

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени И.И. МЕЧНИКОВА

В. А. Пастернак

**МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
К СПЕЦКУРСУ**

**«КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В
ПОЛУПРОВОДНИКАХ»**

*для студентов V, VI курсов
физического факультета*

**О д е с с а
«Одесский национальный
университет»
2011**

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ К СПЕЦКУРСУ

«КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ»

Настоящее методическое пособие написано для студентов V,VI курсов, специализирующихся по физике полупроводников и диэлектриков на кафедре экспериментальной физики физического факультета.

Изучение процессов переноса носителей заряда под действием различных физических факторов или кинетических явлений представляет собой важную задачу физики полупроводников.

В настоящее время насчитывается около трехсот кинетических эффектов. Их детальный анализ является сложной задачей и проводится на основе интегро-дифференциального кинетического уравнения Больцмана, учитывающего действие на носители заряда как внешних физических полей, так и процессы их рассеяния на дефектах кристаллической решетки.

Настоящее пособие предназначено для помощи студентам при овладении существующими методами исследования полупроводниковых материалов, а также в применении теоретических знаний для решения практических задач при написании дипломных и магистерских работ.

Составитель:

В.А. Пастернак, старший преподаватель

Рецензент:

Н. В. Маслеева,

кандидат физико-математических наук, доцент

Печатается по решению Ученого Совета
физического факультета ОНУ.
Протокол № 2 от 1.10. 2010 г.

© Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|------|
| 1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА И МЕХАНИЗМЫ РАССЕЙЯНИЯ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА | стр. |
| 1.1. Кинетическое уравнение Больцмана..... | 4 |
| 1.2. Время релаксации | 8 |
| 1.3. Эффективное сечение рассеяния. Типы центров рассеяния | 11 |
| 1.4. Рассеяние на ионах примеси | 13 |
| 1.5. Рассеяние на атомах примеси и дислокациях | 17 |
| 1.6. Рассеяние на тепловых колебаниях решетки | 18 |
| | |
| 2. АНАЛИЗ КИНЕТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ | |
| 2.1. Электропроводность полупроводников | 24 |
| 2.2. Зависимость подвижности носителей заряда от температуры | 27 |
| 2.3. Гальваномагнитные явления. Эффект Холла | 30 |
| 2.4. Термоэлектрические явления | 36 |
| 2.5. Теплопроводность полупроводников | 45 |
| 2.6. Термомагнитные эффекты..... | 50 |
| 2.7. Гальваномагнитные эффекты..... | 53 |
| 2.8. Полупроводники в сильном электрическом поле..... | 56 |
| | |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ | 68 |

КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА И МЕХАНИЗМЫ РАССЕЙАНИЯ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА

1.1. Кинетическое уравнение Больцмана

Если система частиц находится в термодинамическом равновесии, то вероятность нахождения одной частицы в состоянии с энергией E описывается функцией распределения Ферми-Дирака

$$f_0(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-F}{kT}}}, \quad (1.1)$$

и в общем случае зависит от энергии частиц.

F - энергия Ферми, или химический потенциал, определяемый той работой, которую необходимо совершить, чтобы увеличить число частиц в системе на одну единицу.

Если в кристалле создать внешнее поле (электрическое, магнитное, градиент температуры), то движение носителей в кристалле приобретет упорядоченный характер. Явления, которые при этом происходят в кристалле, носят название явлений переноса или кинетических явлений.

Теперь система носителей будет описываться неравновесной функцией распределения, зависящей от энергии частиц, их координат и времени - $f(\vec{r}, \vec{k}, t)$, где \vec{k} - волновой вектор.

Выделим элемент объема фазового пространства $d\Gamma = d\tau_r \cdot d\tau_p = dx \cdot dy \cdot dz \cdot \hbar^3 d\tau_k$; $[\hbar^3 \cdot dk_x \cdot dk_y \cdot dk_z = \hbar^3 d\tau_k]$

В элементе объема фазового пространства содержится $2 \frac{d\Gamma}{h^3}$ квантовых состояний.

Если $f(\vec{r}, \vec{k}, t)$ есть вероятность нахождения электрона в этих состояниях, то число электронов в элементе фазового пространства в момент времени t будет равно

$$dn = f(\vec{r}, \vec{k}, t) \cdot 2 \frac{d\Gamma}{h^3} = f(\vec{r}, \vec{k}, t) \frac{d\tau_k}{4\pi^3} d\tau_r, \quad (1.2)$$

$$d\tau_p = d\tau_k \cdot \hbar^3.$$

Выведем уравнение, которому удовлетворяет неравновесная функция распределения $f(\vec{r}, \vec{k}, t)$.

Для этого рассмотрим движение электронов в обычном пространстве и в пространстве волновых векторов \vec{k} .

Пусть внешнее силовое поле приложено таким образом, что электроны движутся со скоростью V_x . Подсчитаем изменение числа электронов за время dt внутри объема $d\tau_r$ (рис.1.1). За время dt через левую грань кубика войдет

число электронов $f(\vec{k}, x, y, z, t) \frac{d\tau_k}{4\pi^3} V_x \cdot dt \cdot dy \cdot dz$. За то же время число электронов, ушедших из объема через правую грань, составит $f(\vec{k}, x + \Delta x, y, z, t) \frac{d\tau_k}{4\pi^3} V_x \cdot dt \cdot dy \cdot dz$. Таким образом, за это время количество электронов в элементе объема изменится на величину

$$\begin{aligned} & [f(\vec{k}, x, y, z, t) - f(\vec{k}, x + \Delta x, y, z, t)] \frac{d\tau_k}{4\pi^3} V_x \cdot dt \cdot dy \cdot dz = \\ & = - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d\tau_k}{4\pi^3} V_x \cdot dt \cdot dx \cdot dy \cdot dz = - V_x \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d\tau_k}{4\pi^3} \cdot d\tau_r \cdot dt. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В общем случае произвольного направления движения носителей заряда со скоростью \vec{V} изменение количества электронов с данным \vec{k} в элементе объема $d\tau_r$ за время dt будет равно

$$- [V_x \frac{\partial f}{\partial x} + V_y \frac{\partial f}{\partial y} + V_z \frac{\partial f}{\partial z}] \cdot \frac{d\tau_k}{4\pi^3} \cdot dt \cdot d\tau_r = - (\vec{V} \cdot \nabla_r f) \frac{d\tau_k}{4\pi^3} \cdot dt \cdot d\tau_r, \quad (1.4)$$

где $V_x = \frac{\partial x}{\partial t}$.

Это изменение количества электронов обусловлено процессами переноса, происходящими под влиянием диффузии носителей заряда вдоль градиентов температуры или их концентрации из-за неоднородности вещества.

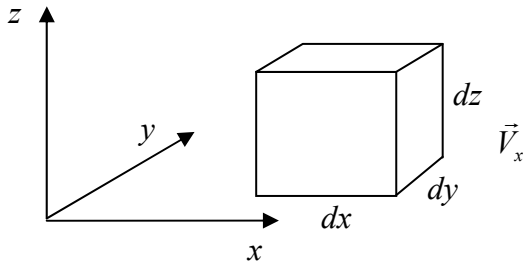


Рис. 1.1.

Рассмотрим теперь поведение электронов в пространстве волнового вектора. Подсчитаем изменение числа электронов за время dt за счет прихода и ухода их через соответствующие грани элемента объема $d\tau_k$. В результате подсчета получим, что изменение

количества электронов за время dt при движении их в пространстве волнового вектора составляет величину, равную

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial k_x}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial k_x} + \frac{\partial k_y}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial k_y} + \frac{\partial k_z}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial k_z} \right) \frac{d\tau_k}{4\pi^3} \cdot dt \cdot d\tau_r = - \left(\frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \nabla_{\vec{k}} f \right) \frac{d\tau_k}{4\pi^3} \cdot dt \cdot d\tau_r = \\ & = - \frac{1}{\hbar} (\vec{F} \nabla_{\vec{k}} f) \frac{d\tau_k}{4\pi^3} \cdot dt \cdot d\tau_r, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\hbar \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, t)$, т.к. $F = \frac{d\vec{p}}{dt}$; $\vec{p} = \hbar \vec{k}$.

Выражение получено так же, как в обычном пространстве, только вместо $V = \frac{d\vec{r}}{dt}$ нужно взять $\frac{d\vec{p}}{dt}$ и вместо градиента в пространстве координат взять градиент в пространстве волнового вектора.

\vec{F} - сила, действующая на электрон в точке \vec{r} в момент времени t .

Последнее соотношение выражает собой изменение количества электронов в элементе фазового объема в результате действия внешней силы, обусловленной электрическими и магнитными полями.

Кроме того, число электронов в элементе объема фазового пространства $d\Gamma$ может меняться в результате взаимодействия электронов с локальными нарушениями периодичности поля кристаллической решетки. Область действия локального возмущения порядка 10^{-7} см, скорость электрона 10^7 см/с, тогда время взаимодействия со структурными нарушениями составляет 10^{-14} с. Такое кратковременное взаимодействие не приводит к изменению координаты, но может сильно изменить скорость и квазиимпульс электрона.

Этот процесс аналогичен удару в механике, поэтому он получил название столкновения или соударения. При соударениях происходит изменение числа электронов, движущихся в данном направлении. В силу этого, процессы столкновения называются также процессами рассеяния.

Пусть при столкновении электрон переходит из состояния (\vec{r}, \vec{k}) в состояние (\vec{r}', \vec{k}') . Поскольку при соударении координата не испытывает резкого изменения, то вероятность перехода в единицу времени не будет зависеть от (\vec{r}, \vec{r}') . Обозначим её $W(\vec{k}, \vec{k}')$. Чтобы такой переход состоялся, нужно, чтобы состояние \vec{k}' было свободным.

Число электронов, способных за время dt в результате рассеяния перейти из состояния \vec{k} в \vec{k}' , что приводит к уменьшению количества электронов в объеме $d\Gamma$, будет равно

$$-f(\vec{r}, \vec{k}, t) \cdot W(\vec{k}, \vec{k}') [1 - f(\vec{r}, \vec{k}', t)] \frac{d\tau_{\vec{k}'}}{4\pi^3} \cdot \frac{d\tau_{\vec{k}}}{4\pi^3} d\tau_r \cdot dt. \quad (1.6)$$

В то же время существует конечная вероятность обратных переходов из \vec{k}' в \vec{k} . Число электронов, совершивших обратный переход, приводит к увеличению их числа в $d\Gamma$.

$$f(\vec{r}, \vec{k}', t) \cdot W(\vec{k}', \vec{k}) [1 - f(\vec{r}, \vec{k}, t)] \frac{d\tau_{\vec{k}'}}{4\pi^3} \cdot \frac{d\tau_{\vec{k}}}{4\pi^3} d\tau_r \cdot dt. \quad (1.7)$$

Следовательно, в результате соударений количество электронов в элементе объема фазового пространства за время dt изменится на величину

$$\{f(\vec{k}') \cdot W(\vec{k}', \vec{k}) [1 - f(\vec{k})] - f(\vec{k}) W(\vec{k}, \vec{k}') [1 - f(\vec{k}')]\} \times \quad (1.8)$$

$$\times \frac{d\tau_{\vec{k}'}}{4\pi^3} \cdot \frac{d\tau_{\vec{k}}}{4\pi^3} d\tau_r \cdot dt.$$

Здесь ради сокращения записи f рассматривается как функция волнового вектора.

Для того, чтобы найти полное число электронов, рассеянных в результате соударений, необходимо учесть все возможные изменения \vec{k}' , т.е. последнее выражение нужно проинтегрировать по объёму зоны Бриллюэна

$$\frac{d\tau_{\vec{k}}}{4\pi^3} d\tau_r \cdot dt \int_{V_B} [f(\vec{k}') \cdot W(\vec{k}, \vec{k}') [1 - f(\vec{k})] - f(\vec{k}) \cdot W(\vec{k}, \vec{k}') [1 - f(\vec{k}')]] \frac{d\tau_{\vec{k}'}}{4\pi^3}. \quad (1.9)$$

Таким образом, движение электронов и действие на них внешней силы, приводят к изменениям числа электронов в элементе объема фазового пространства. Это изменение за время t до $t + dt$ составляет величину, равную

$$f(\vec{r}, \vec{k}, t + dt) \cdot \frac{d\tau_{\vec{k}}}{4\pi^3} d\tau_r - f(\vec{r}, \vec{k}, t) \frac{d\tau_{\vec{k}}}{4\pi^3} d\tau_r = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{d\tau_{\vec{k}}}{4\pi^3} d\tau_r dt. \quad (1.10)$$

Следовательно, выражение (1.10) равно сумме (1.4), (1.5) и (1.9). После сокращения на $\frac{d\tau_{\vec{k}}}{4\pi^3} d\tau_r dt$, получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -(\vec{V} \nabla_r f) - \frac{1}{\hbar} (\vec{F} \nabla_{\vec{k}} f) + \int_{V_B} \{ f(\vec{k}') W(\vec{k}', \vec{k}) [1 - f(\vec{k})] - f(\vec{k}) \cdot W(\vec{k}, \vec{k}') [1 - f(\vec{k}')] \} \frac{d\tau_{\vec{k}'}}{4\pi^3}. \quad (1.11)$$

Согласно принципу микроскопической обратимости, вероятности прямых и обратных переходов равны, т.е. $W(\vec{k}, \vec{k}') = W(\vec{k}', \vec{k})$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -(\vec{V} \nabla_r f) - \frac{1}{\hbar} (\vec{F} \nabla_{\vec{k}} f) + \int_{V_B} W(\vec{k}', \vec{k}) [f(\vec{k}') - f(\vec{k})] \frac{d\tau_{\vec{k}'}}{4\pi^3}. \quad (1.12)$$

Это уравнение называется кинетическим уравнением Больцмана. Оно является интегро-дифференциальным, т.к. под интегралом стоит искомая функция.

Физический смысл уравнения

Левая часть его отражает изменение функции распределения во времени. 1-й и 2-й члены в правой части уравнения показывают изменения f , создаваемыми внешними полями, приводящими к движению электронов в обычном пространстве и в пространстве волнового вектора. Изменения f электронов по состояниям в результате их рассеяния учтено последним членом.

Поэтому уравнение Больцмана можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{пол}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст.}} \quad (1.13)$$

Здесь член $(\frac{\partial f}{\partial t})_{\text{пол}} = -(\vec{V}\nabla_r f) - \frac{1}{\hbar}(\vec{F}\nabla_k f)$ носит название полевого члена уравнения Больцмана, а величина

$$(\frac{\partial f}{\partial t})_{\text{ст.}} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} W(\vec{k}, \vec{k}') [f(\vec{k}') - f(\vec{k})] d\tau_{\vec{k}'} \quad (1.14)$$

называется интегралом столкновений (или соударений).

В случае стационарных процессов, когда величины, описывающие явления переноса, не зависят от времени, функция распределения удовлетворяет равенству $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Тогда $(\frac{\partial f}{\partial t})_{\text{пол}} = -(\frac{\partial f}{\partial t})_{\text{ст.}}$, или

$$(\vec{V}\nabla_r f) + \frac{1}{\hbar}(\vec{F}\nabla_k f) = \int_{V_B} W(\vec{k}, \vec{k}') [f(\vec{k}') - f(\vec{k})] \frac{d\tau_{\vec{k}'}}{4\pi^3}. \quad (1.15)$$

Из последнего уравнения следует, что в стационарном состоянии изменения функции распределения, вызванные движением носителей заряда и действием на них внешней силы, компенсируются соударениями носителей с локальными нарушениями периодичности поля решетки.

Равновесное состояние

При термодинамическом равновесии, в котором состояние электрона описывается функцией f_0 , движение электрона в кристалле обусловлено тепловой энергией. Поэтому для равновесного случая $(\frac{\partial f}{\partial t})_{\text{пол}} = 0$. Это значит, что

$$\int_{V_B} W(\vec{k}, \vec{k}') [f(\vec{k}') - f(\vec{k})] d\tau_{\vec{k}'} = 0, \text{ и следовательно, } f_0(\vec{k}') = f_0(\vec{k}); \text{ или}$$

поскольку

$$f_0(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-F}{kT}} + 1}, \quad E_1 - F_1 = E_2 - F_2, \quad \text{где } E_1, F_1, E_2, F_2 \text{ полная энергия}$$

электрона и уровня Ферми для электронов с волновыми векторами \vec{k}, \vec{k}' . Т.к. в условиях равновесия полная энергия электрона не меняется, то $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$.

Таким образом, в равновесном состоянии во всех частях системы, между которыми может происходить переход электронов, положение уровня Ферми одинаково.

1.2. Время релаксации

Решение кинетического уравнения в общем виде является сложной задачей. Однако задача в стационарном случае значительно упрощается для тех случаев, когда можно ввести время релаксации.

Описание процессов рассеяния при помощи времени релаксации возможно, если при столкновении энергия носителя заряда мало изменяется и если процессы рассеяния приводят к случайному распределению скоростей.

Пусть в момент времени $t=0$ на систему, описываемую неравновесной функцией распределения f , перестали действовать внешние возмущения и полевой член обратился в 0. Тогда $\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{ст.}$.

В том случае, когда отклонение распределения носителей заряда от равновесного состояния невелико, можно положить, что в отсутствии внешних полей скорость изменения f пропорциональна величине ее отклонения от равновесной, т.е. $\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{ст.} = -\frac{f - f_0}{\tau(\vec{k})}$, где $\frac{1}{\tau(\vec{k})}$ - коэффициент пропорциональности.

Решение уравнения имеет вид

$$f - f_0 = (f - f_0)_{t=0} e^{-\frac{t}{\tau(\vec{k})}}. \quad (1.16)$$

Величина τ есть среднее время, в течение которого в системе существует неравновесное распределение носителей заряда после выключения внешних полей. Это время релаксации.

Поскольку установление равновесного состояния происходит в результате столкновений, и при этом достаточно нескольких соударений, то τ должно быть порядка времени свободного пробега электрона.

Теперь интеграл столкновений можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{ст.} = \int_{V_B} W(\vec{k}, \vec{k}') [f(\vec{k}') - f(\vec{k})] \frac{d\tau_{\vec{k}'}}{4\pi^3} = -\frac{f(\vec{k}) - f_0(\vec{k})}{\tau(\vec{k})}. \quad (1.17)$$

Неравновесную функцию $f(\vec{k})$ можно представить как

$$f(\vec{k}) = f_0 + f_1(\vec{k}).$$

Здесь $f_1(\vec{k})$ - поправка к равновесной функции распределения, появившаяся в результате внешнего воздействия на систему. Представим её в виде

$$f_1(\vec{k}) = -\frac{\partial f_0}{\partial E} \vec{k} \cdot \vec{\chi}(E). \quad (1.18)$$

Будем считать, что время релаксации не зависит от внешних полей. Это значит, что $\tau(\vec{k})$ определяет и процессы рассеяния при наличии внешних полей, поэтому уравнение (1.15) с учетом (1.18) можно записать в виде

$$(\vec{V}\nabla_r f) + \frac{1}{\hbar}(\vec{F}\nabla_{\vec{k}} f) = -\frac{f - f_0}{\tau(\vec{k})} = -\frac{f_1(\vec{k})}{\tau(\vec{k})}. \quad (1.19)$$

При этом интеграл столкновений принимает вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст.}} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} W(\vec{k}', \vec{k}) [f_1(\vec{k}') - f_1(\vec{k})] d\tau_{\vec{k}'}. \quad (1.20)$$

Из (1.17) найдем время релаксации

$$\frac{1}{\tau(\vec{k})} = -\frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} W(\vec{k}, \vec{k}') \frac{[f(\vec{k}') - f(\vec{k})]}{f(\vec{k}) - f_0(k)} \cdot d\tau_{\vec{k}'}. \quad (1.21)$$

$\frac{f(\vec{k}) - f_0(\vec{k})}{f(\vec{k}) - f_0(k)}$ внесли под знак интеграла, т.к. интегрирование выполняется

по $d\tau_{\vec{k}'}$. Учитывая, что $f(\vec{k}) = f_0(\vec{k}) + f_1(\vec{k})$ и (1.18), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau(\vec{k})} &= -\frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} W(\vec{k}, \vec{k}') \frac{[f_1(\vec{k}') - f_1(\vec{k})]}{f_1(\vec{k})} \cdot d\tau_{\vec{k}'} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} W(\vec{k}, \vec{k}') \times \\ &\times \left[1 - \frac{\frac{\partial f_0}{\partial E'} \cdot \vec{k}' \cdot \vec{\chi}(E')}{\frac{\partial f_0}{\partial E} \cdot \vec{k} \cdot \vec{\chi}(E)} \right] \cdot d\tau_{\vec{k}'}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

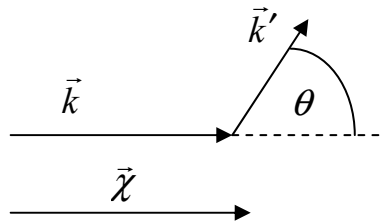
Соударения могут быть упругими и неупругими. Соударения носят название упругих, если кинетическая энергия сталкивающихся частиц сохраняется. При неупругих соударениях энергия частиц меняется.

Будем считать, что соударения электронов со структурными нарушениями являются упругими. Это значит, что $|\vec{k}'| = |\vec{k}|$, $V = V'$ и $E' = E$, если зоны энергии сферические.

