, внаслідок чого температура T_2 на границі між ними однакова. На зовнішніх границях подібна система також щільно контактує з нагрівачем та холодильником, температура яких не змінюється з часом і дорівнює відповідно T_1 і T_3 ($T_1 > T_3$).

В підрозділі 2.1 було показано, що температура вздовж шару лінійно змінюється. В стаціонарному випадку тепловий потік через дві пластини є незмінним. Це дає змогу записати рівність:

$$\frac{\lambda_{et}}{h_{et}}\left(T_1 - T_2\right) = \frac{\lambda_x}{h_x}\left(T_2 - T_3\right),$$

де h_{et} і h_x товщини пластин.

Звідки остаточна формула для визначення невідомого коефіцієнту теплопровідності досліджуваної речовини має вигляд:

$$\lambda_x = \lambda_{et}\frac{h_x}{h_{et}} \cdot \frac{\left(T_1 - T_2\right)}{\left(T_2 - T_3\right)}. \qquad (3.1)$$

Таким чином, для визначення λ_x необхідно знати товщину еталонного і досліджуваного матеріалів h_1 і h_2 , а також величини температурних напорів з обох боків від контактного шару $\Delta T_{ет} = \left(T_1 - T_2\right)$ та $\Delta T_x = \left(T_2 - T_3\right)$.

Враховуючи, що формула (3.1) отримана за умов, коли коефіцієнт теплопровідності не залежить від температури, визначену у такий спосіб величину λ_x відносять до середньої температури досліджуваного матеріалу.

Установка складається з двох дисків. Диск 1 виготовлений, наприклад, з ебоніту, і вважається за еталонний. Диск 2 виготовлений з матеріалу, коефіцієнт теплопровідності якого необхідно визначити. Згадані диски щільно з'єднані один з одним та розташовані між холодильником 3 і нагрівачем 4. Теплоносієм є вода. Через нагрівач прокачується гаряча вода з термостату 5, а через холодильник вода з водопостачальної мережі. Для вимірювання температурного напору у дисках застосовуються дві диференційні термопари 6 і 7. Термо-ерс цих термопар, за допомогою перемикача, реєструється потенціометром 8.

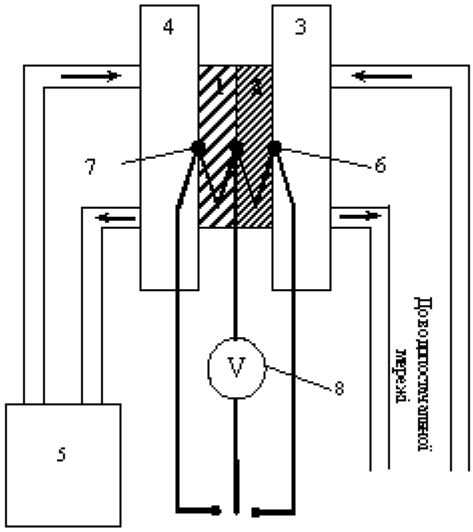


Рис. 3.2 *Схема установки для методу Хрістіансена*

Зразки твердих тіл мають однакову товщину, тому коефіцієнт теплопровідності обчислюється за формулою:

$$\lambda_x = \lambda_{et} \cdot \frac{\Delta T_{et}}{\Delta T_x}.$$

Коефіцієнт теплопровідності обчислювався в кожний момент часу, щоб побачити, коли з достатньою мірою точності, можна вважати, що вже стаціонарний режим встановився і значення коефіцієнту теплопровідності можна вважати знайденим правильно.

3.3 Метод циліндрів

Розглянемо модель установки для визначення коефіцієнта теплопровідності (рис. 3.3.). Торцева піч 1 створює тепловий потік через піраміду циліндрів, два з яких 12 виготовлені з еталонного матеріалу, середній 11 – з досліджуваного. Нижній циліндр поміщений у термостат 10, який служить тепло-відводом. У всіх циліндрах розміщені термопари 4 – 9 для вимірювання температур. Оскільки геометричні розміри всіх циліндрів однакові, то формула для визначення коефіцієнту теплопровідності набуде вигляду:

$$\frac{\lambda_{et}}{\lambda_x} = \frac{\Delta T_x}{\Delta T'_{et}} = \frac{\Delta T_x}{\Delta T''_{et}},$$

де $\Delta T'_{et} = T_4 - T_5, \Delta T_x = T_6 - T_7, \Delta T''_{et} = T_8 - T_9$ – градієнти температури відповідно на верхньому, середньому (зразок) та нижньому циліндрах. Отже, теплопровідність обернено пропорційна градієнту температури. Реєструють сигнали термопар за допомогою потенціометра. Стаціонарний процес, тобто ламінарний потік тепла (рис. 3.3.), встановлюється, починаючи з часу τ_1. Отримавши із самописця градієнти температур і, знаючи коефіцієнт теплопровідності еталона λ_{et}, знайдемо λ_x.

