Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
Институт математики, экономики и механики

В. И. Коляда, А. А. Кореновский

Курс лекций по математическому анализу

В двух частях

Часть 1

Одесса
«Астропринт»
2010

ББК 22.161я73
УДК 517(075.8)
К 62

Данный курс лекций предназначен для студентов математических факультетов. Изложенный материал рассчитан на 280 лекционных часов при условии, что имеется примерно столько же часов практических или лабораторных занятий. Приведена программа всего курса, разбитого на четыре семестра. Каждый семестр делится на три модуля, продолжительность которых составляет соответственно 8, 8 и 2 недели в первом и третьем семестрах и 7, 7 и 3 недели — во втором и четвертом. По истечении каждого модуля предполагается свободная от занятий неделя, во время которой студенты сдают прослушанный материал и получают баллы. В конце каждого семестра студент получает соответствующую оценку в зависимости от общего количества баллов, набранных на теоретических и практических контрольных мероприятиях.

Курс лекций состоит из двух частей. Первая часть относится к первым двум семестрам, вторая — к третьему и четвертому семестрам. В конце каждой части приведены комплекты экзаменационных билетов по программе каждого семестра в целом.

Рецензенты:

И. А. Шевчук, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Киевского национального университета имени Тараса Шевченко;

В. Ф. Бабенко, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Днепропетровского национального университета;

Д. И. Боднар, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой экономической кибернетики Тернопольского национального университета

Рекомендовано к печати ученым советом Одесского национального университета имени И. И. Мечникова.

Протокол № 9 от 27 мая 2008 г.

ISBN 978–966–190–172–7 (в двух частях)
ISBN 978–966–190–173–4 (часть 1)

Оглавление

УЧЕБНЫЙ ПЛАН КУРСА

Согласно с учебным планом курс математического анализа рассчитан на 4 семестра и читается на первых двух курсах.

Расчет часов по семестрам и форма отчетности приведены в следующей таблице.

Курс	Семестр	Всего (часов)	Лекций	Практич. занятий	Зачет	Экзамен
1	1	144	72	72	+	+
1	2	136	68	68	+	+
2	3	144	72	72	+	+
2	4	119	68	51	+	+
	Всего	543	280	263	4	4

В каждом семестре по результатам контрольных мероприятий начисляются баллы и выставляется оценка за семестр в соответствии с количеством баллов по следующему критерию.

Всего баллов за семестр – **100**:
по теоретическому материалу – **50**, по практическим занятиям – **50**.

Шкала оценок по результатам семестра:

Баллы	25 – 50 (из 50)	0 – 49	50 – 69	70 – 84	85 – 100
Оценка	Зачет	Неуд.	Удовл.	Хорошо	Отлично

Распределение учебного материала по семестрам, форма отчетности, баллы[1]

Сем.	Мод.	Темы	Отчетность	Проводит	Баллы	Нед.
1	1	Шк.	Озн. КР	Асс.		1
1	1	1	КР	Асс.		3
1	1	2	КР	Асс.		7
1	**1**	**1,2**	**Инд. КР**	**Лект.**	**15**	**9**
1	2	3	КР	Асс.		11
1	2	4	КР	Асс.		15
1	**2**	**3,4**	**Колл. (соб.)**	**Лект.**	**15**	**18**
1	3	5	КР	Асс.		20
1	**3**	**1 – 5**	**Итог. соб.**	**Лект., Асс.**	**20**	**21**
2	1	6	КР	Асс.		3
2	1	7,8	КР	Асс.		7
2	**1**	**6 – 8**	**Инд. КР**	**Лект.**	**15**	**8**
2	2	9 – 11	КР	Асс.		11
2	2	12	КР	Асс.		15
2	**2**	**9 – 12**	**Колл. (соб.)**	**Лект.**	**15**	**16**
2	3	13,14	КР	Асс.		19
2	**3**	**6 – 14**	**Итог. соб.**	**Лект., Асс.**	**20**	**20**

[1] Сем. – семестр; Мод. – номер модуля; Нед. – неделя; Шк. – материал школьной программы; Озн. КР – ознакомительная контрольная работа; КР – контрольная работа; Инд. КР – индивидуальная контрольная работа; Колл. (соб.) – коллоквиум (собеседование); Итог. соб. – итоговое собеседование; Асс. – ассистент; Лект. – лектор

Сем.	Мод.	Темы	Отчетность	Проводит	Баллы	Нед.
3	1	15	КР	Асс.		4
3	1	16,17	КР	Асс.		7
3	**1**	**15 – 17**	**Инд. КР**	**Лект.**	**15**	**9**
3	2	18	КР	Асс.		11
3	2	19	КР	Асс.		15
3	**2**	**18 – 19**	**Колл. (соб.)**	**Лект.**	**15**	**18**
3	3	20,21	КР	Асс.		19
3	**3**	**15 – 21**	**Итог. соб.**	**Лект., Асс.**	**20**	**21**
4	1	22	КР	Асс.		4
4	1	22	КР	Асс.		7
4	**1**	**22**	**Инд. КР**	**Лект.**	**15**	**8**
4	2	23	КР	Асс.		11
4	2	24	КР	Асс.		15
4	**2**	**23,24**	**Инд. КР**	**Лект.**	**15**	**16**
4	3	25	КР	Асс.		19
4	**3**	**22 – 25**	**Итог. соб.**	**Лект., Асс.**	**20**	**20**

Даты проведения контрольных мероприятий и распределение баллов по контрольным работам по практическим занятиям согласовываются в начале текущего семестра.

ПРОГРАММА КУРСА

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Модуль I

Тема 1. Действительные числа. Верхние и нижние грани множеств.

1. Существование иррациональных чисел.

2. Способы определения множества действительных чисел.

3. Аксиоматическое определение множества действительных чисел.

4. Индуктивные множества, множество натуральных чисел, принцип математической индукции.

5. Ограниченные множества, верхняя и нижняя грани, теорема об их существовании.

6. Целые числа, принцип Архимеда, плотность множества рациональных чисел.

7. Теорема о существовании корня.

8. Модуль числа и его свойства.

Тема 2. Пределы последовательностей.

1. Определение предела последовательности и его геометрический смысл, примеры.

2. Свойства сходящихся последовательностей (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности, свойства, связанные с неравенствами, теорема о трех пределах).

3. Арифметические свойства сходящихся последовательностей.

4. Бесконечно малые последовательности и их свойства.

5. Бесконечно большие последовательности и их связь с бесконечно малыми последовательностями.

6. Лемма Кантора о вложенных отрезках.

7. Подпоследовательности, лемма Больцано – Вейерштрасса.

8. Фундаментальность и критерий Коши сходимости последовательности, примеры.

9. Монотонные последовательности, критерий сходимости монотонной последовательности, примеры.

10. Сходимость последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и число $\mathbf{e}$.

11. Два определения частичных пределов последовательности и их эквивалентность, верхний и нижний пределы последовательности, их существование, примеры.

12. Критерий сходимости последовательности в терминах верхнего и нижнего пределов.

Модуль II

Тема 3. Пределы функций.

1. Определение функции.

2. Эквивалентные множества, конечные, счетные и несчетные множества, счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

3. Определение предела функции по Коши и его геометрический смысл, примеры.

4. Единственность предела, локальная ограниченность функции, имеющей предел.

5. Определение предела функции по Гейне и его эквивалентность определению по Коши, примеры применения.

6. Пределы функций и арифметические операции.

7. Предельный переход и неравенства, теорема о трех пределах.

8. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$.

9. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности и их геометрический смысл.

10. Критерий Коши существования предела функции.

11. Монотонные функции, критерий существования предела монотонной функции.

12. Теорема о замене переменной в пределах, примеры применения.

13. Частичные пределы, верхний и нижний пределы функции, их существование.

Тема 4. Непрерывные функции.

1. Определение непрерывности в смысле Коши и в смысле Гейне, их эквивалентность, геометрический смысл непрерывности.

2. Примеры непрерывных и разрывных функций.

3. Классификация точек разрыва, примеры.

4. Непрерывность и арифметические операции, непрерывность элементарных функций.

5. Теорема о непрерывности композиции.

6. Непрерывность и разрывы монотонной функции, теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.

7. Непрерывность монотонной функции, множество значений которой является промежутком.

8. Свойство промежуточных значений, теорема Больцано – Коши о корне и следствие из нее, примеры применения, критерий непрерывности монотонной функции.

9. Первая теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции.

10. Вторая теорема Вейерштрасса о достижении верхней и нижней граней.

11. Обратная функция, теорема о непрерывности обратной функции, обратные тригонометрические функции.

12. Определение и свойства показательной функции, непрерывность показательной функции.

13. Логарифмическая функция и ее свойства.

14. Степень с действительным показателем.

15. Предел функции $(1+x)^{1/x}$ при $x \to 0$, следствия.

16. Сравнение логарифмической, степенной и показательной функций.

17. Эквивалентные функции и их применение при нахождении пределов.

18. Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых функций, символы Ландау.

19. Равномерная непрерывность, теорема Кантора, примеры.

Модуль III

Тема 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

1. Определение производной и определение дифференцируемости функции в точке, их эквивалентность.

2. Непрерывность дифференцируемой функции.

3. Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции.

4. Односторонние производные.

5. Дифференцируемость и арифметические операции.

6. Производная композиции.

7. Производная обратной функции.

8. Производные основных элементарных функций.

9. Теорема Ферма о корне производной.

10. Теорема Ролля о корне производной.

11. Теорема Лагранжа о среднем значении и следствия из нее.

12. Теорема Коши (обобщенная теорема о среднем значении).

13. Теорема Дарбу о промежуточном значении производной.

14. Два правила Лопиталя о раскрытии неопределенностей.

15. Производные высших порядков.

16. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано, единственность многочлена Тейлора.

17. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена.

18. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа, примеры ее применения.

19. Условия постоянства функции в терминах производной.

20. Условия монотонности функции в терминах производной.

21. Экстремумы функции, необходимые и достаточные условия существования экстремумов.

22. Применение формулы Тейлора для нахождения экстремумов.

23. Глобальные экстремумы и методы их нахождения.

24. Выпуклые функции и их свойства, критерий выпуклости.

25. Точки перегиба и методы их нахождения.

26. Исследование функций и построение их графиков с помощью производных.

ВТОРОЙ СЕМЕСТР

Модуль I

Тема 6. Неопределенный интеграл.

1. Определение первообразной, примеры. Торема о разности двух первообразных. Неопределенный интеграл и его элементарные свойства (интегрирование производной, линейность, линейная замена переменной).

2. Формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла, примеры.

3. Теорема о замене переменной в неопределенном интеграле, примеры.

4. Интегрирование элементарных рациональных функций в общем виде (4 типа). Теорема об интегрировании рациональной функции.

5. Метод Остроградского интегрирования рациональных функций.

6. Методы вычисления неопределенных интегралов от функций, рациональных относительно $\sin x$ и $\cos x$, примеры.

7. Интегрирование функций вида $R\left(x^{p_1/q_1}, \dots, x^{p_n/q_n}\right)$, примеры.

8. Интегрирование функций вида $R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/m}\right)$, примеры.

9. Интегрирование биномиального дифференциала, примеры.

Тема 7. Интеграл Римана.

1. Определение интегральной суммы и ее предела. Определение интеграла Римана.

2. Ограниченность интегрируемой по Риману функции. Пример ограниченной неинтегрируемой по Риману функции.

3. Интегрируемость тождественной постоянной, функции $f(x) = x$ на $[0, 1]$, ступенчатой функции.

4. Интегрируемость функции Римана на $[0, 1]$.

5. Суммы Дарбу и их свойства.

6. Интегралы Дарбу и связь между ними. Интегралы Дарбу для функции Дирихле.

7. Критерий интегрируемости по Риману в терминах сумм Дарбу.

8. Критерий интегрируемости по Риману в терминах колебаний.

9. Интегрируемость по Риману непрерывной функции.

10. Интегрируемость по Риману монотонной функции.

11. Интегрируемость по Риману функции, имеющей конечное число точек разрыва.

12. Примеры интегрируемых по Риману функций, имеющих бесконечное множество точек разрыва.

13. Критерий Дарбу интегрируемости по Риману в терминах верхнего и нижнего интегралов (без доказательства). Множество лебеговой меры нуль и критерий Лебега интегрируемости по Риману (без доказательства).

14. Интегрируемость модуля интегрируемой функции и линейной комбинации интегрируемых функций.

15. Интегрируемость произведения интегрируемых по Риману функций.

16. Интегрируемость на подынтервалах интегрируемой функции.

17. Линейность интеграла Римана.

18. Аддитивность интеграла Римана.

19. Монотонность интеграла Римана, следствия. Интеграл от положительной функции.

20. Элементарный вариант теоремы о среднем значении и следствие для непрерывной функции.

21. Первая теорема о среднем значении и следствие для непрерывной функции.

22. Равномерная непрерывность интеграла с переменным верхним пределом.

23. Вторая теорема о среднем значении. Формулы Бонне.

24. Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом в точке непрерывности подынтегральной функции. Пример разрывной функции, у которой интеграл с переменным верхним пределом имеет производную.

25. Теорема Ньютона – Лейбница.

26. Обобщенная теорема Ньютона – Лейбница.

27. Понятие обобщенной первообразной и теорема о ее существовании.

28. Дифференцирование интегралов, у которых пределы интегрирования являются функциями.

29. Формула интегрирования по частям для интеграла Римана.

30. Теорема о замене переменной в интеграле Римана от непрерывной функции.

31. Формула Валлиса.

32. Теорема о замене переменной в интеграле Римана от интегрируемой функции.

33. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.

Тема 8. Приложения определенного интеграла.

1. Внешняя и внутренняя меры Жордана, измеримость по Жордану. Пример неизмеримого по Жордану множества.

2. Определение подграфика функции. Теорема об измеримости подграфика интегрируемой функции.

3. Вычисление площади области, заданной в полярных координатах, примеры.

4. Определение пути и его длины. Достаточное условие спрямляемости.

5. Формула вычисления длины гладкого пути.

6. Вычисление объема тела вращения.

7. Вычисление площади поверхности тела вращения.

Модуль II

Тема 9. Пространство $\mathbb{R}^n$.

1. Пространство $\mathbb{R}^n$ и операции на нем. Скалярное произведение, евклидова норма и их свойства.

2. Открытые множества и их свойства, примеры.

3. Замкнутые множества и их свойства, примеры. Теорема о дополнении для замкнутых и открытых множеств.

4. Компактные множества. Теорема о вложенных сегментах. Лемма и теорема Гейне – Бореля.

5. Лемма Больцано – Вейерштрасса.

Тема 10. Последовательности точек в $\mathbb{R}^n$.

1. Определение предела, единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности.

2. Предельный переход и арифметические операции.

3. Критерий Коши сходимости последовательности точек из $\mathbb{R}^n$.

Тема 11. Непрерывные отображения.

1. Определение предела функции по Коши и по Гейне и их эквивалентность.

2. Арифметические свойства пределов функций.

3. Определение непрерывности функции в точке. Непрерывность функции и ее компонент.

4. Арифметические свойства непрерывных функций. Теорема о непрерывности композиции.

5. Теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях на компактных множествах.

6. Теорема о непрерывном образе компактного множества.

7. Равномерная непрерывность и теорема Кантора.

8. Связные множества. Теорема о непрерывном образе связного множества и следствие (теорема Больцано – Коши).

9. Связность и линейная связность и соотношение между ними.

Тема 12. Дифференцируемые действительные функции.

1. Линейные формы и их непрерывность, примеры. Гиперплоскости, примеры гиперплоскостей.

2. Определение дифференцируемой функции. Производная и ее геометрический смысл.

3. Теорема о дифференциале аффинной функции. Единственность дифференциала. Примеры.

4. Определение частной производной и ее геометрический смысл.

5. Связь между дифференцируемостью и существованием частных производных, примеры.

6. Функции, дифференцируемые на множестве. Функции класса C^1 и теорема об их дифференцируемости.

7. Производная по направлению, примеры. Теорема о вычислении производной по направлению дифференцируемой функции.

8. Градиент функции и его геометрический смысл.

9. Теорема о среднем значении.

10. Связь между постоянством функции и равенством нулю ее дифференциала.

11. Определение производной векторной функции действительной переменной. Дифференцируемость функции и ее компонент.

12. Теорема о дифференцируемости композиции. Цепное правило, примеры.

13. Частные производные высших порядков, примеры.

14. Теорема Шварца и ее обобщения.

15. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

16. Определение квадратичной формы. Знакоопределенные квадратичные формы, примеры.

17. Определение знака квадратичной формы по ее коэффициентам (случай $n = 2$). Критерий Сильвестра (без доказательства).

18. Определение локального экстремума, необходимое условие локального экстремума. Стационарные точки, примеры.

19. Достаточное условие экстремума в терминах квадратичных форм.

Модуль III

Тема 13. Дифференцируемые отображения.

1. Линейное отбражение, норма и ее свойства.

2. Теорема о равномерной непрерывности линейного отображения.

3. Композиция линейных отбражений. Аффинное отображение.

4. Дифференцируемые отображения. Дифференцируемость линейного отображения. Теорема о непрерывности дифференцируемого отображения.

5. Единственность производной дифференцируемого отображения.

6. Связь между дифференцируемостью отображения и его компонент.

7. Дифференцируемые на множестве отображения. Отображения класса C^1. Теорема о дифференцируемости отображения класса C^1.

8. Матрица Якоби и ее определитель.

9. Теорема о производной композиции. Цепное правило.

10. Теорема об обратимости линейного отображения.

11. Теорема об обратной функции.

12. Теорема о неявной функции.

Тема 14. Функции на многообразиях.

1. Аффинные и гладкие многообразия.

2. Касательные и нормальные векторы. Касательное пространство.

3. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

4. Зависмость функций.

ТРЕТИЙ СЕМЕСТР

Модуль I

Тема 15. Числовые ряды.

1. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости.

2. Элементарные свойства сходящихся рядов.

3. Ряды с неотрицательными слагаемыми. Гармонический ряд и обобщенный гармонический ряд.

4. Признак сравнения. Признак Даламбера. Признак Коши. Интегральный признак.

5. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница.

6. Признаки Абеля и Дирихле.

7. Абсолютная и условная сходимость. Перестановка ряда, теорема Римана.

8. Произведение рядов, теорема Коши.

9. Бесконечные произведения и их свойства.

Тема 16. Функциональные последовательности и ряды.

1. Равномерная сходимость последовательностей и рядов. Критерий Коши.

2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости.

3. Признаки Абеля и Дирихле.

4. Равномерная сходимость и непрерывность.

5. Равномерная сходимость и интегрирование.

6. Равномерная сходимость и дифференцирование.

7. Перестановка предельных переходов.

Тема 17. Степенные ряды.

1. Первая теорема Абеля. Понятие радиуса сходимости.

2. Вычисление радиуса сходимости. Теорема Коши – Адамара.

3. Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда. Вторая теорема Абеля.

4. Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда.
5. Коэффициенты Тейлора, ряд Тейлора.
6. Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.
7. Разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций.

Модуль II

Тема 18. Несобственные интегралы.

1. Интегралы по неограниченному промежутку.
2. Интегралы от неограниченных функций.
3. Элементарные свойства несобственных интегралов.
4. Признаки сходимости несобственных интегралов. Критерий Коши.
5. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.
6. Признаки Абеля и Дирихле.

Тема 19. Интегралы, зависящие от параметра.

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра, и их свойства (непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость).

2. Собственные интегралы, зависящие от параметра, у которых пределы интегрирования также зависят от параметра. Свойства.

3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра, равномерная сходимость. Критерий Коши.

4. Признаки равномерной сходимости (Вейерштрасса, Абеля и Дирихле).

5. Связь между несобственными интегралами, зависящими от параметра, и функциональными рядами.

6. Основные свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра (непрерывность, дифференцируемость и интегрирование по параметру, перестановка порядка интегрирования).

7. Интегралы Эйлера – Пуассона и их свойства.

Модуль III

Тема 20. Ряды Фурье.

1. Ортонормированные системы в евклидовых пространствах. Ряды Фурье по ортонормированным системам.

2. Минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя.

3. Тригонометрические ряды. Теорема Римана о тригонометрических коэффициентах Фурье.

4. Замкнутые и полные ортонормированные системы. Равенство Парсеваля.

5. Тригонометрические ряды Фурье. Ядро Дирихле. Принцип локализации.

6. Условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке. Признак Дини. Следствия.

7. Суммируемость ряда Фурье методом Чезаро. Теорема Фейера.

8. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими полиномами.

9. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье.

Тема 21. Интеграл Римана – Стилтьеса.

1. Интеграл Римана – Стилтьеса относительно монотонной функции и его элементарные свойства. Примеры.

2. Функции ограниченной вариации и интеграл Римана – Стилтьеса.

ЧЕТВЕРТЫЙ СЕМЕСТР

Модуль I

Тема 22. Кратные интегралы.

1. Мера фигур и ее свойства.

2. Внешняя и внутренняя меры Жордана. Измеримые по Жордану множества, примеры.

3. Критерий измеримости по Жордану.

4. Свойства меры Жордана.

5. Определение интеграла Римана.

6. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости по Риману в терминах сумм Дарбу.

7. Критерий интегрируемости по Риману в терминах верхнего и нижнего интегралов и в терминах колебаний.

8. Интегрируемость по Риману непрерывной на компактном множестве функции и функции, разрывной на множестве жордановой меры нуль.

9. Критерий Лебега интегрируемости по Риману ограниченной функции (без доказательства).

10. Элементарные свойства интеграла Римана.

11. Сведение кратного интеграла Римана к повторному.

12. C^1-диффеоморфизм и его свойства. Якобиан, его свойства и геометрический смысл.

13. Замена переменной в кратном интеграле Римана.

Модуль II

Тема 23. Криволинейные интегралы.

1. Непрерывные, гладкие, простые кривые. Простой контур. Ориентированные кривые. Спрямляемые кривые.

2. Определение криволинейного интеграла первого рода и его элементарные свойства. Физический смысл. Примеры.

3. Векторное поле. Определение криволинейного интеграла второго рода и его элементарные свойства, примеры.

4. Формула Грина о связи криволинейных интегралов с двойными.

5. Потенциальные поля. Два критерия потенциальности.

Тема 24. Поверхностные интегралы.

1. Поверхности в трехмерном пространстве. Непрерывные, простые и почти простые поверхности. Ориентируемые поверхности.

2. Площадь поверхности и ее свойства. Формулы для вычисления площади поверхности.

3. Поверхностные интегралы первого рода, их физическая интерпретация, примеры.

4. Поток вектор-функции через ориентированную поверхность и поверхностный интеграл второго рода, примеры.

Модуль III

Тема 25. Элементы теории поля.

1. Скалярные и векторные поля в трехмерном пространстве.
2. Дивергенция и вихрь векторного поля.
3. Формула Остроградского – Гаусса.
4. Формула Стокса.
5. Потенциалы в трехмерном пространстве.
6. Соленоидальные поля.

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х т. М.: Наука, 1970.

2. Ландау Э. Основы анализа. М.: ИЛ, 1947.

3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: в 2-х ч. М.: Наука, 1982.

4. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

5. Никольский С. М. Курс математического анализа: в 2-х т. М.: Наука, 1990.

6. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: в 2-х т. М.: Наука, 1964.

7. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ: в 2-х т. М.: Высшая школа, 1973.

8. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1977.

9. Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 1984.

10. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях. М.: Изд-во МГУ, 1991.

11. Ляшко И. И. и др. Математический анализ в примерах и задачах. Киев: Вища школа, 1974.

1. Действительные числа. Верхние и нижние грани множеств

1.1 Система действительных чисел

Еще со школьного курса известно, что многие операции невыполнимы в рамках множества рациональных чисел. Примером может служить следующее

Предложение. *Не существует рационального числа* $\frac{p}{q}$ *(p – целое, q – натуральное), квадрат которого равен* 2.

Доказательство. Предположим, что такие p и q существуют. Можем считать, что хотя бы одно из них нечетное, иначе их можно сократить. Но тогда $\frac{p^2}{q^2} = 2$, а значит, $p^2 = 2q^2$. Отсюда следует, что p четное, т. е. $p = 2r$, где r – целое. Поэтому $(2r)^2 = 2q^2$ и, следовательно, q^2 также четное. Значит, q является четным, что противоречит сделанному предположению. Полученное противоречие доказывает утверждение. □

Итак, мы приходим к необходимости расширять множество рациональных чисел, т. е. вводить новые числа, которые называют иррациональными. Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел называют множеством, или системой, действительных чисел.

Существует несколько различных способов построения системы действительных чисел. Так, исходя из множества рациональных чисел и их свойств, немецкий математик Р. Дедекинд в конце XIX в. предложил построение системы действительных чисел, используя так называемые сечения во множестве рациональных чисел. Используя построение Дедекинда, Пеано разработал аксиоматическую теорию чисел исходя из пяти аксиом натуральных чисел. С этой теорией подробно можно ознакомиться в книге Э. Ландау "Основы анализа", М., ИЛ, 1947. Другой распространенный способ построения системы действительных чисел основан на применении десятичных (или же по какому-либо другому основанию) дробей. При этом способе построения действительными числами называются бесконечные десятичные дроби, среди которых периодические дроби составляют множество рациональных чисел, а непериодические дроби – иррациональные числа. Такой способ выгоден тем, что он является конструктивным и, кроме того, в наибольшей степени соответствует интуитивному понятию действительного числа. Этот способ изложен, например, в книге Ильина и Позняка.

Некоторые авторы для построения системы действительных чисел применяют так называемые фундаментальные последовательности рациональных чисел. При этом действительным числом называется каждая такая последовательность.

Мы рассмотрим аксиоматическое построение системы действительных чисел. Множеством (системой) действительных чисел мы назовем произвольную совокупность объектов, обладающих рядом свойств, называемых аксиомами, т. е. свойствами, которые предполагаются выполненными и не требующими доказательства. Такой способ наиболее естественный с философской точки зрения, т. к. числа суть абстракции, выражающие количественные отношения вещей. Названные выше способы построения действительных чисел – это способы реализации этих абстракций, т. е. представление их формальными символами.

Определение. Системой действительных чисел называется непустое множество $\mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

1. На $\mathbb{R}$ определены соотношения порядка $<$, $>$, $=$, обладающие такими свойствами:

a) для каждой пары действительных чисел a и b имеет место одно, и только одно из следующих трех соотношений:

$$a < b,\ a > b,\ a = b;$$

b) из условий $a < b,\ b < c$ следует, что $a < c$ (это свойство называется транзитивностью неравенств).

2. Группа аксиом сложения и умножения предполагает определение на $\mathbb{R}$ операций сложения и умножения, удовлетворяющих следующим аксиомам:

a) для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $a + b = b + a$ (свойство коммутативности сложения);

b) для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $a + (b + c) = (a + b) + c$ (свойство ассоциативности сложения);

c) во множестве $\mathbb{R}$ существует элемент 0, называемый нулем, нейтральный по отношению к сложению, т. е. такой, что для любого $a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $a + 0 = a$;

d) для любого $a \in \mathbb{R}$ во множестве $\mathbb{R}$ имеется элемент $-a$, называемый противоположным, такой, что $a + (-a) = 0$;

e) если $a < b$, то для любого $c \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $a+c < b+c$;

f) для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $a \cdot b = b \cdot a$ (свойство коммутативности умножения);

g) для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (свойство ассоциативности умножения);

h) во множестве $\mathbb{R}$ существует элемент 1, отличный от 0, называемый единицей, нейтральный по отношению к умножению, т. е. такой, что для любого $a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $a \cdot 1 = a$;

i) для любого $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ во множестве $\mathbb{R}$ имеется элемент $\frac{1}{a}$, называемый обратным, такой, что $a \cdot \frac{1}{a} = 1$;

j) для любых $a, b \in \mathbb{R}$, таких, что $a < b$, и для любого $c > 0$ справедливо неравенство $a \cdot c < b \cdot c$, а для $c < 0$ справедливо неравенство $a \cdot c > b \cdot c$;

k) для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $(a + b)c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивный закон).

3. Если непустые подмножества $X, Y \subset \mathbb{R}$ такие, что для любого $x \in X$ и для любого $y \in Y$ справедливо неравенство $x \leq y$, то найдется такое $c \in \mathbb{R}$, что неравенство $x \leq c \leq y$ справедливо для любых $x \in X,\ y \in Y$.

Последняя аксиома означает, что во множестве действительных чисел нет пробелов. Она называется свойством полноты множества действительных чисел.

Итак, мы ввели множество $\mathbb{R}$, которое будем называть множеством действительных чисел. Естественно поставить вопрос о существовании такого множества. Другими словами, не является ли совокупность сформулированных выше аксиом противоречивой? Ответ на этот вопрос может дать один из названных выше конструктивных способов определения множества действительных чисел. Каждый такой способ предполагает построение множества и определения операций на нем, обладающих свойствами, перечисленными в аксиомах. Поэтому такое множество существует.

Другой важный вопрос – является ли такое множество единственным? Можно показать, что между любыми двумя множествами $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$, обладающими перечисленными выше свойствами, можно установить взаимно однозначное соответствие таким образом, что если x соответствует x', y соответствует y', то из условия $x < y$ следует, что $x' < y'$, сумме $x + y$ соответствует $x' + y'$, произведению $x \cdot y$ соответствует $x' \cdot y'$ и т. д. В этом смысле определенное выше совокупностью указанных свойств множество $\mathbb{R}$ является единственным, несмотря на то что конкретные реализации множества действительных чисел могут состоять из элементов разной природы.

1.2 Натуральные числа

Определение. Множество A называется индуктивным, если для любого $a \in A$ элемент $a + 1$ также принадлежит множеству A.

Легко показать, что пересечение любого семейства индуктивных множеств является индуктивным множеством, если оно непусто.

Определение. Множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ называется пересечение всех индуктивных множеств, содержащих 1.

Из определения множества натуральных чисел следует

Принцип математической индукции. *Пусть N^* – непустое подмножество натуральных чисел, обладающее следующими свойствами:*

1) $1 \in N^*$,

2) *для любого* $x \in N^*$ *элемент* $x+1$ *также принадлежит* N^*.
Тогда $N^* = \mathbb{N}$.

Принцип математической индукции является одним из важнейших свойств натуральных чисел. При аксиоматическом определении множества натуральных чисел принцип математической индукции формулируется в качестве аксиомы. Принцип математической индукции лежит в основе доказательства многих утверждений. Метод доказательства, основанный на применении принципа математической индукции, называется методом математической индукции.

Пример. Доказать, что для всех натуральных чисел n справедливо неравенство $n \leq 2^n$.

Для доказательства применим метод математической индукции. Пусть N^* – множество тех натуральных n, для которых это неравенство имеет место. При $n = 1$ оно принимает вид $1 \leq 2$, т. е. оно справедливо. Предположим, что требуемое неравенство имеет место при некотором n (т. е. что $n \in N^*$) и покажем, что оно же справедливо и для $n+1$ (т. е., что $n+1 \in N^*$). Другими словами, нужно показать, что условие $n \leq 2^n$ влечет выполнение неравенства $n+1 \leq 2^{n+1}$. Складывая предположение индукции $n \leq 2^n$ с очевидным неравенством $1 \leq 2 \leq 2^n$, находим: $n+1 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, что и требовалось доказать.

Упражнение 1. Методом математической индукции докажите, что для любого натурального n и для любых действительных a и b справедлива формула бинома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, а $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ при $k \in \mathbb{N}$ и $0! = 1$.

Упражнение 2. Докажите неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (n \in \mathbb{N},\ x > -1).$$

1.3 Ограниченные множества

Пусть E – непустое множество действительных чисел.

Определение. Множество E называется ограниченным сверху, если существует такое $M \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $x \leq M$. Число M называется верхней границей множества E.

Множество E называется ограниченным снизу, если существует такое $m \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $x \geq m$. Число m называется нижней границей множества E.

У ограниченного сверху множества существует сколь угодно много верхних границ. Действительно, если M – верхняя граница множества M, то для любого положительного ε число $M+\varepsilon$ также является верхней границей E. Аналогично, у ограниченного снизу множества существует сколь угодно много нижних границ.

С геометрической точки зрения ограниченность сверху множества E означает наличие на числовой прямой такой точки M, что все точки множества E расположены не правее M. Аналогично, ограниченность снизу множества E означает наличие на числовой прямой такой точки m, что все точки множества E расположены не левее, чем m.

Определение. Множество E называется ограниченным, если оно ограничено сверху и снизу, т. е. если существуют такие $m, M \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $m \leq x \leq M$.

С геометрической точки зрения ограниченность E означает, что все точки множества E содержатся в некотором отрезке $[m, M]$ числовой прямой.

Определение. Элемент $x \in E$ называется наибольшим элементом множества E, если для любого $z \in E$ справедливо неравенство $z \leq x$. Элемент $y \in E$ называется наименьшим элементом множества E, если для любого $z \in E$ справедливо неравенство $z \geq y$.

Очевидно, что если во множестве E существует наибольший элемент, то это множество ограничено сверху, а если в E существует наименьший элемент, то это множество ограничено снизу. Однако не каждое ограниченное сверху (снизу) множество имеет наибольший (наименьший) элемент. Например, множество $E = (0, 1) \equiv \{x \in \mathbb{R} :\ 0 < x < 1\}$ ограничено сверху (например, числом 1), однако в нем нет наибольшего элемента. Действительно, для любого $x \in E$ число $z = \frac{x+1}{2} > x$ также принадлежит E. Аналогично можно показать, что E ограничено снизу, но не имеет наименьшего элемента.

Пусть E – ограниченное сверху множество. Через $\overline{E}$ обозначим совокупность всех верхних границ множества E. Множество $\overline{E}$ непусто и, как мы уже видели, неограничено сверху. Очевидно, однако, что $\overline{E}$ ограничено снизу (например, любой элемент множества E является нижней границей множества $\overline{E}$).

Поставим следующий вопрос: существует ли во множестве $\overline{E}$ наименьший элемент?

Определение. Пусть множество E ограничено сверху. Тогда наименьшая из всех его верхних границ называется верхней гранью, или точной верхней границей, и обозначается $\sup E$.

Это определение равносильно следующему.

Определение. Число M называется верхней гранью множества E, если выполнены следующие два условия:

1) для каждого $x \in E$ справедливо неравенство $x \le M$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой $x \in E$, что $x > M - \varepsilon$.

Первое условие этого определения означает, что M является верхней границей множества E, а второе – что M – наименьшая из всех верхних границ, т. е. что никакое число $M - \varepsilon < M$ не является верхней границей множества E.

Аналогично формулируется определение нижней грани.

Определение. Пусть множество E ограничено снизу. Тогда наибольшая из всех его нижних границ называется нижней гранью, или точной нижней границей, и обозначается $\inf E$.

Это определение равносильно следующему.

Определение. Число m называется нижней гранью множества E, если выполнены следующие два условия:

1) для каждого $x \in E$ справедливо неравенство $x \geq m$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой $x \in E$, что $x < m + \varepsilon$.

Первое условие этого определения означает, что m является нижней границей множества E, а второе – что m – наибольшая из всех нижних границ, т. е. что никакое число $m + \varepsilon > m$ не является нижней границей множества E.

Из определения верхней и нижней граней множества не следует сам факт их существования. Существование точных границ устанавливает следующая теорема.

Теорема (о существовании верхней грани). *Каждое непустое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань.*

Доказательство. Пусть E – ограниченное сверху множество, а $\overline{E}$ – множество всех его верхних границ. Оба множества непустые, и для любых $x \in E,\ y \in \overline{E}$ справедливо неравенство $x \leq y$. По аксиоме полноты множества действительных чисел, существует такое число M, что для любых $x \in E,\ y \in \overline{E}$ справедливо неравенство $x \leq M \leq y$. Левое неравенство означает, что число M является верхней границей множества E, т. е. $M \in \overline{E}$, а правое неравенство показывает, что M – наименьший элемент во множестве $\overline{E}$. $\square$

Аналогично доказывается следующая

Теорема (о существовании нижней грани). *Каждое непустое ограниченное снизу множество имеет нижнюю грань.*

Понятие верхней (нижней) грани мы определили для ограниченного сверху (снизу) множества. Но не каждое множество ограничено сверху (снизу). Так, само множество действительных чисел $\mathbb{R}$ неограничено сверху и снизу. В самом деле, для любого $M \in \mathbb{R}$ найдется $x \in \mathbb{R}$, такой, что $x > M$ (например, $x = M + 1$). Это означает, что никакое число

M не является верхней границей множества $\mathbb{R}$. В случае если множество E неограничено сверху, иногда пишут $\sup E = +\infty$. Аналогично, если множество E неограничено снизу, то пишут $\inf E = -\infty$. Примером неограниченного снизу множества также может быть множество $\mathbb{R}$.

1.4 Целые числа. Принцип Архимеда

Одна из аксиом сложения предполагает наличие у каждого числа x противоположного ему числа $-x$, т. е. такого, что $x + (-x) = 0$.

Определение. Натуральные числа, противоположные им и число 0 будем называть целыми числами. Множество всех целых чисел обозначается через $\mathbb{Z}$.

Лемма 1. *Во всяком непустом ограниченном сверху подмножестве множества целых чисел существует наибольший элемент.*

Доказательство. Пусть A – ограниченное сверху подмножество множества целых чисел. Тогда у него существует верхняя грань $c = \sup A$. Число $c-1$ не является верхней границей множества A и поэтому найдется такое $z_0 \in A$, что $c - 1 < z_0 \leq c$. Это число z_0 является наибольшим в A. В самом деле, если найдется $z' \in A$, такое, что $z' > z_0$, то $z' \geq z_0+1$ (во множестве $\mathbb{Z}$ между z_0 и $z_0 + 1$ нет целых чисел). Но $z_0 + 1 > c$, а значит, и $z' > c$, что противоречит тому, что c – верхняя граница множества A. $\square$

Следствие. *Множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел неограничено сверху.*

Доказательство. В самом деле, если бы $\mathbb{N}$ было бы ограниченным сверху, то, согласно лемме 1, в нем нашелся бы наибольший элемент n_0. Но $n_0 + 1 > n_0$ и $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, что приводит к противоречию. $\square$

С помощью кванторов это следствие можно записать так:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad n > a.$$

Лемма 2. *В каждом непустом ограниченном снизу подмножестве целых чисел существует наименьший элемент.*

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1 (провести самостоятельно).

Теорема (принцип Архимеда). *Для любого действительного числа x и для любого положительного h существует единственное целое число k_0, такое, что $(k_0 - 1)h \le x < k_0 h$.*

Доказательство. Зададим $x \in \mathbb{R}$ и $h > 0$. Множество целых чисел k, таких, что $k > \frac{x}{h}$, непусто в силу следствия из леммы 1, и это множество ограничено снизу. Поэтому, в силу леммы 2, в этом множестве есть наименьший элемент k_0, и он единственный. Так как $k_0 > \frac{x}{h}$, то $x < k_0 h$, а из неравенства $k_0 - 1 \le \frac{x}{h}$ следует, что $(k_0 - 1)h \le x$. $\square$

С геометрической точки зрения принцип Архимеда означает, что каждая точка $x \in \mathbb{R}$ попадает в один, и только в один из полуинтервалов $[(k-1)h, kh)$.

Определение. Рациональным называется число, которое может быть представлено в виде $\frac{p}{q}$, где p – целое, q – натуральное. Множество всех рациональных чисел обозначается через $\mathbb{Q}$.

Следствие из принципа Архимеда. *Пусть a, b – действительные числа, такие, что $a < b$. Тогда найдется такое рациональное число r, что $a < r < b$.*

Доказательство. Выберем натуральное $n > \frac{1}{b-a}$ (оно существует в силу следствия из леммы 1). Применяя принцип Архимеда с $h = \frac{1}{n}$, найдем такое целое k, что $\frac{k-1}{n} \le a < \frac{k}{n}$. Обозначим $r = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$. Остается показать, что $r < b$. Если $r = \frac{k}{n} \ge b$, то из неравенства $\frac{k-1}{n} \le a$ получим, что $\frac{1}{n} \ge b - a$, т. е. $n \le \frac{1}{b-a}$, что противоречит выбору числа n. $\square$

Это следствие называют свойством плотности рациональных чисел.

1.5 Существование корня

Ранее было показано, что во множестве рациональных чисел нет такого числа, квадрат которого равен 2. Мы ввели в рассмотрение более широкое множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, которое содержит в себе множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Покажем, что во множестве $\mathbb{R}$ можно извлекать корни любой натуральной степени из любого положительного действительного числа.

Теорема. *Для любого положительного действительного числа x и для любого натурального n существует, и притом единственное, число $y > 0$, такое, что $y^n = x$ (здесь по определению считаем, что $y^n = \underbrace{y \cdot y \cdot \dots \cdot y}_{n \text{ сомножителей}}$).*

Доказательство. Будем применять аксиому полноты. Обозначим через A множество всех действительных положительных чисел α, таких, что $\alpha^n < x$. Это множество непусто, например, $\alpha = \frac{x}{1+x} \in A$, т. к., учитывая, что $0 < \alpha < 1$, получаем $\alpha^n < \alpha < x$. Далее, через B обозначим множество всех действительных положительных чисел β, таких, что $\beta^n > x$. Это множество также непусто, например, $\beta = 1 + x \in B$, т. к., учитывая, что $\beta > 1$, получаем $\beta^n > \beta > x$.

Пусть $\alpha \in A$, $\beta \in B$. Тогда $\alpha < \beta$. В самом деле, если $0 < \beta \le \alpha$, то получили бы $\beta^n \le \alpha^n$, что невозможно, ибо $\alpha^n < x$, а $\beta^n > x$. Таким образом, множества A и B удовлетворяют условиям аксиомы полноты. В силу этой аксиомы существует число y, такое, что для любых $\alpha \in A$ и $\beta \in B$ справедливо неравенство $\alpha \le y \le \beta$.

Докажем, что $y^n = x$. Предположим противное. Пусть, например, $y^n < x$. Это означает, что $y \in A$ и y – наибольший элемент в A. Мы же покажем, что во множестве A нет наибольшего элемента. В самом деле, если $\alpha \in A$, т. е. $\alpha^n < x$, то покажем, что можно подобрать $\varepsilon > 0$ так, что $(\alpha+\varepsilon)^n < x$. По формуле бинома Ньютона имеем (считаем, что $\varepsilon < 1$)

$$(\alpha + \varepsilon)^n = \alpha^n + C_n^1 \alpha^{n-1}\varepsilon + C_n^2 \alpha^{n-2}\varepsilon^2 + \dots + C_n^n \varepsilon^n \le$$

$$\le \alpha^n + \varepsilon \left[C_n^1 \alpha^{n-1} + C_n^2 \alpha^{n-1} + \dots + 1 \right] = \alpha^n + \varepsilon \left[(\alpha+1)^n - \alpha^n \right].$$

Выберем ε таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\alpha^n + \varepsilon \left[(\alpha+1)^n - \alpha^n \right] < x.$$

Для этого достаточно взять

$$0 < \varepsilon < \min\left(\frac{x-\alpha^n}{(\alpha+1)^n-\alpha^n}, 1\right).$$

Выбрав таким ε, получим, что $(\alpha+\varepsilon)^n < x$.

Итак, мы показали, что во множестве A нет наибольшего элемента, а значит, неравенство $y^n < x$ не может выполняться. Если предположить, что $y^n > x$, то это будет означать, что y – наименьший элемент во множестве B. Покажем, что во множестве B нет наименьшего элемента. Для этого возьмем произвольное $\beta \in B$ и найдем такое ε, $0 < \varepsilon \le 1$, что $\beta - \varepsilon \in B$. Пользуясь формулой бинома Ньютона, получим

$$(\beta-\varepsilon)^n = \beta^n - C_n^1\beta^{n-1}\varepsilon + C_n^2\beta^{n-2}\varepsilon^2 - \dots + (-1)^n\varepsilon^n =$$

$$= \beta^n - \varepsilon\left[C_n^1\beta^{n-1} - C_n^2\beta^{n-2}\varepsilon + \dots + (-1)^{n-1}\varepsilon^{n-1}\right] \ge$$

$$\ge \beta^n - \varepsilon\left[C_n^1\beta^{n-1} + C_n^2\beta^{n-2}\varepsilon + \dots + \varepsilon^{n-1}\right] \ge$$

$$\ge \beta^n - \varepsilon\left[C_n^1\beta^{n-1} + C_n^2\beta^{n-2} + \dots + 1\right] = \beta^n - \varepsilon\left[(\beta+1)^n - \beta^n\right].$$

Выберем ε таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\beta^n - \varepsilon\left[(\beta+1)^n - \beta^n\right] > x.$$

Для этого достаточно взять

$$0 < \varepsilon < \min\left(\frac{\beta^n - x}{(\beta+1)^n-\beta^n}, 1\right).$$

Выбирая таким ε, получим, что $(\beta-\varepsilon)^n > x$.

Итак, неравенство $y^n > x$ также невозможно. Остается единственно возможное $y^n = x$.

Двух различных положительных y_1 и y_2 быть не может, ибо если $0 < y_1 < y_2$, то $y_1^n < y_2^n$ и оба одновременно не могут равняться x. $\square$

Положительное число y, удовлетворяющее равенству $y^n = x$, называется корнем n-й степени из x и обозначается $\sqrt[n]{x}$.

1.6 Абсолютные величины

Понятие абсолютной величины тесно связано с понятием противоположного числа.

Определение. Абсолютной величиной (модулем) числа a называется величина

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Из самого определения сразу видно, что для любого числа его абсолютная величина неотрицательна. Очевидно также, что для любого a справедливо равенство $|a| = |-a|$. В самом деле, при $a = 0$ это равенство очевидно, если $a > 0$, то $|a| = a$ и $-a < 0$, так что $|-a| = -(-a) = a$. Если же $a < 0$, то $|a| = -a$ и $-a > 0$, так что $|-a| = -a$.

Свойства абсолютной величины.

1. *Неравенство* $|a| \leq b$, $(b \geq 0)$ *справедливо тогда и только тогда, когда* $-b \leq a \leq b$.

2. *Для любых* $a, b \in \mathbb{R}$ *справедливо равенство* $|ab| = |a| \cdot |b|$.

3. *Для любых* $a, b \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство* $|a + b| \leq |a| + |b|$.

4. *Для любых* $a, b \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство* $|a + b| \geq |a| - |b|$.

Доказательство этих свойств рекомендуется провести самостоятельно.

Эквивалентное определение ограниченного множества. Напомним, что выше мы назвали множество $E \subset \mathbb{R}$ ограниченным, если существуют такие числа m, $M \in \mathbb{R}$, что для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $m \leq x \leq M$.

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если существует такое действительное число A, что для любого $x \in E$ справедливо неравенство $|x| \leq A$.

Для доказательства эквивалентности этого определения данному ранее определению достаточно для известного A положить $m = -A$, $M = A$, а при данных m и M взять $A = \max(|M|, |m|)$.

Примеры некоторых стандартных множеств.

1. Интервал $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$.

2. Отрезок (сегмент) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

3. Полуинтервал открытый слева (справа) (замкнутый справа (слева)) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$ ($[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$).

4. Окрестность точки $c \in \mathbb{R}$ – любой интервал, содержащий c.

5. ε-окрестность точки $c \in \mathbb{R}$ $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - c| < \varepsilon\} (\varepsilon > 0)$.

6. Проколотая окрестность (проколотая ε-окрестность) точки $c \in \mathbb{R}$ $(a, c) \cup (c, b)$ ($(c - \varepsilon, c) \cup (c, c + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < |x - c| < \varepsilon\}$).

7. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

8. Полупрямая $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\}$, открытая полупрямая $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\}$ называется также окрестностью $+\infty$, открытая полупрямая $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\}$ называется также окрестностью $-\infty$.

9. Окрестность бесконечности $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, M-окрестность бесконечности $(-\infty, M) \cup (M, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x| > M\}$.

2. Пределы последовательностей

2.1 Определение и элементарные свойства

Последовательность – это функция натурального аргумента. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число x_n, то говорят, что задана последовательность $\{x_n\}$. Иначе последовательность обозначают так: $x_1, x_1, \ldots, x_n, \ldots$. Число x_n называется n-м элементом (или n-м членом) последовательности. Элементы последовательности считаются различными, даже если они равные, но имеют разные номера. Например, последовательность $1, 1, \ldots$, у которой все $x_n = 1$. Последовательность может быть задана формулой, которая по заданному n позволяет вычислить значение x_n, например, $\left((-1)^n + 1\right)/2$. Можно задавать последовательность рекуррентно, т. е. указывать закон, по которому каждый следующий элемент вычисляется по известным предыдущим, например, арифметическая $x_{n+1} = x_n + d$, или геометрическая $x_{n+1} = x_n \cdot q$ прогрессии (при этом нужно определить один или несколько первых элементов). Можно задавать последовательность описанием ее элементов, например, x_n – n-й десятичный знак после запятой у числа π.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, зависящий, вообще говоря, от ε, такой, что для всех номеров $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. В этом случае пишут $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, или

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

В кванторах это определение выглядит следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} = a \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \equiv N_\varepsilon : \; \forall n \geq N \;\; |x_n - a| < \varepsilon.$$

Если последовательность имеет предел, то говорят, что она сходится. В противном случае говорят, что последовательность расходится.

Для того чтобы выяснить геометрический смысл предела последовательности, перепишем неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ в таком эквивалентном виде $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Тогда понятно, что что с геометрической точки зрения равенство $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ означает, что все члены последовательности, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, зависящего от ε, находятся в ε-окрестности точки a. Вне этой окрестности находится, быть может, лишь конечное число элементов, а именно, те x_n, номера n которых меньше, чем $N(\varepsilon)$.

В терминах окрестностей определение предела можно переформулировать следующим образом.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$ числа a найдется такой номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого все члены последовательности принадлежат этой окрестности, т. е.

$$\forall U_\varepsilon(a)\ \exists N:\ \forall n \geq N\ x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Пример 1. Пусть $x_n = a$ $(n = 1, 2, \dots)$. Такая последовательность называется стационарной. Ясно, что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Пример 2. Пусть $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Покажем, что $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Зададим $\varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Оно выполняется, если только $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Положим $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где $[b]$ означает целую часть числа b. Тогда из неравенства $n \geq N$ следует, что $n > \frac{1}{\varepsilon}$, а значит, $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Таким образом, мы показали по определению, что число $a = 0$ является пределом последовательности x_n.

Пример 3. Покажем, что $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда получим, что неравенство

$$\left|\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - 0\right| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

справедливо, если только $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Поэтому достаточно взять $N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$.

Замечание. При доказательства равенства $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ по определению не требуется находить наименьший номер N, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Достаточно указать лишь какой-нибудь номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого $|x_n - a| < \varepsilon$.

Отрицание определения предела. Число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$, если найдется такое положительное ε, что для любого N существует $n \geq N$, такое, что $|x_n - a| \geq \varepsilon$, т. е.

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall N \ \exists n \geq N : \ |x_n - a| \geq \varepsilon.$$

В этой записи число N не может зависеть от ε, а n зависит от N.

В терминах окрестностей получаем, что число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$, если найдется такая окрестность числа a, вне которой находится бесконечно много элементов последовательности x_n.

Теперь легко можем сформулировать в кванторах определение расходящейся последовательности:

$$\forall a \ \exists \varepsilon = \varepsilon(a) > 0 : \ \forall N \ \exists n \geq N : \ |x_n - a| \geq \varepsilon.$$

Пример 4. Докажем, что последовательность $x_n = (-1)^n$ расходится. Зададим произвольное $a \in \mathbb{R}$ и положим $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Если $a \geq 0$, то вне окрестности $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ находятся элементы последовательности с нечетными номерами, а если $a < 0$, то с четными номерами. Итак, какое бы N мы ни взяли, найдется $n \geq N$ (например, $n = 2N + 1$, если $a \geq 0$ и $n = 2N$, если $a < 0$), для которого справедливо неравенство $|x_n - a| \geq \varepsilon$.

2.1.1 Свойства сходящихся последовательностей

Теорема 1 (единственность предела). *Если последовательность имеет предел, то он единственный.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a'$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a''$ и $a' \neq a''$. Выберем $\varepsilon = \frac{1}{2}|a' - a''| > 0$. Тогда найдутся номера N' и N'', такие, что для всех $n \geq N'$ справедливо неравенство $|x_n - a'| < \varepsilon$, а для всех $n \geq N''$ справедливо неравенство $|x_n - a''| < \varepsilon$.

Положим $N = \max\{N', N''\}$. Тогда при $n \geq N$ неравенства $|x_n - a'| < \varepsilon$ и $|x_n - a''| < \varepsilon$ должны выполняться одновременно, что невозможно, поскольку при выбранном ε окрестности $(a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)$ и $(a'' - \varepsilon, a'' + \varepsilon)$ не имеют общих точек. $\square$

Определение. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число M (m), что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $x_n \leq M$ $(x_n \geq m)$. Последовательность называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу.

Легко показать, что ограниченность последовательности $\{x_n\}$ равносильна тому, что

$$\exists A > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N} \ |x_n| \leq A.$$

С геометрической точки зрения ограниченность последовательности означает, что все ее элементы находятся в некоторой окрестности нуля.

Теорема 2 (необходимое условие сходимости). *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Зададим $\varepsilon = 1$ и найдем номер N такой, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Среди конечного числа элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ найдем наибольший x_{n_1} и наименьший x_{n_2}. Тогда, очевидно, неравенство $m \equiv \min(a - 1, x_{n_2}) \leq x_n \leq M \equiv \max(a + 1, x_{n_1})$ имеет место для всех $n \in \mathbb{N}$.

Приведем еще одно доказательство. Для $\varepsilon = 1$ найдем номер N, такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n \geq N$. Пусть $A = \max(|a| + 1, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|)$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$, очевидно, справедливо неравенство $|x_n| \leq A$. $\square$

Обратное к доказанной теореме утверждение не имеет места, т. е. из ограниченности последовательности не следует сходимость. В самом деле, как было показано в примере 4, последовательность $x_n = (-1)^n$ расходится. Вместе с этим она ограничена, поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|(-1)^n| \leq 1$.

В кванторах определение неограниченной последовательности выглядит следующим образом

$$\forall A\ \exists n \in \mathbb{N}:\ |x_n| > A.$$

Из теоремы 2 мгновенно вытекает

Следствие (достаточное условие расходимости). *Если последовательность неограничена, то она расходится.*

Пример 5. Пусть $x_n = q^n$, где $|q| > 1$. Покажем, что эта последовательность неограничена. Для доказательства будем применять известное неравенство Бернулли $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha,\ (\alpha > -1,\ n \in \mathbb{N})$, которое легко может быть доказано методом математической индукции.

Положим $\alpha = |q| - 1 > 0$. Зададим произвольное $A > 0$. В силу неравенства Бернулли

$$|q^n| = |q|^n = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha > n\alpha > A,$$

если только $n > \frac{A}{\alpha}$. Итак, для любого $A > 0$ найдется номер $n = \left[\frac{A}{\alpha}\right] + 2$, такой, что $|q^n| > A$. Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ неограничена, а значит, в силу следствия из теоремы 2, она расходится.

Теорема 3. *Если* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, *то* $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Доказательство. Эта теорема мгновенно вытекает из неравенства $|\,|x_n| - |a|\,| \leq |x_n - a|$. Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь условием теоремы, найдем такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Тогда для $n \geq N$ также будет выполняться и неравенство $|\,|x_n| - |a|\,| < \varepsilon$. $\square$

Замечание. Утверждение, обратное к данной теореме, неверно. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$ расходится, и в то же время $\lim_{n\to\infty} |(-1)^n| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Легко, однако, видеть, что теорема 3 может быть обращена при $a = 0$. В самом деле, достаточно воспользоваться равенством $|\,|x_n| - 0\,| = |x_n - 0| = |x_n|$.

2.1.2 Предельный переход и неравенства

Теорема 4. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ *и* $x_n \le y_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. *Тогда* $a \le b$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем номер N_1, такой, что для всех $n \ge N_1$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Отсюда, в частности, следует, что $x_n > a - \varepsilon$, $n \ge N_1$. Далее, для этого же ε найдем номер N_2, такой, что для всех $n \ge N_2$ выполнено неравенство $|y_n - b| < \varepsilon$, из которого следует, что $y_n < b + \varepsilon$, $n \ge N_2$. Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n \ge N$, пользуясь условием теоремы, получим $a - \varepsilon < x_n \le y_n < b + \varepsilon$. Отсюда имеем $a - \varepsilon < b + \varepsilon$, или $a < b + 2\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $a \le b$.

Приведем еще одно доказательство теоремы 4. Предположим, что $a > b$. Тогда положим $\varepsilon = (a - b)/2$ и найдем номера N_1 и N_2, такие, что $|x_n - a| < \varepsilon$ $(n \ge N_1)$ и $|y_n - b| < \varepsilon$ $(n \ge N_2)$. Если взять $n \ge \max(N_1, N_2)$, то получим $x_n > a - \varepsilon = (a + b)/2 = b + \varepsilon > y_n$, что противоречит условию $x_n \le y_n$ теоремы. □

Замечание. Из условия $x_n < y_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ не следует, что $a < b$. Действительно, пусть, например, $x_n = 0$, $y_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Тогда $x_n < y_n$ $(n = 1, 2, \dots)$, но $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

Теорема 5. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, *и число* $b < a$. *Тогда существует такой номер* N, *что при всех* $n \ge N$ *справедливо неравенство* $x_n > b$.

Доказательство. Положим $\varepsilon = a - b > 0$ и найдем номер N, такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n \ge N$. Отсюда для $n \ge N$ получим $x_n > a - \varepsilon = b$. □

Теорема 6 (теорема Гурьева о трех пределах). *Пусть три последовательности* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *и* $\{z_n\}$ *такие, что* $x_n \le y_n \le z_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. *Если* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$, *то последовательность* $\{y_n\}$ *сходится и* $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем номера N_1 и N_2, такие, что $|x_n - a| < \varepsilon$ $(n \ge N_1)$ и $|z_n - a| < \varepsilon$ $(n \ge N_2)$. Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для всех $n \ge N$ будем иметь $a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n <$

$a + \varepsilon$. Отсюда следует, что $|y_n - a| < \varepsilon$, а это и означает, что существует $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. $\square$

Пример 6. Пусть $x_n = q^n$. В примере 5 было показано, что при $|q| > 1$ последовательность x_n неограничена и, следовательно, расходится. Далее, при $q = -1$ имеем $x_n = (-1)^n$. В примере 4 мы показали, что эта последовательность также расходится. Если $q = 1$, то $x_n = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Это – стационарная последовательность и $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Также и при $q = 0$ получаем $x_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Осталось рассмотреть случай $0 < |q| < 1$. Выберем такое $\alpha > 0$, что $|q| = \frac{1}{1+\alpha}$ $\left(\alpha = \frac{1}{|q|} - 1 > 0\right)$. Тогда, в силу неравенства Бернулли $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ $(n = 1, 2 \ldots)$, имеем

$$0 \leq |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} \leq \frac{1}{1+n\alpha} \leq \frac{1}{n\alpha}.$$

Полагая $a_n = 0$, $c_n = \frac{1}{n\alpha}$, $b_n = |q^n|$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и учитывая, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$, из теоремы о трех пределах получаем, что $\lim_{n\to\infty} |q^n| = 0$, а из замечания к теореме 3 следует, что и $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

2.1.3 Предельный переход и арифметические операции

Теорема 7. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. *Тогда*

1) $$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b;$$

2) $$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab;$$

3) $$\text{\textit{если}}\ \ y_n \neq 0\ (n = 1, 2, \ldots),\ b \neq 0,\ \text{\textit{то}}\ \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Доказательство. 1) Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем номера N_1 и N_2, такие, что $|x_n - a| < \varepsilon/2$ $(n \geq N_1)$ и $|y_n - b| < \varepsilon/2$ $(n \geq N_2)$. Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n \geq N$ будем иметь $a - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < a + \frac{\varepsilon}{2}$, $b - \frac{\varepsilon}{2} < y_n < b + \frac{\varepsilon}{2}$. Складывая эти два неравенства, получим $a + b - \varepsilon < x_n + y_n < a + b + \varepsilon$, или $|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$ $(n \geq N)$.

2) Воспользуемся тем, что сходящаяся последовательность ограничена. Тогда найдется такое $A > 0$, что $|x_n| \leq A$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Будем использовать неравенство

$$|x_n y_n - ab| \leq |x_n y_n - x_n b| + |x_n b - ab| = |x_n|\ |y_n - b| + |b|\ |x_n - a|\,. \quad (2.1)$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем номер N_2, такой, что $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2A}$ для всех $n \geq N_2$. Если $b = 0$, то второе слагаемое справа в (2.1) равно нулю, в этом случае полагаем $N_1 = 1$. Если же $b \neq 0$, то найдем такой номер N_1, что для всех $n \geq N_1$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$. Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n \geq N$, в силу (1), будем иметь

$$|x_n y_n - ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и тем самым доказано утверждение 2).

3) Достаточно показать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$, а затем применить 2). Имеем

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n|\ |b|}.$$

Поскольку, в силу теоремы 3, $\lim_{n\to\infty} |y_n| = |b|$, то для $\varepsilon' = \frac{|b|}{2} > 0$ найдем такой номер N_1, что для всех $n \geq N_1$ справедливо неравенство $|\,|y_n| - |b|\,| < \varepsilon' = \frac{|b|}{2}$, т. е. $\frac{|b|}{2} < |y_n| < \frac{3|b|}{2}$. Поэтому для $n \geq N_1$ получим

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{|y_n - b|}{\frac{1}{2}|b|^2}.$$

Зададим теперь $\varepsilon > 0$ и найдем номер N_2, такой, что при всех $n \geq N_2$ справедливо неравенство $|y_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon$. Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n \geq N$ будем иметь

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$. $\square$

В частном случае $y_n = b$ $(n = 1, 2, \dots)$ утверждение 2) теоремы 7 принимает такой вид:

$$\lim_{n\to\infty} b x_n = b \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Это означает, что постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Пример 7. Докажем, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ при любом $a > 0$.

При $a = 1$ это равенство очевидно. Пусть $a > 1$. Обозначим $\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$. Тогда, в силу неравенства Бернулли, имеем $a = (1+\alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n$, откуда $0 \leq \alpha_n \leq \frac{a-1}{n}$, т. е.

$$0 \leq \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}.$$

Так как $\lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = 0$, то, по теореме о трех пределах, будем иметь $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0$. Отсюда следут, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1\right) + \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

В случае $0 < a < 1$ обозначим $b = \frac{1}{a} > 1$. Как уже доказано ранее, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$. Поэтому, в силу п. 3) теоремы 7, получим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Пример 8. Докажем, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Обозначим $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Тогда при $n \geq 2$ получим

$$n = (1+\alpha_n)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \alpha_n^k \geq C_n^2 \alpha_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1)\alpha_n^2,$$

откуда $\alpha_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Если мы докажем, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$, то из неравенства $0 \leq \alpha_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, в силу теоремы о трех пределах, получим, что $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + \lim_{n\to\infty} 1 = 0 + 1 = 1.$$

Итак, остается показать, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$, если только $n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$. Полагая $N = \left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right] + 2$, согласно определению предела, получаем требуемое равенство.

2.2 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Легко видеть, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a тогда и только тогда, когда последовательность $\alpha_n = x_n - a$ бесконечно малая. Используя это, можно дать следующее равносильное определение предела.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если последовательность $\{x_n - a\}$ бесконечно малая.

Следует, однако, понимать, что при таком определении предела нужно отдельно определять понятие бесконечно малой последовательности, а именно, бесконечно малой называть такую последовательность $\{x_n\}$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такой, что при любом $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n| < \varepsilon$.

Теорема (свойства бесконечно малых последовательностей).

1). *Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми последовательностями.*

2). *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью.*

Доказательство. Свойство 1) следует из арифметических свойств пределов (теорема 7).

Докажем 2). Пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая, а $\{x_n\}$ ограниченная последовательности. Обозначим $\beta_n = \alpha_n x_n$. Поскольку $\{x_n\}$ ограничена, то существует такое $A > 0$, что $|x_n| \leq A$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь тем, что $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, найдем такой номер N, что при всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$. Тогда для $n \geq N$ получим $|\beta_n| = |\alpha_n|\,|x_n| \leq A\,|\alpha_n| < \varepsilon$, а это и означает, что последовательность $\{\beta_n\}$ бесконечно малая. $\square$

Бесконечно большие последовательности. Выше мы показали, что каждая сходящаяся последовательность ограничена. Иначе говоря, всякая неограниченная последовательность расходится. Мы выделим некоторые специальные классы неограниченных последовательностей.

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ стремится к $+\infty$, если для любого действительного числа M найдется номер N, зависящий, вообще говоря, от M, такой, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $x_n > M$. В этом случае пишут $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, или $x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ стремится к $-\infty$, если для любого действительного числа M найдется номер N, зависящий, вообще говоря, от M, такой, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $x_n < -M$. В этом случае пишут $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, или $x_n \to -\infty$ при $n \to \infty$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если модули ее элементов стремятся к $+\infty$ ($\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$), т. е. если для любого M найдется номер N, такой, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n| > M$. Обозначают это так: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, или $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Ясно, что каждое из условий $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, или $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ влечет $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Обратное неверно. Например, последовательность $x_n = (-1)^n n$ стремится к ∞, но не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.

Напомним, что неограниченная последовательность $\{x_n\}$ – это такая, что для любого M найдется такой номер n, что $|x_n| > M$. Ясно, что каждая бесконечно большая последовательность неограничена, но обратное неверно. Например, последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ неограничена, но не является бесконечно большой.

Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями устанавливает следующее

Утверждение. *Пусть $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \dots)$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая в том и только в том случае, когда последовательность $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$ бесконечно малая.*

Доказательство этого утверждения сразу следует из эквивалентности двух следующих неравенств: $|\alpha_n| < \varepsilon$ и $|x_n| = \left|\frac{1}{\alpha_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$. Например, если $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда для $n \geq N$ будем иметь $|\alpha_n| = \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$, а это и означает, что последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая.

Доказательство обратного утверждения аналогично. $\square$

Некоторые виды неопределенностей. Пусть $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$. Тогда легко убедиться в том, что $x_n + y_n \to +\infty$ и $x_n y_n \to +\infty$. Однако, об $x_n - y_n$ ничего определенного сказать нельзя. Так, например, если $x_n = n^2 \to +\infty,\ y_n = n \to +\infty$, то $x_n - y_n = n^2 - n \geq n$ $(n \geq 2)$ и $x_n - y_n \to +\infty$. Для $x_n = n,\ y_n = n^2$ имеем $x_n - y_n = n - n^2 \leq -n$ и $x_n - y_n \to -\infty$. Если же $x_n = n \to +\infty,\ y_n = n + (-1)^n \to +\infty$, то последовательность $x_n - y_n = (-1)^{n+1}$ не имеет предела.

Говорят, что разность двух стремящихся к $+\infty$ последовательностей составляет неопределенность вида $[(+\infty) - (+\infty)]$. Другой вид неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ – отношение двух стремящихся к ∞ последовательностей, т. е. $\frac{x_n}{y_n}$, где $x_n \to \infty,\ y_n \to \infty$. В самом деле, для $x_n = n^2,\ y_n = n$ имеем $\frac{x_n}{y_n} = n \to \infty,\ \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{n} \to 0$. Если же $x_n = (2 + (-1)^n)\,n,\ y_n = n$, то отношение $\frac{x_n}{y_n} = 2 + (-1)^n$, очевидно, не имеет предела.

Так как обратная к бесконечно большой является бесконечно малой последовательностью, то получаем еще такие виды неопределенностей: $[0 \cdot \infty] = \left[\frac{1}{\infty} \cdot \infty\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$. Приведите соответствующие примеры.

2.3 Лемма Кантора о вложенных отрезках

Эта лемма играет чрезвычайно важную роль в анализе. Ее доказательство основано на применении теоремы о существовании верхней грани, которое, в свою очередь, базируется на аксиоме полноты множества действительных чисел. По сути дела, эта лемма эквивалентна аксиоме полноты. Это означает, что при аксиоматическом определении системы действительных чисел вместо аксиомы полноты можно было бы постулировать справедливость леммы Кантора.

Лемма Кантора (о вложенных отрезках). *Пусть последовательность отрезков* I_n $(n = 1, 2, \dots)$ *такова, что* $I_{n+1} \subset I_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. *Тогда существует точка* c*, принадлежащая всем отрезкам* I_n*. Если дополнительно предположить, что длины* $|I_n|$ *отрезков* I_n *стремятся к нулю при* $n \to \infty$*, то такая точка* c *единственная.*

Доказательство. Пусть $I_n = [a_n, b_n]$. Покажем, что для любых m, n справедливо неравенство $a_n \le b_m$. В самом деле, если $a_n > b_m$, то отсюда следует, что отрезки $[a_n, b_n]$ и $[a_m, b_m]$ не имеют общих точек, что невозможно, т. к. по условию леммы отрезок с большим номером содержится в отрезке с меньшим номером.

Обозначим через E множество всех левых концов отрезков I_n, т. е. $E = \{a_1, a_2, \dots\}$. Как только что показано, это множество E ограничено сверху, например, числом b_1. Обозначим $c = \sup E$. Из определения верхней грани следует, что для всех $n = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство $a_n \le c$. С другой стороны, при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем $c \le b_n$, поскольку каждое b_n, как показано выше, является верхней границей множества E, а c – наименьшая из всех верхних границ множества E.

Итак, для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $a_n \le c \le b_n$, а это и означает, что $c \in I_n$.

Предположим теперь, что длины отрезков I_n стремятся к нулю, и докажем, что полученная точка c единственна. В самом деле, если предположим, что существуют две различные точки $c' < c''$, принадлежащие всем отрезкам I_n, то получим $a_n \le c' < c'' \le b_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Отсюда следует, что $b_n - a_n \ge c'' - c' > 0$, а это противоречит тому, что длины $b_n - a_n$ отрезков I_n стремятся к нулю. □

Замечание 1. Если в условии леммы Кантора длины отрезков не стремятся к нулю, то легко показать, что целый отрезок $[c, c']$, где $c = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$, $c' = \inf\{b_1, b_2, \dots\}$, содержится в каждом I_n.

Замечание 2. Лемма Кантора теряет силу, если в ее формулировке отрезки заменить интервалами. В самом деле, легко видеть, что последовательность вложенных друг в друга интервалов $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ не имеет общих точек, поскольку $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$.

2.4 Подпоследовательности. Лемма Больцано – Вейерштрасса

Пусть задана последовательность $\{x_n\}$. Если мы выберем из нее некоторые члены (бесконечно много в порядке возрастания номеров), то получим подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Именно, зададим строго возрастающую последовательность номеров n_k $(k = 1, 2, \dots)$. Тогда последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. Подпоследовательность x_{n_k} является функцией натурального аргумента k, т. е. каждому натуральному k ставится в соответствие элемент x_{n_k} последовательности $\{x_n\}$. Например, если $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, т. е. исходная последовательность $0, 1, 0, 1, \dots$, то выбирая $n_k = 2k$, т. е. выбирая все элементы последовательности с четными номерами, получим подпоследовательность $x_{2k} = 1$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Ранее было показано, что каждая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, из ограниченности последовательности не следует ее сходимость. Так, рассмотренная только что последовательность $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, очевидно, ограничена ($|x_n| \le 1,\ n = 1, 2, \dots$), но она не является сходящейся. Вместе с тем из этой последовательности мы выделили подпоследовательность $x_{2k} = 1$ $(k = 1, 2, \dots)$ – стационарную и, следовательно, сходящуюся. Оказывается, что это можно сделать для любой ограниченной последовательности.

Лемма Больцано – Вейерштрасса. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство этой леммы основано на последовательном делении отрезка пополам и применении леммы Кантора о вложенных отрезках.

Итак, пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность. Тогда существуют числа a и b, такие, что $a \le x_n \le b$ $(n = 1, 2, \dots)$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой c, т. е. положим $c = \frac{a+b}{2}$. Тогда хотя бы один из полученных отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ будет содержать бесконечно много элементов последовательности. Выберем тот из отрезков $[a, c]$ или $[c, b]$, который содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, и обозначим его $[a_1, b_1]$. Теперь разделим пополам отрезок $[a_1, b_1]$ и выберем из двух полученных отрезков такой $[a_2, b_2]$, который содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Продолжая этот процесс, получим последовательность отрезков $I_k = [a_k, b_k]$, вложенных друг в друга ($I_{k+1} \subset I_k$), длины которых $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0$ $(k \to \infty)$ и в каждом I_k содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. В силу леммы Кантора о вложенных отрезках, существует единственная точка α, принадлежащая всем отрезкам I_k $(k = 1, 2, \dots)$.

Теперь построим подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, сходящуюся к α. Выберем в качестве x_{n_1} любой элемент последовательности $\{x_n\}$, содержащийся в I_1. Он существует, так как в I_1 содержится бесконечно много элементов $\{x_n\}$. Далее, так как в $I_2 = [a_2, b_2]$ содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, то в I_2 найдется элемент последовательности $\{x_n\}$, номер которого n_2 больше, чем n_1. Это будет второй элемент нашей подпоследовательности x_{n_2}. Если уже выбраны номера $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, такие, что $x_{n_i} \in I_i = [a_i, b_i]$, то, поскольку в отрезке $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, в I_{k+1} найдется такой элемент $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$, что $n_{k+1} > n_k$.

По индукции мы построили подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Покажем, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$. Для $k = 1, 2, \dots$ имеем $a_k \le x_{n_k} \le b_k$ и $a_k \le \alpha \le b_k$. Отсюда получаем $0 \le |x_{n_k} - \alpha| \le b_k - a_k$. Но, поскольку $b_k - a_k \to 0$ $(k \to \infty)$, то по теореме о трех пределах получаем, что $|x_{n_k} - \alpha| \to 0$ $(k \to \infty)$, а значит, $x_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$. $\square$

2.5 Критерий Коши

Если для исследования сходимости последовательности применять определение предела, то мы заранее должны знать, является ли данная последовательность сходящейся и значение ее предела. Используя определение предела, мы можем лишь доказывать выдвинутую гипотезу. Однако в ряде случаев по самому виду последовательности трудно определить, является ли она сходящейся или расходящейся. Например, $x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, $y_n = 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$. В связи с этим возникает необходимость найти внутреннее свойство последовательности, равносильное сходимости и не зависящее от числа a – предела последовательности. Мы докажем, что таким свойством является фундаментальность.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной (сходящейся в себе), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, зависящий, вообще говоря, от ε, что для всех номеров $n \geq N$, $m \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Существенное отличие определения фундаментальности от определения предела состоит в том, что в определении предела мы должны знать значение предела, а в определении фундаментальности это не требуется. Смысл определения предела состоит в том, что все элементы последовательности с достаточно большими номерами мало отличаются от значения предела, т. е. $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n \geq N = N(\varepsilon)$. В определении фундаментальности требуется чтобы все элементы последовательности с достаточно большими номерами мало отличались друг от друга ($|x_n - x_m| < \varepsilon,\ n, m \geq N = N(\varepsilon)$).

Равносильность сходимости последовательности и ее фундаментальности устанавливает следующая теорема.

Теорема (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. Необходимость доказывается совсем просто. В самом деле, нужно показать, что из сходимости следует фундаментальность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем номер N, такой, что для любого $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если $n, m \geq N$, то получим

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а это и означает, что $\{x_n\}$ – фундаментальна.

Достаточность. Нужно показать, что из фундаментальности последовательности следует ее сходимость. Сначала мы покажем, что из фундаментальности следует ограниченность. Затем, используя лемму Больцано – Вейерштрасса, из ограниченной последовательности выделим сходящуюся подпоследовательность и, наконец, снова используя фундаментальность, покажем, что и вся последовательность сходится к тому же пределу, что и выделенная подпоследовательность.

Итак, пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность. Докажем ее ограниченность. Зададим $\varepsilon = 1$ и, пользуясь фундаментальностью, найдем номер N_1, такой, что для любых $n, m \geq N_1$ справедливо неравенство $|x_n - x_m| < 1$. Зафиксируем $m = N_1$. Тогда получим, что для всех $n \geq N_1$ имеет место неравенство $|x_n - x_{N_1}| < 1$, т. е. $x_{N_1} - 1 < x_n < x_{N_1} + 1$. Отсюда следует, что $|x_n| \leq |x_{N_1}| + 1$ для всех $n \geq N_1$. Во множестве $E = \{|x_{N_1}| + 1, |x_1|, \ldots, |x_{N_1 - 1}|\}$, состоящего из конечного числа элементов, выберем наибольший $A = \max\{|x_{N_1}| + 1, |x_1|, \ldots, |x_{N_1-1}|\}$. Тогда получим, что $|x_n| \leq A$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, а это и означает, что $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность.

Применяя теперь к ограниченной последовательности $\{x_n\}$ лемму Больцано – Вейерштрасса, выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и обозначим через a предел этой подпоследовательности. Покажем, что вся последовательность $\{x_n\}$ также сходится к числу a, т. е. что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь фундаментальностью последовательности $\{x_n\}$, найдем такой номер N, что для всех номеров $n, m \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, пользуясь тем, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, для заданного ε найдем номер k, такой, что $n_k \geq N$ (это возможно, поскольку $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$) и $|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $m = n_k$. Тогда получим, что для любого $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что для $n \geq N$

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ мы нашли номер N, начиная с которого справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Поскольку выбранное $\varepsilon > 0$ произвольно, то по определению предела последовательности получаем, что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. $\square$

Определение фундаментальности последовательности можно сформулировать в такой эквивалентной форме.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, зависящий, вообще говоря, от ε, что для любого $n \geq N$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Пользуясь этим определением, скажем, что последовательность $\{x_n\}$ не является фундаментальной, если найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого N существуют такой номер $n \geq N$ и такое натуральное число p, что $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$.

Пример 1. Рассмотрим последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Для натуральных n и p имеем $x_{n+p} - x_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p} + \cdots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}$. Если n зафиксировано, то для $p = n$ получаем $|x_{n+p} - x_n| \geq \frac{1}{2}$. Выберем $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$. Тогда для любого номера N положим $n = N$, $p = n$ и будем иметь $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Это означает, что данная последовательность не является фундаментальной и, следовательно, в силу критерия Коши, она расходится.