В силу этого время релаксации для упругого соударения с учетом последнего равенства будет равно

$$\frac{1}{\tau(\vec{k})} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} W(\vec{k}, \vec{k}') \times \left[1 - \frac{\vec{k}' \cdot \vec{\chi}(E')}{\vec{k} \cdot \vec{\chi}(E)} \right] \cdot d\tau_{\vec{k}'}. \quad (1.23)$$

Пусть векторы \vec{k}, \vec{k}' и $\vec{\chi}$ направлены следующим образом.



$$\begin{aligned}\text{Тогда } \vec{k}' \cdot \vec{\chi} &= k' \chi \cdot \cos \theta; \\ \vec{k} \vec{\chi} &= k \chi; \\ |\vec{k}'| &= |\vec{k}|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau(\vec{k})} &= \frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} W(\vec{k}, \vec{k}') \times \left[1 - \frac{k' \cdot \chi \cdot \cos \theta}{k \cdot \chi} \right] \cdot d\tau_{\vec{k}'} = \\ &= \frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} W(\vec{k}, \vec{k}') \times [1 - \cos \theta] \cdot d\tau_{\vec{k}'}.\end{aligned}\tag{1.24}$$

Таким образом, при рассмотрении процессов переноса носителей основной задачей является вычисление неравновесной функции f , с помощью которой можно рассчитать все величины, характеризующие кинетические эффекты: плотность электрического тока, тепловой поток, напряженность электрического поля и т.д. Но эта задача решается, если известно $\tau(\vec{k})$, а следовательно, необходимо знание механизма рассеяния носителей заряда.

1.3. Эффективное сечение рассеяния. Типы центров рассеяния

Любая неоднородность кристалла, искажающая периодичность поля решетки, является центром рассеяния.

Поскольку природа дефектов различна, то и рассеяние носителей заряда на них будет различным. Для количественной оценки процесса рассеяния вводится величина, называемая эффективным сечением.

Предположим, что имеется n свободных электронов, которые со средней скоростью V_0 движутся в данном направлении. Тогда nV_0 - это плотность потока электронов, т.е. число электронов, проходящих за единицу времени через единичное сечение. Пусть на пути этого потока на единичном сечении имеется N одинаковых центров рассеяния.

Каждый центр характеризуется эффективным сечением σ . Это, по сути, то пространство около центра, в области которого имеет место рассеяние электронов. Поэтому число рассеянных электронов n_1 будет равно $n_1 = \sigma N n V_0$. С другой стороны, если W – вероятность рассеяния одной частицы в единицу времени, то количество рассеянных частиц будет равно $n_1 = W n$, или

$$\sigma = \frac{n_1 / N}{n V_0} = \frac{W}{N V_0}.\tag{1.25}$$

Таким образом, эффективное сечение рассеяния σ есть отношение числа удаленных из пучка электронов в результате рассеяния на одном центре в единицу времени к плотности падающего пучка.

Эффективное сечение имеет размерность площади

$$[\sigma] = \frac{[W]}{[NV_0]} = \frac{t^{-1}}{L^{-3} \cdot L \cdot t^{-1}} = L^2.$$

Видно, что

$$W = \sigma NV_0. \quad (1.26)$$

Следовательно, вероятность рассеяния или вероятность столкновения определяется эффективным сечением центра, их количеством и скоростью движения носителей заряда.

В то же время вероятность столкновения обратно пропорциональна времени свободного пробега.

$$W = \frac{1}{\tau}; \quad \tau = \frac{1}{\sigma NV_0} = \frac{l}{V_0}; \quad l = \frac{1}{\sigma N}; \quad \sigma N = \frac{1}{l}.$$

Рассмотрим случай, когда существует несколько процессов рассеяния. Пусть i -й механизм характеризуется эффективным сечением σ_i и числом рассеивающих центров N_i , и он определяет длину свободного пробега l_i .

Если есть несколько механизмов рассеяния, то полная вероятность рассеяния в единицу времени будет определяться суммой отдельных вероятностей рассеяния $W = \sum W_i$.

Т.к. $\sum_i \sigma N_i = \sum_i l_i^{-1}$, то полная длина свободного пробега может быть определена из соотношения $\frac{1}{l} = \sum_i \frac{1}{l_i}$.

Полная длина свободного пробега всегда меньше самой малой парциальной длины свободного пробега.

В полупроводниках возможны несколько типов дефектов, нарушающих периодичность решетки, например, тепловые колебания, ионы примеси, вакансии, междоузельные атомы, дислокации, дефекты упаковки, границы кристаллитов и т.д.

Разные дефекты имеют разное сечение рассеяния. Для их количественной оценки за σ примем величину площади, в пределах которой возможно взаимодействие между носителями заряда и дефектом.

Для точечных дефектов (вакансии, междоузельные атомы) за σ можно принять площадь квадрата со стороной, равной постоянной решетки, т.е.

$$\sigma_A = (5 \cdot 10^{-8})^2 = 2,5 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2. \quad \text{Если } N_A = 10^{16} \text{ см}^{-3}, \text{ то}$$

$$l_A = \frac{1}{\sigma_A \cdot N_A} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ см}.$$

Для иона примеси будем считать, что его диаметр в 10 раз больше, т.е. $\sigma_e = (5 \cdot 10^{-8} \cdot 10)^2 = 2,5 \cdot 10^{-13} \text{ см}^2$. В случае $N_e = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $l_e = 4 \cdot 10^{-4} \text{ см} = 4 \text{ мкм}$.

Дислокации – это линейный дефект. Если она имеет длину 1мм, а её диаметр порядка сотни периодов решетки, то площадь

$\sigma_d = 5 \cdot 10^{-8} \cdot 100 \cdot 10^{-1} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2$. При плотности дислокаций $N_d = 10^8 \text{ см}^{-3}$, $l_d = 2 \cdot 10^{-2} \text{ см}$.

Эффективное сечение рассеяния на тепловых колебаниях решетки определяется площадью сечения области, которую занимает колеблющийся атом за вычетом площади сечения самого атома.

Если считать, что амплитуда колебаний $r = 1 \text{ \AA}$, а диаметр атома 10^{-8} см , то $\sigma_T = (d + r)^2 - d^2 \approx 2dr \approx 10^{-16} \text{ см}^2$. Поскольку $N_T \approx 10^{22} \text{ см}^{-3}$, то $l_T = 10^{-6} \text{ см} = 100 \text{ \AA}$.

1.4. Рассеяние на ионах примеси

В примесном полупроводнике каждый ион примеси создает вокруг себя электрическое поле. Под воздействием этого поля носитель заряда отклоняется от своего первоначального направления (рис. 1.2). При этом носитель заряда отклоняется тем сильнее, чем он медленнее движется и чем ближе проходит мимо иона примеси. Задача сводится к нахождению траектории движения заряженной частицы в центральном поле иона. Она может быть решена чисто классическими методами. Пусть носитель заряда – классическая частица, движущаяся в кулоновском поле положительного иона примеси с зарядом Ze .

Тогда $U(\vec{r}) = \pm \frac{Ze^2}{\epsilon r}$ (в системе Гаусса) – (см. рис.1.2).

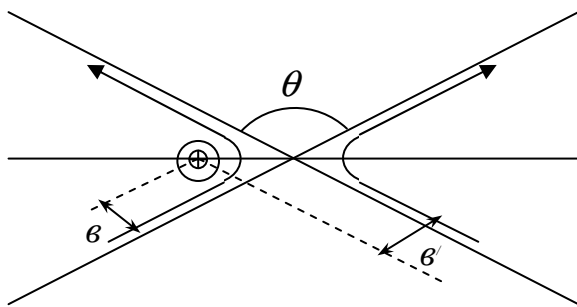


Рис. 1.2.

Проведенные расчеты показывают, что носитель движется по гиперболе (если $E_n = E_k + U(\vec{r}) > 0$).

Через b обозначим прицельное расстояние – т.е. расстояние, на котором носитель прошел бы мимо иона, если бы не отклонялся, а через θ – угол рассеяния, т.е. угол между первоначальным направлением

движения носителя и его направлением движения после рассеяния. При этом угол θ зависит от прицельного расстояния (b) следующим образом

$$b = \frac{Ze^2}{\epsilon m^* V^2} \text{ctg} \frac{\theta}{2}. \quad (1.27)$$

Процесс рассеяния является случайным, поэтому различные носители будут отклоняться на различные углы. В силу этого при подсчете времени релаксации необходимо учитывать усредненное по углам рассеяния сечение. Пусть угол рассеяния меняется от θ до $\theta + d\theta$ (рис.1.3). Поскольку в нашем случае рассеивающий центр обладает осевой симметрией, то эти углы являются углами двух конусов.

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi}{r^2}; \quad d\Omega = 2\pi \sin \theta \cdot d\theta.$$

Процессы рассеяния характеризуются в данном случае дифференциальным эффективным сечением $\sigma(\theta)$. По определению, это отношение числа частиц, отклоненных одним центром в 1 с на угол θ в единичный телесный угол, к потоку падающих частиц на 1 см^2 в 1с.

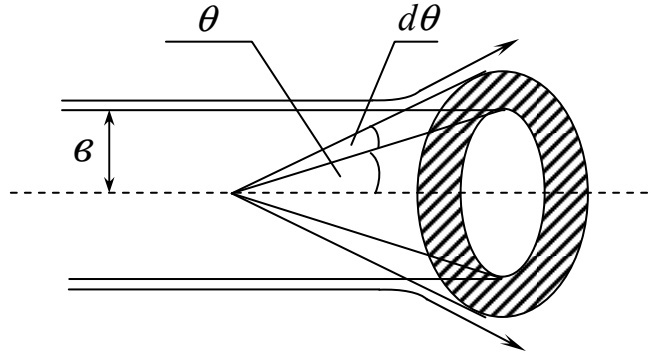


Рис. 1.3.

Пусть имеется n электронов, движущихся хаотически со скоростью V . Если выбрать перпендикулярно каждому направлению движения электрона площадку в 1 см^2 , то на нее за 1 с попадет nV электронов.

Полное число частиц, отклоняющихся в 1с в телесный угол $d\Omega$, будет равно потоку частиц, падающих на кольцо площадью $2\pi v \cdot dv$. Поэтому

$$\sigma(\theta) = \frac{nV 2\pi \cdot v \cdot dv}{n \cdot v \cdot d\Omega} = \frac{v \cdot dv}{\sin \theta \cdot d\theta}.$$

Из выражения (1.27)
$$dv = \frac{Ze^2}{2\epsilon m^* V^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \cdot d\theta$$

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{Ze^2}{2\epsilon m^* V^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (1.28)$$

Эта формула была получена Резерфордом при изучении рассеяния α - частиц полем ядер.

Для подсчета времени релаксации необходимо выразить вероятность перехода $W(\vec{k}, \vec{k}')$ через дифференциальное сечение рассеяния.

Предположим, что в кристалле единичного объема имеется Ne ионов примеси. Тогда число рассеянных носителей всеми центрами в 1 с в телесный угол $d\Omega$ составят величину

$$n_1 = nW(\vec{k}, \vec{k}')d\Omega = \sigma(\theta) \cdot d\Omega \cdot nV \cdot Ne. \quad (1.29)$$

Откуда $W(\vec{k}, \vec{k}') = \sigma(\theta)V \cdot Ne$.

Таким образом, вероятность перехода электрона из состояния \vec{k} в состояние \vec{k}' определяется дифференциальным эффективным сечением, количеством центров рассеяния и скоростью движения носителей заряда.

Соударение носителей заряда с ионами примеси можно считать упругими по двум причинам :

1. Масса электрона в 10^4 раз меньше массы иона.
2. Ионы решетки гораздо менее подвижны относительно своего положения равновесия, чем электроны. Поэтому при соударении носителя заряда с ионом примеси энергия носителя изменяется очень незначительно.

Если при упругом соударении носитель рассеивается в телесный угол $d\Omega$, то время релаксации

$$\frac{1}{\tau(\vec{k})} = \int_0^\pi W(\vec{k}, \vec{k}') [1 - \cos\theta] d\Omega. \quad (1.30)$$

Выражение справа подобно записанному ранее (1.24), имеет размерность 1/сек и смысл обратного времени релаксации.

$$\frac{1}{\tau(\vec{k})} = 2\pi N_e V(\vec{k}) \int_0^\pi \sigma(\theta) [1 - \cos\theta] \sin\theta d\theta = N_e V(\vec{k}) \cdot \sigma_c. \quad (1.31)$$

Величина $\sigma_c = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) [1 - \cos\theta] \sin\theta d\theta$ - есть усредненное

дифференциальное эффективное сечение. Усреднение по углам θ производится с весовой функцией $[1 - \cos\theta]$.

σ_c называется эффективным сечением проводимости или подвижности, а также транспортным эффективным сечением.

Время релаксации $\tau(\vec{k}) = \frac{1}{N_e V(\vec{k}) \sigma_c}$, а длина свободного пробега

$$l(\vec{k}) = \tau(\vec{k}) \cdot V(\vec{k}) = \frac{1}{N_e \sigma_c}.$$

Оценим максимальное прицельное расстояние, когда рассеяние еще имеет место. Если ионы примеси распределены равномерно по кристаллу и их концентрация равна N_e , то среднее расстояние между ними $N_e^{-1/3}$.

Сферу действия каждого иона можно ограничить половиной среднего расстояния между ними. Поэтому верхний предел прицельного расстояния

$r_{max} = \frac{1}{2} N_e^{-1/3}$. Он соответствует наименьшему значению угла рассеяния θ_{min} ,

который можно определить из соотношения:

$ctg \frac{\theta_{\min}}{2} = \frac{\varepsilon m^* V^2}{Ze^2} v_{\max} = \frac{\varepsilon m^* V^2}{2Ze^2 N_e^{1/3}}$. Тогда выражение (1.31) можно записать

$$\frac{1}{\tau(\vec{k})} = 2\pi N_e V(\vec{k}) \int_{\theta_{\min}}^{\pi} \sigma(\theta) [1 - \cos \theta] \sin \theta d\theta.$$

Заменяя $[1 - \cos \theta]$ и $\sin \theta$ на $2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ и $2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}$, и подставляя вместо $\sigma(\theta)$ выражение (1.28), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau(\vec{k})} &= 2\pi \left(\frac{Ze^2}{\varepsilon m^* V^2} \right)^2 N_e V(\vec{k}) \ln \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_{\min}}{2}} = \\ &2\pi \left(\frac{Ze^2}{\varepsilon m^* V^2} \right)^2 N_e V(\vec{k}) \ln \left[1 + ctg^2 \frac{\theta_{\min}}{2} \right] = \\ &2\pi \left(\frac{Ze^2}{\varepsilon m^* V^2} \right)^2 N_e V(\vec{k}) \ln \left[1 + \left(\frac{\varepsilon m^* V^2}{2Ze^2 N_e^{1/3}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Таким образом, время релаксации при рассеянии носителей заряда на ионах примеси равно:

$$\tau(\vec{k}) = \frac{\varepsilon^2 m^{*2} V^3(\vec{k})}{2\pi Z^2 e^4 N_e \ln \left[1 + \left(\frac{\varepsilon m^* V^2}{2Ze^2 N_e^{1/3}} \right)^2 \right]}. \quad (1.33)$$

Это соотношение для τ называется формулой Конуэлл-Вайскопфа.

Если выразить скорость через энергию $V = \left(\frac{2E}{m^*} \right)^{1/2}$, то время релаксации носителей заряда при рассеянии на ионах примеси примет вид:

$$\tau_e = \tau_{0e} E^{3/2}. \quad (1.33a)$$

Здесь

$$\tau_{0e} = \frac{(2m^*)^{1/2} \varepsilon^2}{\pi Z^2 e^4 N_e \ln \left[1 + \left(\frac{\varepsilon E}{Ze^2 N_e^{1/3}} \right)^2 \right]} \left[\frac{c}{\partial \mathcal{J}^{3/2}} \right]. \quad (1.34)$$

$$l = \tau(\vec{k}) \cdot V(\vec{k}) = \left(\frac{2}{m^*} \right)^{1/2} \cdot \tau_{0e} \cdot E^2. \quad (1.35)$$

1.5. Рассеяние на атомах примеси и дислокациях

Рассеяние носителей заряда на нейтральных атомах примеси проявляется гораздо слабее, чем рассеяние на ионах примеси.

Однако, при низких температурах, когда концентрация нейтральных атомов гораздо выше концентрации ионизированных, этот механизм играет существенную роль.

В этом случае рассеяние носителей осуществляется двумя путями:

1. с помощью прямого упругого соударения;
2. путем обмена падающего электрона с электроном примесного атома.

Определение времени релаксации в этом случае является сложной задачей.

В качестве модели для оценки τ_A используется представление о рассеянии медленных электронов на атоме водорода, находящегося в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ .

Для времени релаксации с учетом электронного обмена и индуцирования дипольного момента у рассеивающего атома, получена формула:

$$\tau_A = \frac{e^2 m^{*2}}{20\epsilon\hbar^3 N_A}, \quad (1.36)$$

где N_A - концентрация атомов примеси. Как следует из формулы, τ_A не зависит ни от температуры, ни от энергии рассеиваемого носителя заряда, и определяется лишь концентрацией атомов примеси.

Рассеяние носителей заряда может происходить и на дислокациях.

Дислокации в полупроводниках удобно представить в виде линейного отрицательного заряда, имеющего форму бесконечно длинного цилиндра с радиусом R , вокруг которого имеется положительный пространственный заряд. Электроны, взаимодействуя с отрицательно заряженной дислокацией, отталкиваются, что и приводит к рассеянию. Этот механизм присущ полупроводникам n – типа (дислокации носят акцепторный характер), и отсутствуют в полупроводниках p - типа. Численный расчет дает

$$\tau_D = \frac{3}{8RV \cdot N_D}. \quad (1.37)$$

τ_D не зависит от T и определяется поверхностной плотностью дислокаций и скоростью электрона. Если $V = 10^7$ см/с, $R = 3 \cdot 10^{-5}$ см, $N_D = 10^6$ см⁻², то $\tau_D = 1,25 \cdot 10^{-9}$ с. Эта величина на 3 порядка больше, чем время релаксации для рассеяния на фононах при комнатной температуре. Поэтому это рассеяние незначительно при комнатных температурах, но может быть существенным при низких температурах.

1.6. Рассеяние на тепловых колебаниях решетки

Взаимодействие электрона или дырки с колебаниями решетки может осуществляться двояким образом:

1. Электрон передает часть своей энергии решетке, так что определенное нормальное колебание с частотой ω_q увеличивает свое квантовое число на единицу. В результате такого процесса рассеяния образуется фонон с энергией $\hbar\omega_q$ и квазиимпульсом $\vec{p} = \hbar\vec{q}$, и число фононов возрастает на единицу.

$\vec{p} = \hbar\vec{q}$ - это квазиимпульс, который приобретает решетка вследствие соударения с электроном.

2. Электрон при взаимодействии получает часть энергии от решетки, так что квантовое число определенного колебания с частотой ω_q уменьшается на единицу. В этом случае исчезает фонон с энергией $\hbar\omega_q$ и квазиимпульсом $\vec{p} = \hbar\vec{q}$. Число фононов уменьшается на единицу.

Помимо однофононного резонанса возможен и многофононный, но он менее вероятен.

Пусть до столкновения электрон имел волновой вектор \vec{k} и энергию $E(\vec{k})$, а после - \vec{k}' и энергию $E'(\vec{k}')$.

При поглощении электроном фонона (фонон исчез)

$$E'(\vec{k}') = E(\vec{k}) + \hbar\omega_q - \text{закон сохранения энергии.}$$

$$\vec{k}' = \vec{k} + \vec{q} - \text{закон сохранения импульса.}$$

$$N_q' = N_q - 1.$$

При испускании электроном фонона (фонон родился)

$$E'(\vec{k}') = E(\vec{k}) - \hbar\omega_q.$$

$$\vec{k}' = \vec{k} - \vec{q}.$$

$$N_q' = N_q + 1.$$

Рассеяние носителя заряда при этом может быть упругим и неупругим.

Для характеристики рассеяния необходимо знание относительного изменения энергии электрона за одно столкновение.

$$\delta = \frac{E' - E}{E} = \frac{\Delta E}{E} \quad \text{или за единицу времени} \quad A = \frac{\Delta E}{\tau} = \frac{E\delta}{\tau}.$$

В случае изотропного и упругого рассеяния $\delta \ll 1$, и среднее время рассеяния τ имеет смысл времени релаксации системы по импульсу, а $\tau_E = \tau / \delta$ - время релаксации по энергии.

Пусть энергия электрона в кристалле подчиняется зависимости $E = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m^*}$.

Если в кристалле кубической сингонии распространяется акустическая волна, например, продольная, то она вызывает появление в полупроводнике деформации сжатия и растяжения, что приводит к изменению постоянной

решетки. При сжатии кристалла, сопровождающимся уменьшением постоянной решетки - (a), нижний край зоны проводимости смещается вверх, а верхний край валентной зоны – вниз, и в результате этого ширина запрещенной зоны увеличивается. При растяжении кристалла, приводящем к уменьшению постоянной решетки - (a), нижний край зоны проводимости смещается вниз, а верхний край валентной зоны – вверх, и в результате этого ширина запрещенной зоны уменьшается. Следовательно, в таком кристалле локальная деформация, создаваемая продольной акустической волной, приводит к волнообразному смещению дна зоны проводимости и потолка валентной зоны (рис. 1.4.).

Поэтому движущийся электрон, сталкиваясь с волной смещения, обусловленной тепловыми колебаниями решетки, будет рассеиваться только на продольных колебаниях. На поперечных колебаниях, приводящих к деформации сдвига (в кубических кристаллах это не приводит к изменению постоянной решетки), электроны не рассеиваются.

Покажем, что это рассеяние упругое и происходит на длинноволновых фононах.

Закон сохранения энергии запишем в виде:

$$\frac{\hbar^2 \vec{k}'^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2 (\vec{k} \pm \vec{q})^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \pm \hbar \omega_q,$$

откуда

$$q^2 \pm 2kq \cdot \cos\theta \pm \frac{2m^*}{\hbar} \cdot \omega_q = 0, \quad (1.38)$$

где θ - угол между направлениями векторов \vec{k} и \vec{q} .

