МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЕКОНОМІКИ І МЕХАНІКИ

Г. О. Єфимова, О. О. Осадча

Методичні вказівки
по спецкурсу «Математичні моделі макроекономіки» та по курсу «Моделі економічної динаміки»

Одеса – 2013

УДК 330.115
ББК 65.050

Рекомендовано до друку Вченою Радою ІМЕМ ОНУ.
Протокол № 5 від 15 червня 2012 р.

Рецензенти:

Т. П. Яценко, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики та моделювання систем Одеського національного політехнічного університету;
Т. С. Зверкова, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри обчислювальної математики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Автори:

Г. О. Єфимова, к.ф.-м.н., доцент кафедри ОКЕК ІМЕМ
О. О. Осадча, аспірант кафедри ОКЕК

ISBN 978-617-689-028-7

Єфимова Г. О., Осадча О. О. Методичні вказівки по спецкурсу «Математичні моделі макроекономіки» та по курсу «Моделі економічної динаміки» — Одеса: Одеський націон. ун-т імені І. І. Мечникова — 2013. — 68 с.

ISBN 978-617-689-028-7

УДК 330.115
ББК 65.050

Вступ

Об'єктом досліджень є економічна система як ціле, наприклад, національна економіка. Основна увага приділяється методам побудови моделей і дослідженню задач стійкості економічної рівноваги. Після того, як деяка модель побудована, проводиться аналіз на наявність станів рівноваги, періодичних розв'язків і їх стійкості.

Так як тривалий час провідною галуззю економіки було сільське господарство, виробничий цикл якого складає один рік, то природно розглядати дискретні моделі з кроком дискретизації за часом, рівним одному року. Тому перші математичні моделі, що представлені тут, застосовують скінченно-різницеві рівняння. Це моделі кейнсіанського типу, які спираються на рівності планової пропозиції та прогнозованого попиту.

Далі розглядаються аналоги цих моделей з неперервним часом, в математичних моделях яких використовуються диференціальні рівняння першого і другого порядків, наводиться їх рішення і проводиться дослідження стійкості цих рішень.

Моделі розглядаються в порядку їх ускладнення і закінчуються неокласичною моделлю економічного зростання, для дослідження якої залучається апарат теорії оптимального керування.

Теоретичні відомості даються в стислій формі, так як основна увага приділена індивідуальним завданням, які повинні виконати студенти протягом семестру і отримати за їх виконання певну кількість балів. Таких завдань чотири.

Крім того, наводиться перелік тем для самостійного вивчення з посиланням на відповідну літературу.

Так як цей курс читається на старших курсах, то при його вивченні студентам необхідні знання з математичного аналізу, лінійної алгебри, методів оптимізації і диференціальних рівнянь. Поряд з цим для виконання завдань студенти повинні використовувати програмні засоби для побудови графіків і діаграм.

Тема 1. Основні макроекономічні поняття та тотожності

Сукупний попит (AD – *aggregate demand*) – це величина обсягу продукції, яку готові купити за кожного рівня цін (P) макроекономічні суб‘єкти. Структура сукупного попиту:

$$AD = C + I + G + NE,$$

де C – *споживчий попит*: платоспроможний попит домогосподарств на споживчі товари;

I – *інвестиційний попит*: попит підприємців на засоби виробництва для:

- відновлення зношеного капіталу (амортизація);
- збільшення реального капіталу.

G – *попит держави на товари та послуги*:

- для виробництва суспільних благ;
- для державних інвестицій.

NE – *попит закордону*.

Споживчий попит залежить від доходу, від участі у виробництві, податків та трансфертних платежів, доходу від майна, середньої та граничної схильності до споживання, ступеня диференціації населення за доходами, чисельності населення.

Середня схильність до споживання (*c – consumption*) – це частка споживання (C) у доході (Y):

$$c = \frac{C}{Y}, \quad c \in (0,1).$$

Гранична схильність до споживання c′ – це частка приросту споживання (ΔC) у додатковій одиниці доходу (ΔY):

$$c' = \frac{\Delta C}{\Delta Y}.$$

Зауваження. У кейнсіанської теорії припускається, що $0 < c' < c$.

Функція споживання: $C = C_0 + c'Y$. Автономне споживання C_0 не залежить від поточного доходу («споживчий кошик» відповідної групи населення: малозабезпечених, з середнім рівнем доходу, високозабезпечених).

Заощадження (S – *supply*) – це неспожита частина доходу. Кожній функції споживання відповідає своя функція заощадження:

$$S = -C_0 + (1 - c')Y,$$

$$1 - c' = s',$$

де s' – гранична схильність до заощадження.

У неокейнсіанському макроекономічному аналізі приймається така умова:

$$Y = C + S \Rightarrow 1 = {}^{C}\!/_{Y} + {}^{S}\!/_{Y} \Rightarrow 1 = c + s.$$

Тому разом із зростанням доходу зростає схильність до заощадження і зменшується схильність до споживання.

Інвестиції – економічні ресурси, що направляються на збільшення реального капіталу суспільства, тобто на розширення і модернізацію виробничого потенціалу.

У неокейнсіанської теорії приймається умова, що

$$dS = dI,$$

де dS – приріст заощаджень, dI – приріст інвестицій.

Інвестиційний попит залежить від обсягу виробництва, витрат на капітал (вони визначаються податковою політикою та процентною ставкою), кон‘юнктурних коливань економіки, сподівань на майбутнє.

Залежно від того, які фактори визначають обсяг попиту на інвестиції, вони поділяються на індуційовані та автономні.

Інвестиції називаються ***індуційованими***, якщо причиною їх здійснення є стійке зростання попиту на товари та послуги в результаті зростання національного доходу. Такі інвестиції є функцією від приросту національного доходу.

Коефіцієнт приріcтної капіталоємкості називається *акселератором* (b).

Акселератор – коефіцієнт, який показує скільки одиниць додаткового основного капіталу (K_0) необхідно для виробництва додаткової одиниці продукції (ΔY):

$$b = \frac{\Delta K_0}{\Delta Y} \Rightarrow \Delta K_0 = b\Delta Y .$$

Величину індуційованих інвестицій можна визначити за формулою

$$I_n^{інд} = b(Y_{n-1} - Y_{n-2}),$$

де $I_n^{інд}$ – індуційовані інвестиції в n-ому році; Y_{n-1} – національний дохід в ($n-1$)-му році; Y_{n-2} – національний дохід в ($n-2$)-му році.

Автономні інвестиції здійснюються при фіксованому національному доході, тобто при незмінному сукупному попиті на блага. Вони вкладаються в нову техніку, спричиняючи підвищення якості продукції і стають умовою зростання національного доходу.

Попит держави.

Державні видатки (G) при макроекономічному моделюванні розглядаються як екзогенна величина, яка визначається державним бюджетом країни. Частіше усього функція попиту держави на ринку благ є сталою величиною: $G = const$. Одним з елементів державних видатків є суспільні блага.

Суспільні блага – це товари та послуги суспільного використання (національна оборона, контроль за навколишнім середовищем, контроль за правопорядком т.і.). Ці блага споживаються колективно усіма членами суспільства, незалежно від того, платять вони за них чи ні, а витрати фінансуються із бюджету за рахунок податків.

Попит закордону на блага певної країни залежить від співвідношення цін на вітчизняні і закордонні товари і обмінного курсу національних валют, тобто від реальних умов обміну (θ). Ці умови показують, скільки закордонних благ можемо отримати за одиницю своїх благ і розраховуються за формулою

$$\theta = P / eP^z ,$$

де P, P^z – рівні цін відповідно в межах країни і за кордоном; e (*exchange*) – обмінний курс вітчизняної валюти.

Функцію попиту закордону можна представити формулою

$$E = E_0 + q\theta ,$$

де E_0 – величина експорту, автономна від θ; q – гранична схильність до експорту, яка характеризує реакцію експорту на зміни θ.

Сукупна пропозиція.

Сукупна пропозиція (AS) – це обсяг товарів та послуг, який фірми готові виробляти та продавати протягом року за кожного рівня цін (за інших сталих умов). Сукупна пропозиція в основному залежить від потенційного обсягу виробництва.

Потенційний ВНП – це такий реальний обсяг ВНП, який виробляється у країні за умов повної зайнятості, тобто коли фактична норма безробіття дорівнює природному рівню безробіття.

Зауваження. Найновіші дослідження оцінюють природний рівень безробіття приблизно в 6% робочої сили.

Цінові фактори, які впливають на сукупну пропозицію:

- зміна процентної ставки;
- зміна рівня цін.

Нецінові фактори, які впливають на сукупну пропозицію:

- зміна цін на ресурси:
  - наявність власних ресурсів;
  - ціни на імпортні ресурси;
  - співвідношення на ринку національних та імпортних ресурсів;
- зміни економічних правових норм:
  - податки з підприємств та субсидії;
  - державне регулювання;
- зміни в продуктивності праці.

Тотожності.

1. Тотожність доходу та витрат:

$$Y = C + I + G + NE .$$

У закритої економіці національне виробництво дорівнює національним витратам

$$Y = C + I + G ,$$

та національні витрати дорівнюють національному доходу:

$$Y - C - T \equiv I + G - T ,$$

де T – це податки.

Дохід, який не витрачається та не платиться як податки, заощаджується. Тому

$$S \equiv I + G - T .$$

2. Тотожність заощаджень та інвестицій.

Для закритої економіки, в якій відсутній держсектор та немає податків, маємо

$$I = S .$$

Тема 2. Статичні моделі «Кейнсіанського хресту»

Основною для кейнсіанської моделі є рівність сукупного попиту AD та сукупної пропозиції:

$$AD = C + I,$$

де C – споживчі витрати домогосподарств, I – інвестиційні витрати.

Функція споживчих витрат описується лінійною функцією:

$$C = \underline{C} + c'Y,$$

де $\underline{C}$ – деякий мінімальний рівень споживання, який не залежить від рівня доходу (автономне споживання), c' – гранична схильність до споживання, $c' = \dfrac{\Delta C}{\Delta Y}$, $0 < c' < 1$.

Далі будемо позначати граничну схильність як c.

Функція інвестиційних витрат має вид:

$$I \equiv \underline{I} = const,$$

де $\underline{I}$ – автономні інвестиції.

Об'єднуючи ці вирази, маємо рівняння

$$Y = \underline{C} + \underline{I} + cY.$$

Звідси можемо визначити залежність між запланованими витратами та випуском:

$$Y = \frac{1}{1-c}(\underline{C} + \underline{I}) = \frac{1}{1-c}\overline{A}, \quad \text{де } \overline{A} = \underline{C} + \underline{I}.$$

Тоді
$$\Delta Y = \frac{1}{1-c}\Delta\overline{A}.$$

Якщо покласти $\Delta\overline{A} = 1$, то отримаємо формулу, яка показує на скільки одиниць зросте випуск, якщо витрати збільшаться на одиницю:

$$\Delta Y = \frac{1}{1-c}$$

Із формули слідує, що загальний випуск залежить від граничної схильності до споживання: якщо вона більше, то більше випуск.

Вираз $\frac{1}{1-c}$ має назву ***мультиплікатора випуску по витратам***.

Ускладнимо модель, розглядаючи державу як економічний суб'єкт, який має витрати на отримання товарів так само, як і домогосподарства, та платить податки з доходів:

$$Y = \underline{C} + c(Y - T) + \underline{I} + \underline{G},$$

де T – податки, які держава виключає з доходів, $\underline{G}$ – державні витрати (стала величина).

Якщо податки менше, то дохід, який залишається у розпорядженні домогосподарств, отже і споживання, є більшими:

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = -\frac{c}{1-c} = m_{Y/T}.$$

Вираз $m_{Y/T} = -\frac{c}{1-c}$ називається ***мультиплікатором податків***. Він відображає той факт, що зростання податків на деяку величину скорочує випуск на більшу величину.

Сукупний ефект від зростання податків має вид:

$$\Delta Y = m_{Y/T}\Delta T.$$

Припустимо тепер, що держава є суб'єктом, який витрачає доходи, тобто формує попит на ринку товарів. Тоді

$$Y = \underline{C} + c(1-t)Y + \underline{I} + G,$$

де t – частина податків у сукупних доходах, а об‘єм податків $T = tY$, $t \in (0,1)$.