Пример 2. Покажем, что последовательность $x_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{n^2}$ фундаментальна, а значит, сходящаяся. Для натуральных n и p имеем

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

если только $n \geq N \equiv \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Этим самым доказано, что данная последовательность фундаментальна.

Упражнение. Покажите, что условие $\lim_{n\to\infty}(x_{n+p}-x_n)=0$, справедливое при любом натуральном p, не влечет фундаментальность последовательности $\{x_n\}$.

2.6 Монотонные последовательности. Число e

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (возрастающей), если $x_{n+1}\geq x_n$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Если $x_{n+1}>x_n$ ($n\in\mathbb{N}$), то такая последовательность называется строго возрастающей. Если $x_{n+1}\leq x_n$ ($n\in\mathbb{N}$), то такая последовательность называется невозрастающей (убывающей), а если $x_{n+1}<x_n$, то последовательность называется строго убывающей. Последовательность называется монотонной, если она либо невозрастающая, либо неубывающая, и строго монотонной, если она либо строго возрастает, либо строго убывает.

Теорема. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает. Тогда*

1) *если $\{x_n\}$ ограничена сверху, то она сходится;*

2) *если $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$.*

Доказательство. Ограниченность сверху данной последовательности $\{x_n\}$ означает, что ограничено сверху множество $E=\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}$. Обозначим $c=\sup E$ и покажем, что $c=\lim_{n\to\infty}x_n$. Так как $c=\sup E$, то для каждого n справедливо неравенство $x_n\leq c$, и для любого $\varepsilon>0$ найдется такой номер N, что $x_N>c-\varepsilon$. Но из монотонности последовательности $\{x_n\}$ следует, что для любого $n\geq N$ также будет справедливо неравенство $x_n>c-\varepsilon$. Итак, $c-\varepsilon<x_n\leq c<c+\varepsilon$ при любом $n\geq N$, т. е. $|x_n-c|<\varepsilon$, а это и означает, что $\lim_{n\to\infty}x_n=c$.

Если последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху, то для любого M найдется такой номер N, что $x_N>M$. Но из монотонности последовательности $\{x_n\}$ следует, что $x_n>M$ при любом $n\geq N$. Это и означает, что $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$. $\square$

Из этой теоремы мгновенно вытекает

Теорема (критерий сходимости монотонно возрастающей последовательности). *Монотонно возрастающая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху.*

Аналогично предыдущей доказывается следующая

Теорема. *Пусть* $\{x_n\}$ *монотонно убывающая последовательность. Тогда*

1) *если* $\{x_n\}$ *ограничена снизу, то она сходится;*

2) *если* $\{x_n\}$ *неограничена снизу, то* $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Как и выше, отсюда вытекает

Теорема (критерий сходимости монотонно убывающей последовательности). *Монотонно убывающая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена снизу.*

Ясно, что возрастающая последовательность ограничена снизу (например, первым элементом последовательности), а убывающая последовательность ограничена сверху. Поэтому предыдущие утверждения можно объединить в виде следующей теоремы.

Теорема (критерий сходимости монотонной последовательности). *Монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.*

Замечание. Без предположения монотонности эта теорема теряет силу. В самом деле, последовательность $x_n = (-1)^n$ ограничена, но, как было показано выше, расходится. Это оказалось возможным потому, что данная последовательность не является монотонной.

Как критерий Коши, так и критерий сходимости монотонной последовательности, позволяют доказывать сходимость последовательности, но не дают способов нахождения предела. На практике часто можно облегчить нахождение предела, зная лишь о его существовании и используя свойства сходящихся последовательностей. Продемонстрируем это на примере.

Пример 1. Пусть $x_n = \frac{n}{2^n}$. Покажем, что эта последовательность убывающая. Имеем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} \leq 1,$$

откуда, учитывая, что $x_n > 0$, следует $x_{n+1} \leq x_n$. Кроме того, так как $x_n > 0$, то эта последовательность ограничена снизу. По теореме существования предела монотонной и ограниченной последовательности, данная последовательность имеет предел $a = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$. Но тогда и $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$, а по теореме о пределе произведения

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{2^n}{2^{n+1}} \frac{n}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} a.$$

Теперь из равенства $a = \frac{1}{2}a$ следует, что $a = 0$, т. е. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Следует обратить особое внимание на то, что подобные рассуждения справедливы лишь при условии, что существует $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Если это условие не выполнено, то можно получить неверный результат. Именно, если $x_n = (-1)^n$, то $x_{n+1} = (-1)^{n+1} = -x_n$, откуда $a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = -\lim_{n\to\infty} x_n = -a$. Из этого равенства получим, что $a = 0$. Но этот вывод неверный, т. к. наши рассуждения были проведены в предположении, что последовательность $(-1)^n$ сходится, что, как известно, неверно.

Пример 2. Пусть $a > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, где в качестве x_1 можно взять любое положительное число. Если мы покажем, что существует положительный предел этой последовательности $c = \lim_{n\to\infty} x_n > 0$, то, исходя из арифметических свойств пределов, получим $c = \frac{1}{2}\left(c + \frac{a}{c}\right)$, откуда $2c^2 = c^2 + a$, т. е. $c^2 = a$. Учитывая, что $c > 0$, имеем $c = \sqrt{a}$.

Итак, осталось показать, что данная последовательность имеет положительный предел. Так как $x_1 > 0$, то $x_2 > 0$, а значит, $x_3 > 0$ и т. д. По индукции получаем, что все $x_n > 0$. Это, в частности, означает, что данная последовательность определена корректно. Докажем более точное неравенство – оценку снизу для x_n. Для этого перепишем данное рекуррентное равенство, определяющее последовательность, в таком виде:

$$x_{n+1} = \sqrt{a}\frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right).$$

Но поскольку для любого $y > 0$ справедливо неравенство $y + \frac{1}{y} \geq 2$ (оно равносильно тому, что $(y-1)^2 \geq 0$), то имеем

$$x_{n+1} = \sqrt{a}\frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \geq \sqrt{a}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Теперь, учитывая, что $x_n \geq \sqrt{a}$, $n = 2, 3, \ldots$, получим

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{\left(\sqrt{a}\right)^2}\right) = 1, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

так что $x_{n+1} \leq x_n$, $n = 2, 3, \ldots$, т. е. данная последовательность убывающая, начиная со второго номера. Выше было показано, что она ограничена снизу числом $\sqrt{a}$. По теореме о сходимости монотонной и ограниченной последовательности получаем, что существует $c = \lim_{n\to\infty} x_n$, и, т. к. все $x_n \geq \sqrt{a}$, то и $c = \lim_{n\to\infty} x_n \geq \sqrt{a} > 0$.

Замечание. В рассмотренном примере последовательность $\{x_n\}$ определена рекуррентно равенством $x_{n+1} = f(x_n)$, где функция f обладает тем свойством, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

Тогда для нахождения предела c такой последовательности нам нужно было решить уравнение $c = f(c)$. Этот стандартный прием удобен для вычисления пределов последовательностей, заданных рекуррентно. Однако следует помнить, что прежде чем использовать этот прием, нужно доказать само существование предела. Если этого не сделать, то можно получить неверный результат.

Число e.

Теорема. *Последовательность* $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *сходится.*

Доказательство. Достаточно показать, что x_n возрастает и ограничена сверху. По формуле бинома Ньютона

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = C_n^0 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \cdots + C_n^{n-1}\frac{1}{n^{n-1}} + C_n^n\frac{1}{n^n} =$$

$$= \frac{n!}{0!n!} + \frac{n!}{1!(n-1)!}\frac{1}{n} + \frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n!}{(n-1)!1!}\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n!}{n!0!}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots +$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Если мы теперь вместо n подставим $n+1$, то количество слагаемых справа увеличится на одно положительное, и в каждом слагаемом все выражения в скобках также увеличатся. В самом деле, $1-\frac{k}{n} \le 1-\frac{k}{n+1}$, $1 \le k \le n-1$, а учитывая, что все слагаемые положительные, получим, что $x_{n+1} \ge x_n$. Таким образом, последовательность возрастающая.

Для доказательства ограниченности сверху воспользуемся тем, что каждое выражение в скобках не превосходит 1. Тогда получим

$$x_n \le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 + \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1/2^n}{1-\frac{1}{2}}\right) \le 1 + 2 = 3.$$

Итак, мы показали, что данная последовательность возрастающая и ограничена сверху. По теореме о сходимости монотонной и ограниченной последовательности получаем, что она сходится. $\square$

Обозначим

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

Из доказательства теоремы видно, что $\mathrm{e} \le 3$. Приближенное значение этого числа равно $\mathrm{e} \approx 2,718281828\dots$.

Теорема (другое представление числа e**).** *Пусть последовательность* $y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$. *Тогда* $\lim_{n\to\infty} y_n = \mathrm{e}$.

Доказательство. Для доказательства запишем представление $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, которое мы получили при доказательстве предыдущей теоремы

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \le 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!} = y_n.$$

Если мы еще покажем, что $y_n \le \mathrm{e}$, то, по теореме о трех пределах, из неравенства $x_n \le y_n \le \mathrm{e}$ получим утверждение нашей теоремы.

Зафиксируем k и пусть $n > k$. Тогда

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+$$

$$+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) >$$

$$> 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Поскольку k фиксировано, а $n > k$, то в полученном неравенстве можем перейти к пределу при $n \to \infty$. Левая часть при этом стремится к e, а правая – к y_k. Поэтому получаем

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} x_n \ge$$

$$\ge \lim_{n\to\infty}\left[1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right] = y_k,$$

т. е. при любом натуральном k справедливо неравенство $y_k \le \mathrm{e}$. $\square$

Используя эту теорему, нетрудно доказать, что число e иррационально. Мы этого делать не будем.

2.7 Частичные пределы. Верхний и нижний пределы

Предложение 1. *Пусть* $\{x_n\}$ *– сходящаяся последовательность и* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. *Тогда любая подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$ *сходится и* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Поскольку $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$, то для найденного N найдется такое K, что при всех $k \geq K$ справедливо неравенство $n_k \geq N$. Но тогда и $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. Таким образом, для заданного $\varepsilon > 0$ мы нашли номер K, такой, что при всех $k \geq K$ справедливо неравенство $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. □

Подобным образом легко можно доказать следующее

Предложение 2. *Если* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *то для любой подпоследовательности* $\{x_{n_k}\}$ $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. *Если же* $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, *то для любой подпоследовательности* $\{x_{n_k}\}$ $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$.

Итак, если последовательность сходится к некоторому пределу, то и любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу. Обратное утверждение очевидно, т. к. сама последовательность является одной из своих подпоследовательностей (полагаем $n_k = k$).

Ранее мы уже приводили примеры расходящихся последовательностей, у которых существуют сходящиеся подпоследовательности. Напомним также лемму Больцано – Вейерштрасса, согласно которой из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Число $c = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ называют частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.

Определение 1. Число c называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к c.

Из доказанного выше предложения 1 следует, что у каждой сходящейся последовательности существует единственный конечный частичный предел (т. к. каждая подпоследовательность сходится к пределу последовательности). Если же последовательность расходится, то у нее может быть несколько различных частичных пределов. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$ имеет два различных частичных предела $1 = \lim_{k\to\infty} x_{2k}$ и $-1 = \lim_{k\to\infty} x_{2k+1}$.

Расширим понятие частичного предела. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ имеет частичным пределом $+\infty$, если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, такая, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. Если же существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, такая, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$, то говорят, что $-\infty$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$. Например, для последовательности $x_n = (-1)^n n$ частичными пределами являются $+\infty$ и $-\infty$, поскольку

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k} 2k = \lim_{k\to\infty} 2k = +\infty,$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k+1}(2k+1) = \lim_{k\to\infty} (-2k-1) = -\infty.$$

Дадим еще одно определение частичного предела последовательности.

Определение 2. Число a ($+\infty$ или $-\infty$) называются частичными пределами последовательности $\{x_n\}$, если в любой окрестности a ($+\infty$ или $-\infty$) найдутся элементы последовательности $\{x_n\}$ со сколь угодно большими номерами.

В кванторах это определение можно записать так:

для конечного $a: \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n \geq N: \quad |x_n - a| < \varepsilon;$

для $a = +\infty: \quad \forall M \quad \forall N \quad \exists n \geq N: \quad x_n > M;$

для $a = -\infty: \quad \forall M \quad \forall N \quad \exists n \geq N: \quad x_n < -M.$

Полезно сравнить это определение с определением предела (конечного и бесконечного), а также с определением неограниченных сверху и снизу последовательностей.

Доказательство эквивалентности определений 1 и 2. Пусть конечное число a является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$

в смысле определения 1. Тогда найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, стремящаяся к a. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое K, что при любом $k \geq K$ справедливо неравенство $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. Пусть произвольное $N \in \mathbb{N}$. Так как $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$, то найдется $k \geq K$, такое, что $n_k \geq N$. Но поскольку $k \geq K$, то $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. Итак, для заданных $\varepsilon > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ найдется номер $n \geq N$ ($n = n_k,\ k \geq K$), такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$, т. е. число a является частичным пределом в смысле определения 2.

Обратно, пусть a – частичный предел в смысле определения 2. Зададим $\varepsilon = 1$, $N = 1$ и найдем такое n_1, что $|x_{n_1} - a| < 1$. Далее, зададим $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $N = n_1 + 1$ и найдем $n_2 \geq N$, такое, что $|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$. Ясно, что $n_2 > n_1$. Если выбраны элементы $x_{n_1}, \ldots, x_{n_{k-1}}$, то задавая $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $N = n_{k-1} + 1$, найдем $n_k \geq N$, такое, что $|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$. Ясно, что $n_k > n_{k-1}$. По индукции построили подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, такую, что $|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$. Отсюда следует, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

Покажем, что определения 1 и 2 эквивалентны для случая $a = +\infty$. Пусть существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$, т. е. пусть $+\infty$ является частичным пределом в смысле определения 1. Зададим M и найдем такое K, что при всех $k \geq K$ справедливо неравенство $x_{n_k} > M$. Зададим $N \in \mathbb{N}$. Так как $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$, то найдется $k \geq K$, такое, что $n_k \geq N$. Но тогда получим, что $x_{n_k} > M$. Окончательно, для заданных M и N мы нашли такое $n \geq N$, что $x_n > M$, а это и означает, что $+\infty$ является частичным пределом в смысле определения 2.

Обратно, пусть $+\infty$ является частичным пределом в смысле определения 2. Для $M = 1$ и $N = 1$ найдем $n_1 \geq 1$, такое, что $x_{n_1} > 1$. Для $M = 2$ и $N = n_1 + 1$ найдем $n_2 \geq N$, такое, что $x_{n_2} > 2$. Продолжая этот процесс, найдем подпоследовательность x_{n_k}, такую, что $x_{n_k} > k$. Отсюда следует, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$, т. е. $+\infty$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$ в смысле определения 1.

Эквивалентность определений 1 и 2 для случая $a = -\infty$ рекомендуется доказать самостоятельно. $\square$

Лемма 1. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *неограничена сверху, то* $+\infty$ *является ее частичным пределом.*

Доказательство. По условию, для любого M найдется такой номер n, что $x_n > M$. Зададим $M = 1$ и найдем такое n_1, что $x_{n_1} > 1$. Зададим $M = \max(x_1, \ldots, x_{n_1}) + 2$ и найдем номер n_2, такой, что $x_{n_2} > M$. Ясно, что $n_2 > n_1$. Если выбраны $x_{n_1}, \ldots, x_{n_{k-1}}$, то положим $M = \max\left(x_1, \ldots, x_{n_{k-1}}\right) + k$ и найдем $n_k > n_{k-1}$, такое, что $x_{n_k} > M$. По индукции построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, причем в силу самого построения $x_{n_k} > k,\ k = 1, 2 \ldots$. Отсюда следует, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$, т. е. $+\infty$ – частичный предел последовательности $\{x_n\}$. $\square$

Аналогично доказывается, что для неограниченной снизу последовательности $-\infty$ является ее частичным пределом.

Пусть теперь $\{x_n\}$ – произвольная последовательность. Если она ограничена, то, в силу леммы Больцано – Вейерштрасса, существует сходящаяся подпоследовательность. Это означает, что $\{x_n\}$ имеет конечный частичный предел. Если же $\{x_n\}$ неограничена, то она неограничена либо сверху, либо снизу. В первом случае ее частичным пределом будет $+\infty$, а во втором $-\infty$. Таким образом, мы доказали следующее

Утверждение. *Каждая последовательность имеет хотя бы один частичный предел (быть может, равный* $+\infty$ *или* $-\infty$*).*

Для того чтобы определить понятие верхнего и нижнего предела последовательности, нам понадобится следующее расширение множества действительных чисел:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\,.$$

Будем считать, что для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $-\infty < x < +\infty$. Если множество $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ содержит $+\infty$, то элемент $+\infty$ считается наибольшим в E. Если же $-\infty \in E$, то $-\infty$ считается наименьшим элементом в E.

Мы показали, что у каждой последовательности $\{x_n\}$ существует частичный предел, принадлежащий $\overline{\mathbb{R}}$. Другими словами, множество $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ частичных пределов произвольной последовательности $\{x_n\}$ непусто.

Определение. Верхним пределом последовательности $\{x_n\}$ называется верхняя грань множества всех ее частичных пределов и обозначается $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ (или $\limsup_{n\to\infty} x_n$). Нижним пределом последовательности $\{x_n\}$ называется нижняя грань множества всех ее частичных пределов и обозначается $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ (или $\liminf_{n\to\infty} x_n$).

Замечание. Следует отличать понятия верхнего и нижнего пределов последовательности от понятий верхней и нижней граней множества значений последовательности. Так, например, у последовательности $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ множество ее значений $E_1 = \left\{\frac{(-1)^n}{n},\ n = 1, 2, \ldots\right\}$ имеет наибольший элемент $x_2 = \frac{1}{2}$ и наименьший элемент $x_1 = -1$. Поэтому $\sup E_1 = \frac{1}{2}$ и $\inf E_1 = -1$. Вместе с тем множество частичных пределов E_2 этой последовательности состоит из одного элемента $E_2 = \{0\}$ (т. к. $\{x_n\}$ сходится). Поэтому $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$.

Выше отмечалось, что для любой последовательности множество ее частичных пределов в $\overline{\mathbb{R}}$ непусто. Следовательно, у любой последовательности существует верхний и нижний пределы.

Пример 1. Пусть $x_n = \sin\frac{\pi n}{4}$. Это – такая последовательность:

$$\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ldots$$

Множество E ее частичных пределов равно $E = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1, -1\right\}$. Никакое другое число не является частичным пределом данной последовательности. В самом деле, если $a \notin E$, то существует такая ε-окрестность точки a, в которой нет ни одного элемента последовательности, а значит, число a не может быть частичным пределом. Итак, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -1$.

Пример 2. Пусть $x_n = -n$. Тогда $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и, следовательно, любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ также стремится к $-\infty$. Значит, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Пример 3. Пусть $x_n = n^{(-1)^n}$. Одна из подпоследовательностей $x_{2k} = 2k$ стремится к $+\infty$, а другая – $x_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$ – стремится к нулю. Если же мы возьмем какую-нибудь подпоследовательность, содержащую бесконечно много четных и бесконечно много нечетных элементов, то такая подпоследовательность не будет иметь предела. Значит, у данной последовательности существует лишь два частичных предела: $+\infty$ и 0. Поэтому $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$. По-другому, если $a \notin \{0, +\infty\}$, то существует такая окрестность точки a, в которой содержится не более чем конечное множество элементов последовательности $\{x_n\}$. Это означает, что если $a \notin \{0, +\infty\}$, то a не является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 1. *Для любой последовательности $\{x_n\}$ ее верхний предел является частичным пределом.*

Доказательство. Если $\{x_n\}$ неограничена сверху, то, согласно лемме 1, существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, стремящаяся к $+\infty$. Это означает, что $+\infty$ является частичным пределом и, очевидно, наибольшим. Поэтому $+\infty$ в этом случае, будучи верхним пределом, является и частичным пределом.

Предположим теперь, что $\{x_n\}$ ограничена сверху. Возможны следующие два случая.

1). У $\{x_n\}$ существует ограниченная снизу подпоследовательность.

2). У $\{x_n\}$ не существует ограниченной снизу подпоследовательности.

Во втором случае у $\{x_n\}$ нет конечного частичного предела. В самом деле, если бы он был, то была бы сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Но из сходимости $\{x_{n_k}\}$ следует ее ограниченность, что противоречит условию второго случая. Таким образом, во втором случае единственным частичным пределом последовательности $\{x_n\}$ является $-\infty$, т. е. $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Но так как $-\infty$ – единственный частичный предел, то и $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Осталось рассмотреть первый случай. В этом случае существует ограниченная снизу, а значит, ограниченная подпоследовательность. По лемме Больцано – Вейерштрасса, из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, и поэтому исходная последовательность имеет конечный частичный предел. Обозначим $\overline{x} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. Так как $\{x_n\}$ ограничена сверху, то $\overline{x} < +\infty$, а поскольку у $\{x_n\}$ существует хотя бы один конечный частичный предел, то $\overline{x} > -\infty$.

Зададим $\varepsilon > 0$. Так как $\overline{x} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, то существует такой $x > \overline{x} - \varepsilon$, что x является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, причем $x \le \overline{x}$. Зададим $\varepsilon_1 = x - (\overline{x} - \varepsilon) > 0$ и произвольное натуральное N. Так как x – частичный предел, то существует такое $n \ge N$, что $|x_n - x| < \varepsilon_1$. Но тогда справедливо неравенство $|x_n - \overline{x}| < \varepsilon$. Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ и для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется $n \ge N$, такое, что $|x_n - \overline{x}| < \varepsilon$. По определению 2 частичного предела, это и означает, что $\overline{x}$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$. $\square$

Аналогично можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любой последовательности $\{x_n\}$ ее нижний предел является частичным пределом.*

Теорема 3. *Последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный или бесконечный предел a тогда и только тогда, когда*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a. \tag{2.2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда из предложений 1 и 2 следует, что любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к a, а значит, множество частичных пределов состоит из единственной точки a. Таким образом, наибольший и наименьший частичные пределы также равны a, и поэтому имеет место равенство (2.2).

Достаточность. Пусть выполнено равенство (2.2). Рассмотрим случай $-\infty < a < +\infty$. Для доказательства утверждения докажем следующие два свойства верхнего $\overline{x}$ и нижнего $\underline{x}$ пределов последовательности $\{x_n\}$.

1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при всех $n \ge N$ справедливо неравенство $x_n < \overline{x} + \varepsilon$.

2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при всех $n \ge N$ справедливо неравенство $x_n > \underline{x} - \varepsilon$.

Докажем 1. Предположим противное, т. е. пусть найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого N существует $n \ge N$, такое, что $x_n \ge \overline{x} + \varepsilon_0$. Зададим

$N = 1$ и найдем такое $n_1 \geq N$, что $x_{n_1} \geq \overline{x} + \varepsilon_0$. Зададим $N = n_1 + 1$ и найдем такое $n_2 \geq N$, что $x_{n_2} \geq \overline{x} + \varepsilon_0$. По индукции построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, такую, что $x_{n_k} \geq \overline{x} + \varepsilon_0$ ($k = 1, 2, \dots$). Эта подпоследовательность имеет хотя бы один частичный предел α, причем $\alpha \geq \overline{x} + \varepsilon_0$. Тогда α является также и частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, а это противоречит тому, что $\overline{x} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ – наибольший из всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$.

Свойство 2 нижнего предела доказывается аналогично, и мы опускаем его доказательство.

В нашем случае $\overline{x} = \underline{x} = a$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое N_1, что для всех $n \geq N_1$ справедливо неравенство $x_n < a + \varepsilon$. Далее, найдем такое N_2, что для всех $n \geq N_2$ справедливо неравенство $x_n > a - \varepsilon$. Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для всех $n \geq N$ будет выполнено неравенство $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, т. е. $|x_n - a| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Теперь рассмотрим случай $a = +\infty$. В этом случае множество всех частичных пределов состоит из единственного элемента $+\infty$. Докажем, что $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, т. е. что для любого M найдется такое N, что при всех $n \geq N$ справедливо неравенство $x_n > M$.

Предположим противное. Пусть существует такое M, что для всех N найдется такое $n \geq N$, что $x_n \leq M$. Зададим $N = 1$ и найдем такое $n_1 \geq N$, что $x_{n_1} \leq M$. Зададим $N = n_1 + 1$ и найдем такое $n_2 \geq N$, что $x_{n_2} \leq M$. Продолжая этот процесс, получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, такую, что $x_{n_k} \leq M$ ($k = 1, 2, \dots$). Эта подпоследовательность имеет хотя бы один частичный предел $\alpha \leq M$, т. е. существует $\left\{x_{n_{k_s}}\right\}$, сходящаяся к α. Но $\left\{x_{n_{k_s}}\right\}$ является также подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. Это означает, что число $\alpha \leq M$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, что противоречит тому, что $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Случай $a = -\infty$ рассматривается аналогично. $\square$

Итак, теорема 3 дает необходимое и достаточное условие существования предела последовательности (быть может, равного $+\infty$ или $-\infty$). Отсюда получаем, что если $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n < \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, то последовательность не имеет предела (даже равного $+\infty$ или $-\infty$). Это утверждение может быть применено на практике для доказательства расходимости последовательности. Именно, если из заданной последовательности $\{x_n\}$ оказывается возможным выделить две подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ и $\{x_{m_k}\}$, сходящиеся к различным пределам, то исходная последовательность $\{x_n\}$ не является сходящейся. Например, пусть $x_n = (-1)^n$. Выделим две подпоследовательности: $x_{2k} = 1$ и $x_{2k+1} = -1$. Они сходятся к различным пределам, и поэтому исходная последовательность x_n расходится. Для другого рассмотренного выше примера последовательности $y_n = n^{(-1)^n}$ имеем $y_{2k} = 2k \to +\infty$ и $y_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} \to 0$. Значит, последовательность $\{y_n\}$ расходится. Наконец, если $z_n = \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi n}{4}$, то $z_{8k} = \frac{8k}{8k+1} \to 1$ и $z_{8k+4} = -\frac{8k+4}{8k+5} \to -1$. Следовательно, последовательность $\{z_n\}$ расходящаяся.

3. Пределы функций

3.1 Понятие функции

Пусть X и Y – произвольные множества. Отображение множества X во множество Y называется функцией, заданной на X со значениями во множестве Y. Другими словами, если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие некоторый единственный элемент y множества Y, то говорят, что на множестве X задана функция со значениями в Y. Обозначается $y = f(x)$, $f: X \to Y$, или $x \to f(x)$.

Множество X называют областью определения функции f. Если $x \in X$, то $f(x)$ называют значением функции f в точке x. Множество всех значений функции f называется областью значений функции f. Область значений содержится во множестве Y, но не обязана совпадать с Y. Например, если функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана равенством $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, то область ее значений $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ содержится в $\mathbb{R}$, но не совпадает с $\mathbb{R}$. Множество значений называют также образом множества X при отображении f и обозначают $f(X)$. Пусть $x \in X$, $y = f(x) \in Y$. Тогда y называют образом элемента x, а x – прообразом элемента y.

В определении функции множества X и Y произвольные. Так, последовательность также является функцией, определенной на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ и действующая в $\mathbb{R}$. Это можно записать так: $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Другой пример получим, если взять в качестве X совокупность всех числовых последовательностей, а $Y = \overline{\mathbb{R}}$. Тогда на X можно определить функцию следующим образом. Каждой последовательности $x \in X$ поставим в соответствие ее верхний предел, т. е. $y = f(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, где $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $\mathbb{R}^2$ – совокупность всех упорядоченных пар действительных чисел. Определим функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, действующую по такому правилу $f(x) = (\sin x, \cos x)$. Множество всех значений такой функции можно изобразить на плоскости в виде окружности с центром в начале координат радиуса 1. Другую функцию $f: \ \mathbb{R}^2 \ \rightarrow \ \mathbb{R}$ можно, например, определить равенством $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Мы определили функции, которые называют однозначными. Этим подчеркивается тот факт, что каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент из множества Y. Под функцией мы всегда будем понимать однозначную функцию, т. е. такую, что условие $f(x_1) \neq f(x_2)$ влечет $x_1 \neq x_2$. Обратная импликация справедлива не для каждой функции. Например, если $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, то $f(1) = f(-1) = 1$.

Определение. Функция $f: \ X \ \rightarrow \ Y$ называется взаимно однозначной, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 \neq x_2$ вытекает $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Например, рассмотренная нами функция $f(x) = x^2, \ x \in \mathbb{R}$ не является взаимно однозначной. Если же рассмотреть другую функцию $f: \ [0, +\infty) \ \rightarrow \ \mathbb{R}$, действующую по правилу $f(x) = x^2$, то такая функция будет взаимно однозначной. Это вытекает из теоремы о существовании и единственности корня. Иначе говоря, взаимно однозначная функция – это такая функция, для которой у каждого образа существует единственный прообраз.

3.1.1 Эквивалентные множества

Пусть заданы два множества – X и Y. Эти множества называются эквивалентными, если существует взаимно однозначная функция $f: \ X \ \rightarrow \ Y$, такая, что $f(X) = Y$. Говорят, что в этом случае между множествами X и Y можно установить взаимно однозначное соответствие. Обозначают это так: $X \sim Y$. Если $X \sim Y$, то множества X и Y называют равномощными. Отметим основные свойства равномощных множеств.

1) *Из $X \sim Y$ следует $Y \sim X$ (симметричность).*

2) *Для любого множества X справедливо $X \sim X$ (рефлексивность).*

3) *Если $X \sim Y$ и $Y \sim Z$, то $X \sim Z$ (транзитивность).*

Пример 1. Множества $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{2, 3, 4\}$ эквивалентны, т. к. между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, например, по такому правилу: $f(x) = x + 1,\ x \in X$. Ясно, что такое соответствие не единственно.

Пример 2. Множества $\{1, 2, 3\}$ и $\{2, 3\}$ не эквивалентны т. к. не может каждый элемент множества $\{2, 3\}$ иметь единственный прообраз во множестве $\{1, 2, 3\}$ при каком-либо отображении первого множества на второе, т. е. не существует взаимно однозначного отображения одного из этих множеств на другое.

Пример 3. Множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ эквивалентны. Взаимно однозначное отображение множества $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Z}$ можно установить, например, по такому правилу: $1 \to 0$, $2 \to 1$, $3 \to -1$, $4 \to 2$, $5 \to -2$ и т. д.

Определения. Для $n \in \mathbb{N}$ будем обозначать $K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Множество A называется конечным, если оно эквивалентно некоторому K_n. Поскольку $K_n \not\sim K_m$ при $n \neq m$, то натуральное число n в определении конечного множества определяется однозначно. Это число n называется количеством элементов во множестве A.

2. Непустое множество A называется бесконечным, если оно не эквивалентно никакому из K_n. Другими словами, непустое множество A бесконечно, если оно не является конечным.

3. Множество A называется счетным, если $A \sim \mathbb{N}$.

4. Множество A называется несчетным, если A бесконечно и не является счетным.

Если множество A счетно, то между его элементами и элементами множества $\mathbb{N}$ можно установить взаимно однозначное соответствие, или, иначе говоря, все элементы множества A можно занумеровать, т. е. расположить в последовательность.

Теорема 1. *Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел это – совокупность всех чисел вида $\frac{p}{q}$, где p – целое, а q – натуральное. Разместим все рациональные числа в виде матрицы, помещая в одну строку все несократимые дроби с фиксированным знаменателем:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
q=1: & \frac{0}{1} & \rightarrow & \frac{1}{1} & & \frac{-1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{-2}{1} & \ldots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
q=2: & \frac{1}{2} & & \frac{-1}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{-3}{2} & & \frac{5}{2} & \ldots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
q=3: & \frac{1}{3} & & \frac{-1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{-2}{3} & & \frac{4}{3} & \ldots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
q=4: & \frac{1}{4} & & \frac{-1}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{-3}{4} & & \frac{5}{4} & \ldots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
q=5: & \frac{1}{5} & & \frac{-1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{-2}{5} & & \frac{3}{5} & \ldots \\
\ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Пример расположения всех чисел в последовательность указан в самой матрице. Этим самым установлено, что $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, и теорема доказана.

Другое доказательство. Занумеруем сначала множество $\mathbb{Q}^+$ всех положительных рациональных чисел. Для этого каждое число $r \in \mathbb{Q}^+$ представим в виде $r = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь. Высотой числа r назовем $p+q$. Тогда, очевидно, для каждого натурального $n \geq 2$ существует лишь конечное число дробей высоты n. В самом деле, это будет множество чисел $\left\{\frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \ldots, \frac{n-1}{1}\right\}$, из которого удалены все сократимые дроби. Теперь множество всех элементов из $\mathbb{Q}^+$ легко расположить в последовательность следующим образом: сначала запишем все дроби высоты 2, затем все дроби высоты 3 и т. д. Получим последовательность $r_1, r_2, \ldots$, в которой содержатся все положительные рациональные числа. Теперь уже и все элементы множества $\mathbb{Q}$ можно расположить в последовательность, например, следующим образом: $0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, \ldots$.

□

Итак, мы показали, что множество всех рациональных чисел счетно.

Теорема 2. *Множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ несчетно.*

Доказательство. Достаточно показать, что отрезок $[0,1]$ не является счетным. В самом деле, если бы множество $\mathbb{R}$ было бы счетным, то перебирая последовательно один за другим занумерованные элементы множества $\mathbb{R}$ и оставляя лишь те, которые содержатся в $[0,1]$, мы получили бы, что и $[0,1]$ счетен.

Итак, докажем, что $[0,1]$ несчетен. Предположим противное. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ – занумерованные все точки отрезка $[0,1]$. Разобьем $[0,1]$ на три отрезка равной длины и в качестве I_1 выберем тот из них, который не содержит x_1. Далее, разобьем I_1 на три равных по длине отрезка и выберем такой из них, который не содержит x_2. Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных друг в друга отрезков I_n длины $|I_n| = 3^{-n}$, таких, что I_n не содержит точек $x_1, \ldots, x_n$. По лемме Кантора, последовательность I_n имеет единственную общую точку x. Эта точка x не может совпасть с какой-либо точкой x_{n_0}. В самом деле, если $x = x_{n_0}$, то x не принадлежал бы I_{n_0}, а x принадлежит всем отрезкам I_n.

Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Следствие. *Множество всех иррациональных чисел несчетно.*

Доказательство. Если бы множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ оказалось счетным, то, объединяя его со счетным множеством $\mathbb{Q}$, мы получили бы, что и множество $\mathbb{R}$ счетно. $\square$

Итак, мы показали, что множество $\mathbb{R}$ существенно "богаче", нежели $\mathbb{Q}$. Все элементы множества $\mathbb{R}$, в отличие от $\mathbb{Q}$, нельзя занумеровать. Вместе с тем каждый элемент множества $\mathbb{R}$ может быть представлен в виде предела последовательности элементов из $\mathbb{Q}$. Это свойство называется свойством плотности множества $\mathbb{Q}$ во множестве $\mathbb{R}$.

Теорема 3. *Для каждого действительного числа x существует последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$, сходящаяся к x.*

Доказательство. Используем следствие из принципа Архимеда, согласно которому в каждом интервале (a,b) существует рациональное число r, т. е. такое, что $a < r < b$.

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Зададим $\varepsilon = 1$ и найдем рациональное число r_1, такое, что $x < r_1 < x + 1$. Для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ найдем рациональное число r_2, такое, что $x < r_2 < x + \frac{1}{2}$. Продолжая этот процесс, построим последовательность рациональных чисел r_n, такую, что $x < r_n < x + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что $r_n \to x$ $(n \to \infty)$. $\square$

Замечание. При доказательстве теоремы 3 мы построили последовательность рациональных чисел, сходящуюся к заданному действительному x, таких, что $r_n > x$ $(n = 1, 2, \dots)$. Легко видеть, что числа r_n можно выбрать так, чтобы полученная последовательность $\{r_n\}$ была строго убывающей. Также легко можно построить строго возрастающую последовательность рациональных чисел, стремящуюся к заданному действительному числу x.

3.2 Предел функции и его элементарные свойства

Будем рассматривать функции $f: X \to \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}$. Окрестностью радиуса $\delta > 0$ (или δ-окрестностью) точки $a \in \mathbb{R}$ мы называли множество таких $x \in \mathbb{R}$, что $a - \delta < x < a + \delta$, или, что то же самое, $|x - a| < \delta$. Проколотой δ-окрестностью точки a называем δ-окрестность точки $a \in \mathbb{R}$, из которой удалена сама точка a. Другими словами, проколотая δ-окрестность точки a – это множество всех точек $x \in \mathbb{R}$, таких, что $a - \delta < x < a$ или $a < x < a + \delta$. Это можно записать так: $0 < |x - a| < \delta$.

Определение предела функции по Коши. Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Число A называется пределом функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее, вообще говоря, от ε, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Если число A является пределом функции x в точке a, то говорят, что функция f стремится к A при x, стремящемся к a, и пишут: $\lim_{x\to a} f(x) = A$, или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Пример 1. Пусть $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $a = 0$. Данная функция определена в проколотой окрестности точки $a = 0$. Покажем, что $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда для $x \neq 0$ неравенство

$$|f(x) - 0| = \left| x \cdot \sin\frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon$$

справедливо, если только $0 < |x - 0| = |x| < \delta$, где в качестве δ мы выбираем ε, т. е. $\delta = \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ ($\delta = \varepsilon$), что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - 0| < \delta$, справедливо неравенство $\left|x \cdot \sin\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$. По определению, это и означает, что $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$.

Пример 2. Пусть

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Покажем, что функция f не имеет предела в точке $a = 0$, т. е. для любого $A \in \mathbb{R}$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для каждого $\delta > 0$, найдется такое x, удовлетворяющее условию $0 < |x - 0| < \delta$, при котором $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

Пусть $A \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\varepsilon_0 = 1$ обладает требуемым свойством. В самом деле, зададим произвольное $\delta > 0$. Если $A \geq 0$, то выберем такое x, что $-\delta < x < 0$, например, $x = -\frac{\delta}{2}$. Тогда $0 < |x - 0| < \delta$, и $|f(x) - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon_0$. Если же $A < 0$, то выберем такое x, что $0 < x < \delta$, например, $x = \frac{\delta}{2}$. Тогда снова получим, что $0 < |x - 0| < \delta$, и $|f(x) - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon_0$. Итак, никакое $A \in \mathbb{R}$ не является пределом функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точке $a = 0$.

Замечание 1. В определении предела мы предполагаем, что функция f определена в проколотой окрестности точки a. Может оказаться, что в самой точке a функция f также определена. Однако значение функции f в этой точке a совершенно не оказывает влияния на предел функции в этой точке, т. к. в определении предела мы рассматриваем лишь те значения x, которые отличны от a.

Пример 3. Пусть

$$f(x) = |\operatorname{sign} x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Покажем, что $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и в качестве δ выберем любое положительное число, например, $\delta = 1$. Тогда из неравенства $0 < |x - 0| = |x| < \delta$ вытекает $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$. Следует обратить внимание на то, что неравенство $|f(x) - 1| < \varepsilon$ может и не выполняться при $x = 0$ (оно действительно не выполняется, если $\varepsilon \le 1$). Но мы и не требуем, чтобы оно выполнялось при $x = 0$, т. к. рассматриваются лишь такие значения x, для которых $|x| > 0$.

Пример 4. Докажем, что $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$. В самом деле, если $x \ne 1$, то $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$, и тогда $|f(x) - 2| = |(x+1) - 2| = |x - 1| < \varepsilon$, если только $0 < |x - 1| < \delta$, где $\delta = \varepsilon$.

Замечание 2. Определение предела носит локальный характер. Это означает, что существование предела и его величина зависят лишь от значений, принимаемых функцией в достаточно малой проколотой окрестности точки a. Другими словами, если мы изменим функцию вне некоторой проколотой окрестности точки a, то это никак не скажется на существовании предела и его величине.

Пример 5. Докажем, что $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ при любом $a > 0$.

Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда для $x > 0$ неравенство

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \le \frac{1}{\sqrt{a}}|x - a| < \varepsilon$$

будет иметь место, если только $0 < |x - a| < \sqrt{a} \cdot \varepsilon = \delta$.

Теорема 1 (единственность предела). *Если функция f имеет предел в точке a, то он единственный.*

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a} f(x) = B$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta_1 > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta_1$ следует $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, найдем $\delta_2 > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x-a| < \delta_2$ следует $|f(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и выберем такое x, что $0 < |x - a| < \delta$. Тогда

$$|B - A| \le |f(x) - A| + |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольное и $|B - A| < \varepsilon$, то это означает, что $A = B$.

□

Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Функция f называется ограниченной сверху (снизу) на множестве E, если существует такое число M (m), что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $f(x) \le M$ $(f(x) \ge m)$. Функция f называется ограниченной на множестве E, если она ограничена на этом множестве сверху и снизу.

Другое эквивалентное определение ограниченности функции можно дать, используя понятие модуля. Именно, функция f называется ограниченной на множестве E, если существует такое число A, что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|f(x)| \le A$.

Доказательство равносильности этих двух определений ограниченности элементарно и мы его опускаем.

Выше мы установили, что сходящаяся последовательность ограничена. Рассмотрим аналогичный вопрос для функций. Именно, следует ли из существования предела функции ее ограниченность? Отрицательный ответ на этот вопрос дает, например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$, $0 < x < +\infty$. Действительно, легко видеть, что функция f неограничена на $(0, +\infty)$. В то же время $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$. В самом деле,

$$\left| \frac{1}{x} - 1 \right| = \frac{|x-1|}{x} \le 2|x-1| < \varepsilon,$$

если только $|x-1| < \delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Тем не менее, справедлива

Теорема 2. *Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a и имеет предел в этой точке. Тогда существует такая проколотая окрестность $V \subset U$, на которой функция f ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Зададим $\varepsilon = 1$ и найдем такое $\delta > 0$, что для всех $x \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < 1$. Обозначим $V = U \cap \{x :\ 0 < |x-a| < \delta\}$. Тогда для всех $x \in V$ справедливо неравенство $|f(x)| \le |f(x) - A| + |A| \le |A| + 1$, которое и означает, что функция f ограничена на V. $\square$

Определение предела функции по Гейне. Мы хотим связать определения предела функции и предела последовательности. Пусть функция

f определена в некоторой проколотой окрестности U точки a. Возьмем произвольную последовательность аргументов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, т. е. $x_n \in U$ $(x_n \neq a,\ n = 1, 2, \dots)$. Эта последовательность аргументов порождает последовательность значений функции f в точках x_n, т. е. мы получаем последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение. Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Число A называется пределом функции f в точке a, если каждая последовательность аргументов $\{x_n\}$, стремящаяся к a (т. е. $x_n \in U,\ x_n \neq a,\ n = 1, 2, \dots$), порождает соответствующую последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, стремящуюся к A.

Итак, мы имеем два определения предела функции: по Коши и по Гейне. Покажем, что эти определения эквивалентны.

Доказательство эквивалентности двух определений предела функции в точке. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$ в смысле определения по Коши. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\},\ x_n \to a$ $(n \to \infty)$, $x_n \neq a$ и покажем, что $f(x_n) \to A$ $(n \to \infty)$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$. Пользуясь тем, что $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, для найденного δ найдем номер N, такой, что при каждом $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \delta$. Но тогда при каждом $n \geq N$ будет выполнено неравенство $|f(x_n) - a| < \varepsilon$. Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Обратно, пусть число A является пределом функции f при $x \to a$ в смысле Гейне, т. е. для любой последовательности $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к A. Предположим, что A не является пределом функции f в точке a в смысле Коши. Это означает, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует такое x, что $0 < |x - a| < \delta$, но $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$. Возьмем $\delta = 1$ и найдем такое x_1, что $0 < |x_1 - a| < 1$ и $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$. Далее, для $\delta = \frac{1}{2}$ найдем такое x_2, что $0 < |x_2 - a| < \frac{1}{2}$ и $|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$. Полагая

$\delta = \frac{1}{n}$, найдем такое x_n, что $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. В результате получим последовательность $\{x_n\}$. Из условия $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ следует, что $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, а поскольку $|x_n - a| > 0$, то $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \dots)$. Кроме того, $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. Это неравенство означает, что $\{f(x_n)\}$ не стремится к A. Окончательно, мы построили такую последовательность аргументов $\{x_n\}$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ не стремится к A. Это противоречит условию. $\square$

Итак, мы показали, что определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны. Часто на практике определение предела по Гейне используется для доказательства того, что у функции нет предела в точке a. Именно, отрицание определения предела в смысле Гейне выглядит следующим образом.

Число A не является пределом функции f в точке a, если существует последовательность аргументов $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$, такая, что $f(x_n)$ не стремится к A.

Предположим, что найдется такая последовательность аргументов, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ расходится. Тогда ясно, что никакое число не является пределом функции f в точке a, т. е. f не имеет предела при $x \to a$. Итак, для того чтобы показать, что функция f не имеет предела в точке a, достаточно построить последовательность $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$, такую, что $\{f(x_n)\}$ не имеет предела.

Упражнение. Доказать, что справедливо и обратное утверждение. Именно, если функция f не имеет предела в точке a, то существует такая последовательность $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$, что $\{f(x_n)\}$ расходится.

Пример. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$. Выберем две последовательности $x'_k = \frac{1}{2\pi k}$ и $x''_k = \frac{1}{2\pi(k+1/4)}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Тогда $x'_k \to 0$, $x''_k \to 0$ $(k \to \infty)$ и $f(x'_k) = 0$, $f(x''_k) = 1$. Составим последовательность аргументов $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots$. Тогда соответствующая им последовательность значений функции будет иметь вид $0, 1, 0, 1, \dots$, которая, очевидно, расходится. Итак, мы построили стремящуюся к нулю последовательность отличных от нуля аргументов, такую, что соответствующая последовательность значений функции не имеет предела. Значит, на основании определения предела функции, функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Идея решения этого примера часто используется и при решении других задач. Именно, для того чтобы показать, что функция f не имеет предела при $x \to a$, достаточно построить две последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, стремящиеся к a ($x'_n \neq a$, $x''_n \neq a$), такие, что $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ сходятся к различным пределам (или хотя бы одна из них расходится). Тогда для последовательности аргументов $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots$ соответствующая последовательность значений функции $f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), \ldots$ будет расходящейся, так как у нее есть два различных частичных предела (не выполнено условие критерия сходимости в терминах верхнего и нижнего пределов последовательности).

Теорема (арифметические свойства пределов). *Пусть функции f и g заданы в проколотой окрестности U точки a, $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Тогда*

1) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$;

2) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;

3) *если $g(x) \neq 0$ ($x \in U$) и $B \neq 0$, то* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Доказательство. Эта теорема мгновенно может быть получена как следствие соответствующей теоремы об арифметических свойствах пределов последовательностей. Достаточно применить определение предела в смысле Гейне. $\square$

Теорема (предельный переход и неравенства). *Пусть функции f и g заданы в проколотой окрестности U точки a, $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a} g(x) = B$, причем $B > A$. Тогда найдется проколотая окрестность $\Delta \subset U$ точки a, такая, что $f(x) < g(x)$ для всех $x \in \Delta$.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$ и найдем такое $\delta' > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta'$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Далее, найдем такое $\delta'' > 0$, что если только $0 < |x - a| < \delta''$, то $|g(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon$. Положим $\delta = \min(\delta', \delta'') > 0$. Тогда для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливы неравенства $f(x) < A + \varepsilon = \frac{A+B}{2} = B - \varepsilon < g(x)$, из которых следует, что $f(x) < g(x)$ $(x \in \Delta = \{x : 0 < |x - a| < \delta\})$. $\square$

Следствие. *Если $f(x) \geq g(x)$ для всех x, принадлежащих проколотой окрестности U точки a, то $\lim_{x\to a} f(x) \geq \lim_{x\to a} g(x)$, если эти пределы существуют.*

Действительно, если предположить, что $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, то, в силу предыдущей теоремы, в некоторой проколотой окрестности точки a будет справедливо неравенство $f(x) < g(x)$, что противоречит условию.

$\square$

Теорема (о трех пределах). *Пусть функции f, g, h определены в проколотой окрестности U точки a и такие, что $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ для всех $x \in U$. Если $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$, то существует* $\lim_{x\to a} g(x) = A$.

Для доказательства этой теоремы достаточно применить определение предела функции по Гейне и соответствующую теорему о трех пределах для последовательностей.

3.3 Первый замечательный предел

Так называется следующее равенство:

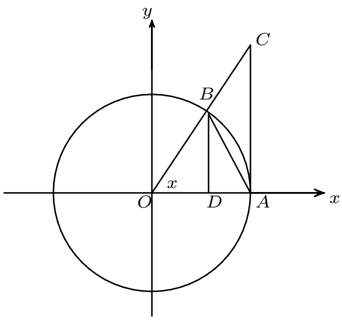
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

где величина x выражена в радианах. Для доказательства этого равенства докажем сначала два важных неравенства –

$$\sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.1}$$

$$x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.2}$$

которые имеют многочисленные приложения в различных вопросах. Приведем геометрическое доказательство этих неравенств. Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат:



Пусть точка B находится в первой четверти на окружности. Получим угол AOB, радианная мера которого равна x. Проведем в точке A перпендикуляр к оси абсцисс и продолжим OB до пересечения с этим перпендикуляром в точке C. Из точки B опустим перпендикуляр на ось абсцисс в точку D. Тогда из чертежа ясно, что сектор AOB содержится в треугольнике AOC и этот сектор содержит треугольник AOB. Поэтому для площадей $S_{\triangle AOB}$ треугольника AOB, $\widehat{S}$ сектора AOB и $S_{\triangle AOC}$ треугольника AOC справедливо следующее неравенство:

$$S_{\triangle AOB} < \widehat{S} < S_{\triangle AOC}. \tag{3.3}$$

Имеем $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|BD|$, $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|AC|$ и $\widehat{S} = \frac{1}{2}|AO|\cdot\ell(AB) = \frac{1}{2}x$ (т. к. $|AO| = 1$, а длина $\ell(AB)$ дуги окружности равна произведению радиуса на величину угла, выраженную в радианах, на который опирается эта дуга). Далее, $|BD| = \sin x$, поэтому левое неравенство в (3.3) принимает вид $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x$, или $\sin x < x$. Правое неравенство в (3.3) имеет такой вид: $\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, т. е. $x < \operatorname{tg} x$. Тем самым доказаны неравенства (3.1) и (3.2).

Из (3.1) получаем, что $\frac{\sin x}{x} < 1$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, а из (3.2) следует, что $\cos x < \frac{\sin x}{x}$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Итак,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда, так как $\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, следует:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}.$$

Окончательно,

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Учитывая еще, что функция $\frac{\sin x}{x}$ четная, для $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ получим

$$1 - \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{\sin(-x)}{(-x)} < \frac{(-x)^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

и

$$1 - \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{\sin(-x)}{(-x)} > 0.$$

Таким образом, неравенство

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}$$

справедливо для всех x, таких, что $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Применяя к этому неравенству теорему о трех пределах, получаем

$$\lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0,$$

а это равносильно тому, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

3.4 Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пусть функция f определена на интервале (a, b). Число A называется пределом справа функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Это записывают следующим образом: $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$.

Аналогично определяется предел $\lim_{x\to b-0} f(x)$ функции f слева в точке b.

Можно сформулировать эти определения в терминах последовательностей. Эквивалентность таких определений доказывается таким же образом, как и для обычных пределов. Например, число B называется пределом слева функции f в точке b, если любая последовательность $\{x_n\}$ точек из (a, b), стремящаяся к b, порождает соответствующую последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, стремящуюся к B.

Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Говорят, что предел функции f при x, стремящемся к a, равен $+\infty$ (или f стремится к $+\infty$ при x, стремящемся к a), если для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $f(x) > E$. Обозначают это так: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Аналогично, $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, если для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $f(x) < -E$. Если же для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)| > E$, то пишут $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Ясно, что любое из условий $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ или $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ влечет $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Легко, однако, привести пример функции f, такой, что $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, но f не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.

Данные определения бесконечных пределов легко можно сформулировать в терминах последовательностей.

Пусть функция f определена на полуоси $(a, +\infty)$. Число A называется пределом функции f при $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\Delta > 0$, что для всех $x > \Delta$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначают это так: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Сформулируем еще некоторые определения с помощью кванторов:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists\Delta > 0:\; \forall x < -\Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists\Delta > 0:\; \forall x : |x| > \Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$f(x) \to A + 0 \ (x \to a - 0) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x : a - \delta < x < a \quad A < f(x) < A + \varepsilon.$$

Как и в предыдущих случаях, подобные определения легко можно сформулировать в терминах последовательностей.

Пример 1. Покажем, что $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Действительно

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| \le \frac{1}{|x|} < \varepsilon,$$

если только $|x| > \Delta = \frac{1}{\varepsilon}$.

Пример 2. Докажем, что функция $f(x) = \sin x$ не имеет предела при $x \to +\infty$. Для этого рассмотрим две последовательности: $x_n' = \pi n$ и $x_n'' = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Обе эти последовательности стремятся к $+\infty$, но при этом соответствующие последовательности значений функции $f(x_n') = \sin \pi n = 0 \to 0$ и $f(x_n'') = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 1 \to 1$. Отсюда следует, что функция не имеет предела при $x \to +\infty$.

Пример 3. Если $f(x) = \operatorname{sign} x$, то $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sign} x = -1$. Однако f не имеет предела при $x \to \infty$. В самом деле, для доказательства достаточно рассмотреть последовательности $x_n' = n$ и $x_n'' = -n$.

3.5 Критерий Коши

В этом параграфе речь будет идти о существовании конечного предела.

Для последовательностей мы доказывали критерий Коши, который состоит в том, что сходимость последовательности равносильна ее фундаментальности. Аналогичное утверждение справедливо и для пределов функций.

Теорема (критерий Коши). *Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Для того чтобы функция f имела конечный предел при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что для любых $x', x'' \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$, выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть существует $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь определением предела, найдем такое δ, что для всех $x \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $x', x'' \in U$ такие, что $0 < |x'-a| < \delta$ и $0 < |x''-a| < \delta$. Тогда

$$|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Применим определение предела функции по Гейне и критерий Коши для последовательностей. Пусть выполнено условие теоремы. Покажем, что существует $\lim_{x\to a} f(x)$. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ $(x_n \in U,\ x_n \to a\ (n\to\infty),\ x_n \ne a)$ и докажем, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь условием, найдем такое $\delta > 0$, что для всех $x', x'' \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x'-a| < \delta$ и $0 < |x''-a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Но поскольку $x_n \to a$ $(n\to\infty)$, то найдется такое N, что для всех $n \ge N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \delta$. Пусть $n, m \ge N$. Тогда $0 < |x_n - a| < \delta$ и $0 < |x_m - a| < \delta$, а значит, $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для любых $n, m \ge N$ справедливо неравенство $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна и, следовательно, сходится (в силу критерия Коши для последовательностей). Таким образом, для любой последовательности $\{x_n\}$ (с отмеченными выше свойствами) последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Нужно еще показать, что все последовательности $\{f(x_n)\}$ сходятся к одному и тому же пределу. Но это действительно так, ибо в противном случае, если $f(x'_n) \to A$ и $f(x''_n) \to B$, где $B \ne A$, то последовательность $\{f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), \dots\}$ не имела бы предела, что противоречит уже доказанному. $\square$

Аналогично можно сформулировать и доказать критерий Коши для пределов при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и $x \to \infty$, а также для односторонних пределов. Приведем, например, формулировку критерия Коши для предела при $x \to +\infty$.

Теорема (критерий Коши для случая $x \to +\infty$). *Пусть функция f определена на полупрямой $(a, +\infty)$. Для того чтобы функция f имела конечный предел при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\Delta > 0$, что при любых $x', x'' > \Delta$ выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Пример. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не имеет конечного предела справа в точке $a = 0$. Для доказательства покажем, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся x', x'', удовлетворяющие условию $0 < x' < \delta,\ 0 < x'' < \delta$, такие, что $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$. Пусть $\varepsilon_0 = 1$. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$ и выберем $x' = \frac{\delta}{2},\ x'' = \frac{\delta}{2+\delta}$. Тогда $0 < x' < \delta,\ 0 < x'' < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{2}{\delta} - \left(\frac{2}{\delta} + 1\right)\right| = 1 = \varepsilon_0$, и тем самым завершается рассмотрение примера.

3.6 Монотонные функции

Определение. Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и функция f определена на (a, b). Функция f называется монотонно возрастающей (убывающей) на (a, b), если для любых $x, y \in (a, b)$, таких, что $x < y$, справедливо неравенство $f(x) \leq f(y)$ $(f(x) \geq f(y))$.

Если в данном определении нестрогие неравенства поменять на строгие, то получим определение строго возрастающей (убывающей) функции.

Для монотонной последовательности мы доказывали критерий сходимости, который состоит в том, что сходимость монотонной последовательности эквивалентна ее ограниченности (сверху для возрастающей последовательности и снизу для убывающей). Соответствующее утверждение имеет место и для функций.

Теорема. *Пусть $-\infty < a < b < +\infty$ и функция f монотонно возрастает на (a, b). Если f ограничена сверху на (a, b), то существует $\lim_{x \to b-0} f(x)$. Если же f неограничена сверху, то $\lim_{x \to b-0} f(x) = +\infty$.*

Доказательство. Пусть f ограничена сверху. Это означает, что ограничено сверху множество ее значений $E(f) = \{f(x) :\ x \in (a, b)\}$. Обозначим $A = \sup E(f)$ (верхняя грань ограниченного сверху множества $E(f)$ существует в силу теоремы о существовании верхней грани). Покажем, что $\lim_{x\to b-0} f(x) = A$. Так как $A = \sup E(f)$, то

1) для любого $y \in E(f)$ справедливо неравенство $y \le A$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $y' \in E(f)$, что $y' > A - \varepsilon$.

Условие 1) означает, что для любого $x \in (a, b)$ справедливо неравенство $f(x) \le A$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $y' \in E(f)$, такое, что $y' = f(x') > A-\varepsilon$, где $x' \in (a, b)$. Обозначим $\delta = b-x' > 0$. Тогда для всех $x > b-\delta = x'$ из монотонности f вытекает, что $f(x) \ge f(x') > A - \varepsilon$. Итак, с учетом 1) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ ($\delta = b - x'$), что для всех $x \in (b - \delta, b)$ (т. е. $b - \delta < x < b$) справедливо неравенство $A - \varepsilon < f(x) \le A < A + \varepsilon$, т. е. $|f(x) - A| < \varepsilon$. Последнее означает, что $\lim_{x\to b-0} f(x) = A$.

Предположим теперь, что f неограничена сверху на (a, b), и покажем, что $\lim_{x\to b-0} f(x) = +\infty$. Наше условие равносильно тому, что неограничено сверху множество $E(f)$. Поэтому для любого $M > 0$ найдется такое $y' \in E(f)$, что $y' > M$. Зададим $M > 0$ и найдем такое $y' \in E(f)$, что $y' > M$. Так как $y' \in E(f)$, то существует такое $x' \in (a, b)$, что $y' = f(x')$. Из монотонности f следует, что для всех $x > x'$ ($x \in (a, b)$) справедливо неравенство $f(x) \ge f(x') > M$. Обозначим $\delta = b - x' > 0$. Тогда получим, что для всех $x \in (a, b)$, удовлетворяющих условию $b - \delta < x < b$, справедливо неравенство $f(x) > M$. Так как M произвольно, то это означает, что $\lim_{x\to b-0} f(x) = +\infty$. □

Аналогично можно показать, что если f возрастает на $(a, +\infty)$, то

1) если f ограничена сверху, то существует $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;

2) если f неограничена сверху, то $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Точно так же можно доказать аналоги приведенной теоремы для правого предела функции в точке a для конечного a и для $a = -\infty$.

Следствие. *Если функция f монотонна на интервале (a, b), то в каждой точке этого интервала она имеет конечные левый и правый пределы.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда f возрастает на (a, b). Выберем $x_0 \in (a, b)$ и покажем, что существуют пределы $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Так как f возрастает на (a, b), то f возрастает и на (a, x_0), и на (a, x_0) функция f ограничена сверху, поскольку $f(x) \le f(x_0)$ для всех $x \in (a, x_0)$. В силу доказанной теоремы, существует конечный предел $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$. Аналогично получаем, что существует конечный предел $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$. $\square$

3.7 Замена переменной в пределах

Теорема. *Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки x_0, а функция g определена в проколотой окрестности V точки t_0 и такова, что для всех $t \in V$ значение $x = g(t)$ принадлежит U и $\lim_{t \to t_0} g(t) = x_0$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$. Тогда $\lim_{t \to t_0} f(g(t)) = A$.*

Доказательство. Так как $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что при всех $x \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \eta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Так как $\lim_{t \to t_0} g(t) = x_0$, то для любого $\eta > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом $t \in V$, удовлетворяющем условию $0 < |t - t_0| < \delta$, справедливо неравенство $|g(t) - x_0| < \eta$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\eta > 0$, что условие $0 < |x - x_0| < \eta$ влечет неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Для найденного η найдем такое $\delta > 0$, что условие $0 < |t - t_0| < \delta$ влечет неравенство $|g(t) - x_0| < \eta$. Пусть $0 < |t - t_0| < \delta$. Тогда $0 < |g(t) - x_0| < \eta$ (левое неравенство следует из того, что при любом $t \in V$ значение $g(t) \in U$, т. е. $g(t) \ne x_0$). Из последнего неравенства следует, что $|f(g(t)) - A| < \varepsilon$. Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что условие $0 < |t - t_0| < \delta$ влечет неравенство $|f(g(t)) - A| < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что $\lim_{t \to t_0} f(g(t)) = A$. $\square$

Смысл доказанной теоремы состоит в том, что если $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, то, считая x зависимой переменной ($x = g(t)$) и такой, что $\lim_{t \to t_0} g(t) = x_0$, мы получим то же самое значение $\lim_{t \to t_0} f(g(t)) = A$. Иначе говоря, при вычислении предела $\lim_{t \to t_0} f(g(t))$ можно выполнять замену

$x = g(t)$ и (при выполнении соответствующих условий, т. е. $\lim_{t \to t_0} g(t) = x_0,\ g(t) \neq x_0$) вычислять $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Эти пределы равны.

Пример. Вычислить $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Полагаем $t = x^n - 1$, т. е. считаем, что $f(g(t)) = \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}$, где $x = g(t) = \sqrt[n]{1+t}$, а $f(x) = \frac{x-1}{x^n-1}$. Тогда условие $t \to t_0 = 0$ равносильно тому, что $x \to x_0 = 1$, а данный предел, согласно теореме о замене переменной, равен такому пределу $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$. Вычислим

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^n-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1} = \frac{1}{n}.$$

Поэтому и $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t} = \frac{1}{n}$.

3.8 Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

Определение. Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Число A (конечное, $+\infty$ или $-\infty$) называется частичным пределом функции f в точке a, если существует такая последовательность $\{x_n\}$ $(x_n \in U,\ x_n \to a\ (n \to \infty), x_n \neq a)$, что $f(x_n) \to A\ (n \to \infty)$.

Каждая функция, определенная в проколотой окрестности U точки a, имеет частичные пределы. В самом деле, если функция f ограничена в некоторой проколотой окрестности $\Delta \subset U$ точки a, то для любой последовательности $\{x_n\}$ $(x_n \in U,\ x_n \to a\ (n \to \infty), x_n \neq a)$, начиная с некоторого номера $x_n \in \Delta$, и, следовательно, $\{f(x_n)\}$ – ограниченная последовательность. В силу леммы Больцано – Вейерштрасса, из ограниченной последовательности $\{f(x_n)\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{f(x_{n_k})\}$, т. е. у функции f будет существовать конечный частичный предел. Если же f неограничена в любой проколотой окрестности точки a, то она неограничена либо сверху, либо снизу. Если, например, f неограничена сверху, то, выбирая последовательность

$x_n \in \left(\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \setminus \{a\}\right) \cap U$ так, что $f(x_n) > n$, получим, что $x_n \to a$ и $f(x_n) \to +\infty$, т. е. $+\infty$ является частичным пределом функции f в точке a. Аналогично показываем, что у неограниченной снизу функции $-\infty$ является ее частичным пределом.

Итак, во множестве $\overline{\mathbb{R}}$ для любой функции f множество ее частичных пределов непусто.

Определение. Верхняя грань множества частичных пределов функции f в точке a называется верхним пределом в точке a и обозначается $\overline{\lim}_{x\to a} f(x)$. Нижняя грань множества частичных пределов функции f в точке a называется нижним пределом в точке a и обозначается $\underline{\lim}_{x\to a} f(x)$.

Пример. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $a = 0$. Множество частичных пределов этой функции в точке 0 – это отрезок $[-1, 1]$. В самом деле, для любого числа $A \in [-1, 1]$ легко построить последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to 0$, такую, что $\sin\frac{1}{x_n} \to A$ $(n \to \infty)$. Также легко видеть, что если число $A \notin [-1, 1]$, то оно не является частичным пределом функции $\sin\frac{1}{x}$ в точке 0. Таким образом, $\underline{\lim}_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = -1$ и $\overline{\lim}_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = 1$.

Теорема 1. *Верхний и нижний пределы функции являются ее частичными пределами.*

Теорема 2. *Для того чтобы функция f имела в точке a предел, равный A (конечный, равный $+\infty$ или $-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x) = \overline{\lim}_{x\to a} f(x) = A.$$

Доказательства теорем 1 и 2 аналогичны доказательствам соответствующих теорем для последовательностей, и мы их не приводим.

4. Непрерывные функции

4.1 Определение и примеры

Определение. Пусть функция f определена на интервале (a, b) и точка $x_0 \in (a, b)$. Говорят, что функция f непрерывна в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(x_0\right).$$

Замечание. В отличие от определения предела функции f в точке x_0, здесь мы требуем, чтобы функция f была определена не только в проколотой окрестности точки x_0, а в целой окрестности точки x_0. Кроме того, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ не просто существует, а равен определенному значению, а именно, $f\left(x_0\right)$.

Используя определение предела функции в смысле Коши, определение непрерывности функции f в точке x_0 в кванторах можно записать следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in (a, b) : \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f\left(x_0\right)| < \varepsilon.$$

В этом определении можно не требовать выполнения условия $|x - x_0| > 0$, т. к. при $|x - x_0| = 0$ неравенство $|f(x) - f\left(x_0\right)| < \varepsilon$, очевидно, выполнено.

Так как величина $\lim_{x \to x_0} f(x)$ зависит лишь от тех значений, которые функция f принимает в сколь угодно малой окрестности точки x_0, то непрерывность – это локальное свойство функции.

В терминах окрестностей определение непрерывности выглядит следующим образом.

Определение. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если для любой окрестности V точки $f\left(x_0\right)$ найдется такая окрестность U точки x_0, что для всех $x \in U$ значение $f(x) \in V$, т. е. $f\left(U \cap (a, b)\right) \subset V$.

Применяя определение предела функции в смысле Гейне, определение непрерывности можно сформулировать так.

Определение. Функция f, определенная на интервале (a, b), называется непрерывной в точке $x_0 \in (a, b)$, если любая последовательность аргументов $\{x_n\}$ $(x_n \in (a, b),\ x_n \to x_0)$ порождает последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, стремящуюся к $f(x_0)$.

Применяя понятие одностороннего предела (т. е. предела слева и справа) в точке x_0, можно дать определения непрерывности слева (справа) в точке x_0. Именно, функция f называется непрерывной слева (справа) в точке x_0, если $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ $(\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0))$. При этом в определении непрерывности слева достаточно считать, что функция f определена лишь в левой полуокрестности точки x_0, т. е. на $(a, x_0]$, а для непрерывности справа – на $[x_0, b)$.

Легко видеть, что справедливо следующее

Утверждение. *Для того чтобы функция f была непрерывной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы f была непрерывной слева и справа в точке x_0.*

Определение. Функция f, определенная на интервале (a, b), называется разрывной в точке $x_0 \in (a, b)$, если f не является непрерывной в этой точке.

Итак, функция f является разрывной в точке x_0, если выполнено одно из двух следующих условий.

1. Либо не существует $\lim_{x \to x_0} f(x)$.
2. Либо предел $\lim_{x \to x_0} f(x)$ существует, но он не равен $f(x_0)$.

Пример 1. $f(x) \equiv C = Const$. Эта функция непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, т. к. для любого $x \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(x_0)| = 0$.

Пример 2. $f(x) = x^2,\ -\infty < x < +\infty,\ x_0 \in \mathbb{R}$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда из неравенства

$$\left|x^2 - x_0^2\right| \leq (|x| + |x_0|)\,|x - x_0|$$

следует, что при $|x - x_0| < \delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\right)$ справедливо неравенство

$\left|x^2 - x_0^2\right| < \varepsilon$, т. е. $\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$, а значит, функция $f(x) = x^2$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Пример 3. $f(x) = \sqrt{x},\ 0 \le x < +\infty$. Если $x_0 \in (0, +\infty)$, то

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \le \frac{1}{\sqrt{x_0}}\,|x - x_0| < \varepsilon,$$

если только $|x - x_0| < \delta \equiv \sqrt{x_0} \cdot \varepsilon$. Таким образом, функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 > 0$. В точке $x_0 = 0$ можно ставить вопрос о непрерывности справа. Имеем $\left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{x} < \varepsilon$, если только $0 \le x < \delta \equiv \varepsilon^2$. Итак, $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$, т. е. функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке 0.

Пример 4. $f(x) = \sin x,\ -\infty < x < +\infty$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\cos\frac{x + x_0}{2}\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \le |x - x_0|\,,$$

где последнее неравенство в этой цепочке следует из доказанного выше неравенства $|\sin t| \le |t|\ \ (0 < |t| < \pi/2)$. Можем считать, что $|x - x_0| < \pi$. Тогда при $|x - x_0| < \delta \equiv \min(\pi, \varepsilon)$ справедливо $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$, т. е. функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Аналогично доказываем, что функция $f(x) = \cos x$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Пример 5. $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ при $x \ne 0$ и $f(0) = 0$. Покажем, что функция f непрерывна в точке $x_0 = 0$. Имеем $f(0) = 0$ и

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

(т. к. $|f(x) - 0| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| < \varepsilon$, если только $|x - 0| = |x| < \delta \equiv \varepsilon$). Итак, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, так что f непрерывна в точке 0.

Пример 6. $f(x) = \operatorname{sign} x,\ x \in \mathbb{R}$. Если $x_0 \ne 0$, то функция f постоянна в некоторой окрестности точки x_0 и, следовательно, непрерывна в этой точке. Если же $x_0 = 0$, то не существует предела функции f при $x \to 0$. Значит, функция f разрывна в точке 0. Более того, $\lim_{x\to 0+} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim_{x\to 0-} \operatorname{sign} x = -1$, $\operatorname{sign} 0 = 0$, так что функция $\operatorname{sign} x$ разрывна в точке 0 как слева, так и справа.

Пример 7. Рассмотрим функцию Дирихле

$$\mathcal{D}(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Покажем, что не существует предела функции $\mathcal{D}$ при $x \to x_0$. Для этого выберем последовательность $\{x_n'\}$ отличных от x_0 рациональных чисел, стремящуюся к x_0. Тогда $\mathcal{D}(x_n') = 1$ и, значит, $\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}(x_n') = 1$. Если же взять последовательность $\{x_n''\}$ отличных от x_0 иррациональных чисел, стремящуюся к x_0, то получим, что $\mathcal{D}(x_n'') = 0$ и $\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}(x_n'') = 0$. В силу определения предела функции по Гейне получаем, что функция $\mathcal{D}$ не имеет предела в точке x_0. Так как $x_0 \in \mathbb{R}$ – произвольная точка, то это означает, что функция Дирихле разрывна в каждой точке.

Пример 8. $f(x) = x \cdot \mathcal{D}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Функция f разрывна в каждой точке $x_0 \neq 0$. В самом деле, если $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ соответственно последовательности рациональных и иррациональных отличных от x_0 чисел, стремящиеся к x_0, то $\lim_{n\to\infty} f(x_n') = x_0$ и $\lim_{n\to\infty} f(x_n'') = 0$, так что, в силу определения предела функции по Гейне, функция f не имеет предела в точке x_0. Если же $x_0 = 0$, то $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Действительно, $|f(x)| = |x\cdot\mathcal{D}(x)| \le |x| < \varepsilon$, если только $|x-0| = |x| < \delta \equiv \varepsilon$. Это означает, что данная функция непрерывна в единственной точке $x_0 = 0$.

4.2 Классификация точек разрыва

Предположим, что функция f непрерывна в точке x_0. Это означает, что существует $\lim_{x\to x_0} f(x)$ и он равен $f(x_0)$. Если мы изменим значение функции f лишь в одной точке x_0, то $\lim_{x\to x_0} f(x)$ будет существовать, как и раньше (он не зависит от значения $f(x_0)$), но при этом равенство $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ уже будет нарушено. В этом случае говорят, что вновь полученная функция имеет устранимый разрыв. Итак, точка x_0 называется точкой устранимого разрыва функции f, если существует $\lim_{x\to x_0} f(x)$, но он не равен $f(x_0)$.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Будем обозначать $f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} f(x)$, $f(x_0-0) = \lim_{x \to x_0-0} f(x)$ (если указанные односторонние пределы существуют). В этих терминах критерий существования предела функции f в точке x_0 состоит в том, что $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, а необходимым и достаточным условием непрерывности функции f в точке x_0 является следующее равенство:

$$f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0)\,. \tag{4.1}$$

Если же функция f не является непрерывной в точке x_0, то это означает, что

a) либо все значения, входящие в равенство (4.1) существуют, но нарушено хотя бы одно из двух равенств в (4.1);

b) либо не существует (конечного) хотя бы одного из двух значений $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$.

В случае *a*) точку x_0 назовем точкой разрыва первого рода, а в случае *b*) – точкой разрыва второго рода. Таким образом, приходим к следующим определениям.

Определение 1. Точка x_0 называется точкой разрыва I рода, если существуют конечные пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, но хотя бы один из них не равен $f(x_0)$.

В частности, точка устранимого разрыва является точкой разрыва I рода, ибо если x_0 – точка устранимого разрыва, то существует $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0+0)$, но он не равен $f(x_0)$. Если же $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$ (оба предела существуют), то каково бы ни было значение $f(x_0)$, точка x_0 будет точкой разрыва I рода. В этом случае говорят, что функция f терпит скачок в точке x_0, а величину $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называют скачком функции f в точке x_0.

Определение 2. Точка x_0 называется точкой разрыва II рода функции f, если не существует конечного хотя бы одного из двух пределов $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$.

Пример 1. $f(x) = |\operatorname{sign} x|$. В точке $x_0 = 0$ у функции f устранимый разрыв, поскольку $\lim_{x\to 0} |\operatorname{sign} x| = 1 \neq 0 = |\operatorname{sign} 0|$.

Пример 2. $f(x) = \operatorname{sign} x$. У функции f в точке $x_0 = 0$ имеется разрыв I рода, т. к. односторонние пределы $f(x_0 - 0) = -1$ и $f(x_0 + 0) = 1$ существуют, но оба они не равны $\operatorname{sign} 0 = 0$. Кроме того, в точке 0 функция f имеет скачок, равный $f(x_0 + 0) - f(x_0 + 0) = 1 - (-1) = 2$.

Пример 3. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Так как оба односторонних предела функции f в точке $x_0 = 0$ не существуют, то точка 0 является точкой разрыва II рода.

Пример 4. Рассмотрим функцию Римана

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \text{ несократимая дробь } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Покажем, что в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ существует $\lim_{x\to x_0} \mathcal{R}(x) = 0$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда неравенство $\mathcal{R}(x) \geq \varepsilon$ выполнено лишь в тех точках, для которых $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$. На интервале $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ таких точек конечное число. Пусть это – точки $y_1, y_2, \ldots, y_s$. Если при некотором k $x_0 = y_k$, то обозначим $\delta = \min_{i\neq k} |y_i - x_0| > 0$. В противном случае (т. е. если x_0 не совпадает ни с одной из точек y_k), обозначим $\delta = \min_i |y_i - x_0| > 0$. Тогда для всех x, таких, что $0 < |x - x_0| < \delta$, будет выполнено неравенство $|\mathcal{R}(x)| = \mathcal{R}(x) < \varepsilon$, а это означает, что $\lim_{x\to x_0} \mathcal{R}(x) = 0$. Итак, если $x_0 \in \mathbb{Q}$, то в точке x_0 функция $\mathcal{R}$ имеет устранимый разрыв. Если же $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то точка x_0 является точкой непрерывности функции $\mathcal{R}$.

Пример 5. $f(x) = [x]$ – функция целой части – наибольшее целое число, не превосходящее x. Легко видеть, что эта функция непрерывна в каждой точке $x_0 \notin \mathbb{Z}$, а в каждой точке $x_0 \in \mathbb{Z}$ имеет разрыв первого рода. Скачок в каждой целочисленной точке равен 1.

4.3 Непрерывность и арифметические операции

Теорема. *Пусть функции f и g определены на интервале (a, b) и непрерывны в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда* *a) функция $f+g$ непрерывна в точке x_0;*

b) функция $f \cdot g$ непрерывна в точке x_0;

c) если $g(x) \neq 0$ на (a, b), то функция $\frac{f}{g}$ непрерывна в точке x_0.

Эта теорема является следствием соответствующей теоремы для пределов функций. Из этой теоремы и из непрерывности функции $f(x)=x$ в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ сразу следует, что функция $f(x)=x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что и многочлен $P_n(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\cdots+a_{n-1} x+a_n$ непрерывен в каждой точке, а также и любая рациональная функция

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\cdots+a_{n-1} x+a_n}{b_0 x^m+b_1 x^{m-1}+\cdots+b_{m-1} x+b_m}$$

непрерывна в каждой точке своей области определения. В самом деле, пусть $x_0 \in D(R)$. Тогда $Q_m\left(x_0\right) \neq 0$. Поскольку количество действительных корней многочлена $Q_m(x)$ конечно (не превосходит m), то можно найти такой интервал $\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)$ $\left(\delta=\min_{i \geq 1}\left|x_0-x_i\right|\right.$, где x_i $(i \geq 1)$ – корни $\left.Q_m(x)\right)$, в котором $Q_m(x) \neq 0$, и применить теорему о непрерывности частного.