Если электрон взаимодействует только с длинноволновыми фононами, то

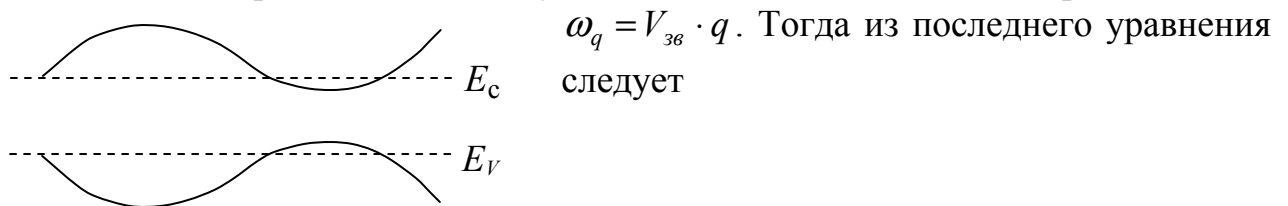


Рис. 1.4.

$$q = \pm 2k \cdot \cos\theta \pm \frac{2m^* \cdot V_{3g}}{\hbar}.$$

Т.к. $\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m^*} = \langle E \rangle = k_0 T$, то

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m^* k_0 T}. \quad (1.39)$$

Поэтому $\frac{m^* \cdot V_{3g}}{\hbar k} = \frac{m^* \cdot V_{3g}}{\sqrt{2m^* k_0 T}} = \sqrt{\frac{m^* V_{3g}^2}{2k_0 T}} = \sqrt{\frac{T_{kp}}{T}}$, где $T_{kp} = \sqrt{\frac{m^* V_{3g}^2}{2k_0}}$.

Если скорость звука $= 3 \cdot 10^5$ см/с, $m^* = m = 10^{-27}$ г., $k_0 = 1,38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{град}}$,

то $T_{kp} = 1K$.

Следовательно, при температуре, намного превышающей $1K$, можно пренебречь вторым слагаемым в уравнении для q :

$$q = \pm 2k \cdot \cos\theta.$$

В зависимости от θ , q меняется от 0 до $2k$, т.е. в среднем на $1k$.

Поскольку при $T=300K$, $k \approx 10^7$ см $^{-1}$ из (1.39), то q может принимать значения от 0 до $2 \cdot 10^7$ см $^{-1}$, что соответствует энергии фотонов от 0 до $\hbar\omega_q = \hbar V_{зв} \cdot k = 10^{-27} \cdot 10^5 \cdot 10^7 = 10^{-15}$ эрг $= 6 \cdot 10^{-4}$ эв. Отсюда следует, что электрон рассеивается на длинноволновых фононах, поглощая или излучая фотон с $q \approx k$.

$$\text{Т.к. } E = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m^*} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ эв, то}$$

$$\frac{\hbar\omega_q}{E} = \frac{\hbar\omega_q}{k_0 T} \ll 1. \quad (1.40)$$

Следовательно, рассеяние электронов на продольных акустических колебаний является упругим и основную роль в рассеянии играют длинноволновые фононы с энергией значительно меньшей энергии электронов.

Поэтому $k = k'$ и $E = E'$, поскольку в уравнении сохранения энергии можно не учитывать энергию фонона.

При низких температурах средняя скорость движения электрона приближается к скорости распространения упругих волн в кристалле и энергией фонона пренебречь нельзя. В этом случае имеет место неупругое столкновение электрона с фононом. Для упругого рассеяния запишем время релаксации в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} W(\vec{k}', \vec{k}) \times \left[1 - \frac{k'_x}{k_x} \right] \cdot d\tau_{\vec{k}'} = \\ &= \frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} W(\vec{k}', \vec{k}) \times \left[\frac{k_x - k'_x}{k_x} \right] \cdot d\tau_{\vec{k}'} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} W(\vec{k}', \vec{k}) \times \left(\pm \frac{q_x}{k_x} \right) \cdot d\tau_{\vec{k}'} = \\ &= - \frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} W^+(\vec{k}', \vec{k}) \times \left(\frac{q_x}{k_x} \right) \cdot d\tau_{\vec{k}'} + \frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} W^-(\vec{k}', \vec{k}) \times \left(\frac{q_x}{k_x} \right) \cdot d\tau_{\vec{k}'}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Первый член правой части учитывает поглощение, а второй - испускание фононов при рассеянии электронов.

Вероятность перехода электрона из состояния \vec{k} в состояние \vec{k}' , как показывает расчет (см. Ансельм, «Введение в теорию полупроводников»), равна в случае поглощения фонона

$$W^+(\vec{k}', \vec{k}) = \frac{4\pi}{9} \frac{C^2 q^2}{NM\omega_q} N_q \delta(E' - E - \hbar\omega_q), \quad (1.42)$$

а в случае испускания фонона

$$W^-(\vec{k}', \vec{k}) = \frac{4\pi}{9} \frac{C^2 q^2}{NM\omega_q} (N_q + 1) \delta(E' - E + \hbar\omega_q). \quad (1.43)$$

$\delta(E' - E \pm \hbar\omega_q)$, где δ - функция, C – постоянная Блоха, приблизительно пропорциональная дебаевской температуре кристалла, N - число элементарных ячеек в кристалле, M - масса атома.

В элементарных процессах переноса функция распределения фононов мало отличается от равновесной $\langle N_q \rangle_{\text{равн}}$, поэтому можно считать, что

$$N_q = \langle N_q \rangle_{\text{равн}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_q/k_0T} - 1}. \quad (1.44)$$

Но $\frac{\hbar\omega_q}{k_0T} \approx \frac{\hbar V_{3\phi} \cdot q}{k_0T} = \sqrt{\frac{T_{кр}}{T}} \ll 1$, поэтому формулу (1.44) можно представить

в виде ряда

$$\langle N_q \rangle_{\text{равн}} = \langle N_{q+1} + 1 \rangle_{\text{равн}} = \frac{k_0T}{\hbar V_{3\phi} \cdot q}. \quad (1.45)$$

Если в выражение (1.41) подставить (1.42) и (1.43), учитывая равенства (1.44) и (1.45), а затем перейти к сферической системе координат, то в результате получим, что

$$\tau = \frac{9\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\hbar^4 V_{3\phi}^2 M}{C^2 a^3 k_0 m^{*3/2}} \frac{1}{T \cdot E^{1/2}}, \quad (1.46)$$

где a – постоянная решетки.

Таким образом, время релаксации при рассеянии электронов на акустических колебаниях решетки атомных полупроводников имеет зависимость от энергии вида

$$\tau = \frac{\tau_0}{m^{*3/2}} \frac{1}{T \cdot E^{1/2}}, \quad (1.47)$$

Где $\tau_0 = \frac{9\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\hbar^4 M V_{3\phi}^2}{C^2 a^3 k_0}$, а длина свободного пробега

$$l = V\tau = \sqrt{\frac{2E}{m^*}} \frac{\tau_0}{m^{*3/2}} \frac{1}{T} E^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}\tau_0}{m^{*2}} T^{-1} = \frac{9\pi}{4} \frac{\hbar^4 M V_{3\phi}^2}{C^2 a^3 k_0 m^{*2}} \frac{1}{T}. \quad (1.48)$$

Длина свободного пробега l обратно пропорциональна температуре T и не зависит от энергии носителей заряда.

Из сравнения формул (1.47) и (1.33а) видно, что при повышении энергии носителей заряда время релаксации при рассеянии на ионизированной примеси увеличивается, а при рассеянии на акустических колебаниях – уменьшается.

Это означает, что в случае примесного рассеяния преобладающее влияние оказывают медленные электроны и дырки, поэтому этот механизм рассеяния должен сильнее проявляться при низких температурах. При рассеянии на акустических фононах основной вклад вносят сравнительно быстрые электроны, и этот механизм рассеяния должен значительно сказываться при высоких температурах.

В полярных полупроводниках, а также в полупроводниковых соединениях типа A^3B^5 , в которых связь между атомами носит частично ионный характер, электроны проводимости гораздо сильнее взаимодействуют с оптическими колебаниями, чем акустическими.

Поскольку при оптических колебаниях смещение ионов в ячейке происходит в противоположные стороны, то разноименные заряды создадут электрические поля, перемещающиеся по кристаллу в виде плоских волн. Длинноволновые оптические колебания получили название поляризационных волн. Взаимодействие носителей заряда с поляризационными волнами и приводит их к рассеянию. При этом продольные колебания рассеивают значительно сильнее, чем поперечные.

Каждое столкновение электрона с оптическим фононом приводит к возникновению или исчезновению фонона с энергией $\hbar\omega_{opt}$. Поскольку частота оптического фонона слабо зависит от квазиимпульса \vec{q} (оптическая ветвь почти плоская), то при соударении энергия электрона либо увеличивается, либо уменьшается на одинаковую величину, равную $\pm\hbar\omega_{opt} = \pm\hbar\omega_o$, где ω_o - предельная частота продольной оптической ветви. В теории показано, что энергия, передаваемая носителем заряда решетке за одно столкновение, определяется величиной энергии возникшего фонона, умноженной на отношение разности вероятности испускания и вероятности поглощения, к сумме этих вероятностей. Вероятность испускания фонона $\sim N_q + 1$, а вероятность поглощения $\sim N_q$ (с учетом (1.42) и (1.43)). Следовательно, энергия, передаваемая электроном фонону за одно столкновение, равна

$$\Delta E = \hbar\omega_o \cdot \frac{W^-(\vec{k}, \vec{k}') - W^+(\vec{k}, \vec{k}')}{W^-(\vec{k}, \vec{k}') + W^+(\vec{k}, \vec{k}')} = \hbar\omega_o \frac{(N_q + 1) - N_q}{(N_q + 1) + N_q} = \hbar\omega_o \frac{e^{\frac{\hbar\omega_o}{k_0T}} - 1}{e^{\frac{\hbar\omega_o}{k_0T}} + 1} \quad (1.49)$$

$$= \hbar\omega_o \frac{e^{\frac{\hbar\omega_o}{2k_0T}} \left(e^{\frac{\hbar\omega_o}{2k_0T}} - e^{-\frac{\hbar\omega_o}{2k_0T}} \right)}{e^{\frac{\hbar\omega_o}{2k_0T}} \left(e^{\frac{\hbar\omega_o}{2k_0T}} + e^{-\frac{\hbar\omega_o}{2k_0T}} \right)} = \hbar\omega_o th \cdot \frac{\hbar\omega_o}{2k_0T}.$$

При высоких температурах, когда $T \gg \theta_o$, или $k_0T \gg \hbar\omega_o$, т.е. когда энергия фонона $\hbar\omega_o$ много меньше энергии электрона k_0T , тогда

$$\delta_{onm} = \frac{\Delta E}{E} = \frac{(\hbar\omega_0)^2}{2(k_0T)^2} \ll 1, \quad (1.50)$$

и рассеяние можно считать упругим. В этом случае у большинства электронов изменение энергии при поглощении или испускании оптического фонона будет незначительно. Для случая рассеяния на оптических фононах, как показывает расчет (А.И.Ансельм), время релаксации

$$\tau_{onm} = \frac{\sqrt{2} Ma^3 (\hbar\omega_0)^2 E^{1/2}}{4\pi Z^2 e^4 m^{*1/2} k_0 T}, \quad (1.51)$$

а длина свободного пробега

$$l_{onm} = \tau_{onm} \cdot V = \frac{Ma}{2\pi m^*} \frac{(\hbar\omega_0)^2 E}{(Z e^2 / a)^2 k_0 T}. \quad (1.52)$$

Здесь Ze - заряд иона, $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - приведенная масса ионов, a -

расстояние между ближайшими разноименными ионами.

При низких температурах, когда $T \ll \theta_0$, или $k_0 T \ll \hbar\omega_0$, большинство электронов, у которых энергия $\ll \hbar\omega_0$, могут только поглощать оптические фононы. Поглотив фонон, электрон увеличивает свою энергию, однако, поскольку вероятность испускания фонона в $(N_q + 1) / N_q$ раз превышает вероятность поглощения фонона, то время пребывания электрона в состоянии с большой энергией будет очень мало. Можно считать, что электрон сразу после поглощения фонона испускает фонон той же энергии. Фактически рассеяние можно рассматривать как процесс обмена фононами, поэтому энергия электрона практически остается неизменной, но направление его квазиимпульса сильно изменится. Это позволяет считать, что и при низких температурах, значительно меньших характеристической $\theta_0 = \hbar\omega_0 / k_0$, электрон на оптических фононах рассеивается упруго.

В случае низких температур

$$N_q = \langle N_q \rangle_{равн} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_q / k_0 T} - 1} \approx e^{-\frac{\hbar\omega_0}{k_0 T}} \quad (1.53)$$

и расчет времени релаксации по формуле (1.41), в которой учитывается только поглощение фотона, дает выражение

$$\tau_{onm} = \frac{3\sqrt{2} Ma^3 (\hbar\omega_0)^{3/2}}{4\pi Z^2 e^4 m^{*1/2}} e^{\frac{\hbar\omega_0}{k_0 T}}, \quad (1.41)$$

которое не зависит от энергии электрона, но экспоненциально зависит от температуры.

Длина свободного пробега в случае рассеяния на оптических фононах при низких температурах определяется соотношением

$$\tau_{omn} = \frac{3}{2\pi m^*} \frac{Ma (\hbar\omega_0)^2}{(Z e^2 / a)^2} e^{\frac{\hbar\omega_0}{k_0 T}} \cdot \left(\frac{E}{k_0 T} \right)^{1/2}. \quad (1.48)$$

2. АНАЛИЗ КИНЕТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

2.1. Электропроводность полупроводников

Определим удельную проводимость однородного невырожденного полупроводника, изоэнергетические поверхности которого представляют сферы. Пусть полупроводник находится в постоянном однородном электрическом поле напряженностью $\vec{\Sigma}$.

В элементе объема $d\tau_{\vec{k}}$ кристалла единичного объема содержится количество электронов, равное $dn = f(\vec{k}) \frac{d\tau_{\vec{k}}}{4\pi^3} V$. Эти электроны, движущиеся под действием электрического поля со скоростью V , создадут элементарную плотность тока

$$d\vec{j} = -ef(\vec{k}) \frac{d\tau_{\vec{k}}}{4\pi^3} \vec{V}.$$

Если в полупроводнике два сорта носителей заряда, то полная плотность тока будет равна

$$\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_p = -\frac{e}{4\pi^3} \int_{V_B} \vec{V}_n f_n(\vec{k}) d\tau_{\vec{k}} + \frac{e}{4\pi^3} \int_{V_B} \vec{V}_p f_p(\vec{k}') d\tau_{\vec{k}'}, \quad (2.1)$$

где \vec{V}_n , $f_n(\vec{k})$ и \vec{V}_p , $f_p(\vec{k}')$ - скорости и неравновесные функции распределения электронов и дырок соответственно.

Если в выражение (2.1) подставить f_0 , то $j=0$. Это значит, что при термодинамическом равновесии в веществе тока нет.

Если $f(\vec{k}) = f_0 + f_1(\vec{k})$, то

$$\vec{j} = -\frac{e}{4\pi^3} \int_{V_B} \vec{V}_n f_{1n}(\vec{k}) d\tau_{\vec{k}} + \frac{e}{4\pi^3} \int_{V_B} \vec{V}_p f_{1p}(\vec{k}') d\tau_{\vec{k}'}, \quad (2.2)$$

Неравновесная функция распределения может быть рассчитана из условия стационарного состояния

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{пол}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{см}} = -\frac{f_1(\vec{k})}{\tau(\vec{k})}, \quad (2.3)$$

Полевой член в уравнении Больцмана должен быть равен интегралу столкновений.

На электрон с энергией $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^*}$, находящийся во внешнем электрическом поле, действует сила $\vec{F} = \hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = -e\vec{\Sigma}$. Поскольку полупроводник однородный, то $\nabla_r f = 0$ и изменение функции распределения под влиянием поля будет определяться выражением

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{пол}} &= (\vec{F} \nabla_k f) \cdot \frac{1}{\hbar} = \frac{\partial f_n}{\partial k} \cdot \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = \frac{\partial f_n}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial \vec{k}} \cdot \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = \\ &= -\frac{\partial f_n}{\partial E} \cdot \left(\frac{2\hbar^2 \cdot \vec{k}}{2m_n^*} \right) \cdot \left(\frac{e\vec{\Sigma}}{\hbar} \right) = -\frac{e\hbar}{m_n^*} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial E} (\vec{k} \cdot \vec{\Sigma}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (2.3) находим $f_{1n}(\vec{k})$. Используя (2.4) и подставляя его в (2.2), находим плотность электронного тока

$$\vec{j} = -\frac{e^2 \hbar^2}{4\pi^3 (m_n^*)^2} \int_{V_B} \tau_e \frac{\partial f_{1n}}{\partial E} (\vec{k} \cdot \vec{\Sigma}) \cdot \vec{k} \cdot d\tau_{\vec{k}}, \quad (2.5)$$

где $V_n = \sqrt{\frac{2E}{m_n^*}} = \frac{\hbar k}{m_n^*}$.

Здесь τ_e - время релаксации электрона.

Будем считать, что неравновесная функция $f_n(\vec{k})$ мало отличается от равновесной f_0 . Тогда в (2.5) можно заменить $f_n(\vec{k})$ на f_0 .

Для невырожденного полупроводника

$$n = N_c e^{-\frac{E_c - F}{k_0 T}} = N_c e^{\frac{F}{k_0 T}}. \quad (2.6)$$

(Здесь $E_c = 0$).

Отсюда

$$\frac{\partial f_0}{\partial E} = -\frac{1}{k_0 T} \cdot e^{-\frac{E - F}{k_0 T}} = \frac{-n}{N_c k_0 T} \cdot e^{\frac{-E}{k_0 T}}. \quad (2.7)$$

Подставляя в (2.5), получим

$$\vec{j}_n = \frac{e^2 \hbar^2 n}{4\pi^3 (m_n^*)^2 k_0 T N_c} \int_{V_B} \tau_e e^{\frac{-E}{k_0 T}} (\vec{k} \cdot \vec{\Sigma}) \cdot \vec{k} \cdot d\tau_{\vec{k}}. \quad (2.8)$$

Если воспользоваться соотношением (Ансельм А.И., стр. 416),

$$\int F(k) (\vec{a} \cdot \vec{k}) \cdot \vec{k} \cdot d\tau_{\vec{k}} = \frac{4\pi}{3} \vec{a} \int_0^{\infty} F(k) \cdot k^4 \cdot dk, \quad (2.9)$$

то

$$\vec{j}_n = \frac{e^2 \hbar^2 n \vec{\Sigma}}{4\pi^3 m_n^{*2} N_c k_0 T} \cdot \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} \tau_e e^{\frac{-E}{k_0 T}} \cdot k^4 \cdot dk. \quad (2.10)$$

Полагая $\alpha = \frac{E}{k_0 T}$, и $k^2 = \frac{2m_n^* E}{\hbar^2}$, $E = \alpha k_0 T$, то $k = \left(\frac{2m_n^* \alpha k_0 T}{\hbar^2} \right)^{1/2}$ и

$$dk = \frac{1}{2} \left(\frac{2m_n^* k_0 T}{\hbar^2} \right)^{1/2} \alpha^{-1/2} d\alpha,$$

получим $k^4 \cdot dk = \frac{(2m_n^* k_0 T)^{5/2}}{2\hbar^5} \cdot \alpha^{3/2} d\alpha$.

Подставляя это выражение в (2.10), и учитывая, что $N_c = 2 \left(\frac{2\pi m_n^* k_0 T}{\hbar^2} \right)^{3/2}$,

Получаем

$$\vec{j}_n = \frac{e^2 n \vec{\Sigma}}{(m_n^*)} \cdot \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \tau_e e^{-\alpha} \cdot \alpha^{3/2} \cdot d\alpha. \quad (2.11)$$

Введем обозначение $\langle \tau_e \rangle = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \tau_e e^{-\alpha} \cdot \alpha^{3/2} \cdot d\alpha$. Тогда

$$\vec{j}_n = \frac{e^2 n \langle \tau_e \rangle \vec{\Sigma}}{(m_n^*)} = en \mu_n \vec{\Sigma} = \sigma_n \vec{\Sigma}, \quad (2.12)$$

где $\mu_n = \frac{e \langle \tau_e \rangle}{m_n^*}$ - подвижность электронов.

Соответственно дырочная составляющая тока будет равна

$$\vec{j}_p = \frac{e^2 p \langle \tau_h \rangle \vec{\Sigma}}{(m_p^*)} = ep \mu_p \vec{\Sigma} = \sigma_p \vec{\Sigma}. \quad (2.13)$$

Здесь среднее время релаксации дырок $\langle \tau_h \rangle = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \tau_h e^{-\alpha} \cdot \alpha^{3/2} \cdot d\alpha$.

Полная плотность тока в полупроводнике, имеющем два типа носителей заряда, равна

$$\vec{j} = j_n + \vec{j}_p = (\sigma_n + \sigma_p) \vec{\Sigma} = \sigma \vec{\Sigma}. \quad (2.14)$$

2.2. Зависимость подвижности носителей заряда от температуры

Проведенный расчет показывает, что для определения подвижности необходимо знание среднего времени релаксации. Но на время релаксации существенным образом сказывается механизм рассеяния, поэтому при столкновении носителей заряда с разными по природе дефектами подвижность по разному будет зависеть от температуры.