Звідси
$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1 - c(1-t)} = m_{Y/G}.$$

Тут вираз $\frac{1}{1 - c(1-t)} = m_{Y/G}$ є ***мультиплікатором державних видатків***. Він відображає залежність сукупних доходів від зміни державних видатків.

Модель IS-LM

Розглянемо головний інструмент короткострокового аналізу економіки – модель IS-LM, яка описує макроекономічну рівновагу як одночасну рівновагу на товарному та грошовому ринках.

Ключовим моментом короткострокового аспекту розглядання економіки є жорсткість, негнучкість цін, котра приводить до того, що об‘єм випуску не завжди співпадає з потенційним та залежить від сукупного попиту.

Під сукупним попитом AD розуміється залежність між кількістю продукції, на яку є попит у всієї економіки, та загальним рівнем цін.

Крива IS (інвестиції – заощадження) є формалізованим відображенням всіх можливих становищ на ринку товарів та послуг, тобто описує залежність рівноважних рівнів доходу (випуску) від рівноважної ставки відсотку.

В закритій економіці ринок товарів та послуг може бути описаний наступним чином:

$$Y = C + I + G;$$

$$C = c(Y - T), \quad 0 < c < 1, \quad c - const;$$

$$I = I(r), \quad I' < 0;$$

$$G \equiv \underline{G}, \quad T \equiv \underline{T}.$$

Розв‘язком цієї системи рівнянь є множина комбінацій рівня випуску Y та r, при яких досягається рівновага на ринку товарів та послуг. Тому рівновага на ринку товарів та послуг описується залежністю $Y = Y(r)$ або $r = r(Y)$, що і дає криву IS.

В моделі «кейнсіанського хреста» припускається, що ставка відсотка r фіксована: $r \equiv \underline{r}$ і тому інвестиції $I(\underline{r})$ незміні. Заплановані витрати E визначаються при заданої фіскальної політиці ($T \equiv \underline{T},\ G \equiv \underline{G}$). Ключовою ідеєю цієї моделі є можливість розбіжності запланованих витрат E та фактичних витрат Y. Зауважимо, що в стану рівноваги $Y = E$.

Досягнення рівноваги здійснюється за рахунок незапланованої зміни запасів: якщо випуск перевищує заплановані витрати, то відбувається збільшення запасів у фірм, вони скорочують виробництво. Якщо випуск менше витрат, то відбувається незаплановане зменшення запасів, що стимулює фірми до збільшення виробництва.

Відомо, що якщо в моделі «кейнсіанського хреста» за інших рівних умов збільшуються державні закупівлі G (або збільшуються інвестиції I), то плановані витрати збільшуються для кожного рівня випуску і нарешті відбувається мультиплікативне збільшення рівноважного доходу:

$$\Delta Y = \frac{\Delta G}{1-c}, \text{ або } \quad \Delta Y = \frac{\Delta I}{1-c}.$$

При збільшенні податків на ΔT за інших однакових умов відбувається зменшення запланованих витрат. Це приведе до мультиплікативного зменшення рівноважного рівня доходу:

$$\Delta Y = -\frac{c}{1-c}\Delta T.$$

Тут $-\dfrac{c}{1-c}$ – **податковий мультиплікатор**.

Зміна r приводить до зміни інвестицій на ΔI. Отож змінюється рівноважний рівень доходу. Отже, зріст r приводить до падіння інвестицій на ΔI та до мультиплікативного зменшення доходу на $\Delta Y = \dfrac{\Delta I}{1-c}$. Таким чином, більш високий рівень відсотку відповідає більш низькому рівню доходу.

В лінійній моделі IS-LM припускається, що попит на гроші має вид:

$$L(Y,r) = eY - fr,$$

де e, f – коефіцієнти чутливості попиту на гроші по доходу та ставці відсотку відповідно, $e > 0, f > 0$:

$$\frac{M}{P} = eY - fr\,,$$

де $\dfrac{M}{P}$ – попит на гроші, M – номінальна пропозиція грошей.

Таким чином, LM є прямою, що виражає залежність $Y(r)$:

$$Y = \frac{f}{e} r + \frac{M/p}{e},$$

або залежність $r(Y)$:

$$r = \frac{e}{f} Y - \frac{M/P}{f}.$$

Зміна параметрів моделі e, f приводить до зміни форми та нахилу LM, а зміна значень M, P зміщує LM на величину $\dfrac{\Delta(M/P)}{f}$ по вертикалі та на $\dfrac{\Delta(M/P)}{e}$ по горизонталі.

В лінійному випадку, коли *IS* та *LM* є прямими, короткострокова рівновага знаходиться як розв‘язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} Y = c(Y - \underline{T}) + I(r) + \underline{G}, \\ \dfrac{M}{P} = L(Y, r). \end{cases}$$

Тема 3. Моделі Кейнса
Лінійна динамічна дискретна модель

Припущення:

1. Розглянемо економіку з єдиною ендогенною змінною Y – ВВП, $Y = Y(t)$, де t – час.
2. Економіку будемо вважати закритою: чистий експорт $E=0$.
3. Державні витрати нехай розподіляються на споживання та накопичення:
$$Y = C + I.$$
4. Попит на інвестиційні товари є сталою величиною: $I(t) \equiv I$.
5. Попит на споживчі товари в майбутньому році є лінійною функцією від ВВП поточного року:
$$C^D(t+1) = C_0 + cY(t),$$
де C_0 – нижня межа фонду невиробничого споживання, $c \in (0,1)$ – гранична схильність до споживання.

Динамічну модель Кейнса отримаємо, порівнявши випуск товарів кінцевого використання , що планується у наступному році, з попитом на них, що прогнозується:

$$Y(t+1) = C_0 + cY(t) + I \tag{1}$$

Ця модель може використовуватися тільки для короткострокового прогнозування поведінки економіки.

Нехай відомий початковий стан економіки: $Y(0) = Y_0$.

Рівняння – лінійне неоднорідне скінчено-різницеве рівняння першого порядку. Його розв‘язок має вигляд:

$$Y(t) = Y_e + (Y_0 - Y_e)c^t\,, \tag{2}$$

де

$$Y_e = \frac{C_0 + I}{1 - c}\,. \tag{3}$$

Таким чином,

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y_e, \tag{4}$$

та розглянута модель може вважатися стійкою.

Лінійна динамічна неперервна модель

В дискретному випадку при $\Delta t \neq 1$ отримаємо

$$Y(t+\Delta t) - Y(t) = (C_0 - sY(t) + I)\Delta t,$$

де $s = 1 - c$ – гранична схильність до заощадження, $s \in (0,1)$.

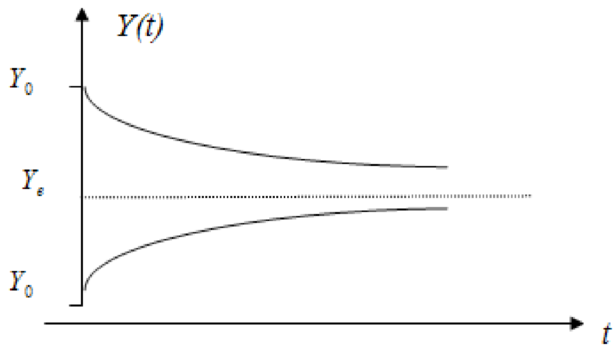
При $\Delta t \to 0$ отримаємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{1}{s}\frac{dY}{dt} + Y = \frac{C_0 + I}{s}.$$

Враховуючи, що $Y(0) = Y_0$ та (3), загальний розв‘язок задачі Коші буде таким:

$$Y(t) = Y_e + (Y_0 - Y_e)e^{-st}. \tag{5}$$

Тому і в цьому випадку виконується співвідношення та неперервна модель Кейнса також стійка.



Ріс.1. Динаміка ВВП у неперервній моделі Кейнса.

Нелінійна динамічна модель Кейнса

Нехай швидкість росту ВВП є нелінійною функцією від ВВП та інвестицій:

$$\frac{dY}{dt} = f(Y, I), \text{ причому } \quad \frac{\partial f}{\partial Y} < 0, \quad \frac{\partial f}{\partial I} > 0$$

та при $t = 0$ інвестиції дорівнюють I_0 і система знаходиться у деякому стані рівноваги (Y_e^0, I_0), де I_0 – відоме, а Y_e знаходиться з рівняння

$$f(Y_e^0, I_0) = 0.$$

При збільшенні інвестицій з I_0 до $I = I_0 + \Delta I, \quad \Delta I > 0,$ поведінка системи буде описуватись рівнянням

$$\frac{dY}{dt} = f(Y, I), \quad \mathrm{Y}(0) = Y_e^0.$$

Подамо ВВП як суму сталої та змінної частини:

$$Y(t) = Y_e^0 + \eta(t), \quad \eta(t) > 0, \eta(0) = 0.$$

Тоді
$$\frac{dY}{dt} = \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{dY}{dt} = f(Y_e^0 + \eta, I_0 + \Delta I).$$

Якщо ΔI достатньо мале, то $\eta(t)$ також мале, тому праву частину останнього рівняння можемо розкласти в ряд Тейлора в околі точці (Y_e^0, I_0). Відкидаючи члени другого та більших порядків, маємо:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y}(Y_e^0, I_0)\eta + \frac{\partial f}{\partial I}(Y_e^0, I_0)\Delta I, \quad \eta(0)=0. \tag{6}$$

Позначимо $T = -\dfrac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial Y}(Y_e^0, I_0)}$. Тут $1/T$ – узагальнена схильність до накопичування у початковому стані.

Рівняння прийме вигляд:

$$T\frac{d\eta}{dt}+\eta=\alpha\Delta I,\quad \eta(0)=0,$$

де $\alpha = \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial I}(Y_e^0, I_0)}{\dfrac{\partial f}{\partial Y}(Y_e^0, I_0)} > 0.$

Розв‘язок $\eta(t)=\alpha\Delta I(1-e^{\frac{-t}{T}}),$ а ВВП в цілому

$$Y(t)=Y_e^0+\alpha\Delta I(1-e^{\frac{-t}{T}}).$$

Причому новий рівноважний стан ВВП буде складати

$$Y_e=\lim_{t\to\infty}Y(t)=Y_e^0+\alpha\Delta I.$$

Тема 4. Лінійні моделі з несталими інвестиціями Модель Самуельсона

Припущення:

1. Розглянемо економіку з однією ендогенною змінною Y – ВВП, $Y = Y(t)$, де t – час.
2. Економіку будемо вважати закритою: чистий експорт $E=0$.
3. Об'єм випуску розподіляється на споживання, накопичення та державні витрати:
$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t).$$
4. Нехай $G(t) \equiv G = 1$.
5. Попит на інвестиційні товари є змінною величиною:
$$I(t) = \upsilon(C(t) - C(t-1)), \quad \upsilon > 0.$$
6. Попит на споживчі товари в поточному році є лінійною зростаючою функцією від ВВП минулого року:
$$C(t) = cY(t-1), \quad c \in (0,1).$$

Маємо
$$Y(t) - c(1+\upsilon)Y(t-1) + c\upsilon Y(t-2) = 1.$$

Загальний розв'язок цього лінійного кінцеве-різницевого неоднорідного рівняння другого порядку є сумою загального розв'язку лінійного кінцеве-різницевого однорідного рівняння $Y_{ЛОУ}(t)$ та частинного розв'язку лінійного кінцеве-різницевого неоднорідного рівняння $Y_{частн}$:

$$Y_{частн} = \frac{1}{1-c} = \frac{1}{s} \; ; \; Y_{ЛОУ}(t) = A_1\lambda_1^{\,t} + A_2\lambda_2^{\,t},$$

де A_1, A_2 – константи, λ_1, λ_2 – корені многочлена

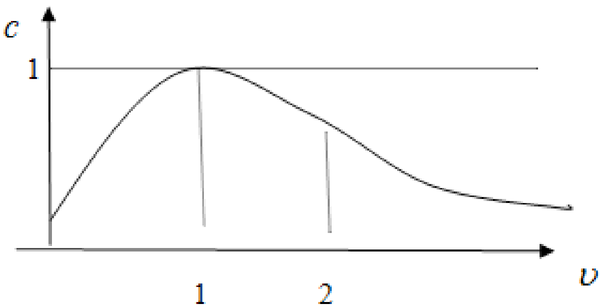
$\lambda^2 - c(1+\upsilon)\lambda + c\upsilon$:
$$\lambda_{1,2} = \frac{c(1+\upsilon) \pm \sqrt{c^2(1+\upsilon)^2 - 4c\upsilon}}{2}.$$

Таким чином, параметри c, υ визначають значення λ та стійкість Y.