Далее, функция $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ и функция $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ $(x \neq \pi n)$ непрерывны в каждой точке своей области определения. Это следует из непрерывности функций $\sin x$ и $\cos x$.

Теорема (о сохранении знака). *Пусть функция f определена на интервале (a, b) и непрерывна в некоторой точке $x_0 \in(a, b)$. Если $f\left(x_0\right)>0$ $\left(f\left(x_0\right)<0\right)$, то найдется такая окрестность $\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)$ точки x_0, что $f(x)>0$ $(f(x)<0)$ для всех $x \in\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)$.*

Доказательство. Пусть $f\left(x_0\right)>0$. Положим $\varepsilon=f\left(x_0\right)/2$ и найдем такое $\delta>0$, что $\left|f(x)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon$ для всех $x \in\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)$. Но тогда для указанных x будет справедливо неравенство

$$0<\frac{f\left(x_0\right)}{2}=f\left(x_0\right)-\varepsilon<f(x)<f\left(x_0\right)+\varepsilon,$$

и тем самым теорема доказана. $\square$

4.4 Непрерывность сложной функции

Теорема. *Пусть функция g, определенная на интервале (a, b), непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$ и такова, что $c < g(x) < d$ для всех $x \in (a, b)$. Далее, пусть функция f определена на интервале (c, d) и непрерывна в точке $y_0 = g(x_0) \in (c, d)$. Тогда композиция (сложная функция) $\varphi(x) = f(g(x))$ непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$.*

Доказательство этой теоремы очень похоже на доказательство теоремы о замене переменной в пределах. Запишем в кванторах условия теоремы:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 : \ \forall y \in (c, d)\ \ |y - y_0| < \eta \ \Rightarrow \ |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon, \tag{4.2}$$

$$\forall \eta > 0\ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in (a, b)\ \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |g(x) - g(x_0)| < \eta. \tag{4.3}$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь (4.2), найдем η, а для найденного η из (4.3) находим δ. Пусть $x \in (a, b)$ такое, что $|x - x_0| < \delta$. Тогда $|g(x) - g(x_0)| < \eta$, а отсюда следует, что

$$|\varphi(x) = \varphi(x_0)| = |f(g(x)) - f(g(x_0))| = |f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon,$$

т. е. $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$. Это означает, что функция φ непрерывна в точке x_0. $\square$

Пример. Пусть $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$. Так как функция $\sin y$ непрерывна в каждой точке $y_0 \in \mathbb{R}$, а функция $\frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 \neq 0$, то сложная функция $\sin \frac{1}{x}$, в силу доказанной теоремы, непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4.5 Непрерывность и разрывы монотонной функции

Определение. Функция f, определенная на интервале (a, b), называется непрерывной на этом интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Функция f называется непрерывной на отрезке

$[a, b]$, если она непрерывна на (a, b), а в точках a и b непрерывна справа и слева, соответственно.

В этом параграфе мы исследуем характер возможных разрывов у монотонной функции. Именно, следующая теорема показывает, что у монотонной функции не может быть разрывов II рода, а во внутренних точках не может быть устранимых разрывов. Напротив, в концевых точках отрезка если и есть разрыв, то он устранимый.

Теорема 1. *Пусть функция f монотонна на $[a, b]$. Тогда*

1. *Если $x_0 \in (a, b)$, то имеет место одна и только одна из следующих двух ситуаций:*

   a) *f непрерывна в точке x_0;*

   b) *в точке x_0 функция f имеет неустранимый разрыв I рода.*

2. *Если $x_0 = a$ $(x_0 = b)$, то*

   a) *либо f непрерывна справа (слева) в точке x_0;*

   b) *либо f имеет в точке x_0 устранимый разрыв.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда f возрастает на $[a, b]$. Пусть $x_0 \in (a, b)$. Тогда из неравенства $f(x) \leq f(x_0)$ $(x < x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$. Аналогично, из неравенства $f(x) \geq f(x_0)$ $(x > x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 + 0) \geq f(x_0)$. Итак,

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0). \tag{4.4}$$

Если в (4.4) два знака равенства, то f непрерывна в точке x_0. Если же хотя бы одно из неравенств строгое, то в точке x_0 функция f имеет скачок. Из (4.4) также следует, что в точке x_0 устранимый разрыв невозможен.

Пусть теперь $x_0 = b$. Тогда $f(x) \leq f(b)$ и существует $f(b - 0) \leq f(b)$. Если $f(b-0) = f(b)$, то f непрерывна слева в точке b. Если же $f(b-0) < f(b)$, то в точке b у функции f устранимый разрыв (левосторонний).

Случай $x_0 = a$ рассматривается аналогично. □

Теперь изучим вопрос о количестве точек разрыва монотонной функции, заданной на $[a, b]$. Может оказаться, что точек разрыва у функции f

нет (например, $f(x)=x$). Легко построить пример монотонной функции, у которой любой наперед заданный конечный набор точек из $[a,b]$ будет точками разрыва, а все остальные точки будут точками непрерывности. Монотонная функция может иметь и бесконечно много точек разрыва. Например, у невозрастающей функции

$$f(x)=\begin{cases} 1-\frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n},\ n=1,2,\dots,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

каждая точка вида $\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\dots)$ является точкой разрыва. В этом примере множество точек разрыва счетное. Если же отказаться от условия монотонности, то можно привести пример функции, у которой множество точек разрыва несчетно (функция Дирихле). Естественно спросить, может ли монотонная функция иметь несчетное множество точек разрыва?

Определение. Множество называется не более чем счетным, если оно пусто, конечно или счетно.

Теорема 2. *Пусть функция f монотонна на (a,b). Тогда множество ее точек разрыва не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть функция f не убывает на (a,b). Согласно предыдущей теореме, если в некоторой точке $x_0\in(a,b)$ функция f имеет разрыв, то это – скачок, т. е. $f(x_0-0)<f(x_0+0)$. Поэтому каждой точке разрыва x можно поставить в соответствие интервал $I_x=(f(x-0),f(x+0))$. Пусть x' и x'' – две различные точки разрыва функции f. Покажем, что интервалы $I_{x'}$ и $I_{x''}$ не пересекаются. Пусть $x'<x''$. Выберем точку ξ, такую, что $x'<\xi<x''$. Тогда, в силу монотонности f, $f(x'+0)\le f(\xi)$ и $f(x''-0)\ge f(\xi)$, т. е. $f(x'+0)\le f(x''-0)$. Это означает, что интервалы $(f(x'-0),f(x'+0))$ и $(f(x''-0),f(x''+0))$ не имеют общих точек. Итак, каждой точке разрыва x поставлен в соответствие интервал I_x. В каждом таком интервале I_x выберем рациональное число r_x. При этом различным точкам разрыва x' и x'' будут соответствовать различные числа $r_{x'}$ и $r_{x''}$, т. к. интервалы $I_{x'}$ и $I_{x''}$ не пересекаются.

Пусть $E\subset(a,b)$ – множество всех точек разрыва функции f. Если $E\ne\emptyset$, то каждому $x\in E$ поставлено в соответствие рациональное число r_x. Мы получили взаимно однозначное соответствие между элементами множества E и некоторым подмножеством $E_1 \subset \mathbb{Q}$ множества $\mathbb{Q}$. Но множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно, поэтому и множество E_1 не более чем счетно, а значит не более чем счетно и само множество E. $\square$

Пусть функция f монотонна на $[a, b]$. Тогда множество ее значений $E(f)$ содержится в отрезке I с концами $f(a)$ и $f(b)$, т. е. $E(f) \subset I$. Следующая теорема показывает, что в случае $E(f) = I$ функция f непрерывна на $[a, b]$. Другими словами, если в области значений монотонной функции нет пустот (промежутков), то такая функция непрерывна.

Теорема 3. *Пусть функция f монотонна на $[a, b]$ и область ее значений представляет собой отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$. Тогда функция f непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Рассмотрим случай неубывающей f. Предположим, что f разрывна в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда, согласно теореме 1, в точке x_0 функция f имеет скачок, а из условия монотонности следует, что $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. Итак, если $x < x_0$, то $f(x) \leq f(x_0 - 0)$, а при $x > x_0$ имеем $f(x) \geq f(x_0 + 0)$, т. е. на интервале $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ содержится разве что единственная точка $f(x_0)$ из области значений функции $E(f)$, что противоречит условию.

Случаи $x_0 = a$ и $x_0 = b$ исчерпываются аналогичным образом и тем самым завершается доказательство теоремы. $\square$

Замечание. Теорема 3 теряет силу, если отбросить условие монотонности функции f. Например, множество значений функции

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x < 0, \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

определенной на отрезке $[-1, 1]$, представляет собой отрезок $[-1, 1]$, но в то же время эта функция разрывна в точке $x_0 = 0$.

Эквивалентная формулировка теоремы 3 имеет следующий вид. Если монотонная функция f принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, то f непрерывна на $[a, b]$. Ниже мы покажем, что обратное утверждение справедливо для любой непрерывной функции, даже без предположения монотонности.

4.6 Свойство промежуточных значений

Теорема Больцано – Коши (о корне). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, такая, что $f(c) = 0$.*

Доказательство. Применяем метод деления отрезка пополам и лемму Кантора о вложенных отрезках. Пусть, например, $f(a) < 0 < f(b)$. Обозначим $[a_0, b_0] \equiv [a, b]$ и разделим $[a_0, b_0]$ пополам точкой $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Если $f(c_0) = 0$, то теорема доказана. В противном случае из двух полученных отрезков $[a_0, c_0]$ и $[c_0, b_0]$ выберем такой, что на его концах функция f принимает значения разных знаков. Это будет отрезок $[a_1, b_1] \equiv [a_0, c_0]$, если $f(c_0) > 0$, и $[a_1, b_1] \equiv [c_0, b_0]$, если $f(c_0) < 0$. Заметим, что длина отрезка $[a_1, b_1]$ равна $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. На следующем шаге разделим $[a_1, b_1]$ пополам и продолжим описанную процедуру. Если на каком-либо шаге встретится точка деления, в которой функция f обращается в нуль, то теорема доказана. В противном случае получим последовательность вложенных друг в друга отрезков $[a_n, b_n]$, таких, что их длины $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$. По лемме Кантора, существует точка c, принадлежащая всем $[a_n, b_n]$. Покажем, что $f(c) = 0$. Отсюда, в частности, будет следовать, что c не совпадает ни с a, ни с b, т. к. $f(a) \neq 0$ и $f(b) \neq 0$.

Для доказательства равенства $f(c) = 0$ покажем, что для всех n справедливо неравенство

$$f(a_n) < 0 < f(b_n). \tag{4.5}$$

Применим индукцию по n. При $n = 0$ неравенство (4.5) совпадает с принятым условием $f(a) < 0 < f(b)$. Предположим, что неравенство (4.5) справедливо при некотором n, и покажем, что оно имеет место и для $n + 1$. Обозначим $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Тогда, согласно описанной процедуре отбора сегментов, мы полагаем $[a_{n+1}, b_{n+1}] \equiv [a_n, c_n]$, если $f(c_n) > 0$, и

$[a_{n+1}, b_{n+1}] \equiv [c_n, b_n]$, если $f(c_n) < 0$. Отсюда легко видеть, что неравенство (4.5) справедливо и при $n+1$, и тем самым (4.5) доказано для всех $n = 0, 1, \ldots$.

Далее, поскольку $a_n \le c \le b_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то $a_n \to c$ $(n \to \infty)$ и $b_n \to c$ $(n \to \infty)$. В силу непрерывности функции f в точке c, из неравенств $f(a_n) < 0$ следует, что и $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0$. С другой стороны, поскольку $f(b_n) > 0$, то и $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0$. Итак, получили, что $f(c) \le 0$ и $f(c) \ge 0$. Отсюда следует, что $f(c) = 0$.

□

Следствие (свойство промежуточных значений). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда функция f принимает все значения, заключенные между $f(a)$ и $f(b)$. Именно, для любого числа A, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдется такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = A$.*

Для доказательства этого следствия достаточно применить теорему Больцано – Коши к функции $g(x) = f(x) - A$.

Утверждение, обратное данному следствию, неверно. В этом легко убедиться на примере функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 1 - x, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Если же функция f монотонна на $[a, b]$, то, как показывает теорема 3, данное следствие можно обратить. Таким образом, из теоремы 3 и свойства промежуточных значений мы получаем следующий критерий непрерывности монотонной функции.

Теорема. *Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция f непрерывна на этом отрезке тогда и только тогда, когда она принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Пример. Покажем, что каждый многочлен нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень. Пусть $P_{2k+1}(x) = a_0 x^{2k+1} + a_1 x^{2k} + \cdots + a_{2k+1}$, причем можем считать, что $a_0 > 0$. Тогда, очевидно,

$\lim_{x\to-\infty} P_{2k+1}(x) = -\infty$, а значит, существует такое a, что $P_{2k+1}(a) < 0$. Далее, поскольку $\lim_{x\to+\infty} P_{2k+1}(x) = +\infty$, то найдется такое $b > a$, что $P_{2k+1}(x) > 0$. Поскольку многочлен P_{2k+1} непрерывен на $[a, b]$, то, в силу теоремы Больцано – Коши, найдется такое $c \in (a, b)$, что $P_{2k+1}(c) = 0$.

4.7 Теоремы Вейерштрасса

Ранее мы показывали, что непрерывная в точке функция локально ограничена в некоторой окрестности этой точки. Однако из локальной ограниченности в каждой точке некоторого множества не следует ограниченность функции на всем множестве. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ $(0 < x < 1)$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in (0, 1)$ и, следовательно, локально ограничена в каждой точке (т. е. для каждой точки $x_0 \in (0, 1)$ существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в которой функция f ограничена). Вместе с тем функция f неограничена на всем множестве $(0, 1)$.

Первая теорема Вейерштрасса. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Предположим, что f неограничена на $[a, b]$. Это означает, что для любого M найдется такое $x \in [a, b]$, что $|f(x)| > M$. Полагая $M = 1, 2, \ldots$, построим последовательность точек $x_n \in [a, b]$, таких, что $|f(x_n)| > n$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то, в силу леммы Больцано – Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $x_{n_k} \to c$ $(k \to \infty)$. Тогда $c \in [a, b]$ (здесь существенно используется тот факт, что $[a, b]$ – отрезок). В силу непрерывности функции f в точке c, имеем $f(x_{n_k}) \to f(c)$, т. е. $\{f(x_{n_k})\}$ сходящаяся и, следовательно, ограниченная последовательность. С другой стороны, так как $|f(x_{n_k})| > n_k$, то последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ неограничена. Полученное противоречие доказывает теорему.

Приведем еще одно доказательство первой теоремы Вейерштрасса, основанное на применении метода деления отрезка пополам.

Предположим, что f неограничена на $[a, b]$. Разделим $[a, b]$ пополам. Тогда хотя бы на одном из двух полученных отрезков функция f неограничена. Обозначим такой отрезок через I_1 (если f неограничена на обоих отрезках, то выберем любой из них). Разделим I_1 пополам и обозначим через I_2 тот из полученных отрезков, на котором функция f неограничена. Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных друг в друга отрезков I_n, длины которых $|I_n| = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ $(n \to \infty)$. По лемме Кантора о вложенных отрезках, существует единственная точка $c \in [a, b]$, принадлежащая всем отрезкам I_n. Так как f непрерывна в точке c, то f локально ограничена в точке c, т. е. найдется такое $\delta > 0$, что f ограничена на множестве $(c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$. Выберем номер n настолько большим, что $\frac{b-a}{2^n} < \delta$. Тогда $I_n \subset (c - \delta, c + \delta)$. Но из ограниченности f на множестве $(c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$ следует, что f ограничена также и на подмножестве I_n этого множества, что противоречит выбору отрезков I_n.

□

Следствие из теоремы Больцано – Коши (свойство промежуточных значений) утверждает, что областью значений непрерывной на отрезке функции является промежуток. Но это может быть либо интервал, либо полуинтервал, либо отрезок. Мы уточним это следствие. Именно, покажем, что областью значений непрерывной на отрезке функции является отрезок.

Определение. Говорят, что функция f ограничена сверху (снизу) на множестве E, если ограничено сверху (снизу) множество ее значений

$$f(E) \equiv \{f(x) : \ x \in E\}.$$

Верхней (нижней) гранью функции f на множестве E называют верхнюю (нижнюю) грань множества $f(E)$ и обозначают $\sup_{x \in E} f(x)$ $(\inf_{x \in E} f(x))$.

Если $A = \sup_{x \in E} f(x)$, то это означает, что

1) для любого $x \in E$ справедливо неравенство $f(x) \le A$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x' \in E$, что $f(x') > A - \varepsilon$.

Ясно, что эти два свойства равносильны определению верхней грани функции f.

Ранее отмечалось, что не каждое ограниченное сверху множество имеет наибольший элемент. Пусть ограниченное множество $f(E)$ является множеством значений некоторой функции f, заданной на множестве E. Если во множестве $f(E)$ существует наибольший элемент, т. е. если существует такое $x_0 \in E$, что $f(x_0) = \sup_{x\in E} f(x)$, то говорят, что функция f достигает своей верхней грани. В противном случае говорят, что верхняя грань функции f не достигается.

Аналогичные понятия формулируются и для нижней грани.

Зададимся вопросом: каждая ли ограниченная сверху функция достигает своей верхней грани? Ответ, очевидно, отрицательный. Например, для функции $f(x) = x$, заданной на $(0,1)$, $\sup_{x\in(0,1)} f(x) = 1$, но для любого $x \in (0,1)$ справедливо неравенство $f(x) < 1$, т. е. верхняя грань не достигается. Другим примером может служить функция дробной части $f(x) = \{x\}$ на отрезке $[0,1]$.

В первом примере функция непрерывна, но задана на интервале. Во втором примере функция задана на отрезке, но не является непрерывной на этом отрезке. Если же функция непрерывна на отрезке, то она достигает своей верхней грани. В этом и состоит

Вторая теорема Вейерштрасса. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда f достигает своих верхней и нижней граней, т. е. существуют такие $\alpha, \beta \in [a,b]$, что*

$$f(\alpha) = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(\beta) = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Доказательство. Согласно первой теореме Вейерштрасса, непрерывная на $[a,b]$ функция f ограничена. Значит, существует конечное $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. По определению верхней грани, $f(x) \le M$ при каждом $x \in [a,b]$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x' \in [a,b]$, что $f(x') > M - \varepsilon$. Полагая $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2 \dots)$, построим последовательность точек $x_n \in [a,b]$, такую, что $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то, по лемме Больцано – Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Обозначим $\alpha = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Тогда $\alpha \in [a,b]$. В силу непрерывности функции f в точке α, имеем

$f(\alpha) = \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)$. Но, поскольку

$$M - \frac{1}{n_k} < f\left(x_{n_k}\right) \leq M < M + \frac{1}{n_k},$$

то отсюда следует, что $\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = M$. В силу единственности предела получаем, что $f(\alpha) = M$.

Аналогично показываем, что в некоторой точке $\beta \in [a,b]$ функция f достигает своей нижней грани.

Приведем еще одно доказательство второй теоремы Вейерштрасса, основанное на применении первой теоремы Вейерштрасса.

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда, в силу первой теоремы Вейерштрасса, существует $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Предположим, что функция f не достигает своей верхней грани, т. е. пусть для каждого $x \in [a,b]$ справедливо неравенство $f(x) < M$. Тогда функция $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на $[a,b]$ (по теореме об арифметических свойствах непрерывных функций). Применяя к функции φ первую теорему Вейерштрасса, получаем, что φ ограничена на $[a,b]$, т. е. существует такое $M_1 > 0$, что для всех $x \in [a,b]$ справедливо неравенство $\varphi(x) \leq M_1$. Но из этого неравенства вытекает, что $f(x) \leq M - \frac{1}{M_1}$ $(x \in [a,b])$, а это противоречит тому, что число M является верхней гранью, т. е. наименьшей из всех верхних границ функции f. $\square$

Свойство промежуточных значений и обе теоремы Вейерштрасса можно объединить в виде одной следующей теоремы.

Теорема. *Областью значений непрерывной на отрезке функции является отрезок.*

4.8 Обратная функция

Функция f, действующая из X в Y, называется биективной, если она взаимно однозначна и ее область значений совпадает с множеством Y. Это означает, что для каждого $y \in Y$ существует единственный $x \in X$, такой, что $y = f(x)$.

Пусть функция $f: X \to Y$ биективна. Тогда каждому $y \in Y$ можно поставить в соответствие единственный $x \in X$, такой, что $y = f(x)$. Тем самым мы получим новую функцию, действующую из Y в X. Такая функция называется обратной к функции f и обозначается f^{-1}. Например, $f(x) = x^3$ действует из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ и биективна. Тогда $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. Другая функция $f(x) = x^2$, действующая из $\mathbb{R}$ в $[0, +\infty)$, не является биективной, и поэтому нельзя говорить об обратной функции. Если же мы рассмотрим функцию $f_1: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, действующую по правилу $f_1(x) = x^2$, то такая функция биективна, и поэтому у нее есть обратная $f_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$. В этом примере мы пользуемся понятием сужения, т. е. функцию мы рассматриваем не на всей возможной области определения, где определяющая функцию формула имеет смысл, а лишь на части этой области. Дадим определение.

Определение. Пусть функция $f: X \to Y$, и множество $A \subset X$. Каждой точке $x \in A$ поставим в соответствие $y = f(x) \in Y$. Тогда получим функцию, заданную на множестве A, которую будем называть сужением функции f на множество A, и будем обозначать это сужение $f|A$.

В рассмотренном выше примере $f(x) = x^2$ функция не была взаимно однозначной на $\mathbb{R}$. В то же время сужение $f_1 = f|[0, +\infty)$ – взаимно однозначная функция, и поэтому существует обратная функция.

В этом параграфе мы будем заниматься вопросом существования и свойствами обратной функции. Если обратную функцию удается явно выразить (как в рассмотренных выше примерах), то свойства обратной функции могут быть изучены непосредственно. Однако это не всегда можно сделать. Например, функция $f(x) = x + \frac{1}{2}\sin x$ взаимно однозначна, но выражение обратной функции весьма затруднительно. Мы хотим исследовать свойства обратной функции f^{-1}, не зная ее явного выражения.

Пусть функция f определена на $[a, b]$. Очевидно, что если f строго монотонна на $[a, b]$, то она взаимно однозначна. Обратное утверждение не имеет места. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \le x < 0, \\ x-1, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

очевидно, взаимно однозначна, но не является монотонной на $[-1,1]$. Можно, однако, доказать, что если функция f взаимно однозначна и непрерывна, то она строго монотонна. Мы этого не будем делать.

В дальнейшем через $\langle \alpha, \beta \rangle$ будем обозначать отрезок с концами α и β (при этом неравенство $\alpha < \beta$ не обязательно).

Теорема (об обратной функции). *Пусть функция f строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда обратная функция f^{-1} строго монотонна и непрерывна на отрезке $\langle f(a), f(b) \rangle$.*

Доказательство. Рассматриваем случай возрастающей f. В силу теоремы Больцано – Коши, областью значений функции f является отрезок $[f(a), f(b)]$. Так как f взаимно однозначна на $[a,b]$, то существует функция f^{-1}, отображающая $[f(a), f(b)]$ на $[a,b]$. Обозначим $g(y) = f^{-1}(y)$. Покажем, что g строго возрастает. Пусть $y' < y''$, $x' = g(y')$, $x'' = g(y'')$. Если $x' \ge x''$, то $f(x') \ge f(x'')$ (в силу возрастания f), т. е. $y' \ge y''$, что противоречит условию. Итак, получаем, что $x' < x''$, т. е. условие $y' < y''$ влечет $x' < x''$. Это и означает, что обратная функция $x = g(y)$ строго возрастает на $[f(a), f(b)]$.

Областью значений обратной функции g является отрезок $[a,b]$. В самом деле, каждое $x \in [a,b]$ является значением функции $g(y)$, где $y = f(x)$. Так как g монотонна на $[f(a), f(b)]$ и ее областью значений является отрезок $[a,b]$, то, по теореме о непрерывности монотонной функции, функция g непрерывна на отрезке $[f(a), f(b)]$. $\square$

Пример 1. Арксинус. Функция $f(x) = \sin x$ $(-\infty < x < +\infty)$ не является взаимно однозначной. Рассмотрим сужение этой функции на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Это сужение – непрерывная и строго возрастающая функция. Следовательно, существует обратная функция, непрерывная и строго возрастающая.

Арксинусом называется функция, обратная к сужению функции $\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, и обозначается $\arcsin x$. Она определена на $[-1, 1]$, имеет областью значений отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, строго возрастает и непрерывна на $[-1, 1]$.

Пример 2. Арккосинус. Функция $f(x) = \cos x$ $(-\infty < x < +\infty)$ не является взаимно однозначной. Рассмотрим сужение этой функции на $[0, \pi]$. Это сужение – непрерывная и строго убывающая функция. Следовательно, существует обратная функция, непрерывная и строго убывающая.

Арккосинусом называется функция, обратная к сужению функции $\cos x$ на $[0, \pi]$, и обозначается $\arccos x$. Она определена на $[-1, 1]$, имеет областью значений отрезок $[0, \pi]$, строго убывает и непрерывна на $[-1, 1]$.

Пример 3. Арктангенс и арккотангенс. Арктангенсом называется функция, обратная к сужению функции $\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, и обозначается $\operatorname{arctg} x$. Функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна и строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$, область ее значений – интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Арккотангенсом называется функция, обратная к сужению функции $\operatorname{ctg} x$ на $(0, \pi)$, и обозначается $\operatorname{arcctg} x$. Функция $\operatorname{arcctg} x$ непрерывна и строго убывает на $(-\infty, +\infty)$, область ее значений – интервал $(0, \pi)$.

Упражнение. Постройте графики определенных выше обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$.

4.9 Показательная и логарифмическая функции

4.9.1 Степень с рациональным показателем

Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Полагаем $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n}$. Ранее было показано, что для любого $a > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существует единственное $b > 0$, такое, что $b^n = a$. Обозначается это число $b = \sqrt[n]{a}$. Положим по определению $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Пусть, далее, $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Тогда $r = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Полагаем по определению $a^r = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Для доказательства корректности последнего определения нужно показать, что для $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{mk} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}.$$

Чтобы это показать, представим левую часть в виде $\left(\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{k}\right)^{m}$. Тогда искомое равенство принимает вид $\left(\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{k}\right)^{m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}$. Если докажем, что $\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{k} = a^{\frac{1}{n}}$, то получим требуемое. Обозначим $a^{\frac{1}{nk}} = b$. Нужно показать, что $b^k = a^{\frac{1}{n}}$. Но $a = b^{nk} = \left(b^k\right)^n$, откуда следует $b^k = a^{\frac{1}{n}}$, что и требовалось показать.

Далее, положим по определению $a^0 = 1$ и $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$ при $r < 0,\ r \in \mathbb{Q}$. Таким образом, мы получили определение рациональной степени действительного числа $a > 0$.

Исходя из свойств степенной функции с натуральным показателем и учитывая, что при $a, b > 0,\ n \in \mathbb{N}$ равенства $a^n = b^n$ и $a = b$ равносильны, легко доказать, что степени с рациональными показателями обладают следующими свойствами:

1) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ $(m, n \in \mathbb{N},\ a > 0)$;
2) $a^r > 1$ $(r \in \mathbb{Q},\ r > 0,\ a > 1)$;
3) $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 0)$;
4) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 0)$;
5) $a^{r_1} > a^{r_2} > 0$ $(r_1 > r_2,\ r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 1)$.

Следующие свойства рациональных степеней сформулируем в виде двух лемм.

Лемма 1. *Пусть $a > 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом $r \in \mathbb{Q}$, таком, что $|r| < \delta$, справедливо неравенство $|a^r - 1| < \varepsilon$.*

Доказательство. Ранее мы доказали, что $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. Отсюда, в силу определения степени с отрицательным рациональным показателем, также следует, что $\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 :\ \forall n \geq N_1\ \left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon\ \Leftrightarrow\ 1 - \varepsilon < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_2:\ \forall n\geq N_2\ \left|a^{-\frac{1}{n}}-1\right|<\varepsilon\ \Leftrightarrow\ 1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n}}<1+\varepsilon.$$

Зададим $\varepsilon>0$, найдем номера N_1 и N_2 и обозначим $N=\max(N_1,N_2)$. Тогда получим $1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{N}}<a^{\frac{1}{N}}<1+\varepsilon$. Положим $\delta=\frac{1}{N}$. Тогда если $r\in\mathbb{Q}$ и $|r|<\delta$, то $-\frac{1}{N}=-\delta<r<\delta=\frac{1}{N}$ и, так как $a>1$, то $a^{-\frac{1}{N}}<a^r<a^{\frac{1}{N}}$, т. е. $1-\varepsilon<a^r<1+\varepsilon$. Отсюда получаем, что $|a^r-1|<\varepsilon$ и лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть $a>1$. Если последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится, то последовательность $\{a^{r_n}\}$ также сходится.*

Доказательство. Докажем фундаментальность $\{a^{r_n}\}$. Прежде всего, из сходимости $\{r_n\}$ следует ограниченность сверху этой последовательности, т. е. существует $M\in\mathbb{Q}$, такое, что $r_n\leq M$ $(n=1,2,\dots)$. Далее, так как $\{r_n\}$ – фундаментальна, то для любого $\delta>0$ найдется такое N, что для всех $n,m\geq N$ справедливо неравенство $|r_n-r_m|<\delta$.

Зададим $\varepsilon>0$. Пользуясь леммой 1, найдем такое δ, что из неравенства $|r|<\delta$ следует $|a^r-1|<\frac{\varepsilon}{a^M}$. Для найденного δ, пользуясь фундаментальностью $\{r_n\}$, найдем N. Пусть $m,n\geq N$. Тогда

$$|a^{r_m}-a^{r_n}|=a^{r_n}\left|a^{r_m-r_n}-1\right|<a^M\cdot\frac{\varepsilon}{a^M}=\varepsilon.\quad\square$$

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналоги лемм 1 и 2 для случая $0<a<1$.

4.9.2 Показательная функция

Пусть $a>1,\ x\in\mathbb{R}$. Выберем последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$, сходящуюся к x. Тогда, в силу леммы 2, последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится. Положим по определению $a^x=\lim_{n\to\infty}a^{r_n}$. Для доказательства корректности данного определения нужно показать, что a^x не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$, сходящейся к x. Покажем это. Пусть $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ сходятся к x, а $\left\{a^{r'_n}\right\}$ и $\left\{a^{r''_n}\right\}$ сходятся к разным пределам (сходимость этих последовательностей вытекает из леммы 2). Но тогда последовательность $\{r'_1,r''_1,r'_2,r''_2,\dots\}$ сходится, а последовательность

$\left\{a^{r'_1}, a^{r''_1}, a^{r'_2}, a^{r''_2}, \dots\right\}$ имеет два различных частичных предела и, стало быть, расходится, что противоречит лемме 2.

Итак, для определения a^x можно выбрать любую последовательность рациональных чисел, сходящуюся к x. Значение a^x не зависит от выбора этой последовательности. Таким образом, для $a > 1$ каждому $x \in \mathbb{R}$ поставлено в соответствие число a^x, т. е. мы получаем функцию $f(x) = a^x$, определенную на $\mathbb{R}$. Далее, полагаем $1^x = 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Если же $0 < a < 1$, то $b = \frac{1}{a} > 1$, и значение b^x для $x \in \mathbb{R}$ уже определено. Полагаем $a^x = \frac{1}{b^x}$. Полученное значение a^x можно было определить и как предел последовательности $\{a^{r_n}\}$, где последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится к числу x. В самом деле,

$$a^x = \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b^{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Таким образом, мы получили показательную функцию $y = a^x$ $(x \in \mathbb{R})$, где $a > 0$. Изучим свойства этой функции. Случай $a = 1$ тривиален, и мы его опускаем. Поскольку при $0 < a < 1$ имеем $b = \frac{1}{a} > 1$ и $a^x = \frac{1}{b^x}$, то достаточно изучить лишь свойства функции a^x при $a > 1$.

Свойство 1. *Для любого $a > 1$ и любых $x', x'' \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $a^{x'} \cdot a^{x''} = a^{x'+x''}$.*

Доказательство. Пусть $r'_n \to x'$, $r''_n \to x''$. Тогда $r'_n + r''_n \to x' + x''$ и

$$a^{x'} \cdot a^{x''} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{r''_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} \cdot a^{r''_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n + r''_n} = a^{x'+x''}. \quad \square$$

Из свойства 1, в частности, вытекает, что $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Свойство 2. *Функция $y = a^x$ $(a > 1)$ строго возрастает на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $x' < x''$. Нужно доказать, что $a^{x'} < a^{x''}$. Для этого покажем сначала, что $a^x > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Пусть последовательность рациональных чисел $r_n \to x$ $(n \to \infty)$. Тогда существует рациональное число $r < r_n$ $(n \geq N)$, и, значит, $a^r < a^{r_n}$, откуда $a^r \leq \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x$. Но $a^r > 0$, так что и $a^x > 0$.

Умножим требуемое неравенство $a^{x'} < a^{x''}$ на $a^{-x'} > 0$. Получим эквивалентное неравенство $1 < a^{x''-x'}$, где $x'' - x' = z > 0$. Таким образом, нужно показать, что $a^z > 1$ при любом действительном $z > 0$. Выберем рациональное r, такое, что $0 < r < z$, и последовательность рациональных чисел $r_n \geq r$, стремящуюся к z. Тогда $a^z = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \geq a^r > a^0 = 1$, и тем самым завершается доказательство. $\square$

Свойство 3. *Функция $y = a^x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $a^x - a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{x-x_0} - 1\right)$. Поэтому достаточно показать, что $\lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} = 1$, или, что то же самое, $\lim_{t\to 0} a^t = 1$. Используем определение предела функции в терминах последовательностей. Пусть $\{t_n\}$ стремится к нулю. Тогда найдется последовательность положительных рациональных чисел $\{r_n\}$, стремящаяся к нулю и такая, что $-r_n \leq t_n \leq r_n$. Тогда $a^{-r_n} \leq a^{t_n} \leq a^{r_n}$, т. е. $a^{-r_n} - 1 \leq a^{t_n} - 1 \leq a^{r_n} - 1$. Из условия $a^{r_n} \to a^0 = 1$ $(n \to \infty)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_1, что при любом $n \geq N_1$ справедливо неравенство $a^{r_n} - 1 < \varepsilon$. Далее, поскольку $a^{-r_n} \to a^0 = 1$ $(n \to \infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_2, что при всех $n \geq N_2$ справедливо неравенство $a^{-r_n} - 1 > -\varepsilon$. Зададим $\varepsilon > 0$, найдем номера N_1 и N_2 и положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n \geq N$ получим $-\varepsilon < a^{t_n} - 1 < \varepsilon$, т. е. $|a^{t_n} - 1| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim_{n\to\infty} a^{t_n} = 1$, а в силу произвольности последовательности $\{t_n\}$ получаем, что $\lim_{t\to 0} a^t = 1$. $\square$

Свойство 4. *Для любого $a > 1$ и любых $x', x'' \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\left(a^{x'}\right)^{x''} = a^{x'\cdot x''}$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $x'' = r \in \mathbb{Q}$. Пусть $r'_n \to x'$ $(n \to \infty)$. Тогда $r'_n \cdot r \to x' \cdot r$ $(n \to \infty)$ и $\left(a^{r'_n}\right)^r = a^{r'_n\cdot r} \to a^{x'\cdot r}$ $(n \to \infty)$. С другой стороны, так как $a^{r'_n} \to a^{x'}$ $(n \to \infty)$, то на основании непрерывности степенной функции с рациональным показателем r получаем, что $\left(a^{r'_n}\right)^r \to \left(a^{x'}\right)^r$ $(n \to \infty)$, откуда, в силу единственности предела, следует, что $\left(a^{x'}\right)^r = a^{x'\cdot r}$.

Пусть теперь произвольные $x', x'' \in \mathbb{R}$. Используя доказанный случай, получим

$$\left(a^{x'}\right)^{x''} = \lim_{n\to\infty} \left(a^{x'}\right)^{r''_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x'\cdot r''_n} = a^{x'\cdot x''}. \quad \square$$

Свойство 5. *Если* $a > 1$, *то* $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.

Доказательство. Используя неравенство Бернулли, получим

$$a^x \geq a^{[x]} = (1+\alpha)^{[x]} \geq \alpha[x] \geq \alpha(x-1),$$

где $\alpha = a - 1 > 0$. Отсюда следует, что $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. Так как $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, то при $x \to -\infty$ имеем $-x \to +\infty$ и $a^{-x} = \frac{1}{a^x} \to +\infty$, так что $a^x \to 0$ при $x \to -\infty$. $\square$

Упражнение. На основании полученных свойств показательной функции постройте графики показательной функции при различных значениях $a > 0$.

4.9.3 Логарифмическая функция

Пусть $a > 1$. Тогда функция $f(x) = a^x$ строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$ и непрерывна. По теореме об обратной функции у f существует непрерывная, строго возрастающая обратная функция f^{-1}, определенная на множестве положительных чисел, областью значений которой является все множество $\mathbb{R}$. Эта функция называется логарифмической. При $0 < a < 1$ логарифмическая функция определяется аналогично. Она обладает такими же свойствами, за исключением того, что она строго убывающая.

Так как функции a^x и $\log_a x$ взаимно обратные, то имеют место следующие равенства:

$$a^{\log_a x} = x \ (x > 0) \quad \text{и} \quad \log_a a^x = x \ (x \in \mathbb{R}).$$

Отсюда и из свойств показательной функции вытекают следующие свойства логарифмов, в формулировке которых $a, b > 0,\ a, b \neq 1,\ x', x'', x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$:

1) $\log_a (x' \cdot x'') = \log_a x' + \log_a x''$;
2) $\log_a \frac{x'}{x''} = \log_a x' - \log_a x''$;
3) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;
4) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Часто в основании показательной функции берут число e. Функцию $y = \mathrm{e}^x$ называют экспоненциальной. Обратную к ней функцию, т. е. логарифм по основанию e, называют натуральным логарифмом и обозначают $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.

Упражнение. На основании определения и свойств постройте графики логарифмической функции $y = \log_a x$ при различных значениях $a > 0,\ a \neq 1$.

4.9.4 Степенная функция с действительным показателем

Ранее рассматривалась степенная функция $y = x^z$ с целым показателем z, а также функция $y = \sqrt[n]{x}$ для натуральных n.

Степенной функцией с действительным показателем $\alpha \in \mathbb{R}$ называется функция $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$, определенная для $x > 0$. Степенная функция непрерывна. Ее непрерывность вытекает из непрерывности показательной и логарифмической функций и из теоремы о непрерывности сложной функции. При $\alpha > 0$ функция x^α строго возрастает от 0 до $+\infty$, а при $\alpha < 0$ – строго убывает от $+\infty$ до 0.

Упражнение. На основании определения и свойств постройте графики степенной функции $y = x^\alpha$ при различных значениях α.

4.10 Второй замечательный предел

Вторым замечательным пределом принято называть следующий предел:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} ,$$

или, что то же самое,

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x .$$

Докажем, что этот предел равен e. Ранее число e было определено как предел последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Пусть $\{x_k\}$ – последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю. Тогда выберем последовательность натуральных чисел n_k, такую, что $n_k \le \frac{1}{x_k} < n_k + 1$, т. е. положим $n_k = \left[\frac{1}{x_k}\right]$. Так как $\{n_k\}$ – подпоследовательность натуральных чисел, то подпоследовательность $\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ стремится к e. Отсюда и из неравенств

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)} = \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} \le (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} \le$$

$$\le \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right),$$

применяя теорему о трех пределах, получаем

$$\lim_{k\to\infty} (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \mathrm{e}.$$

Так как $\{x_k\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю, то, в силу определения предела по Гейне,

$$\lim_{x\to 0+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

Покажем, что $\lim_{x\to 0-}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$. Пусть $x_k \to 0-\ \ (k \to \infty)$. Тогда, начиная с некоторого номера, справедливо неравенство $x_k > -1$. Можем считать, что $x_k > -1$ при всех $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $y_k = -x_k > 0$ и $y_k \to 0+\ \ (k \to \infty)$. Имеем

$$\lim_{k\to\infty} (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \lim_{k\to\infty} (1 - y_k)^{-\frac{1}{y_k}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{y_k}{1 - y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} = \lim_{k\to\infty} \left[\left(1 + \frac{y_k}{1 - y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}}\right]^{\frac{1}{1-y_k}}.$$

Обозначим $z_k = \frac{y_k}{1-y_k}$. Тогда $z_k \to 0+$, и поэтому получим

$$\lim_{k\to\infty} (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \lim_{k\to\infty} \left[(1 + z_k)^{\frac{1}{z_k}}\right]^{z_k+1} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (1 + z_k)\,(1 + z_k)^{\frac{1}{z_k}} = \mathrm{e}.$$

Так как $\{x_k\}$ – произвольная последовательность отрицательных чисел, стремящаяся к нулю, то, в силу определения предела по Гейне,

$$\lim_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

Итак, мы доказали, что $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \mathrm{e}$ при $x \to 0+$ и при $x \to 0-$. Поэтому и

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

Этот предел можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Следствие 1. Докажем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Так как $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \mathrm{e}$ $(x \to 0)$ и функция $z = \ln y$ непрерывна, то

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \ln\mathrm{e} = 1 \ (x \to 0).$$

Следствие 2. Докажем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \ (a > 0).$$

При $a = 1$ это равенство очевидно. Пусть $a \neq 1$. Положим $a^x - 1 = y$. Тогда $x = \log_a(1+y) = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}$ и $y \to 0$ при $x \to 0$. Используя следствие 1, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y\cdot\ln a}{\ln(y+1)} = \ln a.$$

Следствие 3. Используя свойства 1 и 2, для $\alpha \in \mathbb{R}$ получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x} = \alpha,$$

т. е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Сравнение логарифмической, степенной и показательной функций. Покажем, что справедливы следующие равенства:

1) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0 \quad (\alpha>0,\ a>1);$$

2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=0 \quad (a>1,\ \alpha>0).$$

Для доказательства 1) докажем сначала, что $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{b^x}=0$ $(b>1)$. Выберем последовательность $x_k\to+\infty$ $(k\to\infty)$ и положим $n_k=[x_k]$. Тогда

$$0<\frac{x_k}{b^{x_k}}\le\frac{n_k+1}{b^{n_k}}=\frac{n_k}{b^{n_k}}\cdot\frac{n_k+1}{n_k}.$$

Так как $\{n_k\}$ – подпоследовательность натуральных чисел и, как было показано ранее, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b^n}=0$ $(b>1)$, то, в силу произвольности $\{x_k\}$, получаем, что $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{b^x}=0$.

Теперь имеем

$$\frac{x^\alpha}{a^x}=\left(\frac{x}{a^{\frac{1}{\alpha}\cdot x}}\right)^\alpha=\left(\frac{x}{b^x}\right)^\alpha,$$

где $b=a^{\frac{1}{\alpha}}>1$. Так как $\alpha>0$ и $\frac{x}{b^x}\to0$ при $x\to+\infty$, то и $\left(\frac{x}{b^x}\right)^\alpha\to0$ $(x\to+\infty)$. Этим доказано 1).

Из 1) получим 2), если обозначим $x^\alpha=a^t$. Действительно, условие $x\to+\infty$ равносильно тому, что $t\to+\infty$ и поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\log_a\left(a^t\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{a^t}=\frac{1}{\alpha}\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{a^t}=0.$$

4.11 Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Пусть функция f непрерывна на некотором множестве E. Это означает, что f непрерывна в каждой точке $x_0\in E$, т. е. для каждой $x_0\in E$ и для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, зависящее, вообще говоря, от x_0 и от ε, что для всех $x\in E$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Иначе говоря, если x близко к x_0, то и

$f(x)$ мало отличается от $f(x_0)$. Степень близости x к x_0 определяется числом δ, которое зависит от точки x_0, т. е. в каждой точке x_0 имеется своя мера близости x к x_0. В ряде задач требуется, чтобы степень близости аргументов, обеспечивающая близость значений функции, не зависела от того, где находятся эти аргументы. Это свойство выражает равномерную непрерывность функции.

Определение. Функция f, определенная на промежутке I, называется равномерно непрерывной на этом промежутке, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, что для всех $x', x'' \in I$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Это определение означает, что для любой пары близких точек соответствующие значения функции мало отличаются друг от друга. Отметим, что понятие равномерной непрерывности имеет смысл только на некотором множестве, в то время как свойство непрерывности может рассматриваться в отдельно взятой точке области определения функции. Полезно сравнить определения непрерывности функции f на множестве E и равномерной непрерывности на этом же множестве, записанные в кванторах. Определение непрерывности выглядит так:

$$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall y \in E\ |x - y| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

а определение равномерной непрерывности – так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall x \in E\ \forall y \in E\ |x - y| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Различие в этих двух определениях состоит в том, что квантор $\forall x \in E$ изменяет свое положение.

Пример 1. Пусть $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Эта функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. В самом деле,

$$|\sin x' - \sin x''| = \left|2 \sin \frac{x' - x''}{2} \cos \frac{x' + x''}{2}\right| \leq |x' - x''| < \varepsilon,$$

если только $|x' - x''| < \delta \equiv \varepsilon$.

Пример 2. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на множестве $(0, +\infty)$ (т. е. в каждой точке $x_0 \in (0, +\infty)$), но не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$. В самом деле, $f\left(\frac{1}{n+1}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = n + 1 - n = 1$, хотя точки $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ могут быть сколь угодно близкими. Точнее, мы показали, что существует $\varepsilon_0 = 1$, такое, что для любого $\delta > 0$ существуют $x' = \frac{1}{n+1}$ и $x'' = \frac{1}{n}$, такие, что $|x' - x''| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} < \delta$ (для этого достаточно выбрать n таким, что $n > \frac{1}{\delta}$) и $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0 = 1$.

В этом примере функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$, т. к. двум близким точкам вблизи нуля могут соответствовать далекие значения функции. Если же рассмотреть сужение функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на множество $[\delta_0, +\infty)$, где фиксированное $\delta_0 > 0$, то полученная функция будет равномерно непрерывной на $[\delta_0, +\infty)$. В самом деле, поскольку $x', x'' \geq \delta_0$, то

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{x' \cdot x''} \leq \frac{1}{\delta_0^2}\,|x' - x''| < \varepsilon,$$

если только $|x' - x''| < \delta \equiv \varepsilon \cdot \delta_0^2$.

Может показаться, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$ лишь потому, что она неограничена на этом множестве. На самом деле это не так, что показывает следующий пример.

Пример 3. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(0 < x < +\infty)$. Эта функция ограничена, непрерывна на $(0, +\infty)$, но не является равномерно непрерывной на этом множестве. В самом деле, легко можно подобрать значения $x' > 0$ и $x'' > 0$ так, чтобы $|x' - x''|$ было меньшим любого наперед заданного $\delta > 0$ и, вместе с тем, $\sin\frac{1}{x'} = 1$, $\sin\frac{1}{x''} = -1$. Тогда $\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''} = 2$, т. е. существует $\varepsilon_0 = 2$, такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся $x', x'' > 0$, такие, что $|x' - x''| < \delta$ и $\left|\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''}\right| \geq \varepsilon_0 = 2$. Это и означает, что функция $\sin\frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$.

Итак, рассмотренные примеры показывают, что не каждая непрерывная на некотором множестве функция является равномерно непрерывной на этом множестве. Обратное же, очевидно, всегда имеет место, т. е. из равномерной непрерывности функции на некотором множестве вытекает непрерывность функции в каждой точке этого множества (т. е. непрерывность на множестве). Другими словами, равномерная непрерывность – более сильное требование, нежели непрерывность. Следующая теорема дает условие на область определения функции, при котором из непрерывности функции на этом множестве следует ее равномерная непрерывность.

Теорема Кантора. *Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. Докажем методом от противного, используя лемму Больцано – Вейерштрасса. Предположим, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f не является равномерно непрерывной на этом отрезке. Это означает, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $x', x'' \in [a, b]$, такие, что $|x' - x''| < \delta$, и при этом $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$. Полагая $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, построим соответствующие точки x_n', x_n''. Возьмем последовательность точек x_n' и, пользуясь леммой Больцано – Вейерштрасса, выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $\left\{x_{n_k}'\right\}$. Пусть $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}' = c \in [a, b]$. Из условия $\left|x_{n_k}' - x_{n_k}''\right| < \frac{1}{n_k}$ следует также, что $x_{n_k}'' \to c$ $(k \to \infty)$, поскольку $\left|x_{n_k}'' - c\right| \leq \left|x_{n_k}' - x_{n_k}''\right| + \left|x_{n_k}' - c\right|$. Но тогда из непрерывности функции f в точке $c \in [a, b]$ следует, что $f\left(x_{n_k}'\right) \to f(c)$ $(k \to \infty)$ и $f\left(x_{n_k}''\right) \to f(c)$ $(k \to \infty)$. Отсюда и из неравенства

$$\left|f\left(x_{n_k}'\right) - f\left(x_{n_k}''\right)\right| \leq \left|f\left(x_{n_k}'\right) - f(c)\right| + \left|f\left(x_{n_k}''\right) - f(c)\right|$$

вытекает, что левая часть может быть сделана сколь угодно малой при достаточно большом k, а это противоречит тому, что $\left|f\left(x_{n_k}'\right) - f\left(x_{n_k}''\right)\right| \geq \varepsilon_0 > 0$. $\square$

4.12 Эквивалентные функции. Символы Ландау

Определение. Пусть функции f и g отличны от нуля в проколотой окрестности точки x_0 (равной, быть может, $+\infty$, $-\infty$ или ∞). Говорят, что функции f и g эквивалентны при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Обозначают это так: $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$.

В терминах этого определения найденные ранее пределы можно переписать следующим образом (все соотношения формулируются для случая $x \to 0$):

$$\sin x \sim x, \qquad \operatorname{tg} x \sim x,$$
$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \qquad \arcsin x \sim x,$$
$$\operatorname{arctg} x \sim x, \qquad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a,$$
$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}, \qquad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x.$$

Эти соотношения останутся в силе, если в них вместо переменной x записать отличную от нуля функцию $\varphi(x)$, стремящуюся к нулю при $x \to x_0$. Например, $\sin x^2 \sim x^2$ $(x \to 0)$, $\operatorname{tg} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ $(x \to \infty)$, $\operatorname{tg}\sin(x-1)^2 \sim \sin(x-1)^2 \sim (x-1)^2$ $(x \to 1)$.

Теорема (применение эквивалентных функций для нахождения пределов). *Пусть* $f(x) \sim f_1(x)$ *и* $g(x) \sim g_1(x)$ *при* $x \to x_0$ *и пусть существует* $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$. *Тогда существует* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство. По определению эквивалентных функций, используя арифметические свойства пределов, получаем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{f_1(x)} \cdot \frac{g_1(x)}{g(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 1 \cdot 1 \cdot A = A,$$

и теорема доказана. □

Доказанная теорема означает, что при вычислении пределов в произведении и в частном функции можно заменять эквивалентными. При этом существование предела и его величина не изменяются.

Пример.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x \cdot (\mathrm{e}^x - 1)}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{\frac{x^2}{2}} = 2.$$

Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых. Символами Ландау называются символы $\overline{o}$ и $\underline{O}$. Дадим определение.

Определение. Пусть функции f и g определены в проколотой окрестности точки x_0 (конечного или бесконечного) и $g(x) \neq 0$. Говорят, что $f(x)$

является $\overline{o}$-малой относительно $g(x)$ при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Обозначают это так: $f(x) = \overline{o}(g(x))\ \ (x \to x_0)$.

Если $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ и $f(x) = \overline{o}(g(x))$ при $x \to x_0$, то говорят, что $f(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $g(x)$, при $x \to x_0$. Если же $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ и $f(x) = \overline{o}(g(x))$ при $x \to x_0$, то говорят, что $g(x)$ стремится к бесконечности быстрее, чем $f(x)$, при $x \to x_0$. Например, $\sin x^2 = \overline{o}(x)\ (x \to 0)$, $\operatorname{tg}^3 x \cdot \sin \frac{1}{x} = \overline{o}\left(x^2\right)\ \ (x \to 0)$.

Определение. Пусть функции f и g определены в проколотой окрестности x_0 (конечного или бесконечного) и $g(x) \neq 0$. Говорят, что $f(x)$ является $\underline{O}$-большим относительно $g(x)$ при $x \to x_0$, если существует такая проколотая окрестность U_δ точки x_0, что для всех $x \in U_\delta$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$, где постоянная c не зависит от x (но может зависеть от окрестности U_δ). Обозначают это так: $f(x) = \underline{O}(g(x))\ \ (x \to x_0)$.

Например, $x^2 + 2x^3 = \underline{O}\left(x^2\right)\ \ (x \to 0)$, $\quad x^2 + 2x^3 = \underline{O}\left(x^3\right)\ \ (x \to \infty)$.

Теорема. *Пусть существует* $\lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = K$, *где* $0 \leq K < +\infty$. *Тогда* $f(x) = \underline{O}(g(x))$.

Доказательство. Рассматриваем случай $x_0 \in \mathbb{R}$. Зададим $\varepsilon = 1$ и найдем такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $\left|\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| - K\right| < 1$. Последнее неравенство равносильно тому, что

$$K - 1 < \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < K + 1.$$

Умножая правое неравенство на $|g(x)|$, получаем утверждение теоремы.

$\square$

Теорема (критерий эквивалентности функций). *Для того чтобы отличные от нуля функции f и g были эквивалентными при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство $f(x) = g(x) + \overline{o}(g(x))\ \ (x \to x_0)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$. Тогда $\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \to 0\ \ (x \to x_0)$, т. е. $\frac{f(x)}{g(x)} - 1 = h(x)$, где $h(x) \to 0\ \ (x \to x_0)$.

Отсюда следует, что $f(x) = g(x) + g(x) \cdot h(x)$. Но $\frac{g(x) \cdot h(x)}{g(x)} = h(x)$, т. е. $g(x) \cdot h(x) = \overline{o}(g(x))\ \ (x \to x_0)$.

Достаточность. Если $f(x) = g(x) + \overline{o}(g(x))\ \ (x \to x_0)$, то $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{\overline{o}(g(x))}{g(x)}$ и поэтому $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. □

Используя эту теорему, набор эквивалентных функций, выписанный нами ранее, можно переписать в следующем виде (всюду $x \to 0$):

$$\sin x = x + \overline{o}(x), \qquad \operatorname{tg} x = x + \overline{o}(x),$$
$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + \overline{o}(x^2), \qquad \arcsin x = x + \overline{o}(x),$$
$$\operatorname{arctg} x = x + \overline{o}(x), \qquad a^x - 1 = x \ln a + \overline{o}(x),$$
$$\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + \overline{o}(x), \qquad (1+x)^\alpha - 1 = \alpha \cdot x + \overline{o}(x).$$

С помощью этой таблицы можно вычислять пределы. Покажем это на примерах.

Пример 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \sqrt[3]{1+x}}{2 \operatorname{arctg} x - \arcsin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - \left(\sqrt[3]{1+x} - 1\right)}{2 \operatorname{arctg} x - \arcsin x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + \overline{o}(x) - \left(\frac{1}{3}x + \overline{o}(x)\right)}{2\,(x + \overline{o}(x)) - (x + \overline{o}(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{3}x + \overline{o}(x)}{x + \overline{o}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{3} + \frac{\overline{o}(x)}{x}}{1 + \frac{\overline{o}(x)}{x}} = \frac{2}{3}.$$

Пример 2. Раскрытие неопределенности $[1^\infty]$. Пусть $\alpha(x) \to 0$ $(\alpha(x) \neq 0)$, $\beta(x) \to \infty\ \ (x \to x_0)$. Тогда, в силу непрерывности показательной функции,

$$\lim_{x \to x_0} (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \mathrm{e}^{\beta(x) \ln(1+\alpha(x))} = \mathrm{e}^{\lim_{x \to x_0} \beta(x)(\alpha(x) + \overline{o}(\alpha(x)))}.$$

Если существует $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x) = A$, то

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x)\,(\alpha(x) + \overline{o}(\alpha(x))) = \lim_{x \to x_0} \beta(x) \cdot \alpha(x) \cdot \frac{\alpha(x) + \overline{o}(\alpha(x))}{\alpha(x)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \beta(x) \cdot \alpha(x) \left(1 + \frac{\overline{o}(\alpha(x))}{\alpha(x)}\right) = A.$$

Поэтому
$$\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\beta(x)} = \mathrm{e}^A.$$

Упражнение. Пусть $\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0}\beta(x) = \infty$. Доказать, что $\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\beta(x)} = 0$, если $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x) = -\infty$. Если же $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x) = +\infty$, то $\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\beta(x)} = +\infty$.

5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

5.1 Дифференцируемость и производная

Определение 1. Пусть функция f определена на интервале (a, b) и точка $x_0 \in (a, b)$. Если существует конечный предел $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то он называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$, или $\frac{df}{dx}(x_0)$, $Df(x_0)$.

Определение 2. Пусть функция f определена на интервале (a, b) и точка $x_0 \in (a, b)$. Функцию f будем называть дифференцируемой в точке x_0, если существует такая постоянная A (зависящая от x_0 и не зависящая от x), что справедливо равенство

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + r(x),$$

где $r(x) = \overline{o}(x - x_0)\ \ (x \to x_0)$.

Короче определение дифференцируемости можно записать в следующем виде:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)\ \ (x \to x_0).$$

Покажем, что эти два определения эквивалентны в том смысле, что дифференцируемость функции равносильна существованию производной.

Теорема. *Функция f дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$ тогда и только тогда, когда у f существует производная в точке x_0.*

Доказательство. Пусть f дифференцируема в точке x_0. Это означает, что $f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)$, где A не зависит от x. Отсюда получаем

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \frac{\overline{o}(x - x_0)}{x - x_0}.$$

Тогда, учитывая определение символа $\overline{o}$, имеем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A+\lim_{x\to x_0}\frac{\overline{o}(x-x_0)}{x-x_0}=A,$$

т. е. существует $f'(x_0)=A$.

Обратно, если существует

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$

то

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=r_1(x),$$

где $r_1(x)\to 0\ \ (x\to x_0)$. Отсюда следует, что

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+r_1(x)(x-x_0).$$

Обозначим $r(x)=r_1(x)(x-x_0)$. Тогда $r(x)=\overline{o}(x-x_0)$, т. е.

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\overline{o}(x-x_0)\quad (x\to x_0),$$

а это и означает, что f дифференцируема в точке x_0, причем $A=f'(x_0)$.

□

Итак, условие дифференцируемости равносильно наличию производной. Смысл дифференцируемости состоит в том, что в некоторой окрестности точки x_0 функция f представима в виде линейной функции $l(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ приближенно с точностью до величины бесконечно малой более высокого порядка, чем $(x-x_0)$ при $x\to x_0$.

Связь между дифференцируемостью и непрерывностью устанавливает следующая

Теорема. *Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Дифференцируемость f означает, что

$$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+\overline{o}(x-x_0)\quad (x\to x_0).$$

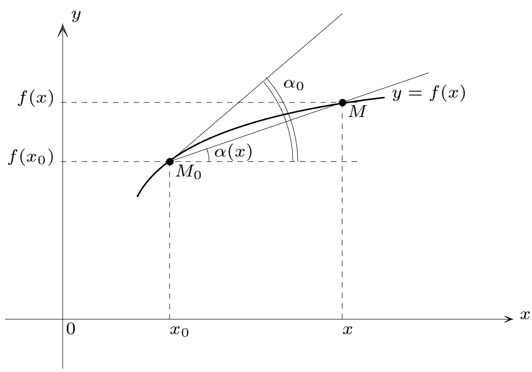
Отсюда следует, что $\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$, т. е. $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, и тем самым теорема доказана. □

Обратное утверждение неверно. Именно, из непрерывности функции f не следует ее дифференцируемость. Примером может служить функция $f(x) = |x|$, непрерывная в точке $x_0 = 0$, для которой выражение

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sign} x$$

не имеет предела при $x \to 0$ и, следовательно, функция f не имеет производной в точке $x_0 = 0$. Значит, f не является дифференцируемой в нуле.

Итак, непрерывность – это необходимое, но не достаточное условие дифференцируемости. Другими словами, если функция разрывна в точке x_0, то она недифференцируема в этой точке. Обратное неверно.



С геометрической точки зрения производная $f'(x_0)$ представляет собой тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$. При этом касательной к графику функции f в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M при стремлении точки $M(x, f(x))$ вдоль кривой $y = f(x)$ к точке M_0. В самом деле, если функция f дифференцируема в точке x_0, то при стремлении M к M_0 вдоль кривой $y = f(x)$ секущая M_0M имеет тангенс угла наклона, равный

$$\operatorname{tg} \alpha(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

и при $x \to x_0$ точка M стремится к M_0 вдоль кривой $y = f(x)$. Так как

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) \quad (x \to x_0)\,,$$

то $\operatorname{tg}\alpha(x) \to f'(x_0)$ при $x \to x_0$, т. е. секущая стремится занять некоторое предельное положение, тангенс угла наклона α_0 которого равен $f'(x_0)$. Отсюда получаем уравнение касательной к графику дифференцируемой в точке x_0 функции $y = f(x)$:

$$k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Примеры. После доказательства критерия эквивалентности функций была приведена таблица эквивалентных функций, из которой можем установить дифференцируемость некоторых функций. Например, если равенство $\sin x = x + \overline{o}(x)$ $(x \to 0)$ записать в виде $\sin x - \sin 0 = 1 \cdot (x - 0) + \overline{o}(x - 0)$, то видим, что функция $f(x) = \sin x$ дифференцируема в точке $x_0 = 0$ и ее производная в этой точке равна 1. Это можно также установить, пользуясь определением производной:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Приведем еще один пример:

$$a^x - 1 = x \cdot \ln a + \overline{o}(x)\ (x \to 0) \ \Leftrightarrow\ a^x - a^0 = \ln a(x - 0) + \overline{o}(x - 0)\ (x \to 0),$$

т. е. функция $f(x) = a^x$ дифференцируема в точке $x_0 = 0$ и ее производная в этой точке равна $\ln a$.

Упражнение. Рассмотрите все остальные примеры из указанной таблицы.

Определение. Пусть функция f определена в некоторой правой полуокрестности $[x_0, x_0 + \delta)$ точки x_0. Если существует конечный предел

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то его называют правой производной функции f в точке x_0 и обозначают $f'_+(x_0)$. Аналогично определяется производная слева $f'_-(x_0)$ функции f в точке x_0.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Легко видеть, что

a) если существует $f'_+(x_0)$, то f непрерывна справа в точке x_0;

b) если существует $f'_-(x_0)$, то f непрерывна слева в точке x_0;

c) если существуют $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, то f непрерывна в точке x_0;

d) для того чтобы f была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы у нее существовали производные слева и справа и они были равными друг другу.

Пример. Пусть $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. Тогда легко видеть, что $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

5.2 Дифференцируемость и арифметические операции

Теорема. *Пусть функции f и g определены на интервале (a, b) и дифференцируемы в точке x_0. Тогда*

a) функция $f + g$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

b) функция $f \cdot g$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0);$$

c) если $g(x) \neq 0$ $(x \in (a, b))$, то функция $\frac{f}{g}$ дифференцируема в точке x_0 и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - g'(x_0)\, f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доказательство. Утверждение a) очевидно. Докажем b). Имеем

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)\, g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)\, g(x) + f(x_0)\, g(x) - f(x_0)\, g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Используя непрерывность функции g в точке x_0, которая следует из дифференцируемости, переходя к пределу при $x \to x_0$, получаем b).

Для доказательства c) рассмотрим сначала случай $f(x) \equiv 1$. Тогда

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \to -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad (x \to x_0).$$

В общем случае, применяя утверждение b), получим

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) =$$

$$= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} - f(x_0) \cdot \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}. \quad \square$$

Замечание. Непосредственно из определения производной следует, что $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$, где c – постоянная. Поэтому, используя часть a) доказанной теоремы, получаем, что операция дифференцирования является линейной операцией, т. е. производная линейной комбинации двух дифференцируемых функций равна линейной комбинации их производных –

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot g'(x_0),$$

где α и β – постоянные.

5.3 Производная сложной и обратной функций

Теорема (о производной композиции). *Пусть функция f определена на интервале I и дифференцируема в точке $x_0 \in I$, а функция g определена на интервале $J \supset f(I)$ и дифференцируема в соответствующей точке $y_0 = f(x_0) \in J$. Тогда сложная функция $\varphi(x) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем*

$$\varphi'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Доказательство. Так как функция g дифференцируема в точке y_0, то

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y - y_0) + r(y)(y - y_0), \tag{5.1}$$

где $\lim_{y \to y_0} r(y) = 0$. Доопределим функцию r в точке y_0 по непрерывности, положив $r(y_0) = 0$. В равенстве (5.1) считаем, что $y = f(x)$. Тогда получим

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = g'(y_0)(f(x) - f(x_0)) + r(f(x))(f(x) - f(x_0)).$$

Разделив это равенство на $x - x_0$ и устремив $x \to x_0$, получаем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= g'(f(x_0)) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} r(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Последний предел справа равен нулю, поскольку $\lim_{x \to x_0} r(f(x)) = 0$ (по теореме о непрерывности сложной функции) и $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. Итак, получили, что $\varphi'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. □

Теорема (о производной обратной функции). *Пусть функция f строго возрастает на интервале I, непрерывна на I, дифференцируема в точке $x_0 \in I$ и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $g = f^{-1}$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причем $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Доказательство. Рассмотрим разностное отношение $\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$. Обозначим $x = g(y)$. Тогда $y = f(x)$ и

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Поскольку функция g непрерывна (в силу теоремы о непрерывности обратной функции), то при $y \to y_0$ имеем $x = g(y) \to g(y_0) = x_0$, и поэтому

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

т. е. существует предел левой части и он равен $\frac{1}{f'(x_0)}$. □

5.4 Производные основных элементарных функций

1. Пусть $f(x) \equiv C$. Тогда, очевидно, $f'(x) = 0$.

2. Пусть $f(x) = x^n$ $(-\infty < x < +\infty,\ n \in \mathbb{N})$. Тогда

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{1}{h}\left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} h^k - x^n\right] = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} h^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} h^{k-1} \to n x^{n-1} \quad (h \to 0).$$

Отсюда следует, что $f'(x) = (x^n)' = n x^{n-1}$.

3. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$. Тогда

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{x(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)} \to -\frac{1}{x^2} \quad (h \to 0).$$

Итак, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

4. Пусть $f(x) = x^\alpha$ $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$. Тогда

$$\frac{1}{h}\left((x+h)^\alpha - x^\alpha\right) = \frac{x^\alpha}{h}\left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1\right) =$$

$$= \frac{x^\alpha}{h} \cdot \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{h}{x} \to \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (h \to 0),$$

т. е. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

5. Пусть $f(x) = a^x$ $(-\infty < x < +\infty,\ a > 0,\ a \neq 1)$. Тогда

$$\frac{1}{h}\left(a^{x+h} - a^x\right) = \frac{a^x}{h}\left(a^h - 1\right) \to a^x \cdot \ln a \quad (h \to 0),$$

т. е. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

6. Пусть $f(x) = \log_a x$ $(x > 0)$. Тогда

$$\frac{1}{h}\left(\log_a(x+h) - \log_a x\right) = \frac{1}{h}\log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{h} \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \to \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \quad (h \to 0),$$

т. е. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

7. Пусть $f(x) = \sin x$ $(-\infty < x < +\infty)$. Тогда

$$\frac{1}{h}\left(\sin\left(x+h\right) - \sin x\right) = \frac{1}{h}\left(\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x\right) =$$

$$= \frac{1}{h} \sin x(\cos h - 1) + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \to \cos x \quad (h \to 0),$$

т. е. $(\sin x)' = \cos x$.

8. Аналогично получаем, что $(\cos x)' = -\sin x$.

9. Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right)$. Тогда

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

10. Пусть $f(x) = \operatorname{ctg} x$ $(x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$. Тогда

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left((\operatorname{tg} x)^{-1}\right)' = -(\operatorname{tg} x)^{-2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

11. Пусть $y = \arcsin x$ $(-1 < x < 1)$, т. е. $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. По теореме о производной обратной функции, $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, где $x = \sin y$, т. е.

$$y'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Но $\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y}$, причем перед корнем нужно взять знак " + ", поскольку при $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ имеем $\cos y > 0$. Отсюда $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$, т. е.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

12. Пусть $y = \arccos x$ $(-1 < x < 1)$, т. е. $0 < y < \pi$. Как и в предыдущем примере, получаем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

При этом, как и выше, мы воспользовались равенством $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$.

13. Пусть $y = \operatorname{arctg} x$ $(-\infty < x < +\infty)$. Как и в предыдущих двух примерах, имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

14. Пусть $y = \operatorname{arcctg} x$ $(-\infty < x < +\infty)$. Тогда

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

15. Пусть $f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ $(-\infty < x < +\infty)$. Тогда, как легко вычислить,

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

16. Пусть $f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ $(-\infty < x < +\infty)$. Тогда, как легко вычислить,

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

17. Пусть $fx) = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ $(-\infty < x < +\infty)$. Тогда, как легко вычислить,

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

18. Пусть $f(x) = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{\operatorname{th} x}$ $(x \neq 0)$. Тогда, как легко вычислить,

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Пример 1. Пусть $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Пример 2. Пусть $f(x) = \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\arcsin x}$. Для удобства дифференцирования представим функцию f в таком виде:

$$f(x) = \exp\left(\arcsin x \cdot \ln(-\ln x)\right).$$

Теперь легко вычислить производную

$$f'(x) = \exp\left(\arcsin x \cdot \ln(-\ln x)\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln(-\ln x) + \arcsin x \cdot \frac{1}{-\ln x} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\arcsin x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln \left(\ln \frac{1}{x}\right) + \arcsin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\right).$$

Пример 3. Пусть $f(x) = |x|^3$. В окрестности точки $x > 0$ функция $f(x)$ совпадает с функцией x^3 и поэтому $f'(x) = 3x^2$ при $x > 0$. В окрестности точки $x < 0$ функция $f(x)$ совпадает с функцией $-x^3$ и поэтому $f'(x) = -3x^2$ при $x < 0$. В правой полуокрестности нуля функция f совпадает с функцией x^3 и поэтому $f'_+(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$. В левой полуокрестности нуля функция f совпадает с функцией $-x^3$ и поэтому $f'_-(0) = -3x^2|_{x=0} = 0$. Поскольку в нуле левая и правая производные функции f совпадают, то f дифференцируема в точке $x = 0$ и $f'(0) = 0$. Окончательно получили $f'(x) = 3x^2 \operatorname{sign} x$.

5.5 Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма. *Пусть функция f определена на интервале (a, b) и в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение на этом интервале. Если существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть x_0 – точка максимума функции f. Рассмотрим разностное отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Так как $f(x) \le f(x_0)$, то при $x > x_0$ имеем $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$ и, следовательно, $f'_+(x_0) \le 0$. Если же $x < x_0$, то $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$ и поэтому $f'_-(x_0) \ge 0$. Но из дифференцируемости функции f в точке x_0 следует, что $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$. Поэтому $f'(x_0) = 0$. $\square$

С геометрической точки зрения теорема Ферма означает, что если в точке экстремума у графика функции существует касательная, то она параллельна оси Ox.

Замечание. У функции $f(x) = |x|,\ (-1 < x < 1)$ в точке $x_0 = 0$ имеется экстремум, но производной в нуле эта функция не имеет. Теорема Ферма означает, что для поиска экстремума функции f во внутренних точках области определения следует исследовать поведение функции f лишь в тех точках, в которых производная обращается в нуль, либо не существует. Экстремума не может быть в тех точках, в которых производная существует и отлична от нуля. Однако из равенства нулю производной в точке x_0 не следует, что x_0 – точка экстремума. Например, у функции $f(x) = x^3$ в точке $x_0 = 0$ экстремума нет и в то же время $f'(0) = 0$.

Определение. Функция называется дифференцируемой на интервале, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

Теорема Ролля. *Пусть функция f*

a) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

b) дифференцируема на интервале (a, b);

c) $f(a) = f(b)$.

Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Так как f непрерывна на $[a, b]$, то, в силу второй теоремы Вейерштрасса, она достигает своих наибольшего и наименьшего значений, т. е. существуют точки ξ_1, ξ_2, такие, что $f(\xi_1) = \max_{a \le x \le b} f(x)$, $f(\xi_2) = \min_{a \le x \le b} f(x)$. Если $f(\xi_1) = f(\xi_2)$, то это означает, что f тождественно постоянна на $[a, b]$ и, следовательно, в каждой точке $\xi \in (a, b)$ справедливо равенство $f'(\xi) = 0$. Если же $f(\xi_1) > f(\xi_2)$, то хотя бы одно из этих двух значений отлично от $f(a) = f(b)$, т. е. хотя бы одна из двух точек ξ_1, ξ_2 находится на интервале (a, b). Обозначим ее через ξ. Тогда на (a, b) к функции f можно применить теорему Ферма. Именно, f дифференцируема в точке ξ и имеет в этой точке экстремум. Согласно теореме Ферма, $f'(\xi) = 0$. $\square$

Следствие. Между двумя корнями дифференцируемой функции находится корень производной.

Пример. Уравнение нечетной степени $x^5 + x - 1 = 0$ имеет действительный корень. Покажем, что он единственный. Обозначим $y = x^5 + x - 1$. Тогда $y' = 5x^4 + 1 > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Если бы данное уравнение имело еще хотя бы один корень, то, согласно следствию, нашлась бы точка, в которой производная y' обратилась бы в нуль, а это невозможно.

Теорема Лагранжа (формула конечных приращений). *Пусть функция f*

a) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

b) дифференцируема на интервале (a, b).

Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Доказательство теоремы Лагранжа сводится к применению теоремы Ролля. Запишем уравнение прямой l, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$:

$$l(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - l(x)$. Покажем, что для функции F выполнены все условия теоремы Ролля. Непрерывность на $[a, b]$ и дифференцируемость на (a, b) функции F следует из соответствующих свойств функции f, данных по условию, и дифференцируемости линейной функции l. Далее, $F(a) = f(a) - l(a) = 0$, $F(b) = f(b) - l(b) = 0$. Применяя к F теорему Ролля, найдем такую точку $\xi \in (a, b)$, что $F'(\xi) = 0$. Но

$$F'(\xi) = f'(\xi) - l'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. □

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что существует точка $\xi \in (a, b)$, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна отрезку, соединяющему точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Замечание. Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа, в котором $f(a) = f(b)$.

Равенство, полученное в теореме Лагранжа, можно переписать в таком виде:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a),$$

или

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a),$$

где $0 < \theta < 1$. Ничего более конкретного о значении θ сказать нельзя. Два последних равенства принято называть формулами конечных приращений.

Следствие 1. *Пусть функция f на интервале (a, b) имеет ограниченную производную. Тогда f равномерно непрерывна на (a, b).*

Доказательство. Пусть $|f'(\xi)| \le M$ $(\xi \in (a, b))$. Тогда для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, согласно формуле конечных приращений,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| \le M |x_1 - x_2|, \tag{5.2}$$

где ξ – точка из интервала с концами x_1 и x_2. Зададим $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ из неравенства $|x_1 - x_2| < \delta$ и из (5.2) следует, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, т. е. функция f равномерно непрерывна на (a, b). $\square$

Итак, следствие 1 дает достаточное условие равномерной непрерывности дифференцируемой на (a, b) функции. Оно состоит в ограниченности производной на (a, b). Это условие, однако, не является необходимым, т. е. из равномерной непрерывности не следует ограниченность производной. Например, функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на отрезке $[0, 1]$ (это сразу следует из ее непрерывности и из теоремы Кантора), а следовательно, эта функция равномерно непрерывна и на интервале $(0, 1)$. В то же время производная $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ неограничена на $(0, 1)$.

Рассмотрим еще один важный пример функции

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна в каждой точке полуинтервала $(0, 1]$ (при любом α). Если $\alpha \leq 0$, то f не имеет предела справа в точке 0 и, следовательно, в точке 0 имеет разрыв II рода. Если же $\alpha > 0$, то $\lim_{x \to 0+} x^\alpha \sin \frac{1}{x} = 0$ (произведение бесконечно малой функции x^α на ограниченную функцию $\sin \frac{1}{x}$). Значит, в силу теоремы Кантора, при $\alpha > 0$ функция f равномерно непрерывна на $[0, 1]$. Вычислим производную

$$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} + x^\alpha \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad (0 < x \leq 1).$$

При $0 < \alpha < 2$ производная f' неограничена на $(0, 1]$, хотя f равномерно непрерывна на $[0, 1]$. Вычислим

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}.$$

Если $\alpha > 1$, то, очевидно, $f'_+(0) = 0$. Если же $\alpha \leq 1$, то правой производной в нуле функция f не имеет.

Очевидно, что у тождественно постоянной на (a, b) функции производная равна нулю в каждой точке $\xi \in (a, b)$. Формула Лагранжа позволяет легко обратить это утверждение.

Следствие 2. *Если дифференцируемая на (a, b) функция f такова, что для любой $\xi \in (a, b)$ производная $f'(\xi) = 0$, то f тождественно постоянна на (a, b).*

Доказательство. Выберем произвольные $x_1, x_2 \in (a, b)$ $(x_1 < x_2)$ и применим к отрезку $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа, из которой получим

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad \text{где} \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Но из равенства $f'(\xi) = 0$ следует теперь, что $f(x_1) = f(x_2)$, а так как x_1, x_2 – произвольные, то тем самым следствие доказано. $\square$

Теорема Коши (обобщенная формула конечных приращений). *Пусть функции f и g*

a) *непрерывны на отрезке $[a, b]$;*

b) *дифференцируемы на интервале (a, b);*

c) *$g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.*

Тогда существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что справедливо равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $g(b) \neq g(a)$. В самом деле, если $g(b) = g(a)$, то, в силу теоремы Ролля, найдется точка $x \in (a,b)$, такая, что $g'(x) = 0$, а это противоречит условию теоремы.

Доказательство теоремы Коши, как и доказательство теоремы Лагранжа, сводится к применению теоремы Ролля. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = [f(x) - f(a)] - \lambda[g(x) - g(a)],$$

где параметр λ подберем так, чтобы было выполнено равенство $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, т. е. положим

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Тогда функция φ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, согласно которой существует точка $\xi \in (a,b)$, такая, что $\varphi'(\xi) = 0$, т. е.