При рассеянии носителей заряда в атомных полупроводниках на акустических фононах время релаксации равно $\tau(\vec{k}) = \frac{\tau_0}{m^{*3/2}} T^{-1} E^{-1/2}$, где $E = k_0 T$. Поэтому

$$\mu(T) = \frac{4e \tau_0}{3\sqrt{\pi} m^{*5/2} k_0^{1/2}} \cdot T^{-3/2}, \quad (2.15)$$

или $\left(\mu = \frac{e \langle \tau \rangle}{m^*} \right)$. Здесь использовано выражение для $\langle \tau_e \rangle$.

$$\langle \tau_e \rangle = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \tau_0 e^{-\alpha} \cdot \alpha^{3/2} \cdot d\alpha = \frac{4\tau_0}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha} \cdot \alpha^{3/2} \cdot d\alpha, \quad (2.16)$$

где $\int_0^{\infty} e^{-\alpha} \cdot \alpha^{3/2} \cdot d\alpha = \Gamma$ – функция (гамма-функция) Эйлера.

Из (2.15) следует, что подвижность в этом случае уменьшается с ростом температуры. Она обратно пропорциональна эффективной массе носителя в степени 5/2, что хорошо согласуется с экспериментальными данными (в полупроводниках с малой эффективной массой носителей подвижность очень большая).

При рассеянии на ионах примеси время релаксации τ_e в зависимости от энергии имеет вид (по (1.33а) и (1.34))

$$\tau_e = \frac{\varepsilon^2 (2m^*)^{1/2} E^{3/2}}{\pi Z^2 e^4 N_e \ln \left[1 + \left(\frac{\varepsilon E}{Ze^2 N_e^{1/3}} \right)^2 \right]}.$$

При усреднении этого выражения, логарифмический член, являющийся медленно меняющейся функцией, можно вынести за знак интеграла, если в этот член подставить такое значение энергии, при котором остальная часть

подинтегрального выражения (2.11) достигает максимума. Это происходит при

$$E = 3k_0T. \text{ Покажем это. } \int_0^{\infty} E^{3/2} \cdot e^{-\alpha} \cdot \alpha^{3/2} \cdot d\alpha \text{ и } E = \alpha k_0T.$$

$$k_0^{3/2}T^{3/2} \left(\alpha^{3/2} \cdot e^{-\alpha} \cdot \alpha^{3/2} d\alpha \right)' = k_0^{3/2}T^{3/2} \left(e^{-\alpha} \cdot \alpha^3 d\alpha \right)' = \\ = k_0^{3/2}T^{3/2} \left(3\alpha^2 \cdot e^{-\alpha} - \alpha^3 \cdot e^{-\alpha} \right) = 0. \text{ Отсюда } \alpha = 3 \text{ и } E = 3k_0T.$$

Тогда гамма-функция Эйлера при $p=4$, (p - показатель степени при α плюс единица) равна

$$\Gamma(4) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha} \cdot \alpha^3 \cdot d\alpha = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \text{ а среднее время релаксации будет}$$

равно:

$$\begin{aligned} \langle \tau_e \rangle &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \tau_e e^{-\alpha} \cdot \alpha^{3/2} \cdot d\alpha = \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2}\varepsilon^2 m_n^{*1/2} k_0^{3/2} T^{3/2}}{\pi Z^2 e^4 N_e \ln \left[1 + \left(\frac{\varepsilon E}{Ze^2 N_e^{1/3}} \right)^2 \right]} \int_0^{\infty} e^{-\alpha} \cdot \alpha^3 \cdot d\alpha = \\ &= \frac{8\sqrt{2}\varepsilon^2 m_n^{*1/2} k_0^{3/2} T^{3/2}}{\pi^{3/2} Z^2 e^4 N_e \ln \left[1 + \left(\frac{\varepsilon \cdot 3k_0T}{Ze^2 N_e^{1/3}} \right)^2 \right]}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

При этом подвижность при рассеянии на ионах примеси запишется в виде

$$\mu_e(T) = \frac{e\langle \tau_e \rangle}{m_n^*} \frac{8\sqrt{2}\varepsilon^2 k_0^{3/2} T^{3/2}}{\pi^{3/2} Z^2 e^3 m_n^{*1/2} N_e \ln \left[1 + \left(\frac{3\varepsilon \cdot k_0T}{Ze^2 N_e^{1/3}} \right)^2 \right]}. \quad (2.18)$$

Если пренебречь логарифмической зависимостью подвижности от температуры, что можно сделать при достаточно высоких температурах, то можно считать, что

$$\mu_e \approx \mu_{0e} T^{3/2}. \quad (2.19)$$

Отсюда следует, что подвижность электронов, обусловленная рассеянием на ионах примеси, уменьшается при уменьшении температуры.

Это происходит потому, что с увеличением температуры кристалла возрастает тепловая скорость носителей заряда. Это приводит к ослаблению

взаимодействия носителей с ионизированными атомами примеси, т.к. уменьшается длительность взаимодействия. Кроме того, при данной температуре подвижность уменьшается с увеличением концентрации примеси.

$$\mu_e \sim \frac{1}{N_e}.$$

При рассеянии носителей заряда на нейтральной примеси время релаксации (1.36) не зависит от температуры и энергии носителей. В силу этого, подвижность носителей, обусловленная рассеянием на нейтральных атомах примеси, имеет вид:

$$\mu_A \sim \frac{e^3 m_n^*}{20\epsilon\hbar^3} \frac{1}{N_A}. \quad (2.20)$$

При рассеянии на дислокациях, согласно (1.37), $\tau_D \sim E^{-1/2}$, следовательно

$$\mu_D(T) \approx \frac{eT^{-1/2}}{2\sqrt{2}k_0^{1/2}m_n^{*1/2}} \frac{1}{RN_D}. \quad (2.21)$$

В реальных полупроводниках имеют место все виды нарушения строгой периодичности поля решетки, поэтому механизм рассеяния носит сложный характер. Если считать, что все виды механизмов рассеяния независимы, то полная вероятность рассеяния равна сумме вероятностей рассеяния на каждом типе рассеивающих центров, т.е.

$$W(\vec{k}, \vec{k}') = \sum_i W_i(\vec{k}, \vec{k}'). \quad \text{В этом случае полное время релаксации } \tau$$

согласно (1.24)

$$\frac{1}{\tau(\vec{k})} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} \sum_i W_i(\vec{k}', \vec{k}) \times [1 - \cos\theta] \cdot d\tau_{\vec{k}'} = \sum_i \tau_i^{-1}. \quad (2.22)$$

При очень низких температурах в (2.22) можно учитывать только рассеяние на нейтральной примеси и дислокациях. С повышением температуры роль этих механизмов уменьшается по сравнению с рассеянием на ионах примеси. При высоких температурах доминирующим становится рассеяние на фононах. Поэтому можно считать, что подвижность носителей заряда в зависимости от температуры согласно (2.15) и (2.19) будет определяться соотношением вида

$$\frac{1}{\mu} = \frac{m^*}{e} \sum_i \frac{1}{\tau_i} = aT^{3/2} + bT^{-3/2}, \quad (2.23)$$

в котором 1-е слагаемое соответствует фононам, а 2 - е - ионам.

Как следует из (2.23), в атомных полупроводниках с ростом температуры подвижность растет пропорционально $T^{3/2}$, если рассеяние происходит только на ионах примеси, затем проходит через максимум и

уменьшается пропорционально $T^{-3/2}$, если рассеивающими центрами являются только акустические фононы.

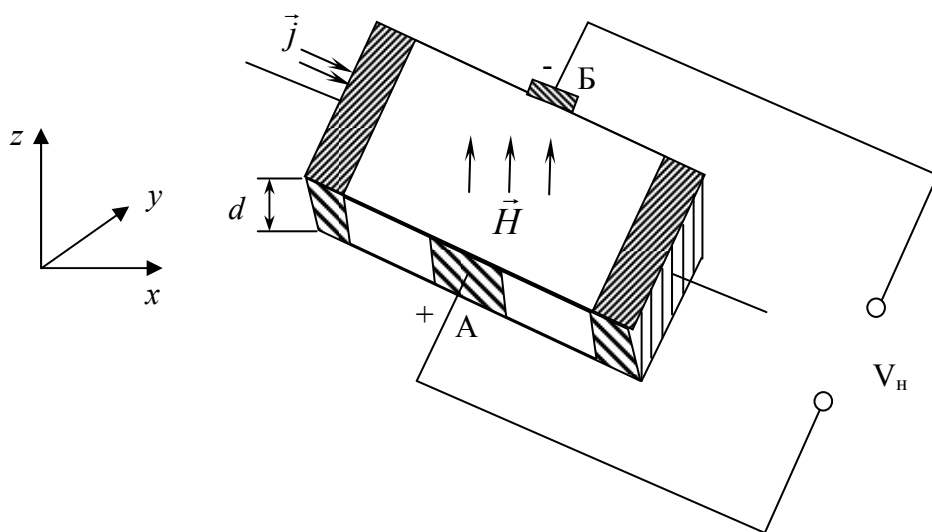


Рис. 2.1.

2.3. Гальваномагнитные явления

Эффект Холла.

Кинетические эффекты, имеющие место при одновременном воздействии на вещество

электрического $\vec{\Sigma}$ и магнитного \vec{H} полей, называют гальваномагнитными эффектами. Эффект Холла является одним из них. На рисунке 2.1. - \vec{j} - плотность тока.

Рассмотрим эффект Холла без учета рассеяния.

$$\vec{j} = e n \mu \vec{\Sigma}; \quad \sigma = e n \mu$$

Измерив только σ , мы не можем отдельно определить n и μ . Для их нахождения используют эффект Холла. Если полупроводник однороден, то эквипотенциальная поверхность проходит через АБ, поэтому разность потенциалов между точками А и Б равна 0.

Пусть теперь к полупроводнику приложено магнитное поле \vec{H} , как показано на рисунке 2.1. На движущийся носитель действует сила Лоренца

$$\vec{F} = e \hbar \alpha_0 [\vec{V} \times \vec{H}] = e [\vec{V} \times \vec{B}] - \text{правило левой руки. Здесь } B - \text{ магнитная}$$

индукция, \hbar - относительная магнитная проницаемость вещества, α_0 - магнитная постоянная. Направление силы Лоренца зависит от знака носителей заряда и векторного произведения скорости \vec{V} на напряженность магнитного поля \vec{H} . При одинаковом направлении тока сила Лоренца, действующая на положительные и отрицательные носители, имеет одинаковое направление (в сторону грани А). Между А и Б возникает разность потенциалов V_H , знак которой зависит от знака заряда носителей (для дырок + на грани А). Напряженность электрического поля $\vec{\Sigma}$ уже не будет совпадать с направлением тока \vec{j} . В стационарном состоянии для дырочного полупроводника

$$e \Sigma_n = e V B; \quad \vec{V} = \frac{\vec{j}}{e p}; \quad V_H = \Sigma_n d = V B d = \frac{1}{e p} j B d = R \cdot j B d.$$

Величина R- называется коэффициентом Холла и для дырок равна

$$R = \frac{1}{ep}, \text{ а для электронов } R = -\frac{1}{en}.$$

Таким образом, зная коэффициент Холла, можно вычислить концентрацию носителей заряда и определить их знак.

Более строгое описание эффекта Холла с учетом рассеяния носителей заряда можно получить на основе решения кинетического уравнения Больцмана.

Рассмотрение эффекта Холла, когда на носители заряда действует сила $\vec{F} = e[\vec{\Sigma} + [\vec{V} \times \vec{B}]]$, проведем для слабого магнитного поля.

Под слабым магнитным полем понимают такое поле, для которого время релаксации τ носителя заряда много меньше его периода обращения T_c по круговой орбите в магнитном поле, т.е. $\tau \ll T_c$.

Известно, что циклотронная частота $\omega_c = \frac{eB}{m^*}$. Поскольку $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$, то

$$\text{условие слабого поля } \tau \ll \frac{m^* 2\pi}{e B}.$$

Принимая во внимание, что $\frac{e\tau}{m^*}$ представляет собой подвижность носителей заряда μ , получаем

$$\mu B \ll 2\pi \text{ или } \mu B \ll 1 \text{ (усилив неравенство).}$$

Это условие обычно и служит критерием слабого поля.

Рассмотрение эффекта Холла проведем для однородного полупроводника со сферическими изоэнергетическими поверхностями, находящегося в постоянных электрическом и магнитном полях.

Чтобы найти постоянную Холла R , вычислим плотность тока (см. (2.2) и учитывая, что $\vec{V} = \frac{\hbar \vec{k}}{m^*}$).

$$\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_p = -\frac{e\hbar}{4\pi^3 m_n^*} \int_{V_B} \vec{k} f_1^{(n)}(\vec{k}) \cdot d\tau_{\vec{k}} + \frac{e\hbar}{4\pi^3 m_p^*} \int_{V_B} \vec{k}' f_1^{(p)}(\vec{k}') \cdot d\tau_{\vec{k}'}. \quad (2.24)$$

Для нахождения $f_1(\vec{k})$ используем формулу (1.19)

$$(\vec{V} \nabla_{\vec{r}} f) + \frac{1}{\hbar} (\vec{F} \nabla_{\vec{k}} f) = -\frac{f_1(\vec{k})}{\tau(\vec{k})},$$

а также то, что $f(\vec{k})$ от r не зависит, т.е. $(\nabla_r f) = 0$. Получаем

$$\frac{e}{\hbar} \left\{ \vec{\Sigma} + [\vec{V} \times \vec{B}] \right\} \nabla_{\vec{k}} f = -\frac{f_1(\vec{k})}{\tau(\vec{k})}. \quad (2.25)$$

Представим $f_1(\vec{k})$ в виде

$$f_1(\vec{k}) = -\frac{\partial f_0}{\partial E} \vec{k} \cdot \vec{\chi}(E), \quad (2.26)$$

где $\vec{\chi}(E)$ - некоторый вектор, зависящий лишь от энергии носителей заряда.

Будем считать, что неравновесная функция $f(\vec{k}) = f_0 + f_1(\vec{k})$ незначительно отличается от равновесной (слабое поле) и в уравнении (2.25) вместо f подставим f_0 везде, кроме члена, содержащего вектор магнитного поля.

Так как $\{[\vec{V} \times \vec{B}]\} \cdot \vec{V} = 0$, то (2.25) будет иметь вид

$$\frac{e}{\hbar} \vec{\Sigma} \nabla_{\vec{k}} f_0 + \frac{e}{\hbar} [\vec{V} \times \vec{B}] \nabla_{\vec{k}} f_1 = -\frac{f_1(\vec{k})}{\tau(\vec{k})}. \quad (2.27)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{k}} f_0 &= -\frac{\partial f_0 \partial E}{\partial E \partial \vec{k}} = \frac{\partial f_0 \partial}{\partial E \partial \vec{k}} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \right) = \frac{\partial f_0}{\partial E} \left(\frac{\hbar^2 \vec{k}}{m^*} \right) = \frac{\partial f_0}{\partial E} \hbar \left(\frac{\hbar \vec{k}}{m^*} \right) = \frac{\partial f_0}{\partial E} \hbar \left(\frac{\vec{p}}{m^*} \right) = \\ &= \frac{\partial f_0}{\partial E} \hbar \vec{V}; \end{aligned}$$

$$\nabla_{\vec{k}} f_1(\vec{k}) = -\nabla_{\vec{k}} \left[\frac{\partial f_0}{\partial E} \vec{k} \cdot \vec{\chi} \right] = -\left[\frac{\partial f_0}{\partial E} \vec{\chi} \right] - \left\{ \hbar \vec{k} \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{\partial f_0}{\partial E} \vec{\chi} \right] \right\} \vec{V}. \quad (2.28)$$

Как известно, $\{[\vec{V} \times \vec{B}]\} \cdot \vec{\chi} = \{[\vec{B} \times \vec{\chi}]\} \cdot \vec{V}$ и, если учесть выражения (2.26) и (2.28), то (2.27) примет вид

$$f_1(\vec{k}) = -\left[\frac{\partial f_0}{\partial E} \vec{k} \cdot \vec{\chi} \right] = e\tau \frac{\partial f_0}{\partial E} \left\{ \vec{E} - \frac{1}{\hbar} [\vec{B} \times \vec{\chi}] \right\} \cdot \vec{V}, \quad (2.29)$$

$$\text{так как } \{[\vec{V} \times \vec{B}]\} \cdot \left\{ \hbar \vec{k} \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{\partial f_0}{\partial E} \vec{\chi} \right) \right\} \vec{V} = 0. \quad \left(\vec{V} = \frac{\hbar \vec{k}}{m^*} \right).$$

Следовательно, из (2.26) после сокращения на \vec{k} и $\frac{\partial f_0}{\partial E}$ получим

$$\vec{\chi}_n = -\frac{\tau_e e \hbar}{m_n^*} \left\{ \vec{\Sigma} - \frac{1}{\hbar} [\vec{B} \times \vec{\chi}_n] \right\}, \quad (2.30)$$

$$\vec{\chi}_p = \frac{\tau_h e \hbar}{m_p^*} \left\{ \vec{\Sigma} - \frac{1}{\hbar} [\vec{B} \times \vec{\chi}_p] \right\}. \quad (2.31)$$

Решая векторные уравнения (2.30) и (2.31) для случая слабого магнитного поля $\mu B \ll 1$ (разлагая каждое уравнение на проекции на оси координат и решая совместно полученные три уравнения), получим :

$$\vec{\chi}_n = -\frac{\tau_e e \hbar}{m_n^*} \left\{ \vec{\Sigma} + \frac{e \tau_e}{m_n^*} [\vec{B} \times \vec{E}] \right\}, \quad (2.32)$$

$$\vec{\chi}_p = \frac{\tau_h e \hbar}{m_p^*} \left\{ \vec{\Sigma} - \frac{e \tau_h}{m_p^*} [\vec{B} \times \vec{E}] \right\}. \quad (2.33)$$

Используя (2.2), (2.26) и (2.32), получим

$$\vec{j}_n = -\frac{e^2 \hbar^2}{4\pi^3 m_n^{*2} V_B} \int \frac{\partial f_0}{\partial E} \left\{ \tau_e (\vec{k} \cdot \vec{\Sigma}) + \frac{e \tau_e^2}{m_n^*} \vec{k} [\vec{B} \times \vec{\Sigma}] \right\} \vec{k} \cdot d\tau_{\vec{k}}. \quad (2.34)$$

Используя преобразования Ансельма (2.9)

$$\int F(k) (\vec{\alpha} \cdot \vec{k}) \cdot \vec{k} \cdot d\tau_{\vec{k}} = \frac{4\pi}{3} \vec{\alpha} \int_0^\infty F(k) \cdot k^4 \cdot dk,$$

а также

$$\frac{\partial f_0}{\partial E} = -\frac{1}{k_0 T} e^{-\frac{E-F}{k_0 T}} = -\frac{n}{N_c k_0 T} e^{-\frac{E}{k_0 T}} \text{ и } k^4 \cdot dk = \frac{(2m_n^* k_0 T)^{5/2}}{2\hbar^5} \alpha^{3/2} d\alpha, \text{ где } \alpha = \frac{E}{k_0 T} \text{ и}$$

$$N_c = 2 \left(\frac{2\pi m_n^* k_0 T}{\hbar^2} \right)^{3/2}, \text{ уравнение (2.34) запишется в виде}$$

$$\vec{j}_n = \frac{e^2 n}{m_n^*} \vec{E} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \tau_e e^{-\alpha} \alpha^{3/2} \cdot d\alpha + \frac{e^3 n}{m_n^{*2}} [\vec{B} \times \vec{\Sigma}] \int_0^\infty \tau_e^2 \cdot e^{-\alpha} \alpha^{3/2} \cdot d\alpha.$$

Вводя среднее значение времени релаксации для электронов,

$$\langle \tau_e \rangle = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \tau_e \cdot e^{-\alpha} \alpha^{3/2} \cdot d\alpha, \quad (2.34a)$$

среднее значение квадрата времени релаксации для электронов,

$$\langle \tau_e^2 \rangle = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \tau_e^2 \cdot e^{-\alpha} \alpha^{3/2} \cdot d\alpha, \quad (2.34b)$$

и учитывая, что $\mu_n = \frac{e \langle \tau_e \rangle}{m_n^*}$, получим для плотности электронной составляющей

тока

$$\vec{j}_n = en \mu_n \vec{\Sigma} + \frac{\langle \tau_e^2 \rangle}{\langle \tau_e \rangle^2} en \mu_n^2 [\vec{B} \times \vec{\Sigma}] = en \mu_n \vec{\Sigma} + r_n en \mu_n^2 [\vec{B} \times \vec{\Sigma}], \quad (2.35)$$

где

$$r_n = \frac{\langle \tau_e^2 \rangle}{|\langle \tau_e \rangle|^2}. \quad (2.36)$$

По аналогии плотность дырочной составляющей тока запишется в виде

$$\vec{j}_p = e p \mu_p \vec{\Sigma} - r_p e p \mu_p^2 [\vec{B} \times \vec{\Sigma}], \quad (2.37)$$

где

$$r_p = \frac{\langle \tau_h^2 \rangle}{|\langle \tau_h \rangle|^2}. \quad (2.38)$$

Полная плотность тока

$$\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_p = e(p\mu_p + n\mu_n) \vec{\Sigma} - r_n e \left(\frac{r_p}{r_n} p\mu_p^2 - n\mu_n^2 \right) [\vec{B} \times \vec{\Sigma}]. \quad (2.39)$$

В этом уравнении коэффициенты r_n, r_p зависят от механизма рассеяния носителей заряда, который определяет время релаксации $\tau(\vec{k})$.