Розглянемо $\Delta = c^2(1+\upsilon)^2 - 4c\upsilon$. Якщо $\Delta = 0$, то звідси будемо мати

$$c = c(\upsilon) = \frac{4\upsilon}{(1+\upsilon)^2}.$$

Досліджуючи цю функцію, отримаємо, що $c(\upsilon)$ має максимум у точці $\upsilon = 1,\ c(\upsilon) = 1,$ а у точці $\upsilon = 2$ маємо перегин.



Рis.2. Поведінка функції $c(\upsilon)$.

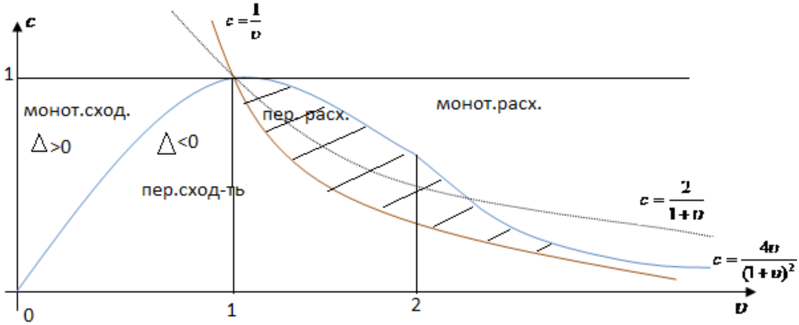
Над лінією, де $\Delta = 0$, корені дійсні та різні, під лінією – комплексні.

Нехай $\Delta > 0$. Тільки при $\upsilon < 1$ будемо мати $0 < \lambda_{1,2} < 1$, тому

$$\lim_{t\to\infty} Y_{ЛОУ}(t) = 0 \quad \text{та}$$

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y_e = \frac{1}{s}.$$

Якщо $\Delta < 0$, тоді $Y_{ЛОУ}(t) = r^t(B_1 \sin\omega t + B_2 \cos\omega t)$ з $r = \sqrt{c\upsilon}$. Звідси якщо $c < 1/\upsilon$, то $Y_{ЛОУ}(t)$ періодично збігається до нуля та $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = Y_e = \dfrac{1}{s}$. Якщо $c > 1/\upsilon$, то маємо гармонічні коливання з амплітудою, яка збільшується та $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \infty$.



Ріс.3. Динаміка ВВП у моделі Самуельсона.

Модель Хікса

Припущення:

1. Розглянемо економіку з однією ендогенною змінною Y – ВВП, $Y = Y(t)$, де t – час.
2. Економіку будемо вважати закритою: чистий експорт $E=0$.
3. Об'єм випуску розподіляється на споживання та накопичення:
$$Y(t) = C(t) + I(t).$$
4. Попит на інвестиційні товари є змінною величиною:
$$I(t) = \upsilon(Y(t-1) - Y(t-2)) + A(t), \qquad \upsilon > 0,$$
де $A(t)$ мають зміст автономних інвестицій:
$$A(t) = A_0(1+r)^t.$$

Тут A_0 – початкові інвестиції держави у виробництво, r – відсоткова ставка з інвестицій A_0.

5. Попит на споживчі товари в поточному році є лінійною зростаючою функцією від ВВП минулого року:

$$C(t) = cY(t-1), \quad c \in (0,1).$$

Маємо

$$Y(t) - (c+\upsilon)Y(t-1) + \upsilon Y(t-2) = A_0(1+r)^t.$$

Позначимо $m = 1 + r, \quad m > 1$.

Частинний розв‘язок лінійного кінцеве-різницевого неоднорідного рівняння $Y_{частн}(t)$ може бути отриманий за допомогою заміни $Y_{частн}(t)=km^t$, де

$$k = \frac{A_0 m^2}{m^2 - (c+\upsilon)m + \upsilon}.$$

Можна показати, що $k > 0$, якщо $\Delta > 0$. Аналогічно як в моделі Самуельсона будемо мати

$$Y(t) = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t + Y_{частн}(t),$$

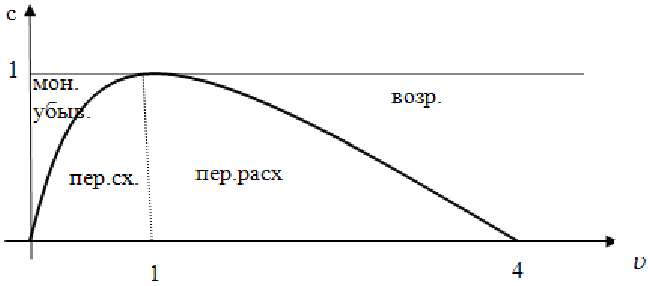
де A_1, A_2 – константи, λ_1, λ_2 – корені многочлена $\lambda^2 - (c+\upsilon)\lambda + \upsilon$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{c+\upsilon \pm \sqrt{(c+\upsilon)^2 - 4\upsilon}}{2}.$$

Досліджуючи знак детермінанту та умови, при яких функція $Y_{ЛОУ}(t)$ буде збігатися до нуля, отримаємо, що при $\upsilon < 1$ незалежно від знаку Δ

$$\lim_{t\to\infty} Y_{ЛОУ}(t) = 0.$$

Однак в цій моделі $Y_{частн} = Y_{частн}(t)$, тому стаціонарної траєкторії для ВВП немає.



Рiс.4. Динамiка ВВП у моделi Хiкса.

Модель Самуельсона – Хiкса.
Дискретний варiант.

Припущення:

1. Попит на iнвестицiйнi товари складається зi сталої частини $\underline{I}$ та змiнної частини, яка пропорцiйна приросту ВВП поточного року по вiдношенню до попереднього:
$$I(t) = \upsilon(Y(t-1) - Y(t-2)) + \underline{I}, \quad \upsilon \in (0,1).$$
2. Попит на споживчi товари в поточному роцi є лiнiйною зростаючою функцiєю вiд ВВП минулого року:
$$C(t) = cY(t-1) + \underline{C}, \quad c \in (0,1).$$

Тодi
$$Y(t) = C(t) + I(t) = cY(t-1) + \underline{C} + \upsilon(Y(t-1) - Y(t-2)) + \underline{I}.$$

Таким чином маємо лiнiйне кiнцево-рiзницеве неоднорiдне рiвняння другого порядку:
$$Y(t) - (\upsilon + c)Y(t-1) + \upsilon Y(t-2) = \underline{C} + \underline{I}.$$

Його розв‘язок залежить вiд виду коренiв характеристичного рiвняння
$$\lambda^2 - (\upsilon + c)\lambda + \upsilon = 0: \quad \lambda_{1,2} = \frac{c+\upsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{(c+\upsilon)^2}{4} - \upsilon}\,.$$

Можна довести, що $\lambda_{1,2} \in (0,1)$ при зроблених припущеннях у випадку, коли $\frac{(c+\upsilon)^2}{4} - \upsilon > 0$, і тому

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = \frac{\underline{C} + \underline{I}}{1-c} = Y_e.$$

Якщо дискримінант від’ємний, то

$$Y(t) = Y_e + r^{t/2}\left((Y_0 - Y_e)\left(\cos\varphi t + \frac{1-\alpha}{\varphi}\sin\varphi t \right) + (Y_1 - Y_0)\frac{\sin\varphi t}{\omega} \right),$$

де $\alpha = \frac{c+r}{2}$, $\omega = \sqrt{r - \alpha^2}$, $\varphi = arctg\frac{\omega}{\alpha}$, $r = \upsilon$, а Y_0, Y_1 – початкові значення ВВП.

Враховуючи, що зараз $\upsilon \in (0,1)$, то в цьому випадку маємо:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y_e.$$

Неперервний варіант

Нехай крок дискретизації часу є Δt і $\Delta t \to 0$. Використовуючи кінцеві різниці першого та другого порядку, для ВВП отримаємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{1}{1-c}\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{1-\upsilon}{1-c}\frac{dY}{dt} + Y = \frac{\underline{C} + \underline{I}}{1-c}.$$

Аналогічно як у моделі Кейнса $Y_{частн} \equiv \frac{\underline{C} + \underline{I}}{1-c} = Y_e$.

Характеристичне рівняння має вид:

$$\frac{1}{1-c}\lambda^2 + \frac{1-\upsilon}{1-c}\lambda + 1 = 0,$$

тому

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1-\upsilon}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-\upsilon}{2}\right)^2 - (1-c)} \cdot$$

Якщо $\Delta \geq 0,$ то $\lambda_{1,2} < 0$ та економіка стійка і маємо експоненціальне згасання.

В протилежному випадку $\lambda_{1,2} = -\alpha + \omega i,$ де

$\alpha = \dfrac{1-\upsilon}{2} < 0, \quad \omega = \sqrt{(1-c) - \dfrac{(1-\upsilon)^2}{4}}$ та економіка стійка і веде себе як коливальна ланка (гармонічні коливання з експоненційно спадаючою амплітудою).

Таким чином, неперервний варіант моделі Самуельсона–Хікса також є стійкою моделлю та

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y_e = \frac{\underline{C} + \underline{I}}{1-c}.$$

Тема 5. Модель Харрода-Домара

Припущення:

1) Економіка вважається закритою.
2) Державні витрати не виділяються.
3) $Y(t) = C(t) + I(t)$.
4) Швидкість росту прибутку пропорційна інвестиціям:
$$I(t) = B\frac{dY}{dt},$$
де B – коефіцієнт капіталомісткості росту прибутку, $1/B$ – приріст капіталовіддачі .
5) Модель не враховує технічний прогрес.
6) Динаміка об‘єму споживання $C(t)$ задається екзогенною. Цей показник може вважатися сталою величиною або зростаючим з заданим темпом, або мати іншу динаміку.

Розглянемо випадок $C(t) \equiv 0$, коли всі ресурси направляються на інвестиції. В результаті знайдемо максимальні технологічно можливі темпи зростання прибутку:
$$Y(t) = B\frac{dY}{dt}, \quad Y(0) = Y_0.$$
Тому
$$Y(t) = Y_0 e^{t/B}.$$
Неперервний максимально можливий (технологічний) темп зростання прибутку
$$y(t) = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{1}{B}.$$
Нехай зараз $C(t) \equiv C = const.$
Тоді
$$Y(t) = C + B\dot{Y}, \quad Y(0) = Y_0.$$
Його частинним розв‘язком є $Y_{частн}(t) \equiv C$, тому

$$Y(t) = C + (Y_0 - C)e^{t/B}.$$

Темп

$$y(t) = \frac{1}{B}\left(1 - \frac{C}{Y(t)}\right).$$

При $t = 0$ маємо $y(0) = \frac{1}{B}\left(1 - \frac{C}{Y_0}\right) = \frac{1}{B}s_0$, де

$s(t) = \left(1 - \frac{C(t)}{Y(t)}\right)$ – норма накопичування.

Таким чином, $y(t) = \frac{1}{B}s(t)$. Якщо $t \to \infty$, то $Y(t) \to \infty$ та $y(t) \to \frac{1}{B}$ (прибуток зростає, але постійний об'єм споживання складає все меншу його долю).

Отже, зріст норми накопичування пропорційно збільшує темп приросту прибутку. В цей же час це зменшує рівень поточного споживання та для розв'язку проблеми узгодження конкурентних цілей збільшення темпу зростання прибутку та рівня поточного добробуту в модель потрібно включати елементи оптимізації.

Нарешті розглянемо варіант моделі з показником споживання, який зростає з постійним темпом r: $C(t) = C_0 e^{rt}$.

Диференціальне рівняння цієї моделі має вигляд

$$Y(t) = B\dot{Y} + C_0 e^{rt}.$$

Його розв'язок

$$Y(t) = \left(Y_0 - \frac{C_0}{1 - Br}\right)e^{t/B} + \frac{C_0}{1 - Br}e^{rt}. \qquad (7)$$

Зауваження. Якщо $r = \dfrac{1}{B}$, то

$Y(t) = \left(-\dfrac{C_0}{B} t + Y_0 \right) e^{t/B} \to -\infty$ при $t \to \infty$ (випадок проїдання» всіх виробничих фондів).