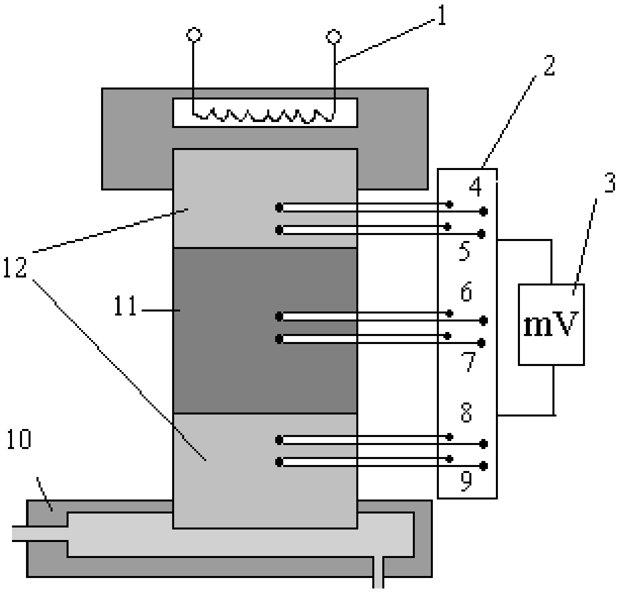


Рис. 3.3 *Відносний метод вивчення теплопровідності:*
1 – торцева піч, 2 – клемна коробка, 3 – потенціометр, 4-9 – термопари, 10 – термостат, 11 – досліджуваний зразок; 12 – еталон.

Використовуючи замість суцільного циліндра 11 тонкостінний порожнистий циліндр із теплоізоляційного матеріалу, можна вимірювати коефіцієнт теплопровідності рідин і низькотемпературних металів та сплавів (наприклад, евтектичного розплаву In-Ga-Sn), а також за певних умов – електропровідність і термо-е.р.с.

Вимірювання теплопровідності при високих температурах ускладнене, оскільки теплові втрати внаслідок випромінювання зростають пропорційно T^4 і, крім цього, залежать від певних характеристик матеріалу (наприклад, оптичної чорноти поверхні). Тому відносні методи майже не застосовуються при температурах вище 500 °С.

3.4 Метод циліндричних шарів

Останнім часом широко використовується метод циліндричного шару (рис. 2.5), особливо при дослідженні теплопровідності розплавлених металів і напівпровідників. Речовина 1 заповнює проміжок між коаксіальними циліндрами 2 і 3, де створюється сталий градієнт температури, який вимірюють термопарами 4.

Кількість теплоти, що проходить за одиницю часу в стаціонарному стані через бокову поверхню довільного циліндру між внутрішнім і зовнішнім циліндрами дорівнює:

$$\dot{Q} = 2\pi r \cdot \ell \cdot \lambda \cdot \frac{dT}{dr}.$$

І ця кількість теплоти постійна для довільного циліндричного шару.

Граничні умови для цієї задачі:

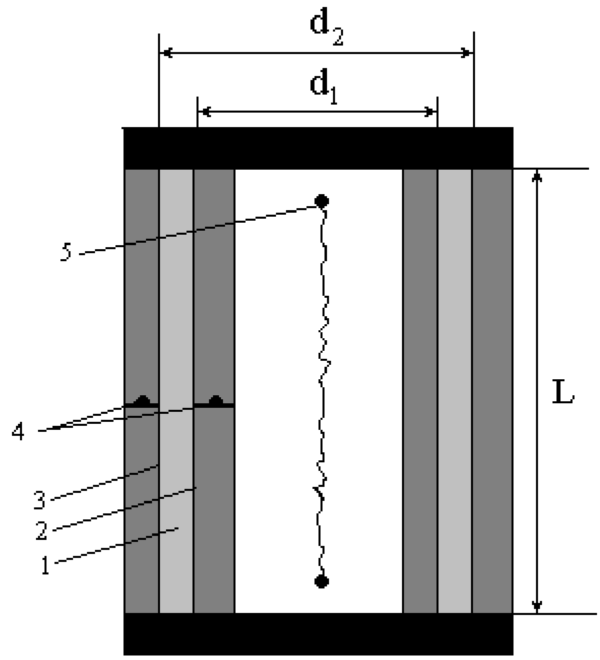


Рис. 3.4 *Метод коаксіальних циліндрів: 1 – досліджувана речовина; 2,3 – коаксіальні циліндри; 4 – термопари; 5 – нагрівач.*

1) $r = d_2 / 2$, $T = T_2$,

2) $r = d_1 / 2$, $T = T_1$.