В случае упругого рассеяния, когда $k' = k, E' = E$, для любого механизма рассеяния отношение

$$\frac{r_p}{r_n} = \frac{\langle \tau_h^2 \rangle}{|\langle \tau_h \rangle|^2} \times \frac{|\langle \tau_e \rangle|^2}{\langle \tau_e^2 \rangle} = 1. \quad (2.40)$$

Обозначим $r_n = r$ и, учитывая (2.39), имеем

$$\vec{j} = e(n\mu_n + p\mu_p) \vec{\Sigma} - r e (p\mu_p^2 - n\mu_n^2) [\vec{B} \times \vec{\Sigma}]. \quad (2.41)$$

Если электрический ток направлен вдоль оси x , т.е. $j_x = j$, и $j_y = j_z = 0$, а магнитное поле вдоль оси z , т.е. $B_z = B$ и $B_x = B_y = 0$, то при этом (2.41) распадается на два

$$j_x = e(n\mu_n + p\mu_p) \Sigma_x + r e (p\mu_p^2 - n\mu_n^2) B \cdot \Sigma_y = j. \quad (2.42)$$

$$j_y = e(n\mu_n + p\mu_p) \Sigma_y - r e (p\mu_p^2 - n\mu_n^2) B \cdot \Sigma_x = 0. \quad (2.43)$$

Решая эту систему уравнений относительно Σ_y в случае слабого магнитного поля, получаем для выражения напряженности холловского поля

$$\Sigma_y = \frac{r(p\mu_p^2 - n\mu_n^2)}{e(p\mu_p + n\mu_n)^2} jB = RjB, \quad (2.44)$$

так как $B^2 \approx 0$ (поле слабое). Коэффициент Холла

$$R = \frac{r(p\mu_p^2 - n\mu_n^2)}{e(p\mu_p + n\mu_n)^2} \quad (2.45)$$

зависит от механизма упругого рассеяния, что учитывается множителем r .

При рассеянии на акустических колебаниях решетки время релаксации, учитывая (1.47) и $E = \alpha k_0 T$, будет равно

$$\tau = \frac{\tau_0}{m_n^{*3/2}} T^{-1} E^{-1/2} = \frac{\tau_0}{m_n^{*3/2} k_0^{1/2} T^{3/2}} \alpha^{-1/2}.$$

Согласно (2.34а)

$$\begin{aligned} \langle \tau_e \rangle &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\tau_0}{m_n^{*3/2} k_0^{1/2} T^{3/2}} \cdot e^{-\alpha} \cdot \alpha^{3/2} \cdot \alpha^{-1/2} d\alpha = \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\tau_0}{m_n^{*3/2} k_0^{1/2} T^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha} \cdot \alpha \cdot d\alpha = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\tau_0}{m_n^{*3/2} k_0^{1/2} T^{3/2}} \Gamma(2) = \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\tau_0}{m_n^{*3/2} k_0^{1/2} T^{3/2}} \cdot 1; \end{aligned}$$

$$\left| \langle \tau_e \rangle \right|^2 = \frac{16\tau_0^2}{9\pi \cdot m_n^{*3} k_0 T^3} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Согласно (2.34в)

$$\begin{aligned} \langle \tau_e^2 \rangle &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\tau_0^2}{m_n^{*3} k_0 T^3} \cdot e^{-\alpha} \cdot \alpha^{3/2} \cdot \alpha^{-1} d\alpha = \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\tau_0^2}{m_n^{*3} k_0 T^3} \int_0^{\infty} e^{-\alpha} \alpha^{1/2} \cdot d\alpha = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\tau_0^2}{m_n^{*3} k_0 T^3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \right). \end{aligned}$$

Тогда в соответствии (2.36), получим

$$\frac{\langle \tau_e^2 \rangle}{\left| \langle \tau_e \rangle \right|^2} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi} \cdot 9\pi}{2 \cdot 16} = \frac{3\pi}{8}. \quad (2.46)$$

При рассеянии на ионах примеси (1.33а), проделав аналогичные вычисления, получим

$$r = \frac{315\pi}{512} = 1,93. \quad (2.47)$$

При определении коэффициента Холла при низких температурах, когда основную роль в рассеянии играют ионы примеси, нужно полагать

$$r = \frac{315\pi}{512} = 1,93. \quad \text{При высоких температурах} - \quad r = \frac{3\pi}{8}.$$

Для электронного полупроводника коэффициент Холла (2.45) имеет вид

$$R = -r \cdot \frac{1}{en}, \quad (2.48)$$

а проводимость $\sigma = e\mu_d n$, где $\mu_d = \frac{\sigma}{en} = \frac{e\langle\tau\rangle}{m_n^*}$ - дрейфовая или омическая подвижность.

Следовательно $\frac{1}{r}|R|\sigma = \mu_d$, а $|R|\sigma = \mu_H$ - имеет размер подвижности и это выражение называют **ХОЛЛОВСКОЙ ПОДВИЖНОСТЬЮ**.

$$\mu_H = r\mu_d \quad (2.49)$$

Холловская подвижность, определяющая угол Холла (угол между векторами \vec{j} и \vec{E}), пропорциональна дрейфовой подвижности.

В случае, когда время релаксации – постоянно, т.е. не зависит от энергии $r = 1$ и $\mu_H = \mu_d$.

Это имеет место у металлов и вырожденных полупроводников.

2.4. Термоэлектрические явления

К термоэлектрическим явлениям относятся три эффекта:

1. Эффект Зеебека – возникновение термоэлектрического напряжения в цепи, состоящей из двух проводников, места соединения которых находятся при разных температурах.

2. Эффект Пельтье – выделение или поглощение тепла на контакте двух проводников при протекании через них электрического тока.

3. Эффект Томсона - выделение или поглощение тепла в объеме проводника при прохождении электрического тока и наличии градиента температуры.

Рассмотрим однородный полупроводник при наличии градиента температуры. Средняя энергия носителей заряда и их концентрация в полупроводнике будут больше там, где выше температура. Следовательно, градиент температуры в однородном полупроводнике приводит к градиенту средней энергии носителей заряда и градиенту их концентрации, вследствие чего возникает диффузионный поток носителей, т.е. появляется электрический ток. Но в разомкнутой цепи тока быть не должно. Это возможно только благодаря появлению в результате разделения заряда разности потенциалов между горячим и холодным концами полупроводника, которая вызывает обратный ток, компенсирующий поток носителей, обусловленный градиентом температуры. Таким образом, на концах полупроводника появится термоэлектродвижущая сила (термо-эдс).

Термо-эдс, отнесенная к единичной разности температур, называется дифференциальной термо-эдс - α .

Определение термо-эдс проведем на основе кинетического уравнения (1.19):

$$(\vec{V}\nabla_r f) + \frac{1}{\hbar}(\vec{F}\nabla_{\vec{k}} f) = -\frac{f - f_0}{\tau(\vec{k})} = -\frac{f_1(\vec{k})}{\tau(\vec{k})}$$

для невырожденного полупроводника, имеющего сферические изоэнергетические поверхности для электронов $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^*}$ и дырок $E' = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m_p^*}$.

Если химический потенциал для электронов равен F , то для дырок он будет равен $F' = -\Delta E_g - F$, т.е. $F + F' + E_g = 0$.

Равновесная функция распределения для электронов (рис. 2.2)

$f_0 = e^{\frac{-E+F}{k_0T}}$ и для дырок $f_{0p} = e^{\frac{F'-E'}{k_0T}} = e^{\frac{F+E'+E_g}{k_0T}}$. Поскольку $n = N_c e^{\frac{F}{k_0T}}$, а

$$p = N_v e^{\frac{F'}{k_0T}},$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial E} = -\frac{1}{k_0T} e^{\frac{-E+F}{k_0T}} = -\frac{n}{k_0T N_c} e^{\frac{-E}{k_0T}}, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial T} = \frac{E-F}{k_0T^2} e^{\frac{-E+F}{k_0T}} = \frac{F-E}{T} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial E}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial F} = \frac{1}{k_0T} e^{\frac{-E+F}{k_0T}} = -\frac{\partial f_0}{\partial E}. \quad (2.52)$$

При малой величине отклонения $f_1(\vec{k}) = f(\vec{k}) - f_0$ в левой части уравнения (1.19) можно заменить f на f_0 . Тогда учитывая (2.50 – 2.52), получим

$$\nabla_r f \approx \nabla_r f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial T} \nabla_r T + \frac{\partial f_0}{\partial F} \nabla_r F = \frac{\partial f_0}{\partial E} \left(\frac{F-E}{T} \nabla_r T - \nabla_r F \right), \quad (2.53)$$

$$\nabla_k f \approx \nabla_k f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial E} \nabla_k E = \hbar \frac{\partial f_0}{\partial E} \vec{V}_n. \quad (2.54)$$

Подставим (2.53), (2.54) в (1.19), считая, что на электрон действует только электрическое поле $\vec{\Sigma} = -\nabla_r \varphi$, и учитывая что $\vec{F} = -e\vec{\Sigma} = e\nabla_r \varphi$, получим

$$\vec{V}_n \frac{\partial f_0}{\partial E} \left(\frac{F-E}{T} \nabla_r T - \nabla_r F \right) + e\nabla_r \varphi \frac{\partial f_0}{\partial E} \vec{V}_n = -\frac{f_1^{(n)}(\vec{k})}{\tau_e(\vec{k})}. \quad (2.55)$$

Отсюда

$$f_1^{(n)}(\vec{k}) = -\tau_e \frac{\partial f_0}{\partial E} \left\{ \frac{F-E}{T} \nabla_r T - \nabla_r (F - e\varphi) \right\} \vec{V}_n. \quad (2.56)$$

Для дырок

$$f_1^{(p)}(\vec{k}) = \tau_h \frac{\partial f_{0p}}{\partial E} \left\{ \frac{E' + F + \Delta E_g}{T} \nabla_r T - \nabla_r (F - e\varphi) \right\} \vec{V}_p. \quad (2.57)$$

Вычисление плотности тока проведем для полупроводников в предположении, что рассеяние носителей заряда обусловлено акустическими колебаниями кристаллической решетки. В этом случае длина свободного пробега $l = V\tau$ не зависит от энергии носителей – (1.48) и

$$\tau = \frac{l}{V} = \frac{m_n^* l}{\hbar} k^{-1} \quad (2.58)$$

С учетом соотношения Ансельма $\int F(k) (\vec{a} \cdot \vec{k}) \cdot \vec{k} \cdot d\tau_{\vec{k}} = \frac{4\pi}{3} \vec{a} \int F(k) \cdot k^4 \cdot dk$ и (2.56, 2.58), а также (2.2) получим

$$\begin{aligned} \vec{j}_n &= -\frac{e}{4\pi^3} \int_{V_B} \vec{V}_n \cdot f_1^{(n)} \cdot d\tau_{\vec{k}} = \frac{e\hbar}{4\pi^3 m_n^*} \int_{V_B} \vec{k} \tau_n \frac{\partial f_0}{\partial E} \left\{ \frac{F - E}{T} \nabla_r T - \right. \\ & \left. - \nabla_r (F - e\varphi) \right\} \cdot \frac{\hbar \vec{k}}{m_n^*} d\tau_{\vec{k}} = \frac{e\hbar l}{4\pi^3 m_n^*} \int_{V_B} k^{-1} \frac{\partial f_0}{\partial E} \left\{ \frac{F - E}{T} \nabla_r T - \right. \\ & \left. - \nabla_r (F - e\varphi) \right\} \cdot \vec{k} \cdot \vec{k} \cdot d\tau_{\vec{k}} = \frac{e\hbar l}{4\pi^3 m_n^*} \int_{V_B} k^{-1} \frac{\partial f_0}{\partial E} \left\{ \frac{F - E}{T} \nabla_r T - \right. \\ & \left. - \nabla_r (F - e\varphi) \right\} \cdot \vec{k} \cdot \vec{k} \cdot d\tau_{\vec{k}} = \frac{e\hbar l}{4\pi^3 m_n^*} \left[\int_{V_B} k^{-1} \frac{\partial f_0}{\partial E} \left\{ \frac{F}{T} \nabla_r T - \right. \right. \\ & \left. \left. - \nabla_r (F - e\varphi) \right\} \cdot \vec{k} \cdot \vec{k} \cdot d\tau_{\vec{k}} - \int_{V_B} \frac{\partial f_0}{\partial E} k^{-1} \cdot \frac{E}{T} \nabla_r T \cdot \vec{k} \cdot \vec{k} \cdot d\tau_{\vec{k}} \right] = \\ & = \frac{e\hbar l}{4\pi^3 m_n^*} \left\{ \frac{F}{T} \nabla_r T - \nabla_r (F - e\varphi) \right\} \cdot \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{\partial f_0}{\partial E} k^3 \cdot dk - \\ & - \frac{e\hbar l}{4\pi^3 m_n^* T} \nabla_r T \cdot \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{\partial f_0}{\partial E} E \cdot k^3 \cdot dk. \end{aligned} \quad (2.59)$$

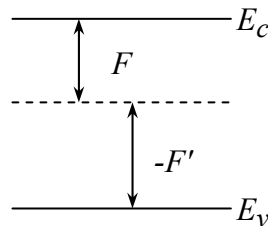


Рис. 2.2.

Если ввести $E = k_0 T \alpha$, то $k = \left(\frac{2m_n^* \alpha k_0 T}{\hbar^2} \right)^{1/2}$ и $dk = \frac{1}{2} \left(\frac{2m_n^* k_0 T}{\hbar^2} \right)^{1/2} \alpha^{-1/2} d\alpha$.

$$k^3 dk = \frac{1}{2} \left(\frac{2m_n^* k_0 T}{\hbar^2} \right)^2 \alpha \cdot d\alpha.$$

Учитывая (2.50) и $N_c = 2 \left(\frac{2\pi m_n^* k_0 T}{h^2} \right)^{3/2}$

$$\begin{aligned} & \frac{e\hbar l}{4\pi^3 m_n^*} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2m_n^* k_0 T}{\hbar^2} \right)^2 \left(-\frac{n \cdot h^3}{k_0 T \cdot 2 \left(2\pi m_n^* k_0 T \right)^{3/2}} \right) = \frac{e\hbar l}{3\pi^2 m_n^*} \cdot \frac{1}{2} \frac{4m_n^{*2} k_0^2 T^2}{\hbar^4} \times \\ & \times \left(-\frac{n \cdot h^3}{k_0 T \cdot 2 \left(2\pi m_n^* k_0 T \right)^{3/2}} \right) = \frac{-e\hbar l}{3\pi^2} \times \left(\frac{n \cdot h^3 \cdot 4}{2\hbar^4 \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot (2\pi)^{1/2} m_n^{*1/2} k_0^{1/2} \cdot T^{1/2}} \right) = \\ & = \frac{-4enl}{3 \left(2\pi m_n^* k_0 T \right)^{1/2}}. \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha} \cdot \alpha \cdot d\alpha = \Gamma(2) = 1! = 1,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha} k_0 T \alpha \cdot \alpha \cdot d\alpha = k_0 T \int_0^{\infty} e^{-\alpha} \alpha^2 \cdot d\alpha = k_0 T \cdot \Gamma(3) = 2k_0 T.$$

Следовательно

$$\vec{j}_n = -\frac{4enl}{3 \left(2\pi m_n^* k_0 T \right)^{1/2}} \left\{ \frac{F}{T} \nabla_r T - \nabla_r (F - e\varphi) - 2k_0 \nabla_r T \right\}. \quad (2.60)$$

Используя (1.48) - $l = \frac{\sqrt{2}\tau_0}{m^{*2}} T^{-1}$ и (2.14) - $\mu(T) = \frac{4e}{3\sqrt{\pi}} \frac{\tau_0}{k_0^{1/2} m^{*5/2}} T^{-3/2}$, можно

определить μ_n через длину свободного пробега (при рассеянии на акустических колебаниях решетки). $\mu_n = \frac{4el}{3 \left(2\pi m^* k_0 T \right)^{1/2}}$ и тогда

$$\vec{j}_n = n\mu_n \left\{ \nabla (F - e\varphi) + \left(2k_0 - \frac{F}{T} \right) \nabla T \right\}. \quad (2.61)$$

Аналогично можно найти дырочную составляющую тока

$$\vec{j}_p = p\mu_p \left\{ \nabla (F - e\varphi) - \left(2k_0 + \frac{F + \Delta E_g}{T} \right) \nabla T \right\}. \quad (2.62)$$

Полная плотность тока будет равна

$$\begin{aligned} \vec{j} = n\mu_n \left\{ \nabla (F - e\varphi) + \left(2k_0 - \frac{F}{T} \right) \nabla T \right\} + \\ + p\mu_p \left\{ \nabla (F - e\varphi) - \left(2k_0 + \frac{F + \Delta E_g}{T} \right) \nabla T \right\}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Таким образом, в полупроводнике при наличии градиента температуры возникает электронный и дырочный токи, которые обусловлены действием градиента электрохимического потенциала $\nabla (F - e\varphi)$ и градиента температуры ∇T .

Для нахождения термо-эдс необходимо определить разность потенциалов для разомкнутой цепи, для которой $\vec{j} = 0$.

Величина $\left| \nabla \frac{F}{l} \right|$ будет равна разности контактных потенциалов в граничных точках, если считать, что полупроводник и металл на контакте находятся в термодинамическом равновесии, тогда дифференциальную термо-эдс α можно определить как

$$\alpha = \frac{\left| \nabla \left(\varphi - \frac{F}{e} \right) \right|}{|\nabla T|}. \quad (2.64)$$

Полагая в (2.63) ток равным 0, получим

$$\alpha = \frac{k_0}{e} \frac{1}{(n\mu_n + p\mu_p)} \left\{ n\mu_n \left(2 - \frac{F}{k_0 T} \right) - p\mu_p \left(2 + \frac{F + \Delta E_g}{k_0 T} \right) \right\}. \quad (2.65)$$

В случае электронного полупроводника на горячем торце образца возникает положительный объемный заряд, поскольку электроны диффундируют от горячего торца к холодному. В дырочном полупроводнике, наоборот, на горячем торце возникает отрицательный объемный заряд.

Таким образом, если полупроводник примесный, то направление внутреннего электрического поля и полярность термо-эдс определяются знаком носителей заряда, следовательно, по знаку термо-эдс можно определить тип примесной проводимости исследуемого образца.

$$\text{Для собственного полупроводника } n = p = n_i; \quad F = -\frac{\Delta E_g}{2} \quad \text{и} \quad (2.65)$$

принимает вид:

$$\alpha = \frac{k_0}{e} \cdot \left(\frac{\mu_n - \mu_p}{\mu_n + \mu_p} \right) \left(2 + \frac{\Delta E_g}{2k_0 T} \right). \quad (2.66)$$

Величина термо-эдс собственного полупроводника определяется лишь шириной запрещенной зоны и соотношением подвижности электронов и дырок.

Изменение механизма рассеяния в полупроводнике, которое может иметь место при различных температурах, влияет на термо-эдс через подвижность. Например, его величина для рассеяния на акустических колебаниях и ионах примеси в атомных кристаллах, оптических колебаниях в ионных кристаллах выше и ниже температуры Дебая принимает соответственно значения 2, 4, 3, 5/2.

На основании (2.65) нельзя объяснить большое возрастание термо-эдс, которое обнаруживается иногда в чистом веществе при низких температурах. Этот эффект определяется особым видом электронно-фононного взаимодействия, которое получило название **увлечения носителей заряда фононами**.

При наличии градиента температуры в полупроводнике имеет место анизотропия в распространении фононов, которые преимущественно движутся от горячего к холодному краю образца. При каждом столкновении электрона с фононом, которое сопровождается уничтожением фонона, его импульс передается электрону. Поскольку фононов с импульсом, направленным к холодному краю образца, больше, чем с противоположно направленным импульсом, то вследствие этого электроны станут дрейфовать к холодной части образца. Дрейф электронов будет продолжаться до тех пор, пока в связи с их перераспределением возникнет электрическое поле, которое уравнивает силу, действующую на электроны со стороны фононного потока. Эта разность потенциалов и представляет собой дополнительную термо-эдс. Эффект увлечения приводит к значительному росту термо-эдс только при низких температурах, т.к. из-за взаимных столкновений распределение фононов медленно возвращается к равновесному. При более высоких температурах рассеяние фононов на фононах быстро восстанавливает равновесное распределение фононов и эффект увлечения исчезает.

Два других термоэлектрических эффекта – эффект Пельтье и эффект Томсона. Для их детального анализа, а также анализа гальваномагнитных явлений в функциях $\chi_n(E)$ и $\chi_n(E')$, которые мы использовали при рассмотрении эффекта Холла (2.32) – (2.33), необходимо, кроме учета наличия электрического поля $\vec{\Sigma}$ и магнитного поля \vec{H} , учесть градиент температуры. Тогда в этом общем случае

$$\begin{aligned}
\chi_n(E) = & -\frac{\hbar\tau_e}{m_n^*} \times \\
& \times \left[\frac{\left\{ \frac{E-F}{T} \nabla T + \nabla(F-e\varphi) \right\} + \left(\frac{e\tau_e}{cm_n^*} \right) \left[\vec{H} \left\{ \frac{E-F}{T} \nabla T + \nabla(F-e\varphi) \right\} \right]}{1 + \left(\frac{e\tau_e H}{cm_n^*} \right)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\left(\frac{e\tau_e}{cm_n^*} \right)^2 \left[\vec{H} \left\{ \frac{E-F}{T} \nabla T + \nabla(F-e\varphi) \right\} \vec{H} \right]}{1 + \left(\frac{e\tau_e H}{cm_n^*} \right)^2} \right].
\end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned}
\chi_p(E') = & -\frac{\hbar\tau_h}{m_p^*} \times \\
& \times \left[\frac{\left\{ \frac{E'+E_g+F}{T} \nabla T - \nabla(F-e\varphi) \right\} - \left(\frac{e\tau_h}{cm_p^*} \right) \left[\vec{H} \left\{ \frac{E'+E_g+F}{T} \nabla T - \nabla(F-e\varphi) \right\} \right]}{1 + \left(\frac{e\tau_h H}{cm_p^*} \right)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\left(\frac{e\tau_h}{cm_p^*} \right)^2 \left[\vec{H} \left\{ \frac{E'+E_g+F}{T} \nabla T - \nabla(F-e\varphi) \right\} \vec{H} \right]}{1 + \left(\frac{e\tau_h H}{cm_p^*} \right)^2} \right].
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Эти выражения очень сложны, и мы ограничимся более простым анализом этих эффектов.