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(\xi) = 0,$$

откуда следует утверждение теоремы Коши. $\square$

Замечание. Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$. Однако теорема Коши не есть прямым следствием теоремы Лагранжа. Именно, согласно теореме Лагранжа, найдутся такие точки $\xi_1 \in (a,b)$ и $\xi_2 \in (a,b)$, что $f(b)-f(a) = f'\left(\xi_1\right)(b-a)$ и $g(b)-g(a) = g'\left(\xi_2\right)(b-a)$, откуда получим

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'\left(\xi_1\right)}{g'\left(\xi_2\right)}.$$

Но в этом равенстве точки ξ_1 и ξ_2, вообще говоря, разные, а теорема Коши утверждает, что левая часть равна отношению производных, взятых в одной и той же точке из (a,b).

Определение. Говорят, что функция f дифференцируема на отрезке $[a, b]$, если она дифференцируема на интервале (a, b), а в точках a и b имеет производные справа и слева, соответственно.

Выше мы рассмотрели пример функции $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$, $f(0) = 0$, дифференцируемой на $[0, 1]$, но производная f' у которой при $1 < \alpha \leq 2$ разрывна. При этом, как мы видели, $f'(0) = 0$, но f' не имеет предела при $x \to 0+$. Это означает, что точка 0 является точкой разрыва производной II рода. Зададимся вопросом: может ли производная некоторой функции иметь разрыв первого рода? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема Дарбу. *Пусть функция f дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и c – любое число, заключенное между $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$. Тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что $f'(\xi) = c$.*

Доказательство. Пусть $f'_+(a) < c < f'_-(b)$. Так как

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

$$f'_-(b) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(b-h) - f(b)}{-h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(b) - f(b-h)}{h},$$

то найдется такое $h > 0$, что

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < c < \frac{f(b) - f(b-h)}{h}. \tag{5.3}$$

Зафиксируем это h и рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, определенную на $[a, b-h]$. В этих обозначениях неравенство (5.3) принимает такой вид: $\varphi(a) < c < \varphi(b-h)$. Но из непрерывности функции f следует также непрерывность φ, и поэтому, в силу теоремы Больцано – Коши о промежуточном значении, существует такая точка α, $a \leq \alpha \leq b-h$, что $c = \varphi(\alpha) = \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$. На отрезке $[\alpha, \alpha+h]$ к функции f применим теорему Лагранжа, согласно которой найдется такая точка $\xi \in (\alpha, \alpha+h)$, что $f(\alpha+h) - f(\alpha) = f'(\xi) \cdot h$. Из этого равенства следует, что $c = f'(\xi)$.

□

Замечание. Теорема Дарбу означает, что производная f' не может быть произвольной функцией. Свойство производной, которое гарантируется теоремой Дарбу, называется свойством промежуточных значений. Согласно этому свойству, у производной не может быть скачков или устранимых разрывов, т. е. разрывов I рода. Как было показано выше, разрывы II рода у производной могут быть.

5.6 Правила Лопиталя

Рассмотрим некоторые теоремы, позволяющие раскрывать неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при нахождении пределов $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, где f и g – дифференцируемые функции. Рассмотрим сначала простой случай. Пусть функции f и g дифференцируемые в точке a, $f(a)=g(a)=0$ и $g'(a)\neq 0$. Тогда $f(x)=f'(a)(x-a)+\overline{o}(x-a)$ и $g(x)=g'(a)(x-a)+\overline{o}(x-a)$, откуда получаем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)(x-a)+\overline{o}(x-a)}{g'(a)(x-a)+\overline{o}(x-a)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)+\frac{\overline{o}(x-a)}{x-a}}{g'(a)+\frac{\overline{o}(x-a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Это означает, что (при выполнении соответствующих условий) предел отношения функций равен отношению их производных.

5.6.1 Первая теорема Лопиталя

В только что рассмотренном случае мы предположили, что функции f и g дифференцируемы в точке a. Следующая теорема содержит правило раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ для случая, когда функции f и g имеют производные в проколотой окрестности точки a, а в самой точке a могут оказаться и недифференцируемыми.

Первая теорема Лопиталя. *Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале (a,b), $\lim_{x\to a+0}f(x)=0$, $\lim_{x\to a+0}g(x)=0$ и $g'(x)\neq 0$*

для всех $x \in (a, b)$. *Далее, пусть существует*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

где A *может быть конечным,* $+\infty$, $-\infty$ *или* ∞. *Тогда существует*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

и этот предел равен A.

Доказательство. Доопределим по непрерывности функции f и g в точке a, полагая $f(a) = g(a) = 0$. Тогда для любого $x \in (a, b)$, в силу теоремы Коши, найдется такая точка $\xi_x \in (a, x)$, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Если мы покажем, что из условий $\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ и $\xi_x \in (a, x)$ следует, что $\lim_{x \to a+0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = A$, то сразу получим, что и $\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Итак, осталось показать, что условие $\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ влечет равенство $\lim_{x \to a+0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = A$, где $\xi_x \in (a, x)$. Пусть A конечно. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что из условия $a < x < a + \delta$ следует неравенство

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon.$$

Но из $a < \xi_x < x$ следует также, что и $a < \xi_x < a + \delta$, и поэтому

$$\left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A \right| < \varepsilon.$$

Отсюда следует требуемое равенство

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = A.$$

Аналогично, с очевидными изменениями в форме записи, исчерпываются случаи $A = +\infty$, $A = -\infty$ и $A = \infty$. $\square$

Замечание. Теорема Лопиталя утверждает, что предел отношения функций равен пределу отношения производных, если последний существует. Однако может оказаться, что предел отношения функций существует, в то время, как предел отношения производных не существует, т. е. обратное теореме Лопиталя утверждение неверно. Приведем соответствующий пример.

Пример. Положим $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = x$. Ясно, что $\frac{f(x)}{g(x)} = x \sin \frac{1}{x} \to 0$ $(x \to 0)$. Но $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, $g'(x) = 1$, так что при $x \to 0$ отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не имеет предела, поскольку первое слагаемое в $f'(x)$ стремится к нулю, а $\cos \frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

5.6.2 Вторая теорема Лопиталя

Первая теорема Лопиталя предназначена для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Следующая теорема служит для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Вторая теорема Лопиталя. *Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале (a, b), $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a, b))$ и $\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a+0} g(x) = \infty$,*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

где A может быть конечным, $+\infty$, $-\infty$ или ∞. Тогда существует

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

и этот предел равен A.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай конечного A. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta > 0$, что для всех $\xi \in (a, a + \delta)$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Зафиксируем $y \in (a, a + \delta)$. Тогда для любого $x \in (a, y)$, в силу теоремы Коши, найдется такое $\xi \in (x, y)$, что

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Поскольку $\xi \in (a, a + \delta)$, то получаем

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Представим

$$\frac{f(x)}{g(x)} - A = \frac{f(y) - A\cdot g(y)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)\left[\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} - A\right].$$

Если y фиксировано, а $x \to a + 0$, то, т. к. $g(x) \to \infty$, имеем

$$\frac{f(y) - A\cdot g(y)}{g(x)} \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{g(y)}{g(x)} \to 0.$$

Значит, найдется такое $\delta_1 < \delta$, что для всех $x \in (a, a + \delta_1)$ справедливы неравенства

$$\left|\frac{f(y) - A\cdot g(y)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < 1.$$

Тогда получим, что для $x \in (a, a + \delta_1)$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

и тем самым завершается доказательство теоремы для $A \in \mathbb{R}$.

В случае $A = \infty$ представим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)\left[\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} - \frac{f(y)}{g(y) - g(x)}\right].$$

Зададим B и найдем такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (a, a + \delta)$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| > 4B.$$

Тогда для любых x, y, таких, что $a < x < y < a + \delta$, по теореме Коши, найдется $\xi \in (x, y)$, для которого

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)}\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| > 4B.$$

Так как $\frac{g(y)}{g(x)} \to 0$ и $\frac{f(y)}{g(y)-g(x)} \to 0$ при $x \to a + 0$, то найдется $\delta_1 < \delta$, такое, что при $x \in (a, a + \delta_1)$

$$\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \left|\frac{f(y)}{g(y) - g(x)}\right| < 2B.$$

Тогда для $x \in (a, a + \delta_1)$ получим

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| > \frac{1}{2}\left[\left|\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)}\right| - \left|\frac{f(y)}{g(y) - g(x)}\right|\right] \geq \frac{1}{2}[4B - 2B] = B,$$

и тем самым завершается рассмотрение случая $A = \infty$.

В случаях $A = +\infty$ и $A = -\infty$ изменения в доказательстве очевидны.

□

Замечание 1. Обе теоремы Лопиталя аналогичным образом могут быть доказаны для случаев $x \to b - 0$, $x \to x_0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и $x \to \infty$.

Замечание 2. Доказательство первой теоремы Лопиталя может быть получено аналогично доказательству второй теоремы Лопиталя. Мы рассмотрели более простое доказательство первой теоремы, которое неприменимо для доказательства второй теоремы, т. к. в условиях второй теоремы функции f и g нельзя доопределить по непрерывности в точке a, как это было сделано при доказательстве первой теоремы.

5.7 Производные высших порядков. Формула Тейлора

Пусть функция f определена на интервале (a, b). Предположим, что в каждой точке $x \in (a, b)$ у функции f существует производная $f'(x)$. Если функция f' в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ имеет производную, то ее называют второй производной функции f в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$. По индукции определяются и производные высших порядков. Именно, $f^{(k)}(x) = \left(f^{(k-1)}\right)'(x)$.

Определение. Для $k \in \mathbb{N}$ и отрезка $[a, b]$ через $C^k([a, b])$ обозначается совокупность всех функций f, определенных на $[a, b]$ и таких, что k-я производная $f^{(k)}$ непрерывна на $[a, b]$. При этом в точках a и b производные понимаются как односторонние.

5.7.1 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Напомним определение дифференцируемости. Дифференцируемой в точке x_0 мы называли такую функцию f, что в окрестности точки x_0 она представима в виде

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\overline{o}\left(x-x_0\right),$$

т. е. $f(x)=P_1(x)+\overline{o}\left(x-x_0\right)$, где $P_1(x)$ – многочлен первого порядка, а остаток $\overline{o}\left(x-x_0\right)$ мал по порядку по сравнению с $x-x_0$.

Поставим следующую задачу. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Можно ли функцию f в этой окрестности представить в виде суммы многочлена $P_n(x)$ степени не выше заданного натурального n и остатка $r_n(x)$, малого по сравнению с $\left(x-x_0\right)^n$, т. е. $r_n(x)=\overline{o}\left(\left(x-x_0\right)^n\right)\ \left(x\to x_0\right)$? Другими словами, мы хотим, чтобы имело место равенство

$$f(x)=P_n(x)+\overline{o}\left(\left(x-x_0\right)^n\right)\ \left(x\to x_0\right).$$

При $n=1$ это возможно, если функция f дифференцируема в точке x_0. Это сразу следует из определения дифференцируемости.

Лемма. *Пусть функция φ определена на интервале I и всюду на этом интервале имеет производную до порядка $n-1$ включительно, а в точке $x_0\in I$ имеет производную $\varphi^{(n)}\left(x_0\right)$, причем*

$$\varphi\left(x_0\right)=\varphi'\left(x_0\right)=\dots=\varphi^{(n)}\left(x_0\right)=0.$$

Тогда $\varphi(x)=\overline{o}\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$ при $x\to x_0$.

Доказательство. Применим индукцию по n. При $n=1$ из дифференцируемости φ в точке $x_0\in I$ получаем

$$\varphi(x)=\varphi\left(x_0\right)+\varphi'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\overline{o}\left(x-x_0\right),$$

а из условия леммы $\varphi\left(x_0\right)=\varphi'\left(x_0\right)=0$ следует, что $\varphi(x)=\overline{o}\left(x-x_0\right)$.

Предположим, что лемма верна для некоторого натурального n, и покажем, что она справедлива и для $n+1$. Итак, согласно предположению индукции, $\varphi(x)=\overline{o}\left(\left(x-x_0\right)^n\right)\ \left(x\to x_0\right)$ и $\varphi^{(n+1)}\left(x_0\right)=0$. Тогда, по теореме Лагранжа, $\varphi(x)-\varphi\left(x_0\right)=\varphi'(\xi)\left(x-x_0\right)$, где точка ξ находится между x и x_0. Обозначим $\psi(x)=\varphi'(x)$. Тогда, по предположению индукции,

$\psi(x_0)=\psi'(x_0)=\dots=\psi^{(n)}(x_0)=0$ и $\psi^{(n)}(x)=\overline{o}\left((x-x_0)^n\right)$. Поэтому

$$\frac{|\varphi(x)|}{|x-x_0|^{n+1}}=\frac{|\varphi'(\xi)|}{|x-x_0|^{n}}\le\frac{|\psi(\xi)|}{|\xi-x_0|^{n}}\to 0 \quad \text{при} \quad x\to x_0.$$

Это следует из предположения индукции и из того, что ξ находится между x и x_0. Таким образом, получили, что $\varphi(x)=\overline{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right)$. $\square$

Вернемся к нашей задаче представления функции f в виде

$$f(x)=P_n(x)+\overline{o}\left((x-x_0)^n\right).$$

Из доказанной леммы сразу следует, что если мы найдем многочлен $P_n(x)$, такой, что $P_n(x_0)=f(x_0)$, $P_n'(x_0)=f'(x_0)$, ..., $P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$, то функция $\varphi(x)=f(x)-P_n(x)$ будет удовлетворять условиям $\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=\dots=\varphi^{(n)}(x_0)=0$, и, в силу леммы, $\varphi(x)=\overline{o}\left((x-x_0)^n\right)$, т. е. наша задача будет решена, если мы найдем многочлен $P_n(x)$.

Многочлен $P_n(x)$ будем искать в виде

$$P_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\dots+c_n(x-x_0)^n,$$

т. е. по степеням $x-x_0$, где $c_0,c_1,\dots c_n$ – коэффициенты. Найдем производные многочлена P_n. Имеем

$$P_n(x_0)=c_0,$$

$$P_n'(x)=c_1+2c_2(x-x_0)+\dots+nc_n(x-x_0)^{n-1}, \quad P_n'(x_0)=c_1,$$

$$P_n''(x)=2c_2+3\cdot 2c_3(x-x_0)+\dots+n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2}, \quad P_n''(x_0)=2c_2,$$

$$P_n^{(k)}(x)=k(k-1)\dots 2\cdot 1c_k+(k+1)k\dots 2c_{k+1}(x-x_0)+\dots+$$

$$+n(n-1)\dots(n-k+1)c_n(x-x_0)^k, \quad P_n^{(k)}(x_0)=k!c_k \quad (k=0,1,\dots,n).$$

Таким образом, $P_n^{(k)}(x_0)=k!c_k$, откуда $c_k=\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}$. Итак, если мы хотим, чтобы при всех $k=0,1,\dots,n$ были выполнены равенства $f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0)$, то коэффициенты c_k многочлена $P_n(x)$ должны быть равными $c_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k=0,1,\dots,n)$, т. е.

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

В этом случае функция $\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$ удовлетворяет условиям леммы и, следовательно, $\varphi(x) = \overline{o}\left((x-x_0)^n\right)$, т. е. мы получим нужное представление

$$f(x) = P_n(x) + \overline{o}\left((x-x_0)^n\right).$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности I точки x_0 и имеет в этой окрестности производные до $(n-1)$-го порядка включительно, а в точке x_0 имеет производную n-го порядка. Тогда справедливо равенство*

$$f(x) =$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$
$$+\overline{o}\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Доказанное в этой теореме равенство называется формулой Тейлора с остатком в форме Пеано. Многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора функции f с центром в точке x_0, а последнее слагаемое в формуле Тейлора $\overline{o}\left((x-x_0)^n\right)$ – остатком формулы Тейлора в форме Пеано.

Докажем **единственность многочлена Тейлора.** Предположим, что существует два представления – $f(x) = P_n(x) + \overline{o}\left((x-x_0)^n\right)$ и $f(x) = Q_n(x) + \overline{o}\left((x-x_0)^n\right)$, где P_n и Q_n – многочлены степени не выше, чем n. Покажем, что $P_n \equiv Q_n$, т. е. коэффициенты многочленов P_n и Q_n совпадают. Имеем $P_n(x) - Q_n(x) = \overline{o}\left((x-x_0)^n\right)$, т. е. $R_n(x) \equiv P_n(x) - Q_n(x) = \overline{o}\left((x-x_0)^n\right)$, где степень R_n не превосходит n. Покажем, что все коэффициенты b_k многочлена $R_n(x) \equiv b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_n(x-x_0)^n$ равны нулю. Из равенства

$$b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_n(x-x_0)^n = \overline{o}\left((x-x_0)^n\right),$$

устремляя $x \to x_0$ и учитывая, что правая часть стремится к нулю, получаем, что $b_0 = 0$. Следовательно,

$$b_1 (x - x_0) + \dots + b_n (x - x_0)^n = \overline{o} ((x - x_0)^n) .$$

Разделив это равенство на $x - x_0$, получим

$$b_1 + b_2 (x - x_0) + \dots + b_n (x - x_0)^{n-1} = \overline{o} \left((x - x_0)^{n-1} \right) ,$$

откуда, устремляя $x \to x_0$, получим, что $b_1 = 0$. Продолжая этот процесс, получим, что $b_0 = b_1 = \dots = b_n = 0$, т. е. $R_n \equiv 0$, что и требовалось.

Замечание. Если функция f является многочленом степени n, то она совпадает со своим многочленом Тейлора порядка n и выше. В самом деле, если $f(x) = P_n(x)$, то для $m \geq n$ будем иметь

$$f(x) = P_n(x) = P_m(x) + 0 = P_m(x) + r_m(x),$$

где $r_m(x) = 0 = \overline{o} ((x - x_0)^m)$ $(x \to x_0)$. Значит, в силу единственности многочлена Тейлора, $P_m(x) \equiv P_n(x)$ – многочлен Тейлора.

Пример. Пусть $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Требуется построить формулу Тейлора для функции f порядка $n = 2$ в окрестности точки $x_0 = 1$. Можно было бы вычислить $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$ и построить многочлен Тейлора согласно общей формуле

$$P_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2,$$

и тогда получили бы

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 + r_2(x),$$

где $r_2(x) = f(x) - P_2(x) = \overline{o} \left((x - 1)^2 \right)$ $(x \to 1)$. На самом деле оказывается, что $r_2(x) \equiv 0$. Действительно, данный пример можно решить проще, если многочлен $x^2 - 3x + 1$ записать по степеням $x - 1$, т. е.

$$x^2 - 3x + 1 = ((x - 1) + 1)^2 - 3((x - 1) + 1) + 1 = -1 - (x - 1) + (x - 1)^2 \equiv P_2(x).$$

Справа мы получили многочлен по степеням $x-1$. Данная функция x^2-3x+1 представляет собой многочлен. В силу единственности, это и есть многочлен Тейлора для функции в окрестности точки $x_0=1$.

Упражнение. Сформулируйте условия, при которых формула Тейлора допускает обращение в следующем смысле. Если $f(x)=P_n(x)+\overline{o}\left((x-x_0)^n\right)$, то функция f дифференцируема в точке x_0 до порядка n включительно и $f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0)$. Другими словами, когда из равенства $\varphi(x)=\overline{o}\left((x-x_0)^n\right)$ следует, что $\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=\cdots=\varphi^{(n)}(x_0)=0$?

5.7.2 Разложения основных элементарных функций

Формулу Тейлора с центром в точке $x_0=0$ называют формулой Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\overline{o}\left(x^n\right)\quad(x\to 0).$$

Построим разложения некоторых функций по формуле Маклорена.

1. $f(x)=\mathrm{e}^x$, $f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$, $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$. Поэтому получаем

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\overline{o}\left(x^n\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+\overline{o}\left(x^n\right).$$

2. $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\sin x$. Теперь легко видеть, что $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$ $(k=0,1,\ldots)$. Поэтому

$$f^{(k)}(0)=\begin{cases}0, & k=2s,\ s=0,1,\ldots,\\ (-1)^s, & k=2s+1,\ s=0,1,\ldots.\end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$\sin x=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+$$

$$+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\frac{0}{(2n+2)!}x^{2n+2}+\overline{o}\left(x^{2n+2}\right)=$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\overline{o}\left(x^{2n+2}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\overline{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

3. $f(x)=\cos x$. Как и в предыдущем примере, легко убедиться в том, что $f^{(k)}(x)=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$ $(k=0,1,\dots)$. Отсюда

$$f^{(k)}(0)=\begin{cases}(-1)^s, & k=2s,\\ 0, & k=2s+1,\end{cases}$$

и тогда

$$\cos x=$$

$$=1+\frac{0}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\dots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\frac{0}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\overline{o}\left(x^{2n+1}\right)=$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\overline{o}\left(x^{2n+1}\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\overline{o}\left(x^{2n+1}\right).$$

4. Функция $f(x)=(1+x)^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ определена в окрестности нуля единичного радиуса. Имеем

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f'(0)=\alpha,$$

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\quad f''(0)=\alpha(\alpha-1),\dots,$$

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},\quad f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1).$$

Поэтому

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2++\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\overline{o}\left(x^n\right)=$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \overline{o}\,(x^n)\,.$$

В частности, если $\alpha = n$, то получим

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n,$$

т. е. формулу бинома Ньютона. Если же $\alpha = -1$, то

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \overline{o}\,(x^n)$$

– сумма геометрической прогрессии со знаменателем $-x$ и первым слагаемым, равным 1.

5. Функция $f(x) = \ln(1+x)$ определена в окрестности нуля радиуса 1. Имеем $f(0) = 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(0) = 2,$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(0) = -2\cdot 3, \dots,$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!,\ k = 1, 2, \dots$$

Отсюда имеем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \overline{o}\,(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \overline{o}\,(x^n)\,.$$

Пример 1. Вычислим предел

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

Используя равенства

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \overline{o}\left(x^2\right), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \overline{o}\left(x^4\right),$$

получаем

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \overline{o}\left(x^2\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \overline{o}\left(x^4\right)\right) - x - x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \overline{o}\left(x^3\right) - x - x^2}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. Вычислить предел

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

Поскольку $\sin x \ln\cos x \to 0$ $(x \to 0)$, то

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \mathrm{e}^{\sin x \ln\cos x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1 + \sin x \ln\cos x + \overline{o}(\sin x \ln\cos x))}{x^3}.$$

Воспользуемся следующими равенствами:

$$\overline{o}(\sin x \ln\cos x) = \overline{o}(x(\cos x - 1)) = \overline{o}\left(x^3\right),$$

$$\sin x = x + \overline{o}\left(x^2\right), \quad \ln\cos x = \ln(1 + (\cos x - 1)) =$$

$$= \cos x - 1 - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + \overline{o}\left((\cos x - 1)^2\right) = -\frac{x^2}{2} + \overline{o}\left(x^3\right).$$

Поэтому получим

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{-\left(x + \overline{o}\left(x^2\right)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + \overline{o}\left(x^3\right)\right) + \overline{o}\left(x^3\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + \overline{o}\left(x^3\right)}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

5.7.3 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Полученная нами формула Тейлора с остатком в форме Пеано позволяет определить лишь скорость стремления к нулю остатка при $x \to x_0$. Однако мы ничего не можем сказать об абсолютной величине остатка формулы Тейлора для конкретных значений x, и даже не имеем возможности оценить его. Во многих задачах требуется оценить погрешность приближения функции ее многочленом Тейлора. Такую возможность дает формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

Напомним формулировку теоремы Лагранжа. Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$. Можем считать, что в правой части этого равенства $f(a)$ – многочлен Тейлора нулевого порядка с центром в точке a, а $f'(\xi)(b - a)$ – остаток в формуле Тейлора для функции f, вычисленной в точке b. Эта формула позволяет оценить $|f(b) - f(a)|$, т. е. погрешность приближения значения функции $f(b)$ значением $f(a)$, через $|f'(\xi)| \cdot |b - a|$. Например, если $f(x) = \operatorname{arctg} x$, то

$$\operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} a + \frac{1}{1 + \xi^2}(b - a),$$

откуда сразу получаем, что

$$|\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a| \leq \frac{1}{1 + \xi^2}|b - a| \leq |b - a|.$$

Обобщением этих рассуждений на случай произвольного натурального n и есть формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

Теорема. *Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке непрерывные производные до порядка n включительно, а на интервале (a, b) существует производная $(n + 1)$-го порядка. Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что*

$$f(b) =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}.$$

Доказательство. Обозначим

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

– многочлен Тейлора функции f с центром в точке a. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - P_n(x) - \lambda(x - a)^{n+1}$, где число λ определяется из условия $\varphi(b) = 0$, т. е.

$$f(b) = P_n(b) + \lambda(b - a)^{n+1}. \tag{5.4}$$

Так как P_n – многочлен Тейлора функции f с центром в точке a, то производные функции f и многочлена P_n в точке a совпадают до порядка n включительно, т. е. $f^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(a)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Далее, для функции φ имеем $\varphi(a) = 0$,

$$\varphi'(x) = f'(x) - P_n'(x) - \lambda(n+1)(x-a)^n, \quad \varphi'(a) = 0,$$

$$\varphi''(x) = f''(x) - P_n''(x) - \lambda(n+1)n(x-a)^{n-1}, \quad \varphi''(a) = 0,$$

$$\varphi^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) - \lambda(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+2)(x-a)^{n-k+1}.$$

Итак, $\varphi^{(k)}(a) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Поскольку $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, то на $[a, b]$ к функции φ можно применить теорему Ролля, согласно которой существует такая точка $\xi_1 \in (a, b)$, что $\varphi'(\xi_1) = 0$. Далее, на $[a, \xi_1]$ к функции φ' снова можно применить теорему Ролля, согласно которой существует такая точка $\xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, b)$, что $(\varphi')'(\xi_2) = \varphi''(\xi_2) = 0$. Продолжая этот процесс, на n-м шаге получим такую точку $\xi_n \in (a, b)$, что $\varphi^{(n)}(\xi_n) = 0$. На отрезке $[a, \xi_n]$ функция $\varphi^{(n)}$ все еще удовлетворяет условиям теоремы Ролля, согласно которой найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что $\left(\varphi^{(n)}\right)'(\xi) = \varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Имеем

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \left(\varphi^{(n)}\right)'(x) = \left[f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x) - \lambda(n+1)!(x-a)\right]' =$$

$$= f^{(n+1)}(x) - 0 - \lambda(n+1)! \quad \text{и} \quad \varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \lambda(n+1)! = 0,$$

откуда $\lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. Подставив найденное значение λ в равенство (5.4), получим утверждение теоремы. $\square$

Замечание. В правой части доказанного в теореме равенства записан многочлен Тейлора функции f с центром в точке a, значение которого вычислено в точке b, а остаток $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ отличается от остальных слагаемых тем, что производная вычислена в точке $\xi \in (a, b)$. При $n = 0$ доказанная теорема обращается в теорему Лагранжа.

Пример 1. Для функции $f(x) = \mathrm{e}^x$ на $[0, x]$ $(x > 0)$ формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа принимает вид

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$ (θ зависит от x). Зафиксируем $x > 0$. Тогда для любого n остаток не превосходит $R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(n+1)!}x^{n+1}$ и, очевидно, $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Преимущество остатка в такой форме состоит в том, что мы можем оценить погрешность приближения

$$\mathrm{e}^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Она не превосходит

$$0 \le \mathrm{e}^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) \le \frac{\mathrm{e}^x}{(n+1)!}x^{n+1} \le \frac{3^{[x]+1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

В частности, при $x = 1$ получаем

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\mathrm{e}^\theta}{(n+1)!}, \quad \text{где} \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right).$$

Пример 2. Доказать неравенство $(x > 0)$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Для $f(x) = \sin x$, как было вычислено ранее, $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ $(k = 0, 1, \dots)$. Поэтому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\xi + \frac{\pi(2n+1)}{2}\right) \le$$

$$\le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \sin\left(\xi + \frac{\pi(2n-1)}{2}\right) \geq$$

$$\geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

5.8 Применение производных для исследования функций

5.8.1 Условия постоянства и монотонности

Условие постоянства. Функция f называется тождественно постоянной на интервале I, если для любых двух точек $x', x'' \in I$ справедливо равенство $f(x') = f(x'')$.

Если функция постоянна на интервале I, то она дифференцируема в каждой точке этого интервала и ее производная равна нулю. Обратно, если в каждой точке некоторого интервала I производная функции f равна нулю, то f постоянна на I. Последнее утверждение нами было получено как следствие из теоремы Лагранжа. Таким образом, функция f постоянна на интервале I тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ для любого $x \in I$.

Упражнение. Пусть непрерывная на интервале I функция f такова, что $f'(x) = 0$ для всех $x \in I$, за исключением, быть может, конечного числа точек. Докажите, что f постоянна на I.

Условия монотонности. Функция f называется монотонно возрастающей (неубывающей) на интервале I, если для любых $x, y \in I$ из условия $x < y$ следует, что $f(x) \leq f(y)$. Если из условия $x < y$ следует, что $f(x) < f(y)$, то f называется строго возрастающей. Если из $x < y$ следует $f(x) \geq f(y)$, то f называется убывающей (невозрастающей), а если из $x < y$ следует $f(x) > f(y)$, то f называется строго убывающей.

Теорема 1. *Пусть функция f дифференцируема на интервале I. Для того чтобы f была возрастающей на I, необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in I$ выполнялось неравенство $f'(x) \geq 0$.*

Доказательство. Если f возрастает, то $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ для любого $h > 0$ и, следовательно, $f'(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$.

Обратно, если $x < y$, то, по формуле конечных приращений (теореме Лагранжа), $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) \geq 0$, где $x < \xi < y$ и $f'(\xi) \geq 0$ по условию. $\square$

Замечание. Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$, то f монотонно возрастает на $[a, b]$. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1 и основано на применении теоремы Лагранжа.

Аналогично теореме 1 получаем, что справедлива

Теорема 1а. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале I функция f была убывающей, необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in I$ выполнялось неравенство $f'(x) \leq 0$.*

Достаточное условие строгой монотонности дает

Теорема 2. *Пусть функция f дифференцируема на интервале I и $f'(x) > 0$ для всех $x \in I$. Тогда f строго возрастает на I.*

Доказательство. По теореме Лагранжа, для $x < y$ имеем

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(x - y). \quad \square$$

Замечание. Обратное утверждение неверно. Из строгой монотонности функции f не следует, что $f'(x) > 0$. Например, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на $(-1, 1)$, но $f'(0) = 0$.

Теорема 2 а. *Пусть функция f дифференцируема на интервале I и $f'(x) < 0$ для всех $x \in I$. Тогда f строго убывает на I.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Пример. Докажем, что функция $f(x) = x - \sin x$ строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$. Имеем $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Отсюда уже следует, что f возрастает на $(-\infty, +\infty)$. Осталось показать, что f строго возрастает. Пусть $x < y$. Тогда

$$f(y) - f(x) = y - \sin y - x + \sin x = y - x - 2\sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{y+x}{2} \geq$$

$$\geq y - x - 2\left|\sin\frac{y-x}{2}\right|.$$

Так как $|\sin t| < |t|$ для всех $t \neq 0$, то

$$f(y) - f(x) \geq y - x - 2\left|\sin\frac{y-x}{2}\right| > y - x - 2\frac{y-x}{2} = 0,$$

т. е. $f(y) > f(x)$.

Аналогично тому, как была доказана теорема 2, легко показать, что справедлива

Теорема 3. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда f строго возрастает на $[a, b]$.*

Из этой теоремы легко получается

Следствие. *Пусть непрерывная на интервале I функция f такова, что $f'(x) > 0$ всюду, за исключением конечного числа точек. Тогда f строго возрастает на I.*

Пример. Для функции $f(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ имеем

$$f'(x) = \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) \geq 0.$$

Значит, f возрастает. Покажем, что f строго возрастает. Пусть $x < y$. Тогда на отрезке $[x, y]$ не более, чем в конечном числе точек производная f' обращается в нуль. В силу следствия, $f(x) < f(y)$.

Некоторые неравенства.

$$\textbf{1.}\quad \frac{2}{\pi}x < \sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Правое неравенство $\sin x < x$ $(x > 0)$ было доказано ранее. Докажем левое. Ранее было доказано, что $x < \operatorname{tg} x$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому для функции $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеем $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$, $\varphi'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} =$

$\frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0$. Значит, функция φ строго убывает на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, т. е. $\varphi(x) > \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$, а это равносильно тому, что $\frac{2}{\pi}x < \sin x$.

$$\mathbf{2.} \quad (1+x)^{\alpha} > 1 + \alpha x \ (x > 0,\ \alpha > 1).$$

Положим $\varphi(x) = (1+x)^{\alpha} - 1 - \alpha x$. Тогда $\varphi'(x) = \alpha\left[(1+x)^{\alpha-1} - 1\right] > 0$. Значит, функция φ строго возрастает, и поэтому $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$ при $x > 0$. Это равносильно требуемому неравенству.

$$\mathbf{3.} \quad (x+y)^p < x^p + y^p \ (0 < p < 1,\ x, y > 0).$$

Требуемое неравенство равносильно такому $(1+t)^p < 1 + t^p$, где $t = \frac{x}{y} > 0$. Положим $\varphi(t) = (1+t)^p - 1 - t^p$. Тогда $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(t) = p\left[(1+t)^{p-1} - t^{p-1}\right] < 0$. Значит, функция φ строго убывает, и поэтому $\varphi(t) < \varphi(0)$.

$$\mathbf{4.} \quad (x+y)^p > x^p + y^p \ (p > 1,\ x, y > 0).$$

Доказательство этого неравенства аналогично доказательству предыдущего.

5.8.2 Экстремумы

Определение. Пусть функция f определена на интервале I. Точка $x_0 \in I$ называется точкой локального максимума функции f, если существует такая окрестность $U_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$, что для всех $x \in U_\delta$ справедливо неравенство $f(x) \leq f(x_0)$. Если же $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in U_\delta \setminus \{x_0\}$, то точка x_0 называется точкой строгого локального максимума.

Аналогично, точка x_0 называется точкой локального минимума функции f, если существует такая окрестность $U_\delta \subset I$, что для всех $x \in U_\delta$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$. Если же $f(x) > f(x_0)$ для всех $x \in U_\delta \setminus \{x_0\}$, то точка x_0 называется точкой строгого локального минимума.

Точки локального максимума и локального минимума называют точками локального экстремума (или экстремальными точками).

Необходимое условие экстремума содержит теорема Ферма. Именно, теорема Ферма утверждает, что если в некоторой точке функция имеет экстремум и дифференцируема в этой точке, то производная в этой точке равна нулю. Таким образом, если в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ функция f имеет локальный экстремум, то либо $f'(x_0) = 0$, либо функция f в точке x_0 не имеет производной. Другими словами, локальный экстремум во внутренней точке области определения может быть (но не обязан быть) лишь в такой точке, где производная равна нулю, либо не существует.

Определение. Точки, в которых производная функции обращается в нуль, называются стационарными точками функции, а точки, в которых производная равна нулю, либо не существует, называются критическими точками функции.

Например, у функции $f(x) = x^2$ точка $x_0 = 0$ стационарная и в этой точке функция имеет минимум. У функции $f(x) = x^3$ точка $x_0 = 0$ стационарная, но экстремума в этой точке функция не имеет. У функции $f(x) = |x|$ точка $x_0 = 0$ критическая, но не стационарная, и в этой точке функция имеет минимум. То же для функции $f(x) = \sqrt{|x|}$. У функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ точка $x_0 = 0$ критическая, но не стационарная, экстремума в этой точке нет. Точка $x_0 = 0$ является критической (но не стационарной) для функции $f(x) = \operatorname{sign}^2 x$, и в этой точке функция имеет минимум.

Из этих примеров видно, что не каждая критическая точка является точкой экстремума.

Пример. Найти точки экстремума функции $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$.

Имеем $f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x \equiv \varphi(x)$. Очевидно, $f'(0) = 0$, так что 0 – критическая точка функции f. Покажем, что других критических точек у функции f нет. Так как $\varphi(0) = 0$, то из строгого возрастания функции φ на $[0, +\infty)$ будет следовать, что $\varphi(x) > 0$ для всех $x > 0$, а так как $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, то $\varphi(x) < 0$ при $x < 0$. Покажем, что φ строго возрастает на $[0, +\infty)$. Имеем

$$\varphi'(x) = \operatorname{ch} x - \cos x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \cos x \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 > 0$$

при $x > 0$. В самом деле, последнее неравенство следует из того, что $t + \frac{1}{t} > 2$ при $t > 0$, $t \neq 1$, где $t = e^x > 1$ при $x > 0$. Итак, $\varphi'(x) > 0$ на $(0, +\infty)$. Следовательно, φ строго возрастает на $[0, +\infty)$ и поэтому $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$ $(x > 0)$. Значит точка $x = 0$ – единственная критическая точка функции f. На $(0, +\infty)$ производная $f' > 0$, так что функция f строго возрастает на $[0, +\infty)$, т. е. $f(x) > f(0) = 0$ при $x > 0$. На $(-\infty, 0)$ производная $f' < 0$, так что функция f строго убывает на $(-\infty, 0)$, и поэтому $f(x) > f(0) = 0$ при $x < 0$. Итак, $f(x) > f(0)$ для любого $x \neq 0$. Следовательно, 0 – точка строгого минимума (единственная точка экстремума данной функции).

Теорема 1 (первое достаточное условие экстремума). *Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, и непрерывна в точке x_0. Тогда*

a) если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 – точка строгого минимума;

b) если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 – точка строгого максимума.

Доказательство. Ограничимся доказательством *a*). Пусть $x < x_0$. Применяя формулу конечных приращений (теорему Лагранжа) на $[x, x_0]$, получим $f(x_0) - f(x) = f'(\xi)(x_0 - x) < 0$, так как $x < \xi < x_0$ и $f'(\xi) < 0$. Если же $x > x_0$, то $f'(\xi) > 0$ для $x_0 < \xi < x$ и поэтому $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > 0$. Итак, $f(x) > f(x_0)$ при $x \neq x_0$, т. е. x_0 – точка строгого минимума. $\square$

Замечание 1. Если в условии на производные в теореме строгие неравенства заменить нестрогими, то получим достаточное условие нестрогого экстремума. Доказательство очевидное.

Комментарий. В условии a) теоремы говорят, что при переходе через точку x_0 производная меняет знак с $''-''$ на $''+''$, а в условии b) меняет знак с $''+''$ на $''-''$.

Теорема 2 (второе достаточное условие экстремума). *Пусть функция f определена на интервале I, точка $x_0 \in I$ и $f'(x_0) = 0$. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка строгого локального минимума функции f. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка строгого локального максимума функции f.*

Доказательство. Заметим, что из существования $f''(x_0)$ следует, что производная $f'(x)$ определена в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0. Имеем

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{f'(x_0 + h)}{h} > 0,$$

а значит, в некоторой полуокрестности $(x_0, x_0 + \delta_1)$ производная $f'(x) > 0$. Аналогично

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{f'(x_0 + h)}{h} > 0,$$

так что в некоторой полуокрестности $(x_0 - \delta_2, x_0)$ производная $f'(x) < 0$. Значит, при переходе через точку x_0 производная f' меняет знак с $''-''$ на $''+''$. Согласно первому достаточному условию экстремума, x_0 – точка строгого локального минимума.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. $\square$

Применение формулы Тейлора для нахождения экстремумов. Пусть функция f в некоторой окрестности точки $x_0 \in (a, b)$ имеет производные до $(n-1)$-го порядка, а в точке x_0 – производную порядка n. Тогда, как было показано выше, справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \overline{o}\left((x - x_0)^n\right).$$

Предположим, что $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \alpha(x)(x - x_0)^n,$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, или же

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right].$$

Так как $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то в достаточно малой окрестности точки x_0 знак выражения $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)$ совпадает со знаком первого слагаемого. Таким образом, знак разности $f(x) - f(x_0)$ в достаточно малой окрестности точки x_0 определяется знаком произведения $(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0)$. Если n – четное число, то при переходе через точку x_0 множитель $(x - x_0)^n$ не меняет знака, т. е. знак разности $f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$. При $f^{(n)}(x_0) < 0$ имеем $f(x) < f(x_0)$, т. е. x_0 – точка строгого локального максимума, а при $f^{(n)}(x_0) > 0$ имеем $f(x) > f(x_0)$, т. е. x_0 – точка строгого локального минимума. Если же n – нечетное число, то при переходе через точку x_0 выражение $(x - x_0)^n$ меняет знак и, следовательно, выражение $(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0)$ также меняет знак при переходе через точку x_0. Это означает, что при переходе через точку x_0 меняет знак разность $f(x) - f(x_0)$, т. е. в точке x_0 функция f не имеет экстремума.

Итак, доказали следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть функция f определена на интервале I, точка $x_0 \in I$. Пусть, далее,*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда, если n нечетно, то x_0 не является точкой экстремума. Если же n четно, то

a) если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка строгого локального минимума;

b) если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка строгого локального максимума.

Пример. Выше мы уже рассматривали пример функции $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$. Имеем

$$f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x, \quad f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x, \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = \operatorname{sh} x + \sin x, \quad f'''(0) = 0,$$

$$f^{(4)}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x, \quad f^{(4)}(0) = 2 > 0.$$

Следовательно, 0 – точка локального строгого минимума функции f.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке (глобальные экстремумы). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Согласно второй теореме Вейерштрасса, функция f достигает своих наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке. Точки, в которых эти значения достигаются, называются точками глобального экстремума. Точка, в которой достигается наибольшее значение, может быть внутренней, т. е. принадлежать интервалу (a, b), либо совпадать с одной из двух a или b. Если это внутренняя точка, то она является точкой локального экстремума функции f. Выше мы рассмотрели ряд условий, позволяющих находить точки локального экстремума. Таким образом, чтобы найти глобальное наибольшее значение функции f на отрезке $[a, b]$, нужно найти ее точки локального максимума на интервале (a, b), добавить к ним точки a и b и из полученного набора точек выбрать ту, в которой значение функции наибольшее. Такое значение существует в силу второй теоремы Вейерштрасса.

Аналогично, для того чтобы найти глобальное наименьшее значение непрерывной функции f на отрезке $[a, b]$, нужно к точкам локального минимума добавить точки a и b, а затем среди полученного набора точек выбрать ту, в которой значение функции наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = (x-2)^2(x+1)^3$ на отрезке $[0, 3]$.

Имеем $f'(x) = (x-2)(x+1)^2(5x-4)$. Решениями уравнения $f'(x) = 0$, принадлежащими $[0, 3]$, являются значения $x = 2$ и $x = \frac{4}{5}$. Вычислим $f(0) = 4$, $f(3) = 64$, $f(2) = 0$, $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2^2 \cdot 9^4}{5^5} \approx 2,1$. Значит, наибольшее значение функции равно $f(3) = 64$, а наименьшее – $f(2) = 0$.

5.8.3 Выпуклые функции и точки перегиба

Определение. Определенная на интервале I функция f называется выпуклой (выпуклой вниз) на I, если для любых $x', x'' \in I$ и любого числа λ $(0 < \lambda < 1)$ выполняется неравенство

$$f\left(\lambda x' + (1-\lambda)x''\right) \le \lambda f\left(x'\right) + (1-\lambda) f\left(x''\right).$$

С геометрической точки зрения смысл выпуклости состоит в том, что все точки дуги графика функции $y = f(x)$ расположены не выше хорды, соединяющей концы этой дуги. Действительно, отрезок, соединяющий точки $(x', f(x'))$ и $(x'', f(x''))$, имеет вид

$$l(x) = f\left(x'\right) + \frac{f\left(x''\right) - f\left(x'\right)}{x'' - x'}\left(x - x'\right).$$

При $0 < \lambda < 1$ точка $x = \lambda x' + (1-\lambda)x''$ принадлежит интервалу с концами x' и x''. При этом неравенство, определяющее понятие выпуклости, принимает такой вид: $f(x) \le l(x)$.

Обозначим $x = \lambda x' + (1-\lambda)x''$. Тогда $\lambda = \frac{x''-x}{x''-x'}$, $1 - \lambda = \frac{x-x'}{x''-x'}$. Поэтому определение выпуклости можно переписать в таком виде: функция f называется выпуклой на интервале I, если для любых точек $x', x'' \in I$, таких, что $x' < x''$, и для любого $x \in [x', x'']$ справедливо неравенство

$$f(x) \le f\left(x'\right)\frac{x''-x}{x''-x'} + f\left(x''\right)\frac{x-x'}{x''-x'}.$$

Если в определении выпуклости нестрогое неравенство заменить строгим, то получим определение строгой выпуклости вниз. С геометрической точки зрения строгая выпуклость означает, что, кроме выпуклости, график функции не содержит линейных отрезков.

Пример 1. Функция $f(x) = x$, очевидно, выпукла вниз на всей числовой прямой.

Пример 2. Пусть $f(x) = x^2$. Выберем произвольные $x' < x''$. Тогда для $0 < \lambda < 1$ имеем

$$\left(\lambda x' + (1-\lambda)x''\right)^2 = \lambda^2 x'^2 + 2\lambda(1-\lambda)x'x'' + (1-\lambda)^2 x''^2 =$$

$$= \lambda x'^2 + (1-\lambda)x''^2 + x'^2\left(\lambda^2 - \lambda\right) + x''^2\left[(1-\lambda)^2 - (1-\lambda)\right] + 2\lambda(1-\lambda)x'x'' =$$

$$= \lambda x'^2 + (1-\lambda)x''^2 - \left[\lambda(1-\lambda)x'^2 + \lambda(1-\lambda)x''^2 - 2\lambda(1-\lambda)x'x''\right] =$$

$$= \lambda x'^2 + (1-\lambda)x''^2 - \lambda(1-\lambda)\left(x' - x''\right)^2 < \lambda x'^2 + (1-\lambda)x''^2.$$

Это означает, что функция $f(x) = x^2$ строго выпукла вниз на $(-\infty, +\infty)$.

Определение. Заданная на интервале I функция f называется вогнутой (выпуклой вверх) на этом интервале, если для любых $x', x'' \in I$ и для любого λ $(0 < \lambda < 1)$ справедливо неравенство

$$f\left(\lambda x' + (1-\lambda)x''\right) \geq \lambda f\left(x'\right) + (1-\lambda)f\left(x''\right).$$

Ясно, что если f выпукла вниз, то функция $-f$ выпукла вверх. Поэтому достаточно изучить свойства лишь выпуклых вниз (т. е. выпуклых) функций.

Теорема 1. *Пусть функция f выпукла на интервале I. Тогда f непрерывна на I и в каждой точке имеет конечные левую и правую производные.*

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0 \in I$. Из существования конечных односторонних производных $f'_-\left(x_0\right)$ и $f'_+\left(x_0\right)$ следует непрерывность f в точке x_0.

Докажем, что существует $f'_+\left(x_0\right)$. Пусть $0 < h_1 < h_2$ таковы, что $x_0 + h_2 \in I$. Тогда, в силу выпуклости f,

$$f\left(x_0 + h_1\right) \leq f\left(x_0\right)\frac{h_2 - h_1}{h_2} + f\left(x_0 + h_2\right)\frac{h_1}{h_2},$$

откуда

$$\frac{f\left(x_0 + h_1\right) - f\left(x_0\right)}{h_1} \leq \frac{f\left(x_0 + h_2\right) - f\left(x_0\right)}{h_2}.$$

Это неравенство означает, что функция $\varphi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ убывает при убывании h к нулю справа. Покажем, что φ ограничена снизу. Пусть $\delta > 0$ такое, что $x_0 - \delta \in I$. Тогда, в силу выпуклости f, для любого $h > 0$

$$f\left(x_0\right) \leq f\left(x_0 - \delta\right)\frac{h}{h+\delta} + f\left(x_0 + h\right)\frac{\delta}{h+\delta},$$

откуда

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - \delta)}{\delta} \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \varphi(h),$$

т. е. для любого $h > 0$ справедливо неравенство

$$\varphi(h) \geq \frac{f(x_0) - f(x_0 - \delta)}{\delta},$$

т. е. $\varphi(h)$ ограничена снизу.

Итак, функция $\varphi(h)$ при убывающем h, стремящемся к нулю справа, убывает и ограничена снизу. Следовательно, существует

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \varphi(h).$$

Аналогично можно показать, что существует $f'_-(x_0)$. $\square$

Замечание. Из выпуклости функции не следует ее дифференцируемость. Например, функция $f(x) = |x|$ выпукла, но не дифференцируема в нуле. Теорема 1 утверждает, что у выпуклой функции существуют лишь односторонние производные. Анализируя доказательство теоремы 1, легко установить, что для выпуклой вниз функции f в каждой точке x_0 справедливо неравенство $f'_+(x_0) \geq f'_-(x_0)$. Можно доказать, что выпуклая функция дифференцируема всюду, за исключением, быть может, не более чем счетного множества точек.

Теорема 2. *Пусть функция f выпукла вниз на интервале (a, b), где $-\infty < a < b < +\infty$. Тогда f ограничена снизу.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется последовательность точек $x_n \in (a, b)$, таких, что $f(x_n) < -n$. Так как $\{x_n\}$ ограниченная последовательность, то можем выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $x_0 = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$. Точка $x_0 \in [a, b]$ (она не обязана принадлежать (a, b)). Тогда либо слева от x_0, либо справа от x_0 найдется бесконечно много элементов нашей подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, из которой можно выделить монотонную подпоследовательность. Обозначим ее через $\{y_k\}_{k \geq 0}$. Рассмотрим случай, когда $\{y_k\}$ возрастает. Пусть $f(y_k) = -m_k \to -\infty$ при $k \to \infty$. Обозначим $z_0 = \frac{1}{2}(y_0 + x_0) \in (a, b)$. Тогда, начиная с некоторого номера N, будем иметь $z_0 \in [y_0, y_n]$ при $n \geq N$.

В силу выпуклости f, для $n \geq N$ получаем

$$f\left(z_0\right) \leq f\left(y_0\right) \frac{y_n - z_0}{y_n - y_0} + f\left(y_n\right) \frac{z_0 - y_0}{y_n - y_0}.$$

Поскольку правая часть этого неравенства стремится к $-\infty$ при $n \to \infty$, то получаем противоречие с тем, что значение $f\left(z_0\right)$ конечно. $\square$

Замечание. Выпуклая вниз на ограниченном интервале функция не обязана быть ограниченной сверху. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ выпукла вниз на $(0, 1)$ и неограничена сверху на этом интервале.

Также выпуклая вниз на неограниченном интервале функция не обязана быть ограниченной снизу. Например, функция $f(x) = \ln \frac{1}{x}$ выпукла вниз на $(0, +\infty)$ и неограничена снизу.

Теорема 3 (критерий выпуклости дифференцируемой функции). *Пусть функция f дифференцируема на интервале I. Для того чтобы f была выпуклой вниз на I, необходимо и достаточно, чтобы ее производная f' была возрастающей на I.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_1 < x < x_2$. Тогда, как было показано при доказательстве теоремы 1, выпуклость функции f равносильна такому неравенству:

$$\frac{f(x) - f\left(x_1\right)}{x - x_1} \leq \frac{f\left(x_2\right) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{5.5}$$

Устремляя $x \to x_1 + 0$, получаем

$$f'\left(x_1\right) = f'_+\left(x_1\right) = \lim_{x \to x_1 + 0} \frac{f(x) - f\left(x_1\right)}{x - x_1} \leq \frac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1}.$$

С другой стороны, если устремим $x \to x_2 - 0$, то получим

$$f'\left(x_2\right) = f'_-\left(x_2\right) = \lim_{x \to x_2 - 0} \frac{f\left(x_2\right) - f(x)}{x_2 - x} \geq \frac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1}.$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$f'\left(x_1\right) \leq f'\left(x_2\right).$$

Достаточность. Пусть $x_1 < x < x_2$. Так как выпуклость f равносильна (5.5), то достаточно показать, что справедливо неравенство (5.5).

По теореме Лагранжа,

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(\xi_2),$$

где $x_1<\xi_1<x<\xi_2<x_2$, т. е. $\xi_1<\xi_2$. Отсюда следует (5.5). $\square$

Замечание. При доказательстве достаточности мы получили, что $\xi_1<\xi_2$. Если производная f' строго возрастает на I, то $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$, откуда следует

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Это означает, что функция f выпукла строго. Справедливо также и обратное, т. е. из строгой выпуклости дифференцируемой функции следует, что ее производная f' строго возрастает. Действительно, в силу доказанной теоремы 3, из строгой выпуклости f, в силу теоремы Лагранжа, следует неравенство

$$f'(x_1)\leq f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(\xi_2)\leq f'(x_2),$$

где $x_1<x<x_2$ – произвольные точки из I, а точки $\xi_1\in(x_1,x)$, $\xi_2\in(x,x_2)$. Отсюда следует, что $f'(x_1)<f'(x_2)$.

Теорема 4 (критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции). *Пусть функция f дважды дифференцируема на интервале I. Для того чтобы f была выпуклой вниз на I, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство $f''(x)\geq 0$ $(x\in I)$.*

Эта теорема мгновенно вытекает из теоремы 3 и критерия монотонности дифференцируемой функции, примененного к f'.

Замечание. Если в условии теоремы 4 производная $f''>0$, то f' строго возрастает, и поэтому, в силу замечания к теореме 3, функция f строго выпукла на I. Обратное, однако, неверно. Из строгой выпуклости f не следует, что $f''>0$. Например, функция $f(x)=x^4$ строго выпукла на $(-\infty,+\infty)$, однако $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$ и $f''(0)=0$.

Пример 1. Пусть $f(x)=x^\alpha$ $(0<x<+\infty)$. Тогда $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, $f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Если $\alpha\in(0,1)$, то $f''(x)<0$ и f вогнута (выпукла вверх). Если $\alpha\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$, то $f''(x)>0$ и f выпукла вниз.

Пример 2. Для функции $f(x) = \sin x$ имеем $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. При $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ имеем $f''(x) < 0$, т. е. f выпукла вверх, а при $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$ имеем $f''(x) > 0$, т. е. f выпукла вниз.

Точки перегиба. Точкой перегиба называется такая точка графика функции $y = f(x)$, которая разделяет его выпуклую и вогнутую части.

Определение. Пусть функция f определена на интервале (a, b) и точка $x_0 \in (a, b)$. Если на (a, x_0) функция f выпукла, а на (x_0, b) – вогнута, или на (a, x_0) f вогнута, а на (x_0, b) – выпукла, то точка $(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба функции f.

Если существует $f''(x_0)$ и $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$. Действительно, существование $f''(x_0)$ предполагает существование $f'(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. Если при переходе через точку x_0 функция f меняет характер выпуклости, то, согласно теореме 3, при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет характер монотонности. Значит, в точке x_0 производная $f'(x)$ имеет экстремум, откуда, в силу теоремы Ферма, $f''(x_0) = 0$.

Однако условие $f''(x_0) = 0$ не означает, что $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба функции f. Например, для функции $f(x) = x^4$ имеем $f''(0) = 0$, но в точке $(0, 0)$ перегиба нет.

Достаточным условием перегиба для дважды дифференцируемой функции является условие сохранения знака второй производной f'' слева от x_0, справа от x_0 и его изменения при переходе через точку x_0.

Теорема 5. *Пусть функция f определена на интервале I и точка $x_0 \in I$. Пусть, далее, существует $f''(x)$ $(x \in I)$, $f''(x_0) = 0$ и $f''(x) \le 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) \ge 0$ при $x > x_0$. Тогда $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба, и при переходе через точку x_0 функция меняет характер выпуклости с выпуклости вверх на выпуклость вниз.*

Эта теорема является следствием теоремы 3.

5.9 Исследование функций и построение графиков

Приведем примерную схему исследования функции.

1. Находим область определения $D(f)$ функции, исследуем f на четность и периодичность.

a) Функция f называется четной, если для любого $x \in D(f)$ выполнены два условия: $-x \in D(f)$ и $f(-x) = f(x)$. Функция f называется нечетной, если для любого $x \in D(f)$ выполнены два условия: $-x \in D(f)$ и $f(-x) = -f(x)$.

b) Функция f называется периодической, если существует такое $T > 0$, что для всех $x \in D(f)$ $x + T \in D(f)$, $x - T \in D(f)$ и $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.

2. Находим точки пересечения с осями координат, множества, на которых функция сохраняет знак.

3. Находим асимптоты графика функции.

a) Прямая $kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$. Значения k и b в уравнении асимптоты определяются равенствами

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx),$$

причем существование этих пределов равносильно существованию асимптоты. Аналогично определяется асимптота при $x \to -\infty$.

b) Вертикальная прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой функции f, если $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty$, или $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty$.

4. Исследуем функцию на непрерывность и характеризуем ее точки разрыва.

5. С помощью первой производной находим промежутки монотонности функции и точки экстремума.

6. С помощью второй производной исследуем характер выпуклости функции на различных промежутках и находим точки перегиба.

6. Неопределенный интеграл

6.1 Определение и простейшие свойства неопределенного интеграла

Пусть функция f дифференцируема в некоторой точке x. Тогда, согласно определению дифференцируемости и свойствам производной, справедливо равенство

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + \overline{o}\,(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0).$$

Левая часть этого равенства называется приращением функции f в точке x, соответствующим приращению Δx независимой переменной в точке x, и обозначается $\Delta f \equiv \Delta f\,(x) = f\,(x+\Delta x) - f\,(x)$. Таким образом, приращение $\Delta f\,(x)$ дифференцируемой в точке x функции f состоит из двух слагаемых: $f'(x)\,\Delta x$ и $\overline{o}\,(\Delta x)$. При этом главную часть этого приращения составляет первое слагаемое (за исключением случая, когда $f'(x) = 0$). Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение. Пусть функция f дифференцируема в точке x. Линейная функция $dy = f'(x)\;dx$ переменной dx называется дифференциалом функции f в точке x и обозначается

$$df\,(x) = f'(x)\;dx.$$

Если в определении дифференциала переменную x считать зависимой от другой переменной $x = x(t)$, то для функции $g(t) = f(x(t))$ будем иметь

$$df(x) = df(x(t)) = dg(t) = g'(t)dt = f'(x(t))x'(t)dt = f'(x)dx.$$

Получили, что форма дифференциала функции не зависит от того, является ли переменная x зависимой, или независимой. Это свойство называется инвариантностью формы дифференциала.

Свойства дифференциала определяются свойствами производных и правилами дифференцирования. Например,

$$d(uv)(x) = (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\ dx = u(x)\,dv(x) + v(x)\,du(x),$$

или, короче,

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Аналогично имеем

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

В дальнейшем при изучении функций многих переменных мы остановимся на понятии дифференциала более подробно.

Напомним, что функция f называется дифференцируемой на интервале, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

Определение. Пусть функция f определена на интервале I. Если существует функция F, дифференцируемая на интервале I и такая, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$, то функция F называется первообразной (или примитивной) для функции f на этом интервале.

Например, $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$, $F(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ $(-\infty < x < +\infty)$.

Если для функции f существует одна первообразная, то существует бесконечно много первообразных. Действительно, каждая функция вида $F(x) + C$, где C – постоянная, также является первообразной, поскольку $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Ниже будет доказана следующая

Теорема. *Каждая непрерывная на интервале функция имеет первообразную на этом интервале.*

Пример. Пусть $f(x) = |x|$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Тогда $F(x) = \frac{x^2}{2}$ при $x > 0$ и $F(x) = -\frac{x^2}{2}$ при $x < 0$. Легко проверить, что для функции $F(x) = \frac{x^2}{2}\operatorname{sign} x$ $(-\infty < x < +\infty)$ справедливо также равенство $F'(0) = 0 = |0| = f(0)$, так что F – первообразная для f.

Теорема. *Если функция f имеет первообразную на интервале I, то разность двух любых ее первообразных тождественно постоянна на этом интервале.*

Доказательство. Пусть $F_1,\ F_2$ – две первообразные для функции f. Тогда $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$. Отсюда следует, что для всех $x \in I$ справедливо равенство $(F_1 - F_2)'(x) = 0$. Поэтому, в силу следствия из теоремы Лагранжа, разность $F_1 - F_2$ – тождественно постоянная функция, что и требовалось доказать. □

Из этой теоремы следует, что все первообразные можно описать равенством $F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных.

Определение. Совокупность всех первообразных функции f называется неопределенным интегралом от функции f и обозначается $\int f(x)dx$. При этом сама функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением.

Как было сказано выше, если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, то справедливо следующее равенство:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – постоянная.

Операция нахождения первообразных называется интегрированием. Отметим, что определение первообразной не является конструктивным, как, например, определение производной. Действительно, в определении производной дается правило ее вычисления, а в определении первообразной – только свойство, которым она должна обладать. Такое определение называется дескриптивным.

Простейшие свойства неопределенного интеграла.

1. *Если функция F дифференцируема на интервале I, то*

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Это сразу следует из определения первообразной.

2. *Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $\int g(x)dx = G(x) + C$, то $\int[f(x) + g(x)]dx = F(x) + G(x) + C$, или, что то же самое,*

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Действительно, при наших предположениях имеет место равенство

$$(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x).$$

3. *Если* $\int f(x)dx = F(x)+C$, *то для любого действительного числа* $\alpha \neq 0$ $\int[\alpha f(x)]dx = \alpha F(x)+C$, *или, что то же самое,*

$$\int[\alpha f(x)]dx = \alpha \int f(x)dx.$$

Это равенство очевидно следует из определения. Заметим, что при $\alpha = 0$ оно неверно по той причине, что в левой его части совокупность всех постоянных, а в правой – тождественный нуль.

4. *Если* $\int f(t)dt = F(t)+C$, *то для любого* $a \neq 0$ *и для любого* b

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Действительно,

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b).$$

Например,

$$\int \cos(2x+3)dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3)+C.$$

6.2 Интегрирование по частям и замена переменной

Теорема (формула интегрирования по частям). *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *дифференцируемы на интервале* I. *Если одна из функций* $u(x)v'(x)$ *или* $u'(x)v(x)$ *имеет первообразную на интервале* I, *то на этом интервале имеет первообразную и другая функция, причем справедливо равенство*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx. \tag{6.1}$$

Доказательство сразу следует из правила дифференцирования произведения. Действительно, пусть $u(x)v'(x)$ имеет первообразную. Тогда, по правилу дифференцирования произведения, имеем

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Отсюда получаем, что $u'(x)v(x)$ является разностью двух производных функций, т. е. разностью двух функций, имеющих первообразные. Поэтому она сама также является производной, т. е. имеет первообразную, и справедливо равенство (6.1). $\square$

Замечание 1. Коротко правило интегрирования по частям может быть записано так:

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du.$$

Действительно, в этой записи используется формула для вычисления дифференциала функции $du(x) = u'(x)dx$.

Замечание 2. Если одна из функций дифференцируема, а другая имеет первообразную, то их произведение (производной на функцию, имеющую первообразную) не обязано иметь первообразную. Такой пример приводится сразу после этого замечания. Поэтому в формулировке теоремы нужно предполагать наличие первообразной у одной из функций $u'(x)v(x)$ или $u(x)v'(x)$.

Утверждение. *Существуют дифференцируемая функция u и имеющая первообразную функция v, такие, что $u'v$ не имеет первообразной.*

Доказательство. Достаточно показать, что квадрат функции, имеющей первообразную, может не иметь первообразной.

Положим $f(x) = |x|^\alpha \sin\frac{1}{x},\ x \neq 0,\ f(0) = 0$. При $\alpha > 1$ функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$ и ее производная равна

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha|x|^{\alpha-1}\sin\frac{1}{|x|} - |x|^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Поскольку функция $\alpha|x|^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} \equiv \varphi(x)\ (x \neq 0),\ \varphi(0) = 0$ непрерывна на

$\mathbb{R}$, а значит, имеет первообразную на $\mathbb{R}$, то функция

$$v(x) \equiv |x|^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} = \varphi(x) - f'(x) \quad (x \neq 0), \quad v(0) = 0,$$

имеет первообразную на $\mathbb{R}$ как разность двух функций – $\varphi(x)$ и $f'(x)$, имеющих первообразные на $\mathbb{R}$.

Покажем, что при надлежащем выборе числа $\alpha > 1$ функция $v^2(x)$ не имеет первообразной на $\mathbb{R}$. Предположим противное. Пусть существует такая дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция F, что для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$F'(x) = v^2(x) = |x|^{2(\alpha-2)} \cos^2 \frac{1}{x}, \quad (x \neq 0), \quad F'(0) = 0.$$

Для $k = 1, 2, \ldots$ обозначим

$$[a_k, b_k] = \left[\frac{4}{(4k+1)\pi}, \frac{4}{(4k-1)\pi}\right].$$

Если $x \in [a_k, b_k]$, то

$$\frac{1}{x} \in \left[\frac{(4k-1)\pi}{4}, \frac{(4k+1)\pi}{4}\right],$$

$$\frac{2}{x} \in \left[\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right] = \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right].$$

Поэтому для $x \in [a_k, b_k]$ имеем

$$\cos^2 \frac{1}{x} = \frac{1 + \cos \frac{2}{x}}{2} \geq \frac{1}{2},$$

так что $F'(x) \geq \frac{1}{2} x^{2(\alpha-2)}$, $x \in [a_k, b_k]$. По теореме Лагранжа получим

$$F(b_k) - F(a_k) = F'(\xi_k)(b_k - a_k) \geq \frac{1}{2} \xi_k^{2(\alpha-2)} (b_k - a_k) \geq \frac{b_k - a_k}{2} b_k^{2(\alpha-2)},$$

где $\xi_k \in [a_k, b_k]$, а число $\alpha > 1$ будет выбрано так, что $\alpha < 2$. Отсюда получим

$$F(a_k) \leq F(b_k) - \frac{b_k - a_k}{2} b_k^{2(\alpha-2)}.$$

Заметим, что отрезки $[a_k, b_k]$ попарно не пересекаются и, так как $F'(x) \geq 0$, то функция F не убывает. Значит,

$$F(b_{k+1}) \leq F(a_k) \leq F(b_k) - \frac{b_k - a_k}{2} b_k^{2(\alpha-2)}.$$

Отсюда следует, что

$$F(b_{k+1}) \le F(b_1) - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k}(b_s - a_s)\, b_s^{2(\alpha-2)}. \tag{6.2}$$

Оценим последнюю сумму справа. Имеем

$$b_s - a_s = \frac{8}{\pi}\frac{1}{(4s+1)(4s-1)},$$

так что

$$\sum_{s=1}^{k}(b_s - a_s)\, b_s^{2(\alpha-2)} = c_s\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{(4s+1)(4s-1)}\left(\frac{1}{4s-1}\right)^{2(\alpha-2)} \ge c_s'\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{s^{2\alpha-2}}.$$

Если $2\alpha - 2 \le 1$, т. е. $\alpha \le \frac{3}{2}$, то $\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{s^{2\alpha-2}} \to \infty$ $(k \to \infty)$. Поэтому из (6.2) следует, что $F(b_{k+1}) \to -\infty$ при $k \to \infty$. Но поскольку $b_{k+1} \to +0$ $(k \to \infty)$, то это противоречит непрерывности функции F в точке $x_0 = 0$ справа, которая вытекает из дифференцируемости функции F в нуле. $\square$

Примеры.

1. $\int x\mathrm{e}^x dx = \begin{bmatrix} u = x, & dv = \mathrm{e}^x dx \\ du = dx, & v = \mathrm{e}^x \end{bmatrix} = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x dx = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$

2. $\int x\cos x\ dx = \begin{bmatrix} u = x, & dv = \cos x\ dx \\ du = dx, & v = \sin x \end{bmatrix} =$

$$= x\sin x - \int \sin x\ dx = x\sin x + \cos x + C.$$

3. $\int x\ln x\ dx = \begin{bmatrix} u = \ln x, & dv = x\ dx \\ du = \frac{dx}{x}, & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\ dx =$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Следующий пример показывает такой способ применения формулы интегрирования по частям, когда в правой части появляется такой же интеграл, как и в левой части. Тогда искомый интеграл может быть найден из полученного равенства.

4. $\int e^x \cos x\ dx = \left[\begin{array}{ll} u = e^x, & dv = \cos x\ dx \\ du = e^x dx, & v = \sin x \end{array}\right] = e^x \sin x - \int e^x \sin x\ dx =$

$$= e^x \sin x - \left[\begin{array}{ll} u = e^x, & dv = \sin x\ dx \\ du = e^x dx, & v = -\cos x \end{array}\right] = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx.$$

Из этого равенства находим

$$\int e^x \cos x\ dx = \frac{e^x}{2}\,[\sin x + \cos x] + C.$$

Теорема (о замене переменной в интеграле). *Пусть функция* f *имеет первообразную на интервале* I, *т. е.*

$$\int f(t)dt = F(t) + C.$$

Пусть, далее, функция φ *дифференцируема на интервале* Δ *и* $\varphi(\Delta) \subset I$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Доказательство. Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x). \quad \square$$

Примеры.

1. $\int \sin^3 x\ dx = \int \sin x(1 - \cos^2 x)dx = \left[\begin{array}{ll} \cos x = t, & dt = -\sin x\ dx \end{array}\right] =$

$$= \int (t^2 - 1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

2. $\int \frac{dx}{1+e^x} = \left[\begin{array}{ll} \text{преобразуем} & \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \\ \text{положим} & 1+e^{-x} = t, \quad dt = -e^{-x}dx \end{array}\right] = -\int \frac{dt}{t} =$

$$= -\ln|t| + C = -\ln(1+e^{-x}) + C = -\ln\frac{1+e^x}{e^x} + C = x - \ln(1+e^x) + C.$$

Замечание. Мы использовали равенство $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. Это равенство следует применять отдельно для промежутков $(0,+\infty)$ и $(-\infty,0)$. При $x>0$ оно справедливо по той причине, что $|x| = x$, $(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$. Если же $x<0$, то $|x| = -x$, $(\ln(-x)+C)' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$, так что и в этом случае равенство верно.

Итак, если исходный интеграл представлен в виде $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, то, выполняя замену переменной $t=\varphi(x)$, мы приходим к интегралу $\int f(t)dt$. Часто замену переменной в интеграле $\int g(x)dx$ применяют в виде $x=\psi(t)$, затем вычисляют интеграл по t, а чтобы вернуться к старой переменной x, нужно выразить новую переменную t через x.

Пример. Пусть $I = \int \sqrt{1-x^2}dx$.

Для вычисления этого интеграла положим $x = \sin t$. Тогда

$$dx = \cos t\ dt,\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t.$$

Подставляя это в исходный интеграл, получаем

$$I = \int \cos^2 t\ dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C.$$

Из равенства $x = \sin t$ имеем $t = \arcsin x$, так что

$$I = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

Вычислим этот интеграл еще одним способом, основанным на применении формулы интегрирования по частям.

$$I = \int \sqrt{1-x^2}dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2}, & dv = dx \\ du = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx, & v = x \end{array}\right] =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} - I + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Воспользовавшись теперь равенством $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, вытекающим из того, что $(\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, получим $I = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x$. Отсюда следует

$$I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right] + C.$$

6.3 Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией (или дробью) называется функция вида

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Если степень числителя меньше степени знаменателя, то рациональная дробь называется правильной. Ясно, что каждая рациональная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $R(x)$ – многочлен, а дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильная. Поскольку интегралы от многочленов вычисляются совсем просто, то мы будем рассматривать методы интегрирования правильных дробей.

Будем различать следующие четыре вида дробей.

1. $\frac{A}{x-a}$, где $A,\ a$ – постоянные.

2. $\frac{A}{(x-a)^k}$, где $A,\ a$ – постоянные, $k = 2, 3 \dots$

3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где $M,\ N,\ p,\ q$ – постоянные, квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней.

4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, где $M,\ N,\ p,\ q$ – постоянные, $k=2,3,\ldots$, квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней.

Покажем как вычисляются интегралы от каждой из этих дробей.

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C.$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$. Для вычисления этого интеграла представим подынтегральное выражение в виде

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} = \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-p\frac{M}{2}}{x^2+px+q} = \frac{M}{2}\cdot\frac{2x+p}{x^2+px+q}+\frac{N-p\frac{M}{2}}{x^2+px+q}.$$

Для вычисления интеграла от первого слагаемого справа, очевидно, достаточно выполнить замену $t=x^2+px+q$. Тогда получим

$$\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \ln(x^2+px+q)+C.$$

Для вычисления интеграла от второго слагаемого справа выделим полный квадрат в знаменателе, т. е. представим знаменатель в виде $x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}$. Поскольку квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней, то его дискриминант $\frac{p^2}{4}-q<0$. Обозначим $a^2=q-\frac{p^2}{4}$. Выполняя замену $x+\frac{p}{2}=t$, получим

$$\int\frac{1}{x^2+px+q}dx = \int\frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+a^2}dx = \int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\frac{t^2}{a^2}+1} =$$

$$= \frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Возвращаясь теперь к старой переменной, получим исходный интеграл.

4. $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx$. Для вычисления этого интеграла, как и в предыдущем случае, представим подынтегральное выражение в виде

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} = \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-p\frac{M}{2}}{(x^2+px+q)^k} =$$

$$= \frac{M}{2} \cdot \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} + \frac{N - p\frac{M}{2}}{(x^2+px+q)^k}.$$

Для вычисления интеграла от первого слагаемого справа, очевидно, достаточно выполнить замену $t = x^2 + px + q$. Тогда получим

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{1}{-k+1}(x^2+px+q)^{-k+1} + C.$$

Для вычисления интеграла от второго слагаемого, как и в предыдущем случае, выделим полный квадрат из квадратного трехчлена в знаменателе. Тогда после замены переменной $t = x + \frac{p}{2}$ он сведется к интегралу вида $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$. Обозначим этот интеграл через I_k и выведем рекуррентную формулу для вычисления этого интеграла. Будем применять формулу интегрирования по частям. Имеем

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \left[\begin{array}{ll} u = \frac{1}{(t^2+a^2)^k}, & dv = dt \\ du = -\frac{2kt}{(t^2+a^2)^{k+1}} dt, & v = t \end{array} \right] =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{k+1}} dt = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}} dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} dt - 2ka^2 \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}.$$

Отсюда находим

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2} \left[\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + (2k-1)I_k \right] \quad (k = 1, 2, \dots).$$

При этом, как мы уже вычислили ранее,

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Итак, и в этом случае мы получили правило вычисления интеграла от дроби четвертого вида.

Из основной теоремы алгебры следует, что каждый многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в виде произведения конечного числа линейных сомножителей вида $x - a$ и квадратичных сомножителей вида $x^2 + px + q$, где $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Именно, справедливо равенство

$$Q(x) = A(x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{m_s}, \quad (6.3)$$

где k_i и m_i – целые неотрицательные числа.

С использованием этого представления можно показать, что справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная дробь, знаменатель которой допускает разложение* (6.3)*. Тогда эта дробь единственным образом может быть представлена в виде суммы простых дробей, т. е.*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{M_{ij}x + N_{ij}}{(x^2 + p_ix + q_i)^j}.$$

Выше уже показано, что интеграл от каждой простой дроби выражается через элементарные функции. Таким образом, справедлива

Теорема. *Каждая рациональная дробь имеет первообразную, которая выражается через элементарные функции, а именно, с помощью рациональных функций, логарифмической функции и арктангенса.*

Пример 1. $I = \int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x} dx$. Разложим знаменатель на множители: $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$. Тогда подынтегральная функция представима в виде

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2},$$

где A, B, C – постоянные коэффициенты. Для их нахождения приведем выражение справа к общему знаменателю и, приравнивая числители полученных дробей, найдем

$$2x^2 - 3x + 3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx.$$

Поскольку это тождество имеет место при всех x, кроме $x = 0$, $x = 1$, то коэффициенты этих многочленов при одинаковых степенях x равны. Приравнивая их, получаем линейную систему уравнений

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & 2 = A + B, \\ x\ : & -3 = -2A - B + C, \\ x^0: & 3 = A. \end{array}\right\}$$

Решая эту систему, находим $A = 3$, $B = -1$, $C = 2$. Подставляя эти значения в разложение подынтегральной функции и вычисляя соответствующие интегралы, получаем

$$I = 3\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C = \ln\frac{|x|^3}{|x-1|} - \frac{2}{x-1} + C.$$

Пример 2. $I = \int \frac{x\,dx}{x^3+1}$. Как и в предыдущем примере, разложим на множители знаменатель:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

Раскладываем подынтегральное выражение с неопределнными коэффициентами

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1},$$

откуда $x = A(x^2-x+1)+(Mx+N)(x+1)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, составляем линейную систему для нахождения чисел A, M, N:

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & 0 = A + M, \\ x\ : & 1 = -A + M + N, \\ x^0: & 0 = A + N. \end{array}\right\}$$

Решая эту систему, находим $A = -\frac{1}{3}$, $M = N = \frac{1}{3}$. Поэтому

$$I = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}) + C.$$

Метод Остроградского. Этот метод интегрирования рациональных дробей предназначен для выделения рациональной части из интеграла от рациональной функции. Именно, используя представление (6.3), интеграл от правильной дроби представляется в виде

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx =$$

$$= \int \frac{P(x)}{A(x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}}dx =$$

$$= \frac{R_{k_1+\ldots+k_r+2(m_1+\ldots+m_s)-r-2s-1}(x)}{A(x-a_1)^{k_1-1}\dots(x-a_r)^{k_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s-1}} +$$

$$+ \int \frac{S_{r+2s-1}(x)}{A(x-a_1)\dots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\dots(x^2+p_sx+q_s)}dx,$$

где многочлены $R_{k_1+\ldots+k_r+2(m_1+\ldots+m_s)-r-2s-1}(x)$ и $S_{r+2s-1}(x)$ степени $k_1+\ldots+k_r+2(m_1+\ldots+m_s)-r-2s-1$ и $r+2s-1$ соответственно имеют неопределенные коэффициенты. Эти коэффициенты находятся затем из условия равенства производных левой и правой частей записанного равенства. Таким образом, вычисление интеграла от правильной дроби сводится к вычислению интеграла от другой правильной дроби, у которой в знаменателе все множители в первой степени. Такой интеграл вычисляется, как указано выше, путем разложения подынтегрального выражения на простые дроби. Тем самым отпадает необходимость в использовании полученной выше рекуррентной формулы для вычисления интегралов от простой дроби четвертого типа.