В результаті розв'язку крайової задачі коефіцієнт теплопровідності визначають за формулою для циліндричного шару:

$$\lambda = \frac{\dot{Q} \ln(d_2/d_1)}{2\pi\ell(T_1 - T_2)},$$

де $\dot{Q}$ – кількість теплоти, яку виділяє нагрівник 5 у внутрішньому циліндрі за одиницю часу; ℓ – довжина твірної циліндра; d_1, d_2 – внутрішній діаметри циліндричного шару зразка; T_1, T_2 – температури внутрішнього і зовнішнього шарів зразка.

3.5 Визначення коефіцієнту теплопровідності металевого стрижня (метод Барата-Вінера)

Стрижень 1 діаметром d і довжиною L одним кінцем щільно вставлений в отвір печі 2 з електричним нагрівним елементом. Інший кінець стрижня є вільним. Для виключення непередбачених розрахунками втрат тепла піч уміщується у посудину Дьюара. Живлення електричного кола здійснюється від електричної мережі через вимикач 3. Напруга U і сила току I, що проходить через нагрівний елемент печі, реєструються вольтметром 4 і амперметром 5. Різниця температур стрижня і навколишнього середовища (надлишкова температура θ) вимірюється за допомогою шести мідь-константанових термопар 6-11, що підключені через перемикач 12 до потенціометра 13.

Коефіцієнт теплопровідності розраховується за формулою (2.5):

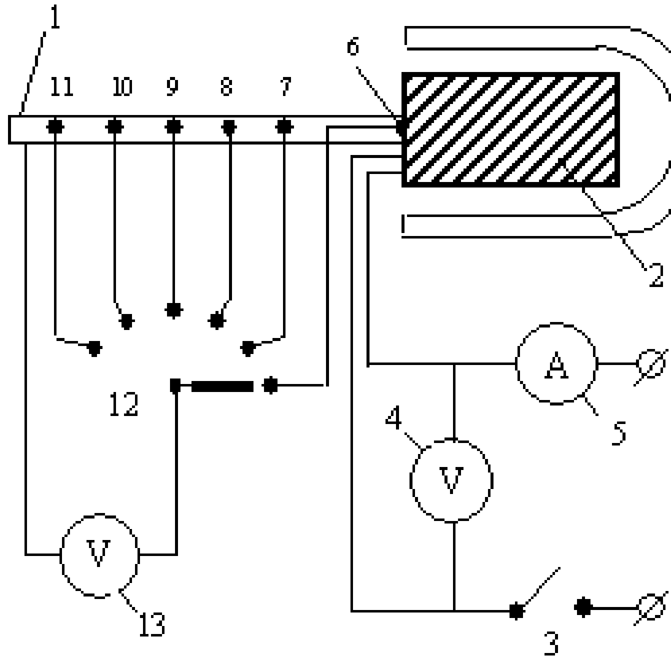


Рис. 3.5 *Схема установки методу Барата–Вінера.*

$$\lambda = \frac{\dot{Q}x}{S\theta_1 \ln \frac{\theta_1}{\theta}}.$$

В умовах стаціонарності процесу, коли розподіл температури вздовж стрижню є сталим у часі, кількість тепла $\dot{Q}$, що втрачається стрижнем через бічну поверхню за одиницю часу дорівнює кількості тепла, що утворюється у печі за рахунок протікання електричного струму: $\dot{Q} = IU$.

3.6 Визначення відношення коефіцієнтів тепло- і електропровідності металів (метод Кольрауша)

В методі Кольрауша коефіцієнт теплопровідності λ визначається за теплотою, що виділяється в металевому стержні при проходженні через нього електричного струму. Причому створені такі умови, що можемо нехтувати молекулярно-конвективним q_α та радіаційним q_w потоками. При підтриманні на кінцях стрижня постійної температури T_0 спостерігається максимальна температура в середині стрижня T_{max}.

Коефіцієнт теплопровідності знаходимо із (2.7):

$$\lambda_m = \frac{q_v L^2}{8(T_m - T_0)}.$$

Густину джоулевого тепловиділення в даному випадку визначаємо як

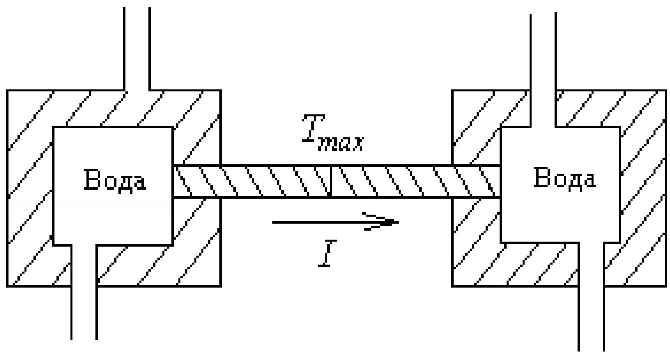


Рис. 3.6 *Метод Кольрауша*

$$q_v = \frac{U^2}{R\pi r_s^2 L},$$

де $Re = \rho \frac{L}{\pi r_s^2}$, U – напруга, прикладена до кінців дроту, ρ – питома електропровідність металу, Ом/м; L – довжина дроту, r_s – радіус дроту.