Явление Пельтье заключается в том, что при прохождении электрического тока через контакт двух веществ в нем, кроме тепла Джоуля, в зависимости от направления тока выделяется или поглощается тепло.

Количество тепла при эффекте Пельтье пропорционально плотности тока и времени

$$Q_{\Pi} = \Pi j t . \quad (2.69)$$

Π - коэффициент Пельтье.

Если вдоль однородного проводника существует градиент температуры, то при прохождении тока в объеме материала выделяется или поглощается тепло Томсона, количество которого пропорционально количеству протекающего заряда и перепаду температур.

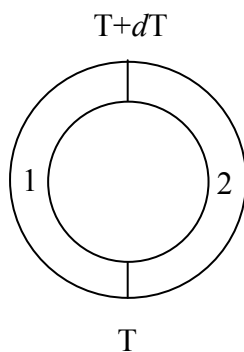


Рис. 2.3.

$$Q_T = It \int_{T_1}^{T_2} \tau_T \cdot dT . \quad (2.70)$$

τ_T - коэффициент Томсона.

Коэффициенты α, Π, τ_T связаны между собой соотношениями Томсона. Для их вывода проведем элементарное рассмотрение термоэлектрических эффектов. Для этого составим замкнутую цепь из двух проводников. Пусть между контактами существует разность температур dT (рис. 2.3).

Наличие градиента температур вызывает появление термо-эдс, равной $d\Sigma = \alpha dT$, которая обеспечит в данной цепихождение тока dI . При этом на одном из контактов в единицу времени выделяется тепло Пельтье в количестве $\Pi' dI$, а на другом - поглощается - ΠdI .

В результате в цепи выделяется тепло Пельтье, и если Π' мало отличается от Π , то количество этого тепла будет равно

$$dQ_{\Pi} = (\Pi' - \Pi)dI = \frac{\partial \Pi}{\partial T} dI \cdot dT. \quad (2.71)$$

Наличие электрического тока и градиента температуры вызовет появление тепла за счет эффекта Томсона, равного за 1 сек.

$$dQ_T = (\tau_{T_1} - \tau_{T_2})dI \cdot dT. \quad (2.72)$$

Эти термодинамические явления можно считать обратимыми, т.к. они зависят от направления тока и градиента температуры. Но в данной замкнутой цепи имеют место и необратимые процессы – теплопроводность и выделение тепла Джоуля. В стационарных условиях теплопроводность не изменяет общего количества тепла в системе, имеет место только перенос тепла из одного участка цепи в другой. Тепло Джоуля пропорционально квадрату тока dI^2 , поэтому при малых значениях изменения тока и температуры эти необратимые эффекты можно не учитывать. На основании закона сохранения энергии можно написать

$$\alpha dT dI = \frac{\partial \Pi}{\partial T} dI \cdot dT + (\tau_{T_1} - \tau_{T_2})dI \cdot dT, \quad (2.73)$$

Откуда найдем

$$\alpha = \frac{\partial \Pi}{\partial T} + (\tau_{T_1} - \tau_{T_2}). \quad (2.73a)$$

Если положить для горячего конца T', Π', τ_{T_2} , а для холодного T, Π, τ_{T_1} , то на основании второго закона термодинамики, согласно которому полное изменение энтропии замкнутой системы при обратимых процессах равно 0, имеем:

$$\frac{\Pi' dI}{T'} - \frac{\Pi dI}{T} + dI \int_{T_1}^{T_2} \frac{\tau_{T_1} - \tau_{T_2}}{T} \cdot dT = 0. \quad (2.74)$$

Если за начало отсчета энтропии взять ее значение на горячем конце $\frac{\Pi' dI}{T'}$, то продифференцировав (2.74) по T , получим $\frac{d}{dT} \frac{\Pi}{T} + \frac{\tau_{T_1} - \tau_{T_2}}{T} = 0$, откуда

$$\frac{d\Pi}{dT} + (\tau_{T_1} - \tau_{T_2}) = \frac{\Pi}{T}. \quad (2.75)$$

Сравнивая уравнения (2.73a) и (2.75), находим

$$\Pi = \alpha T. \quad (2.76)$$

Если продифференцируем полученное равенство по T , то найдем

$$\frac{d\alpha}{dT} = \frac{1}{T} \frac{d\Pi}{dT} - \frac{\Pi}{T^2} = \frac{1}{T} \left(\frac{d\Pi}{dT} - \frac{\Pi}{T} \right). \text{ Учитывая (2.75), получаем}$$

$$\tau_{T_2} - \tau_{T_1} = \tau_T = T \frac{d\alpha}{dT}. \quad (2.77)$$

Обычно проводится экспериментальное измерение дифференциальной термо-эдс α , а сложно измеряемые коэффициенты Π и τ_T определяются на основе соотношений Томсона.

В первом приближении эффект Томсона можно объяснить следующим образом (рис. 2.4). Если вдоль проводника, по которому протекает электрический ток, существует перепад температур, причем направление тока соответствует движению электронов от горячего конца к холодному, то, переходя из более горячего участка, электроны передают избыточную энергию окружающим атомам, что вызывает нагрев проводника (выделение тепла); при обратном направлении тока электроны, проходя из более холодного участка, пополняют свою энергию за счет окружающих атомов решетки (поглощение тепла). Для более точного описания явления следует учесть, что в первом случае электроны тормозятся полем термо-эдс, а во втором – ускоряются, что изменяет значение коэффициента Томсона, а в некоторых случаях приводит даже к перемене знака.

Причина возникновения явления Пельтье заключается в том, что средняя энергия электронов, участвующих в переносе тока в двух материалах, находящихся в контакте, различна, несмотря на то, что уровни их электрохимических потенциалов совпадают, т.к. различно среднее отступление от уровня электрохимического потенциала.

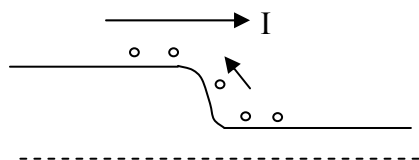


Рис. 2.4а. Энергия поглощается

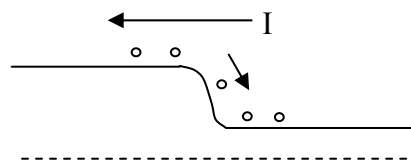


Рис. 2.4б. энергия выделяется

2.5. Теплопроводность полупроводников

Если в веществе создан градиент температуры ∇T , то в нем возникает поток энергии W в направлении, противоположном ∇T :

$$W = -\kappa \nabla T, \quad (2.78)$$

где $\kappa = \frac{|W|}{|\nabla T|}$ носит название коэффициента теплопроводности, и численно

равен количеству энергии, проходящей в единицу времени через поперечное единичное сечение в образце, на концах которого создана разность температур в один градус. В системе СИ он измеряется в $\frac{вт}{м \cdot град}$.

Благодаря теплопроводности происходит передача энергии от «нагревателя» к «холодильнику». В системе, в которой отсутствует источник тепла и поглотитель, но был создан градиент температуры, теплопроводность приводит к выравниванию температуры, т.е. приводит к установлению теплового равновесия.

Передача тепла осуществляется двумя различными механизмами.

Теплопроводность, обусловленная движением носителей заряда, называется электронной или дырочной. Коэффициент теплопроводности при этом – α_e .

Второй механизм связан с тепловыми колебаниями решетки. Атомы (или ионы) решетки, совершая колебания относительно положения равновесия, обмениваются энергией. Если в веществе создан градиент температуры, то обмен энергией происходит таким образом, что энергия в большей степени передаётся от атома, совершающего большие колебания, к атому, совершающему меньшие колебания, т.е. в сторону меньших температур.

Теплопроводность, обусловленная колебаниями решетки, называется решеточной, или фононной теплопроводностью; она характеризуется величиной α_L .

Полная теплопроводность тем самым характеризуется величиной α :

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_L . \quad (2.79)$$

Величина α_L связана с упругими свойствами твердых тел, α_e – с концентрацией носителей заряда. В диэлектриках $\alpha_L \gg \alpha_e$. В металлах, возможно, $\alpha_L \ll \alpha_e$. В полупроводниках α_e в очень сильной степени зависит от их состава и температуры.

Мы ограничимся рассмотрением только теплопроводности, обусловленной носителями заряда.

Запишем уравнение для плотности тока и плотности потока энергии в предположении, что магнитное поле отсутствует ($\vec{B} = 0$). Эти уравнения можно получить из (2.67) и (2.68).

Для упрощения записи используем кинетические коэффициенты. В качестве кинетических коэффициентов используем выражение

$$K_{rS}^{\prime ij} = -\frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} \frac{E^{r-1} \tau^S}{1 + \frac{e^2 \tau^2}{|m^*|} (B, m^* B)} \frac{\partial f_0}{\partial E} v_i v_j d\tau_{\vec{k}} . \quad (2.80)$$

В общем случае кинетические коэффициенты $K_{rS}^{\prime ij}$ являются тензорами второго ранга, эффективная масса \bar{m}^* также тензор. Решение кинетического уравнения Больцмана в этом случае очень сложно. Однако, если эффективная масса является скалярной величиной, а изоэнергетические поверхности в \vec{k} -пространстве – сферы, то кинетические коэффициенты $K_{rS}^{\prime ij} = K'_{rS}$ являются скалярными величинами. Для невырожденного полупроводника функция

Ферми – Дирака переходит в функцию Больцмана, для которой $\frac{\partial f_0}{\partial E} = -\frac{f_0}{k_0 T}$.

Это позволяет выразить кинетические коэффициенты в виде

$$K'_{rS} = \frac{n}{m^*} \left\langle \frac{E^r \tau^S}{1 + \mu^2 B^2} \right\rangle.$$

И наконец, когда время релаксации является степенной функцией энергии

$$\tau(E) = \tau_0 E^p = \frac{\tau_0}{(k_0 T)^p} \alpha^p = \tau'_0 \alpha^p, \quad (2.81)$$

где τ_0, τ'_0 - некоторые константы, вид которых определяется конкретным механизмом рассеяния носителей заряда, то кинетические коэффициенты при $B \approx 0$ (в случае слабого поля) сводятся к гамма – функции Эйлера

$$K'_{rS} = \left\langle E^r \tau^S \right\rangle \frac{n}{m^*} = (k_0 T)^{r-1} \tau'^S_0 \frac{\Gamma(Sp + r + 3/2)}{\Gamma(5/2)} \frac{n}{m^*}. \quad (2.82)$$

Таким образом, мы рассмотрим атомарные невырожденные полупроводники со скалярной эффективной массой m^* и со сферическими изоэнергетическими поверхностями.

Уравнение для плотности тока:

$$\vec{j} = \left(e\vec{\Sigma} - T\nabla \frac{F}{T} \right) eK_{11} - eK_{21} \frac{\nabla T}{T}. \quad (2.83)$$

Направленный поток частиц создает не только электрический ток, но и приводит к переносу энергии, т.к. каждая частица несет энергию E , вследствие чего плотность потока энергии \vec{W} , т.е. количество энергии, проходящей в единицу времени через нормальное единичное сечение, определяется выражением

$$\vec{W} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{V_B} E \vec{V} f_1(\vec{r}, \vec{k}) d\tau_{\vec{k}}. \quad (2.84)$$

Используя выражение для $f_1(\vec{r}, \vec{k}) = -\frac{\partial f_0}{\partial E} [\chi(\vec{r}, \vec{k}) \vec{V}]$ и $\chi(\vec{r}, \vec{k})$ в отсутствие поля ($\vec{B} = 0$), можно получить для потока энергии аналогично уравнению для тока (см. эффект Холла) следующее выражение:

$$\vec{W} = \left(e\vec{\Sigma} - T\nabla \frac{F}{T} \right) K_{21} - K_{31} \frac{\nabla T}{T}. \quad (2.85)$$

Это уравнение аналогично уравнению для тока, только первый индекс у кинетического коэффициента на единицу больше, а показатель у заряда на единицу меньше.

Найдем выражение для коэффициента теплопроводности α_e , который определяется условием:

$$\vec{W} = -\alpha_e \nabla T \quad (2.86)$$

в предположении, что

$$\vec{j} = 0. \quad (2.87)$$

Из условия (2.87) и выражения для тока определим величину $\left(e\vec{\Sigma} - T\nabla\frac{F}{T} \right)$, значение которой подставим в (2.85). $\left(e\vec{\Sigma} - T\nabla\frac{F}{T} \right) = \frac{K_{21}}{K_{11}T} \nabla T$.

$$\vec{W} = \frac{K_{21}^2}{K_{11}T} \nabla T - K_{31} \frac{\nabla T}{T} = -\frac{K_{31}K_{11} - K_{21}^2}{K_{11}T} \nabla T \quad (2.88)$$

или

$$\alpha_e = \frac{K_{31}K_{11} - K_{21}^2}{K_{11}T} = \frac{n}{m^*} \frac{\langle E^3 \tau \rangle \langle E \tau \rangle - \langle E^2 \tau \rangle^2}{\langle E \tau \rangle T}. \quad (2.89)$$

Для невырожденного полупроводника, в случае, если время релаксации τ является степенной функцией энергии, согласно (2.82), получим

$$\alpha_e = \frac{n}{m^*} \frac{k_0^2 T \tau'_0}{1} \frac{\left\{ \frac{\Gamma(9/2+p) \cdot \Gamma(5/2+p)}{\Gamma(5/2)\Gamma(5/2)} - \frac{\Gamma^2(7/2+p)}{\Gamma^2(5/2)} \right\}}{\frac{\Gamma(5/2+p)}{\Gamma(5/2)}}. \quad (2.90)$$

В это выражение входит неизвестная постоянная величина τ'_0 . Её можно исключить, если рассмотреть отношение α_e и σ . Для σ , используя кинетический коэффициент (2.83), получается выражение $\sigma = e^2 K_{11}$. Если рассмотреть отношение $\alpha_e / \sigma T = L$, то оно не зависит от τ'_0 и называется числом Лоренца:

$$L = \alpha_e / \sigma T = \frac{K_{31}K_{11} - K_{21}^2}{e^2 K_{11}^2 T^2}. \quad (2.91)$$

Для невырожденного полупроводника, согласно (2.90), получим для числа Лоренца

$$L = \frac{K_{31}K_{11} - K_{21}^2}{e^2 K_{11}^2 T^2} = \frac{k_0^2}{e^2} (5/2 + p). \quad (2.92)$$

Оно следует из простых вычислений:

$$\Gamma(9/2+p) = (7/2+p) \cdot \Gamma(7/2+p) = (7/2+p)(5/2+p)\Gamma(5/2+p)$$

$$\Gamma(7/2+p) = (5/2+p) \cdot \Gamma(5/2+p). \text{ Тогда}$$

$$\frac{\left\{ \frac{\Gamma(9/2+p) \cdot \Gamma(5/2+p)}{\Gamma^2(5/2)} - \frac{\Gamma^2(7/2+p)}{\Gamma^2(5/2)} \right\}}{\frac{\Gamma^2(5/2+p)}{\Gamma^2(5/2)}} =$$

$$= \frac{\left[(7/2 + p)(5/2 + p) - (5/2 + p)^2 \right] \Gamma^2(5/2 + p)}{\Gamma^2(5/2 + p)} =$$

$$= (5/2 + p)(7/2 + p - 5/2 - p) = (5/2 + p).$$

Мы видим, что число Лоренца зависит только от p , то есть от показателя степени, с которым энергия входит в выражение для $\tau(E)$ (2.81).

Если записать α_e через σ и L , то получим закон Видемана – Франца (2.93)

$$\alpha_e / \sigma T = LT = \frac{k_0^2 T}{e^2} (5/2 + p).$$

Или

$$\alpha_e = \sigma LT = \frac{k_0^2}{e^2} (5/2 + p) \sigma T. \quad (2.93a)$$

Для вырожденного полупроводника число Лоренца

$$L = \alpha_e / \sigma T = \frac{\pi^3 k_0^2}{3 e^2} \quad (2.93b)$$

получается только с учетом последующих членов разложения f_0 по E , то есть во втором приближении.

Путем более трудоемких расчетов можно получить выражение числа Лоренца для полупроводника с носителями заряда двух типов при условии $\sigma_n = \sigma_p$.

$$L = \frac{k_0^2}{e^2} (5/2 + p) \left[(7/2 + p) + \frac{\Delta E_0}{2k_0 T} \right]. \quad (2.94)$$

Если сравнить (2.92) и (2.94), то увидим, что в случае носителей заряда двух типов коэффициент Лоренца, а следовательно, и теплопроводность возрастает в $\left[(7/2 + p) + \frac{\Delta E_0}{2k_0 T} \right]$ раз по сравнению со случаем, когда имеются носители заряда одного знака. ΔE_0 - ширина запрещенной зоны.

Этот результат имеет наглядное физическое объяснение. При создании градиента температур возникает диффузионный ток носителей заряда. Но его возникновение приводит к разделению зарядов, и следовательно, к появлению электрического поля, которое препятствует движению носителей, приводящему к их разделению. Так как полный ток $\vec{j} = 0$, то потоки носителей вдоль и против ∇T должны быть равны, но так как носители заряда, идущие вдоль ∇T (к горячему концу) имеют меньшую энергию, чем носители заряда, идущие против ∇T (к холодному концу), то происходит перенос энергии от горячего к холодному концу без переноса заряда. Теплопроводность при этом оказывается сравнительно небольшой, и она не зависит от положения уровня Ферми, поскольку весь эффект основан на

разности энергий потоков носителей заряда, идущих от горячего и холодного концов образца. Это происходит в случае монополярной проводимости.

Если же в полупроводнике имеются носители заряда двух типов разного знака, то диффузионные потоки носителей приводят к возникновению электрических полей, направленных в противоположные стороны. Следовательно, суммарное электрическое поле будет небольшим, оно должно удовлетворять условию $\vec{j} = 0$, но одинаково направленные потоки носителей заряда разного знака дают токи, противоположно направленные. Поскольку электрическое поле мало, оно не препятствует движению носителей заряда, поэтому поток частиц будет большим. При этом он обусловлен градиентом концентрации, однако выравнивание концентраций не произойдет, поскольку в области горячего конца происходит непрерывное преимущественное рождение пары носителей заряда, а в области холодного конца рекомбинация носителей преобладает над их генерацией. Но при каждой рекомбинации пары носителей выделяется энергия ΔE_0 , затраченная на их генерацию на горячем конце. Другими словами, каждая пара носителей заряда переносит дополнительную энергию ΔE_0 , что и приводит к резкому возрастанию числа Лоренца, и следовательно, коэффициента теплопроводности.

2.6. Термомагнитные эффекты

Явления, которые наблюдаются в полупроводниках, в которых создан градиент температуры, в отсутствие электрического поля, при наложении на полупроводник магнитного поля, называются термомагнитными явлениями. Физической основой их возникновения является взаимодействие носителей заряда с магнитным полем, или, другими словами, линейная зависимость силы Лоренца от скорости носителей заряда.

К числу термомагнитных явлений относятся:

- 1) Эффект Риги – Ледюка – возникновение поперечного градиента температуры (тепловой аналог эффекта Холла);
- 2) Эффект Маджи – Риги – Ледюка – изменение теплопроводности в направлении градиента температуры, т.е. возникновение продольного градиента температуры;
- 3) Поперечный эффект Нернста – Эттингсгаузена – возникновение поперечного электрического поля;
- 4) Продольный эффект Нернста – Эттингсгаузена – изменение термоэдс или возникновение продольного электрического поля.

Поперечными называются эффекты (разности потенциалов ΔV или разности температур ΔT), возникающие в направлении, перпендикулярном первичному потоку тепла W , и продольными — эффекты, возникающие в направлении, параллельном первичному потоку тепла. В продольном магнитном поле, т.е. в поле, параллельном потоку тепла, термомагнитные эффекты в изотропных полупроводниках не возникают.

Под изотропными понимаем полупроводники, у которых эффективные массы m и времена релаксации τ носителей тока не зависят от направления и выражаются скалярами, а не тензорами.

Поперечные эффекты являются нечетными, т.е. их знак зависит от направления магнитного поля, продольные эффекты – четные, их знак не зависит от направления магнитного поля.

Продольный и поперечный эффект Нернста – Эттингсгаузена были обнаружены Нернстом и Эттингсгаузенем на пластинке висмута в 1886 г., а эффекты 1) и 2) - Риги и Ледюком независимо друг от друга в 1887 г. также на висмуте.

Все перечисленные эффекты могут быть математически описаны с помощью следующих формул.

Поперечный эффект Нернста – Эттингсгаузена

$$\Sigma_y = \frac{\Delta V}{a} = Q^\perp H_z \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2.95)$$

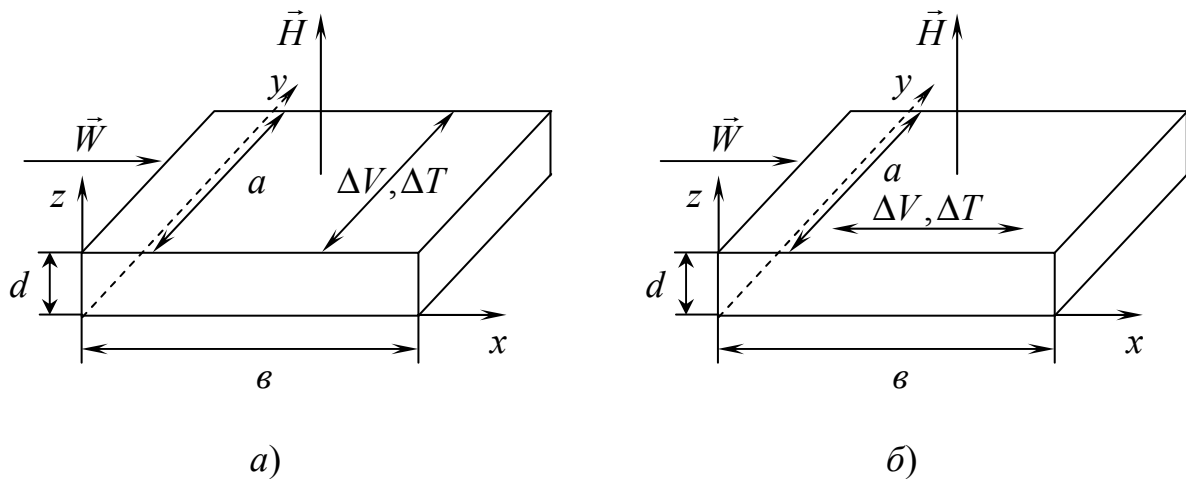


Рис. 2.5. а) Поперечные эффекты:

Нернста – Эттингсгаузена - ΔV ; Риги – Ледюка - ΔT .