Із загальних міркувань зрозуміло, що темп приросту споживання не може бути більше, ніж максимально можливий загальний темп приросту $1/B$, так як в протилежному випадку споживання буде займати все більшу, і врешті-решт переважну частину прибутку, що зведе до нуля спочатку інвестиції, а далі – і прибуток. З формули слідує, що в випадку $r > 1/B$ коефіцієнт $\dfrac{1}{1-Br} < 0$, а e^{rt} зростає швидше, ніж $e^{t/B}$, тому другий доданок в від‘ємний та через деякий час «перевищить» перший.

Нехай $r < 1/B$. В цьому випадку багато залежить від співвідношення між r та $\rho_0 = \dfrac{s_0}{B}$.

Якщо $r = \rho_0$, то можна довести, що:

1) $y(t) = r$ (темп приросту прибутку дорівнює темпу приросту споживання);
2) $Y(t) = Y_0 e^{rt}$;
3) $s(t) \equiv s_0$.

Таким чином, в цьому випадку темп приросту прибутку пропорційний нормі накопичування та обернено пропорційний приростної капіталомісткості.

Якщо $\rho_0 < r < 1/B$, то перший доданок у формулі врешті-решт «переважить» другий. Тому темп росту прибутку спадає та з деякого моменту часу стає від‘ємним. Через деякий час сам прибуток стає нульовим і після цього модель вже не має економічного сенсу. Ця ситуація буде у випадку, коли дуже низькою вибрати початкову норму накопичування.

Розглянемо випадок, коли $r < \rho_0 = \dfrac{s_0}{B}$.

Тоді $y(t) \to 1/B,\ \ s(t) \to 1$. Таким чином, норма накопичування та темп приросту прибутку зростають. Однак, тут відбувається «накопичування заради накопичування», так як споживання зростає з заданим темпом r, а темп приросту прибутку збільшується за рахунок більш швидкого росту інвестицій. Тут $s_0 > Br$ і якщо розглядати задачу максимізації об‘єму споживання, то ця норма занадто висока. Більш високий її рівень потребує збільшення інвестицій $I(0)$ за рахунок скорочення споживання $C(0)$, але ж це приведе до більш низького рівня споживання на всій траєкторії $C(t) = C_0 e^{rt}$. В той же час потрібний темп приросту споживання $r < 1/B$ можна підтримувати при $s_0 = Br$.

Тема 6. Модель Солоу

Відмінності від моделі Харрода – Домара:

1) виробнича функція нелінійна;
2) модель враховує вибування капіталу;
3) модель використовує динаміку трудових ресурсів.

Спрощення:

1) норми накопичування та вибуття капіталу вважаються постійними;
2) інвестиційні лаги відсутні;
3) на початковому рівні аналізу моделі шукаємо не траєкторії всіх її показників, як у моделі Харрода-Домара, а характеристики становищ стійкої рівноваги, до яких система виходить у довгостроковий період.

Припущення:

1) економіка односекторна;
2) експорт та імпорт не враховуються;
3) в моделі п‘ять ендогенних змінних:
   - $Y(t)$ – ВВП;
   - $C(t)$ – фонд невиробничого споживання;
   - $I(t)$ – інвестиції в виробництво;
   - $L(t)$ – число зайнятого в виробництві населення;
   - $K(t)$ – фонди (капітал);
4) застосовуються наступні екзогенні змінні, які вважаються сталими:
   - n – темп приросту числа робочої сили за рік, $n=\frac{\dot{L}}{L}$;
   - μ – доля амортизації, $\mu \in (0,1)$;
   - a – коефіцієнт прямих витрат, $a \in (0,1)$;
   - s – норма накопичування, $s \in (0,1)$;

5) нехай випуск визначається лінійно-однорідною виробничою функцією $Y(t)=F(K,L)$.

Згідно означенню темпу приросту робочої сили

$$L(t)=L_0e^{nt}. \qquad (8)$$

Приріст фондів на протязі часу Δt має вигляд:

$$\Delta K(t)=I(t)\Delta t-\mu K(t)\Delta t,$$

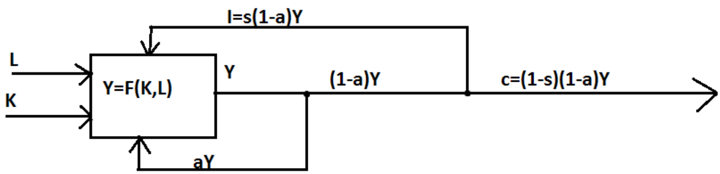
тому при $\Delta t\to 0$ отримаємо наступне диференціальне рівняння з початковою умовою:

$$\frac{dK}{dt}=-\mu K+I,\quad K(0)=K_0. \qquad (9)$$

Таким чином, модель Солоу в абсолютних показниках матиме вид:

$$\begin{cases} L(t)=L_0e^{nt}, \\ \dfrac{dK}{dt}=-\mu K(t)+s(1-a)F(K,L,t), \quad K(0)=K_0, \\ I(t)=s(1-a)F(K,L,t), \\ C(t)=(1-s)(1-a)F(K,L,t). \end{cases}$$

Схема функціонування економіки в моделі Солоу



Введемо відносні показники:

$k=\dfrac{K}{L}$ – фондоозброєність;

$y=\dfrac{Y}{L}$ – продуктивність праці;

$i=\dfrac{I}{L}$ – питомі інвестиції;

$c=\dfrac{C}{L}$ – середньодушове споживання.

Так як $y=\dfrac{F(K,L)}{L}=F\left(\dfrac{K}{L},1\right)=f(k)$, то замість рівняння у відносних показниках матимемо наступні співвідношення:

$$\dot{k}=-\lambda k+s(1-a)f(k),\quad k(0)=k_0=K_0/L_0,\quad \lambda=n+\mu . \quad (10)$$

Означення. Траєкторія називається стаціонарною, якщо показники не змінюються на протязі часу:

$$k(t)\equiv k_e=const,\quad y(t)\equiv y_e=const,$$
$$i(t)\equiv i_e=const,\quad c(t)\equiv c_e=const.$$

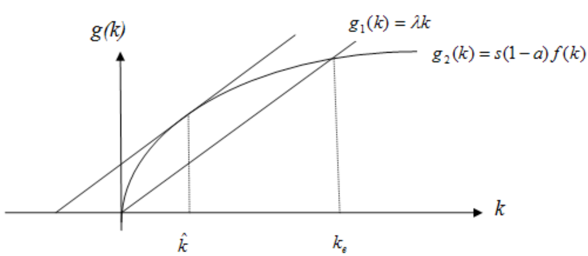
Як можна бачити із, встановлення фондоозброєності на постійному рівні k_e приводить до виходу на стаціонарну траєкторію:

$$\frac{dk_e}{dt}=0\ \Rightarrow\ -\lambda k_e+s(1-a)f(k_e)=0,$$

або

$$\lambda k_e=s(1-a)f(k_e). \quad (11)$$

Якщо виконана умова $s(1-a)f'(0)>\lambda$, то рівняння має єдиний ненульовий розв‘язок k_e.



Ріс.5. Знаходження k_e та $\hat{k}$.

Через $\hat{k}$ позначимо фондоозброєність, при якій швидкість росту функцій $g_1(k) = \lambda k$ та $g_2(k) = s(1-a)f(k)$ дорівнюють одна одній, тобто $\hat{k}$ – корінь рівняння

$$s(1-a)f'(\hat{k}) = \lambda . \tag{12}$$

Перехідний режим в моделі Солоу

Якщо $k_0 = k_e$, то економіка вже знаходиться на стаціонарній траєкторії і може зійти з неї тільки при зміні зовнішніх умов (зміна норми накопичування або перехід до нових технологій).

Нехай $k_0 \neq k_e$. Розглянемо виробничу функцію Кобба-Дугласа

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0,1) \rightarrow f(k) = Ak^{\alpha} .$$

Тоді із та отримаємо

$$k_e = \left(\frac{s(1-a)A}{\lambda}\right)^{1/1-\alpha}, \quad \hat{k} = \left(\frac{\alpha s(1-a)A}{\lambda}\right)^{1/1-\alpha} .$$

Рівняння матиме вигляд рівняння Бернуллі:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + s(1-a)Ak^{\alpha}, \quad k(0) = k_0.$$

Зробив заміну $k = e^{-\lambda t}$, знайдемо розв‘язок цього рівняння:

$$k(t) = \left[(k_0{}^{1-\alpha} - k_e{}^{1-\alpha})e^{-\lambda t(1-\alpha)} + k_e{}^{1-\alpha} \right]^{1/1-\alpha} .$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = k_e .$$

«Золоте» правило накопичування

Розглянемо питання, як обрати норму накопичування так, щоб максимізувати середньодушове споживання у стаціонарному режимі, отже через відносно короткий термін після початку перехідного процесу.

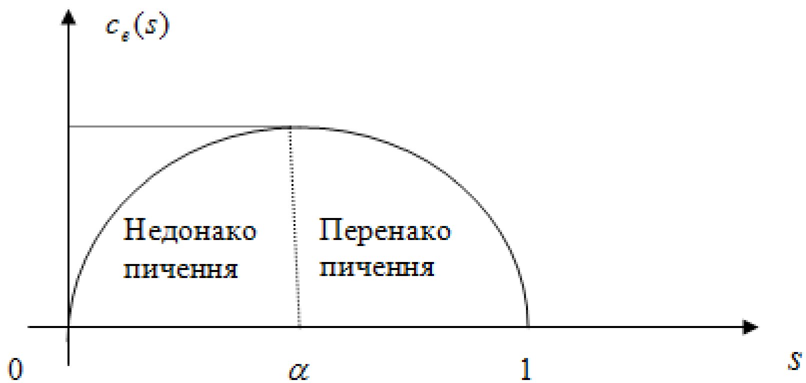
Функція середньодушового споживання на стаціонарній траєкторії має вигляд:

$$c_e(s) = (1-s)(1-a)Ak_e^{\alpha} =$$

$$= (1-s)(1-a)A\left[\frac{s(1-a)A}{\lambda}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = Bg(s)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

де $B = \left[\frac{(1-a)A}{\lambda^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $g(s) = s^{\alpha}(1-s)^{1-\alpha}$.

Розв‘язком задачі $\max\limits_{0<s<1} g(s)$ є $s = \alpha$.



Pic.6. Поведінка функції $c_e(s)$.

Тема 7. Неокласична модель оптимального економічного росту

Основна відміна від моделі Солоу у тому, що відмовляємось від сталості норми накопичування.

Тоді з та виразу $i = s(1-a)f(k) = (1-a)f(k) - c$ маємо

$$\dot{k}(t) = -\lambda k(t) + (1-a)f(k(t)) - c(t), \quad k(0) = k_0. \qquad (13)$$

З точки зору центрального плануючого органу керованим параметром є середньодушове споживання та задача полягає в тому, щоб знайти найкраще питоме споживання за деякою економічною ціллю на даному інтервалі часу: $\{c(t), t_0 \le t \le t_1\}$. Тут t_0, t_1 – початковий та кінцевий моменти часу, що вважаються заданими, причому t_1 може приймати як скінченні, так і нескінченні значення.

<u>Означення.</u> Допустимим керуванням будемо називати кусочно-неперервну функцію $c(t)$, для якої

$0 \le \underline{c} \le c(t) \le f(k(t))$ для будь-яких $t \in [t_0, t_1]$,

де $\underline{c}$ – мінімальний рівень питомого споживання, який забезпечує життєдіяльність одного робочого.

Припустимо, що в розпорядженні плануючого органу є функція корисності, яка задає корисність u в будь-який момент часу як функцію від питомого споживання: $u = u(c(t))$.

Показником кривизни функції корисності є еластичність граничної корисності:

$$\sigma(c) = -c\frac{u''(c)}{u'(c)} > 0, \quad \forall c > 0.$$

Домовимось, що

- корисності в різні моменти часу не залежать одна від одної;
- щоб скласти корисності, які відповідають різним моментам часу, потрібно врахувати дисконтування, що відображає той факт, що близьке споживання більш важливе, ніж віддалене.