За допомогою наведених формул визначаємо коефіцієнт теплопровідності металевого дроту:

$$\lambda = \frac{U^2}{8\rho(T_m - T_0)}.$$

Звідси і знаходиться значення відношення коефіцієнтів теплопровідності до електропровідності (коефіцієнту Відемана-Франца):

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{U^2}{8(T_m - T_g)},$$

де σ – коефіцієнт електропровідності.

Його можна визначити і іншим способом. Знайдемо середню температуру вздовж стрижня як наступний інтеграл:

$$\overline{T} = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} T dx = T_0 + \frac{U^2}{R\lambda}\left(\frac{L^2}{8} - \frac{L^2}{24}\right) = T_m - \frac{U^2}{R\lambda}\frac{L^2}{12}.$$

Звідси
$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{U^2}{12(\overline{T} - T_g)}.$$

Якщо температурна залежність опору провідника представлена у вигляді лінійної залежності (справедлива для більшості металів):

$$R = R_0\left(1 + \alpha\left(\overline{T} - T_0\right)\right),$$

то середнє значення температури стрижня визначається через опір провідника.

3.7 Визначення коефіцієнту теплопровідності металів при високих температурах (метод тонкого дротика)

Зразок металу у вигляді тонкого дротика нагрівається у газовому середовищі (повітрі). Теплообмін поверхні з газовим середовищем здійснюється природньою конвекцією і описується законом Ньютона-Ріхмана. Крім цього нагріта поверхня дротика здійснює теплообмін випромінюванням з менш нагрітими навколишніми тілами.Одже, розглянемо короткий металевий стержень довжиною 2L, у якого кінці x = –L і x = L знаходяться при температурі навколишнього середовища T_g. Почнемо нагрівати цей зразок електричним струмом I. В результаті вздовж стрижня встановлюється симетричний профіль температури T(x) відносно центру дроту. Тоді нехтуючи температурною залежністю λ та ε та не враховуючи градієнт температури по радіусу (зразок повинен бути достатньо тонкий), можна отримати наступне рівняння теплопровідності при стаціонарному режимі

$$\lambda\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{p}{S}\left[\varepsilon\sigma\left(T^4-T_0^4\right)+\alpha\left(T-T_0\right)\right]+\frac{I^2\rho}{S^2}=0, \tag{3.2}$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, S – площа поперечного перетину, p – периметр поперечного перерізу стержня, ε – коефіцієнт чорноти, σ – константа Стефана-Больцмана, ρ – питомий електроопір матеріалу стрижня. Температурну залежність питомого опору представимо у вигляді: $\rho=\rho_m\left(1-\beta\left(T_m-T\right)\right)$, де T_m – максимальна температура дроту (всередині).

Розглянемо область 0 < x < L з крайовими умовами:

$$T=T_0;x=L; \qquad \frac{dT}{dx}=0;x=0,\ T=T_m. \tag{3.3}$$

Тобто всередині стрижня спостерігається максимум температури, а його кінці підтримуються при сталій температурі.

Введемо нову змінну $y=dT/dx$. Тоді

$$\frac{d^2T}{dx^2}dT=\frac{dy}{dx}\cdot dT=\frac{dy}{dT}\cdot ydT=\frac{1}{2}\frac{d\left(y^2\right)}{dT}dT.$$

В результаті маємо

$$\frac{1}{2}y^2=\int_{T_0}^{T}\left(\frac{p\varepsilon\sigma}{\lambda S}\left(T^4-T_0^4\right)-\frac{I^2\rho_m}{\lambda S^2}\left(1-\beta\left(T_m-T\right)\right)+\frac{\alpha p}{\lambda S}\left(T-T_0\right)\right)dT$$

і

$$\frac{dT}{dx}=\left(\frac{2p\varepsilon\sigma}{5\lambda S}T^5-\frac{2p\varepsilon\sigma}{\lambda S}TT_0^4-\frac{2I^2\rho_m\left(1-\beta T_m\right)}{\lambda S^2}T-\frac{2I^2\rho_m\beta}{\lambda S^2}\frac{T^2}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\alpha p}{\lambda S}\frac{T^2}{2}-\frac{2\alpha p}{\lambda S}TT_0+\mathrm{const}\right)^{1/2}.$$

Константу інтегрування знаходимо з граничних умов (3.2), вважаючи що при x = 0 температура є максимальною $T=T_m$.