б) Продольные эффекты:

Нернста – Эттингсгаузена - ΔV ; Маджи - Риги – Ледюка - ΔT .

W - тепловой поток; H - магнитное поле.

Эффект Риги – Ледюка:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\Delta T}{a} = S H_z \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2.96)$$

Продольный эффект Нернста – Эттингсгаузена, т.е. изменение термоэдс в магнитном поле:

$$\Sigma_x(H) - \Sigma_x(0) = \Sigma_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = [\alpha(H) - \alpha(0)] \frac{\partial T}{\partial x} = Q^\parallel \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2.97)$$

Эффект Маджи – Риги – Ледюка – (изменение теплопроводности в магнитном поле):

$$\Lambda = \frac{\lambda_0 - \lambda_H}{\lambda_0}. \quad (2.98)$$

Здесь (также см. рис.2.5) Σ_x, Σ_y - составляющие электрического поля, возникающего в присутствии магнитного поля, вдоль осей x, y ; $\Sigma_x(H)$ и $\Sigma_x(0)$ - электрические поля вдоль оси x при наличии и отсутствии магнитного поля соответственно; Q^\perp и Q^\parallel - коэффициенты поперечного и продольного эффектов; $\alpha(H)$ и $\alpha(0)$ - коэффициенты термоэдс при $H \neq 0$ и $H = 0$; S - коэффициент эффекта Риги – Ледюка, λ_0 и λ_H - величины теплопроводности в отсутствии и наличии магнитного поля соответственно ($\lambda = -\frac{W}{\frac{\partial T}{\partial x}}$); Λ – коэффициент эффекта Маджи – Риги – Ледюка, характеризующий относительное изменение теплопроводности в магнитном поле; $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}$ - градиенты температуры в направлении осей x, y .

Эффект Риги – Ледюка можно трактовать как поворот теплового потока по отношению к градиенту температуры (по аналогии с эффектом Холла, который мы рассматривали как поворот электрического тока по отношению к первоначальному полю), причем угол поворота θ , если он мал, определится, как следует из (2.96), формулой

$$\theta = \frac{\frac{\partial T}{\partial y}}{\frac{\partial T}{\partial x}} = SH_z. \quad (2.99)$$

Поперечный эффект считается положительным, если при наличии положительного градиента температуры в направлении оси x и магнитного поля в направлении оси z возникает электрическое поле (Σ_y) или градиент температуры $\frac{\partial T}{\partial y}$ в направлении оси y (правая система координат). Эффект Риги – Ледюка положителен для дырочного полупроводника, и отрицателен для электронного. Знак поперечного эффекта Нернста – Эттингсгаузена не зависит от знака носителей тока.

Продольный эффект Нернста – Эттингсгаузена считается положительным, если термоэлектрическое поле $\Sigma_x(0)$ в магнитном поле

возрастает по абсолютной величине, т.е. $|\Sigma_x(H)| - |\Sigma_x(0)| > 0$ и отрицательным при обратном условии $|\Sigma_x(H)| - |\Sigma_x(0)| < 0$.

Знак эффекта Маджи - Риги – Ледюка определяется непосредственно из формулы (2.98).

Следует отметить, что нужно различать изотермические и адиабатические эффекты.

Изотермическими называются эффекты, которые измеряются в условиях, когда отсутствуют поперечные, в направлении осей y, z , градиенты температуры.

Адиабатическими называются эффекты, при измерении которых отсутствуют поперечные потоки тепла. Т.о. эффект Риги – Ледюка является по определению только адиабатическим, остальные эффекты могут быть как изотермическими $\left(\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0\right)$, так и адиабатическими $(W_y = W_z = 0)$.

Вычисление термомагнитных коэффициентов, которые феноменологически определяются уравнениями (2.95 – 2.98), можно провести на основании кинетического уравнения Больцмана.

2.7. Гальваномагнитные эффекты

Гальваномагнитные эффекты наблюдаются в веществе при совместном действии электрического и магнитного полей.

К гальваномагнитным явлениям относятся:

1) эффект Холла; 2) магнитнорезистивный эффект; 3) эффект Эттингсгаузена или поперечный гальванотермомагнитный момент; 4) эффект Нернста, или продольный гальванотермомагнитный эффект.

Названия «поперечный» или «продольный» отражают направления градиентов температуры относительно тока, по отношению к магнитному полю они могут быть поперечными или продольными.

Из этих явлений мы подробно рассмотрели эффект Холла. Аналогично могут быть описаны и другие гальваномагнитные явления.

Качественное описание гальваномагнитных явлений заложено в рассмотрении движения заряженной частицы в электрическом и магнитном полях под действием силы Лоренца:

$$\vec{F} = e\vec{\Sigma} + e[\vec{V} \times \vec{B}].$$

В параллельных электрическом и магнитном полях частица движется по винтовой линии с непрерывно возрастающим шагом.

В поперечных (или скрещенных полях) $\vec{\Sigma}$ и \vec{B} частица, не имеющая начальной скорости, движется по циклоиде: частица вращается по окружности радиуса

$r = \frac{m^* \Sigma}{eB^2}$, центр которой движется равномерно в направлении, перпендикулярном электрическому и магнитному полям со скоростью дрейфа $\vec{V}_d = \frac{[\Sigma \times \vec{B}]}{B^2}$.

При движении частиц в твердом теле необходимо учесть соударения, которые нарушают направленное движение частиц.

После каждого соударения частица будет двигаться по винтовой линии или трахоиде, которые характеризуются новыми параметрами.

2) Магнетосопротивление или эффект Гаусса

Магнитное поле приводит не только к появлению угла между векторами \vec{j}, \vec{E} , но и влияет на величину электропроводности.

Без магнитного поля частица движется прямолинейно и между двумя столкновениями проходит путь, равный длине свободного пробега l .

Если включить магнитное поле, то траектория будет представлять собой в неограниченном образце участок циклоиды длиной l , и за время свободного пробега вдоль поля \vec{E} частица пройдет путь меньший, чем l , а именно

$$l_x \approx l \cos \varphi \approx l \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) = l \left(1 - \frac{\mu^2 B^2}{2} \right). \quad (2.100)$$

Поскольку за время τ частица проходит меньший путь вдоль поля \vec{E} , то это равносильно уменьшению дрейфовой скорости, или подвижности, а тем самым и проводимости, т.е. сопротивление должно возрастать.

$$\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0} = \frac{l_0 - l}{l_0} = \frac{\mu^2 B^2}{2} \text{ или} \quad \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{K \mu^2 B^2}{2}. \quad (2.101)$$

Если учесть статистический разброс времен (и длин) свободного пробега, то получим

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \mu^2 B^2. \quad (2.102)$$

Таким образом, сопротивление в магнитном поле возрастает. Диск Корбино.

3) Эффект Эттингсгаузена

Если в среднем действие силы Лоренца и поля Холла компенсируют друг друга, то вследствие разброса скоростей носителей отклонение «более горячих» и «более холодных» происходит по-разному – они отклоняются к противоположным граням полупроводника. Если они при этом отдают энергию, то полупроводник нагревается; если они отбирают энергию у решетки, то полупроводник охлаждается, в результате чего возникает

градиент температуры в направлении, перпендикулярном полю \vec{B} и току \vec{j} . Для характеристики эффекта Эттингсгаузена служит коэффициент Эттингсгаузена A^E :

$$\nabla T^E = -A^E [\vec{B} \times \vec{j}] = A^E [\vec{j} \times \vec{B}] \text{ или} \quad (2.102)$$

$$\frac{\partial T^E}{\partial z} = A^E B_y \cdot j_x; \quad A^E = \frac{\nabla_z T^E}{B_y \cdot j_x}$$

При изменении направления магнитного поля, (так же, как и тока) знак $\nabla_z T^E$ меняется, как и знак поля в эффекте Холла.

Эффекты Холла и Эттингсгаузена, зависящие от направления \vec{B} , называются нечетными.

4) Эффект Нернста, или продольный гальванотермомагнитный эффект

Этот эффект состоит в том, что вдоль тока \vec{j} возникает градиент температур, который не зависит от направления магнитного поля, но меняет знак при изменении направления тока. Эффект возникает в результате того, что в направлении тока уменьшается поток «горячих» и «холодных» электронов. Эффекты Гаусса и Нернста являются четными.

Гальваномагнитные явления делятся на адиабатические и изотермические. Явления называются адиабатическими, если образец не обменивается энергией с окружающей средой, и изотермическими, если в результате обмена энергией с окружающей средой в направлении, перпендикулярном полю \vec{B} и току \vec{j} , не возникает градиента температур.

Эффект Эттингсгаузена может быть только адиабатическим, остальные могут быть как адиабатическими, так и изотермическими.

Знак эффектов Эттингсгаузена и Нернста зависит от механизма рассеяния, так как $\varphi = \omega_c \tau = \omega_c \tau_0 E^p$ и при малых φ

$$\frac{\Delta l}{l} \approx \frac{\varphi^2}{2} = \frac{\omega_c^2 \tau_0^2}{2} E^{2p}, \text{ поэтому} \quad (2.103)$$

$$\frac{d}{dE} \left(\frac{\Delta l}{l} \right) = 2p \omega_c^2 \cdot \tau_0^2 \cdot E^{2p-1}.$$

При $p = 0$ относительное изменение длины свободного пробега не зависит от энергии, следовательно, разброс в скоростях не должен сказываться на составе тока при наложении магнитного поля, поэтому эффекты Эттингсгаузена и Нернста должны отсутствовать.

Если $p > 1/2$, то относительно уменьшается роль «горячих» электронов, и полупроводник должен охлаждаться вдоль направления движения носителей заряда: $\nabla_x T$ совпадает с током j_x в электронном полупроводнике и противоположен по знаку в дырочном полупроводнике. При $p < 0$

увеличивается доля «горячих» электронов в составе тока, и знак градиента температуры изменится по сравнению с предыдущим случаем.

2.8. Полупроводники в сильном электрическом поле

При выводе кинетического уравнения Больцмана мы предполагали, что время релаксации τ не зависит от величины поля. Используя кинетическое уравнение для невырожденного полупроводника со сферическими изоэнергетическими поверхностями, мы показали, что плотность тока подчиняется закону Ома, т.е. пропорциональна напряженности электрического поля $\vec{\Sigma}$:

$$\vec{j} = en\vec{V}_d = en\mu_0\vec{\Sigma} = \sigma_0\vec{\Sigma}. \quad (2.104)$$

Это значит, что величина σ оставалась постоянной при воздействии электрического поля на кристалл, т.е. поле не изменяло ни концентрацию, ни подвижность носителей заряда. В сильных электрических полях имеет место нарушение закона Ома. Во-первых, в сильном электрическом поле скорость дрейфа носителей становится соизмеримой с тепловой скоростью. Это скажется на процессе рассеяния, что проявится в изменении времени релаксации τ , а следовательно, и подвижности μ . Во-вторых, сильные электрические поля могут вызвать изменение концентрации носителей. Рассмотрим эти причины отдельно.

Подвижность можно записать в виде:

$$\mu = \frac{e}{m^*} \tau = \frac{e}{m^*} \frac{l}{V_T},$$

где V_T - тепловая скорость носителя заряда.

Поле увеличивает тепловую скорость в своем направлении на величину ΔV . Пока добавка ΔV мала по сравнению с V_T , электрическое поле можно считать слабым. $\Delta V \ll V_T$. Добавку к тепловой скорости ΔV можно оценить, исходя из закона сохранения энергии

$$\frac{m^*}{2} \left[(\bar{V}_T + \Delta \bar{V})^2 - V_T^2 \right] = e\Sigma l. \quad (2.105)$$

l - длина свободного пробега носителя заряда. Т.к. $\Delta \bar{V} \cdot \bar{V}_T = 0$ (поскольку \bar{V}_T - направлена беспорядочно, а ΔV - по полю), то

$$\frac{m^*}{2} \Delta \bar{V}^2 = e\Sigma l. \quad (2.106)$$

Таким образом, критерий слабых электрических полей будет иметь вид:

$$e\Sigma l \ll \frac{3}{2} k_0 T. \quad (2.107)$$

Полагая $T = 300\text{K}$, $V_T \approx 10^7 \text{ m/c}$, $\bar{\tau} \approx 10^{-13} \text{ c}$, $l \approx V_T \cdot \tau = 10^{-6} \text{ cm}$ и $\Sigma_{kp} = 10^4 \text{ B/cm}$.

Обычно считают, что если относительное изменение скорости носителя $\Delta V/V_T$ составляет 10%, то поле, вызывающее такое изменение скорости носителей называют критическим и обозначают Σ_k .

Проанализируем влияние сильного поля на подвижность при различных механизмах рассеяния.

Зависимость подвижности от температуры и энергии может быть представлена в виде:

$$\mu = \frac{e}{m^*} \tau = \frac{e}{m^*} \tau_0(T) \left(\frac{1}{k_0 T} \right)^{r-1/2} \cdot E^{r-1/2}, \quad (2.108)$$

где r - фактор рассеяния, равный нулю при рассеянии на акустических фононах и равный двум при рассеянии на ионах примеси.

Подставляя в полученное выражение вместо $E = \frac{m^* V_T^2}{2}$, получим для рассеяния на фононах:

$$\mu_L \sim \tau \sim E^{-1/2} \sim V_T^{-1}; \quad (2.109)$$

при рассеянии на ионах:

$$\tau_i \sim V_T^3. \quad (2.110)$$

Сильное поле, увеличивая скорость носителей, по-разному будет влиять на время релаксации τ . В первом случае оно уменьшает τ , а во втором – увеличивает.

Если имеет место смешанный механизм рассеяния, то суммарная подвижность приближенно определяется соотношением

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_L}, \quad (2.111)$$

где μ_i - подвижность при рассеянии на ионах; μ_L - подвижность при рассеянии на фононах.

Из рис. 2.6 и рис. 2.7 видно, что увеличение напряженности электрического поля эквивалентно росту температуры. Поэтому для описания влияния сильного поля на поведения носителей заряда часто вводят понятие электронной температуры электронного газа.

По определению T_e вычисляют из соотношения $\frac{1}{2} m V^2 = \frac{3}{2} k_0 T_e$.

Если температура кристалла при этом T , то $\frac{1}{2} m V^2 \gg \frac{3}{2} k_0 T$ или $T_e > T$.

Носители заряда в этом случае не находятся в тепловом равновесии с решеткой. Такие носители заряда называются «горячими».

Следует отметить, что критические поля в неоднородных полупроводниках могут появляться при очень малых разностях потенциалов.

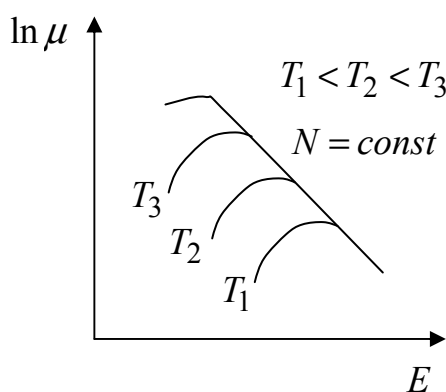


Рис. 2.6. Зависимость подвижности от напряженности электрического поля в области сильных полей при различных температурах, где N -концентрация ионов

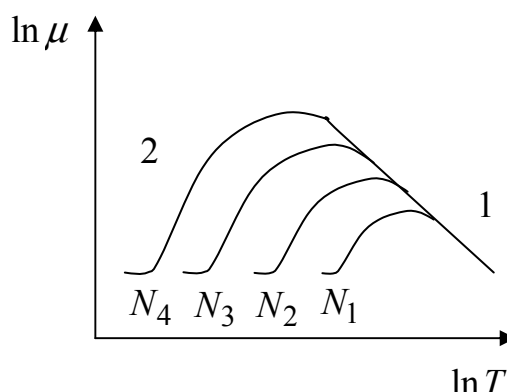


Рис. 2.7. Температурная зависимость подвижности от температуры для различного количества ионов примеси: 1-область высоких температур (рассеяние на акустических колебаниях, $\mu \sim T^{-3/2}$; 2 – область низких температур, рассеяние на ионах примеси

Например, в кристалле с $p-n$ переходом, на который падает практически все приложенное к образцу напряжение, т.к. сопротивление $p-n$ перехода много больше сопротивления толщи полупроводника. Толщина $p-n$ перехода d меняется в различных приборах от 10^{-3} до 10^{-7} см.

При $d = 10^{-7}$ см и разности потенциалов 1В поле достигает весьма значительных значений: $\Sigma = \frac{V}{d} = \frac{1}{10^{-7}} = 10^7$ В/см.

Поэтому в тех случаях, когда эффекты, связанные с сильным полем, нежелательны, $p-n$ переход должен быть достаточно толстым. Это относится к силовым выпрямительным диодам: одним из условий, необходимых для того, чтобы они выдерживали большое обратное напряжение (порядка 10^3 В/см), является достаточная толщина $p-n$ перехода ($d = 10^{-3}$ см). В приборах, принцип действия которых основан на явлениях в сильных полях (туннельных диодах, лавинных диодах и т. п.), $p-n$ переход должен быть тонким.

Аналогичный эффект имеет место в поликристаллических образцах. Сопротивление прослоек между зёрнами во много раз превышает сопротивление зёрен. Размеры зёрна $\sim 10^{-2} - 10^{-1}$ см, а толщина прослоек

$\sim 10^{-3} - 10^{-6} \text{ см}$. Следовательно, и в этом случае поле в прослойках может быть в $10 - 10^6$ раз больше, чем поле, приложенное к образцу. На этом эффекте основан ряд полупроводниковых приборов: нелинейные сопротивления из карбида кремния SiC и др. материалов, фоточувствительные пленки из PbS, PbSe и т.д.

На изменении подвижности в сильных электрических полях обусловлено появление эффекта Ганна.

В полупроводниках, зона проводимости которых имеет более одного минимума энергии, электрон с волновым вектором \vec{k} , соответствующим одному из минимумов, при рассеянии может оказаться в состоянии с волновым вектором \vec{k}' , принадлежащем другому минимуму. В результате такого рассеяния будет наблюдаться переброс электрона из минимума в минимум. Такой вид рассеяния носит название «междолинного».

Междолинное рассеяние носителей заряда может приводить к возникновению электрических колебаний в полупроводнике при приложении к нему постоянного напряжения достаточной величины. Это явление

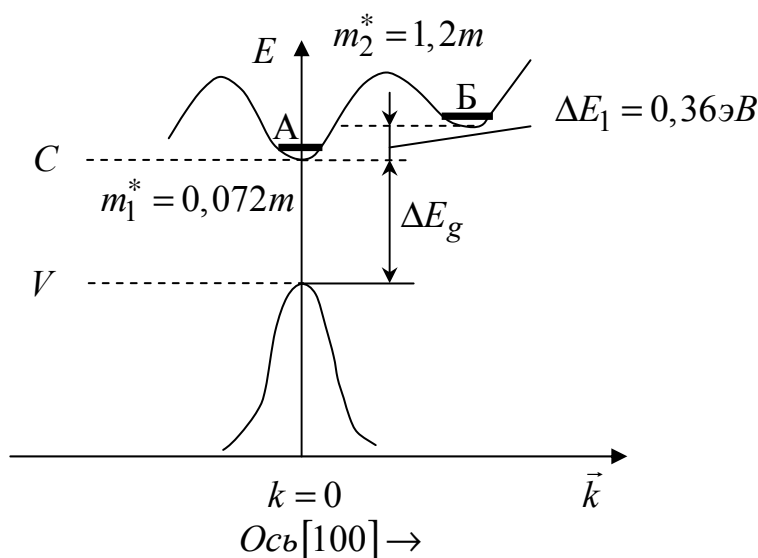


Рис. 2.8. Зависимость энергии электрона в зоне проводимости (C) GaAs от волнового вектора \vec{k} для направления $[100]$.

называется эффектом Ганна и впервые наблюдалось на GaAs. На рис. 2.8. изображена зависимость энергии электрона в зоне проводимости GaAs от волнового вектора \vec{k} для направления $[100]$.

Для GaAs существенным является наличие двух минимумов А и Б, разделенных зазором $\Delta E_1 = 0,36 \text{ эВ}$, в которых эффективные массы электронов различны: легкие с эффективной массой $m_1^* = 0,072 m$ и тяжелые электроны с

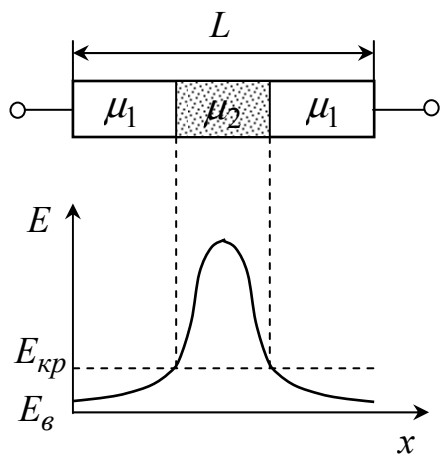


Рис. 2.9. Распределение электрического поля вдоль образца.