6.4 Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Интегралы указанного вида, где $R(u,v)$ – рациональная функция переменных u и v, также могут быть выражены через элементарные функции. Задача вычисления этих интегралов с помощью подходящей замены переменной может быть сведена к нахождению интеграла от рациональной функции. Действительно, если положим $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, то получим

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Если все эти представления подставить в исходный интеграл, то, очевидно, получим интеграл от рациональной относительно переменной t функции.

Заметим, что в некоторых случаях интегралы указанного вида могут быть вычислены и более простым способом. Например, интеграл вида $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$, где $R(u,v)$ – рациональная функция двух переменных, сводится к интегралу $\int Q(t)dt$, где Q – рациональная функция одного переменного. Действительно, достаточно использовать следующие равенства

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Тогда замена переменной $t = \operatorname{tg} x$ приводит к интегралу $\int Q_1(t)\frac{dt}{1+t^2}$, где Q_1 – рациональная функция, а значит и $Q(t) = \frac{Q_1(t)}{1+t^2}$ – рациональная функция.

Примеры.

$$\textbf{1.} \quad \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}dt =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - 2\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C.$$

2.
$$\int \operatorname{tg}^3 x\ dx = \left[\ t = \operatorname{tg} x,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}\ \right] = \int \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int \frac{(t^3+t)-t}{1+t^2}dt =$$

$$= \int t\ dt - \int \frac{t}{1+t^2}dt = \frac{t^2}{2} - [\ 1+t^2 = z,\ dz = 2t\ dt\ ] = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

3. $$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\sin x\ dx = [t = \cos x,\ dt = -\sin x\ dx\ ] =$$

$$= -\int \frac{t^4}{(1-t^2)^2}dt = -\left[\begin{array}{ll} u = t^3, & dv = \frac{t\ dt}{(1-t^2)^2} \\ du = 3t^2\ dt, & v = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t^2} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{1-t^2} + \frac{3}{2}\int \frac{t^2}{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{1-t^2} - \frac{3}{2}\int \frac{(1-t^2)-1}{1-t^2}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{1-t^2} - \frac{3}{2}\int dt + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{t^2-1} - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} - \frac{3}{2}\cos x + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C.$$

При вычислении интегралов от тригонометрических функций часто оказываются полезными следующие формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Покажем их применение на примере.

$$\textbf{4.} \quad \int \sin^2 x \ \cos^4 x \ dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \ \cos^2 x \ dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(\sin^2 2x + \sin^2 2x \ \cos 2x\right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{16}(1 - \cos 4x) + \frac{1}{8} \sin^2 2x \ \cos 2x\right) dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

6.5 Интегралы вида $\int R\left(x^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$

Интегралы указанного вида, где R – рациональная функция своих аргументов, а числа p_i и q_i – натуральные, могут быть приведены к интегралу от рациональной функции. Для этого достаточно найти число N – наименьшее общее кратное всех знаменателей q_i и сделать замену переменной $x = t^N$.

Пример.

$$\int \frac{1 + \sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}{2 + \sqrt[6]{x}} dx = \left[\ x = t^6, \ dx = 6t^5 \ dt \ \right] = \int \frac{1 + t^3 - 2t^2}{2 + t} \cdot 6t^5 dt.$$

6.6 Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{1/m}\right) dx$

Для вычисления таких интегралов положим $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$. Тогда получим

$$t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \implies \gamma t^m x + \delta t^m = \alpha x + \beta \implies x = \frac{\beta - \delta t^m}{\gamma t^m - \alpha} \equiv \varphi(t).$$

Поскольку φ – рациональная функция, композиция рациональных функций является рациональной функцией и производная φ' также рациональна, то в результате такой замены получаем интеграл от рациональной функции

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t) dt.$$

Примеры.

$$\textbf{1.}\quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, & \frac{x+1}{x-1} = t^3 \\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, & dx = -\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2} \end{array} \right] = \int t \cdot \frac{t^3-1}{2t^3} \cdot \frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2} =$$

$$= -3 \int \frac{dt}{t^3-1} = \ldots$$

2.

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \left[\begin{array}{ll} t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, & x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = -\frac{4t\ dt}{(1+t^2)^2} & \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{1}{\left(1-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2\right) \cdot t} \cdot \frac{-4t\ dt}{(1+t^2)^2} = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

6.7 Интегрирование биномиального дифференциала

Биномиальным дифференциалом называется выражение $x^m(a+bx^n)^p dx$, где действительные числа $a \neq 0,\ b \neq 0$, а числа $p,\ m$ и n – рациональные.

Для вычисления интеграла от биномиального дифференциала рассмотрим следующие три случая.

1. p – целое. В этом случае полагаем $x = t^N$, где N – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n. Ясно, что в этом случае получаем интеграл от рациональной относительно t функции.

Если же p не целое, то выполним подстановку $x = z^{\frac{1}{n}}$. Тогда $dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$, а биномиальный дифференциал преобразовывается к виду

$$\frac{1}{n} z^{\frac{m}{n}} (a+bz)^p z^{\frac{1}{n}-1} dz = \frac{1}{n} (a+bz)^p z^q dz,$$

где $q = \frac{m+1}{n} - 1$.

2. Если $q = \frac{m+1}{n} - 1$ – целое, то подстановка $t = (a+bz)^{1/s} = (a + bx^n)^{1/s}$, где s – знаменатель дроби p, приводит к интегралу от рациональной относительно t функции.

Если же q не целое, то преобразуем дифференциал к виду

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q}dz.$$

3. $p + q$ – целое. В этом случае подстановка $t = \sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}} = \sqrt[s]{ax^{-n} + b}$, где s – знаменатель дроби p, приводит к интегралу от рациональной относительно t функции.

Итак, в трех рассмотренных случаях

1) p – целое,

2) $\frac{m+1}{n}$ – целое,

3) $\frac{m+1}{n} + p$ – целое

интеграл от биномиального дифференциала с помощью соответствующей замены переменной сводится к интегралу от рациональной функции, а значит, интегрируется в конечном виде. С другой стороны, справедлива следующая

Теорема Чебышева. *Если не выполнено ни одно из условий перечисленных выше трех случаев, то интеграл от биномиального дифференциала не является элементарной функцией.*

Доказательство этой теоремы основано на применении методов теории функций комплексного переменного. Здесь мы его приводить не будем.

7. Интеграл Римана

7.1 Определение и элементарные свойства

Определение. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f. Рассмотрим произвольную систему точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Каждую такую систему назовем разбиением отрезка $[a, b]$, а само разбиение будем обозначать через Π. Отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ называются частичными отрезками разбиения. Наибольшую из длин $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ частичных отрезков называют диаметром этого разбиения и обозначают

$$d(\Pi) = \max_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i.$$

В каждом из частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ выберем произвольным образом точку ξ_i и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Сумма σ называется интегральной суммой для функции f, соответствующей заданному разбиению Π и заданному выбору точек ξ_i.

Для каждого заданного разбиения множество всевозможных интегральных сумм бесконечно, поскольку каждая интегральная сумма зависит от способа выбора точек ξ_i.

Определение. Число I называется пределом интегральных сумм σ при стремлении к нулю диаметра разбиения $d(\Pi)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее, вообще говоря, от ε, что для любого разбиения Π отрезка $[a, b]$ диаметра $d(\Pi) < \delta$ при любом выборе промежуточных точек ξ_i из частичных отрезков этого разбиения соответствующая интегральная сумма σ удовлетворяет неравенству $|\sigma - I| < \varepsilon$, т. е.

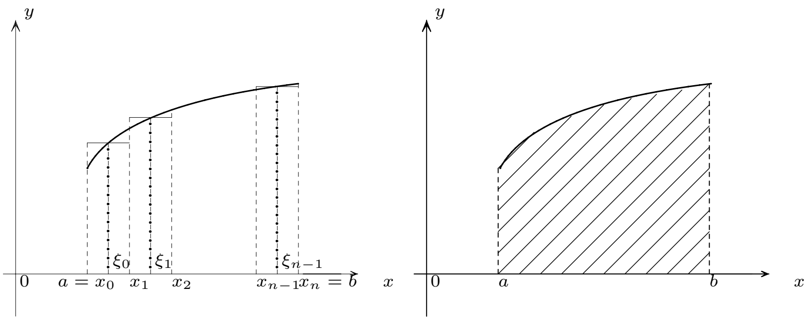
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \Pi,\ d(\Pi) < \delta \ \forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \ (i = 0, 1, \ldots, n-1) \ |\sigma - I| < \varepsilon.$$

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения, то этот предел называется интегралом от функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. В этом случае функция f называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$. В противном случае говорят, что функция f неинтегрируема на $[a, b]$.

Итак,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma.$$

Геометрический смысл определенного интеграла.



С геометрической точки зрения интегральная сумма представляет собой сумму площадей прямоугольников высотой $f(\xi_i)$ и шириной $x_{i+1} - x_i$. Поэтому определенный интеграл – предел интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения – можно интерпретировать как площадь (с учетом знака) криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x = a,\ x = b$ и графиком функции $y = f(x)$.

По аналогии с определением предела функции в смысле Гейне, определение предела интегральных сумм можно выразить в терминах последовательностей следующим образом.

Определение. Число I называется пределом интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения, если для любой последовательности $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$ разбиений отрезка $[a, b]$, такой, что $d(\Pi_n) \to 0$ при $n \to \infty$, и при любом выборе промежуточных точек из частичных отрезков этих разбиений соответствующая последовательность интегральных сумм $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ сходится к числу I.

Упражнение. Докажите равносильность этих двух определений предела интегральных сумм.

Теорема. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Предположим, что функция f неограничена на $[a, b]$, и покажем, что в этом случае для любого разбиения Π промежуточные точки ξ_i можно выбрать так, чтобы модуль соответствующей интегральной суммы оказался большим любого наперед заданного числа.

Рассмотрим произвольное разбиение $\Pi: \; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Если f неограничена на $[a, b]$, то найдется такой частичный отрезок $[x_j, x_{j+1}]$, на котором f также неограничена. Действительно, если бы f оказалась ограниченной на каждом из частичных отрезков, то она была бы ограниченной и на всем отрезке $[a, b]$. Итак, предположим, что f неограничена сверху на $[x_j, x_{j+1}]$. Зададим произвольное число M и покажем, что точки ξ_i можно выбрать так, чтобы соответствующая интегральная сумма σ стала большей, чем M. Действительно, сначала выберем точки ξ_i во всех отрезках, кроме $[x_j, x_{j+1}]$, и составим сумму $\sigma' = \sum_{\{i:i \neq j\}} f(\xi_i)\Delta x_i$. Затем точку ξ_j выберем так, чтобы выполнялось неравенство $f(\xi_j)\Delta x_j + \sigma' > M$. Это возможно в силу того, что функция f неограничена сверху на $[a, b]$. Тогда получим, что для интегральной суммы $\sigma = \sigma' + f(\xi_j)\Delta x_j$ выполнено неравенство $\sigma > M$.

Случай неограниченной снизу f исчерпывается аналогичным образом.

Наконец заметим, что из определения предела интегральных сумм вытекает, что при достаточно мелком разбиении интегральные суммы ограничены независимо от способа выбора промежуточных точек. Действительно, в определении предела условие $d(\Pi) < \delta$ влечет выполнение неравенства $|\sigma - I| < \varepsilon$, откуда следует, что $|\sigma| < |I| + \varepsilon$. Мы же, предположив, что функция f неограничена на $[a, b]$, получаем противоречие с ограниченностью интегральных сумм. $\square$

Замечание. В доказательстве теоремы мы воспользовались тем, что для интегрируемой функции при достаточно мелком разбиении интегральные суммы ограничены. На самом деле у интегрируемой функции ограничено множество всех интегральных сумм, соответствующих всевозможным разбиениям, а не только достаточно мелким. Действительно, мы доказали, что интегрируемая на $[a, b]$ функция f ограничена, т. е. существует такое число A, что $|f(x)| < A$ для всех $x \in [a, b]$. Поэтому для любого разбиения Π при любом способе выбора точек ξ_i получим

$$|\sigma| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\Delta x_i \leq A \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = A(b-a).$$

Итак, каждая интегрируемая функция ограничена. Однако не каждая ограниченная функция интегрируема.

Пример ограниченной неинтегрируемой функции. Рассмотрим функцию Дирихле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ – рационально,} \\ 0, & x \text{ – иррационально.} \end{cases}$$

Эта функция ограничена. Покажем, что она неинтегрируема на любом невырожденном отрезке $[a, b]$. Действительно, если для произвольного разбиения Π все точки ξ_i выбрать рациональными, то получим

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = b - a.$$

Если же все точки ξ_i взять иррациональными, то

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}(\xi_i)\Delta x_i = 0.$$

Отсюда следует, что интегральные суммы не имеют предела при стремлении к нулю диаметра разбиения.

Пример 1. Пусть $f(x) = c,\ a \leq x \leq b$. Тогда для любого разбиения Π при любом выборе точек ξ_i будет $f(\xi_i) = c$ и поэтому

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = c \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = c(b-a).$$

Таким образом, $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$.

Пример 2. Пусть $f(x)=x,\ 0\le x\le 1$. Выберем произвольное разбиение $\Pi:\ \ 0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$ и точки $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$. Тогда соответствующая интегральная сумма будет иметь вид $\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i\Delta x_i$. Наибольшая из всех интегральных сумм, соответствующая выбранному разбиению, равна $\overline{\sigma}=\sum_{i=0}^{n-1}x_{i+1}\Delta x_i$, а наименьшая $\underline{\sigma}=\sum_{i=0}^{n-1}x_i\Delta x_i$. Тогда имеем

$$\overline{\sigma}+\underline{\sigma}=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}+x_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}^2-x_i^2)=x_n^2-x_0^2=1,$$

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\Delta x_i\le d(\Pi)\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i=d(\Pi).$$

Таким образом, $\overline{\sigma}-\underline{\sigma}\to 0$ при $d(\Pi)\to 0$, а поскольку $\overline{\sigma}+\underline{\sigma}=1$, то обе эти суммы стремятся к $\frac{1}{2}$. Отсюда и из неравенства $\underline{\sigma}\le\sigma\le\overline{\sigma}$ сразу следует, что $\sigma\to\frac{1}{2}$ при $d(\Pi)\to 0$. Итак, функция интегрируема и $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$.

Пример 3. Ступенчатые функции. Функция f называется ступенчатой на отрезке $[a,b]$, если $[a,b]$ можно разбить на отрезки $[a_0,a_1],\ldots,[a_{s-1},a_s]$, где $a=a_0<a_1<\ldots<a_s=b$, такие, что функция f постоянна на каждом интервале (a_j,a_{j+1}), т. е. $f(x)=c_j,\ x\in(a_j,a_{j+1}),\ j=0,1,\ldots,s-1$.

При достаточно малых δ для разбиения $\Pi:\ a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, диаметр которого меньше, чем δ, все частичные отрезки разбиения, за исключением, быть может, не более чем $2s$ штук, расположены целиком в соответствующих интервалах постоянства функции f. Пусть разбиению Π при каком-либо выборе промежуточных точек ξ_j соответствует интегральная сумма σ. Имеем

$$\left|\sigma-\sum_{j=0}^{s-1}c_j(a_{j+1}-a_j)\right|\le 2s\cdot\delta\cdot\left[\max_{a\le x\le b}f(x)-\min_{a\le x\le b}f(x)\right].$$

Отсюда ясно, что при стремлении к нулю диаметра разбиения интегральные суммы стремятся к $\sum_{j=0}^{s-1}c_j(a_{j+1}-a_j)$, т. е. $\int_a^b f(x)dx=\sum_{j=0}^{s-1}c_j(a_{j+1}-a_j)$.

Пример 4. Функция Римана. Напомним, что функция Римана определяется равенством

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{ иррационально}, \\ \frac{1}{q}, & \text{где } x = \frac{p}{q} - \text{ несократимая дробь}. \end{cases}$$

Покажем, что эта функция интегрируема на $[0,1]$ и ее интеграл равен нулю. Для этого заметим, что для любого $x \in [0,1]$ имеем $\lim_{y\to x} \mathcal{R}(y) = 0$. Действительно, это сразу следует из того, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ на отрезке $[0,1]$ существует лишь конечное число таких точек, в которых функция Римана принимает значения большие, чем ε. Обозначим число таких точек через N_ε.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, $\delta = \frac{\varepsilon'}{2N_{\varepsilon'}}$. Тогда при любом разбиении Π, диаметр которого меньше, чем δ, и при любом способе выбора промежуточных точек количество слагаемых в интегральной сумме, для которых значение функции больше, чем ε', не превосходит $2N_{\varepsilon'}$. Поэтому для интегральной суммы σ справедлива следующая оценка:

$$\sigma \le N_{\varepsilon'}\delta + \varepsilon' \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \le N_{\varepsilon'} \frac{\varepsilon'}{2N_{\varepsilon'}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, получили, что $\sigma \to 0$ при $d(\Pi) \to 0$, т. е. $\int_0^1 \mathcal{R}(x)dx = 0$.

7.2 Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Пусть f – ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция. Выберем произвольное разбиение этого отрезка $\Pi: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и обозначим

$$M_i = \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x), \quad m_i = \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x) \ (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Определение. Сумма $\overline{S}_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$ называется верхней суммой Дарбу для функции f, соответствующей разбиению Π, а сумма $\underline{S}_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$ называется нижней суммой Дарбу, соответствующей разбиению Π.

Очевидно, что $\underline{S}_\Pi \le \overline{S}_\Pi$, и любая интегральная сумма σ, соответствующая разбиению Π, удовлетворяет неравенству

$$\underline{S}_\Pi \le \sigma \le \overline{S}_\Pi. \tag{7.1}$$

Действительно, при любом выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ из определения m_i и M_i получаем $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$. Умножив это неравенство на Δx_i и сложив по i, получаем (7.1).

Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то на каждом из частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ она достигает своего наибольшего и наименьшего значений, т. е. точки ξ_i и η_i можно выбрать так, чтобы были выполнеы равенства $f(\xi_i) = m_i$ и $f(\eta_i) = M_i$. Поэтому в этом случае суммы Дарбу сами являются интегральными суммами. Если же f разрывна, то суммы Дарбу не обязаны быть интегральными суммами. Однако справедливо следующее

Утверждение. *Для произвольной ограниченной функции f и заданного разбиения Π верхняя и нижняя суммы Дарбу сами являются соответственно верхней и нижней гранями множества всех интегральных сумм, соответствующих заданному разбиению Π.*

Доказательство. Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь определением верхней грани, для каждого $i = 0, 1, \dots, n-1$ найдем такие $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$, что $f(\eta_i) > M_i - \varepsilon$. Тогда получим

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_i)\Delta x_i > \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i - \varepsilon(b-a) = \overline{S}_\Pi - \varepsilon(b-a).$$

Отсюда следует, что $\overline{S}_\Pi = \sup\{\sigma\}$, где верхняя грань берется по множеству всевозможных интегральных сумм, соответствующих заданному разбиению Π.

Доказательство для нижней суммы Дарбу аналогично. $\square$

Свойства сумм Дарбу.

1. *Если к имеющимся точкам разбиения добавить новые точки, то от этого верхняя сумма Дарбу не увеличится, а нижняя сумма Дарбу не уменьшится.*

Доказательство. Пусть имеется изначально разбиение Π. Достаточно рассмотреть случай, когда к имеющимся точкам добавляется одна точка $x' \in [x_i, x_{i+1}]$, в результате чего получаем новое разбиение Π'. Тогда суммы $\overline{S}_\Pi$ и $\overline{S}_{\Pi'}$ содержат одни и те же слагаемые, за исключением слагаемых, отвечающих отрезку $[x_i, x_{i+1}]$. В сумме $\overline{S}_\Pi$ этому отрезку отвечает слагаемое $M_i(x_{i+1} - x_i)$, а в сумме $\overline{S}_{\Pi'}$ ему соответствуют два слагаемых $M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x')$, где $M_i' = \sup_{x_i \le x \le x'} f(x)$, $M_i'' = \sup_{x' \le x \le x_{i+1}} f(x)$. Ясно, что $M_i' \le M_i$ и $M_i'' \le M_i$. Поэтому $M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x') \le M_i(x_{i+1} - x_i)$, так что и $\overline{S}_{\Pi'} \le \overline{S}_\Pi$.

Для нижних сумм доказательство аналогичное. □

2. *Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу, даже если они соответствуют разным разбиениям.*

Доказательство. Пусть Π_1, Π_2 – произвольные разбиения отрезка $[a, b]$. Докажем, что $\underline{S}_{\Pi_1} \le \overline{S}_{\Pi_2}$. Объединяя точки разбиений Π_1 и Π_2, получим новое разбиение Π, причем, поскольку Π может быть получено из Π_1 путем добавления к Π_1 новых точек деления, то, в силу предыдущего свойства, имеем $\underline{S}_{\Pi_1} \le \underline{S}_\Pi$. С другой стороны, разбиение Π может быть получено из Π_2 путем добавления к Π_2 новых точек деления, так что, в силу предыдущего свойства, $\overline{S}_\Pi \le \overline{S}_{\Pi_2}$. Объединяя эти два неравенства и учитывая, что $\underline{S}_\Pi \le \overline{S}_\Pi$, получаем $\underline{S}_{\Pi_1} \le \overline{S}_{\Pi_2}$. □

Интегралы Дарбу. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, т. е. $|f(x)| \le M$, $a \le x \le b$. Тогда для любого разбиения Π справедливы неравенства $|\overline{S}_\Pi| \le M(b - a)$ и $|\underline{S}_\Pi| \le M(b - a)$. Это означает, что множества всевозможных верхних и нижних сумм Дарбу являются ограниченными.

Определение. Верхняя грань множества всевозможных нижних сумм Дарбу называется нижним интегралом функции f и обозначается $\underline{I} = \sup_\Pi\{\underline{S}_\Pi\}$. Нижняя грань множества всевозможных верхних сумм Дарбу называется верхним интегралом и обозначается $\overline{I} = \inf_\Pi\{\overline{S}_\Pi\}$.

Связь между верхним и нижним интегралами устанавливает

Утверждение. *Для любой ограниченной функции f справедливо неравенство $\underline{I} \le \overline{I}$.*

Доказательство. Как было показано выше, каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу, т. е. для любых двух разбиений Π и Π' справедливо неравенство $\underline{S}_\Pi \le \overline{S}_{\Pi'}$. Переходя к верхней грани по всевозможным разбиениям Π, получаем $\underline{I} \le \overline{S}_{\Pi'}$. Поскольку в полученном неравенстве разбиение Π' произвольное, то переходя к нижней грани по всевозможным разбиениям, получим $\underline{I} \le \overline{I}$. □

Пример. Рассмотрим функцию Дирихле на отрезке $[0,1]$. Для нее, очевидно, при любом разбиении Π будет $\underline{S}_\Pi = 0$, так что и $\underline{I} = 0$. С другой стороны, $\overline{S}_\Pi = 1$, так что $\overline{I} = 1$.

Теорема (критерий интегрируемости по Риману). *Пусть функция f ограничена на отрезке $[a,b]$. Для того чтобы f была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство*

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \left(\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi\right) = 0.$$

Это равенство означает, что для любого положительного ε найдется такое положительное δ, что для каждого разбиения Π, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, справедливо неравенство $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f интегрируема, т. е. существует конечный

$$I \equiv \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π с $d(\Pi) < \delta$ и при любом выборе промежуточных точек ξ_i выполнено неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$. Это неравенство можно переписать так: $I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$.

Зафиксируем произвольное разбиение Π с $d(\Pi) < \delta$. Поскольку $\overline{S}_\Pi$ – верхняя грань множества всех интегральных сумм σ, соответствующих разбиению Π, и $\sigma < I + \varepsilon$, то $\overline{S}_\Pi \le I + \varepsilon$.

Аналогично получаем $\underline{S}_\Pi \ge I - \varepsilon$. Таким образом, $I - \varepsilon \le \underline{S}_\Pi \le \overline{S}_\Pi \le I + \varepsilon$. Отсюда следует, что $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi \le 2\varepsilon$, если только $d(\Pi) < \delta$.

Достаточность. Заметим, что для любого разбиения Π справедливо неравенство $\underline{S}_\Pi \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S}_\Pi$. Поскольку, по условию, $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi \to 0$ при $d(\Pi) \to 0$, то $\overline{I} = \underline{I}$. Обозначим их общее значение через I. Тогда получим, что для любого разбиения Π имеет место неравенство $\underline{S}_\Pi \le I \le \overline{S}_\Pi$. Но и каждая интегральная сумма σ, отвечающая разбиению Π, также удовлетворяет неравенству $\underline{S}_\Pi \le \sigma \le \overline{S}_\Pi$. Отсюда следует, что $|\sigma - I| \le \overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi$. Поскольку правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $d(\Pi) \to 0$, то получаем

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma = I. \quad \square$$

Замечание. Из доказательства необходимости видно, что для интегрируемой функции ее верхняя и нижняя суммы Дарбу стремятся к интегралу от функции при стремлении к нулю диаметра разбиения.

Определение. Для ограниченной на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции φ число

$$\omega = \sup |\varphi(x') - \varphi(x'')|,$$

где $x',\ x'' \in [\alpha, \beta]$, называется колебанием функции φ на $[\alpha, \beta]$.

Обозначим $M = \sup_{\alpha \le x \le \beta} \varphi(x)$ и $m = \inf_{\alpha \le x \le \beta} \varphi(x)$. Тогда, как легко видеть, $\omega = M - m$.

Пусть теперь ограниченная функция f задана на отрезке $[a, b]$. Тогда для произвольного разбиения Π колебание f на $[x_i, x_{i+1}]$ равно $\omega_i = M_i - m_i$. Поэтому

$$\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\, \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

Таким образом, равносильная формулировка критерия интегрируемости примет следующий вид.

Теорема (критерий интегрируемости в терминах колебаний). *Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено* *равенство*

$$\lim_{d(\Pi)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = 0,$$

где ω_i *– колебание функции* f *на отрезке* $[x_i, x_{i+1}]$.

7.3 Классы интегрируемых функций

Теорема 1. *Если функция* f *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых точек $x',\ x'' \in [a, b]$, таких, что $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Отсюда следует, что для любого разбиения Π, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, справедливо неравенство

$$\omega_i = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')| \le \varepsilon \ (i = 0, 1, \dots n-1).$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i \le \varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = \varepsilon(b-a),$$

если только $d(\Pi) < \delta$. Таким образом, выполнено условие критерия интегрируемости в терминах колебаний и тем самым теорема доказана. $\square$

Теорема 2. *Если функция* f *монотонна на отрезке* $[a, b]$, *то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть, например, f возрастает. Возьмем произвольное разбиение Π. Тогда $\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, поскольку колебание функции является разностью между наибольшим и наименьшим значениями функции. Получим

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i \le d(\Pi)\sum\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right) = d(\Pi)\left[f(b) - f(a)\right].$$

Отсюда видно, что выполнены условия критерия интегрируемости в терминах колебаний и теорема доказана. $\square$

Замечание. Из теоремы 2 видно, что существуют разрывные интегрируемые функции. В частности, монотонная функция может иметь разрывы в счетном множестве точек. Поэтому интегрируемая функция может иметь счетное множество точек разрыва.

Пример. Положим $f(0) = 0$, $f(x) = \frac{1}{n}$ $\left(x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right],\ n = 1, 2, \ldots\right)$. Ясно, что каждая точка вида $\frac{1}{n}$ является точкой разрыва функции, так что множество точек разрыва функции f счетно. С другой стороны, поскольку f возрастает на $[0,1]$, то, по теореме 2, она интегрируема на $[0,1]$.

Теорема 3. *Если функция f ограничена на отрезке $[a,b]$ и имеет на этом отрезке лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема на $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ – точки разрыва. Зададим $\varepsilon > 0$ и для каждой точки разрыва выберем некоторую ее окрестность длины, меньшей чем ε. Эти окрестности можно выбрать так, чтобы они попарно не пересекались. Обозначим их $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Выбросив эти окрестности из отрезка $[a,b]$, получим конечный набор отрезков $I_1, \ldots, I_m$ (их количество не обязательно равно k). На каждом из этих отрезков функция непрерывна и, в силу теоремы Кантора, равномерно непрерывна. Поэтому для каждого отрезка I_j найдется $\delta_j > 0$, такое, что для любой пары точек $x', x'' \in I_j$ условие $|x' - x''| < \delta_j$ влечет выполнение неравенства $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_m, \varepsilon)$.

Пусть теперь $\Pi: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ – произвольное разбиение отрезка $[a,b]$ с диаметром $d(\Pi) < \delta$. Рассмотрим сумму $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$. Разобьем ее на две суммы. В первую отнесем слагаемые, отвечающие тем отрезкам $[x_i, x_{i+1}]$, каждый из которых содержится в одном из отрезков I_j. Для этих отрезков имеем $\omega_i \le \varepsilon$, и поэтому для соответствующей суммы справедливо неравенство

$$\sum\nolimits' \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum\nolimits' \Delta x_i \le \varepsilon (b-a).$$

Во вторую сумму попадают слагаемые, отвечающие тем отрезкам $[x_i, x_{i+1}]$, каждый из которых имеет общие точки по крайней мере с одним из интервалов Δ_j. Оценим сумму длин этих отрезков. Среди частичных отрезков, имеющих общие точки с Δ_j, могут быть такие, которые целиком содержатся в Δ_j. Сумма их длин не превосходит длины интервала Δ_j, которая, в свою очередь, не превосходит ε. Кроме того, могут быть два отрезка, содержащие концы интервала Δ_j, сумма их длин не превосходит $2\delta \le 2\varepsilon$. Таким образом, сумма длин всех отрезков, имеющих общие точки с интервалами $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, не превосходит $3k\varepsilon$. Обозначим через Ω колебание функции f на отрезке $[a, b]$. Поскольку f ограничена, то $\Omega < \infty$ и $\omega_i \le \Omega$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Поэтому для второй суммы получаем следующую оценку:

$$\sum\nolimits'' \omega_i \Delta x_i \le \Omega \sum\nolimits'' \Delta x_i \le 3k\Omega\varepsilon.$$

Окончательно,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum\nolimits' \omega_i \Delta x_i + \sum\nolimits'' \omega_i \Delta x_i \le \varepsilon(b - a + 3k\Omega).$$

Отсюда, в силу критерия интегрируемости в терминах колебаний, вытекает справедливость теоремы. $\square$

Пример 1. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ограничена и непрерывна всюду, за исключением одной точки. Следовательно, она интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

Пример 2. Рассмотрим

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}\sin\frac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

У этой функции множество точек разрыва счетно и она не является монотонной. Тем не менее она ограничена, и ее интегрируемость легко доказать, используя критерий Римана и теорему 3. Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функцию на отрезке $[\varepsilon, 1]$. На этом отрезке функция ограничена и имеет конечное число точек разрыва. В силу теоремы 3, функция интегрируема на $[\varepsilon, 1]$, так что, по критерию Римана, найдется такое $\delta > 0$, что если только отрезок $[\varepsilon, 1]$ будет разбит на части, длины которых меньше, чем δ, то

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Можем считать, что $\delta < \varepsilon$. Если теперь весь отрезок $[0, 1]$ разбить на части, длины которых меньше, чем δ, то $\sum' \omega_i \Delta x_i$, слагаемых, отвечающих тем отрезкам, которые содержатся целиком в $[\varepsilon, 1]$, меньше, чем ε. Далее, сумма длин отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, имеющих общие точки с $[0, \varepsilon)$, не превосходит $\varepsilon + \delta \leq 2\varepsilon$. Учитывая, что колебание функции на каждом из отрезков не превосходит 2, получим

$$\sum\nolimits'' \omega_i \Delta x_i \leq 2 \sum\nolimits'' \Delta x_i \leq 4\varepsilon.$$

Окончательно,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leq 5\varepsilon,$$

так что, в силу критерия Римана, функция интегрируема на $[0, 1]$.

Сформулируем еще два критерия интегрируемости ограниченной функции. Их мы примем без доказательства.

Критерий Дарбу. *Для того чтобы ограниченная на отрезке* $[a, b]$ *функция была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы были равны ее верхний и нижний интегралы.*

Для формулировки следующего критерия нам понадобится понятие множества лебеговой меры нуль. Говорят, что множество E имеет лебегову меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечным или счетным набором интервалов Δ_n (т. е. $E \subset \cup_n \Delta_n$), любая конечная сумма длин которых меньше, чем ε.

Каждое счетное множество имеет лебегову меру нуль, поскольку каждую его точку x_n можно покрыть интервалом длины $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Существуют, однако, несчетные множества, имеющие лебегову меру нуль.

Критерий Лебега. *Для того чтобы ограниченная на отрезке* $[a, b]$ *функция была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы множество ее точек разрыва было множеством лебеговой меры нуль.*

7.4 Свойства интегрируемых функций

1. Интегрируемость модуля. *Если функция* f *интегрируема на* $[a, b]$*, то функция* $|f|$ *также интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Действительно, для произвольного разбиения Π через ω_i обозначим колебание функции f на $[x_i, x_{i+1}]$, а через $\overline{\omega}_i$ – колебание $|f|$ на этом отрезке. Тогда из неравенства $||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x") - f(x'')|$ $(x', x'' \in [x_i, x_{i+1}])$ следует, что $\overline{\omega}_i \leq \omega_i$. Таким образом, $\sum_{i=0}^{n-1} \overline{\omega}_i \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$. По условию, в силу критерия интегрируемости Римана, правая часть стремится к нулю при стремлении к нулю диаметра разбиения. Значит, стремится к нулю и левая часть, и поэтому функция $|f|$ интегрируема. $\square$

Замечание. Из интегрируемости модуля не следует интегрируемость самой функции. Например, функция $f(x) = \mathcal{D}(x) - \frac{1}{2}$, где $\mathcal{D}(x)$ – функция Дирихле, неинтегрируема на $[0, 1]$. В этом легко убедиться, используя критерий Лебега, поскольку функция f разрывна в каждой точке отрезка $[0, 1]$, так что множество ее точек разрыва не является множеством лебеговой меры нуль. В то же время $|f(x)| \equiv \frac{1}{2}$, так что $|f|$ интегрируема на $[0, 1]$.

2. Интегрируемость линейной комбинации. *Если функции* f *и* g *интегрируемы на отрезке* $[a, b]$*, а числа* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, то линейная комбинация* $\alpha f + \beta g$ *также интегрируема на* $[a, b]$.

Доказательство. Действительно, пусть $\varphi = \alpha f + \beta g$. Тогда для соответствующих интегральных сумм справедливо равенство

$$\sigma_\varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)] \Delta x_i =$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i = \alpha\sigma_f + \beta\sigma_g.$$

По условию два слагаемых справа имеют предел при стремлении к нулю диаметра разбиения. Поэтому существует конечный предел интегральных сумм σ_φ, и тем самым доказана интегрируемость функции φ. $\square$

Замечание. В процессе доказательства нами получено равенство

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

3. Интегрируемость произведения. *Если функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, то их произведение также интегрируемо на этом отрезке.*

Доказательство. Действительно, обозначим $\varphi = f \cdot g$ и оценим колебание функции φ. Для любых точек $x',\ x''$ имеем

$$\varphi(x') - \varphi(x'') = f(x')g(x') - f(x'')g(x'') =$$

$$= f(x')[g(x') - g(x'')] + g(x'')[f(x') - f(x'')].$$

По условию функции f и g интегрируемы, а значит, ограничены. Поэтому найдется такая постоянная M, что для всех $x \in [a, b]$ справедливы неравенства $|f(x)| \le M,\ |g(x)| \le M$. Отсюда получаем

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le M[|g(x') - g(x'')| + |f(x') - f(x'')|].$$

Из этого неравенства следует, что для любого разбиения Π будет $\omega_i(\varphi) \le M[\omega_i(f) + \omega_i(g)]$. Дальнейшее завершение доказательства сразу следует из критерия интегрируемости Римана. $\square$

4. Интегрируемость на подынтервалах. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Обратно, если отрезок $[a, b]$ разбит на два отрезка $[a, c]$ и $[c, b]$, на каждом из которых функция интегрируема, то она интегрируема и на всем отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть f интегрируема на $[a,b]$ и $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$. Зададим $\varepsilon>0$ и, пользуясь критерием интегрируемости Римана, найдем такое $\delta>0$, что для любого разбиения Π, диаметр которого меньше, чем δ, справедливо неравенство $\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$. Разобьем теперь отрезок $[\alpha,\beta]$ произвольным образом на части, длины которых меньше, чем δ. Пусть это будут точки $\alpha=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_m=\beta$. Рассмотрим соответствующую сумму $\sum_{j=0}^{m-1}\omega_j'\Delta\xi_j$, где ω_j' – колебание функции на $[\xi_j,\xi_{j+1}]$. Оставшиеся части $[a,\alpha]$ и $[\beta,b]$ разобьем произвольным образом на отрезки так, чтобы их длины также были меньшими, чем δ. Тогда получим разбиение всего отрезка $[a,b]$, диаметр которого меньше, чем δ. Поэтому $\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$. Применяя теперь неравенство $\sum_{j=0}^{m-1}\omega_j'\Delta\xi_j\le\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$, справедливое по той причине, что каждое слагаемое левой суммы входит также и в правую сумму, получаем $\sum_{j=0}^{m-1}\omega_j'\Delta\xi_j<\varepsilon$. Отсюда, в силу критерия интегрируемости Римана, следует интегрируемость f на $[\alpha,\beta]$.

Пусть теперь $a<c<b$ и функция f интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$. Покажем, что f интегрируема на всем $[a,b]$. Возьмем произвольное разбиение отрезка $[a,b]$ и рассмотрим соответствующую сумму $J=\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$. Пусть $c\in[x_j,x_{j+1}]$. Тогда сумму J разобьем следующим образом:

$$J=\sum_{i=0}^{j-1}\omega_i\Delta x_i+\sum_{i=j+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i+\omega_j\Delta x_j\equiv J'+J''+\omega_j\Delta x_j.$$

Ясно, что при стремлении к нулю диаметра разбиения обе суммы J' и J'' стремятся к нулю (в силу интегрируемости функции на $[a,c]$ и $[c,b]$). Далее, поскольку f интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$, то она ограничена на каждом из этих отрезков, а значит, и на всем $[a,b]$. Пусть $|f(x)|\le M$ $(x\in[a,b])$. Тогда, очевидно, $\omega_j\le 2M$, и поэтому $\omega_j\Delta x_j\le 2M\cdot d(\Pi)$. Таким образом, для функции f выполнены условия критерия интегрируемости Римана, так что она интегрируема на $[a,b]$. $\square$

5. Изменение значений функции. *Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$. Если произвольным образом изменить ее значения в конечном числе точек, то измененная функция также будет интегрируемой и при этом величина интеграла не изменится.*

Доказательство. Действительно, если изменить значение функции в m точках, то в сумме $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$ могут измениться не более чем $2m$ слагаемых. Но каждое из этих слагаемых стремится к нулю при стремлении к нулю диаметра разбиения, так что и новая сумма $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i' \Delta x_i$ также будет стремиться к нулю, т. е. функция останется интегрируемой. Ясно также, что величина интеграла не изменится, поскольку при составлении интегральных сумм σ промежуточные точки ξ_i можно выбирать так, чтобы они не совпадали с теми точками, в которых изменялись значения функции. $\square$

Пример. Пусть функция $f(x) = 0$ при $x \in [0,1] \setminus \{1/2\}$ и $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Тогда функция f интегрируема и $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Действительно, изменив функцию в одной точке, положив $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, получим, что новая функция тождественно равна нулю на $[0,1]$, а значит, и интеграл от нее по данному отрезку равен нулю.

Следствие. *Если две функции совпадают всюду на отрезке, за исключением конечного числа точек, то они обе одновременно интегрируемы или неинтегрируемы на этом отрезке. Если они интегрируемы, то их интегралы равны.*

Замечание. Изменение интегрируемой функции на счетном множестве точек может привести к неинтегрируемой функции. Например, выше было показано, что функция Дирихле $\mathcal{D}(x)$ неинтегрируема на отрезке $[0,1]$. В то же время она отличается от тождественного нуля на счетном множестве рациональных точек из отрезка $[0,1]$.

7.5 Свойства интеграла

1. Линейность интеграла. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$, а числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Это свойство получено нами выше при доказательстве интегрируемости линейной комбинации.

2. Аддитивность интеграла. Пусть числа $b < a$. Зададим точки $a = x_0 > x_1 > \ldots > x_n = b$, выберем точки $\xi_i \in [x_{i+1}, x_i]$ и составим сумму $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Заметим, что в этой сумме все $\Delta x_i < 0$. Ясно, что эту сумму можно получить как интегральную сумму на $[b, a]$, только с противоположным знаком. Это приводит к следующему определению.

Определение. Пусть $b < a$ и функция f интегрируема на $[b, a]$. Тогда по определению полагаем

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Далее, для каждой функции f, определенной в точке a, полагаем по определению

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Теорема. *Пусть a, b, c – произвольные точки на действительной прямой. Если функция f интегрируема на наибольшем из отрезков с концами в двух из этих точек, то она интегрируема также и на двух других отрезках, и справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть, например, $a < c < b$ и функция f интегрируема на $[a, b]$. Тогда, по доказанному выше свойству 4, она интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$. Возьмем произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, такое, что c является одной из точек деления. Выберем промежуточные точки ξ_i и рассмотрим интегральную сумму $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Если $c = x_j$, то эту сумму разобьем на две: $\sigma = \sum_{i=0}^{j-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=j}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. При $d(\Pi) \to 0$ первая сумма справа стремится к $\int_a^c f(x)dx$, вторая – к $\int_c^b f(x)dx$, а сумма σ стремится к $\int_a^b f(x)dx$. Переходя к пределу при $d(\Pi) \to 0$, получим требуемое равенство.

Пусть теперь $c < a < b$. Тогда, по уже доказанному,

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx.$$

Отсюда следует

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

и теорема доказана полностью. □

3. Интеграл от модуля. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ $(a<b)$. Тогда*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Доказательство. Действительно, интегрируемость модуля интегрируемой функции доказана выше. Докажем неравенство. Для этого выберем произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда для интегральных сумм будем иметь следующее неравенство:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\Delta x_i.$$

При стремлении к нулю диаметра разбиения интегральная сумма под знаком модуля в левой части стремится к $\int_a^b f(x)dx$, а сумма справа стремится к $\int_a^b |f(x)|dx$. Переходя к пределу при $d(\Pi)\to 0$, получаем требуемое неравенство для интегралов. □

4. Монотонность интеграла. *Пусть функции f и g интегрируемы на $[a,b]$ $(a<b)$ и $f(x)\le g(x)$ для всех $x\in[a,b]$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Действительно, возьмем произвольное разбиение отрезка $[a,b]$ и выберем промежуточные точки ξ_i. Тогда $f(\xi_i)\le g(\xi_i)$ $(i = 0,1,\dots,n-1)$. Умножая эти неравенства на $\Delta x_i > 0$ и складывая, получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Отсюда, устремляя к нулю диаметр разбиения, получаем требуемое неравенство. □

Следствие 1. *Пусть f – неотрицательная интегрируемая функция на $[a, b]$ $(a < b)$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Следствие 2. *Если интегрируемая функция f строго положительна на $[a, b]$ $(a < b)$, то и*

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Доказательство. Действительно, в силу критерия Лебега, найдется точка $x_0 \in [a, b]$, в которой функция непрерывна. Поскольку $f(x_0) > 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что $f(x) > \frac{1}{2} f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$. Выберем отрезок $[\alpha, \beta] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$, $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Тогда, в силу свойства аддитивности интеграла, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx.$$

Первый и третий интегралы справа неотрицательны в силу следствия, а для второго интеграла, учитывая неравенство $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$, из свойства монотонности интеграла получим

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} f(x_0)dx = \frac{1}{2} f(x_0)(\beta - \alpha) > 0.$$

Таким образом, $\int_a^b f(x)dx > 0$. □

Следствие 3. *Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда*

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a). \tag{7.2}$$

Это следствие сразу вытекает из свойства монотонности интеграла.

Замечание. В условиях следствия 3 найдется такое число $\mu \in [m, M]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

Действительно, положим $\mu = \int_a^b f(x)dx/(b-a)$. Тогда, по следствию 3, $m \leq \mu \leq M$.

Отметим, что при $a > b$ в такой формулировке это замечание остается в силе, в то время как знаки неравенств в (7.2) меняются на противоположные.

Следствие 4. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Доказательство. Действительно, пусть m и M соответственно нижняя и верхняя грани функции f на отрезке $[a, b]$, они достигаются в силу первой теоремы Вейерштрасса. По уже доказанному, найдется точка $\mu \in [m, M]$, такая, что $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. По теореме Больцано – Коши о промежуточном значении, найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = \mu$. $\square$

Замечание. Следствие 4 иногда называют теоремой о среднем значении. Оно тесно связано с теоремой Лагранжа, которую также называют теоремой о среднем значении в дифференциальном исчислении.

7.6 Теоремы о среднем

Теорема 1 (первая теорема о среднем значении). *Пусть функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, причем функция g не меняет знак на $[a, b]$. Пусть $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда найдется* *такое число* $\mu \in [m, M]$, *что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Можем считать, что $a < b$, т. к. если поменять местами a и b, то знаки обеих частей равенства поменяются на противоположные. Пусть $g(x) \geq 0$. Неравенство $m \leq f(x) \leq M$ умножим на $g(x)$ и проинтегрируем от a до b. В силу монотонности и линейности интеграла получим

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то из этого неравенства видно, что утверждение теоремы справедливо при любом μ. Если же $\int_a^b g(x)dx > 0$, то положим

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

Тогда из полученного выше неравенства следует, что $m \leq \mu \leq M$, и теорема доказана.

Случай $g(x) \leq 0$ рассматривается аналогично. $\square$

Следствие. *Если в условиях теоремы* 1 *функция* f *непрерывна на* $[a, b]$, *то найдется такая точка* $\xi \in [a, b]$, *что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Действительно, в этом случае, по теореме Больцано – Коши о промежуточном значении, число μ является значением функции f в некоторой точке $\xi \in [a, b]$.

Лемма. *Пусть функция* g *интегрируема на отрезке* $[a, b]$. *Тогда функция* $G(x) \equiv \int_a^x g(t)dt$ $(a \leq x \leq b)$ *равномерно непрерывна на* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $x', x'' \in [a, b]$, $x' < x''$. Тогда

$$G(x'') - G(x') = \int_a^{x''} g(t)dt - \int_a^{x'} g(t)dt =$$

$$= \int_a^{x'} g(t)dt + \int_{x'}^{x''} g(t)dt - \int_a^{x'} g(t)dt = \int_{x'}^{x''} g(t)dt.$$

Поскольку g интегрируема, то она ограничена, т. е. существует такое M, что $|g(t)| \le M$ для всех $t \in [a, b]$. Поэтому получаем

$$|G(x'') - G(x')| \le \int_{x'}^{x''} |g(t)|dt \le M(x'' - x').$$

Отсюда следует, что функция G равномерно непрерывна на $[a, b]$. $\square$

Теорема 2 (вторая теорема о среднем значении). *Пусть функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, причем функция f монотонна на $[a, b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a, b]$, такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx + f(b)\int_{\xi}^b g(x)dx. \tag{7.3}$$

Доказательство. Сначала предположим, что f убывает на $[a, b]$ и неотрицательна. Возьмем произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$. Тогда, по свойству аддитивности интеграла,

$$I \equiv \int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)]g(x)dx \equiv I' + \rho.$$

Для оценки суммы ρ воспользуемся тем, что интегрируемая функция g ограничена, т. е. существует такое M, что $|g(x)| \le M$, $x \in [a, b]$. Тогда получим

$$|\rho| \le \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)||g(x)|dx \le M \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i,$$

где ω_i – колебания функции f на $[x_i, x_{i+1}]$. Правая часть стремится к нулю при стремлении к нулю диаметра разбиения в силу критерия интегрируемости Римана. Следовательно, сумма I' стремится к интегралу I.

Оценим I'. Для этого обозначим $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Получим

$$I' = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left[G(x_{i+1}) - G(x_i)\right] = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})G(x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)G(x_i) =$$

$$= f(x_{n-1})G(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right]G(x_i).$$

Мы воспользовались равенством $G(x_0) = G(a) = 0$.

Обозначим через L и U соответственно нижнюю и верхнюю грани функции G на $[a,b]$. Поскольку, в силу леммы, функция G непрерывна на $[a,b]$, то они существуют в силу первой теоремы Вейерштрасса. Учитыая также, что функция f, по предположению, неотрицательна и монотонно убывающая, т. е. $f(x_{i-1}) - f(x_i) \geq 0$, получаем следующее неравенство:

$$L\left[f(x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right]\right] \leq$$

$$\leq I' \leq U\left[f(x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right]\right].$$

При этом мы использовали неравенство $L \leq G(x_i) \leq U$. Поскольку, как легко видеть, сумма в квадратных скобках равна $f(x_0) = f(a)$, то полученное неравенство принимает вид $Lf(a) \leq I' \leq Uf(a)$. Но поскольку $I' \to I$ при $d(\Pi) \to 0$, то отсюда получаем $Lf(a) \leq I \leq Uf(a)$. Разделив это неравенство на $f(a) > 0$, получим $L \leq \frac{I}{f(a)} \leq U$. Но поскольку функция G непрерывна на $[a,b]$ в силу леммы, то найдется точка $\xi \in [a,b]$, такая, что $G(\xi) = \frac{I}{f(a)}$. Отсюда следует, что $I = f(a)G(\xi)$, а учитывая определение функции G, получаем равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx \quad (\xi \in [a,b]). \tag{7.4}$$

Итак, равенство (7.4) доказано нами в предположении, что функция f убывает и неотрицательна. Рассмотрим теперь случай, когда f убывает на $[a, b]$. Положим $\overline{f}(x) = f(x) - f(b)$. Тогда $\overline{f}$ убывает и неотрицательна. По доказанному, найдется точка $\overline{\xi}$, такая, что

$$\int_a^b \overline{f}(x)g(x)dx = \overline{f}(a)\int_a^{\overline{\xi}} g(x)dx \quad (\overline{\xi} \in [a, b]).$$

Учитывая, что $\overline{f}(x) = f(x) - f(b)$, отсюда получаем

$$\int_a^b [f(x) - f(b)]g(x)dx = [f(a) - f(b)]\int_a^{\overline{\xi}} g(x)dx,$$

или, что то же самое,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\overline{\xi}} g(x)dx + f(b)\int_a^b g(x)dx - f(b)\int_a^{\overline{\xi}} g(x)dx =$$

$$= f(a)\int_a^{\overline{\xi}} g(x)dx + f(b)\int_{\overline{\xi}}^b g(x)dx.$$

Этим доказано равенство (7.3).

В случае когда функция f возрастает и неотрицательна на $[a, b]$, аналогично тому, как было доказано равенство (7.4), можно показать, что существует такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_\xi^b g(x)dx. \tag{7.5}$$

Далее, из (7.5) легко можно получить (7.3) точно так же, как и (7.3) было получено из (7.4). $\square$

Замечание. Формулы (7.3) – (7.5) называются формулами Бонне. В этих равенствах точки ξ, вообще говоря, разные. В самом деле, мы можем изменить функцию f в точках a и b, сохранив при этом монотонность функции f. При этом левая часть (7.3) не изменится, а изменение множителей $f(a)$ и $f(b)$ перед интегралами справа в (7.3), очевидно, повлечет изменение значения ξ справа в (7.3).

Вторую теорему о среднем иногда записывают в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a+0)\int_a^{\xi'} g(x)dx + f(b-0)\int_{\xi'}^b g(x)dx.$$

В этом равенстве точка ξ', вообще говоря, не совпадает со значением ξ в равенстве (7.3).

Примеры применения теорем о среднем.

1. Найти
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx.$$

Оценим
$$0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$
Отсюда получаем
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0.$$

2. Найти
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда получим
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \le$$
$$\le \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^n \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Поскольку $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$, то первое слагаемое справа стремится к нулю при $n\to\infty$. Поэтому найдется такое N, что для всех $n \ge N$ справедливо неравенство
$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^n \frac{\pi}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ мы нашли номер N, начиная с которого
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx < \varepsilon.$$
Это означает, что
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

3. Оценить сверху
$$I \equiv \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}dx.$$

Первый способ. Применяя первую теорему о среднем, получаем

$$I = \frac{1}{1+\xi^2}\int_0^1 \sin x dx = \frac{1}{1+\xi^2}(-\cos x)\Big|_0^1 = \frac{1}{1+\xi^2}(1-\cos 1) \le 1 - \cos 1.$$

Второй способ. В силу первой теоремы о среднем имеем

$$I = \sin\eta \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \sin\eta \operatorname{arctg} x\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\sin\eta \le \frac{\pi}{4}\sin 1.$$

4. Оценить интеграл

$$I \equiv \int_A^B \frac{\sin x}{x} dx, \quad 0 < A < B < +\infty.$$

Первый способ. Применим вторую теорему о среднем. Для этого обозначим $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = \sin x$. Функция f монотонна на $[A, B]$, так что по второй формуле Бонне получаем

$$I = \frac{1}{A}\int_A^\xi \sin x dx = \frac{1}{A}(-\cos x)\Big|_A^\xi = \frac{1}{A}(\cos A - \cos\xi).$$

Отсюда следует, что $|I| \le \frac{2}{A}$.

Второй способ. Применяя первую теорему о среднем, получим

$$I = \sin\xi \int_A^B \frac{dx}{x} = \sin\xi \ln\frac{B}{A}.$$

Отсюда следует, что $|I| \le \ln\frac{B}{A}$.

7.7 Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Обозначим

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a, b]).$$

По свойству интегрируемых функций, f интегрируема на $[a, x]$ для любого $x \in [a, b]$. Поэтому функция F определена на $[a, b]$. Заметим, что $F(a) = 0$. Функцию F называют интегралом с переменным верхним пределом, или неопределенным интегралом Римана.

Выше мы уже доказали, что для любой интегрируемой на $[a, b]$ функции f интеграл с переменным верхним пределом – непрерывная на $[a, b]$ функция (лемма перед формулировкой второй теоремы о среднем значении).

Теорема. *Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда функция F дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Доказательство. Пусть, например, $a < x_0 < b$ (в точках a и b можно рассматривать только односторонние производные). Тогда для любого $h \neq 0$, такого, что что $x_0 + h \in [a, b]$, имеем

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt.$$

Отсюда следует

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t)-f(x_0)]dt\right| \leq \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|dt\right| \equiv \rho(h).$$

Если мы покажем, что $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$, то тем самым теорема будет доказана. Для оценки $\rho(h)$ предположим для определенности, что $h > 0$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и, пользуясь непрерывностью функции f в точке x_0, найдем такое $\delta > 0$, что для всех t, удовлетворяющих условию $|t - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Если теперь $0 < h < \delta$, то получим

$$\rho(h) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|dt \leq \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Случай $h < 0$ исчерпывается аналогичным образом. В точках $x_0 = a$ и $x_0 = b$ приведенные выше рассуждения достаточно применить для $h > 0$ и $h < 0$, соответственно. $\square$

Замечание. Условие непрерывности функции f в точке x_0 не является необходимым для дифференцируемости F в точке x_0. Например, если взять непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию f, то, по доказанной теореме, функция F будет дифференцируемой в каждой точке отрезка $[a, b]$. Изменим теперь значение функции f в одной точке. В результате получим разрывную функцию $\overline{f}$. В то же время, как легко видеть, функция F останется прежней, т. е. $\overline{F}(x) \equiv \int_a^x \overline{f}(t)dt = F(x)$ $(x \in [a, b])$ (поскольку изменение функции в конечном числе точек не влияет на величину ее интеграла). Таким образом, получим, что интеграл с переменным верхним пределом от разрывной функции может оказаться дифференцируемым.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта функция ограничена на отрезке $[0, 1]$ и имеет единственную точку разрыва $x_0 = 0$. Значит, она интегрируема на $[0, 1]$. Обозначим $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Поскольку f непрерывна в каждой точке $x \ne 0$, то, по предыдущей теореме, функция F дифференцируема в каждой точке $x \in (0, 1]$ и $F'(x) = \sin \frac{1}{x}$. В точке $x_0 = 0$ функция f разрывна и поэтому предыдущая теорема неприменима. Однако можно показать, что существует $F'_+(0) = 0$.

Пример 2. Пусть $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-1 \le x \le 1$. Если $-1 \le x < 0$, то $f(t) = -1$, $-1 \le t \le x$ и $\int_{-1}^x f(t)dt = -(x - (-1)) = -(x + 1)$. Если же $0 \le x \le 1$, то $\int_{-1}^x f(t)dt = \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = -1 + x$.

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} -(x + 1), & -1 \le x < 0, \\ x - 1, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что в точке $x_0 = 0$ функция F недифференцируема.

Упражнение. Покажите, что если в некоторой точке функция f имеет скачок, то интеграл с переменным верхним пределом от этой функции недифференцируем в этой точке.

Теорема (основная теорема интегрального исчисления). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она имеет первообразную на этом отрезке. Одной из ее первообразных является интеграл с переменным пределом от этой функции.*

Эта теорема сразу следует из предыдущей.

Покажем, что и у разрывной функции может существовать первообразная. Действительно, в примере 1 функция f разрывна в точке $x_0 = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$. Легко видеть, что существует $\varphi'(0) = 0$, а при $0 < x \leq 1$ имеем $\varphi'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$. Положим $g(x) = 2x \cos \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $g(0) = 0$. Тогда функция g непрерывна на $[0, 1]$ и, в силу основной теоремы интегрального исчисления, имеет первообразную на $[0, 1]$. Поэтому и функция $f(x) = \varphi'(x) - g(x)$ имеет первообразную на $[0, 1]$ как разность двух функций, имеющих первообразные.

Теорема Ньютона – Лейбница (основная формула интегрального исчисления). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и Φ – ее первообразная на этом отрезке. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) \equiv \Phi(x) \,\Big|_a^b \,.$$

Доказательство. Существование первообразной следует из предыдущей теоремы. Кроме того, одной из первообразных является функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Но разность двух любых первообразных постоянна, так что $F(x) - \Phi(x) \equiv C$. Поскольку $F(a) = 0$, то отсюда получаем $-\Phi(a) = C$. Таким образом, $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$. При $x = b$ имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = \Phi(b) - \Phi(a). \quad \square$$

Теорема (обобщенная теорема Ньютона – Лейбница). *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, а Φ непрерывна на этом отрезке и $\Phi'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$, за исключением, быть может,* *конечного числа точек. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство. Возьмем произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$, такое, что среди его точек содержатся все те точки, в которых не выполняется равенство $\Phi'(x) = f(x)$. На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ функция Φ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. В силу этой теоремы, имеем

$$\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i) = \Phi'(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где точки $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Складывая эти равенства, получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Сумма слева, очевидно, равна $\Phi(b) - \Phi(a)$, так что

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Справа имеем интегральную сумму для функции f. По условию f – интегрируемая функция, так что при стремлении к нулю диаметра разбиения сумма справа стремится к $\int_a^b f(x)dx$. Поэтому получили

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)dx. \quad \square$$

Следствие. *Если функция $\Phi(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и ее производная $f(x) \equiv \Phi'(x)$ интегрируема по Риману на этом отрезке, то*

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

Определение. Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Функцию Φ будем называть обобщенной первообразной функции f на этом отрезке, если Φ непрерывна на $[a, b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$ всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек.

Заметим, что обобщенная первообразная определяется однозначно с точностью до постоянного слагаемого, а именно, если Φ_1 и Φ_2 – две обобщенные первообразные для функции f, то $\Phi_1 - \Phi_2 \equiv C$. Это легко доказывается с помощью теоремы Лагранжа.

Теорема. *Если функция f ограничена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек, то на этом отрезке она имеет обобщенную первообразную. Одной из обобщенных первообразных является $\int_a^x f(t)dt$.*

Доказательство этой теоремы легко получается из основной теоремы интегрального исчисления.

7.8 Дифференцирование интегралов

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда, в силу основной теоремы интегрального исчисления, для любого $x \in [a, b]$ справедливо равенство

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

Обозначим $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Предположим, что функция u задана на отрезке $[\alpha, \beta]$, дифференцируема на этом отрезке и такова, что $u(\tau) \in [a, b]$ $(\tau \in [\alpha, \beta])$. Рассмотрим сложную функцию $\Phi(\tau) = F(u(\tau))$. Применяя теорему о дифференцировании сложной функции, получаем, что функция Φ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и ее производная равна $\Phi'(\tau) = F'(u(\tau))u'(\tau)$. Таким образом, мы доказали следующее равенство:

$$\left(\int_a^{u(\tau)} f(t)dt\right)' = f(u(\tau))u'(\tau).$$

Аналогично получаем

$$\left(\int_x^b f(t)dt\right)' = -\left(\int_b^x f(t)dt\right)' = -f(x).$$

Отсюда для дифференцируемой на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции v, такой, что $v(\tau) \in [a, b]$ $(\tau \in [\alpha, \beta])$, имеем

$$\left(\int_{v(\tau)}^{b} f(t)dt\right)' = -\left(\int_{b}^{v(\tau)} f(t)dt\right)' = -f(v(\tau))v'(\tau).$$

Пример 1. Найти производную функции

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \ln t dt.$$

Имеем

$$F'(x) = 3x^2 \ln(x^3) - 2x \ln(x^2) = x \ln x(9x - 4).$$

Пример 2. Найти точки экстремума функции

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \; x > 0.$$

Имеем $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$. Производная обращается в нуль при $x = \pi k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и при переходе через эти точки она меняет свой знак. Поэтому во всех точках вида $x = \pi k$ функция F имеет экстремумы.

7.9 Дальнейшие свойства интеграла Римана

Определение. Функция называется непрерывно дифференцируемой на отрезке, если ее производная является непрерывной на этом отрезке. При этом на концах отрезка производная понимается как односторонняя.

Теорема (формула интегрирования по частям). *Пусть функции u и v непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Доказательство. По правилу дифференцирования произведения,

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

Из условий теоремы следует, что справа – непрерывная функция, так что непрерывна и левая часть равенства. Интегрируя это равенство и используя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)]\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^b .$$

Каждое из двух слагаемых под знаком интеграла слева – непрерывные, а значит, интегрируемые функции. Поэтому интеграл от суммы этих функций равен сумме интегралов от каждой из них. Отсюда следует требуемое равенство. □

Теорема 1 (о замене переменной в определенном интеграле). *Пусть функция φ непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция f непрерывна на некотором отрезке, содержащем область значений функции φ. Пусть $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Оба интеграла, очевидно, существуют, и нужно доказать их равенство. Для этого применим формулу Ньютона – Лейбница. Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Она существует в силу непрерывности f и основной теоремы интегрального исчисления. Пусть $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тогда $G(t) = F(\varphi(t))$ является первообразной для $g(t)$, поскольку

$$G'(t) = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t).$$

По формуле Ньютона – Лейбница, имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Из этих двух равенств следует теорема. $\square$

Пример 1.

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = \sin x dx \\ du = dx, & v = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$= -x \cos x|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x|_0^{\pi} = \pi.$$

Пример 2.

$$I_n \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x, \quad dv = \sin x dx & \\ du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx, \quad v = -\cos x & \end{array} \right] =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Отсюда получаем $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, или

$$I_n = \frac{(n-1)I_{n-2}}{n}.$$

Вычислим

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Если $n = 2k$, то

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 1}{2k(2k-2)\ldots 2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2},$$

а при $n=2k+1$ имеем

$$I_{2k+1}=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Заметим, что $\sin^{2k+1}x\le\sin^{2k}x\le\sin^{2k-1}x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}$, откуда следует $I_{2k+1}\le I_{2k}\le I_{2k-1}$, так что

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\le\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}\le\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$x_k\equiv\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k+1}\le\frac{\pi}{2}\le\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k}\equiv y_k.$$

Оценим

$$y_k-x_k=\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k(2k+1)}=$$

$$=\frac{2k+1}{2k}\left(\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\right)^2=\frac{2k+1}{2k}I_{2k+1}^2=\frac{2k+1}{2k}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k+1}xdx\right)^2.$$

Отсюда и из доказанного выше равенства

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=0$$

следует, что обе последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходятся к $\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, мы доказали, что

$$\pi=2\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k+1}.$$

Это равенство называется формулой Валлиса.

Пример 3. Вычислить

$$I\equiv\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx.$$

Полагаем $x=\sin t$, где $0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Тогда получим

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 4. Вычислить

$$I \equiv \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx.$$

Полагаем $\pi - x = t,\ x = \pi - t,\ dx = -dt$. Тогда получим

$$I = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t} dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t} dt =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t} dt =$$

$$= -\pi \operatorname{arctg}(\cos t)|_0^{\pi} - I = \frac{\pi^2}{2} - I.$$

Отсюда следует, что $I = \frac{\pi^2}{4}$.

Теорема 2 (о замене переменной в определенном интеграле). *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, а функция φ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, монотонна на этом отрезке и $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$. Тогда функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема на отрезке $[\alpha,\beta]$ и справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha,\beta]$. Будем предполагать, что функция φ возрастает. Тогда отрезок $[a,b]$ тоже разобьется точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, где $x_i = \varphi(t_i)$. Если $\max \Delta t_j \to 0$, то стремится к нулю и $\max \Delta x_j$, так как функция φ равномерно непрерывна на $[\alpha,\beta]$. По формуле Лагранжа имеем

$$x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\overline{\tau}_i)\Delta t_i,$$

где $\overline{\tau}_i$ – некоторые точки из отрезков $[t_i, t_{i+1}]$. Теперь выберем произвольные точки $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ и составим интегральную сумму для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Обозначим $\xi_i = \varphi(\tau_i)$ и рассмотрим сумму

$$J = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Заметим, что точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ в силу возрастания функции φ. Поэтому J – интегральная сумма для f. Покажем, что $\sigma - J \to 0$. Действительно,

$$J = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\overline{\tau}_i)\Delta t_i.$$

По условию функция φ' непрерывна, а значит, равномерно непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $t', t'' \in [\alpha, \beta]$, удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \delta$, справедливо неравенство $|\varphi'(t') - \varphi'(t'')| < \varepsilon$. Если диаметр разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ будет меньшим, чем δ, то получим

$$|\sigma - J| \le \sum_{i=0}^{n-1} |f(\varphi(\tau_i))| \cdot |\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\overline{\tau}_i)|\Delta t_i \le \varepsilon M(\beta - \alpha),$$

где M – верхняя грань функции $|f(x)|$ на отрезке $[a, b]$. Таким образом, при стремлении к нулю диаметра разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ имеем $\sigma - J \to 0$. Подчеркнем, что при этом диаметр получаемого разбиения отрезка $[a, b]$ также стремится к нулю в силу равномерной непрерывности функции φ. Поэтому, в силу интегрируемости функции f, сумма J стремится к $\int_a^b f(x)dx$. Поскольку, как мы показали, $\sigma - J \to 0$, то и сумма σ имеет предел, равный $\int_a^b f(x)dx$. С другой стороны, поскольку σ – интегральная сумма для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ и она имеет предел при стремлении к нулю диаметра разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$, то функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема на $[\alpha, \beta]$ и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad \square$$

Теорема (формула Тейлора с остатком в интегральной форме). *Пусть функция f имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные до порядка $(n+1)$ включительно. Тогда справедливо равенство*

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x)=f(b)-f(x)-\frac{f'(x)}{1!}(b-x)-\ldots-\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n=$$

$$=f(b)-f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k.$$

Ясно, что $\varphi(b)=0$, а $\varphi(a)$ – остаток в формуле Тейлора, который мы ищем. Заметим, что функция φ имеет на $[a,b]$ непрерывную производную и поэтому, по формуле Ньютона – Лейбница, получаем

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\int_a^b \varphi'(x)dx.$$

Поскольку $\varphi(b)=0$, то $\varphi(a)=-\int_a^b \varphi'(x)dx$. Вычислим

$$\varphi'(x)=-f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k-\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}\right]=$$

$$=-\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n,$$

откуда получаем

$$\varphi(a)=\frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx,$$

и теорема доказана. $\square$

8. Приложения определенного интеграла

8.1 Вычисление площадей

Будем называть декартовой плоскостью $\mathbb{R}^2$ множество всех упорядоченных пар действительных чисел (x, y). Элементы $\mathbb{R}^2$ называют точками, а числа x, y – координатами этих точек.

Пусть $a \leq b,\ c \leq d$. Множество всех точек, координаты (x, y) которых удовлеворяют неравенствам $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$, будем называть прямоугольником и обозначать $[a, b; c, d]$. Стороны прямоугольника параллельны координатным осям. Если $a = b$ или $c = d$, то прямоугольник $[a, b; c, d]$ называется вырожденным.

Множество всех точек (x, y), удовлетворяющих неравенствам $a < x < b,\ c < y < d$, называют внутренностью прямоугольника.

Площадью (или мерой) прямоугольника $I \equiv [a, b; c, d]$ называется произведение длин его сторон, т. е. $m(I) = (d - c)(b - a)$.

Фигурой (или элементарным множеством) назовем такое множество на плоскости, которое можно представить в виде объединения конечного числа прямоугольников. Фигура называется вырожденной, если она может быть представлена в виде конечного объединения вырожденных прямоугольников.

Предложение. *Каждую фигуру можно разбить на конечное число прямоугольников с попарно непересекающимися внутренностями.*

Это предложение принимаем без доказательства.

Определение. Пусть фигура X является объединением прямоугольников $I_1, \ldots, I_n$, у которых внутренности попарно не пересекаются. Тогда мерой фигуры X называется

$$m(X) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k).$$

Нетрудно показать, что данное определение меры не зависит от способа разбиения этой фигуры на прямоугольники с попарно непересекающимися внутренностями. Ясно, что мера вырожденной фигуры равна нулю.

Пусть теперь E – произвольное множество на плоскости, которое содержится в некотором прямоугольнике, т. е. ограниченное. Число

$$m^*(E) = \inf_{X \supset E} m(X),$$

где нижняя грань берется по всевозможным фигурам X, содержащим множество E, называется внешней мерой Жордана множества E. Далее, число

$$m_*(E) = \sup_{X \subset E} m(X),$$

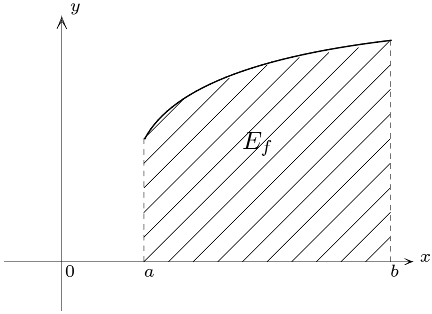
где верхняя грань берется по всевозможным фигурам X, содержащимся во множестве E, называется внутренней мерой Жордана множества E.

Нетрудно показать, что если фигуры X и Y таковы, что $X \subset Y$, то $m(X) \leq m(Y)$. Отсюда сразу следует, что для любого ограниченного множества E справедливо неравенство $m_*(E) \leq m^*(E)$.

Определение. Если внутренняя мера множества E равна его внешней мере, то множество E называется измеримым по Жордану или квадрируемым. В этом случае общее значение внешней и внутренней мер называется мерой Жордана множества E и обозначается $m(E)$.

Пусть E – множество всех точек из единичного квадрата $[0,1;0,1]$, у которых обе координаты рациональны. Это множество не содержит ни одной невырожденной фигуры, т. к. в каждом невырожденном прямоугольнике существуют точки с иррациональными координатами. Значит, $m_*(E) = 0$. С другой стороны, нетрудно показать, что любая фигура, содержащая множество E, содержит также единичный квадрат. Поэтому $m^*(E) = 1$. Таким образом, $m_*(E) < m^*(E)$, так что множество E неизмеримо по Жордану.

Определение. Пусть f – неотрицательная функция на отрезке $[a, b]$. Подграфиком функции f будем называть множество E_f всех точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенствам $a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)$.



Теорема. *Пусть функция f неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда ее подграфик E_f измерим и*

$$m(E_f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Возьмем разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$ и обозначим

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

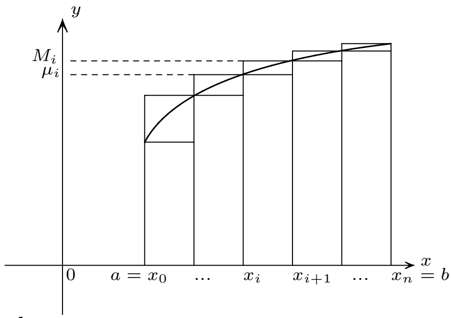
Далее, пусть

$$\underline{\Delta}_i = [x_i, x_{i+1}; 0, m_i],$$

$$\overline{\Delta}_i = [x_i, x_{i+1}; 0, M_i],$$

$$\underline{X} = \bigcup_{i=0}^{n-1} \underline{\Delta}_i,$$

$$\overline{X} = \bigcup_{i=0}^{n-1} \overline{\Delta}_i.$$



Тогда, по определению меры фигуры, имеем

$$m(\underline{X}) = \sum_{i=0}^{n-1} m(\underline{\Delta}_i) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \underline{S},$$

где $\underline{S}$ – нижняя сумма Дарбу функции f, соответствующая выбранному разбиению. Аналогично получаем, что $m(\overline{X}) = \overline{S}$, где $\overline{S}$ – верхняя сумма Дарбу.

Поскольку функция f интегрируема, то $\overline{S} - \underline{S} \to 0$ вместе с диаметром разбиения. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения диаметра, меньшего, чем δ, справедливо неравенство $\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$. Значит, $m(\overline{X}) - m(\underline{X}) < \varepsilon$. Заметим, что $\underline{X} \subset E_f \subset \overline{X}$. Поэтому $m(\underline{X}) \le m_*(E_f) \le m^*(E_f) \le m(\overline{X})$. Отсюда следует $m^*(E_f) - m_*(E_f) < \varepsilon$, а значит, $m_*(E_f)$ и $m^*(E_f)$ равны. Это означает, что множество E_f измеримо. Кроме того, из неравенств $\underline{S} \le m(E_f) \le \overline{S}$ и из того, что $\overline{S} - \underline{S} \to 0$ и $\overline{S} \to \int_a^b f(x)dx$, $\underline{S} \to \int_a^b f(x)dx$, вытекает, что $m(E_f) = \int_a^b f(x)dx$. $\square$

Пример 1. Найдем площадь круга $x^2 + y^2 \le R^2$. Верхняя полуокружность задается уравнением $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$. Поэтому площадь верхнего полукруга равна

$$S = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx = 2\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx = [x = Rz] =$$

$$= 2R^2 \int_0^1 \sqrt{1 - z^2}dz = \frac{\pi R^2}{2},$$

а значит, площадь всего круга равна πR^2.

Пример 2. Найдем площадь сектора круга радиуса R с углом при вершине, радианная мера которого равна заданному φ.

Имеем

$$S = \int_0^{R\cos\varphi} x \operatorname{tg}\varphi dx + \int_{R\cos\varphi}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx =$$

$$= \frac{R^2}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \left[\begin{array}{l} x = R\cos t \\ dx = -R\sin t dt \end{array}\right] =$$

$$= \frac{R^2}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \int_{\varphi}^{0} (-R\sin t\sqrt{R^2(1-\cos^2 t)}dt =$$

$$= \frac{R^2}{2}\cos\varphi\sin\varphi + R^2\int_0^{\varphi} \sin^2 t dt = \frac{\varphi R^2}{2}.$$

Пример 3. Найти площадь множества, ограниченного линиями $y = x^2 + 1,\ x + y = 3$.

Найдем абсциссы точек пересечения графиков

$$\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 3 - x. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x_1 = -2,\ x_2 = 1$. Поэтому

$$S = \int_{-2}^{1} (3 - x)dx - \int_{-2}^{1} (x^2 + 1)dx =$$

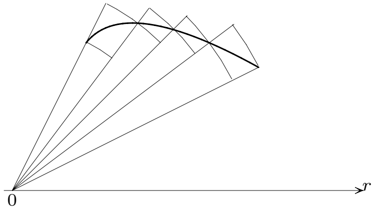
$$= 9 - \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} - \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-2}^{1} = 9 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{4}{3} - \frac{8}{3} - 2 = 4,5.$$

8.2 Площадь в полярных координатах

В полярных координатах положение точки на плоскости характеризуется полярным радиусом r – расстоянием от точки до начала координат и углом φ, образованным радиус-вектором точки и положительным направлением оси Ox. Будем считать, что $-\pi < \varphi \leq \pi$. Рассмотрим на плоскости множество, ограниченное кривой, заданной уравнением $r = r(\varphi)$ $(\alpha \leq \varphi \leq \beta)$, и отрезками лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$. Предположим, что функция $r(\varphi)$ непрерывна и положительна на $[\alpha, \beta]$. Можно показать, что это множество квадрируемо. Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на части точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$. Тогда рассматриваемое множество разобьется на криволинейные секторы. Если исходное разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ достаточно мелкое, то, в силу непрерывности функции $r(\varphi)$, i-й сектор можно приближенно считать сектором круга. Точнее, если обозначим $\mu_i = \inf_{\varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_{i+1}} r(\varphi)$ и $M_i = \sup_{\varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_{i+1}} r(\varphi)$, то рассматриваемый криволинейный сектор содержит в себе круговой сектор радиуса μ_i и содержится в круговом секторе радиуса M_i. Площадь внутреннего сектора радиуса μ_i равна $\frac{1}{2}\mu_i^2 \Delta\varphi_i$, а площадь внешнего – $\frac{1}{2}M_i^2 \Delta\varphi_i$, где $\Delta\varphi_i$ – угол при вершине. Складывая эти площади, получим

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i^2 \Delta\varphi_i \equiv \underline{S},$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} M_i^2 \Delta\varphi_i \equiv \overline{S}.$$



Как мы уже отметили, рассматриваемое множество квадрируемо, так что его площадь S удовлетворяет неравенству $\underline{S} \le S \le \overline{S}$. Но $\underline{S}$ и $\overline{S}$ представляют собой соответственно нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$, соответствующие данному разбиению отрезка $[\alpha, \beta]$. Поэтому, учитывая, что функция $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ интегрируема по Риману на отрезке $[\alpha, \beta]$, получаем, что при стремлении к нулю диаметра разбиения верхняя и нижняя суммы Дарбу обе стремятся к $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$. Таким образом, мы доказали равенство

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример 1. Спираль Архимеда задается уравнением $r = a\varphi$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$, где параметр $a > 0$. Площадь множества точек плоскости, ограниченной спиралью Архимеда равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{4\pi^3 a^2}{3}.$$

Пример 2. Площадь S, ограниченная кардиоидой $r = 1 + \cos\varphi$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$, равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

8.3 Длина пути

Определение. Путем на плоскости называется отображение $t \longmapsto (\varphi(t), \psi(t))$ отрезка $[\alpha, \beta]$ в $\mathbb{R}^2$, задаваемое парой непрерывных функций φ и ψ.