Таким чином, рівняння теплопровідності зводиться до інтегралу:

$$\int_0^x dx = \int_{T_m}^{T} \frac{dT}{\left[A\left(T^5 - T_m^5\right) - B\left(T - T_m\right) - C\left(T^2 - T_m^2\right)\right]^{1/2}}, \tag{3.4}$$

де $A = \dfrac{2p\varepsilon\sigma}{5\lambda S}$; $B = \dfrac{2p\varepsilon\sigma T_0^4}{\lambda S} + \dfrac{2I^2\rho_m}{\lambda S^2}\left(1 - \beta T_m\right) + \dfrac{2\alpha p}{\lambda S}T_0$; $C = \dfrac{I^2\rho_m\beta}{\lambda S^2} - \dfrac{\alpha p}{\lambda S}$ (3.5)

Рівняння (3.4) неможливо прямо проінтегрувати. Тому припустимо, що температура по стержню незначним чином відрізняється від температури всередині стрижня. Тоді можна зробити наближено заміни, позначивши різницю температури відносно температури середини стрижня як $t = T_m - T$:

$$T^5 - T_m^5 \approx 5T_m^4(T - T_m) = -5T_m^4 t, \qquad T^2 - T_m^2 \approx 2T_m(T - T_m) = -2T_m t.$$

Тоді рівняння (3.4) перепишеться у вигляді:

$$x = \int_0^t \frac{-dt}{\left[\left(B - 5T_m^4 A + 2CT_m\right)\cdot t\right]^{1/2}}.$$

Після інтегрування

$$x^2 = \frac{4t}{B - 5T_m^4 A + 2CT_m}.$$

З цього рівняння видно, що розподіл температур в околі середини короткого металевого стрижня підкоряється параболічному закону, що стверджується експериментально. Отже,

$$T(\xi) = T_m - ax^2, \tag{3.6}$$

де

$$a = \frac{B - 5T_m^4 A + 2CT_m}{4}. \tag{3.7}$$

З формул (3.5) та (3.7) маємо

$$a = \frac{2\alpha p}{4\lambda S}\left(T_0 + T_m\right) + \frac{2p\varepsilon\sigma}{4\lambda S}\left(T_0^4 - T_m^4\right) + \frac{2I^2\rho_m}{4\lambda S^2}. \tag{3.8}$$

З формули (3.8) визначаємо коефіцієнт теплопровідності

$$\lambda = \frac{\alpha p}{2aS}(T_0 - T_m) + \frac{p\varepsilon\sigma}{2aS}(T_0^4 - T_m^4) + \frac{I^2\rho_m}{2\lambda S^2}. \tag{3.9}$$

Але у правій частині рівняння є невідомий параметр повної випромінювальної здатності ε, так як його значення визначається з додаткового експерименту. Для визначення $\varepsilon = f(T)$ необхідно мати доволі довгі зразки, щоб можна було знехтувати втратами тепла на кінцях в порівнянні з радіацією в навколишнє середовище. Виготовлення довгих зразків не завжди можливе із-за крихкості вивчаючих матеріалів. Крім того, невідомим параметром залишається температура дротика T_0 на кінцях. Очевидно, що вона залежить від довжини дроту.

У зв'язку з цим виникає необхідність у розробці метода визначення теплопровідності на зразках, налаштованих у лабораторній практиці .

Один із шляхів вирішення цієї задачі полягає в наступному. Нехай існує два зразки однакового діаметру та хімічного змісту, але з різною довжиною. Припустимо також, що ці зразки нагріваються різним по силі струмом , відповідно I_1 та I_2, до однакової температури середини стрижня T_m. Тоді можна вирішити систему рівнянь (3.9) і отримати формули розрахунків для визначення теплопровідності на зразках кінцевої довжини:

$$\lambda = \frac{\rho_m\left(I_1^2 - I_2^2\right)}{2S^2(a_1 - a_2)}. \tag{3.10}$$

Однак, для обчислення необхідно вивчати розподіл температури вздовж стрижня, що створює значні експериментальні труднощі і вносить суттєву помилку в кінцевий результат.

Зробимо це наступним чином. Розглянемо ділянку зразка, що примикає до його середини. Припустимо спочатку, що цей зразок рівномірно нагрівається до температури T_m, його загальний опір дорівнює R_m, питомий електроопір ρ_m. Тоді маємо $R_m = \rho_m \frac{2L}{S}$.

Тепер розглянемо ту саму ділянку, але нагріту нерівномірно. У цьому випадку можна записати:

$$dR = \rho\frac{dx}{S} = \rho_m[1-\beta t]\frac{dx}{S},$$

де $t = T_m - T(x) << T_m$ і β – температурний коефіцієнт опору в даній області температур. Тоді повний опір стрижня

$$R_\ell = \int_{-L}^{L}\rho_m(1-\beta t)\frac{dx}{S} = R_m - \frac{2\rho_m\beta}{S}\int_0^L t\,dx.$$

У нашому випадку розподіл температури підкоряється параболічному закону (3.6). Це дає змогу написати для електричного опору

$$R_L = R_m - \frac{2\rho_m\beta}{S}\frac{L^3}{3}a. \tag{3.11}$$

Звідси

$$a = \frac{3S\left(R_m - R_L\right)}{2\rho_m\beta L^3}. \tag{3.12}$$

Тут R_L – опір ділянки довжиною 2L при наявності градієнта температури.