$m_2^* = 1,2m$. У легких электронов высокая подвижность ($\mu_1 > 5000 \text{B}/\text{cm}^2 \cdot \text{c}$), у тяжелых – низкая ($\mu_2 \approx 100 - 200 \text{B}/\text{cm}^2 \cdot \text{c}$).

В сильном электрическом поле электронный газ разогревается и “горячие” электроны могут перекачиваться во второй минимум, где они имеют бóльшую эффективную массу и низкую подвижность. Пусть к образцу длиной L приложено внешнее напряжение (рис. 2.9.). В однородном полупроводнике электрическое поле примерно одинаково по всей длине образца. Но если в образце имеется некоторая неоднородность с повышенным сопротивлением (заштрихованная область), то напряженность поля в этом месте образца

будет выше. Следовательно, $E_{кр}$, при котором будет наблюдаться переброс электронов в более высокий минимум, возникнет именно в этом сечении образца. В этой области происходит возрастание концентрации свободных электронов и распределение поля становится резко неоднородным (см. рис. 2.9).

Слой объемного заряда с повышенной концентрацией тяжелых электронов носит название электрического домена.

Подойдя к аноду, домен исчезнет. При образовании домена ток в цепи уменьшается, при исчезновении – возрастает. В кристалле возникнут колебания тока – токовая неустойчивость. Установлено, что скорость перемещения домена равна дрейфовой скорости электронов $V_{др} = V(\Sigma)$, а частота колебаний

$$f = \frac{1}{\tau_d} = \frac{V_{др}}{L}. \quad (2.112)$$

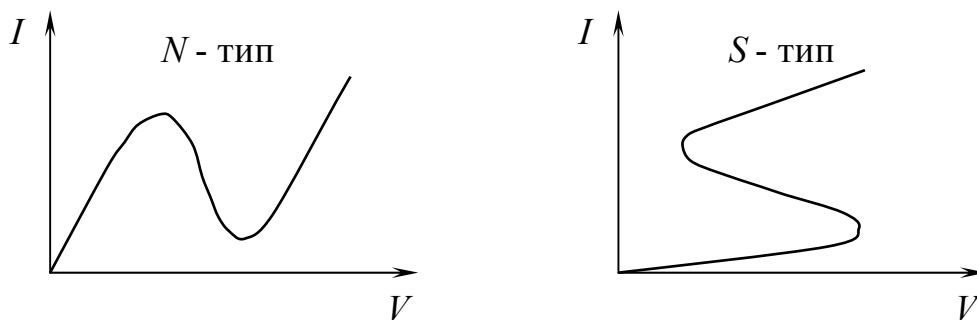


Рис. 2.10. Колебания тока.

В опытах Ганна $L = 200$ мкм, подвижность электронов $\mu = 5 \cdot 10^3$ см²/В·с, поле $E = 3 \cdot 10^3$ В/см. Наблюдались колебания тока с частотой $f = 0,5 \cdot 10^9$ Гц, что соответствует (2.112).

Возникновение колебаний возможно в образцах с ВАХ N- и S- типов (см. рис. 2.10).

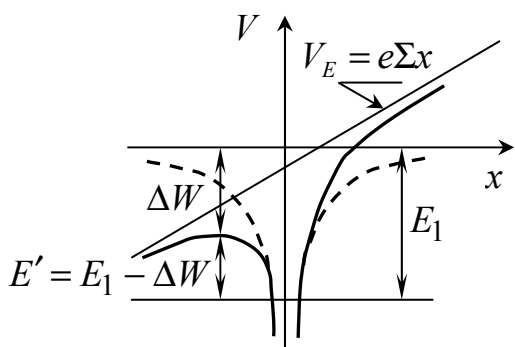
Помимо изменения подвижности в сильном электрическом поле могут проявляться несколько механизмов увеличения концентрации носителей.

Таковыми механизмами являются: термоэлектронная ионизация (эффект Френкеля), электростатическая ионизация (туннельный эффект) и ударная ионизация (лавинный пробой).

Термоэлектрическая ионизация (эффект Френкеля)

Сильное электрическое поле, приложенное к кристаллу, изменяет вид потенциальных барьеров между атомами кристаллической решетки.

Выберем в кристалле направление x , вдоль которого приложено поле Σ . Если поле отсутствует, то в кристалле между атомами действует периодическое поле (пунктирная линия). Если приложено поле Σ , то на периодический потенциал V наложится дополнительный потенциал $V_E = e\Sigma x$. Как видно из рис. 2.11, влияние сильного поля проявляется в уменьшении потенциального барьера на величину ΔW . Если рассматриваемый барьер относится к примесному атому, то концентрация носителей, переходящих за счет ионизации в зону проводимости,



будет равна $n = Ae^{\frac{E_0 - \Delta W}{2k_0T}}$, где E_0 - энергия ионизации примесных атомов в отсутствие поля, A - слабо зависящая от температуры функция. Это выражение можно представить в виде: $n = n_0 e^{\frac{\Delta W}{2k_0T}}$, где n_0 - концентрация электронов в зоне проводимости в отсутствие поля.

Рис. 2.11. Влияние сильного поля на величину потенциального барьера ΔW .

В соответствии с рис.2.11 потенциал

$$V = -\frac{e^2}{\epsilon_{0T} \cdot x} - e\Sigma x. \quad (2.113)$$

В некоторой точке x_0 величина потенциала достигнет максимальной величины V_{\max} . В этой точке $\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0$, т.е. $\frac{e^2}{\epsilon_{0T} \cdot x_0^2} - e\Sigma = 0$, отсюда

$x_0 = \sqrt{\frac{e}{\epsilon_{0T} \cdot \Sigma}}$. Подставляя x_0 в выражение (2.113), находим

$$V(x_0) = \Delta W = -2e \sqrt{\frac{e \Sigma}{\epsilon_{0T}}}. \quad (2.114)$$

Отсюда

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{e}{k_0 T} \sqrt{\frac{e \Sigma}{\epsilon_{0T}}}\right). \quad (2.115)$$

Тогда для тока:

$$j = \sigma_0 E \exp\left(\frac{e}{k_0 T} \sqrt{\frac{e \Sigma}{\epsilon_{0T}}}\right), \quad (2.116)$$

где σ_0 - удельная электрическая проводимость полупроводников в слабом поле.

Эта зависимость показывает, что ток растет с увеличением поля пропорционально $e^{\sqrt{\Sigma}}$. Эффект наблюдается при полях $5 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^4 \text{ В/см}$ (с поправками к теории Френкеля).

Электростатическая ионизация (туннельный эффект)

Изменение потенциальной энергии атомов при приложении к образцу электрического поля приводит к наклону энергетических зон полупроводника, что дает возможность для межзонного туннелирования, а также туннелирования с примесных уровней, или на примесные уровни (рис. 2.12). Если поле направлено слева направо, то зоны наклоняются так, что левая часть оказывается ниже правой (полная энергия электрона изображается горизонтальными прямыми АС, А₁С₁). Для перехода из точки А, т.е. со дна зоны проводимости, в точку С, т.е. на потолок валентной зоны, и для обратного перехода из С в А электрону необходимо туннелировать через треугольный барьер высотой ВС и шириной АС. При этом полная энергия E остается неизменной. Вероятность туннелирования через барьер характеризуется коэффициентом прозрачности. Ввиду более высокой концентрации электронов в валентной зоне туннелирование происходит преимущественно из валентной зоны в зону проводимости. Вследствие этого возрастает концентрация электронов и дырок проводимости. Процесс такой генерации происходит в равновесии с процессом рекомбинации, если поле остается ниже, чем $E_{\text{проб}}$. При этом концентрация носителей заряда

оказывается повышенной. Ширину барьера $L = AC$ определяют из условия $e\Sigma L = \Delta E_0$, где ΔE_0 - высота барьера, равная ширине запрещенной зоны.

Прозрачность барьера, определенная по квантовой теории, дается формулой (2.118).

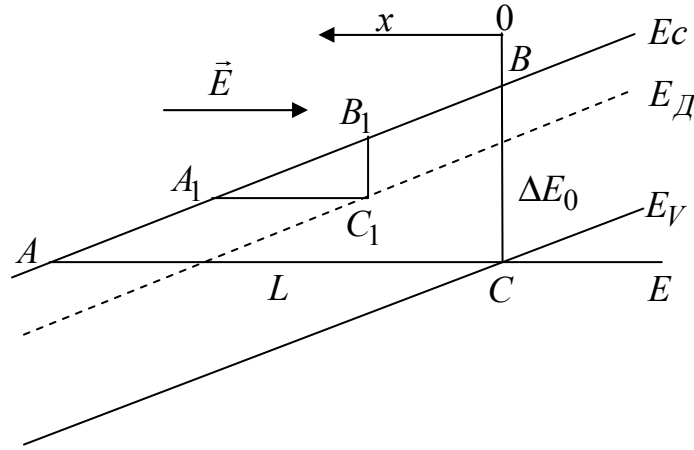


Рис. 2.12. Наклон энергетических зон полупроводника при приложении электрического поля.

$$D = e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m^*} \int_0^L \sqrt{U(x)-E} dx} \quad (2.118)$$

Таким образом, задача сводится к определению интеграла $\int_0^L \sqrt{U(x)-E} \cdot dx$ для треугольного барьера, изображенного на рис. 2.12. Высота барьера BC равна ΔE_0 , поэтому можно записать

$$U_0 - E = \Delta E_0 = e\Sigma L, \quad (2.119)$$

где U_0 - потенциальная энергия в точке C.

$L = \frac{U_0 - E}{e\Sigma}$. Зависимость $U(x)$ можно представить в виде:

$U(x) = U_0 - e\Sigma x$, следовательно

$$U(x) - E = U_0 - e\Sigma x - E = e\Sigma L - e\Sigma x = e\Sigma(L - x). \quad (2.120)$$

Тогда

$$\int_0^L \sqrt{U(x)-E} \cdot dx = \sqrt{e\Sigma} \int_0^L \sqrt{L-x} \cdot dx = \frac{2}{3} \sqrt{e\Sigma} L^{3/2} = \frac{2}{3} \frac{(\Delta E_0)^{3/2}}{e\Sigma}. \quad (2.121)$$

Коэффициент прозрачности барьера

$$D = e^{-\frac{4\sqrt{2m^*} (\Delta E_0)^{3/2}}{3e\hbar \Sigma}} \quad (2.122)$$

D зависит от величины ΔE_0 и Σ . Расчет показывает, что туннелирование в полупроводниках типа германия, кремния может наблюдаться при $\Sigma \approx 10^7 \text{ В/см}$.

Туннелирование с примесных уровней E_d в зону проводимости осуществляется при более слабых полях, т.к. ширина и высота барьера в этом случае значительно меньше, чем при туннелировании через запрещенную зону. Туннелирование возможно в высокоомных полупроводниках и диэлектриках, в которых можно создать поле высокой напряженности ($10^6 - 10^7 \text{ В/см}$).

Ударная ионизация

В сильном электрическом поле $E \approx 10^5 \text{ В/см}$ электрон (или дырка) приобретают энергию, достаточную для ионизации вещества, в результате чего возникают электронно-дырочные пары, которые в свою очередь ускоряются и генерируют дополнительные свободные носители заряда. Этот процесс называется ударной ионизацией. Наблюдать его можно в резко неоднородных полупроводниках, т.е. в области $p-n$ перехода или барьерных запирающих слоях, т.к. создать поля $10^5 - 10^6 \text{ В/см}$ в однородном полупроводнике весьма трудно.

Однако ударная ионизация примесных уровней требует значительно меньших полей и наблюдается при низких температурах, когда примеси не

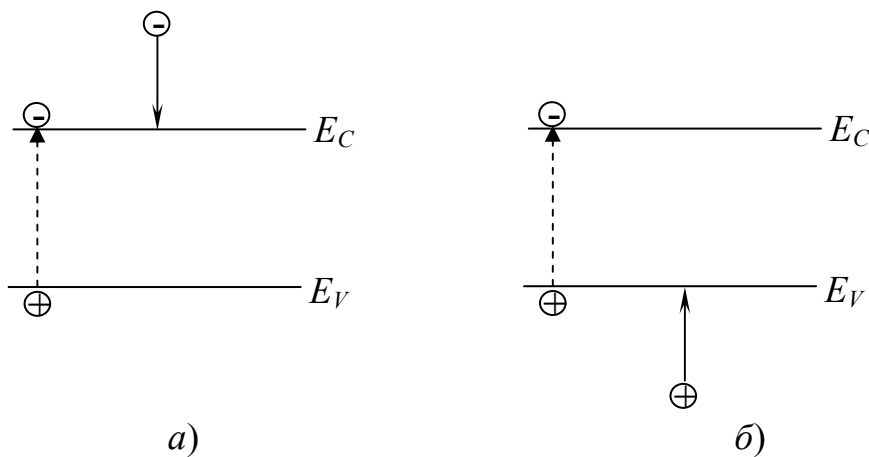


Рис. 2.13. Два варианта ударной ионизации.

ионизированы. Например, ударная ионизация примесей элементов третьей и пятой группы в Ge происходит при полях $E \approx 5 - 10 \text{ В/см}$.

Ударная ионизация характеризуется коэффициентом ударной ионизации $\alpha(E)$, который равен среднему числу ионизационных столкновений на единице длины

$$\alpha(E) = \frac{1}{V_d} \int_0^{\infty} W_u(E) \cdot f(E) \cdot N(E) \cdot dE, \quad (2.123)$$

где $W_u(E)$ - вероятность ионизации, рассчитываемая квантовомеханическим путем; $f(E)$ - функция распределения; $N(E)$ - плотность квантовых состояний; V_d - скорость дрейфа. Для полупроводников с большой диэлектрической проницаемостью вероятность ионизации (для Ge и Si) равна $W_u(E) \approx A(E - E_u)^2$, где A - коэффициент пропорциональности, а E_u - энергия ионизации. Пороговая энергия ионизации $E_u \approx 2\Delta E_0$, где ΔE_0 - ширина запрещенной зоны. Зависимость коэффициента ударной ионизации от поля в основном определяется видом функции распределения $f(E)$.

Ускорение электронов до порога ионизации E_u зависит от соотношения двух факторов - ускорения во внешнем электрическом поле и рассеяния энергии при столкновениях с фононами. Ускорение до порога ионизации E_u

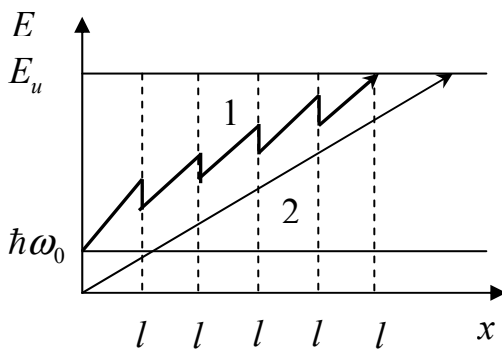


Рис. 2.14.

можно проиллюстрировать такой диаграммой (рис. 2.14). По вертикали отложена энергия, приобретаемая электроном, а по горизонтали - расстояние, проходимое им в среднем между двумя ионизирующими столкновениями. Существуют две возможности ускорения электронов до порога ионизации.

В первом случае в очень сильных электрических полях $E\Sigma$, при выполнении условия $e\Sigma l \gg \hbar\omega_0$, электроны могут набрать энергию, несмотря на столкновения с фононами, на одной или нескольких длинах пробега, т.к. относительная потеря энергии в каждом таком столкновении мала (линия 1). Это случай высоковольтной ударной ионизации. В этом случае расчет дает

$$\alpha(E) \sim e^{\frac{-E_u}{\Sigma^2 \epsilon \mu}}. \quad (2.124)$$

Во втором случае, когда поля слабые, $e\Sigma l < \hbar\omega_0$, носители набирают энергию на расстоянии, равном многим длинам свободного пробега (линия 2). При этом, чтобы достичь энергии E_u , носитель не должен сталкиваться на всем своем пути с фононами. Поскольку путь до порога ионизации $L_u = E_u / e\Sigma$, а средний свободный пробег между столкновениями с фононами - l , то вероятность пробега до порога ионизации без столкновений есть

$e^{-l} \sim e^{-\frac{E_u}{e\Sigma l}}$, т.е. функция распределения, а следовательно, и коэффициент ударной ионизации пропорциональны величине

$$\alpha(E) \sim e^{-\frac{E_u}{e\Sigma l}}. \quad (2.125)$$

Функция распределения будет сильно вытянута вдоль направления электрического поля, т.е. в направлении дрейфа носителей. Это низковольтная ударная ионизация.

Напряженность поля, при которой может возникать ударная ионизация, можно оценить по формуле

$$e \frac{M}{m} \Sigma_{кр} l = \Delta E_0. \quad (2.126)$$

M, m - массы иона и электрона (дырки) соответственно.

Эффект Франца – Келдыша

Сильное электрическое поле изменяет порог оптического поглощения. В отсутствие поля край собственного поглощения имеет четкий порог, определяемый простой формулой: $h\nu_0 = E_0$, где E_0 - ширина запрещенной зоны полупроводника.

Кванты с меньшей частотой не могут поглощаться. Сильное электрическое поле приводит к размытию края поглощения.

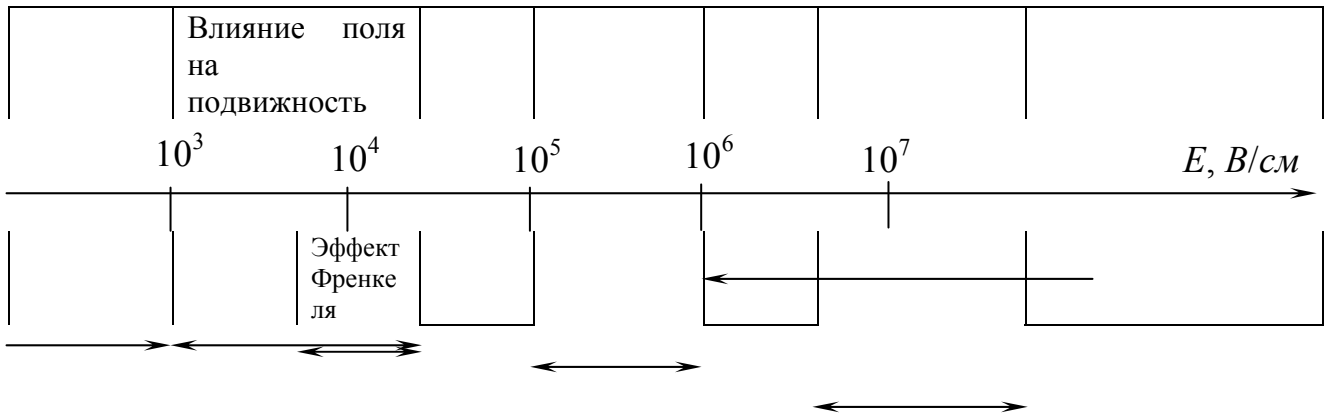
Изменение энергии электрона ΔE от поля $\vec{\Sigma}$ на длине Δx будет равно $\Delta E = e\Sigma \Delta x$. Согласно соотношению неопределенностей $\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$, тогда

$$\Delta E = e\Sigma \frac{\hbar}{\Delta p}. \text{ С другой стороны}$$

$$\Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m^*}, \text{ отсюда } (\Delta p)^3 = 2m^* e\Sigma \hbar \text{ и следовательно}$$

$$\Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m^*} = \left(\frac{e^2 \Sigma^2 \hbar^2}{2m^*} \right)^{1/3}. \quad (2.127)$$

Таким образом, при приложении к полупроводнику сильного электрического поля энергия края разрешенной зоны размывается на величину ΔE , в результате чего становится возможным поглощение квантов света, энергия которых меньше E_0 на ΔE .



Различные проявления действия сильного электрического поля на электропроводность полупроводников.

Выражения для обобщенной силы F_i в кинетическом уравнении Больцмана (уравнение (1.9))

| Внешнее воздействие | Обобщенная сила | Кинетический эффект |
|-------------------------|---|---------------------------------|
| $\vec{\Sigma}$ | $-e\vec{\Sigma}$ | Электропроводность |
| $\vec{\Sigma}, \vec{H}$ | $-e\left(\vec{\Sigma} + \frac{1}{c}[\vec{V} \times \vec{H}]\right)$ | Эффект Холла |
| ∇T | $-e\nabla\left(\varphi - \frac{F}{e}\right)$ | Термоэдс |
| ∇T | $-e\nabla\left(\varphi - \frac{F}{e}\right)$ | Теплопроводность |
| $\nabla T, \vec{H}$ | $-e\left\{\nabla\left(\varphi - \frac{F}{e}\right) + \frac{1}{c}[\vec{V} \times \vec{H}]\right\}$ | Эффект Нернста - Эттингсгаузена |

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аскеров Б.М. Электронные явления переноса в полупроводниках. М.: Наука. — 1985.
2. Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г. Физика полупроводников. М.: Наука. — 1977.
3. Фистуль В.И. Введение в физику полупроводников. М.: Высшая школа. — 1984.
4. Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников. Л.: Физматгиз. — 1962.
5. Киреев П.С. Физика полупроводников. М.: Энергия. — 1971.

Навчальне видання

**Методическое пособие к спецкурсу
«Кинетические явления в полупроводниках»
(російською мовою)**

Пастернак Валерій Олександрович

Видано в авторській редакції

Підп. до друку 02.10.2010. Формат 84x108/16.
Гарн. Таймс. Умов.-друк. арк.4,25. Тираж 40 прим.

Видавництво
Одеського національного університету
імені І.І. Мечникова,
65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39