Нехай норма дисконтування δ постійна і додатна та дисконтний множник має вид експоненти. Тоді отримаємо корисність в момент часу t як $e^{-\delta(t-t_0)}u(c(t))$.

В інтервалі часу $[t_0, t_1]$ сукупний добробут W матиме вигляд

$$W = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)}u(c(t))dt.$$

У випадку, коли t_1 скінченне, потрібно задавати умову $k(t_1) \geq k_1$, де k_1 забезпечує можливість споживання і за межами даного горизонту планування. Щоб не враховувати цю умову, яка дуже складна з точки зору оптимального керування, можна вважати t_1 нескінченним. Тоді

$$W = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)}u(c(t))dt.$$

Однак в цьому випадку інтеграл може бути розбіжним. Збіжність гарантована при наявності максимально допустимого значення фондоозброєності $k_{\max}$, так як в цьому випадку $c(t) \leq f(k_{\max})$ і $W \leq \dfrac{u(f(k_{\max}))}{\delta}$.

Для спрощення виразів припустимо, що $a = 0,\ t_0 = 0.$

Таким чином, маємо наступну задачу оптимального керування:

$$\begin{aligned} &\frac{dk}{dt} = f(k) - \lambda k - c, \quad k(0) = k_0, \\ &0 \leq \underline{c} \leq c(t) \leq f(k(t)), \\ &\max W = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}u(c(t))dt. \end{aligned} \tag{14}$$

Тут фазовою координатою є фондоозброєність $k(t)$, а керованим параметром – питоме споживання $c(t)$. Розв‘язком є оптимальні траєкторії $c^*(t)$ та $k^*(t)$, для яких добробут максимальний.

Розглянемо випадок, коли $\underline{c} = 0$. Спряжену змінну $\psi(t)$ розглянемо як $\psi(t) = e^{-\delta t} q(t)$. Тоді гамільтоніан прийме вид

$$H(k,q,c,t) = e^{-\delta t}\left\{u(c) + q\left[f(k) - \lambda k - c\right]\right\}.$$

За принципом максимуму Понтрягіна, використовуючи умову стаціонарності гамільтоніану, отримаємо, що оптимальне керування повинно задовольняти умові

$$u'(c) = q. \tag{15}$$

Тобто тіньова ціна капіталовкладень вздовж оптимальної траєкторії є граничною корисністю споживання на одного робочого.

Диференціальне рівняння для змінної $q(t)$ буде мати вигляд

$$\frac{dq}{dt} = -(f_k'(k) - (\lambda + \delta))q.$$

Використовуючи співвідношення , отримаємо систему диференціальних рівняння для керованого та фазового параметрів :

$$\begin{cases} \dfrac{dc}{dt} = \dfrac{1}{\sigma(c)}\left[f_k'(k) - (\lambda + \delta)\right]c, \\ \dfrac{dk}{dt} = f(k) - \lambda k - c. \end{cases} \tag{16}$$

Таким чином, якщо траєкторії $c^*(t)$ та $k^*(t)$ оптимальні, то вони повинні задовольняти системі диференціальних рівнянь.

Знайдемо стаціонарні траєкторії $c^* = const,\ k^* = const$, для яких $\dfrac{dc}{dt} = 0,\ \dfrac{dk}{dt} = 0$:

$$\begin{cases} f_k'(k^*) = \lambda + \delta, \\ c^* = f(k^*) - \lambda k^*. \end{cases} \tag{17}$$

Як можна бачити із , такі траєкторії існують, єдині та задовольняють наступній нерівності:

$$0 < c^* < f(k^*).$$

Це траєкторії збалансованого росту, причому випуск, інвестиції та споживання зростають з однаковим темпом, який дорівнює росту ресурсу праці.

Система з початковою умовою $k(0) = k_0$ визначає траєкторії, серед яких знаходяться і оптимальні $c^*(t)$ та $k^*(t)$, причому

$$\lim_{t\to\infty} c^*(t) = c^*, \quad \lim_{t\to\infty} k^*(t) = k^*.$$

Якщо розглядати k^* як функцію від δ, то

$$\lim_{\delta\to 0} k^*(\delta) = \hat{k},$$

де $\hat{k}$ – значення фондоозброєності в відповідності «золотому» правилу.

Рівновага при $c^*(t) = c^*,\ k^*(t) = k^*$ задовольняє необхідним умовам оптимальності за винятком початкової умови. Ця рівновага $\left\{k^*, c^*\right\}$ має назву траєкторії збалансованого росту, тому що вздовж неї питоме споживання та фондоозброєність є сталими.

Стійкість моделі Рамсея

Розглянемо характер положення рівноваги $\left\{k^*, c^*\right\}$.

Лінеаризуємо систему в околі положення рівноваги $\left\{k^*, c^*\right\}$.

Введемо позначення:

$$k_l = k - k^*, \quad c_l = c - c^*, \quad g = \frac{f''(k^*)c^*}{\sigma(c^*)}.$$

Отримаємо лінійну систему

$$\begin{cases} \dot{k}_l = \sigma k_l - c_l, \\ \dot{c}_l = g k_l. \end{cases} \tag{18}$$

Локальна стійкість розв‘язку системи визначається за допомогою характеристичних чисел матриці коефіцієнтів системи . Так як $f''(k^*) < 0$, то $g < 0$ і тому характеристичні числа є дійсними та різними за знаком. Таким чином, особлива точка системи – точка (0,0) є сідлом та точка $\{k^*, c^*\}$ є сідлом для системи. Очевидно, точка $\{k^*, c^*\}$ є нестійкою точкою рівноваги у класичному сенсі Ляпунова. Однак, існує крива в фазовій площині (k, c) – сепаратріса, яка відповідає точці $\{k^*, c^*\}$ така, що з будь-якої точки цієї кривої можна досягнути положення $\{k^*, c^*\}$ при $t \to \infty$.

Цю криву називають гілкою стійкості (B, S). Траєкторія оптимального економічного росту ($k^*(t), c^*(t)$) повинна проходити по гілці стійкості. Для будь-якого початкового значення k_0 існує єдине значення питомого споживання c_0, при якому (k_0, c_0) лежить на BS. Таким чином, траєкторія оптимального росту є однозначно визначеним відрізком кривої BS.

Тема 8. Інші приклади моделей макроекономіки. Багатосекторна модель з множником-акселератором.

Модель торгового циклу Самуельсона-Хікса може бути сформульована як багатосекторна модель з системою кінцево-різницевих рівнянь першого порядку. В такій економіці споживання (C_t) є лінійною функцією від випуску у попередній момент часу $C_t = Ax_{t-1}$, де $[a_{ij}] \equiv A$ – матриця, що відображує граничну схильність до споживання ($0 \le a_{ij} < 1$), а індуційовані інвестиції (I_t) є лінійною зростаючою функцією від приросту випуску $I_t = B(x_{t-1} - x_{t-2})$, де $B \equiv [b_{ij}] > 0$. Більш того, вектор національного доходу записується у вигляді

$$x_t = Ax_{t-1} + B(x_{t-1} - x_{t-2}).$$

Це рівняння може бути представлене у вигляді системи кінцево-різницевих рівнянь першого порядку

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -B & A+B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t-1) \\ y_2(t-1) \end{pmatrix},$$

яка може бути переписана у виді

$$y_t = Cy_{t-1}.$$

Розв'язком цієї системи є

$$y_t = C^t y_0 = P\Lambda^t P^{-1} y_0.$$

Модель регулювання основного капіталу

Duesenberry[8] досліджував економіку, в якій інвестиції (I_t) є зростаючою функцією від випуску в попередній момент часу $a_1 Y_{t-1}$, та спадаючою функцією від об'єму основного капіталу в попередній момент часу $-a_2 K_{t-1}$, тоді як споживання (C_t) є лінійною зростаючою функцією від випуску і капіталу за попередній період.

$$I_t = a_1 Y_{t-1} - a_2 K_{t-1},$$
$$C_t = b_1 Y_{t-1} - b_2 K_{t-1},$$
$$K_t = I_t + (1-\delta) K_{t-1},$$

де $\delta = const$ – норма амортизації, $a_i, b_i > 0 \quad (i = 1,2)$. Отримаємо систему кінцево-різницевих рівнянь першого порядку

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ K_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_2 - a_2 \\ a_1 & 1 - \delta - a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ K_{t-1} \end{pmatrix},$$

яку можна записати як

$$x_t = A x_{t-1}.$$

Розв'язком цієї системи є

$$x_t = A^t x_0 = P \Lambda^t P^{-1} x_0.$$

Подальший аналіз полягає в дослідженні стійкості розв'язку по відношенню до параметрів a_i, b_i і $\delta \quad (i = 1,2)$.

Розподілена модель затримок (лагів)

Розглянемо кейнсіанську модель визначення обсягу випуску (Y_t), в якій як безпосереднє, так і віддалене минуле продовжують впливати на поточну економічну діяльність. Якщо говорити точніше, то нехай індуційовані інвестиції (I_t) мають лаг в 2 періоди, а споживання (C_t) має лаг в 3 періоди.

$$I_t = v_1 \left(Y_{t-1} - Y_{t-2} \right) + v_2 \left(Y_{t-2} - Y_{t-3} \right), \quad \left(v_1 + v_2 = v \right),$$

$$C_t = c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2} + c_3 Y_{t-3}, \quad \left(c_1 + c_2 + c_3 = c \right),$$

$$Y_t = I_t + C_t = (v_1 + c_1) Y_{t-1} + (c_2 + v_2 - v_1) Y_{t-2} + (c_3 - v_2) Y_{t-3} \equiv$$
$$\equiv a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + a_3 Y_{t-3}.$$

Або у вигляді системи кінцево-різницевих рівнянь першого порядку:

або
$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t-1) \\ y_2(t-1) \\ y_3(t-1) \end{pmatrix},$$

$$y_t = Ay_{t-1},$$

де A – матриця правої частини системи. Розв'язком цієї системи є

$$y_t = A^t y_0 = P\Lambda^t P^{-1} y_0,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корені рівняння

$$c(\lambda) = -\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Динамічна модель «витрати-випуск»

Розглянемо закриту динамічну модель «витрати-випуск»

$$x_t = Ax_t + B(x_{t+1} - x_t), \quad x(0) = x_0,$$

де $A \equiv [a_{ij}]$ – матриця коефіцієнтів «витрати-випуск», $(0 \le a_{ij} < 1)$ і $B \equiv [b_{ij}]$ – невід'ємна матриця коефіцієнтів потреби в капіталі. Позначимо $M \equiv I - B^{-1}(I - A)$ і запишемо рівняння у виді

$$x_{t+1} = \left[I - B^{-1}(I - A) \right] x_t = Mx_t.$$

Розв'язком цього рівняння є

$$x_t = M^t x_0 = P\Lambda^t P^{-1} x_0 = c_1 v_1 \lambda_1^t + c_2 v_2 \lambda_2^t + \ldots + c_n v_n \lambda_n^t$$

де $\Lambda \equiv diag(\lambda_i), \ (i = 1, 2, \ldots, n)$, значення λ_i передбачаються різними, v_i – відповідні їм власні вектори, лінійно-незалежні між собою, c_i – довільні константи, що визначаються початковими умовами, тобто c_i – елементи вектору $c = P^{-1}x_0$.

У загальному випадку, числа λ_i є комплексними, а вектори v_i можуть мати негативні компоненти, так що деякий випуск $v_i\lambda_i^t$ може виявитися від'ємним і, таким чином, не матиме ніякого економічного сенсу. У такому випадку виникає питання: За яких умов гарантується існування додатного власного числа, наприклад λ_1, і відповідного йому додатного власного вектору v_1?

Щоб відповісти на це питання, помітимо спочатку, що $(I - A) \in Z$, де Z – множина квадратних матриць з недодатними недіагональними елементами (Fiedler, Ptak [6]), що мають додатні власні значення, і при цьому, як помітили раніше Hawkins і Simon [10], $(I - A)^{-1} > 0$. $(I - A)^{-1} B > 0$, як добуток двох додатних матриць, а значить, по теоремі Фробеніуса існує просте власне число $\mu^* > 0$ і єдиний, відповідний йому власний вектор $v^* > 0$, такий що $\mu^* > |\mu_i|$ для всіх інших i. Таким чином, в даному випадку економіка здатна до збалансованого зростання.