Таким чином, для зразків, у яких питомий опір помітно залежить від температури, можна з достатньою точністю вивчати розподіл температури за допомогою вимірювання опору на певній ділянці довжини.

Як видно з відношення (3.12), для визначення величини a необхідно знати опір розглянутої ділянки R_m при відсутності градієнта температури, тобто для зразка, у якого втрати тепла на кінцях незначні або, іншою мовою, для нескінченно довгого зразка. Така умова, як відзначалося раніше, неприпустима. У зв’язку з цим для визначення теплопровідності будемо розглядати два зразка з різними довжинами. Як видно, величина λ визначається із співвідношення (3.10). Отже, необхідно знайти різницю величин $a_1 - a_2$

$$a_1 - a_2 = \frac{3S}{2\rho_m\beta}\left[\frac{2\rho_m}{S}\left(\frac{1}{L_1^2} - \frac{1}{L_2^2}\right) + \left(\frac{R_2}{L_2^3} - \frac{R_1}{L_1^3}\right)\right],$$

де R_1 і R_2 – відповідно опори для першого та другого зразків довжиною $2L_1$ і $2L_2$. Температура середин цих зразків однакова і дорівнює T_m. В результаті маємо для коефіцієнта теплопровідності розрахункову формулу:

$$\lambda = \frac{\rho_m^2\left(I_1^2 - I_2^2\right)\beta}{3S^3\left[\frac{2\rho_m}{S}\left(\frac{1}{L_1^2} - \frac{1}{L_2^2}\right) + \left(\frac{R_2}{L_2^3} - \frac{R_1}{L_1^3}\right)\right]}. \qquad (3.13)$$

Відмічаємо, що в (3.13) включені повні опори дротиків. Дана залежність (3.13) являється розрахунковою для визначення коефіцієнту теплопровідності. Слід відзначити, що зміна вивчення розподілу температури вимірюваннями електричного опору в значній степені підвищує точність результатів, так як визначення величини опору може здійснюватися з великим ступенем точності у широкому температурному інтервалі.

3.8 Вимірювання коефіцієнту теплопровідності газів

Експериментальне вивчення теплопровідності газів ускладнене, оскільки перенесення тепла в газі відбувається не лише внаслідок простого механізму теплопровідності, а й так званої природної конвекції, яка легко виникає в газі.

Конвекція – це перенесення тепла разом з переміщенням маси газу під впливом сили тяжіння при наявності різниці температур. Механізм як конвекції, так і теплопровідності полягає у вирівнюванні температури в газі, тому відрізнити їх експериментально важко, і при вимірюванні теплопровідності треба забезпечити такі умови, за яких конвекція не виникає чи мало впливає.

Один з найбільш поширених методів вимірювання коефіцієнта теплопровідності газів полягає у заповненні досліджуваним газом простору між двома коаксіальними циліндрами радіусами r_1 і r_2. Внутрішній циліндр, виготовлений з тонкого дроту, через який проходить електричний струм, одночасно є нагрівачем з потужністю W. В стаціонарному режимі дріт нагрівається до сталої темпераутри T_1. Зовнішній циліндр охолоджується з підтриманням сталої температури T_2.

Таким чином, між внутрішнім і зовнішнім циліндрами встановлюється стала різниця температур T_1-T_2, яка залежить від теплопровідності газу. Опишемо цю залежність. Якщо висота циліндра дорівнює h, то кількість тепла, яка проходить за 1 с через будь-яку циліндричну поверхню S радіусом r $\left(S = 2\pi rh\right)$, визначається за законом Біо-Фур'є формулою:

$$Q = -\lambda\frac{dT}{dr}S,$$

де dT/dr – градієнт температури вздовж радіуса циліндра. Якщо висота циліндра значно більша за радіус, то температуру вздовж осі циліндра вважаємо однаковою. У стаціонарному стані тепловий потік дорівнює потужності нагріва Q = W. Отже,

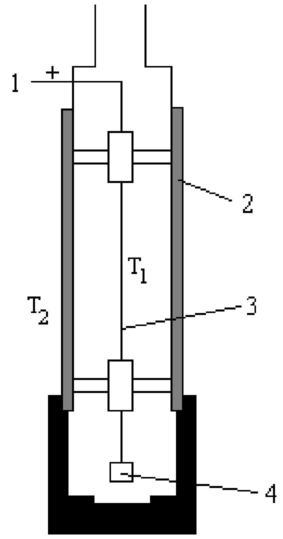


Рис. 3.7 *Прилад для вимірювання коефіцієнту теплопровідності газів: 1 – дріт до джерела струму, 2 – металева трубка, 3 – нитка, 4 – тягар для натягнення нитки.*

$$W = -2\pi rh\lambda \frac{dT}{dr}.$$

Розділяючи змінні по T і r маємо диференційне рівняння

$$dT = -\frac{W}{2\pi\lambda h}\frac{dr}{r}.$$

Проінтегрувавши рівняння, одержимо

$$T = -\frac{W}{2\pi h\lambda}\ln r + C,$$

де C – стала інтегрування, яку можна знайти з граничних умов, що при $r = r_1$ – $T = T_1$, а при $r = r_2$ –$T = T_2$, тобто

$$T_1 = -\frac{W}{2\pi\lambda h}\ln r_1 + C, \qquad T_2 = -\frac{W}{2\pi\lambda h}\ln r_2 + C.$$

Звідси маємо, що температура, що встановилася у нагрітому дроті, дорівнює

$$T_1 = T_2 + \frac{W}{2\pi\lambda h}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Вимірявши температуру T_1 і T_2 і знаючи геометричні розміри приладу та потужність нагрівача, можна обчислити коефіцієнт теплопровідності

$$\lambda = \frac{W}{2\pi h(T_1 - T_2)}\ln\frac{r_2}{r_1} \text{ або } \lambda = \frac{I^2R_0\left(1+\beta(T_1 - T_0)\right)}{2\pi h(T_1 - T_2)}\ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad (3.14)$$

За температуру стінки трубки T_2 приймають температуру навколишнього середовища, яка вимірюється термометром. Температуру дроту можна визначити, вимірюючи зміну його електроопору при нагріванні. Дійсно, в області досліджуваних температур опір дроту зростає з температурою за лінійним законом $R_T = R_0\left(1+\beta(T - T_0)\right)$, де R_0 і R_T – опір дроту відповідно при T_0 =273.15 K і при вимірюваній температурі T, K; β – температурний коефіцієнт опору. Вимірявши опір дроту R_1 при нагріванні до T_1 і R_2 при нагріванні до T_2, отримаємо

$$T_2 = T_0 + \frac{R_0\left(1+\beta\left(T_1 - T_0\right)\right) - R_1}{\beta R_1}$$

Це значення температури підставимо у формулу (3.14). Для оцінки кількості тепла, що віддає дріт за рахунок випромінювання, використаємо закон Стефана-Больцмана, згідно з яким з одиниці поверхні абсолютно чорного тіла за одиницю часу випромінюється енергія. Тобто, густина теплового потоку за рахунок випромінювання прямо пропорційна четвертій степені температури:

$$q = \sigma T^4$$

де T – абсолютна температура чорного тіла; $\sigma = 5{,}735 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$K^4). Будь-яке тіло, що не є абсолютно чорним, при цій же температурі випромінює з одиничної поверхні за одиницю часу меншу енергію:

$$q = \varepsilon\sigma T^4,$$

де ε – поглинаюча властивість тіла.

Для нашого випадку тепловий потік за рахунок випромінювання

$$\dot{Q} = \varepsilon S \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right),$$

де S – площа поверхні дроту.

Таким чином, енергія випромінювання становить декілька процентів загальної теплової енергії нагрітого дроту. У замкнутих системах малих розмірів конвекція практично відсутня і тепло передається лише в основному за рахунок теплопровідності і випромінювання.

Вплив конвекції на передачу тепла від дроту до стінки трубки можна перевірити, вимірюючи коефіцієнт теплопровідності при різних тисках газу в трубці. Кількість тепла, що переноситься за рахунок конвекції, зменшується зі зменшенням густини газу, а отже, і тиску. Коефіцієнт теплопровідності газу від тиску не залежить, тому, якщо результати вимірювання коефіцієнта теплопровідності зменшенням тиску повітря в трубці не змінюються, можна вважати, що конвекція не впливає на передачу тепла від дроту до стінки трубки.

ДОДАТОК. Коефіцієнт теплопровідності різних речовин

Коефіцієнт теплопровідності газів (p = 1 атм, T = 273 K)

Газ	$\lambda\cdot10^3$, Вт/(м·К)	Газ	$\lambda\cdot10^3$, Вт/(м·К)
Азот	23.9	Метан	30.4
Аміак	21.1	Неон	46.4
Аргон	16.4	Оксид вуглецю	23.3
Бутан	13.3	Пропан	15.0
Водень	169	Діоксид сірки	8.4
Гелій	143	Діоксид вуглецю	14.7
Димові гази	22.4 – 23.3	Хлор	7.9
Кисень	24.4	Ефір діетиловий	13.0

Коефіцієнт теплопровідності рідин (p = 1 атм, T = 273 K)

Рідина	$\lambda\cdot10^3$, Вт/(м·К)	Рідина	$\lambda\cdot10^3$, Вт/(м·К)
Бензол	152	Керосин	119
Метанол	210	Толуол	150
Ртуть	8178	Аміак	540
Етанол	179	Ацетон	174
Горілка	348	Гліцерин	275
Дизельне паливо	119	Бензин	121
Скипідар	130	Вода	

Коефіцієнт теплопровідності твердих тіл (T = 293 K)

Речовина	λ, Вт/(м·К)	Речовина	λ, Вт/(м·К)
Метали		**Інші матеріали**	
Алюміній	237	Антрацит	0.33
Вольфрам	174	Вата	0.042
Залізо	80.2	Вугілля (деревне)	0.074
Магній	156	Вігулля (кам’яне)	0.19
Мідь	401	Гума	0.13 – 0.16
Молібден	138	Дерево (дуб)	0.2 – 0.43
Нікель	90.7	Дерево (сосна)	0.14 – 0.41
Олово	69.6	Ебоніт	0.16
Платина	71.6	Крейда	0.93
Свинець	35.3	Лід	0.92
Срібло	429	Парафін	0.27
Титан	21.9	Плексиглас	0.185
Цинк	116	Пісок (сухий)	0.28 – 0.44
Сплави		Поліетилен	0.28
Алюмель	29	Скло (кварцове)	1.35
Копель	24.2	Скло (звичайне)	0.74
Константан	20.9	Слюда	0.47 – 0.58
Манганін	21.7	Текстоліт	0.23 – 0.34
Ніхром (90 Ni, 10 Gr)	17.1	Фарфор	0.22 – 0.31
Платинородій (10%)	30.0	Цегла (червона)	0.77
Хромель	16.0	Цегла (силікатна)	0.81

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гапчин Б.М., Дутчак Я.Й., Френчко В.С.* Молекулярна фізика (лабораторний практикум) –Львів: Світ, 1990, 240 с.
2. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача.– М.: Энергия, 1969.
3. *Сивухин Д.В.* Термодинамика и молекулярная физика. Учеб. Пособие для вузов.– М.: Наука, 1990.– 552с.
4. *Осипова В.А.* Экспериментальные исследование процессов тепломассобмена: Учеб. пособие для вузов. – М.: Энергия, 1979, 320 с.
5. *Цедерберг Н.В.* Теплопроводность газов и жидкостей. – М.: Госэнергоиздат, 1963, 408с.
6. *Беляев Н.М.* Основы теплопередачи. – К.: Вища школа, 1989, 343 с.
7. *Платунов Е.С., Буравой С.Е. и др.* Теплофизические измерения и приборы / Под ред. *Е.С. Платунова*. – М.: Машиностороение, 1986.
8. *Шашков А.Г., Волохов Г.М., Абраменко Т.Н., Козлов В.П.* Методы определения теплопроводности и температуропроводности. – М.: Энергия, 1973, 336с.
9. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. –М.: Физматгиз, 1963, 708 с.
10. Справочник под ред. *Кикоина И.К.* Таблицы физических величин. –М.: Атомиздат, 1976, 1006с.
11. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент: Справочник / Под общ. ред. *В.Л. Григорьева и В.М. Зорина* .– М.: Энергоиздат, 1982.– 515с.
12. Теоретические основы теплофизики. Теплотехнический эксперимент.: Справочник / Под общ. Ред.чл.-корр. АН СССР *В.А. Григорьева, В.М. Зорина*.– 2-е изд., перераб.– М.: Энергоатомиздат, 1988.–560 с.; ил.– (Теплоэнергетика и теплотехника; Кн.2).
13. *Геращенко О.А., Гордов А.Н., Лах В.И., Стаднык Б.И., Ярышев Н.А.*. Температурные измерения. Справочник. – К.: Наукова думка, 1984, 494 с.
14. *Гордов А.Н., Жагулло О.М., Иванова А.Г.* Основы температурных измерений. – М.: Энергоатомиздат, 1992, 304 с.
15. *Кутателадзе С.С.* Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справочное пособие. – М.: Энергоатомиздат, 1990.–367с.: ил.
16. *Линевег Ф.* Измерение температур в технике. Справочник. Пер.с нем. – М.: Металлургия, 1980, 544 с.
17. *Ицкович А.М.* Основы теплотехники. Учеб. Пособие для проф.-техн. Учеб. Заведений. Изд. 2-е, исправленное, М. – «Высшая школа», 1975.
18. *Селивестров В.М., Бажан П.И.* Термодинамика, теплопередача и теплообменные аппараты: Учебник для институтов водн. трансп. – М.: Транспорт, 1988.–287с.
19. *Мурин Г.А.* Теплотехнические измерения. Учебник для техникумов.– 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергия, 1979.·– 424 с.,ил.
20. *В.Е. Иванов и др.* Метод измерения теплопроводности металлов при высоких температурах // Экспериментальная техника и методы высокотемпературных измерений // Сборник статей. М.: Издательство «Наука». – 1966. – С.30–37.
21. *Копійка О.К., Калінчак В.В., Головко В.В.* Фізика теплопередачі: – Одеса: Маяк, 2004.– 44с.