Это означает, что каждому значению $t \in [\alpha, \beta]$ ставится в соответствие точка плоскости с координатами (x, y), где $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$.

Точка $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ называется началом пути, а точка $(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ – концом пути. Множество всех точек $\{(\varphi(t), \psi(t)) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in [\alpha, \beta]\}$ называется следом пути.

Пусть Π – произвольное разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. Обозначим $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$ и составим сумму $l_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$. С геометрической точки зрения эта сумма представляет собой длину ломаной с вершинами (x_i, y_i), вписанной в след пути.

Определение. Длиной пути называется $\sup_\Pi l_\Pi$, где верхняя грань берется по всевозможным разбиениям Π отрезка $[\alpha, \beta]$. Сам путь обозначается через $\gamma = (\varphi, \psi)$, а его длина через $l_{(\gamma)}$. Если $l_{(\gamma)} < \infty$, то путь γ называется спрямляемым.

Теорема (достаточное условие спрямляемости). *Если путь γ определяется уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[\alpha, \beta]$, то этот путь спрямляем.*

Доказательство. Для любого разбиения $\Pi : \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$, применяя теорему Лагранжа, получим

$$l_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\right]^2 + \left[\psi(t_{i+1} - \psi(t_i)\right]^2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left[\varphi'(\tau_i)\right]^2 + \left[\psi'(\overline{\tau}_i)\right]^2}\,\Delta t_i,$$

где точки $\tau_i, \overline{\tau}_i \in [t_i, t_{i+1}]$. По условию функции $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$, а значит, ограничены, т. е. существует такая постоянная M, что $|\varphi'(t)| \le M$, $|\psi'(t)| \le M$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$. Поэтому получаем

$$l_\Pi \le M\sqrt{2} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i = M\sqrt{2}(\beta - \alpha),$$

так что $l_{(\gamma)} = \sup_\Pi l_\Pi < \infty$, т. е. путь γ спрямляем. $\square$

Если функции φ и ψ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$, то путь $\gamma = (\varphi, \psi)$ называется дифференцируемым, или путем класса C^1.

Теорема (вычисление длины пути). *Пусть* $\gamma = (\varphi, \psi)$ *непрерывно дифференцируемый путь на отрезке* $[\alpha, \beta]$. *Тогда*

$$l_{(\gamma)} = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \tag{8.1}$$

Доказательство. Пусть $\Pi : \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ – некоторое разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$. Предположим, что мы добавили к нему одну точку $t' \in [t_i, t_{i+1}]$, в результате чего получили новое разбиение Π'. Тогда $l_\Pi \leq l_{\Pi'}$. Действительно, в суммах l_Π и $l_{\Pi'}$ будут одинаковые слагаемые, кроме слагаемых, отвечающих отрезку $[t_i, t_{i+1}]$. В сумме l_Π этому отрезку отвечает слагаемое

$$s_i = \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]^2},$$

а в сумме $l_{\Pi'}$ вместо него будут два следующих слагаемых:

$$s_i' + s_i'' = \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t')]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t')]^2} +$$

$$+ \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t')]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t')]^2}.$$

Из неравенства треугольника легко видеть, что $s_i \leq s_i' + s_i''$.

Таким образом, при измельчении разбиения суммы l_Π не уменьшаются. Кроме того, по предыдущей теореме, путь γ спрямляем, так что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение Π_0, что $l_{(\gamma)} \geq l_{\Pi_0} > l_{(\gamma)} - \varepsilon$. Поэтому для любого разбиения Π, которое является измельчением разбиения Π_0, также справедливо неравенство

$$l_{(\gamma)} - \varepsilon < l_\Pi \leq l_{(\gamma)}. \tag{8.2}$$

Осталось показать, что при стремлении к нулю диаметра разбиения суммы l_Π сремятся к интегралу, записанному справа в (8.1). Как мы видели выше,

$$l_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\overline{\tau}_i)]^2} \Delta t_i.$$

Эта сумма отличается от интегральной суммы для интеграла справа в (8.1) тем, что значения функций φ' и ψ' берутся в разных точках. Применим очевидное неравенство

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+\overline{b}^2}\right| \le \frac{|b^2-\overline{b}^2|}{|b|+|\overline{b}|} \le |b-\overline{b}|,$$

справедливое для любых чисел a, b и $\overline{b}$. Тогда получим

$$\left|l_\Pi - \sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\tau_i)]^2}\Delta t_i\right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1}|\psi'(\overline{\tau}_i)-\psi'(\tau_i)|\,\Delta t_i \le \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\psi')\Delta t_i,$$

где $\omega_i(\psi')$ – колебание функции ψ' на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$. Так как функция ψ' непрерывна, то она интегрируема на $[\alpha, \beta]$. В силу критерия интегрируемости в терминах колебаний имеем $\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\psi')\Delta t_i \to 0$ при стремлении к нулю диаметра разбиения.

Итак, мы получили, что если только диаметр разбиения достаточно мал, то сумма l_Π мало отличается от интегральной суммы, соответствующей интегралу справа в (8.1). Поэтому из (8.2) следует (8.1), и теорема доказана. □

Пример. Вычислить длину одной арки циклоиды $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$, где параметр $a > 0$.

Имеем

$$x'(t) = a(1-\cos t),\ y'(t) = a\sin t,$$

$$l = a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt = -2a\cdot 2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Путь $\gamma = (\varphi, \psi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ называется жордановым, или простым путем, если отображение $\gamma : [\alpha, \beta] \longmapsto \mathbb{R}^2$ взаимно однозначно. Это означает, что различным точкам $t', t'' \in [\alpha, \beta]$ соответствуют различные точки на плоскости.

Множество Γ на плоскости называется жордановой, или простой кривой, если оно является следом некоторого жорданового пути. Каждый такой жорданов путь называется параметризацией жордановой кривой Γ.

Если есть две различных параметризации $\gamma_1 : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ и $\gamma_2 : [a, b] \to \Gamma$ одной и той же жордановой кривой Γ, то $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \tau$, где τ – некоторая строго монотонная и непрерывная функция, переводящая отрезок $[a, b]$ в $[\alpha, \beta]$. Это означает, что любые две параметризации жордановой кривой могут быть получены одна из другой с помощью непрерывной и строго монотонной замены параметра.

Пример. Пусть $\Gamma = \{(x, y) : \ x + y = 1, \ x, y \geq 0\}$. Приведем примеры параметризаций

1) $x = t, \ y = 1 - t, \ 0 \leq t \leq 1,$

2) $x = \cos^2 u, \ y = \sin^2 u, \ 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$

Можно, например, выразить t через u следующим образом: $t = \cos^2 u$. Данная функция убывает на $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Пользуясь тем фактом, что две параметризации одной и той же жордановой кривой могут быть получены одна из другой с помощью строго монотонной и непрерывной замены параметра, можно легко доказать, что для любых двух путей, являющихся параметризациями одной и той же жордановой кривой Γ, спрямляемость одного из этих путей влечет спрямляемость другого и равенство их длин.

Определение. Жорданова кривая Γ называется спрямляемой, если спрямляемы ее параметризации. Длиной жордановой кривой Γ называется длина любой из ее параметризаций.

Если у жордановой кривой Γ есть хотя бы одна непрерывно дифференцируемая параметризация $\gamma = (\varphi, \psi)$, то эта кривая спрямляема, а ее длина выражается равенством

$$l(\Gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Как частный случай рассмотрим следующий вопрос: как определить длину графика функции?

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывно дифференцируемая функция f. Обозначим через Γ ее график, т. е. $\Gamma = \{(x, y);\ y = f(x),\ a \le x \le b\}$. Тогда Γ является жордановой кривой, поскольку это – след жорданова пути, параметризация которого может быть задана, например, уравнениями $x = t,\ y = f(t)$ $(a \le t \le b)$. Поэтому при наших предположениях это спрямляемый путь и его длина равна

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Итак, мы получили формулу для длины кривой, заданной явным уравнением $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$.

8.4 Объем тела вращения

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная неотрицательная функция f. Рассмотрим криволинейную трапецию, или подграфик функции f. Будем вращать эту трапецию вокруг оси Ox. Полученное тело вращения обозначим через E. Выведем формулу для его объема.

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и обозначим

$$\mu_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

В результате вращения получаем два прямых круговых цилиндра и один "цилиндр" с криволинейной образующей. Объемы меньшего и большего круговых цилиндров равны соответственно $\pi\mu_i^2\Delta x_i$ и $\pi M_i^2\Delta x_i$. Из круговых прямых цилиндров составим две области: одна из них имеет объем $\underline{V} = \pi\sum_{i=0}^{n-1}\mu_i^2\Delta x_i$, а другая $\overline{V} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i^2\Delta x_i$. Ясно, что наше тело вращения E содержит в себе меньшее из этих кусочно цилиндрических тел и содержится в большем кусочно цилиндрическом теле. Таким образом, объем V тела E удовлетворяет неравенству $\underline{V} \le V \le \overline{V}$. Понятно, что суммы $\underline{V}$ и $\overline{V}$ соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу для интеграла $\pi\int_a^b f^2(x)dx$, так что они обе стремятся к этому интегралу при стремлении к нулю диаметра разбиения.

Итак, мы получаем следующую формулу для нахождения объема тела вращения:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

8.5 Площадь поверхности тела вращения

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция f. Будем вращать ее график вокруг оси Ox. В результате получим некоторую поверхность. Выведем формулу для вычисления ее площади.

Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Вращая криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, $x_i \le x \le x_{i+1}$, получим усеченный "конус" с образующей $y = f(x)$ и радиусами оснований $f(x_i)$ и $f(x_{i+1})$. Соединим точки $(x_i, f(x_i))$ и $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ отрезком. В результате вращения получим усеченный конус с теми же радиусами оснований и этим отрезком в качестве образующей. Площадь боковой поверхности этого конуса равна

$$2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} l_i,$$

где $l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$ – длина образующей. Складывая, получаем

$$\sigma \equiv 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} l_i.$$

При стремлении к нулю диаметра разбиения сумма σ стремится к определенному пределу, который естественно считать площадью поверхности вращения. С другой стороны, если в выражении для l_i применить формулу Лагранжа, то получим

$$\sigma = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i,$$

где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Заменим в правой части x_i и x_{i+1} на ξ_i и оценим погрешность. Имеем

$$\left|\sigma - 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i\right| \le 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \sqrt{1+M^2}\Delta x_i,$$

где ω_i – колебание функции f на $[x_i, x_{i+1}]$, а M – верхняя грань функции $|f'|$ на $[a, b]$. Из условий на функцию f следует, что правая часть стремится к нулю вместе с диаметром разбиения. Поэтому сумма σ стремится к $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$.

Итак, получили следующую формулу для нахождения площади поверхности вращения:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

9. Пространство $\mathbb{R}^n$ и топология

9.1 Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение. n-мерным вектором или n-мерной точкой называется любой упорядоченный набор из n действительных чисел, $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Числа x^i называются координатами вектора x (номер координаты будем писать вверху).

Совокупность всех n-мерных векторов называется n-мерным действительным пространством $\mathbb{R}^n$.

Определим в $\mathbb{R}^n$ следующие операции:

1) суммой векторов $x = (x^1, \ldots, x^n)$ и $y = (y^1, \ldots, y^n)$ будем называть вектор, равный $x + y = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n)$;

2) произведением действительного числа α на вектор x называется вектор $\alpha x = (\alpha x^1, \ldots, \alpha x^n)$.

Пространство $\mathbb{R}^n$ с введенными операциями удовлетворяет всем аксиомам линейного пространства. Нулем пространства $\mathbb{R}^n$ является вектор, все координаты которого равны нулю.

Через e_i будем обозначать вектор, у которого все координаты равны нулю, кроме i-й, равной единице, $e_i = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

Вектор x представляется в виде $x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n$. Такое представление единственно, так как векторы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы. Эти векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис $\mathbb{R}^n$, который называют стандартным базисом.

Определение. Скалярным или внутренним произведением векторов $x = (x^1, \ldots, x^n)$ и $y = (y^1, \ldots, y^n)$ называется число

$$x \cdot y = x^1 y^1 + \ldots + x^n y^n.$$

Свойства скалярного произведения:

1. $x \cdot y = y \cdot x$ *(коммутативность);*

2. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$;

3. $x \cdot x = (x^1)^2 + \dots (x^n)^2 \geq 0$ *для любого* x, *причем* $x \cdot x = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0$.

Евклидовой нормой или длиной вектора x называется число

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}.$$

Свойства длины:

1. $|x| \geq 0$ *и* $|x| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0$*;*

2. $|\alpha x| = |\alpha||x|$;

3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(неравенство треугольника).*

Два первых свойства очевидны. Для доказательства неравенства треугольника покажем сначала, что имеет место неравенство Коши

$$|x \cdot y| \leq |x||y|,$$

справедливое для любых векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Действительно, для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$0 \leq |x - \lambda y|^2 = (x - \lambda y) \cdot (x - \lambda y) =$$

$$= x \cdot x - \lambda y \cdot x - \lambda x \cdot y + (\lambda y) \cdot (\lambda y) = |x|^2 - 2\lambda x \cdot y + \lambda^2 |y|^2.$$

Поскольку справа квадратный трехчлен относительно λ неотрицателен для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, то его дискриминант неположителен. Это означает, что $(x \cdot y)^2 \leq |x|^2 |y|^2$. Извлекая корни, получаем неравенство Коши.

Докажем теперь неравенство треугольника. Имеем

$$|x + y|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x \cdot y| + |y|^2 \leq$$

$$\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Извлекая корни, получаем неравенство треугольника. $\square$

В координатной записи неравенство Коши имеет вид

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^i y^i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y^i)^2},$$

а неравенство треугольника –

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i+y^i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y^i)^2}.$$

Определение. Расстоянием между двумя точками $x, y \in \mathbb{R}^n$ называется число

$$d(x,y) = |x-y|.$$

Из неравенства треугольника следует, что для любых трех точек x, y, z

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

9.2 Топология пространства $\mathbb{R}^n$

9.2.1 Открытые множества

Определение. Открытым шаром с центром в точке x_0 и радиусом $\rho > 0$ называется множество всех точек $x \in \mathbb{R}^n$, таких, что $|x - x_0| < \rho$. Этот шар обозначается $B(x_0, \rho)$ и называется также ρ-окрестностью точки x_0.

Определение. Пусть задано множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Точка $x_0 \in E$ называется внутренней точкой множества E, если существует шар $B(x_0, \rho)$, содержащийся в E.

Другими словами, точка x_0 называется внутренней точкой множества E, если она входит во множество E вместе с некоторой окрестностью.

Определение. Множество E называется открытым, если все его точки являются внутренними точками этого множества. Условимся также считать пустое множество $\emptyset$ открытым.

Пример 1. Каждый открытый шар $B(x_0, r)$ является открытым множеством.

Действительно, пусть $x \in B(x_0, r)$. Нужно доказать, что существует такая окрестность точки x, которая целиком содержится в шаре $B(x_0, r)$. Положим $\rho = r - |x - x_0|$. Тогда $\rho > 0$, так как $|x - x_0| < r$. Покажем, что $B(x, \rho) \subset B(x_0, r)$. Пусть $y \in B(x, \rho)$. Тогда $|y - x| < \rho$. Оценим расстояние мужду точками y и x_0. По неравенству треугольника имеем

$$|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| < \rho + |x - x_0| = r,$$

что и требовалось доказать.

В частности, при $n = 1$ открытые шары – это интервалы на действительной прямой, и они являются открытыми множествами на прямой.

Пример 2. Рассмотрим открытые n-мерные интервалы. Для двух заданных векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$, таких, что $a^i < b^i$ $(i = 1 \ldots, n)$, открытым интервалом называется множество всех точек x, координаты которых удовлетворяют условиям $a^i < x^i < b^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Такой интервал обозначается через $(a^1, b^1; \ldots; a^n, b^n)$.

В частности, в $\mathbb{R}^2$ открытые интервалы – это прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям, а в $\mathbb{R}^3$ – параллелепипеды, ребра которых параллельны координатным осям.

Докажем, что любой открытый интервал в $\mathbb{R}^n$ является открытым множеством.

Пусть J – открытый интервал и пусть $x \in J$, т. е. $a^i < x^i < b^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Обозначим через $\delta^i = \min(x^i - a^i, b^i - x^i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $\delta = \min(\delta^1, \ldots, \delta^n)$. Покажем, что шар $B(x, \delta)$ содержится в J. Действительно, если $y \in B(x, \delta)$, то $|y - x| < \delta$. Отсюда следует, что $|x^i - y^i| < \delta$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Пользуясь определением числа δ, видим, что $a^i < y^i < b^i$ для всех $i = 1, \ldots, n$, так что $y \in J$, что и требовалось доказать.

Свойства открытых множеств.

Пусть $\mathcal{A}$ – множество индексов, и каждому элементу $\alpha \in \mathcal{A}$ поставлено в соответствие некоторое множество E_α. Тогда говорят, что задано семейство множеств $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$.

Теорема. *Система всех открытых множеств в $\mathbb{R}^n$ обладает следующими свойствами:*

1) *всё пространство $\mathbb{R}^n$ и пустое множество $\emptyset$ открыты;*

2) *пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто;*

3) *объединение любого семейства $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ открытых множеств открыто.*

Доказательство. 1) Пустое множество $\emptyset$ открыто по определению, а всё пространство $\mathbb{R}^n$, очевидно, открыто, поскольку любой шар содержится в $\mathbb{R}^n$.

2) Пусть $G_1, \ldots, G_s$ – открытые множества, $G = \cap_{i=1}^s G_i$. Пусть $x \in G$. Тогда $x \in G_i$ для всех $i = 1, \ldots, s$. Но каждое из множеств G_i открыто, так что для каждого $i = 1, \ldots, s$ найдется шар $B(x, r_i) \subset G_i$. Среди всех этих шаров выберем шар с наименьшим радиусом $B(x, r)$, где $r = \min(r_1, \ldots, r_s)$. Тогда $B(x, r) \subset G_i$ при каждом $i = 1 \ldots, s$, а значит, $B(x, r) \subset G$, и тем самым доказано, что множество G открыто.

3) Пусть $G = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha$, где каждое множество G_α открыто. Докажем, что и множество G также открыто. Действительно, пусть $x \in G$. Тогда x принадлежит по крайней мере одному из множеств G_{α_0}. Так как это множество G_{α_0} открыто, то найдется окрестность $B(x, \rho) \subset G_{\alpha_0} \subset G$. Таким образом, G – открытое множество. $\square$

Замечание. Пересечение бесконечного набора открытых множеств не обязано быть открытым множеством. Например, пусть B_k – открытый шар с центром в нуле и радиусом $\frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда $\cap_{k=1}^\infty B_k = \{0\}$. Но множество $\{0\}$, состоящее из одной точки, не является открытым, поскольку оно не содержит в себе ни одного шара.

Определение. Пусть E – непустое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда совокупность всех его внутренних точек называется внутренностью множества E и обозначается через $\overset{\circ}{E}$ или $\operatorname{int} E$.

Теорема. *Для любого непустого множества E его внутренность – открытое множество.*

Доказательство. Будем предполагать, что $\overset{\circ}{E}$ непусто. Пусть $x \in \overset{\circ}{E}$. Тогда x – внутренняя точка множества E (по определению внутренности). Нужно доказать, что x является также внутренней точкой множества $\overset{\circ}{E}$.

Итак, найдется шар $B(x, \rho) \subset E$. Но поскольку шар – открытое множество, то каждая точка $y \in B(x, \rho)$ содержится в этом шаре вместе с некоторой окрестностью U_y. Значит $U_y \subset E$, и поэтому y – внутренняя точка множества E, т. е. $y \in \overset{\circ}{E}$. Таким образом, мы получили, что $B(x, \rho) \subset \overset{\circ}{E}$, а это означает, что $\overset{\circ}{E}$ – открытое множество, и теорема доказана. □

9.2.2 Замкнутые множества

Определение. Точка x_0 называется предельной точкой множества E, если в любой окрестности точки x_0 найдется хотя бы одна точка множества E, отличная от x_0.

Предложение. *Если x_0 – предельная точка множества E, то в любой ее окрестности содержится бесконечно много точек множества E.*

Доказательство. Пусть U – произвольная окрестность точки x_0. Предположим, что в этой окрестности содержится лишь конечное число точек множества E, отличных от x_0. Тогда среди них найдется точка x_1, ближайшая к x_0. Но тогда в шаре радиуса $|x_1 - x_0| > 0$ с центром в точке x_0 нет ни одной точки из множества E, отличной от x_0, а это невозможно, поскольку x_0 – предельная точка множества E. □

Пример. Пусть $B_0 = \{x : \ |x| < 1\}$ – единичный шар. Очевидно, что каждая точка этого шара является предельной точкой для него. Если же точка x_1 находится на сфере, т. е. $|x_1| = 1$, то она не принадлежит шару, но является предельной для шара. Действительно, возьмем произвольную окрестность $B(x_1, \rho)$ точки x_1. Тогда все точки вида $y = tx_1$ $(1 - \rho < t < 1)$ принадлежат шару B_0 и содержатся в шаре $B(x_1, \rho)$. Таким образом, точка x_1 является предельной для шара B_0 по определению.

Рассмотрим теперь точку x_2, такую, что $|x_2| > 1$. Покажем, что она не является предельной для B_0. Действительно, положим $\rho = |x_2| - 1 > 0$. Тогда в шаре $B(x_2, \rho)$ нет ни одной точки шара B_0. Это легко можно доказать, используя неравенство треугольника (рекомендуется провести это доказательство самостоятельно). Поэтому точка x_2 не является предельной для множества B_0.

Итак, мы видим, что множество может содержать или не содержать свои предельные точки.

Определение. Множество E называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Условимся пустое множество $\emptyset$ называть замкнутым. Всё пространство $\mathbb{R}^n$ также, очевидно, замкнуто по определению.

Ранее отметили, что множества $\emptyset$ и $\mathbb{R}^n$ открыты. Возникает вопрос: существуют ли другие примеры множеств, которые являются одновременно замкнутыми и открытыми? В качестве упражнения предлагается доказать, что таких множеств не существует.

Пример 1. Любой замкнутый шар $\overline{B}(x_0, r) = \{x : \ |x - x_0| \leq r\}$ является замкнутым множеством. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что любая точка x, не принадлежащая $\overline{B}(x_0, r)$, не является предельной для этого шара, т. е. существует окрестность $B(x, \rho)$, в которой нет точек данного шара. Для этого достаточно взять $\rho \leq |x - x_0| - r$.

Пример 2. Любой сегмент $I \equiv [a^1, b^1; \ldots; a^n, b^n]$ является замкнутым множеством. Для доказательства возьмем точку x, не принадлежащую I, и построим ее окрестность, которая не содержит точек из I. Поскольку $x \notin I$, то найдется такое j, что $x^j \notin [a^j, b^j]$. Пусть, например, $x^j < a^j$. Тогда ясно, что шар $B(x, \rho)$, где $0 < \rho \leq a^j - x^j$, не имеет общих точек с I. Отсюда следует, что I – замкнутое множество.

Пример 3. Рассмотрим множество $E \equiv \{(x, y) : \ y = \sin \frac{1}{x}, \ x \neq 0\}$. Отрезок $[-1, 1]$ оси ординат целиком состоит из предельных точек множества E, но ни одна из точек этого отрезка не принадлежит E. Поэтому множество E не является замкнутым.

Упражнение. Докажите, что график непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции – замкнутое множество в $\mathbb{R}^2$.

Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда множество всех точек $x \in \mathbb{R}^n$, не принадлежащих множеству E, называется дополнением множества E и обозначается cE или E^c.

Теорема. *Для того чтобы множество $F \subset \mathbb{R}^n$ было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $G \equiv cF$ было открытым.*

Доказательство. Необходимость. Пусть F замкнуто и x – произвольная точка из G. Нужно доказать, что она внутренняя в G. Поскольку $x \notin F$, то она не является предельной для F и у нее существует окрестность U_x, не содержащая ни одной точки из F. Значит, эта окрестность полностью содержится в G, так что x – внутренняя точка множества G.

Достаточность. Пусть теперь G – открыто. Докажем, что F замкнуто. Для этого достаточно показать, что любая точка x, не принадлежащая F, не является предельной для F. Если $x \notin F$, то $x \in G$, а поскольку G открыто, то найдется окрестность $U_x \subset G$. Эта окрестность не содержит точек из F, так что x не является предельной для F, что и требеовалось доказать. $\square$

Соотношение двойственности. *Пусть $\{E_\alpha\}$ – произвольное семейство множеств. Тогда дополнение к объединению множеств E_α равно пересечению дополнений моножеств E_α, а дополнение к пересечению равно объединению дополнений, т. е.*

$$c\left(\cup E_\alpha\right) = \cap\left(cE_\alpha\right), \quad c\left(\cap E_\alpha\right) = \cup\left(cE_\alpha\right).$$

Докажите самостоятельно.

Теорема (свойства замкнутых множеств). *Система всех замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$ обладает следующими свойствами:*

1) *пустое множество $\emptyset$ и всё пространство $\mathbb{R}^n$ замкнуты;*

2) *пересечение любого семейства $\{F_\alpha\}$ замкнутых множеств замкнуто;*

3) *объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство этой теоремы легко может быть получено с помощью предыдущей теоремы, соотношений двойственности и соответствующих свойств открытых множеств (проведите самостоятельно).

Замечание. Объединение бесконечного семейства замкнутых множеств может оказаться незамкнутым. Например, если $\overline{B}_k$ – замкнутый шар с центром в точке $x_0 = 0$ и радиусом $1 - \frac{1}{k}$, то объединение всех этих шаров представляет собой единичный открытый шар, $\cup_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k = B_0$, а B_0 не является замкнутым множеством.

Для множества $E \subset \mathbb{R}^n$ выше мы уже определили понятие внутренности $\overset{\circ}{E}$. Сформулируем еще одно равносильное определение.

Определение. Внутренностью $\overset{\circ}{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется объединение всех открытых множеств, содержащихся в E. Если в E нет ни одного открытого множества, то считаем, что $\overset{\circ}{E} = \emptyset$.

Определение. Замыканием множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется наименьшее замкнутое множество, содержащее E, т. е. пересечение всех замкнутых множеств, содержащих E.

Из свойства 2) замкнутых множеств следует, что замыкание любого множества замкнуто.

Сформулируем еще одно равносильное определение замыкания.

Определение. Замыканием множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $E \cup E'$, где E' – совокупность всех предельных точек множества E.

Упражнение. Докажите равносильность двух определений внутренности и двух определений замыкания.

Определение. Множество E называется ограниченным, если существует такое число M, что $|x| \leq M$ для всех $x \in E$.

Неравенство $|x| \leq M$ означает, что точка x содержится в замкнутом шаре с центром в нуле радиуса M. Таким образом, в определении ограниченности требуется, чтобы все точки множества находились в некотором шаре с центром в нуле. Однако понятно, что для любого шара B с произвольным центром можно построить шар B_0 с центром в нуле, содержащий B. Поэтому эквивалентное определение ограниченности может быть сформулировано следующим образом.

Определение. Множество называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.

Далее, ясно, что для любого шара можно построить сегмент, содержащий этот шар. С другой стороны, для любого сегмента найдется шар, содержащий этот сегмент. Отсюда получаем еще одно эквивалентное определение ограниченности.

Определение. Множество называется ограниченным, есло оно содержится в некотором сегменте.

9.2.3 Компактность

Определение. Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Семейство открытых множеств $\{G_\alpha\}$ называется открытым покрытием множества E, если каждая точка $x \in E$ принадлежит хотя бы одному из множеств G_α, т. е. если $E \subset \cup_\alpha G_\alpha$.

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется компактным, если каждое его открытое покрытие содержит конечное подсемейство, также покрывающее множество E. Это подсемейство называется конечным подпокрытием.

Например, множество, состоящее из одной точки, двух точек или любого конечного набора точек, очевидно, компактное.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Диаметром множества E называется число $\operatorname{diam} E = \sup_{x,y \in E} |x - y|$, т. е. верхняя грань расстояний между всевозможными парами точек из E.

Например, если $E = [a^1, b^1; \ldots; a^n, b^n]$ – n-мерный сегмент, то, очевидно, $\operatorname{diam} E = |b - a|$, где $a = (a^1, \ldots, a^n)$, $b = (b^1, \ldots, b^n)$.

Лемма (о вложенных сегментах). *Пусть $\{I_\nu\}$ – последовательность вложенных сегментов из $\mathbb{R}^n$, т. е. $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_\nu \supset \ldots$,* *диаметры которых стремятся к нулю при $\nu \to \infty$. Тогда существует, и притом единственная, точка x_0, принадлежащая всем этим сегментам.*

Доказательство. Пусть $I_\nu = [a_\nu^1, b_\nu^1; \ldots; a_\nu^n, b_\nu^n]$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. При каждом фиксированном $i = 1, \ldots, n$ последовательность одномерных отрезков $[a_\nu^i, b_\nu^i]$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ состоит из вложенных друг в друга отрезков, т. е. $[a_1^i, b_1^i] \supset [a_2^i, b_2^i] \supset \ldots \supset [a_\nu^i, b_\nu^i] \supset \ldots$, и длины этих отрезков стремятся к нулю при $\nu \to \infty$. По лемме Кантора, для зафиксированного i найдется число x_0^i, такое, что $x_0^i \in [a_\nu^i, b_\nu^i]$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, т. е. $a_\nu^i \le x_0^i \le b_\nu^i$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Но тогда точка $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$, очевидно, принадлежит всем I_ν.

Двух различных точек, принадлежащих всем I_ν одновременно, быть не может. Действительно, если $x', x'' \in I_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, то $|x' - x''| \le \operatorname{diam} I_\nu$. По условию правая часть стремится к нулю при $\nu \to \infty$, так что $x' = x''$. $\square$

Лемма 1 (Гейне – Бореля). *Любой сегмент в $\mathbb{R}^n$ компактен.*

Доказательство. Пусть $I = [a^1, b^1; \ldots; a^n, b^n]$ – сегмент в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что он не является компактным. Тогда существует такое открытое покрытие Ω сегмента I, что никакое конечное подсемейство множеств из Ω не покрывает сегмент I. Каждую из сторон $[a^i, b^i]$ сегмента I разделим пополам. Тогда сегмент I окажется разбитым на 2^n сегментов. По крайней мере один из них не может быть покрытым каким-либо конечным подсемейством множеств из Ω, ибо, в противном случае, и исходный сегмент I мог бы быть покрытым конечным набором множеств из Ω. Обозначим через I_1 тот из сегментов, на которые разбит I, который не может быть покрытым каким-либо конечным набором множеств из Ω. Каждую из сторон сегмента I_1 снова поделим пополам и среди полученных 2^n сегментов, на которые окажется разбитым I_1, выберем тот, который не может быть покрытым каким-либо конечным подсемейством множеств из Ω. Обозначим его через I_2 и т. д.

Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных сегментов $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_\nu \supset \ldots$, таких, что каждый из сегментов I_ν

не может быть покрытым каким-либо конечным подсемейством множеств из Ω. Заметим также, что $\operatorname{diam} I_\nu = \frac{\operatorname{diam} I}{2^\nu} \to 0$ $(\nu \to \infty)$.

Применяя к последовательности сегментов I_ν лемму о вложенных сегментах, получим точку $x_0 \in I_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Поскольку $x_0 \in I$, а I покрыт семейством Ω открытых множеств, то найдется такое открытое множество $G \in \Omega$, что $x_0 \in G$. Так как множество G открытое и точка $x_0 \in G$, то эта точка внутренняя в G. Это означает, что найдется такая окрестность $B(x_0, \delta)$ точки x_0, которая целиком содержится во множестве G. Но поскольку диаметры сегментов I_ν стремятся к нулю при $\nu \to \infty$, то, начиная с некоторого номера ν_0, они будут меньшими, чем δ, т. е. $\operatorname{diam} I_\nu < \delta$ $(\nu \geq \nu_0)$. Учитывая, что $x_0 \in I_\nu$, получаем, что $I_\nu \subset B(x_0, \delta)$, а значит, $I_\nu \subset G$.

Итак, мы получили, что при $\nu \geq \nu_0$ сегмент I_ν содержится во множестве G. Но это противоречит выбору сегментов I_ν, поскольку они были выбраны так, что никакое конечное подсемейство множеств из Ω не покрывает I_ν. Полученое противоречие завершает доказательство. $\square$

Лемма 2. *Пусть K – компактное множество, а $F \subset K$ – его замкнутое подмножество. Тогда F также компактно.*

Доказательство. Пусть Ω – открытое покрытие множества F. Обозначим через G дополнение к множеству F, т. е. $G = cF$. Так как F замкнуто, то G открыто. Если к семейству Ω присоединим еще одно открытое множество G, то получим новое семейство $\widetilde{\Omega}$, которое покрывает все пространство $\mathbb{R}^n$, а значит и множество K. Поскольку K компактно, то из семейства $\widetilde{\Omega}$ можно извлечь конечное подсемейство $\widetilde{\Omega}^*$, которое тоже покрывает K. Так как $F \subset K$, то семейство $\widetilde{\Omega}^*$ покрывает также и множество F. Если в $\widetilde{\Omega}^*$ содержится множество G, то его можно выбросить, поскольку оно не имеет общих точек с F. В результате получим конечное семейство Ω^*, покрывающее F. Поскольку, очевидно, $\Omega^* \subset \Omega$, то тем самым доказана компактность множества F. $\square$

Теорема Гейне – Бореля. *Для того чтобы множество $K \subset \mathbb{R}^n$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и ограниченным.*

Доказательство. Достаточность. Пусть K замкнуто и ограничено. Тогда найдется сегмент $I \subset \mathbb{R}^n$, содержащий K. В силу леммы Гейне – Бореля, этот сегмент I компактен. Поэтому, в силу леммы 2, компактно также его замкнутое подмножество K.

Необходимость. Пусть K компактно. Докажем, что оно ограничено. Обозначим через B_s открытый шар с центром в нуле радиуса s. Тогда последовательность шаров $\{B_s\}_{s=1}^{\infty}$ покрывает все пространство $\mathbb{R}^n$, а следовательно, и множество K. Поскольку K компактно, то оно может быть покрыто конечным набором шаров B_s. Среди всех этих шаров выберем шар с наибольшим радиусом. Пусть это шар B^*. Тогда ясно, что $K \subset B^*$, так что K ограничено.

Докажем теперь, что K замкнуто. Для этого достаточно показать, что каждая точка $y \notin K$, не является предельной для K.

Итак, пусть $y \notin K$. Рассмотрим множества $G_k = c\overline{B}(y, \frac{1}{k})$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Поскольку замкнутый шар $\overline{B}(y, \frac{1}{k})$ – множество замкнутое, то его дополнение G_k открыто. Кроме того, ясно, что $\cup_{k=1}^{\infty} G_k = \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Поскольку $y \notin K$, то совокупность множеств G_k $(k = 1, 2, \ldots)$ образует открытое покрытие множества K. Пользуясь компактностью K, выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $\{G_{k_1}, \ldots, G_{k_s}\}$ и положим $\rho = \frac{1}{\max\{k_1, \ldots, k_s\}} > 0$. Тогда получим, что шар $B(y, \rho)$ не имеет общих точек с множеством K. Отсюда следует, что точка y не является предельной для K. $\square$

Лемма Больцано – Вейерштрасса. *Каждое бесконечное ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Доказательство. Пусть множество E бесконечно и ограничено. Предположим, что у него нет предельных точек. Тогда оно является замкнутым. Поскольку E еще и ограничено, то, по теореме Гейне – Бореля, E компактно. Для каждой точки $x \in E$ построим такую окрестность U_x, в которой нет других точек из E, кроме x (если бы для некоторой точки x такой окрестности не было, то эта точка была бы предельной для E). Тогда семейство $\{U_x\}_{x \in E}$ образует открытое покрытие компактного множества E. Пользуясь компактностью E, выберем из этого покрытия конечное подпокрытие, т. е. конечный набор шаров, в каждом из которых содержится лишь по одной точке из множества E. Но это противоречит тому, что множество E бесконечно. $\square$

Замечание. Предельная точка, существование которой утверждается в лемме Больцано – Вейерштрасса, не обязана принадлежать множеству E.

10. Последовательности точек в $\mathbb{R}^n$

Если каждому натуральному числу ν поставлена в соответствие точка $x_\nu \in \mathbb{R}^n$, то говорят, что задана последовательность $\{x_\nu\}$ точек из $\mathbb{R}^n$.

Определение. Точка x называется пределом последовательности точек x_ν ($\nu = 1, 2, \dots$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для всех $\nu \geq N$ справедливо неравенство $|x_\nu - x| < \varepsilon$.

Эквивалентное геометрическое определение может быть сформулировано следующим образом.

Определение. Точка x называется пределом последовательности точек x_ν ($\nu = 1, 2, \dots$), если в любой окрестности точки x содержатся все члены последовательности, за исключением, быть может, конечного их числа, т. е. какой бы шар с центром в точке x мы ни взяли, в него попадут все точки x_ν, кроме, быть может, конечного их числа. Предел x последовательности $\{x_\nu\}$ обозначают, как обычно,

$$x = \lim_{\nu \to \infty} x_\nu.$$

Теорема (единственность предела). *Если последовательность имеет предел, то он единственный.*

Доказательство. Действительно, если у последовательности $\{x_\nu\}$ есть два предела x', x'' и $x'' \neq x'$, то построим непересекающиеся окрестности V' и V'' точек x' и x'', соответственно (для этого достаточно взять шары с центрами в точках x' и x'', радиусы которых равны половине расстояния между точками x' и x''). Поскольку $x' = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu$, то в окрестности V' содержатся все элементы последовательности, начиная с некоторого номера. Аналогично, поскольку $x'' = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu$, то в окрестность V'' попадают все элементы последовательности $\{x_\nu\}$, начиная с некоторого номера. Но это невозможно, поскольку окрестности V' и V'' не пересекаются. □

Последовательность $\{x_\nu\}$ называется ограниченной, если ограничено множество значений этой последовательности.

Равносильное определение: последовательность $\{x_\nu\}$ называется ограниченной, если существует такое число M, что $|x_\nu| \leq M$ $(\nu = 1, 2 \ldots)$.

С геометрической точки зрения это означает, что существует шар с центром в нуле, содержащий все элементы последовательности.

Очевидно также, что последовательность ограничена тогда, и только тогда, когда все ее элементы содержатся в некотором шаре (не обязательно с центром в нуле).

Теорема (ограниченность сходящейся последовательности). *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Действительно, пусть $x = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu$. Обозначим через V шар единичного радиуса с центром в точке x. По определению предела, в этом шаре находятся все элементы последовательности, начиная с некоторого номера N. Вне V находится разве что конечное число элементов x_ν. Положим

$$\rho = \max\{1, |x_1 - x|, \ldots, |x_{N-1} - x|\}$$

и получим, что в $\overline{B}(x, \rho)$ находятся все x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, т. е. последовательность $\{x_\nu\}$ ограничена. □

Пример. Рассмотрим последовательность $\left((-1)^\nu, \frac{1}{\nu}, \frac{1}{2^\nu}\right)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ точек в пространстве $\mathbb{R}^3$. Эта последовательность предела не имеет, поскольку не имеет предела числовая последовательность, составленная из первых координат данной последовательности. Легко видеть, что эта последовательность ограничена. Действительно, имеем $|x_\nu| \leq \sqrt{3}$.

Последовательность $y_\nu = \left(\frac{\nu+1}{\nu}, \frac{1}{\nu}, \frac{2\nu-1}{\nu+3}\right)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ точек из $\mathbb{R}^3$, очевидно, имеет пределом точку $y = (1, 0, 2)$.

Теорема. *Для того чтобы последовательность точек $x_\nu \in \mathbb{R}^n$ сходилась к точке $x \in \mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы при каждом*

$i = 1, \ldots, n$ *числовая последовательность* $\{x_\nu^i\}_{i=1}^\infty$, *составленная из* i*-х координат точек* x_ν, *сходилась к* i*-й координате* x^i *точки* x.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_\nu \to x$. Тогда из неравенства $|x_\nu^i - x^i| \leq |x_\nu - x|$ $(i = 1, \ldots, n)$, которое следует из определения длины, получаем, что стремление к нулю правой части влечет стремление к нулю левой части при любом i.

Достаточность. Воспользуемся неравенством

$$|x_\nu - x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_\nu^i - x^i)^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \left|x_\nu^i - x^i\right|.$$

Поскольку при каждом $i = 1, \ldots, n$ имеем $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu^i = x^i$, то для любого i найдется такое N_i, что при каждом $\nu \geq N_i$ справедливо $\left|x_\nu^i - x^i\right| < \frac{\varepsilon}{n}$. Если положим $N = \max(N_1, \ldots, N_n)$, то для любого $\nu \geq N$ получим $|x_\nu - x| < \varepsilon$, т. е. $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x$. $\square$

Теорема (арифметические свойства пределов). *Пусть* $\{x_\nu\}$, $\{y_\nu\}$ *– две последовательности точек из* $\mathbb{R}^n$, *такие, что* $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x$, $\lim_{\nu\to\infty} y_\nu = y$ *и* $\{\alpha_\nu\}$ *– последовательность действительных чисел, такая, что* $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \alpha$. *Тогда*

1) $\lim_{\nu\to\infty}(x_\nu + y_\nu) = x + y$;

2) $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu x_\nu = \alpha x$;

3) $\lim_{\nu\to\infty}(x_\nu \cdot y_\nu) = (x \cdot y)$;

4) $\lim_{\nu\to\infty} |x_\nu| = |x|$.

Доказательство. Свойство 1) очевидно.

2) Поскольку последовательность $\{x_\nu\}$ сходится, то она ограничена. Пусть $|x_\nu| \leq M$. Тогда, в силу неравенства треугольника, имеем

$$|\alpha_\nu x_\nu - \alpha x| \leq |\alpha_\nu x_\nu - \alpha x_\nu| + |\alpha x_\nu - \alpha x| =$$

$$= |\alpha_\nu - \alpha||x_\nu| + |\alpha||x_\nu - x| \leq M|\alpha_\nu - \alpha| + |\alpha||x_\nu - x|.$$

Отсюда следует 2).

3) Пользуясь неравенством Коши и неравенством треугольника, ограниченностью последовательности $\{y_\nu\}$ (т. е. $|y_\nu| \leq M$) и свойствами ска-

лярного произведения, получаем

$$|x_\nu \cdot y_\nu - x \cdot y| \le |x_\nu \cdot y_\nu - x \cdot y_\nu| + |x \cdot y_\nu - x \cdot y| =$$

$$= |(x_\nu - x) \cdot y_\nu| + |x \cdot (y_\nu - y)| \le |x_\nu - x||y_\nu| + |x||y_\nu - y| \le M|x_\nu - x| + |x||y_\nu - y|.$$

Отсюда, очевидно, следует 3).

Для доказательства 4) достаточно показать, что

$$||x_\nu| - |x|| \le |x_\nu - x|.$$

Это неравенство, в свою очередь, вытекает из следующих двух очевидных неравенств:

$$|x_\nu| \le |x| + |x_\nu - x|, \quad |x| \le |x_\nu| + |x - x_\nu|. \quad \square$$

Определение. Последовательность $\{x_\nu\}$ называется фундаментальной, или последовательностью Коши, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для любых двух номеров $\nu, \mu \ge N$ справедливо неравенство $|x_\nu - x_\mu| < \varepsilon$.

Теорема (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность $\{x_\nu\}$ точек в $\mathbb{R}^n$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такой номер N, что для всех $\nu \ge N$ справедливо неравенство $|x_\nu - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если $\nu, \mu \ge N$, то, в силу неравенства треугольника, получим

$$|x_\nu - x_\mu| \le |x_\nu - x| + |x_\mu - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а это означает, что последовательность фундаментальна.

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_\nu\}$ фундаментальна. Покажем, что она сходится. Для этого достаточно установить, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ числовая последовательность $\{x_\nu^i\}$ является сходящейся. Но это сразу следует из неравенства $|x_\nu^i - x_\mu^i| \le |x_\nu - x_\mu|$. Действительно, поскольку последовательность $\{x_\nu\}$ фундаментальна, то и числовая последовательность $\{x_\nu^i\}$ также фундаментальна. Применяя теперь критерий Коши сходимости числовых последовательностей, получаем, что последовательность $\{x_\nu^i\}$ сходится. Обозначим $x^i = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда получим, что последовательность $\{x_\nu\}$ сходится к $x = (x^1, \ldots, x^n)$. $\square$

Следующая теорема дает еще одно равносильное определение предельной точки множества.

Теорема. *Для того чтобы точка $x \in \mathbb{R}^n$ являлась предельной точкой множества E, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_\nu\}$ попарно различных точек множества E, сходящаяся к x.*

Доказательство. Необходимость. Пусть x – предельная точка множества E. Выберем произвольную точку $x_1 \in E$, отличную от x. Далее, выберем точку $x_2 \in E$, отличную от x, так, чтобы было выполнено неравенство $|x - x_2| < \frac{1}{2}|x - x_1|$. Продолжая этот процесс, получим последовательность точек $x_\nu \in E$, $x_\nu \neq x$, и таких, что $|x - x_\nu| < \frac{1}{2}|x - x_{\nu-1}|$. Из последнего неравенства следует, что все точки x_ν попарно различны. Кроме того, из неравенства $|x_\nu - x| < 2^{1-\nu}|x_1 - x|$ вытекает, что $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x$.

Достаточность. Пусть $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x$ и точки $x_\nu \in E$ попарно различны. Тогда можно считать, что ни одна из них не совпадает с точкой x. Поскольку, в силу определения предела, любая окрестность точки x содержит все элементы последовательности, начиная с некоторого номера, то x – предельная точка множества E. $\square$

Лемма Больцано – Вейерштрасса. *Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x_\nu\}$ – ограниченная последовательность. Обозначим через E множество значений этой последовательности. Рассмотрим два случая.

1. Если множество E конечно, то найдется такая строго возрастающая последовательность индексов $\nu_1 < \nu_2 < \ldots$, что $x_{\nu_1} = x_{\nu_2} = \ldots$ Это

означает, что подпоследовательность $\{x_{\nu_k}\}$ сходится.

2. Пусть множество E бесконечно. Поскольку оно еще и ограничено, то E имеет хотя бы одну предельную точку x. По предыдущей теореме, существует последовательность попарно различных точек из множества E, сходящаяся к x. Эти точки множества E являются элементами последовательности $\{x_\nu\}$ и, очевидно, можно считать, что номера $\nu_1, \nu_2, \ldots$ этих элементов последовательности строго возрастают. Таким образом, мы получили подпоследовательность $\{x_{\nu_k}\}$, сходящуюся к x. □

Замечание. Можно было дать и прямое доказательство леммы Больцано – Вейерштрасса, аналогичное тому, что было приведено в одномерном случае (основанное на методе деления отрезка). Для этого нужно взять сегмент, содержащий все x_ν, и, проводя последовательно деление его сторон пополам, выбирать каждый раз тот частичный сегмент, в котором находится бесконечно много элементов последовательности $\{x_\nu\}$.

Проведите самостоятельно.

11. Непрерывные отображения

Пусть X и Y – произвольные множества. Отображением f из X в Y (или функцией, заданной на X со значениями в Y) называется соответствие, которое каждому $x \in X$ сопоставляет единственный элемент $y \in Y$. Множество X называется областью определения, а множество всех $y \in Y$, являющихся значениями отображения f, называется областью значений или образом множества X и обозначается $f(X)$.

Если A – произвольное подмножество из Y, то множество тех $x \in X$, для которых $f(x) \in A$, называется прообразом множества A и обозначается $f^{-1}(A)$. Не следует путать f^{-1} с обратным отображением, т. к. его может и не быть.

Будем рассматривать функции f, определенные на некоторых множествах $E \subset \mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}^m$. Такие функции называются векторными функциями многих переменных. Значениями функции f являются m-мерные векторы. Эти функции будем называть также отображениями. Функция $f: E \longmapsto \mathbb{R}$, где $E \subset \mathbb{R}^n$, т. е. такая, значения которой являются действительными числами, называется действительной функцией.

Пусть $f: E \longmapsto \mathbb{R}^m,\ m \geq 2$, где $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для любого фиксированного $x \in E$ значением $f(x)$ есть m-мерный вектор, который может быть записан в виде

$$f(x) = \left(f^1(x), \ldots, f^m(x)\right),$$

где $f^i(x)$ – действительные числа – координаты вектора $f(x)$. Таким образом, мы получаем m действительных функций на множестве E: $f^i: E \longmapsto \mathbb{R}$. Эти функции f^i называют компонентами векторной функции f, и пишут $f = (f^1, \ldots, f^m)$.

В дальнейшем важное значение будут иметь функции $\pi^i : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$, которые каждому вектору $x \in \mathbb{R}^n$ ставят в соответствие его i-ю координату. Функцию π^i называют i-й проекцией.

Пусть $f, g : E \longmapsto \mathbb{R}^m$, где $E \subset \mathbb{R}^n$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$. Определим следующие операции над функциями:

$f + g : E \longmapsto \mathbb{R}^m, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$;

$\alpha f : E \longmapsto \mathbb{R}^m, \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$;

$f \cdot g : E \longmapsto \mathbb{R}, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ (в правой части скалярное произведение двух m-мерных векторов).

Пусть $f : E \longmapsto \mathbb{R}^m,\ E \subset \mathbb{R}^n$, а $g : N \longmapsto \mathbb{R}^k,\ N \subset \mathbb{R}^m$, причем $f(E) \subset N$. Тогда композицией (или сложной функцией) $g \circ f$ называют функцию $g \circ f : E \longmapsto \mathbb{R}^k$, определяемую равенством $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in E)$.

Если $f = \big(f^1, \ldots, f^m\big) : E \longmapsto \mathbb{R}^m$, то i-я координата функции f может быть представлена в виде $f^i = \pi^i \circ f$.

11.1 Предел функции

Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$, a – предельная точка множества E и функция $f : E \longmapsto \mathbb{R}^m$.

Определение. Точка $b \in \mathbb{R}^m$ называется пределом функции f в точке a по множеству E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in E$, отличных от точки a и удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$b = \lim_{x \to a,\ x \in E} f(x)$$

и говорят, что $f(x)$ стремится к b, пробегая множество E, или $f(x)$ стремится к b вдоль множества E.

Если множество E содержит некоторый шар с центром в точке a, за исключением, быть может, самой точки a, то просто пишут $b = \lim_{x \to a} f(x)$.

Замечание 1. В самой точке a функция f может быть и не определена. Но даже если она и определена в точке a, то мы не требуем, чтобы было выполнено равенство $f(a) = b$, поскольку в точке a выполнение неравенства $|f(x) - b| < \varepsilon$ не требуется.

Замечание 2. Пусть $f: E \longmapsto \mathbb{R}^m$ и $\lim_{x\to a,\ x\in E} f(x) = b$. Тогда для любого подмножества $A \subset E$, для которого точка a является предельной, очевидно, $\lim_{x\to a,\ x\in A} f(x) = b$. Если же по двум различным подмножествам $A_1, A_2 \subset E$, имеющим a предельной точкой, пределы функции f в точке a будут различными, то по множеству E в этой точке предела у функции f нет. Это очевидно.

Пример. Пусть

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \bigl((x,y) \in E \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\bigr),$$

$$A_1 = \{(x,y) \in E:\ x = y\}, \quad A_2 = \{(x,y) \in E:\ x = 0\}.$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ (x,y)\in A_1} f(x,y) = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0),\ (x,y)\in A_2} f(x,y) = -1.$$

Легко также убедиться в том, что у этой функции существуют пределы вдоль любой прямой, проходящей через начало координат, но эти пределы различные. Поэтому функция f не имеет предела вдоль множества E.

Теорема. *Пусть функция $f:\ E \longmapsto \mathbb{R}^m,\ E \subset \mathbb{R}^n$, и a – предельная точка множества E. Для того чтобы точка $b \in \mathbb{R}^m$ являлась пределом функции f в точке a по множеству E, необходимо и достаточно, чтобы для любой сходящейся к a последовательности $\{x_\nu\}$ точек из E, отличных от a, было выполнено равенство* $\lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu) = b$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim_{x\to a,\ x\in E} f(x) = b$ и пусть $x_\nu \in E,\ x_\nu \neq a,\ \lim_{\nu\to\infty} x_\nu = a$, т. е. зафиксирована некоторая последовательность $\{x_\nu\}$. Докажем, что $\lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu) = b$.

Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда, по определению предела функции, найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in E$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Так как $x_\nu \to a$ и $x_\nu \neq a$, то найдется такой номер N, что при любом $\nu \geq N$ будет $0 < |x_\nu - a| < \delta$.

Поэтому для $\nu \geq N$ выполнено неравенство $|f(x_\nu) - b| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu) = b$.

Достаточность. Предположим, что предел функции f в точке a либо не существует, либо существует, но не равен b. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется точка $x' \in E,\ x' \neq a$, для которой $|x' - a| < \delta$, но $|f(x') - b| \geq \varepsilon_0$. Полагая $\delta = \frac{1}{\nu}$, построим последовательность точек x'_ν, для которых $0 < |x'_\nu - a| < \frac{1}{\nu}$, но $|f(x'_\nu) - b| \geq \varepsilon_0$. Тогда получим, что $x'_\nu \to a$, но $f(x'_\nu)$ не стремится к b, а это противоречит условию. $\square$

Доказанная теорема позволяет сформулировать равносильное определение предела функции по Гейне.

Определение. Точка b называется пределом функции f в точке a, если для любой последовательности $\{x_\nu\}$ точек из E, сходящейся к a, $x_\nu \neq a$, соответствующая последовательность $\{f(x_\nu)\}$ значений функции сходится к точке b.

Теорема (арифметические свойства предела). *Пусть функции* $f, g:\ E \longmapsto \mathbb{R}^m,\ E \subset \mathbb{R}^n,\ a$ *– предельная точка множества* E *и*

$$\lim_{x\to a,\ x\in E} f(x) = b, \qquad \lim_{x\to a,\ x\in E} g(x) = c.$$

Тогда

1) $\lim_{x\to a,\ x\in E}(f+g)(x) = b + c$;

2) $\lim_{x\to a,\ x\in E}(f\cdot g)(x) = b\cdot c$;

3) *если* f, g *– действительные функции (т. е.* $m = 1$*) и* $g(x) \neq 0,\ c \neq 0$, *то* $\lim_{x\to a,\ x\in E}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{b}{c}$.

Для доказательства достаточно воспользоваться определением предела по Гейне и соответствующей теоремой для последовательностей.

11.2 Непрерывные функции

Пусть функция $f:\ E \longmapsto \mathbb{R}^m,\ E \subset \mathbb{R}^n$ и точка $x_0 \in E$.

Определение. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in E$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Если x_0 – предельная точка множества E, то непрерывность функции f в точке x_0 равносильна тому, что $\lim_{x \to x_0,\ x \in E} f(x) = f(x_0)$.

Пусть точка x_0 не является предельной для E. Это означает, что найдется такая окрестность U точки x_0, в которой нет других точек множества E. Такая точка называется изолированной точкой множества E. Ясно, что каждая точка множества E является либо предельной, либо изолированной. Очевидно, в изолированной точке множества E любая функция f непрерывна, это следует сразу из определения непрерывности.

Равносильное данному выше определение непрерывности в терминах окрестностей может быть сформулировано следующим образом.

Определение. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если для любой окрестности V точки $f(x_0)$ найдется такая окрестность U точки x_0, что образ $f(U \cap E)$ множества $U \cap E$ содержится в V, т. е. $f(U \cap E) \subset V$.

Используя определение предела по Гейне, можно также легко сформулировать определение непрерывности функции в точке в терминах последовательностей.

Теорема. *Пусть функция $f : E \longmapsto \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$. Для того чтобы f была непрерывной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы были непрерывными в точке x_0 все ее компоненты.*

Эта теорема мгновенно вытекает из следующего неравенства:

$$\left|f^i(x) - f^i(x_0)\right| \leq |f(x) - f(x_0)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left[f^j(x) - f^j(x_0)\right]^2}\ (i = 1, \ldots, m).$$

Теорема. *Пусть функции $f, g : E \longmapsto \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$. Если f и g непрерывны в точке $x_0 \in E$, то в этой точке непрерывны и функции $f + g$, $f \cdot g$. Если f, g – действительные функции и $g(x) \neq 0$ на E, то $\frac{f}{g}$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Действительно, если x_0 – изолированная точка, то в этой точке непрерывна каждая функция. Если же x_0 – предельная точка множества E, то для доказательства этой теоремы достаточно применить соответствующую теорему для пределов функции. $\square$

Теорема (о непрерывности сложной функции). *Пусть $f: E \longmapsto \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$ и $g: N \longmapsto \mathbb{R}^k$, $N \subset \mathbb{R}^m$, причем $f(E) \subset N$. Если f непрерывна в точке $x_0 \in E$, а функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \in N$, то композиция $h \equiv g \circ f$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции g в точке y_0, найдется такое $\eta > 0$, что для всех $y \in N$, удовлетворяющих условию $|y - y_0| < \eta$, выполнено неравенство $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. Так как f непрерывна в точке x_0, то для числа η существует такое δ, что для всех $x \in E$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \eta$. Окончательно, если $|x - x_0| < \delta$, то, так как $y_0 = f(x_0)$, получаем $|h(x) - h(x_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$. $\square$

Определение. Функция $f: E \longmapsto \mathbb{R}^m$ называется непрерывной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пример 1. Рассмотрим $\pi^i(x) = x^i$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, $\pi^i: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$. Имеем

$$|\pi^i(x) - \pi^i(x_0)| = |x^i - x_0^i| \leq |x - x_0|,$$

так что функция π^i непрерывна на всем $\mathbb{R}^n$.

Пример 2. Пусть $f(x) = (x^i)^\nu$, где $\nu \in \mathbb{N}$. Тогда функция $f: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ непрерывна на всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

Действительно, рассмотрим функцию $g(t) = t^\nu$ $(t \in \mathbb{R})$. Тогда $f = g \circ \pi^i$ и из теоремы о непрерывности сложной функции сразу получаем утверждение.

Пример 3. Функция

$$f(x) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{i_n=0}^{m_n} C_{i_1,\ldots,i_n} (x^1)^{i_1} \ldots (x^n)^{i_n}$$

непрерывна на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Это следует из двух предыдущих примеров.

Пример 4. Пусть $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Тогда из неравенства

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \le |x - x_0| \quad (x, x_0 \in \mathbb{R}^n)$$

сразу следует непрерывность функции f.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым относительно множества $B \subset \mathbb{R}^n$, если существует такое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, что $A = G \cap B$.

Теорема. *Если функция $f : E \longmapsto \mathbb{R}^m$ непрерывна на множестве E, то прообраз любого открытого множества $H \subset \mathbb{R}^m$ открыт относительно E.*

Доказательство. Если $H \cap f(E) = \emptyset$, то прообраз множества H равен $\emptyset$ и утверждение теоремы в этом случае справедливо.

Пусть $H \cap f(E) \ne \emptyset$. Для каждого $y_0 \in H \cap f(E)$ построим окрестность $V_{y_0} \subset H$ и, пользуясь непрерывностью функции f, для каждого $x_0 \in E$, такого, что $f(x_0) = y_0$, построим такую окрестность U_{x_0}, что $f(U_{x_0} \cap E) \subset V_{y_0}$. Обозначим через G объединение всех таких окрестностей U_{x_0}, полученных, когда y_0 пробегает все множество $H \cap f(E)$. Нетрудно видеть, что прообразом множества H является множество $G \cap E$. $\square$

11.2.1 Непрерывные функции на компактных множествах

Определение. Пусть $f : E \longmapsto \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$. Функция f называется ограниченной на множестве E, если ее образ $f(E)$ – ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$, т. е. если существует такое M, что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|f(x)| \le M$.

Первая теорема Вейерштрасса. *Пусть K – компактное множество в $\mathbb{R}^n$ и функция $f : K \longmapsto \mathbb{R}^m$ непрерывна на K. Тогда эта функция ограничена на K.*

Доказательство. В силу непрерывности f, для любого $x \in K$ найдется окрестность U_x, такая, что функция f ограничена на множестве U_x, т. е. для любого $y \in K \cap U_x$ справедливо неравенство $|f(y)| \le M_x$, где M_x зависит от x. Совокупность открытых шаров U_x образует открытое покрытие компактного множества K. В силу компактности, из него можно выделить конечное подпокрытие $U_{x_1}, \ldots, U_{x_p}$. Этим шарам соответствуют числа $M_{x_1}, \ldots, M_{x_p}$. На каждом из этих шаров функция f ограничена этим числом. Положим $M = \max_{1 \le i \le p} M_{x_i}$. Тогда для каждого $x \in K$ получим, что $|f(x)| \le M$. $\square$

Пусть $f: E \longmapsto \mathbb{R}$, где $E \subset \mathbb{R}^n$. Функция f называется ограниченной сверху на множестве E, если существует такая постоянная M, что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $f(x) \le M$. Каждое такое число M называется верхней границей функции f, а наименьшая из всех верхних границ называется точной верхней границей или верхней гранью функции f и обозначается $\sup_{x \in E} f(x)$.

Из самого определения не следует существование верхней грани. Существование верхней грани вытекает из теоремы о существовании верхней грани для ограниченного сверху множества.

Вторая теорема Вейерштрасса. *Пусть $f: K \longmapsto \mathbb{R}$ – действительная непрерывная функция на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда на этом множестве функция f достигает своей верхней и нижней граней, т. е. существуют такие точки $x', x'' \in K$, что*

$$f(x') = \sup_{x \in K} f(x), \quad f(x'') = \inf_{x \in K} f(x).$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть, например, верхняя грань не достигается, т. е. для любого $x \in K$ справедливо неравенство $f(x) < M$, где M – верхняя грань функции f на K. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Эта функция положительна и непрерывна в каждой точке $x \in K$. По первой теореме Вейерштрасса она ограничена, т. е. существует такое число $\mu > 0$, что $\varphi(x) \le \mu$ для каждого $x \in K$. Это означает, что $\frac{1}{M - f(x)} \le \mu$, или, что то же самое, $f(x) \le M - \frac{1}{\mu}$ $(x \in K)$. Отсюда следует, что число $M - \frac{1}{\mu}$ является верхней границей для функции f. Но поскольку $\mu > 0$, то это противоречит тому, что M является верхней гранью функции f, т. е. наименьшей из всех верхних границ.

Для нижней грани доказательство аналогичное. $\square$

Теорема. *Пусть компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывная функция $f: K \longmapsto \mathbb{R}^m$. Тогда $f(K)$ является компактным множеством в $\mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Пусть $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ – произвольное открытое покрытие множества $f(K)$. Нужно показать, что найдется такой конечный набор множеств $H_{\alpha_1}, \ldots, H_{\alpha_s}$, которые также покрывают K. Для доказательства воспользуемся тем, что при непрерывном отображении f прообраз любого открытого множества открыт относительно K. Это означает, что для любого множества H_α его прообраз $f^{-1}(H_\alpha)$ может быть представлен в виде $f^{-1}(H_\alpha) = G_\alpha \cap K$, где G_α – открытое множество. Тогда совокупность всех множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ образует открытое покрытие компактного множеств K. Пользуясь компактностью множества K, выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $\{G_{\alpha_1}, \ldots, G_{\alpha_s}\}$. Тогда ясно, что совокупность множеств $H_{\alpha_1}, \ldots, H_{\alpha_s}$ образует покрытие множества $f(K)$ и тем самым теорема доказана. $\square$

11.2.2 Равномерная непрерывность

Определение. Пусть $f: E \longmapsto \mathbb{R}^m$. Функция f называется равномерно непрерывной на множестве E, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых точек $x', x'' \in E$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Если f равномерно непрерывна на множестве E, то, очевидно, она непрерывна на этом множестве. Обратное утверждение неверно. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной на этом интервале.

Теорема Кантора. *Пусть множество $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно, функция $f: K \longmapsto \mathbb{R}^m$ непрерывна на K. Тогда f равномерно непрерывна на K.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для любой точки $a \in K$, в силу непрерывности функции f, найдется такая окрестность U_a точки a, что для любой точки $x \in U_a$ имеет место неравенство $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что для любых двух точек $x', x'' \in U_a$ справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Обозначим через U_a^* шар с центром в точке a, радиус которого в два раза меньше, чем у шара U_a. Совокупность шаров $\{U_a^*\}_{a \in K}$ образует открытое покрытие компактного множества K. Из него можно извлечь конечное подпокрытие $U_{a_1}^*, \dots U_{a_s}^*$. Обозначим через δ наименьший из радиусов шаров $U_{a_i}^*$ $(i = 1, \dots, s)$ и убедимся, что это значение δ удовлетворяет требованию, которое фигурирует в определении равномерной непрерывности.

Пусть $x', x'' \in K$ и $|x' - x''| < \delta$. Точка x' принадлежит по крайней мере одному из шаров $U_{a_i}^*$. Тогда $x' \in U_{a_i}$, а из неравенства $|x'' - a_i| \leq |x'' - x'| + |x' - a_i| < 2\delta$ следует, что и точка x'' также принадлежит шару U_{a_i}. Но выше было отмечено, что если точки x', x'' принадлежат одному шару U_{a_i}, то $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, и тем самым теорема доказана. $\square$

11.2.3 Непрерывные функции на связных множествах

Для непрерывной на отрезке функции ранее была доказана теорема Больцано – Коши о промежуточном значении. Утверждение этой теоремы в определенном смысле останется справедливым, если вместо отрезка рассматривать интервал.

Пример. Пусть I_1, I_2 – два непересекающихся отрезка, $E = I_1 \cup I_2$, а функция $f: \ E \longmapsto \mathbb{R}$ определена равенством

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_1, \\ 0, & x \in I_2. \end{cases}$$

Тогда ясно, что функция f непрерывна на E, но не обладает свойством промежуточных значений.

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется связным, если его нельзя разбить на два непустых непересекающихся подмножества, ни одно из которых не содержит предельных точек другого, т. е. если не существует двух таких множеств E_1 и E_2, что $E_1, E_2 \neq \emptyset$, $E_1 \cup E_2 = E$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ и E_1 не содержит предельных точек E_2, а E_2 не содержит предельных точек множества E_1.

Пример. Отрезок $[a, b]$ можно разбить на два непустых непересекающихся множества $[a, c)$ и $[c, b]$, где $a < c \leq b$. Однако данное разбиение таково, что одно из множеств $[c, b]$ содержит предельную точку c другого множества $[a, c)$. Ниже будет доказано, что отрезок – связное множество.

Промежутком в $\mathbb{R}$ называется любой отрезок, интервал или полуоткрытый интервал. Характерное свойство промежутка Δ состоит в том, что для любых точек $x_1, x_2 \in \Delta$, $x_1 < x_2$, отрезок $[x_1, x_2]$ содержится в Δ, т. е. $[x_1, x_2] \subset \Delta$. Это сразу следует из определения промежутка. Справедливо также и обратное утверждение.

Теорема. *Если множество $\Delta \subset \mathbb{R}$ обладает тем свойством, что вместе с любыми двумя точками $x_1, x_2 \in \Delta$, $x_1 < x_2$, оно содержит весь отрезок $[x_1, x_2]$, то Δ является промежутком.*

Доказательство. Обозначим $\alpha = \inf \Delta$, $\beta = \sup \Delta$. Ясно, что достаточно показать, что интервал (α, β) содержится в Δ. Фиксируем произвольное $x \in (\alpha, \beta)$. Тогда найдутся точки $x_1, x_2 \in \Delta$, такие, что $x_1 < x < x_2$ (это следует из определения верхней и нижней граней). По предположению, $[x_1, x_2] \subset \Delta$. Отсюда следует, что $x \in \Delta$. Так как x – произвольно, то тем самым теорема доказана. $\square$

Теорема. *Для того чтобы множество $E \subset \mathbb{R}$ было связным, необходимо и достаточно, чтобы E было промежутком. Другими словами, промежутки, и только они, являются связными множествами в $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть E – связное множество. Докажем, что это промежуток. Предположим, что $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$, и покажем, что $[x_1, x_2] \subset E$. В силу предыдущей теоремы, это будет означать, что E – промежуток.

Предположим противное, т. е. предположим, что существует точка $x \in (x_1, x_2)$, $x \notin E$. Положим $E_1 = E \cap (-\infty, x)$, $E_2 = E \cap (x, +\infty)$. Эти множества непусты, т. к. $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$. Поскольку $x \notin E$, то ясно, что $E = E_1 \cup E_2$. Покажем, что множество E_1 не содержит предельных точек множества E_2. Действительно, если $x' \in E_1$, то x' не может быть предельной точкой множества E_2, поскольку в окрестности точки x' радиуса $\rho = x - x' > 0$ нет точек, принадлежащих E_2. Аналогично покажем, что множество E_2 не содержит предельных точек множества E_1. Таким образом, мы приходим к противоречию со связностью множества E, и тем самым доказана необходимость.

Достаточность. Предположим теперь, что E – промежуток, и докажем его связность. Предположим противное. Пусть множество E разбито на два непустых, непересекающихся множества E_1 и E_2, из которых ни одно не содержит предельных точек другого. Возьмем произвольные точки $a \in E_1,\ b \in E_2$. Тогда $a \neq b$, поскольку множества E_1 и E_2 не пересекаются. Пусть, например, $a < b$. Обозначим через c верхнюю грань множества всех точек из отрезка $[a, b]$, принадлежащих E_1, т. е. $c = \sup E_1 \cap [a, b]$. Предположим, что $c \in E_1$. Но тогда $c < b$, поскольку $b \in E_2$, и $(c, b] \subset E_2$ (здесь мы пользуемся тем, что E – промежуток, а значит $[a, b] \subset E$, так как $a, b \in E$). Итак, получаем, что c – предельная точка множества E_2. Но это невозможно, ибо $c \in E_1$, а множество E_1 не содержит предельных точек множества E_2.

В случае если $c \in E_2$, аналогично получаем, что точка c – предельная для множества E_1. Снова приходим к противоречию. $\square$

Теорема. *Пусть связное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ и функция $f : E \longmapsto \mathbb{R}^m$ непрерывна на E. Тогда образ $f(E)$ также связен, т. е. непрерывный образ связного множества связен.*

Доказательство. Пусть $A = f(E)$. Предположим, что A несвязно. Тогда его можно разбить на два непустых непересекающихся множества A_1 и A_2, из которых ни одно не содержит предельных точек другого. Пусть $E_1 = f^{-1}(A_1)$, $E_2 = f^{-1}(A_2)$. Тогда множества E_1 и E_2 непусты, не пересекаются и $E = E_1 \cup E_2$. Поскольку множество E связно, то по крайней мере одно из них содержит предельную точку другого. Пусть, например, точка $x_0 \in E_1$ является предельной для множества E_2. Тогда существует последовательность $\{x_\nu\}$ точек из E_2, сходящаяся к x_0. В силу непрерывности функции f в точке x_0, получаем $\lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu) = f(x_0)$. Но $f(x_0) \in A_1$, а $f(x_\nu) \in A_2$. Отсюда следует, что точка $f(x_0)$ из A_1 является предельной для множества A_2, и мы приходим к противоречию. $\square$

Следствие (теорема Больцано – Коши). *Пусть функция $f:\ E \longmapsto \mathbb{R}$ непрерывна на связном множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для любых точек $a, b \in E$ и для любого c, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдется такая точка $x \in E$, что $c = f(x)$.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы, множество $A = f(E)$ связно. Это подмножество действительной оси, так что A – промежуток. Числа $f(a)$ и $f(b)$ принадлежат A, а значит, c, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$, также принадлежит A, т. е. число c является значением функции f в некоторой точке x. $\square$

Определение. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Отрезком, соединяющим точки a и b, называется множество всех точек $x = at + b(1-t)$, где $0 \le t \le 1$.

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит отрезок, соединяющий эти точки.

Напомним, что путем в $\mathbb{R}^n$ называется каждое непрерывное отображение $\gamma:\ [\alpha, \beta] \longmapsto \mathbb{R}^n$ некоторого отрезка $[\alpha, \beta]$ действительной прямой в пространство $\mathbb{R}^n$. Образ $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ при отображении γ называется следом пути.

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если любые две его точки x', x'' можно соединить путем, след которого лежит во множестве E. Говорят, что путь $\gamma:\ [\alpha, \beta] \longmapsto \mathbb{R}^n$ соединяет точки x' и x'', если $\gamma(\alpha) = x'$ и $\gamma(\beta) = x''$. Точку $\gamma(\alpha)$ называют началом пути, а точку $\gamma(\beta)$ – концом пути.

Теорема. *Каждое линейно связное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ связно.*

Доказательство. Предположим, что множество E несвязно, т. е. его можно разбить на два непустых, непересекающихся подмножества E_1 и E_2, из которых ни одно не содержит предельных точек другого. Пусть $a \in E_1,\ b \in E_2$. Поскольку E линейно связно, то точки a и b можно соединить путем $\gamma:\ [\alpha, \beta] \longmapsto \mathbb{R}^n$, след которого Γ содержится в E. Обозначим $\Gamma_1 = \Gamma \cap E_1$, $\Gamma_2 = \Gamma \cap E_2$, и пусть $\Delta_1 = \gamma^{-1}(\Gamma_1)$, $\Delta_2 = \gamma^{-1}(\Gamma_2)$. Тогда $\Delta_1 \cup \Delta_2 = [\alpha, \beta]$, множества Δ_1 и Δ_2 не пересекаются и непусты поскольку непустыми являются множества Γ_1 и Γ_2. Поэтому хотя бы одно из множеств Δ_1, Δ_2 содержит предельную точку другого. Пусть $t_0 \in \Delta_1$ – предельная точка для Δ_2. Тогда существует последовательность $\{t_k\}$ точек из Δ_2, сходящаяся к t_0. В силу непрерывности γ имеем $\gamma(t_k) \to \gamma(t_0)$ $(k \to \infty)$. Но $\gamma(t_0) \in E_1$, а $\gamma(t_k) \in E_2$, и мы видим, что множество E_1 содержит предельную точку множества E_2, вопреки нашему предположению. $\square$

Пример. Обозначим $E = E_1 \cup E_2$, где

$$E_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = \sin\frac{1}{x},\ x \neq 0\right\},$$

$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = 0,\ -1 \leq y \leq 1\}.$$

Тогда множество E связно, но не является линейно связным. Это означает, что утверждение, обратное доказанной выше теореме, неверно.

12. Дифференцируемые действительные функции

12.1 Линейные формы

Определение. Функция $A: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ называется линейной, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и для любого числа α справедливы равенства

$$A(x+y) = A(x) + A(y),$$

$$A(\alpha x) = \alpha A(x).$$

Теорема. *Каждая линейная функция равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n \in \mathbb{R}^n$, где e_i – векторы стандартного ортогонального базиса. Тогда, в силу линейности,

$$Ax = A(x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n) = x^1 A(e_1) + \ldots + x^n A(e_n).$$

Так как $|x^i| \le |x|$ $(i = 1, \ldots, n)$, то получаем

$$|Ax| \le |x^1||Ae_1| + \ldots + |x^n||Ae_n| \le K|x|,$$

где $K = \sum_{i=1}^n |Ae_i|$. Таким образом, для любого $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $|Ax| \le K|x|$, а отсюда следует, что для любой пары точек $x', x'' \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $|A(x') - A(x'')| = |A(x' - x'')| \le K|x' - x''|$. Отсюда следует равномерная непрерывность A. $\square$

Каждую действительную линейную функцию называют линейной формой. Во множестве всех линейных форм определим операции сложения и умножения на действительное число с помощью равенств

$$(A+B)(x) = Ax + Bx, \quad (\alpha A)(x) = \alpha A(x).$$

Таким образом, для множества всех линейных форм выполнены аксиомы линейного пространства. При этом нулевой является форма, тождественно равная нулю, т. е. $Ax = 0 \ (x \in \mathbb{R}^n)$. Пространство всех линейных форм на $\mathbb{R}^n$ называется пространством, сопряженным с пространством $\mathbb{R}^n$, и обозначается $(\mathbb{R}^n)^*$.

Пусть A – линейная форма на $\mathbb{R}^n$. Если $x = x^1e_1 + \ldots + x^ne_n$, то, в силу линейности, $Ax = x^1Ae_1 + \ldots + x^nAe_n$. Обозначим $a_i = Ae_i \ (i = 1, \ldots, n)$. Тогда получим

$$Ax = a_1x^1 + \ldots + a_nx^n. \tag{12.1}$$

Это означает, что каждая линейная форма удовлетворяет равенству (12.1). Обратно, если заданы n действительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ и функция A определена с помощью равенства (12.1), то эта функция будет линейной формой на $\mathbb{R}^n$. Таким образом, равенство (12.1) выражает общий вид линейной формы на $\mathbb{R}^n$.

Пример линейной формы на $\mathbb{R}^2: \ A(x, y) = 2x - 3y$; на $\mathbb{R}^3: \ A(x, y, z) = x + 3y - 4z$. Функция $A(x) = 2x + 1$ не является линейной формой на $\mathbb{R}$.

Напомним, что через π^i обозначается функция на $\mathbb{R}^n$, определяемая равенством $\pi^i(x) = x^i \ (i = 1, \ldots, n)$.

В силу равенства (12.1) можем записать

$$Ax = a_1x^1 + \ldots + a_nx^n = a_1\pi^1(x) + \ldots + a_n\pi^n(x), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда следует равенство

$$A = a_1\pi^1 + \ldots a_n\pi^n. \tag{12.2}$$

Таким образом, каждая линейная форма может быть представлена в виде линейной комбинации функций $\pi^i \ (i = 1, \ldots, n)$, которые также являются линейными формами. В полученном разложении коэффициенты $a_i = A(e_i) \ (i = 1, \ldots, n)$. Покажем, что $\pi^1, \ldots, \pi^n$ образуют в сопряженном пространстве $(\mathbb{R}^n)^*$ линейно независимую систему.