Відповідна система для цін (вектор-рядок)

$$p_{t+1} - p_{t+1}A + p_{t+1}B = (1 + r_t)p_tB,$$

яку Солоу у світі теорії капіталу інтерпретує як рівноважний стан інвестора, що стоїть перед вибором, чи використовувати свої гроші для створення бізнесу, або віддати в кредит для отримання відсотка (r). У першому випадку у кінці періоду він отримає свій дохід від продажу p_{t+1}, віднімаючи поточні витрати $p_{t+1}A$ і додаючи вартість устаткування $p_{t+1}B$, яким він все ще володіє перед початком другого періоду. У другому випадку він віддає в кредит p_tB під процентною ставкою r_t і отримає $(1 + r_t)p_tB$. В рівноважному стані йому буде все одно, яку із стратегій вибирати і, таким чином, ми отримуємо динамічну систему

$$p_{t+1}(I - A + B) = (1 + r_t) p_t B .$$

Помноживши заздалегідь на B^{-1} і встановивши для простоти $r_t = 0$, отримуємо

$$p_{t+1}\left[\left(I - A\right)B^{-1} + I\right] = p_t ,$$

або

$$p_{t+1} = p_t\left[I + \left(I - A\right)B^{-1}\right] \equiv p_t N ,$$

де $N \equiv \left[I + \left(I - A\right)B^{-1}\right]$. Тоді система для визначення випуску x_t (вектор-стовпець) і двоїста до неї система для визначення ціни p_t (вектор-рядок) матимуть вигляд

$$x_{t+1} = Mx_t ,$$

$$p_{t+1} = p_t N.$$

Jorgensen [11] довів нестійкість моделі, показавши, що власні значення матриць M і N^{-1} співпадають і, таким чином, власні значення матриці M є зворотними до власних значень матриці N. Щоб переконатися в цьому, помітимо, що $M \equiv B^{-1}(I - A)$ і $N \equiv (I - A)B^{-1}$, тобто мають однакові власні числа, оскільки якщо μ – власне значення матриці $(I - A)B^{-1}$, тоді за визначенням

$$(I - A)B^{-1}x = \mu x .$$

Підставивши $y \equiv B^{-1}x$, отримаємо

$$(I - A)y = \mu By = B\mu y ,$$

$$B^{-1}(I - A)y = \mu y .$$

Таким чином, якщо ми визначимо відносну стійкість x_t як $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{x_i}{x_i^*} = c$ (c – деяка константа, мале додатне число), де $x_i(t)$ – i-а компонента вектора-розв’язка $x_t = M^t x_0$, а x_i^* – найбільший елемент вектора Фробеніуса, тоді легко помітити, що $x_{t+1} = Mx_t$ є відносно стійким тоді і тільки тоді коли відповідне йому число Фробеніуса $\lambda^* > |\lambda_i|$ для усіх інших i і $p_{t+1} = p_t N$ є відносно стійким тоді і тільки тоді, коли відповідне йому число Фробеніуса $\mu^* > |\mu_i|$ для усіх інших i. Але матриці M і N є зворотними одна до одної, тому і їх власні числа матимуть ту ж властивість, тобто $\lambda_i = \dfrac{1}{\mu_i}$ для усіх i і, отже, $\lambda^* > |\lambda_i|$ тоді і тільки тоді, коли $\mu^* \left(\equiv \dfrac{1}{\lambda^*} \right) < |\mu_i|$ для усіх i. Іншими словами, якщо система для визначення випуску є стійкою, то подвійна до неї система для визначення ціни є нестійкою і навпаки.

Модель перекриття поколінь

Широко розповсюдженою є модель перекриття поколінь Allais [4] Samuelson [12] та Diamond [7]. В цій моделі особи живуть два періоди: працюють в перший для отримання доходу w_t та йдуть на пенсію за накопичені кошти у другому. Товари не накопичуються, тому покоління торгуються одне з одним.

Нехай N_t – кількість людей, що народилися та працюють в період t, споживаючи c_{1t} в періоді праці та $c_{2,t+1}$ в наступному періоді (в періоді пенсії). Вважається, що населення зростає з постійним темпом n, тобто $N_t = N_0(1+n)^t$.

Особа отримує корисність від споживання в обидва періоди

$$u(c_{1t}) + (1+\delta)^{-t} u(c_{2,t+1}), \tag{19}$$

де δ – постійна додатна ставка майбутньої знижки.

Економіка функціонує при технології постійного прибутку:

$$Y = F(K, N) = NF(K/N, N) \equiv Nf(k), \qquad (20)$$

де F – однорідна за капіталом (K) та робочою силою (N), та $k \equiv K/N$ – капіталомісткість. Дохід на одиницю робочої сили буде $F(K/N, N) \equiv f(k)$, де $f'' < 0 < f'$.

Особа, що народилася в період t буде намагатися максимізувати

$$U \equiv u\left(c_{1t}\right) + \left(1+\delta\right)^{-1} u\left(c_{2,t+1}\right), \qquad (21)$$

за умови, що $c_{1t} = w_t - s_t$ (поточне споживання)

$c_{2,t+1} = \left(1 + r_{t+1}\right) s_t$ (споживання під час пенсії),

де s_t – заощадження в період t, а r_t – ставка відсотка в період t.

Умови першого порядку, отримані шляхом диференціювання функції Лагранжа $V = U + \lambda_t \left(w_t - c_{1t} - \frac{c_{2,t+1}}{1 + r_{t+1}} \right)$ за змінними c_{1t} та c_{2t} та подальшого перегрупування, мають вигляд:

$$u'\left(c_{1t}\right) + \left(1+\delta\right)^{-1}\left(1 + r_{t+1}\right) u'\left(c_{2,t+1}\right) = 0. \qquad (22)$$

Розв’язуючи дане рівняння, використовуючи теорему про неявну функцію, отримаємо, що заощадження є функцією від доходу (w_t) та ціни – ставка відсотка (r_{t+1}) відображає ціну, за якою нинішні блага обмінюються на майбутні блага, тобто

$$s_t = s\left(w_t, r_{t+1}\right), \qquad (23)$$

де

$$s_w \left(\equiv \partial s / \partial w_t\right) > 0 \text{ та } s_r \neq 0.$$

Фірми максимізують прибуток при дотриманні «граничних» умов, тобто обчислюючи граничний продукт праці з заробітної плати (w_t) та граничний продукт капіталу зі ставки відсотка (r_t):

$$f\left(k_t\right)-k_t f'\left(k_t\right)=w_t \tag{24}$$

$$f'\left(k_t\right)=r_t.$$

Ринкова рівновага потребує, щоб інвестиції $K_{t+1}-K_t$ дорівнювали різниці заощаджень молодих осіб $N_t s\left(w_t, r_{t+1}\right)$ та витрат старих K_t:

$$K_{t+1}-K_t=N_t s\left(w_t, r_{t+1}\right)-K_t, \tag{25}$$

або в термінах капіталомісткості

$$(1+n)k_{t+1}=s\left(w_t, r_{t+1}\right). \tag{26}$$

Замінюючи w_t та r_{t+1} граничними умовами

$$k_{t+1}=\frac{1}{1+n}s\left[f\left(k_t\right)-k_t f'\left(k_t\right), f'\left(k_{t+1}\right)\right]\equiv\psi\left(k_t\right) \quad ,(27)$$

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=\psi'\left(k_t\right)=\frac{-s_w\left(k_t\right)k_t f''\left(k_t\right)}{1+n-s_r\left(k_{t+1}\right)f''\left(k_{t+1}\right)} \quad . (28)$$

Легко бачити, що чисельник додатний в силу того, що $f''<0<s_w$, а знаменник може бути будь-якого знаку так як $s_r\neq 0$ – підвищення ставки відсотка може сприяти або збільшенню або зменшенню заощаджень. Якщо $s_r>0$, то $\psi'\left(k_t\right)>0$.

Якісний розв'язок отримаємо при перетині $k_{t+1}=\psi\left(k_t\right)$ з променем 45^0, тобто коли $k_{t+1}=k_t=k^*$. З урахуванням нелінійності рівняння , стійкість залежить від того, чи буде нахил в нерухомій точці $\psi\left(k_t\right)$ меншим за одиницю за абсолютною величиною

$$\left|\psi'\left(k^*\right)\right|=\left|\frac{-s_w k^* f''\left(k^*\right)}{1+n-s_r f''\left(k^*\right)}\right|<1.$$

Якщо $\psi(0)=0, \psi'(0)=\infty$ та $\psi''<0<\psi'$ для віх k, тоді буде існувати лише одна точка рівноваги; якщо $\psi(k_t)$ перетинається з променем 45^0 більше одного разу, наприклад в точках x^*, x^{**} та x^{***}, то буде існувати більше одної точки рівноваги. Наприклад, якщо $0<\psi'(x^*), \psi'(x^{***})<1<\psi'(x^{**})$, то x^{**} – точка нестійкої рівноваги, що знаходиться між двома точками стійкої рівноваги x^* та x^{***}.

Економічне зростання з грошима

Tobin [14] ввів в модель Солоу-Свана гроші. Рівновага k^* досягається при темпі $\theta \equiv \dot{M}/M$ зростання номінальної грошової маси (M).

Нехай $x \equiv m/p \equiv (M/L)/p$ – реальні грошові залишки на душу населення; p – ціна випуску в термінах рахункових грошей; $r(k,x)=f'(k)-\delta+\dot{p}/p$, де $\dot{p}/p=E(\dot{p}/p)$, тобто вважається, що очікуваний темп інфляції дорівнює фактичному темпу з постійною нормою амортизації δ,

$$\dot{p}/p=r(k,x)-f'(k)+\delta \qquad (29)$$

$$\frac{\dot{x}}{x}=\left(\frac{\dot{m}}{m}-\frac{\dot{p}}{p}\right)=\frac{\dot{M}}{M}-\frac{\dot{L}}{L}-\frac{\dot{p}}{p}.$$

Віднімемо з другого рівняння перше та позначимо $\lambda \equiv \theta-\delta-n$. Отримаємо

$$\dot{x}=\left[f'(k)+\lambda-r(k,x)\right]x \equiv \psi(k,x). \qquad (30)$$

Після спрощення (Burmeister & Dobell [6], глава 6) отримаємо наступну фундаментальну неокласичну функцію зросту

$$\dot{k} = sf - (n+s\delta)k - (1-s)\left[f' - \delta + \theta - r(k,x)\right]x \equiv \varphi(k,x) \tag{31}$$

Ці два рівняння та формують динамічну систему, лінеаризація якої за точкою рівноваги (k^*, x^*) приводить

$$\dot{z} = Ax + H.O.T. \tag{32}$$

де $z \equiv (k-k^*, x-x^*)$ та

$$A \equiv \begin{pmatrix} \varphi_k & \varphi_x \\ \psi_k & \psi_x \end{pmatrix}.$$

Враховуючи економічні припущення моделі $\varphi_k < 0 < \psi_k,\ \varphi_x, \psi_k < 0,\ \det A < 0$, що дає точку стійкої рівноваги (див. рис. 1) з додатними $\left(x^*, k^*\right)$. При відсутності грошей стає

$$\dot{k} = sf(k) - (n+s\delta)k \equiv \varphi(k,0). \tag{33}$$

Таким чином, разом з маємо, що $\dot{z} = Az$, де

$$A \equiv \begin{pmatrix} \varphi_k & 0 \\ \psi_k & \psi_x \end{pmatrix}.$$

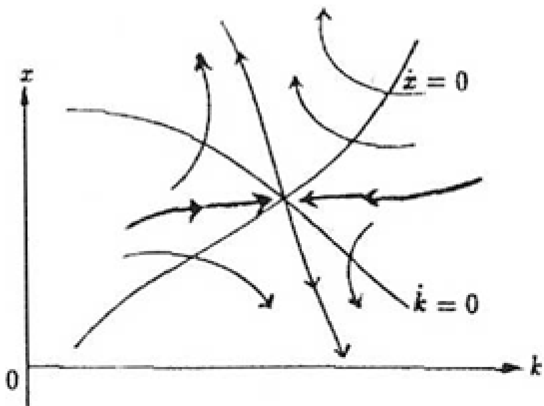


Рис 7. Зростання з грошима.

Легко бачити, що $\psi(k,0)$ не залежить від x, $trA = \varphi_k + \psi_k < 0$ та $\det A = \psi_x \varphi_k > 0$, а отже модель стійка.

Ця модель була також розширена (Benhabib, Miyao [5]) до системи з трьох рівнянь, щоб врахувати інфляцію $\dot{p}/p$.

Завдання № 1
Статичні, дискретні і неперервні моделі Кейнса

1. Як зміниться обсяг випуску в статичній моделі Кейнса при граничній схильності споживання $c' = 0.6$ і збільшенню податків на 20 грош.од.? Побудуйте формулу залежності зміни обсягу випуску від відносної зміни податків.

2. Нехай $c' = 0.6$, $t = 0.13$, державні витрати змінилися на 20 грош.од. Як зміниться *Y*? Побудуйте формулу залежності зміни обсягу випуску від відносної зміни державних витрат в статичній моделі Кейнса.

3. В статичній моделі Кейнса при зміні і податків, і державних витрат побудувати формулу зміни обсягу випуску. Яку частку в цій зміні відіграє зміна податків, а яку – зміна державних витрат?

4. Побудуйте дискретну лінійну модель Кейнса, в якій враховуються податки, які:

а) постійні, б) складають частину ВВП.

Дослідіть стійкість моделі в обох випадках.

5. Побудуйте дискретну лінійну модель Кейнса, в якій не враховуються податки, але враховуються державні витрати, які:

а) постійні, б) складають частину ВВП.

Дослідіть стійкість моделі в обох випадках.

6. Розгляньте дискретну лінійну модель Кейнса, в якій враховується чистий експорт:

$$Y(t) + P(t) = C(t) + I(t) + G(t) + Q(t),$$

де $P(t)$ – об'єм імпорту, $Q(t)$ – об'єм експорту за період t,

$$P(t) = P_0 + pY(t-1), Q(t) = Q_0 + qY(t-1),$$
$$p \in (0,1),\ q \in (0,1).$$

Дослідіть стійкість моделі.

7. Розгляньте докладно умови стійкості в дискретній лінійній моделі Кейнса при припущенні, що інвестиції залежать від доходу: $I(t) = sY(t-1) + I_0$, sÎ(0,1). Побудуйте її неперервний аналог і проведіть дослідження на стійкість.

8. В лінійній дискретній моделі Кейнса розглянути випадок, коли $I(t) = sY(t-1)$, sÎ(0,1),

а) $c + s < 1$, б) $c + s = 1$.

9. Розглянути дискретну модель Кейнса, в якій

а) і споживання, і інвестиції складають частку ВВП, не враховуються ні податки, ні державні витрати, ні експорт;

б) споживання стале, а інвестиції складають частко ВВП.

Дослідити стійкість моделі в обох випадках.

10. В неперервній лінійній моделі Кейнса знайти момент часу t_1, при якому $Y(t_1) = nY_e$, де n – відсоток від встановленого режиму, який задається.

11. Через який час в неперервній лінійній моделі Кейнса об’єм ВВП буде відрізнятися від стійкого значення на величину ε?

12. Порівняйте дискретну та неперервну моделі Кейнса. В якій моделі об’єм випуску буде відрізняться від стійкого значення на задану величину ε раніше? Проілюструйте висновок графічно.

13. Розгляньте нелінійну динамічну модель Кейнса. Оберіть дві функції швидкості росту ВВП, значення інвестицій I_0 і знайдіть стале значення ВВП. Дослідіть, як зміниться рівноважний стан ВВП при збільшенні інвестицій на деяку величину. Побудуйте графіки відповідних функцій ВВП.

14. Побудуйте графіки ВВП для неперервної і дискретної лінійних моделей Кейнса (при $\Delta t = 1$ і при $\Delta t = 0.1$)

для двох різних наборів значень параметрів моделі. Зробіть аналіз при їх порівнянні.

15. Розгляньте докладно умови стійкості в дискретній лінійній моделі Кейнса при припущенні, що інвестиції змінюються з початкового значення I_0 при $t = 0$ до $I = I_0 + \Delta I$ при $t > 0$. Побудуйте її неперервний аналог і проведіть дослідження на стійкість.

16. В лінійній неперервній моделі Кейнса розгляньте випадок, коли необхідно перейти з установленого режиму I_0 на сталий режим $I_0 + \Delta I$. Що буде з $Y(t)$?

Завдання № 2
Моделі Самуельсона, Хікса і Самуельсона–Хікса

1. В дискретній моделі Самуельсона докладно розглянути випадки, коли

а) $G(t) \equiv const \neq 1$.

б) $G(t) \equiv 0$.

в) $G(t) = G_0 g^t$.

Побудуйте графіки ВВП, які ілюструють всі випадки, задавши конкретні значення параметрів моделі.

2. Побудувати неперервний аналог моделі Самуельсона і детально дослідити його стійкість.

3. Розглянути питання стійкості дискретної і неперервної моделей Самуельсона при державних витратах $G(t) \equiv G_0$.

4. Розглянути питання стійкості дискретної і неперервної моделей Самуельсона, якщо капіталовкладення залежать від доходу:

$$I(t) = sY(t-1) + I_0, \quad s \in (0,1).$$

5. Розглянути докладно питання стійкості дискретної моделі Самуельсона, якщо державні витрати залежать від доходу: $G(t) = gY(t-1) + G_0$, $g\hat{I}(0,1)$.

6. Побудувати неперервний аналог моделі Хікса і детально дослідити його стійкість.

7.В моделі Хікса розглянути випадок, коли

$$C(t) = \underline{C} + cY(t-1),\ c \in (0,1).$$

8. Побудуйте графіки ВВП для неперервної і дискретної моделей Самуельсона–Хікса при різних значеннях параметрів моделі. Зробіть аналіз при їх порівнянні.

9. Як відреагує економіка у формі моделі Самуельсона–Хікса в неперервному випадку на збільшення щорічних інвестицій з I_0 до $I_0 + \Delta I$? Який економічний сенс коефіцієнтів моделі?

10. Розгляньте докладно умови стійкості в неперервній моделі Самуельсона –Хікса.

11. Побудуйте графіки ВВП для неперервної і дискретної моделей Самуельсона–Хікса (при $\Delta t=1$ і при $\Delta t=0.1$) для двох різних наборів значень параметрів моделі. Зробіть аналіз при їх порівнянні.

12. Розгляньте докладно умови стійкості в неперервній моделі Самуельсона з $G(t) \equiv G_0 = const$. Побудуйте графіки ВВП, що ілюструють всі випадки, задавши конкретні значення параметрів моделі.

13. Розгляньте докладно умови стійкості в дискретній моделі Самуельсона, вибравши різні функції державних витрат: $G(t) \equiv G_0 = const$. Побудуйте графіки ВВП, що ілюструють всі випадки, задавши конкретні значення параметрів моделі.

14. Розгляньте докладно умови стійкості в неперервній моделі Хікса, вибравши різні функції автономних інвестицій:

а) $A(t) \equiv A_0 = const$,

б) $A(t) \equiv 0.$

Побудуйте графіки ВВП, які ілюструють всі випадки, задавши конкретні значення параметрів моделі.

15. Розгляньте докладно умови стійкості в неперервній моделі Хікса, вибравши функцію автономних інвестицій у вигляді: $A(t) = aY(t-1) + A_0,\ a \in (0,1)$.
Побудуйте графіки ВВП, які ілюструють всі випадки, задавши конкретні значення параметрів моделі.

Завдання № 3
Моделі Харрода-Домара та Солоу

1. Чим передумови моделі Солоу відрізняються від передумов моделі Харрода–Домара? Які загальні принципи закладені в цих моделях?

2. Знайти темпи зростання доходу на одного робітника $\dot{y}/y$ і капіталоозброєності $\dot{k}/k$ в моделі Харрода-Домара.

3. Розгляньте властивості стійкості моделі Харрода-Домара.

4. Нехай в моделі Харрода–Домара темп зростання споживання вище технологічного темпу приросту і дорівнює темпу приросту доходу в початковий момент часу. Визначте момент часу, коли дохід максимальний, і момент часу, коли він спадає до нуля.

5. Нехай в моделі Харрода–Домара темп зростання споживання менше технологічного темпу приросту і дорівнює темпу приросту доходу в початковий момент часу. Знайдіть еластичність темпу приросту доходу за нормою накопичення.

6. Нехай під час війни запас капіталу не змінився, але зменшилися трудові ресурси. Як це вплине на загальний обсяг виробництва і продуктивність праці? Припустимо, що норма накопичення не змінилася, і перед війною економіка перебувала в стійкому стані. Що відбудеться з обсягом виробництва на душу населення в післявоєнній економіці?

7. Розгляньте модель Солоу з постійною чисельністю зайнятих і без технічного прогресу. Запишіть формулу для стійкого стану. Сформулюйте «золоте правило» накопичення для цього випадку.

8. Розгляньте модель Солоу з постійною чисельністю зайнятих і з працезберігаючим технічним прогресом. Запишіть формулу для стійкого стану. Сформулюйте «золоте правило» накопичення для цього випадку.

9. Нехай виробнича функція має вигляд $Y = 5e^{0.03t}K^{1/3}L^{2/3}$

Норма вибуття капіталу – 0,08. Чисельність зайнятих зростає на 2% в рік. Норма накопичення 25%. Який стійкий рівень капіталоозброєності одиниці праці з постійною ефективністю? Який стійкий рівень питомого доходу, інвестицій і споживання? Чи відповідає дана норма накопичення «золотому правилу»? Якщо ні, то якою вона має бути? Який стійкий рівень питомого доходу, інвестицій та споживання по «золотому правилу»?

10. Розгляньте золоте правило накопичення для виробничої функції $F(K,L) = dK + bL,\ \ d > 0, b > 0.$

11. Розгляньте золоте правило накопичення для виробничої функції Леонтьєва

$$F(K,L) = A\min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\} = A\min\{dK, bL\},\ \ d > 0, b > 0, A > 0.$$

12. Розгляньте золоте правило накопичення для виробничої функції, що враховує науково-технічний прогрес $F(K,L) = Ae^{pt}K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ (ρ – темп приросту випуску під впливом НТП).

13. Коефіцієнт накопичень – це частка накопичень, що йдуть на інвестиції в загальній сумі доходу: $s = \dfrac{I}{Y} = \dfrac{\dot{K} + \mu K}{Y}$.

Нехай $s(t) \equiv s.$ Побудуйте модель Солоу за допомогою s. Визначте значення капіталоозброєності і частку прибутку в доході α у точці рівноваги для функції Кобба-Дугласа.

$$\alpha = \frac{rK}{Y}, \quad r = \frac{\partial F}{\partial K}.$$

14. Дослідіть дискретний варіант моделі Солоу:

$$Y(t+1) = F(K(t), L(t)), \quad K(t+1) = K(t) + I(t+1) - \mu K(t).$$

На прикладі функції Кобба-Дугласа порівняйте вид стаціонарної траєкторії з траєкторією для неперервного варіанту.

15. Розгляньте варіант моделі Солоу, в якому фонд споживання пов'язаний з кількістю трудових ресурсів: $C = \beta L$.

Знайдіть стаціонарні точки для функції Кобба-Дугласа і дослідіть їх стійкість.

16. Розгляньте варіант моделі Солоу, в якому фонд споживання пов'язаний з кількістю трудових ресурсів: $C = \beta L$.

На прикладі функції Кобба-Дугласа дослідіть вплив параметрів β і μ на стійке стаціонарне значення фондоозброєності.

17. Дослідіть «золоте» правило накопичення для моделі Солоу, в якій фонд споживання пов'язаний з кількістю трудових ресурсів ($C = \beta L$) і порівняйте з отриманими в лекції результатом.