Действительно, пусть числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таковы, что $\alpha_1\pi^1 + \ldots + \alpha_n\pi^n = 0$ – нулевая форма. Отсюда следует, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство $\alpha_1 x^1 + \ldots + \alpha_n x^n = 0$. В частности, если положим $x^i = \alpha_i$, то получим $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 0$. Отсюда получаем, что все числа $\alpha_i = 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, система $\pi^1, \ldots, \pi^n$ линейно независима и каждый элемент из $(\mathbb{R}^n)^*$ выражается в виде линейной комбинации элементов этой системы. Это означает, что система $\pi^1, \ldots, \pi^n$ является базисом в пространстве $(\mathbb{R}^n)^*$ и это пространство n-мерно. Указанный базис называется стандартным базисом в $(\mathbb{R}^n)^*$ или базисом, сопряженным (или дуальным) со стандартным базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в $\mathbb{R}^n$.

Вернемся к разложению (12.2). Заметим, что коэффициенты разложения (12.2) определяются однозначно и имеют вид $a_i = A(e_i)$. Они являются координатами линейной формы A в стандартном базисе $(\mathbb{R}^n)^*$:

$$x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n, \quad A = a_1 \pi^1 + \ldots + a_n \pi^n.$$

Пусть A – линейная форма на $\mathbb{R}^n$ и $A \neq 0$. Тогда образом $\mathbb{R}^n$ при отображении A является $\mathbb{R}$, т. е. вся числовая прямая. Поэтому уравнение $Ax = c$ имеет решение относительно x при любом действительном c.

Определение. Гиперплоскостью в $\mathbb{R}^n$, определяемой линейной формой A, будем называть множество всех таких $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $Ax = c$, где c – фиксированное действительное число.

Если $c = 0$, то соответствующая гиперплоскость проходит через начало координат. Такую гиперплоскость называют однородной.

Пример 1. При $n = 2$ гиперплоскости представляют собой прямые в $\mathbb{R}^2$, а однородные гиперплоскости – прямые в $\mathbb{R}^2$, проходящие через начало координат.

Пример 2. При $n = 3$ гиперплоскости представляют собой плоскости в $\mathbb{R}^3$.

Пример 3. В общем случае линейная форма A задается равенством $Ax = a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n$ и поэтому уравнение гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$ имеет вид $a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n = c$.

Замечание. Однородную гиперплоскость можно также определить как $(n-1)$-мерное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$. Действительно, пусть задано $(n-1)$-мерное подпространство H. Покажем, что оно является ядром некоторой ненулевой линейной формы. Так как $H \neq \mathbb{R}^n$, то существует вектор $u \notin H$. Если $v_1, \ldots, v_{n-1}$ – базис в H, то система $v_1, \ldots, v_{n-1}, u$ – базис в $\mathbb{R}^n$. Это значит, что каждый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ однозначно представляется в виде

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \alpha u.$$

Положим $A(x) = \alpha$. Очевидно, что A – линейная форма на $\mathbb{R}^n$ и что $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ A(x) = 0\}$.

Обратное утверждение предлагается доказать самостоятельно.

12.2 Производная

Пусть f – действительная функция, определенная на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Производной функции f в точке $x_0 \in (a, b)$ мы называли предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0). \tag{12.3}$$

Функцию f называли дифференцируемой в точке x_0, если

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \overline{o}(h) \quad (h \to 0).$$

Ранее было показано, что дифференцируемость эквивалентна наличию производной.

Определим линейную функцию на прямой равенством $A(h) = f'(x_0)h$ $(h \in \mathbb{R})$. Тогда равенство (12.3) можно переписать в виде

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h)}{|h|} = 0, \tag{12.4}$$

а определение дифференцируемости можно сформулировать так: функция f дифференцируема в точке x_0, если существует такая линейная функция A, что выполняется равенство (12.4). В таком виде определение дифференцируемости может быть перенесено на многомерный случай.

Определение. Пусть функция $f:\ E \longmapsto \mathbb{R}$ задана на некотором открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и точка $x_0 \in E$. Функция f называется дифференцируемой в точке $x_0 \in E$, если существует такая линейная форма $A:\ \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$, что выполняется равенство

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - A(h)}{|h|} = 0. \tag{12.5}$$

Эта линейная форма A называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$. Ее называют также дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначают $\mathrm{d}f(x_0)$.

Равенство (12.5) равносильно следующему соотношению:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A(h) + r(h), \tag{12.6}$$

где $\frac{r(h)}{|h|} \to 0$ при $h \to 0$. В этом случае пишут, что $r(h) = \overline{o}(h)$ и поэтому вместо (12.6) можно записать

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A(h) + \overline{o}(|h|). \tag{12.7}$$

Если положить $h = x - x_0$, то условие дифференцируемости (12.7) можно переписать в следующем виде:

$$f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + \overline{o}(|x-x_0|). \tag{12.8}$$

Обозначим $\lambda(x) = f(x_0) + A(x-x_0)$. Функция λ достаточно хорошо приближает функцию f вблизи точки x_0. Эта функция λ является аффинной (аффинной называется функция вида $\lambda(x) = A(x) + c$, где A – линейная форма, т. е. аффинная функция – это сдвиг линейной формы на постоянную c).

Графиком функции $f:\ E \longmapsto \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R}^n)$ называется множество точек $(x^1,\ldots,x^n,z) \in \mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющих условию $z = f(x^1,\ldots,x^n)$, где $x \in E$, а $x^1,\ldots,x^n$ – координаты вектора x.

Пусть Q – некоторое множество в $\mathbb{R}^m$. Расстоянием от точки x_0 до множества Q называется число

$$d(x_0,Q) = \inf_{y\in Q} |x_0 - y|.$$

Определение. Пусть функция $f: \ E \longmapsto \mathbb{R}$, где открытое множество $E \subset \mathbb{R}^n$, и пусть Q – график функции f в $\mathbb{R}^{n+1}$. Гиперплоскость H в $\mathbb{R}^{n+1}$ называется касательной гиперплоскостью к графику функции f в точке $w_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n, z_0)$, где $z_0 = f(x_0)$, если эта гиперплоскость проходит через точку w_0 и выполнено условие

$$\lim_{w \to w_0, \ w \in H} \frac{d(w, Q)}{|w - w_0|} = 0. \tag{12.9}$$

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, Q – график функции f. Тогда выполнено соотношение

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \overline{o}(|x - x_0|).$$

Рассмотрим гиперплоскость H в $\mathbb{R}^{n+1}$, определяемую уравнением $z = f(x_0) + A(x - x_0)$. Пусть $w = (x^1, \ldots, x^n, z) \in H$. Оценим, используя (12.8),

$$d(w, Q) \leq |f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)| = \overline{o}(|x - x_0|).$$

Но из неравенства $|x - x_0| \leq |w - w_0|$ получаем, что выполнено соотношение (12.9). Таким образом, если функция f дифференцируема в точке x_0, то в соответствующей точке w_0 ее графика существует касательная гиперплоскость. Эта гиперплоскость задается уравнением

$$z = f(x_0) + A(x - x_0),$$

где $A = f'(x_0)$. В этом состоит геометрический смысл производной.

Следует понимать, что $f'\,(x_0) \equiv \mathrm{d}f\,(x_0)$ – это единый символ, определяющий линейную форму, т. е. производная – это не число, а линейная форма. При этом функция f задана на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, а $f'(x_0)$, как и всякая линейная форма, определена на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. В то же время для любого $h \in \mathbb{R}^n$ значение линейной формы $f'(x_0)(h)$ является действительным числом.

Согласно нашему обозначению, производная и дифференциал – одно и то же понятие.

Итак, мы получаем отображение $x_0 \longmapsto \mathrm{d}f(x_0)$, которое каждой точке $x_0 \in E$ ставит в соответствие линейную форму $\mathrm{d}f(x_0)$.

При $n = 1$ производной функции f в точке x_0 мы называли число

$$a = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Это равносильно тому, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} = 0, \tag{12.10}$$

а функция f называлась дифференцируемой в точке x_0, если существует такое число a, что выполнено равенство (12.10).

В многомерном случае для определения производной мы используем линейную форму A. При $n = 1$ существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел $\mathbb{R}$ и множеством $\mathbb{R}^*$ всех линейных форм на $\mathbb{R}$. Это соответствие получим, если каждому числу $a \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие линейную функцию $A(h) = ah$. Поэтому, используя вышесказанное, с точностью до изоморфизма можно отождествлять множество всех линейных форм и множество всех действительных чисел.

В одномерном случае часто различают понятие производной и дифференциала. Именно, производной называется число a, его обозначают $f'(x_0)$, для которого справедливо равенство

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \overline{o}(h),$$

где первое слагаемое справа понимается как произведение двух чисел – $f'(x_0)$ и h. Дифференциалом же называют линейную функцию на $\mathbb{R}$, которая действует по правилу $A(h) = f'(x_0)h$ ($h \in \mathbb{R}$). Эту линейную функцию обозначают $\mathrm{d}f(x_0)$ и можно записать

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0)h + \overline{o}(h).$$

Здесь первое слагаемое справа понимается как значение линейной функции $\mathrm{d}f(x_0)$ в точке h. Его можно обозначить также $\mathrm{d}f(x_0)(h)$.

Теорема 1 (о производной аффинной функции). *Пусть f – действительная аффинная функция на $\mathbb{R}^n$, т. е. $f(x) = Ax + c$, где A – линейная форма, c – действительная постоянная, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда функция f дифференцируема в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ и ее производная, или, что то же самое, дифференциал, равна* $\mathrm{d}f(x) = A$.

Доказательство. Поскольку форма A линейная, то

$$f(x+h) - f(x) = A(x+h) + c - (A(x) + c) = A(x+h) - A(x) = A(h).$$

Отсюда следует

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - A(h)}{|h|} = 0,$$

и теорема доказана. □

Замечание. В частном случае, если $f(x) = c$, где c – постоянная, то $\mathrm{d}f(x) = 0$, где 0 – нулевая линейная форма.

Теорема 1 показывает, что производная аффинной функции для всех точек $x \in \mathbb{R}^n$ имеет одно и то же значение A. Это является обобщеним того факта, что в одномерном случае производная аффинной функции постоянна, т. е. $(\alpha x + \beta)' = \alpha$. С геометрической точки зрения графиком аффинной функции является гиперплоскость и она же является касательной для самой себя.

Теорема 2 (о единственности дифференциала). *Если f дифференцируема в точке x_0, то ее дифференциал единственен.*

Доказательство. Предположим, что существуют две линейные формы A_1 и A_2 на $\mathbb{R}^n$ такие что

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - A_i h}{|h|} = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Тогда получаем

$$\lim_{h \to 0} \frac{A_1(h) - A_2(h)}{|h|} = 0.$$

Покажем, что отсюда следует равенство $A_1 = A_2$. Это будет означать, что эти формы совпадают в каждой точке u. Итак, нужно доказать, что для любого $u \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство $A_1(u) = A_2(u)$. Пусть $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$. Полагая $h = tu$, где действительное число $t \neq 0$, получим, что

$$\lim_{t \to 0} \frac{A_1(tu) - A_2(tu)}{|tu|} = 0.$$

Можем считать, что $t > 0$. Тогда, пользуясь линейностью A_1 и A_2, получим

$$\frac{A_1(u) - A_2(u)}{|u|} = 0,$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 3. *Если f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Из дифференцируемости f следует, что

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \overline{o}(|x - x_0|),$$

где $A = \mathrm{d}f(x_0)$ – линейная форма. Но поскольку линейная форма непрерывна в точке 0 и $A(0) = 0$, то при $x \to x_0$ два последних слагаемых справа стремятся к нулю, так что получаем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

что и требовалось доказать. □

Замечание. Из непрерывности функции не следует дифференцируемость. Например, пусть $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}^n$. Тогда из неравенства $||x'| - |x''|| \leq |x' - x''|$ следует, что функция f равномерно непрерывна на всем $\mathbb{R}^n$. Покажем, что в точке $x = 0$ она не является дифференцируемой.

Действительно, предположим, что существует такая линейная форма A, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0) - A(h)}{|h|} = 0,$$

т. е.

$$\lim_{h \to 0} \frac{|h| - A(h)}{|h|} = 0.$$

Отсюда следует, что $\frac{A(h)}{|h|} \to 1$ при $h \to 0$. Если теперь вместо h взять $-h$, то получим, что $\frac{-A(h)}{|h|} \to 1$, или, что то же самое, $\frac{A(h)}{|h|} \to -1$. Тем самым мы пришли к противоречию с единственностью предела.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 + y^2$ в окрестности точки (x_0, y_0). Имеем

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = (x_0 + h)^2 - (y_0 + k)^2 - x_0^2 - y_0^2 =$$

$$= \underbrace{2x_0h + 2y_0k}_{\text{линейная часть}} + h^2 + k^2 = A(h, k) + r(h, k),$$

где $A(h, k) = 2x_0h + 2y_0k$ – линейная функция переменных h и k, $r(h, k) = h^2 + k^2 = \overline{o}(\sqrt{h^2 + k^2})$, поскольку $\frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$ при $(h, k) \to (0, 0)$. Тем самым мы доказали дифференцируемость функции f в точке (x_0, y_0) по определению.

Пример 2. Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

В окрестности каждой точки, кроме начала координат, эта функция является частным двух непрерывных функций и знаменатель отличен от нуля, так что она непрерывна. Докажем, что f непрерывна и в точке $(0, 0)$. Для этого воспользуемся неравенством $2|xy| \le x^2 + y^2$. Отсюда получим, что $|f(x, y)| \le \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$, а из этого неравенства вытекает, что

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

Итак, функция f непрерывна в каждой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Покажем, что она не является дифференцируемой в начале координат. Предположим противное. Тогда справедливо равенство

$$\frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} - \alpha h - \beta k = \overline{o}(\sqrt{h^2 + k^2}),$$

где α и β – действительные числа. Если положим $k = 0,\ h \ne 0$, то получим, что $-\alpha h = \overline{o}(|h|)$. Отсюда следует, что $\alpha = 0$. Аналогично находим, что $\beta = 0$. Таким образом, получаем равенство

$$\frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \overline{o}(\sqrt{h^2 + k^2}),$$

или, поделив на $\sqrt{h^2+k^2}$,

$$\frac{hk}{h^2+k^2} \to 0 \quad (\ (h,k) \to (0,0)\ ).$$

Но это невозможно, ибо если взять $h = k$, то получим $\frac{hk}{h^2+k^2} = \frac{1}{2}$, так что приходим к противоречию.

12.3 Частные производные

Сначала рассмотрим пример. Пусть $f(x,y) = x^2 + y^2$. Производной по x называется

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x,$$

а производной по y –

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Полной производной, или дифференциалом, согласно примеру 1, будет $A(h,k) = 2xh + 2yk,\ A = \mathrm{d}f(x,y)$.

Определение. Пусть $f:\ E \longmapsto \mathbb{R}$, где открытое множество $E \subset \mathbb{R}^n$, и точка $x_0 \in E$. Если существует

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t},$$

то этот предел называется i-й частной производной функции f по переменной x^i в точке x_0 и обозначается одним из символов $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$, $\mathrm{D}_i f(x_0)$, $f'_{x^i}(x_0),\ f'_i(x_0)$.

В этом определении e_i – i-й координатный вектор. Все его координаты – нули, за исключением i-й, равной 1, а $t \neq 0$ пробегает действительные значения, близкие к нулю, так, чтобы точка $x_0 + te_i$ оставалась во множестве E.

Можно записать

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0^1, \ldots, x_0^i + t, \ldots, x_0^n) - f(x_0^1, \ldots, x_0^n)}{t}.$$

Эта запись показывает, что частную производную можно рассматривать как производную функции f по переменной x_i при фиксированных значениях всех остальных переменных. Точнее, $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ есть производная функции одного переменного $g(\xi) = f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, \xi, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n)$ в точке $\xi = x_0^i$.

Частная производная – это число, в отличие от производной $f'(x_0)$, которая называется также полной производной. Полная производная является линейной формой.

Теорема 4. *Пусть f – действительная функция, заданная на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Если функция f дифференцируема в точке $x_0 \in E$, то в этой точке у нее существуют частные производные по всем переменным. При этом справедливо равенство*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)h^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)h^n + \overline{o}(|h|). \tag{12.11}$$

Доказательство. Пусть $A = \mathrm{d}f(x_0)$. Тогда, по определению дифференцируемости,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A(h) + \overline{o}(|h|). \tag{12.12}$$

Положим $h = te_i$, где достаточно малое $t \neq 0$. Тогда получим

$$f(x_0 + te_i) - f(x_0) = tA(e_i) + \overline{o}(t).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \to A(e_i) \quad (t \to 0).$$

Тем самым мы доказали, что существует $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = A(e_i)$. Заметим, что

$$A(h) = A(e_1)h^1 + \ldots + A(e_n)h^n,$$

и поэтому из (12.12) следует (12.11). □

При доказательстве теоремы нами установлено соотношение

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \mathrm{d}f(x_0)e_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

В правой его части записано значение линейной формы $\mathrm{d}f(x_0)$ на i-м базисном векторе e_i.

Формулой

$$\mathrm{d}f(x_0)h = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)h^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)h^n \quad (h \in \mathbb{R}^n)$$

описывается дифференциал $\mathrm{d}f(x_0)$ как линейная форма. Заметим, что из этой формулы вытекает равенство

$$\mathrm{d}f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\pi^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\pi^n,$$

где $\pi^i(h)$ – i-я проекция.

Таким образом, частные производные – это координаты полной производной или дифференциала в стандартном базисе $\pi^1, \ldots, \pi^n$ сопряженного пространства.

Пример 1. Пусть $f(x, y) = x^2 + y^2$. Как было установлено выше, частные производные этой функции по переменным x и y соответственно равны $2x$ и $2y$. Вычислим значение дифференциала этой функции в точке $(1, 2)$ на векторе $(-3, 5)$. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2, \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4, \ \mathrm{d}f(1,2)(-3,5) = 2(-3) + 4 \cdot 5 = 14.$$

Запишем разложение $\mathrm{d}f(1,2)$ по базисным линейным формам $\pi^1, \ \pi^2$:

$$\mathrm{d}f(1,2) = 2\pi^1 + 4\pi^2.$$

Это выражение полностью описывает дифференциал.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x) = |x|, \ x \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что в начале координат у нее нет ни одной частной производной. Действительно, например, $f(x^1, 0, \ldots, 0) = |x^1|$, но, как хорошо известно, у этой функции нет производной в нуле по переменной x^1. Аналогично показываем, что в начале координат нет частных производных по остальным переменным.

Рассмотрим геометрический смысл частной производной на примере функции $f(x, y)$ двух переменных. Сечением графика функции $f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$ есть некоторая кривая – график функции одного переменного $f(x, y_0)$. Касательная к этому графику в точке $x = x_0$ образует некоторый угол α с положительным направлением оси Ox. Тангенс этого угла $\operatorname{tg}\alpha$ и есть частная производная функции $f(x,y)$ по переменной x в точке (x_0,y_0), т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$.

Частные производные в точке (x_0,y_0) характеризуют поведение функции вблизи точки (x_0,y_0) вдоль прямых, параллельных координатным осям. В случае $n \geq 2$ из существования частных производных не следует дифференцируемость функции. Например, пусть функция $f(x,y)=1$, если $xy=0$, и $f(x,y)=0$ во всех остальных точках (x,y). Тогда очевидно, что $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, но, в то же время, функция f разрывна в точке $(0,0)$ и, тем более, она не является дифференцируемой в этой точке.

Пример 1. Пусть

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2},\ x^2+y^2>0,\\ 0,\ x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Если $x^2+y^2>0$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=y\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Вычислим частные производные функции f в начале координат. Поскольку $f(x,0)=0$, то $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. Аналогично $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Таким образом, частные производные функции f существуют во всех точках плоскости. Однако эта функция разрывна в начале координат, поскольку на прямой $x=y\neq 0$ справедливо равенство $f(x,x)=\frac{1}{2}$. Это означает, что ее предел не равен значению функции в точке $(0,0)$.

Итак, фукция f разрывна в начале координат, так что она не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Пример 2. Функция

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ x^2+y^2>0,\\ 0,\quad x^2+y^2=0,\end{cases}$$

как было показано ранее, непрерывна во всех точках плоскости. Легко видеть, что в каждой точке плоскости она имеет частные производные, однако, как было показано выше, в начале координат не является дифференцируемой.

Определение. Пусть действительная функция f определена на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что в каждой точке $x \in E$ существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$. Тогда получаем функцию $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$, определенную на множестве E, которая обозначается $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ и называется i-й частной производной.

Определение. Если функция f в каждой точке x множества E имеет все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ и они непрерывны на множестве E то функция f называется непрерывно дифференцируемой на этом множестве. Через $C^1(E)$ обозначается класс всех непрерывно дифференцируемых на множестве E функций.

Определение. Если функция f дифференцируема в каждой точке множества E, то говорят, что f дифференцируема на множестве E.

Теорема. *Пусть функция f принадлежит классу $C^1(E)$, где открытое множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда f дифференцируема на E.*

Доказательство. Фиксируем $x_0 \in E$. Поскольку множество E открыто, то существует шар U_0 с центром в этой точке, целиком содержащийся в E. Пусть r – радиус этого шара и вектор h имеет длину $|h| < r$. Обозначим $x_j = x_0 + h^1 e_1 + \ldots + h^j e_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Ясно, что $x_n = x_0 + h$. Заметим, что все x_j принадлежат шару U_0. Действительно,

$$|x_0 - x_j| = \sqrt{\sum_{i=1}^{j} (h^i)^2} \le |h| < r.$$

Поскольку шар – выпуклое множество, то каждый из отрезков $[x_{j-1}, x_j]$ содержится в U_0. Действительно, этот отрезок – это множество точек $x = (1-t)x_{j-1} + t x_j$, где $0 \le t \le 1$, и мы получаем

$$|x_0 - x| \le (1-t)|x_0 - x_{j-1}| + t|x_0 - x_j| < r.$$

Воспользуемся равенством

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\sum_{j=1}^{n}[f(x_j)-f(x_{j-1})]. \tag{12.13}$$

Рассмотрим отдельно каждое из слагаемых в правой части. При фиксированном j положим $g(t)=f(x_{j-1}+te_j)$ $\left(0\le t\le h^j\right)$. По определению частной производной имеем

$$g'(t)=\frac{\partial f}{\partial x^j}(x_{j-1}+te_j).$$

По формуле Лагранжа получаем

$$f(x_j)-f(x_{j-1})=g(h^j)-g(0)=g'(\tau_j)h^j=\frac{\partial f}{\partial x^j}(\xi_j)h^j,$$

где $\xi_j=x_{j-1}+\tau_j e_j$ – некоторая точка отрезка, соединяющего x_{j-1} и x_j. Имеем $|x_0-\xi_j|\le|h|$. Обозначим

$$\alpha_j(h)=\frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0)-\frac{\partial f}{\partial x^j}(\xi_j).$$

По условию все частные производные непрерывны в точке x_0 и поэтому

$$\lim_{h\to 0}\alpha_j(h)=0 \quad (j=1,\ldots,n). \tag{12.14}$$

В силу (12.13) имеем

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^j}(\xi_j)h^j=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0)h^j-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(h)h^j=A(h)+\rho(h),$$

где

$$A(h)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0)h^j,\quad \rho(h)=-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(h)h^j.$$

Итак, A является линейной формой аргумента h, а

$$|\rho(h)|\le|h|\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j(h)|\,.$$

Поэтому, в силу соотношений (12.14) получаем, что $\frac{\rho(h)}{|h|} \to 0$ при $h \to 0$.

Согласно определению дифференцируемости, теорема доказана. $\square$

Замечание. Из доказательства видно, что если функция имеет частные производные в некоторой окрестности точки x_0 и в этой точке все они непрерывны, то функция дифференцируема в точке x_0.

Следствие. *Каждая функция класса C^1 непрерывна.*

Замечание. Непрерывность частных производных – только достаточное условие дифференцируемости. Оно не является необходимым.

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} |x|^2 \sin \frac{1}{|x|^2}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = 2x^i \sin \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x^i}{|x|^2} \cos \frac{1}{|x|^2} \quad (x \neq 0).$$

При $x = 0$ наша функция дифференцируема, т. к. $f(h) - f(0) = f(h) = \overline{o}(|h|)$. Однако, как легко видеть, все частные производные разрывны в точке $x = 0$.

12.4 Производная по направлению

Определение. Пусть f – действительная функция на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и v – единичный фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$. Если существует конечный предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t},$$

то его называют производной функции f по направлению вектора v и обозначают $\mathrm{D}_v f(x_0)$, или $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$.

Если $v = e_i$, то производная по направлению вектора v совпадает с i-й частной производной функции f.

Прямой, проходящей через точку x_0 в направлении вектора v называется множество точек вида $x = x_0 + tv$ $(-\infty < t < \infty)$. Производная по направлению характеризует поведение функции вдоль этой прямой вблизи точки x_0. Из определения видно, что производная по направлению – это производная функции одного переменного $\varphi(t) = f(x_0+tv)$, а именно,

$$\mathrm{D}_v f(x_0) = \varphi'(0).$$

Пример. Пусть

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \ x^2+y^2 > 0, \\ 0, \ x = y = 0. \end{cases}$$

Берем вектор с координатами (u, v), такой, что $u^2 + v^2 = 1$. Имеем

$$\frac{f(tu,tv) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3uv^2}{(t^2u^2 + t^4v^4)t} = \frac{uv^2}{u^2+t^2v^4}.$$

Если $u \neq 0$, то предел при $t \to 0$ этого разностного отношения равен $\mathrm{D}_{(u,v)} f(0,0) = \frac{v^2}{u}$. Если же $u = 0$, то, очевидно, $\mathrm{D}_{(0,1)} f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Таким образом, у нашей функции в начале координат существуют производные по любому направлению. Однако наша функция разрывна в начале координат. Действительно, вдоль параболы $x = y^2$ имеем $f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$, так что предела в начале координат функция не имеет.

Теорема. *Пусть действительная функция f на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке $x_0 \in E$. Тогда в этой точке функция f имеет производные по направлению любого единичного вектора $v = (v^1, \ldots, v^n)$, причем справедливо равенство*

$$\mathrm{D}_v f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0)v = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)v^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)v^n. \tag{12.15}$$

Доказательство. По определению дифференцируемости

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A(h) + \overline{o}(|h|) \quad (h \to 0),$$

где $A = \mathrm{d}f(x_0)$. Пусть v – единичный вектор. Положим $h = tv$ и, в силу линейности формы A, получим

$$f(x_0 + tv) - f(x_0) = tA(v) + \overline{o}(t) \quad (t \to 0).$$

Отсюда, разделив на t обе части, будем иметь

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = A(v),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. Равенство (12.15) справедливо в предположении, что функция f дифференцируема. Если у функции f существуют частные производные, то равенство

$$\mathrm{D}_v f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) v^i$$

может и не выполняться. Например, для функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

из равенств $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ следует, что обе частные производные в начале координат

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Возьмем вектор v с координатами $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и найдем производную в начале координат по направлению v. Поскольку $f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{t}{2\sqrt{2}}$, то $\mathrm{D}_v f(0,0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Ясно, что $\mathrm{D}_v f(0,0)$ не является линейной комбинацией частных производных и, следовательно, не вычисляется по общей формуле

$$\mathrm{D}_v f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0)v = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)v^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)v^n.$$

Определение. Если функция f в точке x_0 имеет все частные производные, то вектор

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)e_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)e_n$$

называется градиентом функции f в этой точке и обозначается $\nabla f(x_0)$ или $\mathrm{grad} f(x_0)$.

Итак, градиент – это вектор, координатами которого являются частные производные. Если f дифференцируема в точке x_0, то в этой точке у нее существует градиент и справедливо равенство

$$\mathrm{d}f(x_0)v = \mathrm{grad} f(x_0) \cdot v.$$

В левой части этого равенства значение линейной формы на векторе v, а справа – скалярное произведение двух векторов.

Ранее мы видели, что для любой линейной формы $A \in (\mathbb{R}^n)^*$ существует, и притом единственный, вектор $a \in \mathbb{R}^n$, такой, что для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$Ax = a \cdot x = a^1 x^1 + \ldots + a^n x^n.$$

Этот вектор a имеет координаты $a^i = A(e_i)$. Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между линейными формами и векторами.

Поставим теперь следующую задачу. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, причем $\mathrm{d}f(x_0) \neq 0$, т. е. это ненулевая линейная форма. Тогда и $\mathrm{grad} f(x_0) \neq 0$. По какому направлению функция f возрастает быстрее всего, т. е. по какому направлению v производная $\mathrm{D}_v f(x_0)$ имеет наибольшее значение?

Ранее мы видели, что

$$\mathrm{D}_v f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0)v = \mathrm{grad} f(x_0) \cdot v.$$

Для любого единичного вектора v, в силу неравенства Коши, имеем

$$|\mathrm{D}_v f(x_0)| = |\mathrm{grad} f(x_0) \cdot v| \leq |\mathrm{grad} f(x_0)|.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$|\mathrm{D}_v f(x_0)| \leq |\mathrm{grad} f(x_0)|.$$

Если же взять $v_0 = \frac{\mathrm{grad} f(x_0)}{|\mathrm{grad} f(x_0)|}$, то получим

$$\mathrm{D}_{v_0} f(x_0) = \mathrm{grad} f(x_0) \cdot v_0 = |\mathrm{grad} f(x_0)|.$$

Итак, получили, что производная по направлению единичного вектора v_0, получающегося нормированием градиента, положительна и является наибольшей из всех производных по различным направлениям в данной точке. Это означает, что быстрее всего функция возрастает по направлению градиента.

Пример. Пусть $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$. Найдем в точке $(1,1)$ производную по направлению единичного вектора, образующего угол α с положительным направлением оси Ox, т. е. возьмем $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Имеем $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x$. Так как частные производные существуют всюду и непрерывны, то функция f дифференцируема в точке $(1,1)$. Поэтому производную по направлению v можно вычислить по формуле (12.15)

$$\mathrm{D}_v f(1,1) = \cos\alpha + \sin\alpha.$$

Поставим вопрос: для какого α функция возрастает быстрее всего?

Согласно вышесказанному, это – направление градиента, а поскольку $\mathrm{grad} f(1,1) = (1,1)$, то направление наискорейшего роста функции указывает вектор $(1,1)$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Другим способом на поставленный вопрос можно было бы ответить так:

$$\mathrm{D}_v f(1,1) = \cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

Отсюда видно, что наибольшее значение производная по направлению α имеет в случае, когда $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Лемма. *Пусть f – действительная функция на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ дифференцируема в каждой точке отрезка $[a, a+h] \subset E$. Тогда функция $\varphi(t) = f(a+th)$ $(0 \le t \le 1)$ дифференцируема на отрезке $[0,1]$ и $\varphi'(t) = \mathrm{d}f(a+th)h$.*

Доказательство. Пусть $t \in (0,1)$. Тогда при достаточно малом δ, по свойству дифференцируемости, имеем

$$\varphi(t+\delta) - \varphi(t) = f(a+(t+\delta)h) - f(a+th) = A(\delta h) + \overline{o}(|\delta h|) = \delta A(h) + \overline{o}(\delta),$$

где $A = \mathrm{d}f(a+th)$. Отсюда получаем

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\varphi(t+\delta)-\varphi(t)}{\delta} = A(h),$$

что и требовалось доказать. □

Теорема о среднем. *Пусть f – действительная функция на открытом множестве $E\subset\mathbb{R}^n$ дифференцируема в каждой точке отрезка $[a,b]$, содержащегося в E. Тогда*

$$f(b)-f(a) = \mathrm{d}f(\xi)(b-a),$$

где ξ – некоторая точка из $[a,b]$.

Доказательство. По определению, отрезок $[a,b]$ – это множество точек вида $x=(1-t)a+tb$ $(0\le t\le 1)$. Обозначим $\varphi(t)=f(a+th)$ $(0\le t\le 1,\ \ h=b-a)$. По предыдущей лемме, функция φ (одной переменной) дифференцируема в точке $a+th$ и $\varphi'(t)=\mathrm{d}f(a+th)h$. По теореме Лагранжа

$$f(b)-f(a)=\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\tau),$$

где $\tau\in(0,1)$. Обозначим $\xi=a+\tau(b-a)$. Тогда $\xi\in[a,b]$ и $\varphi'(\tau)=\mathrm{d}f(\xi)(b-a)$. Отсюда следует утверждение теоремы. □

Замечание. Аналог теоремы Ролля для функций многих переменных не имеет места. Точнее, можно сделать вывод о том, что в некоторой точке ξ линейная форма $\mathrm{d}f(\xi)$ обращается в нуль на векторе $(b-a)$. Но отсюда еще не следует, что $\mathrm{d}f(\xi)$ – нулевая линейная форма.

Пример. Пусть $f(x,y)=x+y$. На прямой $x+y=1$ наша функция принимает постоянное значение, равное 1. Поскольку $f(x,y)$ – сама линейная форма, то $\mathrm{d}f\left(x_0,y_0\right)(x,y)=x+y$. Но ясно, что эта линейная форма не является нулевой.

Рассмотрим теперь вопрос о равенстве нулю дифференциала. Если $f(x)\equiv Const$, то для любого x имеем $\mathrm{d}f(x)=0$, где 0 – нулевая линейная форма. Обратное, очевидно, неверно. Например, пусть B_1 и B_2 – непересекающиеся шары, $E=B_1\cup E_2$, а функция f равна нулю на B_1 и единице на B_2. Тогда ясно, что для любого $x \in E$ имеем $\mathrm{d}f(x) = 0$, но функция не является постоянной на E. Такая ситуация оказалась возможной из-за того, что множество E несвязно.

Теорема. *Пусть f – действительная функция, дифференцируемая на открытом связном множестве E. Если $\mathrm{d}f(x) = 0$ для всех $x \in E$, то функция f постоянна на E.*

Доказательство. Напомним, что множество E называется связным, если его нельзя разбить на два непустых непересекающихся множества, ни одно из которых не содержит предельных точек другого.

Фиксируем точку $x_0 \in E$ и обозначим $A = \{x \in E : \ f(x) = f(x_0)\}$. Множество A непусто, т. к. $x_0 \in A$. Нужно доказать, что $A = E$, это и будет означать, что функция f постоянна.

Предположим противное. Пусть $B = E \setminus A \neq \emptyset$. Множество B не может содержать предельных точек множества A. Действительно, если бы точка $x \in B$ являлась предельной для A, то нашлась бы последовательность $\{x_\nu\}$ точек из A, стремящаяся к x. Но тогда, в силу непрерывности f, получили бы, что $f(x_\nu) \to f(x)$. Поскольку $x_\nu \in A$, то $f(x_\nu) = f(x_0)$, так что $f(x_0) = f(x)$. Но это невозможно, поскольку $x \in B$. Итак, множество B не содержит предельных точек множества A.

Теперь покажем, что A также не содержит предельных точек множества B. Пусть $x \in A$. Так как E открыто, то найдется шар U_x с центром в точке x, содержащийся в E. Покажем, что этот шар содержится в A. Это будет означать, что x не может быть предельной для множества B.

Возьмем произвольную точку $y \in U_x$ и покажем, что $f(y) = f(x) = f(x_0)$. Действительно, в силу выпуклости шара, отрезок $[x, y] \subset U_x$. По теореме о среднем значении имеем $f(y) - f(x) = \mathrm{d}f(\xi)(y - x)$. Но по условию правая часть равна нулю, а значит, $f(y) = f(x)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, множество E окзалось разбитым на два непустых непересекающихся множества, ни одно из которых не содержит предельных точек другого. Это противоречит связности множества E, и тем самым теорема доказана. $\square$

12.5 Векторные функции действительного переменного

Пусть (α, β) – интервал на действительной прямой, $\gamma: \ (\alpha,\beta) \longmapsto \mathbb{R}^n$ – функция на (α,β) со значениями в $\mathbb{R}^n$, т. е. для любого $t \in (\alpha,\beta)$ значение $\gamma(t)$ – n-мерный вектор. Такая функция γ называется векторной функцией действительного переменного.

Пример. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad (-\infty < t < \infty), \quad \gamma: \ \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^2.$

Определение. Пусть точка $t_0 \in (\alpha,\beta)$. Если существует

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0},$$

то его называют производной функции γ или производным вектором в точке t_0 и обозначают $\gamma'(t_0)$, $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t_0)$. В этом случае функцию γ называют дифференцируемой в точке t_0.

Из равенства

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0} = \gamma'(t_0)$$

следует, что

$$\gamma(t)-\gamma(t_0) = \gamma'(t_0)(t-t_0) + \overline{o}(t-t_0).$$

Отсюда вытекает, что дифференцируемая в точке t_0 функция является непрерывной в этой точке.

Пусть

$$\gamma(t) = \gamma^1(t)e_1 + \ldots + \gamma^n(t)e_n,$$

где γ^i – действительные функции действительного переменного. Тогда получаем

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0} = \frac{\gamma^1(t)-\gamma^1(t_0)}{t-t_0}e_1 + \ \ldots + \frac{\gamma^n(t)-\gamma^n(t_0)}{t-t_0}e_n.$$

Отсюда следует, что векторная функция дифференцируема в точке t_0 тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемы все ее компоненты. При этом

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t_0) = \frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}(t_0)e_1 + \ldots + \frac{\mathrm{d}\gamma^n}{\mathrm{d}t}(t_0)e_n,$$

т. е. компоненты производного вектора равны производным соответствующих компонент векторной функции γ.

Пример. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$.

Теорема (о производной сложной функции). *Пусть f – действительная функция на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, а γ – векторная функция действительного переменного, определенная на интервале (α, β), значения которой содержатся во множестве E. Если γ дифференцируема в точке $t_0 \in (\alpha, \beta)$, а функция f дифференцируема в соответствующей точке $x_0 = \gamma(t_0)$, то сложная функция $\varphi(t) = f(\gamma(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем*

$$\varphi'(t_0) = \mathrm{d}f(\gamma(t_0))\gamma'(t_0),$$

где действительное число в правой части – значение линейной формы $\mathrm{d}f(\gamma(t_0))$ на векторе $\gamma'(t_0)$.

Доказательство. Обозначим $A = \mathrm{d}f(x_0)$. Тогда

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \varepsilon(x)|x - x_0|,$$

где $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. В самой точке x_0 функция $\varepsilon(x)$ не определена, однако, доопределив ее в точке x_0, положив $\varepsilon(x_0) = 0$, получим непрерывную в точке x_0 функцию $\varepsilon(x)$. Полагая $x = \gamma(t)$, получим

$$f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) = A[\gamma(t) - \gamma(t_0)] + \varepsilon(\gamma(t))|\gamma(t) - \gamma(t_0)|.$$

Разделим это равенство на $t - t_0$. Тогда

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = A\left[\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}\right] + \rho(t),$$

где

$$\rho(t) = \varepsilon(\gamma(t))\frac{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|}{t - t_0}.$$

При $t \to t_0$ имеем $\gamma(t) \to \gamma(t_0)$, так что, в силу непрерывности функции $\varepsilon(x)$, получим $\varepsilon(\gamma(t)) \to 0 \ (t \to t_0)$. Далее, сомножитель $\frac{|\gamma(t)-\gamma(t_0)|}{t-t_0}$ ограничен, поскольку его модуль стремится к $|\gamma'(t_0)|$. Следовательно, $\rho(t) \to 0$ при $t \to t_0$.

Далее, разностное отношение $\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$ стремится к $\gamma'(t_0)$ при $t \to t_0$. Но поскольку линейная форма A непрерывна, то $A\left(\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\right)$ стремится к $A(\gamma'(t_0))$ при $t \to t_0$. Окончательно получаем

$$\varphi'(t_0) = A(\gamma'(t_0)),$$

и теорема доказана. $\square$

В координатной записи получаем следующую формулу для производной сложной функции:

$$\varphi'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(\gamma(t_0))\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}(t_0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(\gamma(t_0))\frac{\mathrm{d}\gamma^n}{\mathrm{d}t}(t_0).$$

Эта формула называется цепным правилом.

Замечание. Цепное правило справедливо только при условии дифференцируемости функции f. Одного существования частных производных недостаточно.

Пример. Пусть

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2},\ x^2+y^2>0, \\ 0,\ x=y=0. \end{cases}$$

Положим $x = y = t$ и получим сложную функцию $\varphi(t) = f(t,t) = \frac{t}{2}$. В этом случае для любого t получим $\varphi'(t) = \frac{1}{2}$. В частности, $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$. Однако легко видеть, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

так что цепное правило для этого примера нарушено. Это оказалось возможным, поскольку функция f недифференцируема в начале координат.

12.6 Частные производные высших порядков

Пусть f – действительная функция на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что на этом множестве у нее существует i-я частная производная. Это – тоже функция на E. Может оказаться, что и у этой функции существует частная производная, например, по переменной x^j. Она называется частной производной функции f второго порядка и обозначается

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(x_0),\ f''_{x^i x^j}(x_0),\ \mathrm{D}_{ij} f(x_0).$$

По индукции определяются частные производные любого порядка. Частная производная порядка q, взятая по переменным $x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_q}$, в точке x_0 обозначается

$$\frac{\partial^q f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_q}}(x_0).$$

Если среди индексов $i_1, \ldots i_q$ имеются различные, то соответствующая частная производная называется смешанной.

Пример. Пусть $f(x,y) = x^3 y - 2xy^2$. Частные производные первого порядка равны $f'_x = 3x^2 y - 2y^2$, $f'_y = x^3 - 4xy$. Частные производные второго порядка равны $f''_{xx} = f''_{x^2} = 6xy$, $f''_{xy} = 3x^2 - 4xy$, $f''_{yy} = f''_{y^2} = -4x$, $f''_{yx} = 3x^2 - 4y$.

Две различные смешанные производные оказались равными. Возникает вопрос: всегда ли это так?

Пример функции, у которой смешанные производные различные. Пусть

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ x^2+y^2>0, \\ 0,\ x=y=0. \end{cases}$$

Найдем

$$f'_x = y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x\frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2}\left(x^2 - y^2 + \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}\right) \quad \big(x^2+y^2>0\big),$$

$$f'_x(0,0) = 0 \quad f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = -1 \quad f''_{yx}(0,0) = 1.$$

Итак, получили, что смешанные производные не равны между собой.

Теорема Шварца. *Пусть f – действительная функция, определенная в некоторой окрестности U точки x_0 и имеющая всюду в этой* *окрестности частные производные* $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, $\frac{\partial f}{\partial x^j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$. *Если смешанная производная* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ *непрерывна в точке* x_0, *то в этой точке существует и другая смешанная производная* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x_0)$, *и при этом справедливо равенство*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0).$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для случая $n = 2$, поскольку в ней по существу идет речь только о функциях двух переменных при фиксированных всех остальных. Итак, предположим, что задана функция двух переменных $f(x, y)$ и существуют f'_x, f'_y, f''_{xy}. Нужно доказать, что существует $f''_{yx}(x_0, y_0)$ и она равна $f''_{xy}(x_0, y_0)$.

Рассмотрим разностное отношение

$$Q(h) \equiv \frac{f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{h}.$$

Заметим, что при любом x

$$f'_y(x, y_0) = \lim_{\mu \to 0} \frac{f(x, y_0 + \mu) - f(x, y_0)}{\mu}.$$

Обозначим

$$\varphi_\mu(x) \equiv \frac{f(x, y_0 + \mu) - f(x, y_0)}{\mu},$$

$$Q^*(h, \mu) \equiv \frac{\varphi_\mu(x_0 + h) - \varphi_\mu(x_0)}{h}.$$

Если h фиксировано, то

$$\lim_{\mu \to 0} Q^*(h, \mu) = Q(h).$$

Далее, пользуясь формулой конечных приращений, получаем

$$\frac{\varphi_\mu(x_0 + h) - \varphi_\mu(x_0)}{h} = \frac{\mathrm{d}\varphi_\mu}{\mathrm{d}x}(x_0 + \theta_1 h) =$$

$$= \frac{f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \mu) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)}{\mu}.$$

Теперь воспользуемся формулой конечных приращений по y и получим, что последнее отношение равно

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_\mu}{\mathrm{d}x}(x_0+\theta_1 h) = \frac{f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0+\mu) - f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0)}{\mu} =$$

$$= f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2\mu),$$

где θ_1, θ_2 – величины, зависящие от h, μ и заключены в интервале $(0,1)$. Итак, получили

$$Q^*(h,\mu) = f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2\mu).$$

Но поскольку f''_{xy} непрерывна в точке (x_0, y_0) по условию, то получаем

$$Q^*(h,\mu) = f''_{xy}(x_0, y_0) + \varepsilon(h,\mu),$$

где $\varepsilon(h,\mu) \to 0$ при $(h,\mu) \to (0,0)$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta > 0$, что при $0 < |h| < \delta,\ 0 < |\mu| < \delta$ справедливо неравенство $|\varepsilon(h,\mu)| < \varepsilon$. Поэтому при указанных значениях h, μ имеет место неравенство

$$\left|Q^*(h,\mu) - f''_{xy}(x_0, y_0)\right| < \varepsilon.$$

Теперь фиксируем $h,\ 0 < |h| < \delta$, и μ устремляем к нулю. Тогда получим

$$|Q(h) - f''_{xy}(x_0, y_0)| \le \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim_{h\to 0} Q(h) = f''_{xy}(x_0, y_0)$. Отсюда следует справедливость теоремы Шварца. $\square$

Определение. Пусть q – натуральное число. Действительная функция f, определенная на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, называется функцией класса C^q на этом множестве, если она имеет все частные производные до порядка q включительно, непрерывные на этом множестве.

Теорема. *Если f – функция класса C^q на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, то значение любой смешанной производной порядка q не зависит от последовательности, в которой выполняется дифференцирование.*

Эта теорема доказывается с помощью теоремы Шварца по индукции. Мы не будем приводить это доказательство.

12.7 Формула Тейлора

В одномерном случае формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа содержится в следующей теореме.

Теорема. *Пусть функция φ на отрезке $[\alpha, \beta]$ имеет непрерывные производные до порядка q включительно, а на интервале (α, β) существует производная порядка $q+1$. Тогда справедливо равенство*

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) =$$

$$= \frac{\varphi'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha) + \frac{\varphi''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(q)}(\alpha)}{q!}(\beta-\alpha)^q + \frac{\varphi^{(q+1)}(\xi)}{(q+1)!}(\beta-\alpha)^{q+1},$$

где ξ – некоторая точка из интервала (α, β).

Аналог этой теоремы в многомерном случае имеет следующий вид.

Теорема. *Пусть действительная функция f класса C^{q+1} на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и пусть отрезок $[a, a+h] \subset E$. Тогда справедливо равенство*

$$f(a+h) - f(a) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)h^i + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a)h^i h^j + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{q!}\sum_{i_1,\ldots,i_q=1}^{n} \frac{\partial^q f}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_q}}(a)h^{i_1}\ldots h^{i_q} + R_q,$$

где

$$R_q = \frac{1}{(q+1)!}\sum_{i_1,\ldots,i_{q+1}=1}^{n} \frac{\partial^{q+1} f}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_{q+1}}}(a+\theta h)h^{i_1}\ldots h^{i_{q+1}},$$

а θ – некоторое число из отрезка $[0, 1]$.

Доказательство. Положим $\varphi(t) = f(a+th)$ $(0 \le t \le 1)$. Ранее была доказана лемма, согласно которой функция φ дифференцируема и ее производная

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(a+th)h^i \quad (0 \le t \le 1).$$

Снова применяя эту лемму, получим

$$\varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a+th)h^i h^j.$$

По индукции получаем

$$\varphi^{(p)}(t) = \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_p}}(a+th)h^{i_1} \ldots h^{i_p} \quad (1 \leq p \leq q+1).$$

Применяя теперь формулу Тейлора для функции φ, находим

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \ldots + \frac{1}{q!}\varphi^{(q)}(0) + \frac{1}{(q+1)!}\varphi^{(q+1)}(\theta),$$

где $0 \leq \theta \leq 1$. Если воспользуемся найденными выражениями для производных функции φ и учтем, что $\varphi(1) - \varphi(0) = f(a+h) - f(a)$, то получим требуемое равенство. $\square$

12.8 Локальные экстремумы

12.8.1 Квадратичные формы

Определение. Квадратичной формой на $\mathbb{R}^n$ называется каждая функция вида

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h^i h^j,$$

где a_{ij} – дествительные числа. Матрица (a_{ij}) называется матрицей квадратичной формы.

Будем считать, что $a_{ij} = a_{ji}$, т. е. что матрица (a_{ij}) симметрична. Заметим, что квадратичная форма Q – это многочлен второго порядка от n переменных $h^1, \ldots, h^n$. Ясно, что для любого действительного числа t

$$Q(th) = t^2 Q(h).$$

Это свойство называется свойством однородности второго порядка.

Определение. Квадратичная форма Q называется положительно определенной, если для любого $h \neq 0$ справедливо неравенство $Q(h) > 0$.

Аналогично, если для любого $h \neq 0$ имеем $Q(h) < 0$, то такая квадратичная форма Q называется отрицательно определенной.

Если квадратичная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения, то она называется неопределенной.

Если $Q(h) \geq 0$ для всех h, то форма называется положительно полуопределенной, а если $Q(h) \leq 0$ для всех h, то форма называется отрицательно полуопределенной.

Квадратичная форма называется знакоопределенной, если она положительно определенная или отрицательно определенная.

Пример 1. Если $Q(x^1, x^2) = (x^1)^2 + 2(x^2)^2$, то для всех x^1, x^2, кроме $x^1 = x^2 = 0$, имеем $Q(x^1, x^2) > 0$, т. е. эта квадратичная форма положительно определенная.

Пример 2. Для формы $Q(x^1, x^2) = (x^1)^2 - x^1x^2 - (x^2)^2$ имеем $Q(1, 0) = 1$, $Q(0, 1) = -1$, так что эта форма неопределенная.

Пример 3. Форма $Q(x^1, x^2) = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + (x^2)^2$ положительно полуопределенная, поскольку для любых x^1, x^2 имеем $Q(x^1, x^2) \geq 0$, но равенство $Q(x^1, x^2) = 0$ имеет место не только в точке $x^1 = x^2 = 0$, а в каждой точке вида $x^1 = x^2$.

Пример 4. Форма $Q(h) = (h^1)^2 + \ldots + (h^n)^2 = |h|^2$, очевидно, положительно определенная.

Пример 5. Пусть $Q(h) = (h^1)^2 + \ldots + (h^m)^2$, где $m < n$. Эта форма положительно полуопределенная, поскольку $Q(h) \geq 0$, но при $i > m$ значение этой формы на стандартном векторе e_i равно нулю.

Пример 6. Пусть $Q(h) = (h^1)^2 + \ldots + (h^m)^2 - (h^{m+1})^2 - \ldots - (h^n)^2$, где $m < n$. Тогда эта форма неопределенная, поскольку $Q(e_i) = 1$ при $i \leq m$ и $Q(e_i) = -1$, если $i > m$.

Для любой квадратичной формы Q имеем

$$|Q(h)| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}||h^i||h^j| \leq |h|^2 \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \equiv K|h|^2.$$

Эта оценка показывает, что при $h \to 0$ квадратичная форма стремится к нулю. Если квадратичная форма знакоопределенная, то полученный порядок стремления к нулю оказывается точным. Именно, справедлива

Лемма 1. *Пусть Q – положительно определенная квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$. Тогда существует такое положительное число λ, что*

$$Q(h) \geq \lambda |h|^2 \quad (h \in \mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Обозначим через S единичную сферу в $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| = 1\}.$$

Легко видеть, что S – замкнутое и ограниченное множество и, следовательно, компактное. Поэтому, по второй теореме Вейерштрасса, непрерывная функция Q достигает своего наименьшего значения, которое мы обозначим через λ. Но на S форма Q принимет положительные значения, так что $\lambda > 0$.

Итак, $Q(x) \geq \lambda$ ($|x| = 1$). Если теперь h – произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$, то положим $x = \frac{h}{|h|}$. Тогда $|x| = 1$, т. е. x лежит на единичной сфере, а поэтому $Q(x) \geq \lambda$. Если вместо x подставим его значение, то получим $Q\left(\frac{h}{|h|}\right) \geq \lambda$. Воспользовавшись свойством однородности второго порядка для формы Q, имеем $Q(h) \geq \lambda |h|^2$. $\square$

Теперь займемся таким вопросом. Как по матрице коэффициентов квадратичной формы судить о знакоопределенности этой формы? Рассмотрим подробно случай $n = 2$.

Пусть $Q(h,k) = a_{11}h^2 + 2a_{12}hk + a_{22}k^2$. Предположим сначала, что $a_{11} \neq 0$. Тогда

$$Q(h,k) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}^2h^2 + 2a_{11}a_{12}hk + a_{11}a_{22}k^2) = \frac{1}{a_{11}}\left[(a_{11}h + a_{12}k)^2 + \Delta k^2\right],$$

где

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

1). Если $\Delta > 0$, то выражение в квадратных скобках положительно для любых h и k, не равных одновременно нулю, т. е. $Q(h,k) \neq 0$, причем $\operatorname{sign} Q(h,k) = \operatorname{sign} a_{11}$. В этом случае форма является знакоопределенной, она сохраняет свой знак.

2). Рассмотрим случай $\Delta < 0$. Пусть, например, $k \neq 0$. Тогда вынося за скобки k^2 и обозначая $t = \frac{h}{k}$, получаем

$$Q(h,k) = k^2 \left[a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22} \right].$$

Если $a_{11} \neq 0$, то в скобках имеем квадратный трехчлен относительно t. Его дискриминант $-4\Delta > 0$. Поэтому этот квадратный трехчлен имеет различные действительные корни, а значит, принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Если же $a_{11} = 0$, то $a_{12} \neq 0$ (так как иначе получили бы, что $\Delta = 0$). Значит, в квадратных скобках линейный двучлен $2a_{12}t + a_{22}$, который также принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Итак, если $\Delta < 0$, то квадратичная форма Q является неопределенной.

3). Пусть $\Delta = 0$. Если $a_{11} \neq 0$, то получим

$$Q(h,k) = \frac{1}{a_{11}} (a_{11}h + a_{12}k)^2.$$

Если, например, $a_{11} > 0$, то всегда $Q(h,k) \geq 0$, а при $h = -\frac{a_{12}k}{a_{11}}$ имеем $Q(h,k) = 0$. Это означает, что существуют ненулевые векторы, на которых форма обращается в нуль, и получаем, что форма полуопределена.

Если же $a_{11} = 0$, то в этом случае $\Delta = -a_{12}^2$. Значит $a_{12} = 0$ и $Q(h,k) = a_{22}k^2$. Это – тоже полуопределенная форма.

Итак, если $\Delta = 0$, то форма полуопределенная.

Окончательно приходим к следующему выводу.

Лемма 2. *Пусть*

$$Q(h,k) = a_{11}h^2 + 2a_{12}hk + a_{22}k^2 \quad \textit{и} \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Тогда:

1) *если* $\Delta > 0$, *то форма* Q *– знакоопределенная, причем* $\operatorname{sign} Q = \operatorname{sign} a_{11}$;

2) *если* $\Delta < 0$, *то* Q *– неопределенная форма;*

3) *если* $\Delta = 0$, *то* Q *– полуопределенная форма.*

Определение. Пусть $Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}h^i h^j$ – квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$ с симметричной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Миноры этой матрицы, расположенные в ее левом верхнем углу, называются главными минорами, т. е. главные миноры – это

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Критерий Сильвестра. *Для того чтобы квадратичная форма* Q *была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительными.*

Критерий отрицательной определенности. *Для того чтобы квадратичная форма* Q *была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:* $-\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n\Delta_n > 0$, *т. е. главные миноры должны иметь чередующиеся знаки, причем первый должен быть отрицательным.*

Эти два критерия здесь мы доказывать не будем.

12.8.2 Экстремумы

Определение. Пусть f – действительная функция на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Говорят, что f имеет локальный максимум в точке $x_0 \in E$, если существует такая окрестность U точки x_0, что для всех $x \in U$ выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Локальный максимум называется строгим, если окрестность U можно выбрать так, чтобы для всех $x \in U$, отличных от x_0, было $f(x) < f(x_0)$.

Аналогично определяется локальный минимум. Оба они объединяются под общим названием локального экстремума.

Теорема (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции). *Пусть f – действительная функция на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Если в точке $x_0 \in E$ функция f имеет локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то*

$$\mathrm{d}f(x_0) = 0. \tag{12.16}$$

Равенство нулю дифференциала равносильно тому, что все частные производные равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{12.17}$$

Доказательство. В одномерном случае это – теорема Ферма. Обозначим $\varphi(t) = f(x_0 + th)$, где h – произвольный вектор. Функция φ определена при достаточно малых по модулю значениях t. Кроме того, по теореме о производной сложной функции, она дифференцируема, и $\varphi'(t) = \mathrm{d}f(x_0 + th)h$.

Пусть f имеет локальный максимум в точке x_0. Значит, функция φ при $t = 0$ имеет локальный максимум и, по теореме Ферма, $\varphi'(0) = 0$.

Итак, мы получили, что $\mathrm{d}f(x_0) = 0$, т. е. дифференциал функции f в точке x_0 равен нулю на любом векторе h. □

Замечание. Напомним, что (12.16) равносильно (12.17). Действительно, для дифференцируемой в точке x_0 функции f выше мы показывали, что из (12.17) следует (12.16).

Обратно, соотношение (12.16) означает, что $\mathrm{d}f(x_0)h = 0$ для любого h. Но это означает, что

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)h^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)h^n = 0,$$

и, полагая $h = e_i$, получим, что $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0$, т. е. из (12.16) следует (12.17).

Равенство нулю дифференциала равносильно тому, что $\mathrm{grad} f(x_0) = 0$.

Определение. Точки, в которых дифференциал равен нулю, т. е. такие, в которых все частные производные равны нулю, называются стационарными. Критическими точками функции f называются такие точки, в которых f недифференцируема, либо ее градиент равен нулю.

Если точка стационарная, то из этого еще не следует, что в этой точке функция имеет экстремум.

Пример 1. Пусть $f(x,y) = x^3 + y^3$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2,$$

так что $(0,0)$ – стационарная точка, но в этой точке у функции нет экстремума. Действительно, $f(0,0) = 0$, но легко видеть, что в любой окрестности точки $(0,0)$ функция принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Пример 2. У функции $f(x,y) = x^2 - y^2$ начало координат – стационарная точка, но ясно, что экстремума в этой точке нет.

Теорема (достаточное условие экстремума). *Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $x_0 \in E$ – стационарная точка и*

$$Q_{x_0}(h) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) h^i h^j.$$

Тогда

1) *если Q_{x_0} – знакоопределенная квадратичная форма, то функция f в точке x_0 имеет локальный экстремум, а именно, минимум, если форма положительно определенная, и максимум, если форма отрицательно определенная;*

2) *если квадратичная форма Q_{x_0} неопределенная, то функция f в точке x_0 не имеет экстремума.*

Доказательство. Воспользуемся разложением по формуле Тейлора. Учитывая, что частные производные первого порядка в точке x_0 равны нулю, получим

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x_0+\theta h)h^ih^j,$$

где $0<\theta<1$.

Обозначим $a_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x_0)$. В силу теоремы Шварца, $a_{ij}=a_{ji}$. Обозначим

$$\alpha_{ij}(h)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x_0+\theta h)-\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x_0).$$

По предположению, все частные производные второго порядка непрерывны и поэтому

$$\lim_{h\to 0}\alpha_{ij}(h)=0. \tag{12.18}$$

Получаем

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{1}{2}\left[Q_{x_0}(h)+\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}(h)h^ih^j\right].$$

Обозначим

$$\varepsilon(h)=\frac{1}{|h|^2}\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}(h)h^ih^j.$$

Тогда

$$|\varepsilon(h)|\le\sum_{i,j=1}^{n}|\alpha_{ij}(h)|$$

и, в силу соотношения (12.18), имеем $\varepsilon(h)\to 0$ при $h\to 0$. Окончательно получаем

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{1}{2}\left[Q_{x_0}(h)+\varepsilon(h)|h|^2\right]. \tag{12.19}$$

Предположим, что Q_{x_0} – положительно определенная форма. Согласно лемме 1, существует такое положительное число λ, что $Q_{x_0}(h)\ge\lambda|h|^2$ при любом h. Поэтому

$$f(x_0+h)-f(x_0)\ge\frac{1}{2}|h|^2(\lambda+\varepsilon(h)).$$

Так как $\lambda>0$, а $\varepsilon(h)\to 0$ при $h\to 0$, то правая часть будет положительной при любом векторе h достаточно малой длины.

Итак, мы пришли к тому, что в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x) > f(x_0)$, если только $x \neq x_0$ (мы положили $x = x_0 + h$). Это означает, что в точке x_0 функция имеет строгий локальный минимум, и тем самым доказана первая часть нашей теоремы.

Предположим теперь, что Q_{x_0} – неопределенная форма. Тогда найдутся векторы h_1, h_2, такие, что $Q_{x_0}(h_1) = \lambda_1 > 0$, $Q_{x_0}(h_2) = \lambda_2 < 0$. Возьмем в соотношении (12.19) $h = th_1$ $(t > 0)$. Тогда получим

$$f(x_0 + th_1) - f(x_0) = \frac{1}{2}\left[t^2\lambda_1 + t^2|h_1|^2\varepsilon(th_1)\right] = \frac{1}{2}t^2\left[\lambda_1 + |h_1|^2\varepsilon(th_1)\right].$$

При достаточно малых $t > 0$ правая часть положительна. Это означает, что в любой окрестности точки x_0 функция f принимает значения $f(x)$, большие, чем $f(x_0)$.

Аналогично получим, что в любой окрестности точки x_0 функция f принимает значения, меньшие, чем $f(x_0)$. Это, вместе с предыдущим, означает, что в точке x_0 функция f не имеет экстремума. $\square$

Рассмотрим частный случай этой теоремы для функции $f(x, y)$ двух переменных, определенной в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и имеющей в этой окрестности непрерывные частные производные первого и второго порядков. Предположим, что (x_0, y_0) – стационарная точка, и обозначим

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Тогда предыдущая теорема примет следующий вид.

Теорема. *Пусть* $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. *Тогда:*

1) *если* $\Delta > 0$, *то функция* f *имеет в точке* (x_0, y_0) *локальный экстремум, а именно, минимум, если* $a_{11} > 0$, *и максимум, если* $a_{11} < 0$;

2) *если* $\Delta < 0$, *то экстремума в точке* (x_0, y_0) *нет.*

Как и в одномерном случае, при $\Delta = 0$ экстремум может быть, а может и не быть.

13. Дифференцируемые отображения

Пусть E – открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим отображение $f:\ E \longmapsto \mathbb{R}^m$. Это означает, что точкам $x \in E$ ставятся в соответствие точки $y \in \mathbb{R}^m$, где $y = (y^1, \ldots, y^m)$. Поэтому отображение f можно записать как вектор $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^m(x))$, где $x \in E$.

Отображение f называется векторной функцией, а действительные функции f^i называются компонентами отображения f.

13.1 Линейные и аффинные отображения

Определение. Отображение $A:\ \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ называется линейным отображением, если

1) $A(x+y) = A(x) + A(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$;

2) $A(cx) = cA(x)$ для всех $c \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}^n$.

Из свойства 2) следует, что $A(0) = 0$, где справа – нуль-вектор.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ введем стандартный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, а в пространстве $\mathbb{R}^m$ – базис $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$. Так как $e_j \in \mathbb{R}^n$ $(j = 1, \ldots, n)$, то к нему можно применить отображение A. Обозначим через a^i_j координаты вектора $A(e_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда $A(e_j) = \sum_{i=1}^m a^i_j \varepsilon_i$ $(j = 1, \ldots, n)$, и можно составить матрицу, состоящую из m строк и n столбцов –

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^m_1 & a^m_2 & \ldots & a^m_n \end{pmatrix}.$$

Ее будем называть матрицей линейного отображения A в соответствующих стандартных базисах. Покажем, что эта матрица вполне определяет линейное отображение A. Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, где

$x^1, \ldots, x^n$ – координаты вектора x. Рассмотрим вектор $y = A(x)$ с координатами $y^1, \ldots, y^m$:

$$y = y^1\varepsilon_1 + \ldots + y^m\varepsilon_m.$$

Отсюда, в силу единственности разложения вектора y в стандартном базисе $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$, получаем

$$\begin{cases} y^1 = x^1a_1^1 + x^2a_2^1 + \ldots + x^na_n^1, \\ y^2 = x^1a_1^2 + x^2a_2^2 + \ldots + x^na_n^2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ y^m = x^1a_1^m + x^2a_2^m + \ldots + x^na_n^m. \end{cases}$$

Это можно трактовать так, что каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ поставлено в соответствие действительное y^i $(i = 1, \ldots, m)$, а в системе получим линейные формы, которые являются компонентами линейного отображения A. Координаты линейного отображения определяются следующим образом: $A = (A^1, \ldots, A^m)$, где A^i $(i = 1, \ldots, m)$ – линейные формы.

Пусть задано линейное отображение $A:\ \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$.

Определение. Нормой линейного отображения A называется верхняя грань норм значений векторной функции A, рассматриваемой на единичном шаре с центром в начале координат в пространстве $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$\|A\| = \sup_{|x| \le 1} |A(x)|.$$

Теорема. *Пусть* $A:\ \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$. *Тогда для любого* $x \in \mathbb{R}^n$ *имеет место неравенство*

$$|A(x)| \le \|A\| \cdot |x|.$$

Доказательство. При $x = 0$ утверждение теоремы очевидно. Пусть $x \in \mathbb{R}^n,\ x \ne 0$. Введем в рассмотрение вектор $z = \frac{x}{|x|}$. Тогда $z \in \mathbb{R}^n,\ |z| = 1$

и, в силу определения нормы, имеем $|A(z)| \leq \|A\|$. Отсюда, в силу линейности A, получаем

$$|A(z)| = \left|A\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| = \left|\frac{1}{|x|}A(x)\right| = \frac{|A(x)|}{|x|} \leq \|A\|.$$

Поэтому $|A(x)| \leq \|A\| \cdot |x|$ и теорема доказана. $\square$

Обозначим $r = \|A\|$. Тогда с геометрической точки зрения число r – это максимальное расстояние от начала координат до точек области из $\mathbb{R}^m$, в которую отображает A единичный шар из пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема. *Пусть $A : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$. Тогда $\|A\| < +\infty$ (т. е. норма конечна), а A равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Возьмем $x = x^1 e_1 + \ldots x^n e_n \in \mathbb{R}^n$, $|x| \leq 1$, где $|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots (x^n)^2}$. Тогда $|x^j| \leq |x|$ $(j = 1, \ldots, n)$ и

$$A(x) = x^1 A(e_1) + \ldots + x^n A(e_n).$$

Отсюда следует

$$|A(x)| \leq \sum_{j=1}^{n} |x^j| \cdot |A(e_j)|.$$

Так как $|x^j| \leq |x|$ и $|x| \leq 1$, то $|x^j| \leq 1$ и

$$|A(x)| \leq \sum_{j=1}^{n} |A(e_j)|.$$

Итак, совокупность всех значений $|A(x)|$, где x пробегает единичный шар в $\mathbb{R}^n$, ограниченное множество. По определению нормы, верхняя грань этих значений и есть $\|A\|$. Поэтому получаем $\|A\| \leq \sum_{j=1}^{n} |A(e_j)|$, откуда следует, что $\|A\| < +\infty$.

Для доказательства равномерной непрерывности возьмем $x, y \in \mathbb{R}^n$. Пользуясь линейностью A и предыдущей теоремой, получим

$$|A(x) - A(y)| = |A(x - y)| \leq \|A\| \cdot |x - y|.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$. Тогда неравенство $|x - y| < \delta$ влечет

$$|A(x) - A(y)| \leq \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{\|A\|} = \varepsilon,$$

т. е. отображение A равномерно непрерывно на $\mathbb{R}^n$. $\square$

Композиция линейных отображений.

Пусть линейные отображения $A: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$, $B: \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^k$. Тогда композиция $C: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^k$ определяется равенством $C(x) = (B \circ A)(x) = B(A(x))$, где $x \in \mathbb{R}^n$.

Покажем, что C – линейное отображение. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда, в силу линейности отображений A и B, получим

$$C(x+y) = B(A(x+y)) = B(A(x)+A(y)) = B(A(x))+B(A(y)) = C(x)+C(y),$$

$$C(\alpha x) = B(A(\alpha x)) = B(\alpha(x)) = \alpha B(A(x)) = \alpha C(x),$$

так что отображение C линейно.

Легко проверить, что матрицей линейного отображения C является произведение матриц отображений B и A.

Аффинное отображение.

Пусть задано линейное отображение $A: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$. Зафиксируем вектор $y_0 \in \mathbb{R}^m$ и рассмотрим отображение $H: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$, определяемое равенством $H(x) = A(x) + y_0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Такое отображение H называется аффинным отображением из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

13.2 Дифференцируемые отображения

Пусть задано открытое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ и отображение $f: E \longmapsto \mathbb{R}^m$. Выберем точку $x_0 \in E$.

Определение. Отображение f называется дифференцируемым в точке x_0, если существует такое линейное отображение $A: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$, что выполнено равенство

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - A(h)|}{|h|} = 0,$$

где векторы $h \in \mathbb{R}^n$. При этом линейное отображение A называется производной отображения f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$ или $Df(x_0)$.

Если обозначим $f(x_0+h)-f(x_0)-A(h)=r(h)$, то данное определение можно записать в виде равенства

$$f(x_0+h)=A(h)+f(x_0)+r(h),$$

где

$$\lim_{h\to 0}\frac{|r(h)|}{|h|}=0,$$

т. е. $|r(h)|=\overline{o}(|h|)$ при $h\to 0$. Последнее означает, что норма вектора $r(h)\in\mathbb{R}^m$ имеет порядок малости выше, чем норма вектора $h\in\mathbb{R}^n$.

Обозначая $x=x_0+h$, определение дифференцируемости перепишем в виде

$$f(x)=A(x-x_0)+f(x_0)+r(x-x_0),$$

где $|r(x-x_0)|=\overline{o}(|x-x_0|)\ \ (x\to x_0)$. Это означает, что $f(x)=H(x-x_0)+r(x-x_0)$, где $H:\ \mathbb{R}^n\longmapsto\mathbb{R}^m$ – аффинное отображение вида $H(t)=A(t)+f(x_0)$, а $A=f'(x_0)$.

Замечание. Если отображение f линейное, то $f'(x_0)=f$. Действительно, по свойству линейности f получаем

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f(h),$$

т. е. $A(h)=f(h)$, или, что то же самое, A совпадает с f и $r(h)=0$. Это можно записать так: $A=f'(x_0)=f$.

Теорема. *Пусть открытое множество $E\subset\mathbb{R}^n$ и отображение $f:E\longmapsto\mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $x_0\in E$. Тогда вектор-функция f непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Из дифференцируемости отображения f в точке x_0 следует, что

$$f(x_0+h)=f(x_0)+A(h)+r(h),$$

где $\lim_{h\to 0}\frac{|r(h)|}{|h|}=0$, или $|r(h)|=\alpha(h)\cdot|h|$ и $\lim_{h\to 0}\alpha(h)=0$. Далее, в силу непрерывности линейного отображения A в точке $h_0=0$, получаем

$$\lim_{h\to 0}A(h)=A(0)=0.$$

Таким образом,

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0),$$

а это и означает непрерывность f в точке x_0. $\square$

Заметим, что из непрерывности отображения f не следует его дифференцируемость.

Теорема. *Пусть открытое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ и отображение $f : E \longmapsto \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $x_0 \in E$. Тогда производная $f'(x_0)$ единственна.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть существуют два различных линейных отображения $A_i : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ $(i = 1, 2)$, такие, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - A_i(h)|}{|h|} = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Тогда из этих соотношений следует, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{|A_1(h) - A_2(h)|}{|h|} = 0.$$

Возьмем произвольный вектор $\nu \in \mathbb{R}^n$ и положим $h = t\nu$. Тогда $h \to 0$ при $t \to 0$, и поэтому, используя линейность отображений A_1 и A_2, имеем

$$\lim_{t\to 0} \frac{|A_1(t\nu) - A_2(t\nu)|}{|t\nu|} = \lim_{t\to 0} \frac{|tA_1(\nu) - tA_2(\nu)|}{|t\nu|} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|t|\cdot|A_1(\nu) - A_2(\nu)|}{|t|\cdot|\nu|} = \frac{|A_1(\nu) - A_2(\nu)|}{|\nu|} = 0.$$

Итак, $A_1(\nu) = A_2(\nu)$. Поскольку вектор ν – произвольный, то отображения A_1 и A_2 равны. $\square$

Теперь установим связь между производной отображения и производными компонент этого отбражения.

Пусть отображение $f : E \longmapsto \mathbb{R}^m$, где открытое множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что f дифференцируемо в точке $x_0 \in E$ и его производная $f'(x_0) = Df(x_0)$. С другой стороны, отображение f определяется своими компонентами $f = (f^1, \ldots, f^m)$. Покажем, что каждая из компонент f^i дифференцируема, и обратно.

Теорема. *Пусть отображение* $f: E \longmapsto \mathbb{R}^m, f = (f^1, \ldots, f^m)$ *задано на открытом множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$. *Отображение* f *дифференцируемо в точке* $x_0 \in E$ *тогда и только тогда, когда дифференцируемы все компоненты этого отображения, т. е. функции* f^i, *и при этом справедливо равенство*

$$Df(x_0) = (\mathrm{d}f^1(x_0), \ldots, \mathrm{d}f^m(x_0)).$$

Доказательство. Необходимость. Дифференцируемость отображения f в точке x_0 означает, что существует такое линейное отображение A, что выполнено соотношение

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - A(h)|}{|h|} = 0.$$

Под знаком предела имеем отношение длин векторов. Но поскольку модуль каждой координаты вектора не превосходит длины этого вектора, то отсюда получаем

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f^i(x_0+h) - f^i(x_0) - A^i(h)|}{|h|} = 0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Это означает, что существуют линейные формы A^i, которые и будут производными действительных функций f^i в точке x_0, и $A^i = \mathrm{d}f^i(x_0)$.

Достаточность. Пусть каждая f^i дифференцируема в точке x_0. Это означает, что существуют линейные формы A^i, для которых выполняются равенства

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f^i(x_0+h) - f^i(x_0) - A^i(h)|}{|h|} = 0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Если мы возьмем линейное отображение A, компонентами которого являются A^i, т. е. $A = (A^1, \ldots, A^m)$, то получим равенство

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - A(h)|}{|h|} = 0.$$

Это означает, что f дифференцируемо в точке x_0, и A – производная отображения f, причем $A^i = \mathrm{d}f^i(x_0)$. □

Определение. Отображение $f : E \longmapsto \mathbb{R}^m$, заданное на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, называется дифференцируемым на этом множестве, если оно дифференцируемо в каждой точке множества E.

Отображение f называется отображением класса C^1 на множестве E, если все его компоненты f^i принадлежат классу C^1, т. е. функции $f^i(x)$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ на множестве E по всем переменным.

Теорема. *Если отображение $f : E \longmapsto \mathbb{R}^m$ принадлежит классу C^1 на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, то оно дифференцируемо на этом множестве.*

Доказательство. По данному выше определению, все компоненты f^i отображения f имеют непрерывные частные производные, т. е. $f^i \in C^1(E)(i = 1, \dots, m)$. Как было доказано ранее, отсюда следует, что функция f^i дифференцируема. Но если каждая компонента отображения f дифференцируема, то, как показано в предыдущей теореме, дифференцируемо и само отображение f. $\square$

13.3 Матрица Якоби

Пусть отображение $f : E \longmapsto \mathbb{R}^m$ $(E \subset \mathbb{R}^n)$ дифференцируемо в точке $x_0 \in E$. Это означает, что существует такое линейное отображение $A : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$, что выполнено равенство

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h)|}{|h|} = 0.$$

Определение. Матрица линейного отображения A называется матрицей Якоби отображения f.

Матрица линейного отображения имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

В этой матрице i-я строка состоит из чисел $A^i(e_1), \ldots, A^i(e_n)$, где A^i ($i = 1, \ldots, m$) – компоненты линейного отображения A, а e_j ($j = 1, \ldots, n$) – базисные векторы в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Отображение A можно представить в виде $A = (A^1, \ldots, A^m)$, где $A^i = \mathrm{d}f^i(x_0)$ – линейная форма, которую ранее мы назвали производной компоненты f^i в точке x_0.

Ранее мы показывали, что производная действительной функции $f^i : E \longmapsto \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R}^n)$ в точке $x_0 \in E$ – это линейная форма, компонентами которой являются частные производные функции f^i в точке x_0, т. е.

$$\mathrm{d}f^i(x_0) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f^i}{\partial x^n}(x_0)\right).$$

Значением этой линейной формы на векторе e_j будет

$$\mathrm{d}f^i(x_0)(e_j) = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0).$$

Итак, компоненты матрицы $a^i_j = A^i(e_j) = \mathrm{d}f^i(x_0)(e_j) = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0)$. Таким образом, матрицу Якоби можно переписать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x_0) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^m}{\partial x^2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Другими словами, производная отображения f задается матрицей Якоби, у которой компонентами являются частные производные всех компонент отображения f по всем переменным.

Если $m = n$, то получаем квадратную матрицу, определитель которой называется определителем Якоби или якобианом $Jf(x_0)$ и обозначается

$$Jf(x_0) = \frac{\partial(f^1, \ldots, f^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}(x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x_0) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^n}{\partial x^2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f^n}{\partial x^n}(x_0) \end{vmatrix}.$$

Замечание. Если все частные производные непрерывны, то и сам оределитель Якоби является непрерывной функцией. Это очевидно.

13.4 Производная сложной функции

Пусть g – отображение открытого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ в открытое множество $N \subset \mathbb{R}^m$, а $f: N \longmapsto \mathbb{R}^p$. Тогда можно рассматривать сложную функцию $F: E \longmapsto \mathbb{R}^p,\ F(x) = f(g(x))\ (x \in E)$. Ее называют композицией $F = f \circ g$.

Теорема. *Пусть отображение g дифференцируемо в точке $x_0 \in E$, а отображение f дифференцируемо в соответствующей точке $y_0 = g(x_0) \in N$. Тогда композиция $F = f \circ g$ дифференцируема в точке x_0 и справедливо равенство*

$$F'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0). \tag{13.1}$$

Доказательство. Обозначим $A = f'(y_0),\ B = g'(x_0)$. При достаточно малой длине вектора k вектор $y_0 + k \in N$ и справедливо равенство

$$f(y_0 + k) - f(y_0) = A(k) + \alpha(k)|k|,$$

где

$$\lim_{k \to 0} \alpha(k) = 0 \quad (\alpha(0) = 0). \tag{13.2}$$

(Заметим, что N – открытое множество, и поэтому $y_0 + k \in N$ при достаточно малых по длине векторах k.) Если вектор h достаточно мал, то $x_0 + h \in E$. Положим $k \equiv k(h) = g(x_0 + h) - g(x_0)$. Тогда $f(y_0 + k) = f(g(x_0 + h)) = F(x_0 + h)$ и получаем

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = A(k(h)) + \alpha(k(h))|k(h)|, \tag{13.3}$$

где

$$k(h) = B(h) + \beta(h)|h|$$

по свойству дифференцируемости отображения g, и $\lim_{h\to 0}\beta(h)=0$. Подставив это в равенство (13.3), получаем

$$F(x_0+h)-F(x_0)=A(B(h))+r(h),$$

где

$$r(h)=A(\beta(h)|h|)+\alpha(k(h))|k(h)|.$$

По определению производной, нужно доказать, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{|r(h)|}{|h|}=0,$$

и тем самым теорема будет доказана.

Пусть $r_1(h)=A(\beta(h)|h|)$. Тогда, в силу линейности отображения A,

$$\frac{|r_1(h)|}{|h|}=|A(\beta(h))|\leq\|A\|\cdot|\beta(h)|.$$

Но правая часть стремится к нулю при $h\to 0$, и поэтому получаем, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{|r_1(h)|}{|h|}=0.$$

Теперь положим $r_2(h)=\alpha(k(h))|k(h)|$. Воспользуемся неравенством

$$|k(h)|\leq|B(h)|+|h|\cdot|\beta(h)|\leq[\|B\|+|\beta(h)|]\cdot|h|,$$

откуда

$$\frac{|r_2(h)|}{|h|}\leq\left(\|B\|+|\beta(h)|\right)|\alpha(k(h))|\,.$$

Первый множитель справа ограничен при достаточно малых h, а второй множитель справа стремится к нулю при $h\to 0$ в силу (13.2).

Таким образом, $\frac{|r(h)|}{|h|}\leq\frac{|r_1(h)|}{|h|}+\frac{|r_2(h)|}{|h|}$ стремится к нулю при $h\to 0$, и теорема доказана. $\square$

Замечание. В правой части равенства (13.1) мы имеем композицию линейных отображений $f'(y_0)$ и $g'(x_0)$. Поэтому доказанную теорему можно сформулировать так: производная композиции равна композиции производных.

Цепное правило.

Пусть $z = f(y^1, \ldots, y^m)$ – действительная функция. Если положить $y^i = g_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$, то получим $z = f(g_1(x), \ldots, g_m(x))$, и тогда, согласно правилу дифференцирования сложной функции,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y^1}\frac{dg_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^m}\frac{dg_m}{dx}.$$

Положим теперь $y^i = g_i(x^1, \ldots, x^n)$ $(i = 1, \ldots, m)$ и получим сложную функцию $z = f(g_1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, g_m(x^1, \ldots, x^n))$. Если воспользоваться упомянутым только что правилом дифференцирования сложной функции, то получим

$$\frac{\partial z}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial y^1}\frac{\partial g_1}{\partial x^i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^m}\frac{\partial g_m}{\partial x^i} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Это равенство называется цепным правилом.

Цепное правило можно вывести также из только что доказанной теоремы. Действительно, положим в теореме $p = 1$, т. е. рассмотрим случай, когда f – действительная функция. Тогда $F : \ E \longmapsto \mathbb{R}$ – действительная функция. Из соотношения (13.1) видно, что матрица производной $F'(x_0)$ равна произведению матриц $f'(y_0)$ и $g'(x_0)$. В векторной форме это можно записать так:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x^n}(x_0)\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y^1}(y_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^m}(y_0)\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x^1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x^n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x^1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

В частности,

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial y^1}\frac{\partial g_1}{\partial x^i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^m}\frac{\partial g_m}{\partial x^i} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

и тем самым снова получаем цепное правило.

13.5 Теорема об обратной функции

Пусть f – отображение множества X во множество Y. Если различным элементам $x_1, x_2 \in X$ соответствуют также различные образы $f(x_1)$, $f(x_2) \in Y$, то отображение f называется взаимно однозначным. Если отображение f взаимно однозначно и каждый элемент $y \in Y$ является образом некоторого элемента $x \in X$, т. е. $y = f(x)$, то такое отображение называется биективным, или биекцией множества X на множество Y.

Пусть f – биективное отображение X на Y. Каждому элементу $y \in Y$ поставим в соответствие тот единственный элемент $x \in X$, для которого $y = f(x)$, т. е. образом которого он служит при отображении f. Тогда получим отображение множества Y на X. Его мы назовем обратным к отображению f и будем обозначать через f^{-1}. Очевидно, что f^{-1} – также биективное отображение.

Обратимость линейных отображений.

Если существует биективное линейное отображение пространства $\mathbb{R}^n$ на пространство $\mathbb{R}^m$, то $n = m$. Это следует из того, что при биективном линейном отображении линейно независимая система переходит в линейно независимую систему. Ясно, что обратное отображение также является линейным. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Теорема. *Линейное отображение $A: \ \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ обратимо тогда и только тогда, когда его определитель отличен от нуля.*

Пусть отображение $f: \ E \longmapsto A$, где множества $E, A \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что это отображение биективно. Тогда оно обратимо. Рассмотрим задачу нахождения обратного отображения. По существу эта задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \ldots, x^n), \\ \ldots\ldots\ldots \\ y^n = f^n(x^1, \ldots, x^n) \end{cases}$$

относительно переменных $x^1, \ldots, x^n$. Ясно, что в явном виде это не всегда возможно. Мы будем говорить о свойствах обратного отображения.

В одномерном случае нами ранее были доказаны следующие две теоремы, устанавливающие свойства обратной функции.

Теорема об обратной функции. *Если функция f непрерывна и строго возрастает на отрезке $[a, b]$, то обратная функция строго возрастает и непрерывна на отрезке $[f(a), f(b)]$.*

Заметим, что из дифференцируемости функции не следует дифференцируемость обратной функции. Например, функция $f(x) = x^3$ ($x \in [-1, 1]$) удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, дифференцируема, но обратная функция $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ недифференцируема в точке $y = 0$. Следующая теорема содержит условие дифференцируемости обратной функции.

Теорема. *Если функция f дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in [a, b]$, то f строго монотонна, функция f^{-1} дифференцируема на $[f(a), f(b)]$, и справедливо равенство*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

где $y = f(x),\ x = f^{-1}(y)$.

Пусть отображение $f:\ X \longmapsto Y$ и множество $E \subset X$. Если рассматривать это отображение только на множестве E, т. е. такое, которое каждому $x \in E$ ставит в соответствие $f(x)$, то такое отображение называется сужением f на E и обозначается $f|E$.

Центральное место в данном параграфе занимает следующая теорема.

Теорема об обратной функции. *Пусть f – отображение класса C^1 открытого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Предположим, что в некоторой точке $a \in E$ якобиан этого отображения отличен от нуля, т. е.*

$$Jf(a) \neq 0.$$

Тогда найдется окрестность $U \subset E$ точки a, такая, что

1) *сужение $f|U$ взаимно однозначно;*

2) *образ $V = f(U)$ открыт;*

3) *обратное отображение* $f^{-1}: \ V \longmapsto U$ *является отображением класса* C^1.

Доказательство. Проведем его в несколько шагов. Сначала сделаем предварительные замечания.

Обозначим $A = f'(a)$. Тогда $\det A = Jf(a) \neq 0$, по нашему предположению, и поэтому линейное отображение A обратимо. Далее, если записать компоненты $f = (f^1, \ldots, f^n)$, то, согласно предположению, каждая из функций f^i принадлежит классу C^1, т. е. имеет непрерывные частные производные по каждой из переменных $x^1, \ldots, x^n$. Следовательно, и якобиан $Jf(x)$ является непрерывной функцией на множестве E. Поскольку $Jf(a) \neq 0$, то и в некоторой окрестности U_0 точки a будет выполнено условие

$$Jf(x) \neq 0. \tag{13.4}$$

Шаг 1. На этом шаге выберем такую окрестность U точки a, в которой отображение f взаимно однозначно. Более того, покажем, что окрестность U можно выбрать так, чтобы при некотором $\lambda > 0$ для всех $x_1, x_2 \in U$ выполнялось неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \lambda |x_1 - x_2|. \tag{13.5}$$

Напомним, что $A = f'(a)$. Обозначим $\varphi(x) = f(x) - A(x)$. Пусть $x_1, x_2 \in U_0$. Покажем, что

$$|A(x_1) - A(x_2)| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} |x_1 - x_2|, \tag{13.6}$$

где A^{-1} – линейное отображение, обратное к отображению A; оно существует в силу условия $\det A \neq 0$. Поэтому для любого $h \in \mathbb{R}^n$ получаем

$$|h| = |A^{-1}(A(h))| \leq \|A^{-1}\| \cdot |A(h)|.$$

Отсюда следует

$$|A(h)| \geq \frac{|h|}{\|A^{-1}\|}.$$

Полагая $h = x_1 - x_2$, получаем неравенство (13.6), справедливое для любых двух точек $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$.

Имеем $\varphi'(a) = f'(a) - A = 0$ – нулевое линейное отображение. Это означает, что для всех координатных функций φ^i их частные производные в точке a равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(a) = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Но эти частные производные по условию являются непрерывными, так что для заданного положительного ε найдется шар U_ε с центром в точке a, такой, что для каждого $x \in U_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x)\right| < \varepsilon \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Пусть теперь $x_1, x_2 \in U_\varepsilon$. По теореме о среднем значении имеем

$$\left|\varphi^i(x_1) - \varphi^i(x_2)\right| = \left|d\varphi^i(\xi_i) \cdot (x_1 - x_2)\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(\xi_i)(x_1^j - x_2^j)\right| \le \varepsilon \sum_{j=1}^{n} |x_1^j - x_2^j| \le n\varepsilon |x_1 - x_2|.$$

В этом неравенстве использован тот факт, что условие $x_1, x_2 \in U_\varepsilon$ влечет принадлежность U_ε всего отрезка с концами x_1, x_2.

Итак, для любых точек $x_1, x_2 \in U_\varepsilon$ получим

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\varphi^i(x_1) - \varphi^i(x_2)\right)^2} \le n^2 \varepsilon |x_1 - x_2|. \tag{13.7}$$

Теперь, используя равенство $f(x) = A(x) + \varphi(x)$, из (13.6) и (13.7) получаем

$$|f(x_1) - f(x_2)| \ge |A(x_1) - A(x_2)| - |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \ge$$

$$\ge \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - n^2\varepsilon\right) |x_1 - x_2|.$$

Выберем $\varepsilon = \frac{1}{2n^2\|A^{-1}\|}$ и обозначим $\lambda = \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$. Соотоветствующий шар U_ε обозначим через U. Тогда получим, что для любых двух точек $x_1, x_2 \in U$ выполнено неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \ge \lambda |x_1 - x_2|,$$

и тем самым завершен первый шаг доказательства теоремы.

Шаг 2. Обозначим $V = f(U)$ и покажем, что множество V открыто.

Возьмем произвольную точку $y_0 \in V$. Она является образом некоторой, и притом единственной, точки $x_0 \in U$, т. е. $y_0 = f(x_0)$. Выберем произвольный замкнутый шар B с центром в точке x_0, содержащийся в U. Пусть r – его радиус. Обозначим $\rho = \frac{\lambda r}{2}$, где λ – число, фигурирующее в неравенстве (13.5), и покажем, что шар с центром в y_0 и радиусом ρ целиком содержится во множестве V.

Пусть $|y'-y_0| < \rho$. Нужно доказать, что y' является образом некоторой точки $x' \in U$. Рассмотрим функцию $\psi(x) = |y' - f(x)|^2$. На компактном множестве B непрерывная функция ψ достигает своего наименьшего значения. Покажем, что это наименьшее значение достигается во внутренней точке шара B. Действительно, $\psi(x_0) = |y'-y_0|^2 < \rho^2$. Если точка x лежит на границе шара B, т. е. если $|x - x_0| = r$, то получаем

$$|y' - f(x)| \geq |y_0 - f(x)| - |y' - y_0| = |f(x_0) - f(x)| - |y' - y_0|.$$

В силу неравенства (13.5),

$$|f(x_0) - f(x)| \geq \lambda |x_0 - x| = \lambda r = 2\rho,$$

а с другой стороны, $|y' - y_0| < \rho$. Поэтому получаем, что для точек x, принадлежащих границе шара B, справедливо неравенство $|y' - f(x)| > 2\rho - \rho = \rho$, т. е. на границе $\psi(x) > \rho^2$.

Таким образом, значение функции ψ в центре шара B меньше, чем все ее значения на границе этого шара. Значит, наименьшее значение функции ψ достигается в некоторой внутренней точке $x' \in B$. Но если функция достигает своего локального минимума в некоторой внутренней точке, то ее дифференциал в этой точке равен нулю. Итак,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^j}(x') = 0 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Но

$$\psi(x) = |y' - f(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y'^i - f^i(x)\right)^2,$$

так что

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^j}(x') = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y'^i - f^i(x')\right)\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x').$$

Мы получили, что в точке x' выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y'^i - f^i(x')\right)\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x') = 0 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Обозначим $\alpha_i = y'^i - f^i(x')$ $(i = 1, \ldots, n)$. Если хотя бы одно из чисел α_i было бы отличным от нуля, то получили бы, что между строками матрицы Якоби отображения f в точке x' имеется линейная зависимость. Отсюда сразу следует, что определитель этой матрицы равен нулю. Но он отличен от нуля в силу условия (13.4).

Значит получим, что $y'^i - f^i(x') = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, т. е. $f(x') = y'$, что и требовалось показать.

Шаг 3. Функцию, обратную к сужению $f|U$, обозначим через g. Покажем, что g принадлежит классу C^1 на множестве V.

Выберем произвольную точку $y_0 \in V$. Для нее существует точка $x_0 \in U$ такая, что $f(x_0) = y_0$. Обозначим $L = f'(x_0)$. По условию дифференцируемости имеем

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = L(h) + r(h), \tag{13.8}$$

где

$$|r(h)| = \overline{o}(|h|) \quad (h \to 0). \tag{13.9}$$

Пусть теперь вектор k настолько мал, что $y_0 + k \in V$. Обозначим $h \equiv h(k) = g(y_0 + k) - g(y_0)$. Тогда $f(x_0 + h) - f(x_0) = k$, если $h = h(k)$. По неравенству (13.5)

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \geq \lambda |h|,$$

и получаем

$$|h| \leq \frac{|k|}{\lambda}, \tag{13.10}$$

где $h = h(k)$. В соотношении (13.8) возьмем $h = h(k)$ и получим

$$k = L(h(k)) + r(h(k)). \tag{13.11}$$

Заметим, что линейное отбражение L обратимо, поскольку его якобиан $\det L = Jf(x_0) \neq 0$. Подействуем на (13.11) отображением L^{-1}, обратным к L, и получим

$$L^{-1}(k) = h(k) + L^{-1}(r(h(k)))$$

и, таким образом,

$$g(y_0 + k) - g(y_0) = L^{-1}(k) + \rho(k),$$

где $\rho(k) = -L^{-1}(r(h(k)))$. Пользуясь соотношениями (13.9) и (13.10), получаем

$$|\rho(k)| \leq \|L^{-1}\| \cdot |r(h(k))| = \overline{o}(|h(k)|) = \overline{o}(|k|) \quad (k \to 0).$$

Таким образом, мы доказали, что отображение g дифференцируемо в точке y_0, причем $g'(y_0) = L^{-1}$. Поскольку выбранное $y_0 \in V$ произвольно, то тем самым получили, что отображение g дифференцируемо на открытом множестве V и для любого $y \in V$

$$g'(y) = \{f'(x)\}^{-1}, \quad x = g(y). \tag{13.12}$$

Здесь в правой части записано обратное к $f'(x)$ отображение.

Чтобы получить матрицу Якоби отображения g, нужно обратить матрицу Якоби отображения f, вычисленную в точке $x = g(y)$. Элементы последней матрицы непрерывно зависят от y, а поэтому и элементы обратной матрицы также непрерывно зависят от y. Но элементы матрицы Якоби функции g – это частные производные $\frac{\partial g^i}{\partial y^j}$ $(i, j = 1 \ldots, n)$, так что они непрерывны. $\square$

Замечание 1. Если в соотношении (13.12) перейти к определителям, то получим числовое равенство

$$Jg(y) = \frac{1}{Jf(x)} \quad (\ x = g(y)\ ).$$

Это – обобщение формулы для производной обратной функции в одномерном случае.

Замечание 2. В отличие от одномерного случая, для функции многих переменных теорема об обратной функции имеет локальный характер. Даже если предположить, что $Jf(x) \neq 0$ для всех $x \in E$, то всё равно отсюда не следует, что отображение f взаимно однозначно на E. Подтвердим это примером.

Пример. Для отображения $f: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$, определяемого равенством $f(x, y) = (\mathbf{e}^x \cos y, \mathbf{e}^x \sin y)$, имеем

$$Jf(x, y) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}^x \cos y & -\mathbf{e}^x \sin y \\ \mathbf{e}^x \sin y & \mathbf{e}^x \cos y \end{vmatrix} = \mathbf{e}^{2x} \neq 0.$$

Вместе с тем очевидно, что это отображение не является взаимно однозначным на $\mathbb{R}^2$.

Следствие. Пусть f – отображение класса C^1 открытого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$, причем $Jf(x) \neq 0$ для любого $x \in E$. Тогда образ каждого открытого подмножества $G \subset E$ является открытым множеством.

13.6 Теорема о неявной функции

Пусть функция $f: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$. Предположим, что для любого x_0 найдется такое y_0, что $f(x_0, y_0) = 0$. Рассмотрим уравнение $f(x, y) = 0$ и поставим вопрос: при каких условиях на функцию f для каждого x вблизи точки x_0 найдется единственное решение y этого уравнения вблизи точки y_0?

Если функция f принадлежит классу C^1, то

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + r(x, y),$$

где $r(x, y) = \overline{o}\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$. Первое слагаемое справа равно нулю по условию. Если пренебречь остатком $r(x, y)$, то исходное уравнение можно переписать в виде

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Это – линейное уравнение. Для его однозначной разрешимости относительно y необходимо выполнение условия $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Если $x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m$, то через (x, y) будем обозначать $(n+m)$-мерный вектор с координатами $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m)$. Будем рассматривать уравнение вида $f(x, y) = 0$, где $x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m,\ f:\ E \longmapsto \mathbb{R}^m, E$ – открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$. В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{cases} f^1(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^m(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) = 0, \end{cases}$$

т. е. имеем m уравнений относительно m неизвестных $y^1, \ldots, y^m$. Предположим, что для любого x_0 существует решение y_0 такое, что $f(x_0, y_0) = 0$. Эта задача имеет локальный характер, так что мы требуем, чтобы значения y находились вблизи y_0.

Рассмотрим определитель

$$\frac{\partial(f^1, \ldots, f^m)}{\partial(y^1, \ldots, y^m)}(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1}(x, y) & \ldots & \frac{\partial f^1}{\partial y^m}(x, y) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^m}{\partial y^1}(x, y) & \ldots & \frac{\partial f^m}{\partial y^m}(x, y) \end{vmatrix}.$$

Определение. Определитель $\frac{\partial(f^1, \ldots, f^m)}{\partial(y^1, \ldots, y^m)}(x, y)$ называется якобианом для системы функций $f^1, \ldots, f^m$ по переменным $y^1, \ldots, y^m$.

Теорема о неявной функции. *Пусть f – отображение класса C^1 открытого множества $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ в пространство $\mathbb{R}^m$. Предположим, что для некоторой точки $(x_0, y_0) \in E$ выполняются условия*

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial(f^1, \ldots, f^m)}{\partial(y^1, \ldots, y^m)}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Тогда существует окрестность A точки x_0 и окрестность B точки y_0, такие, что

1) *для любого $x \in A$ найдется единственная точка $y = g(x) \in B$, такая, что $f(x, g(x)) = 0$;*

2) *функция $g:\ A \longmapsto B$ принадлежит классу C^1.*

Доказательство. Рассмотрим следующее вспомогательное отображение: $\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$. Оно действует из E в $\mathbb{R}^{n+m}$. Его компоненты

$$\begin{cases} \varphi^i(x, y) = x^i \quad (i = 1, \dots, n), \\ \varphi^{n+j}(x, y) = f^j(x, y) \quad (j = 1, \dots, m) \end{cases}$$

являются функциями класса C^1. Якобиан отображения φ в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} & \frac{\partial f^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial y^m} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n} & \frac{\partial f^2}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial y^m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \frac{\partial f^m}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} & \frac{\partial f^m}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial y^m} \end{vmatrix} = \frac{\partial(f^1, \dots, f^m)}{\partial(y^1, \dots, y^m)}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Таким образом, отображение φ удовлетворяет всем условиям теоремы об обратной функции. В силу этой теоремы, найдется такой открытый куб U с центром в точке (x_0, y_0), что сужение $\varphi|U$ взаимно однозначно, образ $V = \varphi(U)$ открыт и обратное отображение $\psi : V \longmapsto U$ принадлежит классу C^1. Положим $(s, t) = \varphi(x, y) = (x, f(x, y))$, где $s = x,\ t = f(x, y)$. Но куб U можно представить в виде прямого произведения $U = A^* \times B$, где A^* – куб в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x_0, а B – куб в $\mathbb{R}^m$ с центром в точке y_0. Поэтому для любого $x \in A^*$ уравнение $f(x, y) = 0$ имеет решение $y \in B$ в том и только в том случае, если эта точка y удовлетворяет уравнению $\varphi(x, y) = (x, 0)$, т. е. если точка $(x, 0)$ принадлежит образу $\varphi(U) = V$.

Обозначим $Q = \{x \in A^* : \ (x, 0) \in V\}$. Это множество не пусто, так как оно содержит точку x_0, поскольку $f(x_0, y_0) = 0$ по условию. Так как множество V открыто в $\mathbb{R}^{n+m}$, то и множество Q открыто в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, найдется окрестность A точки x_0, содержащаяся в Q. Это означает, что для любого $x \in A$ уравнение $f(x, y) = 0$ имеет решение $y \in B$.

Обратное отображение ψ имеет вид $\psi(s, t) = (s, h(s, t))$, где $h(s, t)$ – отображение класса C^1, поскольку все его компоненты принадлежат C^1. Пусть $x \in A$, $y \in B$ удовлетворяют уравнению $f(x, y) = 0$. Тогда имеем $\varphi(x, y) = (x, 0)$. Значит, $(x, y) = \psi(x, 0) = (x, h(x, 0))$. Отсюда получаем $y = h(x, 0)$, т. е. решение $y \in B$ определяется однозначно и это решение $g(x) = h(x, 0)$ принадлежит классу C^1. $\square$

14. Функции на многообразиях

14.1 Гладкие многообразия

Аффинные многообразия.

Определение 1. Наивысший из порядков отличных от нуля миноров матрицы называется ее рангом. Он совпадает с максимальным числом линейно независимых строк и с максимальным числом линейно независимых столбцов.

Определение 2. Пусть $A: \ \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ – линейное отображение. Рангом отображения A называется размерность множества его значений. Ранг отображения A совпадает с рангом его матрицы.

Определение 3. Ядром отображения A называется множество N_A всех таких значений $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $A(x) = 0$. Ядро линейного отображения является линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$.

Определение 4. Размерность ядра называется дефектом линейного отображения. Справедливо следующее утверждение: если $A: \ \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ – линейное отображение, то сумма его ранга и дефекта равна n.

Определение 5. Пусть $1 \le p < n$. p-мерной плоскостью, или p-плоскостью в $\mathbb{R}^n$ называется любое множество, являющееся сдвигом некоторого p-мерного подпространства.

Если H – p-плоскость, то $H = \{x \in \mathbb{R}^n: \ x = y + h\}$, где $y \in M$, h – фиксированный вектор, M – p-мерное подпространство.

Пусть $A: \ \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ – линейное отображение ранга $\operatorname{rank} A = m$ ($m < n$). Тогда его ядро N_A представляет собой однородную плоскость размерности $p = n - m$.

Рассмотрим множество $H = \{x \in \mathbb{R}^n: \ A(x) = y_0\}$, где y_0 – фиксированный вектор. Это – p-мерная плоскость, являющаяся сдвигом ядра на тот вектор x_0, для которого $A(x_0) = y_0$. Справедливо также и обратное утверждение. Именно, если H – p-мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$ $(1 \le p < n)$, то существует линейное отображение $A: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^{n-p}$, $\operatorname{rank} A = n-p$, такое, что $N_A = H$.

Для доказательства выберем линейно независимую систему $x_1, \ldots, x_p$. Ее можно дополнить до базиса в $\mathbb{R}^n$ и получим базис $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$. Тогда каждый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ может быть представлен в виде $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Зададим линейное отображение равенством $A^j(x) = \alpha_{p+j}$ $(j = 1, \ldots, n-p)$. Легко проверить, что это и есть искомое линейное отображение.

Итак, каждая p-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$ определяется векторным уравнением $Ax = y_0$, где $A: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^{n-p}$, $\operatorname{rank} A = n-p$, y_0 – фиксированный вектор в $\mathbb{R}^{n-p}$. В координатной форме это уравнение можно записать так:

$$\begin{cases} a_{1,1}x^1 + \ldots + a_{1,n}x^n = y_0^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-p,1}x^1 + \ldots + a_{n-p,n}x^n = y_0^{n-p}. \end{cases}$$

При $p = n-1$ получаем $(n-1)$-мерную плоскость. Такую плоскость называют гиперплоскостью. Она определяется одним действительным уравнением

$$a_1x^1 + \ldots + a_nx^n = y,$$

где хотя бы одно из чисел $a_1, \ldots, a_n$ отлично от нуля.

Гладкие многообразия.

Определение. Непустое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется непрерывно дифференцируемым или гладким многообразием размерности p, $1 \le p < n$, если для любой точки $x_0 \in M$ найдется такая ее окрестность U и отображение $\varphi : U \longmapsto \mathbb{R}^{n-p}$, что ранг $\varphi'(x)$ равен $n-p$ при любом $x \in U$ и $M \cap U = \{x \in U: \ \varphi(x) = 0\}$.

Поясним смысл этого определения. Оно носит локальный характер, не требуется, чтобы все многообразие описывалось одним уравнением. Достаточно, чтобы в окрестности каждой точки многообразие могло быть описано своим уравнением. Основное условие rank $(\varphi'(x)) = n - p$ равносильно тому, что матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi^{n-p}}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial\varphi^{n-p}}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}$$

в каждой точке x имеет ранг $n-p$. Это означает, что строки этой матрицы линейно независимы. Поскольку строки этой матрицы представляют собой координаты градиентов, то, иначе говоря, градиенты grad $\varphi^i(x)$ ($i = 1, \dots, n-p$) линейно независимы.

В дальнейшем одномерное многообразие будем называть кривой, двумерное многообразие – поверхностью, а многообразие размерности $n-1$ – гиперповерхностью. Гиперповерхность задается локально уравнением вида $\varphi(x) = 0$, где φ – действительная функция $\varphi : \ U \longmapsto \mathbb{R}$ и ее градиент grad $\varphi'(x) \neq 0$ $(x \in U)$. В координатной записи p-многообразие определяется системой $n-p$ дейстительных уравнений

$$\begin{cases} \varphi^1(x^1, \dots, x^n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varphi^{n-p}(x^1, \dots, x^n) = 0, \end{cases}$$

в которой градиенты функций φ^i линейно независимы. Можно таким образом сказать, что p-многообразие является локальным пересечением $n-p$ гиперповерхностей.

Явное задание многообразия. Кривая на плоскости локально определяется уравнением $\varphi(x,y) = 0$. Предполагается, что хотя бы одна из частных производных φ'_x, φ'_y отлична от нуля. Пусть $\varphi'_y \neq 0$ в точке (x_1, y_1). Тогда, по теореме о неявной функции, вблизи этой точки кривая может быть представлена явным уравнением $y = g(x)$. Это вовсе не означает, что ее всю можно задать явным уравнением. В другой точке (x_2, y_2) может быть $\varphi'_x \neq 0$, и тогда можно представить $x = h(y)$. Таким образом, какую бы точку на кривой мы ни взяли, можно указать такую окрестность этой точки, которая вырезает кусок кривой, допускающий явное задание с помощью одного из уравнений $y = g(x)$ или $x = h(y)$.

Вблизи каждой точки p-многообразие можно задавать явными уравнениями, выражая некоторые $n - p$ переменных через оставшиеся переменные, т. е. те, по которым якобиан отличен от нуля. Это следует из теоремы о неявной функции.

Пример 1. Гипербола $x^2 - y^2 = a^2$ $(a \geq 0)$.

Обозначим $\varphi(x, y) = x^2 - y^2 - a^2$. Тогда $\varphi'_x = 2x$, $\varphi'_y = -2y$. Одновременно частные производные обращаются в нуль лишь в начале координат. В остальных точках ранг полной производной равен единице.

Имеем $n = 2$, $p = 1$. Выберем точку (x_0, y_0). Согласно определению, нужно выбрать такую окрестность, которая не пересекает начала координат, а в качестве φ одну и ту же функцию $\varphi(x, y) = x^2 - y^2 - a^2$. Если $a = 0$, т. е. $x^2 - y^2 = 0$, то получаем уравнение асимптот. Асимптоты нельзя назвать многообразием, так как нельзя выбрать нужную окрестность для начала координат.

Пример 2. Пусть M – объединение гиперболы и одной из ее асимптот $y = x$. Тогда M – многообразие. Действительно, для любой точки гиперболы можно выбрать окрестность U так, чтобы она не содержала точек асимптоты $y = x$. Тогда берем $\varphi(x, y) = x^2 - y^2 - a^2$, и требование о ранге соблюдено. С другой стороны, для любой точки на асимптоте выберем окрестность так, чтобы она не содержала точек гиперболы, а в качестве φ выберем функцию $\varphi(x, y) = y - x$.

Пример 3. Лемниската Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ $(a > 0)$.

Чтобы изобразить эту кривую, перейдем к полярным координатам и получим уравнение $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$. Положим $\varphi(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)$. Ясно, что начало координат – особая точка, поскольку в ней $\varphi'_x = \varphi'_y = 0$. Но это еще не дает основания считать, что эта кривая не является многообразием. Можно, однако, доказать, что она действительно не является многообразием. Если же выбросить точку $(0, 0)$, то оставшаяся часть кривой будет многообразием.

Пример 4. Однополостный гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ $(a \geq 0)$.

Имеем $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - a^2$, $\varphi'_x = 2x$, $\varphi'_y = 2y$, $\varphi'_z = -2z$. Все частные производные одновременно обращаются в нуль в начале координат. Но эта точка не принадлежит гиперболоиду при $a > 0$. Поэтому гиперболоид является многообразием, для любой точки гиперболоида выберем окрестность U так, чтобы она не содержала начала координат.

Если же $a = 0$, то $x^2 + y^2 = z^2$ – конус, и это не будет многообразием, даже если взять одну часть конуса. Чтобы получить многообразие, нужно удалить точку $(0, 0, 0)$.

14.2 Касательные и нормальные векторы

Касательный вектор. Пусть M – p-многообразие в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Вектор $h \in \mathbb{R}^n$ называется касательным вектором к многообразию M в точке $x_0 \in M$, если

$$\lim_{t \to 0} \frac{d(x_0 + th, M)}{t} = 0,$$

где в числителе записано расстояние от точки $x_0 + th$ до данного многообразия M.

Это определение означает, что расстояние от переменной точки $x_0 + th$ до многообразия есть величина бесконечно малая высшего порядка, чем расстояние от нее до точки касания.

Для отображения $\gamma :\ \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^n$ ранее было определено понятие производного вектора

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

Теорема. *Вектор h является касательным к многообразию M в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует функция $\gamma : \mathbb{R} \longmapsto M$, такая, что $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = h$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть h – касательный вектор. Обозначим $x_t = x_0 + th$. По определению расстояния, для любого $t \in \mathbb{R}$

найдется такое $x_t^* \in M$, что $|x_t - x_t^*| \le d(x_t, M) + t^2$ $(x_0^* = x_0)$. Отсюда следует

$$\lim_{t\to 0} \frac{|x_t - x_t^*|}{t} = 0. \tag{14.1}$$

Положим теперь $\gamma(t) = x_t^*$. Функция γ действует из $\mathbb{R}$ в M, $\gamma(0) = x_0$ и, в силу соотношения (14.1), имеем

$$\gamma'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{x_t^* - x_0}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{x_t^* - x_t}{t} + h \right) = h.$$

Достаточность. Пусть найдется такое $\gamma : \ \mathbb{R} \longmapsto M, \ \gamma(0) = x_0$, что $\gamma'(0) = h$. Имеем

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \to h \quad (t \to 0).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{|\gamma(t) - (x_0 + th)|}{t} \to 0 \quad (t \to 0).$$

Заметим, что так как $\gamma(t) \in M$, то $d(x_0 + th, M) \le |\gamma(t) - (x_0 + th)|$ и, таким образом, вектор h является касательным. □

В связи с доказанной теоремой эквивалентное определение касательного вектора можно сформулировать следующим образом.

Определение. Вектор h называется касательным вектором к многообразию M в точке x_0, если существует такая функция $\gamma : \ \mathbb{R} \longmapsto M, \ \gamma(0) = x_0$, что $\gamma'(0) = h$.

Касательное пространство. Пусть M – гладкое p-многообразие и точка $x_0 \in M$.

Определение. Совокупность всех касательных векторов к многообразию M в точке x_0 называется касательным пространством к многообразию M в этой точке и обозначается $T_{x_0}(M)$.

Пусть M – гладкое p-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что M в окрестности U точки x_0 описывается уравнением $\varphi(x) = 0$, где $\varphi : U \longmapsto \mathbb{R}^{n-p}$, rank $\varphi'(x) = n - p$.

Теорема. *Касательное пространство $T_{x_0}(M)$ совпадает с ядром линейного отображения $\varphi'(x_0)$:*

$$T_{x_0}(M) = \ker\, \varphi'(x_0).$$

Доказательство. Пусть касательный вектор $h \in T_{x_0}(M)$. Тогда существует функция $\gamma:\ \mathbb{R} \longmapsto M,\ \gamma(0) = x_0$, такая, что $\gamma'(0) = h$. Так как γ непрерывна при $t = 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что $\gamma(t) \in U$ при $|t| < \delta$. Рассмотрим функцию $\beta(t) = \varphi(\gamma(t))$. При $|t| < \delta$ получаем, что $\beta(t) = 0$ (при больших t значения $\gamma(t)$ могут не попасть в окрестность U) и поэтому $\beta'(0) = 0$. По теореме о производной сложной функции имеем

$$\beta'(0) = \varphi'(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \varphi'(x_0) \cdot h.$$

Таким образом, $\varphi'(x_0) \cdot h = 0$, т. е. $h \in \ker\, \varphi'(x_0)$.

Пусть теперь $h \in \ker\, \varphi'(x_0),\ \ h \neq 0$, т. е. $\varphi'(x_0) \cdot h = 0$. Докажем, что h – касательный вектор. Заметим, что в соответствии с определением дифференцируемости

$$\varphi(x_0 + th) = \varphi(x_0) + t\varphi'(x_0)h + \overline{o}(|th|) \quad (t \to 0),$$

где $\varphi(x_0) = 0$ (это означает, что точка x_0 лежит на многообразии M), $\varphi'(x_0)h = 0$, так что получаем, что

$$\varphi(x_0 + th) = \overline{o}(t) \quad (t \to 0). \tag{14.2}$$

По условию ранг матрицы отображения $\varphi'(x_0)$ равен $n - p$. Отсюда следует, что среди ее столбцов найдутся $n-p$ линейно независимых. Предположим, например, что линейно независимы последние $n - p$ столбцов, т. е. якобиан

$$\frac{\partial(\varphi^1, \ldots, \varphi^{n-p})}{\partial(x^{p+1}, \ldots, x^n)} \neq 0.$$

Точно так же, как и при доказательстве теоремы о неявной функции, введем вспомогательное отображение, действующее по правилу

$$f(x) = (x^1, \ldots, x^p, \varphi^1(x), \ldots, \varphi^{n-p}(x)),\ \ f:\ U \longmapsto \mathbb{R}^n.$$

Тогда получим, что

$$Jf(x_0) = \frac{\partial(\varphi^1, \dots, \varphi^{n-p})}{\partial(x^{p+1}, \dots, x^n)} \neq 0,$$

и, таким образом, выполнены все условия теоремы об обратной функции. По этой теореме, найдется такая окрестность $U_0 \subset U$ точки x_0, что образ $V_0 = f(U_0)$ открыт, и для любых точек $x', x'' \in U_0$ справедливо неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \geq \lambda |x' - x''|, \tag{14.3}$$

где $\lambda > 0$ не зависит от x', x''. Положим $x_t = x_0 + th$. Точка

$$y_0 = (x_0^1, \dots, x_0^p, 0, \dots, 0) \in V_0,$$

так как $y_0 = f(x_0)$. Поскольку множество V_0 открыто, то при достаточно малом $|t|$ точка $y_t = (x_t^1, \dots, x_t^p, 0, \dots, 0) \in V_0$. Значит, существует точка $x_t^* \in U_0$, для которой $f(x_t^*) = y_t$. Имеем $\varphi(x_t^*) = 0$, что означает, что $x_t^* \in M$. В соответствии с (14.3) получаем

$$|x_t - x_t^*| \leq \frac{1}{\lambda} |f(x_t) - f(x_t^*)|.$$

Но

$$f(x_t) - f(x_t^*) =$$
$$= (x_t^1, \dots, x_t^p, \varphi^1(x_t), \dots, \varphi^{n-p}(x_t)) - (x_t^1, \dots, x_t^p, 0, \dots, 0) =$$
$$= (0, \dots, 0, \varphi^1(x_t), \dots, \varphi^{n-p}(x_t)).$$

Таким образом,

$$|f(x_t) - f(x_t^*)|_{\mathbb{R}^n} = |\varphi(x_t)|_{\mathbb{R}^{n-p}} = \overline{o}(t)$$

в силу соотношения (14.2). Отсюда следует, что

$$d(x_t, M) \leq |x_t - x_t^*| = \overline{o}(t).$$

Это означает, что h – касательный вектор, и теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Касательное пространство $T_{x_0}(M)$ к p-мерному многообразию есть p-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$.*

Действительно, так как $\varphi'(x_0)$ имеет ранг, равный $n-p$, то его дефект равен p, а ядро совпадает с $T_{x_0}(M)$.

Следствие 2. *p-мерное многообразие не может быть многообразием размерности $q \neq p$.*

Итак, касательное пространство представляет собой множество

$$T_{x_0}(M) = \{h \in \mathbb{R}^n : \ \varphi'(x_0) \cdot h = 0\},$$

или, что то же самое,

$$(\varphi^i)'(x_0) \cdot h = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-p).$$

В координатной записи эти равенства принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^1}(x_0)h^1 + \ldots + \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^n}(x_0)h^n = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-p).$$

По-другому это можно записать еще так:

$$\operatorname{grad} \varphi^i(x_0) \cdot h = 0. \tag{14.4}$$

Нормальный вектор.

Определение. Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Пусть L – линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Тогда совокупность всех векторов, каждый из которых ортогонален всем векторам подпространства L, называется ортогональным дополнением к подпространству L и обозначается $L^\perp$.

Ясно, что

$$\dim L + \dim L^\perp = n.$$

Определение. Пусть M – p-мерное многообразие и точка $x_0 \in M$. Вектор v называется нормальным вектором к многообразию M в точке x_0, если он ортогонален к каждому касательному вектору в этой точке, т. е. ортогонален к подпространству $T_{x_0}(M)$.

Таким образом, совокупность всех нормальных векторов есть ортогональное дополнение к $T_{x_0}(M)$, т. е. это – линейное подпространство размерности $n-p$. Соотношения (14.4) показывают, что векторы $\operatorname{grad}\,\varphi^i(x_0)$ являются нормальными векторами к многообразию в точке x_0. Эти векторы линейно независимы в силу основного предположения о ранге.

Итак, мы пришли к следующему выводу.

Теорема. *Векторы* $\operatorname{grad}\,\varphi^i(x_0)$ $(i=1,\ldots,n-p)$ *образуют базис в пространстве нормальных векторов к многообразию* M *в точке* x_0.

Касательная p-плоскость. Касательная p-плоскость к многообразию M в точке x_0 – это p-плоскость, которая получается в результате параллельного переноса касательного пространства в точку x_0. Более точно, это – множество

$$\Pi=\{x:\ x=x_0+h,\ h\in T_{x_0}(M)\}.$$

Векторное уравнение касательной p-плоскости имеет вид

$$\varphi'(x_0)(x-x_0)=0.$$

Касательные к кривым. Кривая в n-мерном пространстве локально описывается системой из $n-1$ скалярных уравнений

$$\varphi^1(x)=0,\ldots,\varphi^{n-1}(x)=0$$

с соответствующим предположением о ранге. Касательная прямая описывается уравнениями

$$\begin{cases}(\varphi^1)'(x_0)(x-x_0)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ (\varphi^{n-1})'(x_0)(x-x_0)=0.\end{cases}$$

В случае $n=2$ уравнение многообразия записывается в виде $\varphi(x,y)=0$, а уравнение касательной прямой имеет вид

$$\varphi'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+\varphi'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

При $n = 3$ кривая описывается парой уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0, \\ \psi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение касательной прямой имеет вид

$$\begin{cases} \varphi'_x(x - x_0) + \varphi'_y(y - y_0) + \varphi'_z(z - z_0) = 0, \\ \psi'_x(x - x_0) + \psi'_y(y - y_0) + \psi'_z(z - z_0) = 0. \end{cases}$$

Пример 1. Пусть кривая в $\mathbb{R}^2$ задана равенством $x^2 - y^2 = 1$. Тогда $\varphi(x, y) = x^2 - y^2 - 1$, $\varphi'_x = 2x$, $\varphi'_y = -2y$. Запишем уравнение касательной прямой в точке (x_0, y_0):

$$2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0) = 0,$$

или

$$x_0 x - y_0 y = 1.$$

Пример 2. Пусть кривая в $\mathbb{R}^3$ задана двумя равенствами

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = x, \ x \neq 1. \end{cases}$$

Доказать, что предположение о ранге выполнено всюду, кроме точки $x = 1$, т. е. что ранг матрицы Якоби равен 2.

Уравнение касательной прямой в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид

$$\begin{cases} 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0, \\ (2x_0 - 1)(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0, \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} x_0 x + y_0 y + z_0 z = 1, \\ (2x_0 - 1)x + 2y_0 y = x_0. \end{cases}$$

14.3 Условный экстремум

1) Рассмотрим следующую задачу. Среди всех прямоугольников на плоскости с заданным периметром $2c$ требуется найти тот, у которого наибольшая площадь.

Пусть x, y – стороны прямоугольника. Тогда его площадь $S = f(x, y) = xy$. Требуется найти наибольшее значение $f(x, y)$ при условии $x + y = c$. Из этого условия следует, что $y = c - x$. Тогда получим $\varphi(x) = f(x, c-x) = x(c - x)$, $\varphi'(x) = c - 2x$, $\varphi'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{c}{2}$, $y = \frac{c}{2}$.

Итак, прямоугольник с наибольшей площадью является квадратом.

2) Рассмотрим еще одну задачу. Требуется найти наибольшее значение функции $f(x, y) = xy$ на многообразии M, которое представляет собой отрезок в $\mathbb{R}^2$, соединяющий точки $(0, 1)$ и $(1, 0)$.

Имеем $y = 1 - x$, где $0 \le x \le 1$. Тогда $\varphi(x) = f(x, 1 - x) = x(1 - x)$ $(0 \le x \le 1)$, и мы приходим к задаче нахождения максимума функции $\varphi(x)$ на отрезке $[0, 1]$.

Две эти задачи приводят к понятию условного экстремума.

Определение. Пусть f – действительная функция, заданная на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, M – p-мерное многообразие, содержащееся в E. В точке $x_0 \in M$ функция f имеет условный максимум на многообразии M, если существует такая окрестность $U \subset E$ точки x_0, что для всех $x \in U \cap M$ выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Условный максимум называется строгим, если окрестность можно выбрать настолько малой, что для всех $x \in U \cap M$, $x \ne x_0$, будет выполнено строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Аналогично определяется понятие условного минимума.

Пример. Пусть $f(x, y) = xy$. В начале координат эта функция не имеет обычного экстремума, поскольку в любой окрестности начала координат она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Возьмем теперь многообразие $M_1 : \ y = x$. На этом многообразии $f(x, y) = x^2$ и в точке $(0, 0)$ функция f имеет условный минимум на многообразии M_1.

Если взять $M_2: \ y = -x$, то на нем $f(x,y) = -x^2$, и теперь функция f имеет условный максимум в точке $(0,0)$.

Итак, функция f в начале координат не имеет экстремума, а на многообразиях M_1 и M_2 имеет условные минимум и максимум, соответственно.

Теорема (необходимое условие экстремума на многообразии). *Пусть f – действительная функция, заданная на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, содержащем многообразие M. Пусть в точке $x_0 \in M$ функция f имеет условный экстремум и дифференцируема в этой точке. Тогда производная $f'(x_0)$ обращается в нуль на касательном пространстве $T_{x_0}(M)$, т. е. $f'(x_0) \cdot h = 0$ для любого $h \in T_{x_0}(M)$.*

Доказательство. Пусть h – касательный вектор, т. е. $h \in T_{x_0}(M)$. Тогда существует такая функция $\gamma: \ \mathbb{R} \longmapsto M, \ \gamma(0) = x_0$, что $\gamma'(0) = h$. Рассмотрим функцию $g(t) = f(\gamma(t))$ $(t \in \mathbb{R})$. Если f в точке x_0 имеет условный максимум, то при $t = 0$ функция g имеет обычный локальный максимум. Функция g дифференцируема в точке $t = 0$ и, по теореме о производной сложной функции,

$$g'(0) = f'(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = f'(x_0) \cdot h.$$

С другой стороны, по теореме Ферма, $g'(0) = 0$. Итак, $f'(x_0) \cdot h = 0$. $\square$

Геометрический смысл теоремы. Предположим, что функция f класса C^1 и рассмотрим множество

$$H = \{x: \ f(x) = f(x_0)\}.$$

Это множество называется множеством уровня функции f. Предположим, что $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in H$. Тогда получим, что H – $(n-1)$-мерное многообразие, т. е. гиперповерхность. Касательное пространство к многообразию H определяется как совокупность всех векторов h, для которых выполнено равенство $f'(x_0) \cdot h = 0$. Доказанная теорема утверждает, что p-мерное подпространство $T_{x_0}(M)$ содержится в $(n-1)$-мерной гиперплоскости $T_{x_0}(H)$. Другими словами, касательная гиперплоскость к H в точке x_0 содержит касательную p-плоскость к M в этой точке.

Заметим, что доказанная теорема дает лишь необходимое условие экстремума. Можно показать, что достаточным оно не является.

Метод множителей Лагранжа. Пусть M – p-мерное многообразие, точка $x_0 \in M$ и в окрестности U этой точки M определено уравнением $\varphi(x) = 0$, где $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^{n-p})$, $\operatorname{rank} \varphi'(x) = n - p$ для любого $x \in U$.

Теорема. *Пусть f – действительная функция в некоторой окрестности многообразия M, дифференцируемая в точке $x_0 \in M$ и имеющая в этой точке условный экстремум. Тогда существуют такие действительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-p}$, что для функции*

$$F(x) = f(x) + \lambda_1 \varphi^1(x) + \ldots + \lambda_{n-p} \varphi^{n-p}(x)$$

полная производная $F'(x_0) = 0$.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы, $f'(x_0) \cdot h = 0$ для любого $h \in T_{x_0}(M)$. Это равносильно тому, что $\operatorname{grad} f(x_0) \cdot h = 0$ для любого $h \in T_{x_0}(M)$, т. е. $\operatorname{grad} f(x_0)$ ортогонален к любому касательному вектору. Значит, этот градиент является нормальным вектором к многообразию M в точке x_0. Как известно, векторы $\operatorname{grad} \varphi^i(x_0)$ $(i = 1, \ldots, n - p)$ образуют базис в пространстве нормальных векторов. Значит, существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p}$ такие, что

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \alpha_1 \operatorname{grad} \varphi^1(x_0) + \ldots + \alpha_{n-p} \operatorname{grad} \varphi^{n-p}(x_0).$$

Обозначим $\lambda_i = -\alpha_i,\ i = 1, \ldots, n-p$. Тогда видим, что для F ее градиент $\operatorname{grad} F(x_0) = 0$, а это равносильно тому, что $F'(x_0) = 0$, и тем самым теорема доказана. $\square$

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-p}$ называются множителями Лагранжа. Они определяются однозначно, так как являются координатами разложения вектора $\operatorname{grad} f(x_0)$ по базису из векторов $\operatorname{grad} \varphi^i(x_0)$ $(i = 1, \ldots, n - p)$, взятых с противоположным знаком. Условие $\operatorname{rank} \varphi'(x) = n - p$ обеспечивает линейную независимость векторов $\operatorname{grad} \varphi^i(x_0)$ $(i = 1, \ldots, n - p)$.

В качестве примера, иллюстрирующего метод множителей Лагранжа, рассмотрим следующую задачу. Найти расстояние от точки до гиперплоскости в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Гиперплоскость H определяется уравнением

$$a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n = b,$$

или в векторной форме $ax = b$, где $a \neq 0$, ибо, в противном случае, не получим гиперплоскость.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что расстояние от заданной точки x_0 до H равно $d(x_0, H) = \frac{|ax_0 - b|}{|a|}$. Расстояние от x_0 до произвольной точки $x \in H$ выражается следующим образом:

$$\sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + \ldots + (x^n - x_0^n)^2}.$$

Поэтому для нахождения минимума этих расстояний достаточно рассмотреть подкоренное выражение и найти его минимум.

Обозначим $f(x) = (x^1 - x_0^1)^2 + \ldots + (x^n - x_0^n)^2$. Составим функцию Лагранжа

$$F(x) = f(x) + \lambda(ax - b) = f(x) + \lambda(a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n - b).$$

Находим все частные производные функции F и приравниваем их к нулю. Получаем

$$\begin{cases} 2(x^1 - x_0^1) + \lambda a_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2(x^n - x_0^n) + \lambda a_n = 0, \\ a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n = b. \end{cases}$$

Последнее уравнение этой системы означает, что точка x лежит на гиперплоскости H. Умножим i-е уравнение этой системы на a_i $(i = 1, \ldots, n)$ и сложим первые n уравнений. Тогда получим

$$2\sum_{i=1}^{n}(a_i x^i - a_i x_0^i) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0,$$

или, учитывая последнее уравнение системы,

$$2(b - ax_0) + \lambda |a|^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$\lambda = \frac{2(ax_0 - b)}{|a|^2}.$$

Подставим найденное значение λ в первые n уравнений системы и получим

$$2(x^i - x_0^i) = -a_i \frac{2(ax_0 - b)}{|a|^2} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Каждое из этих равенств возведем в квадрат и сложим полученные равенства. Получим

$$f(x) = \frac{(ax_0 - b)^2}{|a|^2},$$

а это и есть квадрат искомого расстояния.

14.4 Зависимость функций

Определение. Пусть на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ задана система из m действительных функций

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \ldots, x^n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^m = f^m(x^1, \ldots, x^n), \end{cases} \tag{14.5}$$

каждая из которых принадлежит классу C^1. Будем говорить, что на множестве E одна из функций системы (14.5), например f^m, зависит от остальных функций этой системы, если существует действительная функция Φ класса C^1, определенная на некотором открытом множестве пространства $\mathbb{R}^{m-1}$, которое содержит все значения $(f^1(x), \ldots, f^{m-1}(x))$ $(x \in E)$, такая, что

$$f^m(x) = \Phi(f^1(x), \ldots, f^{m-1}(x))$$

для всех $x \in E$.

Пример 1. Пусть $m = 3$,

$$\begin{cases} y^1 = \sum_{i=1}^n x^i, \\ y^2 = \sum_{i=1}^n (x^i)^2, \\ y^3 = \sum_{i \neq j} x^i x^j. \end{cases}$$

Тогда $y^3 = (y^1)^2 - y^2$, т. е. получим, что y^3 зависит от y^1 и y^2. При этом $\Phi(y^1, y^2) = (y^1)^2 - y^2$.

Пример 2. Пусть

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + x^2, \\ y^2 = x^1 - x^2. \end{cases}$$

Эти две функции независимы на каждом круге из $\mathbb{R}^2$. Действительно, если взять прямую $x^1 + x^2 = c$, где c – постоянная, то, предположив, что y^2 зависит от y^1, получим, что функция $y^2 = \Phi(y^1)$ постоянна на пересечении прямой $x^1+x^2=c$ с кругом. Но функция x^1-x^2 не является постоянной на этом пересечении.

Если на множестве E ни одна из функций системы (14.5) не зависит от остальных, то эту систему называют независимой на E. При этом может оказаться, что на более узком множестве система будет зависимой.

Теорема 1 (достаточное условие независимости функций). *Пусть на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ задана система* (14.5) *из m непрерывно дифференцируемых функций, причем $m \leq n$. Пусть в некоторой точке $x_0 \in E$ матрица Якоби отображения $f = (f^1, \ldots, f^m)$ имеет ранг m. Тогда функции системы* (14.5) *независимы в любой окрестности точки x_0.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть в некоторой окрестности U точки x_0 одна из функций системы (14.5), например, f^m зависит от остальных, так что имеет место тождество

$$f^m(x) = \Phi(f^1(x), \ldots, f^{m-1}(x)) \quad (x \in U),$$

где Φ – непрерывно дифференцируемая функция на соответствующем открытом множестве пространства $\mathbb{R}^{m-1}$. Дифференцируя это тождество по правилу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{\partial f^m}{\partial x^i} = \frac{\partial \Phi}{\partial y^1}\frac{\partial f^1}{\partial x^i} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial y^{m-1}}\frac{\partial f^{m-1}}{\partial x^i} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Рассмотрим матрицу Якоби отображения f

$$\left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\right) \quad (i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m).$$

Из полученного выше равенства следует, что последняя строка этой матрицы является линейной комбинацией предыдущих $m-1$ строк при каждом $x \in U$, в частности, и при $x = x_0$. Но это противоречит тому, что ранг этой матрицы в точке x_0 равен m. $\square$

Теорема 2 (достаточное условие зависимости функций). *Пусть на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ задана система из m непрерывно дифференцируемых функций*

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \ldots, x^n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^m = f^m(x^1, \ldots, x^n). \end{cases} \tag{14.6}$$

Предположим, что в каждой точке $x \in E$ матрица Якоби отображения $f \equiv (f^1, \ldots, f^m)$ имеет один и тот же ранг $p \le \min(n, m)$. Тогда для любой точки $x_0 \in E$ найдется окрестность U_0, такая, что некоторые p функций системы (14.6) *в этой окрестности независимы, а остальные функции системы зависят от них в окрестности U_0.*

Доказательство. В каждой точке в матрице Якоби существует минор p-го порядка, отличный от нуля, а все миноры $p+1$-го порядка равны нулю.

Пусть в точке x_0 отличный от нуля минор, расположенный в левом верхнем углу, т. е.

$$\frac{\partial(f^1, \ldots, f^p)}{\partial(x^1, \ldots, x^p)}(x_0) \neq 0. \tag{14.7}$$

Для вектора $x = (x^1, \ldots, x^n)$ условимся обозначать $x' = (x^1, \ldots, x^p)$, $x'' = (x^{p+1}, \ldots, x^n)$. Тогда $x = (x', x'')$. Аналогично, для вектора $y = (y^1, \ldots, y^m)$ обозначим $y' = (y^1, \ldots, y^p)$, $y'' = (y^{p+1}, \ldots, y^m)$, так что $y = (y', y'')$. Положим также $f' = (f^1, \ldots, f^p)$, $f'' = (f^{p+1}, \ldots, f^m)$. В этих обозначениях исходная система функций (14.6) может быть записана так:

$$\begin{cases} y' = f'(x', x''), \\ y'' = f''(x', x''). \end{cases} \tag{14.8}$$

Систему (14.8) будем рассматривать как уравнения относительно x'.

Пусть $y_0 = f(x_0)$. В силу условия (14.7) и теоремы о неявной функции, существует такой куб A с центром в точке

$$(y_0^1, \ldots, y_0^p, x_0^{p+1}, \ldots, x_0^n) \equiv (y_0', x_0'')$$

и такой куб B с центром в точке $(x_0^1, \ldots, x_0^p) \equiv x_0'$, что для любой точки $(y', x'') \in A$ существует, и притом единственная, точка $x' = \varphi(y', x'')$, для которой выполнено равенство $y' = f'(x', x'')$, т. е. это равенство можно однозначно разрешить относительно x'.

Теперь рассмотрим формально второе из уравнений системы (14.8) и подставим в него вместо x' функцию $\varphi(y', x'')$. В правой части получим функцию $h(y', x'') \equiv f''(\varphi(y', x''), x'')$, в которой y', x'' – независимые переменные (векторные), а вектор (y', x'') пробегает куб A. Этот куб представим в виде прямого произведения $A = A' \times A''$, где куб $A' \subset \mathbb{R}^p$, в нем изменяется y', а куб $A'' \subset \mathbb{R}^{n-p}$, и в нем изменяется x''.

Покажем, что функция h на самом деле не зависит от вектора x'', т. е. что для любого фиксированного $y' \in A'$ функция $h(y', x'')$ постоянна по x''. Компоненты вектор-функции h имеют вид

$$h^j(y', x'') = f^{p+j}(\varphi(y', x''), x'') \quad (j = 1, \ldots, m-p),$$

где вектор $x'' = (x^{p+1}, \ldots, x^n)$. Согласно теореме о среднем значении, действительная функция на связном открытом множестве постоянна, если у нее все частные производные равны нулю. Таким образом, достаточно показать, что при фиксированном y' частные производные функции h^j по переменным $x^{p+1}, \ldots, x^n$ равны нулю в A''. Вычислим частную производную по x^{p+1}. Поскольку

$$h^j(y', x'') = f^{p+j}(\varphi^1(y', x''), \ldots, \varphi^p(y', x''), x^{p+1}, \ldots, x^n),$$

то имеем

$$\frac{\partial h^j}{\partial x^{p+1}}(y', x'') = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f^{p+j}}{\partial x^k}(x', x'') \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^{p+1}}(y', x'') + \frac{\partial f^{p+j}}{\partial x^{p+1}}(x', x''),$$

где $x' = \varphi(y', x'')$. С другой стороны, имеем тождество

$$y' = f'(\varphi(y', x''), x'').$$

Действительно, функция φ была определена как решение первого уравнения системы (14.8). Поэтому для каждого $i = 1\dots,p$, дифференцируя это тождество по x^{p+1}, получим, что

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f^i}{\partial x^k}(x',x'')\frac{\partial \varphi^k}{\partial x^{p+1}}(y',x'') + \frac{\partial f^i}{\partial x^{p+1}}(x',x'') = 0 \quad (i = 1,\dots,p), \qquad (14.9)$$

где $x' = \varphi(y',x'')$. Вспомним, что по нашему условию любой минор порядка $p+1$ равен нулю. Поэтому

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^p} & \frac{\partial f^1}{\partial x^{p+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^p}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^p}{\partial x^p} & \frac{\partial f^p}{\partial x^{p+1}} \\ \frac{\partial f^{p+j}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^{p+j}}{\partial x^p} & \frac{\partial f^{p+j}}{\partial x^{p+1}} \end{vmatrix} = 0. \qquad (14.10)$$

Заметим, что по предположению минор p-го порядка в левом верхнем углу отличен от нуля в точке x_0, и поэтому мы можем считать, что он отличен от нуля всюду на множестве E, заменив, в случае необходимости, его окрестностью точки x_0.

В левой части (14.10) последний столбец является линейной комбинацией предыдущих столбцов. Отсюда, в силу (14.9), получаем, что для каждого $j = 1,\dots,m-p$ справедливо равенство

$$\frac{\partial h^j}{\partial x^{p+1}} = 0.$$

Аналогично докажем, что равны нулю производные по переменным $x^{p+2},\dots,x^n$.

Итак, функция $h(y',x'')$ не зависит от x'', а только лишь от y', т. е.

$$h(y',x'') \equiv \Phi(y') \quad (y' \in A',\ x'' \in A'')\,.$$

Пусть U_0 – окрестность точки x_0, $U_0 \subset B \times A''$, настолько мала, что для любого $x \in U_0$ справедливо $y' = f'(x) \in A'$. Прежде всего, функции $f^1,\dots,f^p$ независимы в U_0 в силу предыдущей теоремы. Покажем, что через них выражаются функции $f^{p+1}, \ldots, f^m$, т. е. выражается вектор-функция f''. Возьмем произвольную точку $x \in U_0$ и обозначим $y' = f'(x)$. Тогда, в силу выбора U_0, $y' \in A'$, $x'' \in A''$. Поскольку при этом $x' \in B$, то обязательно $x' = \varphi(y', x'')$. В той же точке x будет

$$f''(x) = f''(x', x'') = f''(\varphi(y', x''), x'') = h(y', x'') =$$

$$= \Phi(y') = \Phi(f'(x)) = \Phi(f^1(x), \ldots, f^p(x)).$$

Таким образом,

$$f^{p+j}(x) = \Phi^j(f^1(x), \ldots, f^p(x)) \quad (j = 1, \ldots, m-p)$$

для каждого $x \in U_0$, и теорема доказана. $\square$

Замечание 1. В условиях теоремы независимыми будут те p функций, у которых строки частных производных линейно независимы. Это следует из достаточного условия независимости, которое можно коротко сформулировать так: если градиенты функций $f^1, \ldots, f^m$ линейно независимы, то и сами эти функции независимы.

Замечание 2 (геометрический смысл теоремы). Доказанная теорема имеет и геометрическую формулировку, которую называют теоремой о постоянном ранге.

Пусть f – отображение класса C^1 открытого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$. Предположим, что для любого $x \in E$ производная $f'(x)$ имеет один и тот же ранг $p \leq \min(m, n)$. Тогда для любого $x_0 \in E$ найдется такая окрестность U_0, что ее образ $M_0 = f(U_0)$ является p-мерным многообразием класса C^1 в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Экзаменационные билеты

Первый семестр

Билет 1.

1. Точные верхняя и нижняя грани ограниченного множества, теорема об их существовании.

2. Теорема Коши (обобщенная теорема о среднем значении).

Билет 2.

1. Теорема о существовании корня.

2. Первое правило Лопиталя о раскрытии неопределенностей.

Билет 3.

1. Определение предела последовательности и его геометрический смысл. Единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности.

2. Второе правило Лопиталя о раскрытии неопределенностей.

Билет 4.

1. Предельный переход и неравенства для последовательностей. Теорема о трех последовательностях.

2. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа и следствия из нее.

Билет 5.

1. Арифметические свойства сходящихся последовательностей.

2. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано, единственность многочлена Тейлора.

Билет 6.

1. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности и связь между ними.

2. Теорема Дарбу о промежуточном значении производной.

Билет 7.

1. Лемма Кантора о вложенных отрезках.

2. Теорема Лагранжа о среднем значении и следствия из нее.

Билет 8.

1. Подпоследовательности, лемма Больцано – Вейерштрасса.

2. Теорема Ролля о корне производной.

Билет 9.

1. Критерий Коши сходимости последовательности.

2. Определение дифференцируемости и определение производной, их эквивалентность. Непрерывность дифференцируемой функции. Геометрический смысл производной.

Билет 10.

1. Критерий сходимости монотонной последовательности.

2. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена.

Билет 11.

1. Число e.

2. Дифференцируемость и арифметические операции.

Билет 12.

1. Частичные пределы последовательности, верхний и нижний пределы, теорема об их существовании. Критерий сходимости.

2. Производные основных элементарных функций.

Билет 13.

1. Счетность множества рациональных чисел и несчетность множества действительных чисел.

2. Условия монотонности функции в терминах производной.

Билет 14.

1. Два определения предела функции и их эквивалентность. Геометрический смысл предела.

2. Выпуклые функции и их свойства (ограниченность и односторонняя дифференцируемость).

Билет 15.

1. Единственность предела, локальная ограниченность функции, имеющей предел. Пределы функций и арифметические операции.

2. Необходимое и достаточные условия экстремумов. Применение формулы Тейлора для нахождения экстремумов. Глобальные экстремумы.

Билет 16.

1. Предельный переход и неравенства, теорема о трех пределах для функций.

2. Теорема Ферма о корне производной.

Билет 17.

1. Предел $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

2. Теорема о производной композиции и обратной функции.

Билет 18.

1. Критерий Коши существования предела функции.

2. Критерии выпуклости. Точки перегиба и способы их нахождения.

Билет 19.

1. Критерий существования предела монотонной функции.

2. Условия монотонности функции в терминах производной.

Билет 20.

1. Теорема о замене переменной в пределах функций.

2. Выпуклые функции и их свойства (ограниченность и односторонняя дифференцируемость).

Билет 21.

1. Частичные, верхний и нижний пределы функции, теорема об их существовании.

2. Теорема о производной композиции и обратной функции.

Билет 22.

1. Различные определения непрерывности функции в точке и их эквивалентность. Геометрический смысл непрерывности.

2. Теорема Ролля о корне производной.

Билет 23.

1. Классификация точек разрыва функции, примеры.

2. Второе правило Лопиталя о раскрытии неопределенностей.

Билет 24.

1. Непрерывность и арифметические операции, непрерывность элементарных функций.

2. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа и следствия из нее.

Билет 25.

1. Теорема о непрерывности композиции.

2. Теорема Лагранжа о среднем значении и следствия из нее.

Билет 26.

1. Непрерывность и разрывы монотонной функции, теорема о множестве точек разрыва.

2. Первое правило Лопиталя о раскрытии неопределенностей.

Билет 27.

1. Теорема Больцано – Коши о корне и следствие. Критерий непрерывности монотонной функции.

2. Разложение основных элементарных функций по фомуле Маклорена.

Билет 28.

1. Первая теорема Вейерштрасса для непрерывных функций.

2. Теорема Ферма о корне производной.

Билет 29.

1. Вторая теорема Вейерштрасса для непрерывных функций.

2. Определение дифференцируемости и определение производной, их эквивалентность. Непрерывность дифференцируемой функции. Геометрический смысл производной.

Билет 30.

1. Теорема о непрерывности обратной функции. Обратные тригонометрические функции.

2. Необходимое и достаточные условия существоания экстремумов, применение формулы Тейлора для нахождения экстремумов. Глобальные экстремумы.

Билет 31.

1. Определение показательной функции и ее свойства. Логарифмическая и степенная функции и их свойства.

2. Критерии выпуклости. Точки перегиба и способы их нахождения.

Билет 32.

1. Предел $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$. Следствия.

2. Дифференцируемость и арифметические операции.

Билет 33.

1. Сравнение логарифмической, степенной и показательной функций.

2. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной.

Билет 34.

1. Равномерная непрерывность, теорема Кантора.

2. Теорема Коши (обобщенная теорема о среднем значении).

Второй семестр [1]

Билет 1.

1. Обобщенная теорема Ньютона – Лейбница. Следствие. Понятие обобщенной первообразной. Теорема об обобщенной первообразной.

2. Пространство $\mathbb{R}^n$. Скалярное произведение и его свойства. Норма. Неравенства Коши и треугольника. Расстояние.

Билет 2.

1. Интегрирование тригонометрических функций. Примеры.

2. Открытые множества и их свойства. Примеры. Внутренность множества.

Билет 3.

1. Интегрирование биномиального дифференциала.

2. Замкнутые множества и их свойства. Примеры. Замыкание множества.

Билет 4.

1. Вторая теорема о среднем значении. Формулы Бонне.

2. Связь между замкнутыми и открытыми множествами. Соотношения двойственности. Различные определения внутренности и замыкания и их эквивалентность.

Билет 5.

1. Основная теорема интегрального исчисления и теорема Ньютона – Лейбница.

2. Компактные множества. Лемма о вложенных сегментах. Лемма и теорема Гейне – Бореля. Лемма Больцано – Вейерштрасса.

Билет 6.

1. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.

2. Сходящиеся последовательности в $\mathbb{R}^n$. Единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности. Сходимость последовательности и покоординатная сходимость.

[1] Из программы экзамена исключена тема 14 "Функции на многообразиях".

Билет 7.

1. Формула интегрирования по частям и две теоремы о замене переменной в определенном интеграле.

2. Предельный переход и арифметические операции для последовательностей в $\mathbb{R}^n$. Критерий Коши.

Билет 8.

1. Путь и его длина. Достаточное условие спрямляемости. Теорема о вычислении длины пути. Спрямляемые жордановы кривые. Длина кривой. Длина графика функции.

2. Характеризация предельной точки множества в терминах последовательностей. Лемма Больцано – Вейерштрасса.

Билет 9.

1. Теорема о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Замечание об обратном утверждении.

2. Определение предела вектор-функции многих переменных по Коши и по Гейне и их эквивалентность. Арифметические свойства пределов.

Билет 10.

1. Первая теорема о среднем значении и следствие из нее.

2. Определение непрерывности вектор-функции многих переменных. Связь между непрерывностью вектор-функции и непрерывностью ее компонент. Арифметические свойства непрерывных функций.

Билет 11.

1. Интегрирование по частям и замена переменной в неопределенном интеграле. Примеры.

2. Теорема о непрерывности композиции вектор-функции многих переменных. Примеры.

Билет 12.

1. Интегралы вида $\int R\left(x^{\frac{p_1}{q_1}},\ldots,x^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx$ и $\int R\left(x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/m}\right)dx$, где R – рациональная функция.

2. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса о непрерывных вектор-функциях многих переменных на компактных множествах. Теорема о компактности непрерывного образа компактного множества.

Билет 13.

1. Интегрирование дробно рациональных функций. Примеры. Метод Остроградского.

2. Равномерная непрерывность и теорема Кантора для вектор-функций многих переменных.

Билет 14.

1. Критерий интегрируемости по Риману в терминах сумм Дарбу и в терминах колебаний.

2. Определение связного множества. Критерий связности в одномерном пространстве.

Билет 15.

1. Определение и элементарные свойства определенного интеграла, его геометрический смысл. Необходимое условие интегрируемости. Примеры.

2. Теорема о связности непрерывного образа связного множества. Следствие (теорема Больцано – Коши). Линейная связность и связность.

Билет 16.

1. Линейность и аддитивность интеграла, интеграл от модуля функции. Монотонность интеграла и следствие.

2. Линейные формы. Непрерывность линейной формы. Сопряженное пространство, базис в сопряженном пространстве. Гиперплоскость и однородная гиперплоскость.

Билет 17.

1. Вычисление площади области, граница которой задана в полярных координатах. Примеры.

2. Определение дифференцируемости действительной функции многих переменных. Понятие производной и дифференциала. Касательная гиперплоскость и геометрический смысл производной.

Билет 18.

1. Интегрирование на подынтервалах. Изменение значений функции в конечном числе точек и интегрируемость.

2. Теорема о производной аффинной функции. Единственность дифференциала и непрерывность дифференцируемой действительной функции многих переменных.

Билет 19.

1. Интегрируемость непрерывной и монотонной функций, функции, имеющей конечное число точек разрыва.

2. Частные производные действительной функции, их связь с производной. Примеры. Геометрический смысл частных производных.

Билет 20.

1. Вычисление площади поверхности тела вращения.

2. Функции класса C^1 и их дифференцируемость.

Билет 21.

1. Дифференцирование интегралов, пределы интегрирования которых являются дифференцируемыми функциями.

2. Производная по направлению и ее геометрический смысл. Теорема о существовании производной по направлению у дифференцируемой функции и правило ее нахождения с помощью частных производных. Пример, показывающий, что эта теорема необратима.

Билет 22.

1. Интегрирование рациональных функций. Примеры. Метод Остроградского.

2. Понятие градиента. Направление наискорейшего роста действительной функции многих переменных.

Билет 23.

1. Интегрируемость модуля, линейной комбинации и произведения интегрируемых функций.

2. Лемма о дифференцируемости функции $\varphi(t) = f(a + th)$ $(0 \leq t \leq 1)$. Теорема о среднем для действительной функции многих переменных (аналог теоремы Лагранжа).

Билет 24.

1. Суммы Дарбу и их свойства. Интегралы Дарбу.

2. Теорема о постоянстве действительной функции многих переменных.

Билет 25.

1. Вычисление объема тела вращения.

2. Производная векторной функции действительной переменной. Теорема о производной сложной функции (цепное правило).

Билет 26.

1. Основная теорема интегрального исчисления и теорема Ньютона – Лейбница.

2. Частные производные высших порядков. Примеры. Пример функции с различными смешанными производными.

Билет 27.

1. Неопределенный интеграл и его простейшие свойства. Таблица интегралов.

2. Теорема Шварца о равенстве смешанных производных.

Билет 28.

1. Определение и элементарные свойства определенного интеграла, его геометрический смысл. Необходимое условие интегрируемости. Примеры.

2. Формула Тейлора для действительной функции многих переменных.

Билет 29.

1. Критерии интегрируемости по Риману в терминах сумм Дарбу и в терминах колебаний.

2. Квадратичные формы, знакоопределенные квадратичные формы, примеры. Критерий Сильвестра.

Билет 30.

1. Интегрирование по частям и замена переменной в неопределенном интеграле. Примеры.

2. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции многих переменных. Примеры. Достаточное условие экстремума. Случай функции двух переменных.

Билет 31.

1. Понятие измеримости по Жордану. Вычисление площадей с помощью определенного интеграла. Примеры.

2. Линейное отображение и его норма. Непрерывность линейного отображения. Композиция линейных отображений. Аффинные отображения.

Билет 32.

1. Интегрирование рациональных функций. Примеры. Метод Остроградского.

2. Дифференцируемые отображения. Дифференцируемость линейного отображения. Непрерывность дифференцируемого отображения. Единственность производной.

Билет 33.

1. Суммы Дарбу и их свойства. Интегралы Дарбу.

2. Связь между дифференцируемостью отображения и дифференцируемостью его компонент. Дифференцируемость отображения класса C^1.

Билет 34.

1. Интегрируемость непрерывной и монотонной функций, функции, имеющей конечное число точек разрыва.

2. Матрица Якоби и якобиан дифференцируемого отображения. Теорема о производной сложной функции для дифференцируемых отображений. Цепное правило.

Билет 35.

1. Критерии Дарбу и Лебега интегрируемости ограниченной функции (без доказательства).

2. Обратимость линейного отображения. Теорема об обратной функции. Следствие (о якобиане обратного отображения).

Билет 36.

1. Неопределенный интеграл и его простейшие свойства. Таблица интегралов.

2. Теорема о неявной функции.

Предметный указатель

Навчальне видання

КОЛЯДА В. І.
КОРЕНОВСЬКИЙ А. О.

КУРС ЛЕКЦІЙ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

У двох частинах

Частина 1

Російською мовою

Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Редактор *Н. Я. Рихтік*
Технічний редактор *М. М. Бушин*
Дизайнер обкладинки *В. І. Костецький*
Коректор *О. Г. Дайбова*

Здано у виробництво 04.06.2009. Підписано до друку 28.07.2010.
Формат 60x84/16. Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 23,25.
Тираж 100 прим. Вид. № 104. Зам. № 285.

Надруковано з готового оригінал-макета

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
www.astroprint.odessa.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Коляда В. И., Кореновский А. А.

К 62 Курс лекций по математическому анализу : в 2-х ч. Ч. 1 / В. И. Коляда, А. А. Кореновский. — Одесса : Астропринт, 2010. — XXVI, 374 с.

ISBN 978–966–190–173–4

Данный курс лекций предназначен для студентов математических факультетов. Изложенный материал рассчитан на 280 лекционных часов при условии, что имеется примерно столько же часов практических или лабораторных занятий. Приведена программа всего курса, разбитого на четыре семестра. Каждый семестр делится на три модуля, продолжительность которых составляет соответственно 8, 8 и 2 недели в первом и третьем семестрах и 7, 7 и 3 недели — во втором и четвертом. По истечении каждого модуля предполагается свободная от занятий неделя, во время которой студенты сдают прослушанный материал и получают баллы. В конце каждого семестра студент получает соответствующую оценку в зависимости от общего количества баллов, набранных на теоретических и практических контрольных мероприятиях.

Курс лекций состоит из двух частей. Первая часть относится к первым двум семестрам, вторая — к третьему и четвертому семестрам. В конце каждой части приведены комплекты экзаменационных билетов по программе каждого семестра в целом.

ББК 22.161я73
УДК 517(075.8)

Поданий курс лекцій призначено для студентів математичних факультетів. Викладений матеріал розраховано на 280 лекційних годин за умови, що є приблизно стільки ж годин практичних і лабораторних занять. Наведено програму усього курсу, поділеного на чотири семестри. Кожний семестр поділено на три модулі, тривалість яких становить відповідно 8, 8 і 2 тижні у першому та третьому семестрах та 7, 7 і 3 тижні — у другому та четвертому. Після закінчення кожного модуля пропонується вільний від занять тиждень, під час якого студенти складають прослуханий матеріал і отримують бали. Наприкінці кожного семестру студент отримує відповідну оцінку залежно від загальної кількості балів, набраних на теоретичних та практичних контрольних заходах.

Курс лекцій складається з двох частин. Перша частина відноситься до перших двох семестрів, друга — до третього і четвертого семестрів. Наприкінці кожної частини наведено комплекти екзаменаційних білетів за програмою кожного семестру у цілому.