18. Розглянути модель регіону, що відрізняється від моделі Солоу тільки динамікою трудових ресурсів, оскільки їх відтворення в регіоні визначається не тільки природним приростом, але і механічним рухом населення (сальдо міграції), так що для динаміки трудових ресурсів маємо

$$\dot{L} = (n + \rho)L,$$

де ρ – відносне сальдо міграції в регіон. Будемо вважати, що ρ визначається темпом поліпшення рівня життя в регіоні, який в термінах наявних змінних можна оцінити обсягом фондів на одного працівника:

$$\rho = \pi(\dot{k} - \beta), \ \ \pi > 0,$$

де β – фіксований середній рівень «росту рівня життя», при якому сальдо міграції дорівнює нулю.

Побудувати диференціальне рівняння для фондоозброєності і провести аналіз моделі. Знайти темп зростання основних змінних моделі в стаціонарному стані.

19. Якщо модель Солоу включає іноземні позики, то рівняння доходу приймає вид

$$Y = C + I + (X - M),$$

де X – експорт, M – імпорт. Однак у відповідність з рівнянням платіжного балансу $X + D = M + \rho D$,

де D – розмір іноземних кредитів, ρ – величина відсотка по кредитах, ρ, D –задані. Написати диференціальне рівняння фондоозброєності, вважаючи, що розмір іноземного кредиту на одного робочого дорівнює d.

Завдання № 4
Неокласична модель економічного зростання

1. Розгляньте дві альтернативні можливості зміни умов в неокласичній моделі зростання:

а) $f'(k) \geq \lambda + \delta, \quad \forall k \geq 0,$

б) $f'(0) < \lambda.$

У кожному з цих випадків вивести умови «золотого правила» та дослідити розв’язок неокласичної задачі оптимального економічного зростання.

2. Якщо неокласична модель включає іноземну допомогу, то маємо диференціальне рівняння

$$\dot{k} = f(k) - \lambda k - c + \alpha,$$

де α – розмір допомоги на одного робітника.

• Покажіть графічно, при яких умовах країна може досягти зростання лише з іноземною допомогою.

• Вважаючи, що початковий капітал достатньо малий і виробнича функція є функцією Кобба–Дугласа, визначити, як довго повинна тривати допомога, щоб економіка країни змогла досягти стану, при якому можливе самостійне зростання.

3. Отримати вид оптимальної траєкторії і оптимального керування в неокласичній моделі економічного зростання для лінійної виробничої функції.

4. Коефіцієнт накопичень – це частка накопичень, що йдуть на інвестиції в загальній сумі доходу:

$$s = \frac{I}{Y} = \frac{\dot{K} + \mu K}{Y}.$$

Отримайте рівняння неокласичного економічного зростання за допомогою s. Визначте значення капіталоозброєності і частки прибутку в доході α в точці рівноваги,

$$\alpha = \frac{rK}{Y}, \quad r = \frac{\partial F}{\partial K}.$$

5. Нехай $f(k) = bk,\ b > 0,$ а функція корисності має вигляд $U(c) = \dfrac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma},$ де σ – еластичність граничної корисності. Розгляньте неокласичну модель оптимального економічного зростання. Знайдіть оптимальну траєкторію.

6. Нехай функція корисності залежить від добробуту, вимірюваного величиною капіталоозброєності, і від питомого споживання:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)} U(c,k)dt, \quad \frac{\partial U}{\partial c} > 0, \ \frac{\partial U}{\partial k} > 0.$$

Покажіть, що може існувати безліч стаціонарних рішень.

7. Коефіцієнт накопичень – це частка накопичень, що йдуть на інвестиції в загальній сумі доходу:

$$s=\frac{I}{Y}=\frac{\dot{K}+\mu K}{Y} \qquad W=\int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)}u((1-s)f(k))dt.$$

Нехай $s(t)\equiv s.$ При якому s досягається максимум W?

8. Якщо неокласична модель включає іноземні позики, то рівняння доходу приймає вид

$$Y=C+I+(X-M),$$

де X – експорт, M – імпорт. Однак у відповідність з рівнянням платіжного балансу

$$X+D=M+\rho D,$$

де D – розмір іноземних кредитів, ρ – величина відсотка по кредитах, ρ, D –задані.

Знайти траєкторію оптимального економічного зростання для задачі максимізації

$$W=\int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)}u(c,d)dt,\ \frac{\partial u}{\partial c}>0,\ \frac{\partial u}{\partial d}>0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial c^2}<0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial d^2}<0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial c\partial d}=0.$$

Керуючими параметрами є питоме споживання c і швидкість зміни величини іноземних кредитів на одного робочого

$$\dot{d}=v,\ 0\le v\le v_{\max}.$$

9. В моделі Рамсея $\delta=0,\ \ t_1=\infty,$ корисність обмежена деякою кінцевою верхньою межею B, яка має назву «блаженства»

$$B=\max U(c)=U(c_B).$$

Функціонал має вигляд: $\min\limits_{c(t)} R=\int_{t_0}^{\infty}(B-U(c(t))dt.$

Розв’язати задачу Рамсея про мінімізацію R в умовах неокласичної моделі зростання.

10. Розв'язати неокласичну задачу про оптимальне економічне зростання, якщо $\delta = 0$, $t_1 = \infty$, але добробут вимірюється як накопичений надлишок понад значення корисності, відповідного «золотому» правилу, де

$$W = \int_0^\infty (U(c(t)) - U(\hat{c}(t)))dt, \quad \hat{c} = f(\hat{k}) - \lambda\hat{k}, \quad f'(\hat{k}) = \lambda.$$

11. Опишіть, як обчислюються t^* і t^{**} в неокласичній задачі оптимального економічного росту з кінцевим досить великим часовим горизонтом, постійної граничною корисністю та $\delta = 0$. Знайдіть в явній формі розв'язок для випадку, коли відношення капіталу до випуску постійне і $f(k) = bk$.

12. Знайдіть оптимальну траєкторію для $f(k) = bk$ і $U(c) = c^{1-\sigma}/1-\sigma$, де b – постійне додатне відношення капіталу до випуску, а σ – постійна додатна еластичність граничної корисності.

13. Покажіть, що при $t \to \infty$ капіталоозброєність $k \to (s/\lambda)^{1/1-\alpha}$. Поясніть економічний зміст цього співвідношення.

14. Покажіть, що темп зміни капіталоозброєності $\dot{k}/k$ дорівнює різниці темпів приросту капіталу та трудових ресурсів. Поясніть сенс стаціонарного стану макроекономічної системи для змінних виробництва, капіталу і праці.

15. Покажіть, що якщо різниця темпів приросту капіталу та трудових ресурсів дорівнює нулю, то інвестиції зростають з темпом приросту трудових ресурсів.

Список тем і питань для самостійної роботи

Тема 1. Елементи макроекономічного аналізу.
Тема 2. Загальна модель макроекономічної динаміки.
Тема 3. Модель відкритої перехідної економіки.
Тема 4. Моделі пропозиції та виробництва.
Тема 5. Лінійні моделі інфляції.
Тема 6. Системи високої інфляції.
Тема 7. Модель інфляції в перехідній економіці.
Тема 8. Інфляція та очікування у перехідній економіці.
Тема 9. Коливання і стабілізація інфляції.
Тема 10. Динаміка державного боргу та сеньйоражу.

Питання

1. Проаналізуйте, які заходи вживатимуть центральні банки країн А і В з закритою економікою з нейтралізації потрясінь в залежності від поставлених ним завдань. Центральний банк країни А ставить своїм завданням лише підтримання цін на стабільному рівні. Центральний банк країни В ставить за мету тільки підтримку обсягу виробництва і безробіття на природному рівні. Які заходи вживає кожна країна у відповідь на:

А) викликане зовнішніми чинниками уповільнення швидкості обігу грошей;

В) викликане зовнішніми факторами збільшення цін на нафту.

2. У якому випадку в моделі $IS - LM$ не буде спостерігатися ефект витіснення інвестицій при проведенні стимулюючої бюджетно-податкової політики? Обґрунтуйте свою відповідь.

3. У якому випадку в моделі $IS - LM$ буде спостерігатися ефект повного витіснення інвестицій при проведенні стимулюючої бюджетно-податкової політики? Обґрунтуйте свою відповідь.

4. Нехай економіка країни М є закритою і інвестиції в ній нескінченно еластичні за ставкою відсотка. Визначте мультиплікатори бюджетно-податкової і кредитно-грошової політики.

5. Нехай сукупне споживання в закритій економіці залежить як від наявного доходу, так і від реальної ставки відсотка. Відомо, що випуск в країні досяг рівня повної зайнятості. В цих умовах уряд приймає закон про збільшення податків на ΔT . Опишіть, як зміняться в новому стані короткострокової загальної економічної рівноваги реальний дохід, споживання, реальна ставка відсотка, інвестиції.

6. В закритій економіці функції споживання, інвестицій і попиту на гроші є лінійними. Сукупне споживання залежить як від наявного доходу, так і від реальної ставки відсотка. Виведіть мультиплікатори бюджетно-податкової і кредитно-грошової політики для цієї економіки.

7. Проаналізуйте вплив зростання ощадливості населення країни із закритою економікою, що виражається в скороченні автономного споживання, на короткострокові рівноважні рівні доходу і заощаджень в припущенні про незмінність інвестицій. Чому цей результат називається «парадоксом ощадливості»? Чи виникає цей парадокс при розгляді довгострокового макроекономічної рівноваги? Обґрунтуйте відповідь.

Література

1. Вітлінський В. В. Моделювання економіки / В. В. Вітлінський. – Київ, 2007. – 406 с.
2. Моделирование экономических процессов / Под ред. Грачевой М. В., Фадеевой Л. Н., Черемных Ю. Н. – М.: ЮНИТИ, 2005. – 351 с., главы 6–7.
3. Смирнов А. Д. Лекции по макроэкономическому моделированию / А. Д. Смирнов. – М., 2000. – 350 с.
4. Allais M. Economic et Interet. / M. Allais // Imprimerie Nationale. – Paris, 1947.
5. Benhabib J. Some New Results on the Dynamics of the Generalized Tobin Model / J. Benhabib, T. Miyao // International Economic Review. – October, 1981. – 22(3). – P. 589–596.
6. Burmeister E. Mathematical Theories of Economic Growth / E. Burmeister, A. R. Dobell // MacMillan. – London, 1970.
7. Diamond P. A. National Debt in a Neo Classical Growth Model / P. A. Diamond // American Economic Review. – December, 1965. – 55(5). – P. 1126–1180.
8. Duesenberry J. S. Selected Problems in Economic Theory: Discussion / J. S. Duesenberry // American Economic Review. – May, 1959. – 49. – P. 528–530.
9. Fiedler M. On Matrices with Nonpositive Off-Diagonal Elements and Positive Principal Minors / M. Fiedler, V. Ptak. // Czechoslov. Mathematics Journal. – 1962. – 12. – P. 382–400.
10. Hawkins V. Note: Some Conditions of Macroeconomic Stability / V. Hawkins, A. Simon // Econometrica. – July-October, 1949. – 17. – P. 245–248.
11. Jorgensen D. W. On stability in sense of Harrod / D. W. Jorgensen // Economica NS. – August, 1960. – P. 243–248.

12. Pierre N. V. Tu Dynamical Systems: An Introduction with Applications in Economics and Biology / Pierre N. V. Tu. – Springer, 2nd edition, 1994. – 332 p.
13. Samuelson P. A. An Exact Consumption-Loan Model on Interest with or without the Social Contrivance of Money / P. A. Samuelson // Journal of Political Economy. – December, 1958. – 66(6). – P.467–482.
14. Solow R. M. Note on Uzawa's Two-Sector Model of Economic Growth / R. M. Solow // Review of Economic Studies. – October, 1961. – 29. – P. 48–50.
15. Tobin J. Money and Economic Growth / J. Tobin // Econometrica. – October, 1965. – 33. – P. 671–684.
16. Uzawa H. On a Two-Sector Model of Economic Growth / H. Uzawa // Review of Economic Studies. – October, 1961. – 28. – P. 40–47.

Зміст

Навчальне видання

Єфимова Галина Олексіївна
Осадча Ольга Олександрівна

Методичні вказівки
по спецкурсу «Математичні моделі макроекономіки»
та по курсу «Моделі економічної динаміки»

Верстка — Карлічук О. І.

Підп. до друку 14.03.2013. Формат 60х84/16.
Гарн. Таймс. Умов.-друк. арк. 3,95. Тираж 25 прим.
Зам. № 578

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова
Свідоцтво ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua