Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
Институт математики, экономики и механики

В. И. Коляда, А. А. Кореновский

Курс лекций по математическому анализу

В двух частях

Часть 2

Одесса
«Астропринт»
2010

ББК 22.161я73
УДК 517(075.8)
К 62

Данный курс лекций предназначен для студентов математических факультетов. Изложенный материал рассчитан на 280 лекционных часов при условии, что имеется примерно столько же часов практических или лабораторных занятий. Приведена программа всего курса, разбитого на четыре семестра. Каждый семестр делится на три модуля, продолжительность которых составляет соответственно 8, 8 и 2 недели в первом и третьем семестрах и 7, 7 и 3 недели — во втором и четвертом. По истечении каждого модуля предполагается свободная от занятий неделя, во время которой студенты сдают прослушанный материал и получают баллы. В конце каждого семестра студент получает соответствующую оценку в зависимости от общего количества баллов, набранных на теоретических и практических контрольных мероприятиях.

Курс лекций состоит из двух частей. Первая часть относится к первым двум семестрам, вторая — к третьему и четвертому семестрам. В конце каждой части приведены комплекты экзаменационных билетов по программе каждого семестра в целом.

Рецензенты:

И. А. Шевчук, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Киевского национального университета имени Тараса Шевченко;
В. Ф. Бабенко, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Днепропетровского национального университета;
Д. И. Боднар, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой экономической кибернетики Тернопольского национального университета

Рекомендовано к печати ученым советом Одесского национального университета имени И. И. Мечникова.
Протокол № 9 от 27 мая 2008 г.

ISBN 978–966–190–172–7 (в двух частях)
ISBN 978–966–190–174–1 (часть 2)

Оглавление

УЧЕБНЫЙ ПЛАН КУРСА

Согласно с учебным планом курс математического анализа рассчитан на 4 семестра и читается на первых двух курсах.

Расчет часов по семестрам и форма отчетности приведены в следующей таблице.

Курс	Семестр	Всего (часов)	Лекций	Практич. занятий	Зачет	Экзамен
1	1	144	72	72	+	+
1	2	136	68	68	+	+
2	3	144	72	72	+	+
2	4	119	68	51	+	+
	Всего	543	280	263	4	4

В каждом семестре по результатам контрольных мероприятий начисляются баллы и выставляется оценка за семестр в соответствии с количеством баллов по следующему критерию.

Всего баллов за семестр – **100**:
по теоретическому материалу – **50**, по практическим занятиям – **50**.

Шкала оценок по результатам семестра:

Баллы	25 – 50 (из 50)	0 – 49	50 – 69	70 – 84	85 – 100
Оценка	Зачет	Неуд.	Удовл.	Хорошо	Отлично

Распределение учебного материала по семестрам, форма отчетности, баллы[1]

Сем.	Мод.	Темы	Отчетность	Проводит	Баллы	Нед.
1	1	Шк.	Озн. КР	Асс.		1
1	1	1	КР	Асс.		3
1	1	2	КР	Асс.		7
1	**1**	**1,2**	**Инд. КР**	**Лект.**	**15**	**9**
1	2	3	КР	Асс.		11
1	2	4	КР	Асс.		15
1	**2**	**3,4**	**Колл. (соб.)**	**Лект.**	**15**	**18**
1	3	5	КР	Асс.		20
1	**3**	**1 – 5**	**Итог. соб.**	**Лект., Асс.**	**20**	**21**
2	1	6	КР	Асс.		3
2	1	7,8	КР	Асс.		7
2	**1**	**6 – 8**	**Инд. КР**	**Лект.**	**15**	**8**
2	2	9 – 11	КР	Асс.		11
2	2	12	КР	Асс.		15
2	**2**	**9 – 12**	**Колл. (соб.)**	**Лект.**	**15**	**16**
2	3	13,14	КР	Асс.		19
2	**3**	**6 – 14**	**Итог. соб.**	**Лект., Асс.**	**20**	**20**

[1] Сем. – семестр; Мод. – номер модуля; Нед. – неделя; Шк. – материал школьной программы; Озн. КР – ознакомительная контрольная работа; КР – контрольная работа; Инд. КР – индивидуальная контрольная работа; Колл. (соб.) – коллоквиум (собеседование); Итог. соб. – итоговое собеседование; Асс. – ассистент; Лект. – лектор

Сем.	Мод.	Темы	Отчетность	Проводит	Баллы	Нед.
3	1	15	КР	Асс.		4
3	1	16,17	КР	Асс.		7
3	**1**	**15 – 17**	**Инд. КР**	**Лект.**	**15**	**9**
3	2	18	КР	Асс.		11
3	2	19	КР	Асс.		15
3	**2**	**18 – 19**	**Колл. (соб.)**	**Лект.**	**15**	**18**
3	3	20,21	КР	Асс.		19
3	**3**	**15 – 21**	**Итог. соб.**	**Лект., Асс.**	**20**	**21**
4	1	22	КР	Асс.		4
4	1	22	КР	Асс.		7
4	**1**	**22**	**Инд. КР**	**Лект.**	**15**	**8**
4	2	23	КР	Асс.		11
4	2	24	КР	Асс.		15
4	**2**	**23,24**	**Инд. КР**	**Лект.**	**15**	**16**
4	3	25	КР	Асс.		19
4	**3**	**22 – 25**	**Итог. соб.**	**Лект., Асс.**	**20**	**20**

Даты проведения контрольных мероприятий и распределение баллов по контрольным работам по практическим занятиям согласовываются в начале текущего семестра.

ПРОГРАММА КУРСА

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Модуль I

Тема 1. Действительные числа. Верхние и нижние грани множеств.

1. Существование иррациональных чисел.

2. Способы определения множества действительных чисел.

3. Аксиоматическое определение множества действительных чисел.

4. Индуктивные множества, множество натуральных чисел, принцип математической индукции.

5. Ограниченные множества, верхняя и нижняя грани, теорема об их существовании.

6. Целые числа, принцип Архимеда, плотность множества рациональных чисел.

7. Теорема о существовании корня.

8. Модуль числа и его свойства.

Тема 2. Пределы последовательностей.

1. Определение предела последовательности и его геометрический смысл, примеры.

2. Свойства сходящихся последовательностей (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности, свойства, связанные с неравенствами, теорема о трех пределах).

3. Арифметические свойства сходящихся последовательностей.

4. Бесконечно малые последовательности и их свойства.

5. Бесконечно большие последовательности и их связь с бесконечно малыми последовательностями.

6. Лемма Кантора о вложенных отрезках.

7. Подпоследовательности, лемма Больцано – Вейерштрасса.

8. Фундаментальность и критерий Коши сходимости последовательности, примеры.

9. Монотонные последовательности, критерий сходимости монотонной последовательности, примеры.

10. Сходимость последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и число $\mathbf{e}$.

11. Два определения частичных пределов последовательности и их эквивалентность, верхний и нижний пределы последовательности, их существование, примеры.

12. Критерий сходимости последовательности в терминах верхнего и нижнего пределов.

Модуль II

Тема 3. Пределы функций.

1. Определение функции.

2. Эквивалентные множества, конечные, счетные и несчетные множества, счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

3. Определение предела функции по Коши и его геометрический смысл, примеры.

4. Единственность предела, локальная ограниченность функции, имеющей предел.

5. Определение предела функции по Гейне и его эквивалентность определению по Коши, примеры применения.

6. Пределы функций и арифметические операции.

7. Предельный переход и неравенства, теорема о трех пределах.

8. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$.

9. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности и их геометрический смысл.

10. Критерий Коши существования предела функции.

11. Монотонные функции, критерий существования предела монотонной функции.

12. Теорема о замене переменной в пределах, примеры применения.

13. Частичные пределы, верхний и нижний пределы функции, их существование.

Тема 4. Непрерывные функции.

1. Определение непрерывности в смысле Коши и в смысле Гейне, их эквивалентность, геометрический смысл непрерывности.

2. Примеры непрерывных и разрывных функций.

3. Классификация точек разрыва, примеры.

4. Непрерывность и арифметические операции, непрерывность элементарных функций.

5. Теорема о непрерывности композиции.

6. Непрерывность и разрывы монотонной функции, теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.

7. Непрерывность монотонной функции, множество значений которой является промежутком.

8. Свойство промежуточных значений, теорема Больцано – Коши о корне и следствие из нее, примеры применения, критерий непрерывности монотонной функции.

9. Первая теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции.

10. Вторая теорема Вейерштрасса о достижении верхней и нижней граней.

11. Обратная функция, теорема о непрерывности обратной функции, обратные тригонометрические функции.

12. Определение и свойства показательной функции, непрерывность показательной функции.

13. Логарифмическая функция и ее свойства.

14. Степень с действительным показателем.

15. Предел функции $(1+x)^{1/x}$ при $x \to 0$, следствия.

16. Сравнение логарифмической, степенной и показательной функций.

17. Эквивалентные функции и их применение при нахождении пределов.

18. Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых функций, символы Ландау.

19. Равномерная непрерывность, теорема Кантора, примеры.

Модуль III

Тема 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

1. Определение производной и определение дифференцируемости функции в точке, их эквивалентность.

2. Непрерывность дифференцируемой функции.

3. Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции.

4. Односторонние производные.

5. Дифференцируемость и арифметические операции.

6. Производная композиции.

7. Производная обратной функции.

8. Производные основных элементарных функций.

9. Теорема Ферма о корне производной.

10. Теорема Ролля о корне производной.

11. Теорема Лагранжа о среднем значении и следствия из нее.

12. Теорема Коши (обобщенная теорема о среднем значении).

13. Теорема Дарбу о промежуточном значении производной.

14. Два правила Лопиталя о раскрытии неопределенностей.

15. Производные высших порядков.

16. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано, единственность многочлена Тейлора.

17. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена.

18. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа, примеры ее применения.

19. Условия постоянства функции в терминах производной.

20. Условия монотонности функции в терминах производной.

21. Экстремумы функции, необходимые и достаточные условия существования экстремумов.

22. Применение формулы Тейлора для нахождения экстремумов.

23. Глобальные экстремумы и методы их нахождения.

24. Выпуклые функции и их свойства, критерий выпуклости.

25. Точки перегиба и методы их нахождения.

26. Исследование функций и построение их графиков с помощью производных.

ВТОРОЙ СЕМЕСТР

Модуль I

Тема 6. Неопределенный интеграл.

1. Определение первообразной, примеры. Торема о разности двух первообразных. Неопределенный интеграл и его элементарные свойства (интегрирование производной, линейность, линейная замена переменной).

2. Формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла, примеры.

3. Теорема о замене переменной в неопределенном интеграле, примеры.

4. Интегрирование элементарных рациональных функций в общем виде (4 типа). Теорема об интегрировании рациональной функции.

5. Метод Остроградского интегрирования рациональных функций.

6. Методы вычисления неопределенных интегралов от функций, рациональных относительно $\sin x$ и $\cos x$, примеры.

7. Интегрирование функций вида $R\left(x^{p_1/q_1}, \ldots, x^{p_n/q_n}\right)$, примеры.

8. Интегрирование функций вида $R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/m}\right)$, примеры.

9. Интегрирование биномиального дифференциала, примеры.

Тема 7. Интеграл Римана.

1. Определение интегральной суммы и ее предела. Определение интеграла Римана.

2. Ограниченность интегрируемой по Риману функции. Пример ограниченной неинтегрируемой по Риману функции.

3. Интегрируемость тождественной постоянной, функции $f(x) = x$ на $[0, 1]$, ступенчатой функции.

4. Интегрируемость функции Римана на $[0, 1]$.

5. Суммы Дарбу и их свойства.

6. Интегралы Дарбу и связь между ними. Интегралы Дарбу для функции Дирихле.

7. Критерий интегрируемости по Риману в терминах сумм Дарбу.

8. Критерий интегрируемости по Риману в терминах колебаний.

9. Интегрируемость по Риману непрерывной функции.

10. Интегрируемость по Риману монотонной функции.

11. Интегрируемость по Риману функции, имеющей конечное число точек разрыва.

12. Примеры интегрируемых по Риману функций, имеющих бесконечное множество точек разрыва.

13. Критерий Дарбу интегрируемости по Риману в терминах верхнего и нижнего интегралов (без доказательства). Множество лебеговой меры нуль и критерий Лебега интегрируемости по Риману (без доказательства).

14. Интегрируемость модуля интегрируемой функции и линейной комбинации интегрируемых функций.

15. Интегрируемость произведения интегрируемых по Риману функций.

16. Интегрируемость на подынтервалах интегрируемой функции.

17. Линейность интеграла Римана.

18. Аддитивность интеграла Римана.

19. Монотонность интеграла Римана, следствия. Интеграл от положительной функции.

20. Элементарный вариант теоремы о среднем значении и следствие для непрерывной функции.

21. Первая теорема о среднем значении и следствие для непрерывной функции.

22. Равномерная непрерывность интеграла с переменным верхним пределом.

23. Вторая теорема о среднем значении. Формулы Бонне.

24. Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом в точке непрерывности подынтегральной функции. Пример разрывной функции, у которой интеграл с переменным верхним пределом имеет производную.

25. Теорема Ньютона – Лейбница.

26. Обобщенная теорема Ньютона – Лейбница.

27. Понятие обобщенной первообразной и теорема о ее существовании.

28. Дифференцирование интегралов, у которых пределы интегрирования являются функциями.

29. Формула интегрирования по частям для интеграла Римана.

30. Теорема о замене переменной в интеграле Римана от непрерывной функции.

31. Формула Валлиса.

32. Теорема о замене переменной в интеграле Римана от интегрируемой функции.

33. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.

Тема 8. Приложения определенного интеграла.

1. Внешняя и внутренняя меры Жордана, измеримость по Жордану. Пример неизмеримого по Жордану множества.

2. Определение подграфика функции. Теорема об измеримости подграфика интегрируемой функции.

3. Вычисление площади области, заданной в полярных координатах, примеры.

4. Определение пути и его длины. Достаточное условие спрямляемости.

5. Формула вычисления длины гладкого пути.

6. Вычисление объема тела вращения.

7. Вычисление площади поверхности тела вращения.

Модуль II

Тема 9. Пространство $\mathbb{R}^n$.

1. Пространство $\mathbb{R}^n$ и операции на нем. Скалярное произведение, евклидова норма и их свойства.

2. Открытые множества и их свойства, примеры.

3. Замкнутые множества и их свойства, примеры. Теорема о дополнении для замкнутых и открытых множеств.

4. Компактные множества. Теорема о вложенных сегментах. Лемма и теорема Гейне – Бореля.

5. Лемма Больцано – Вейерштрасса.

Тема 10. Последовательности точек в $\mathbb{R}^n$.

1. Определение предела, единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности.

2. Предельный переход и арифметические операции.

3. Критерий Коши сходимости последовательности точек из $\mathbb{R}^n$.

Тема 11. Непрерывные отображения.

1. Определение предела функции по Коши и по Гейне и их эквивалентность.

2. Арифметические свойства пределов функций.

3. Определение непрерывности функции в точке. Непрерывность функции и ее компонент.

4. Арифметические свойства непрерывных функций. Теорема о непрерывности композиции.

5. Теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях на компактных множествах.

6. Теорема о непрерывном образе компактного множества.

7. Равномерная непрерывность и теорема Кантора.

8. Связные множества. Теорема о непрерывном образе связного множества и следствие (теорема Больцано – Коши).

9. Связность и линейная связность и соотношение между ними.

Тема 12. Дифференцируемые действительные функции.

1. Линейные формы и их непрерывность, примеры. Гиперплоскости, примеры гиперплоскостей.

2. Определение дифференцируемой функции. Производная и ее геометрический смысл.

3. Теорема о дифференциале аффинной функции. Единственность дифференциала. Примеры.

4. Определение частной производной и ее геометрический смысл.

5. Связь между дифференцируемостью и существованием частных производных, примеры.

6. Функции, дифференцируемые на множестве. Функции класса C^1 и теорема об их дифференцируемости.

7. Производная по направлению, примеры. Теорема о вычислении производной по направлению дифференцируемой функции.

8. Градиент функции и его геометрический смысл.

9. Теорема о среднем значении.

10. Связь между постоянством функции и равенством нулю ее дифференциала.

11. Определение производной векторной функции действительной переменной. Дифференцируемость функции и ее компонент.

12. Теорема о дифференцируемости композиции. Цепное правило, примеры.

13. Частные производные высших порядков, примеры.

14. Теорема Шварца и ее обобщения.

15. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

16. Определение квадратичной формы. Знакоопределенные квадратичные формы, примеры.

17. Определение знака квадратичной формы по ее коэффициентам (случай $n = 2$). Критерий Сильвестра (без доказательства).

18. Определение локального экстремума, необходимое условие локального экстремума. Стационарные точки, примеры.

19. Достаточное условие экстремума в терминах квадратичных форм.

Модуль III

Тема 13. Дифференцируемые отображения.

1. Линейное отбражение, норма и ее свойства.

2. Теорема о равномерной непрерывности линейного отображения.

3. Композиция линейных отбражений. Аффинное отображение.

4. Дифференцируемые отображения. Дифференцируемость линейного отображения. Теорема о непрерывности дифференцируемого отображения.

5. Единственность производной дифференцируемого отображения.

6. Связь между дифференцируемостью отображения и его компонент.

7. Дифференцируемые на множестве отображения. Отображения класса C^1. Теорема о дифференцируемости отображения класса C^1.

8. Матрица Якоби и ее определитель.

9. Теорема о производной композиции. Цепное правило.

10. Теорема об обратимости линейного отображения.

11. Теорема об обратной функции.

12. Теорема о неявной функции.

Тема 14. Функции на многообразиях.

1. Аффинные и гладкие многообразия.

2. Касательные и нормальные векторы. Касательное пространство.

3. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

4. Записмость функций.

ТРЕТИЙ СЕМЕСТР

Модуль I

Тема 15. Числовые ряды.

1. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости.

2. Элементарные свойства сходящихся рядов.

3. Ряды с неотрицательными слагаемыми. Гармонический ряд и обобщенный гармонический ряд.

4. Признак сравнения. Признак Даламбера. Признак Коши. Интегральный признак.

5. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница.

6. Признаки Абеля и Дирихле.

7. Абсолютная и условная сходимость. Перестановка ряда, теорема Римана.

8. Произведение рядов, теорема Коши.

9. Бесконечные произведения и их свойства.

Тема 16. Функциональные последовательности и ряды.

1. Равномерная сходимость последовательностей и рядов. Критерий Коши.

2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости.

3. Признаки Абеля и Дирихле.

4. Равномерная сходимость и непрерывность.

5. Равномерная сходимость и интегрирование.

6. Равномерная сходимость и дифференцирование.

7. Перестановка предельных переходов.

Тема 17. Степенные ряды.

1. Первая теорема Абеля. Понятие радиуса сходимости.

2. Вычисление радиуса сходимости. Теорема Коши – Адамара.

3. Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда. Вторая теорема Абеля.

4. Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда.
5. Коэффициенты Тейлора, ряд Тейлора.
6. Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.
7. Разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций.

Модуль II

Тема 18. Несобственные интегралы.

1. Интегралы по неограниченному промежутку.
2. Интегралы от неограниченных функций.
3. Элементарные свойства несобственных интегралов.
4. Признаки сходимости несобственных интегралов. Критерий Коши.
5. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.
6. Признаки Абеля и Дирихле.

Тема 19. Интегралы, зависящие от параметра.

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра, и их свойства (непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость).

2. Собственные интегралы, зависящие от параметра, у которых пределы интегрирования также зависят от параметра. Свойства.

3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра, равномерная сходимость. Критерий Коши.

4. Признаки равномерной сходимости (Вейерштрасса, Абеля и Дирихле).

5. Связь между несобственными интегралами, зависящими от параметра, и функциональными рядами.

6. Основные свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра (непрерывность, дифференцируемость и интегрирование по параметру, перестановка порядка интегрирования).

7. Интегралы Эйлера – Пуассона и их свойства.

Модуль III

Тема 20. Ряды Фурье.

1. Ортонормированные системы в евклидовых пространствах. Ряды Фурье по ортонормированным системам.

2. Минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя.

3. Тригонометрические ряды. Теорема Римана о тригонометрических коэффициентах Фурье.

4. Замкнутые и полные ортонормированные системы. Равенство Парсеваля.

5. Тригонометрические ряды Фурье. Ядро Дирихле. Принцип локализации.

6. Условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке. Признак Дини. Следствия.

7. Суммируемость ряда Фурье методом Чезаро. Теорема Фейера.

8. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими полиномами.

9. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье.

Тема 21. Интеграл Римана – Стилтьеса.

1. Интеграл Римана – Стилтьеса относительно монотонной функции и его элементарные свойства. Примеры.

2. Функции ограниченной вариации и интеграл Римана – Стилтьеса.

ЧЕТВЕРТЫЙ СЕМЕСТР

Модуль I

Тема 22. Кратные интегралы.

1. Мера фигур и ее свойства.

2. Внешняя и внутренняя меры Жордана. Измеримые по Жордану множества, примеры.

3. Критерий измеримости по Жордану.

4. Свойства меры Жордана.

5. Определение интеграла Римана.

6. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости по Риману в терминах сумм Дарбу.

7. Критерий интегрируемости по Риману в терминах верхнего и нижнего интегралов и в терминах колебаний.

8. Интегрируемость по Риману непрерывной на компактном множестве функции и функции, разрывной на множестве жордановой меры нуль.

9. Критерий Лебега интегрируемости по Риману ограниченной функции (без доказательства).

10. Элементарные свойства интеграла Римана.

11. Сведение кратного интеграла Римана к повторному.

12. C^1-диффеоморфизм и его свойства. Якобиан, его свойства и геометрический смысл.

13. Замена переменной в кратном интеграле Римана.

Модуль II

Тема 23. Криволинейные интегралы.

1. Непрерывные, гладкие, простые кривые. Простой контур. Ориентированные кривые. Спрямляемые кривые.

2. Определение криволинейного интеграла первого рода и его элементарные свойства. Физический смысл. Примеры.

3. Векторное поле. Определение криволинейного интеграла второго рода и его элементарные свойства, примеры.

4. Формула Грина о связи криволинейных интегралов с двойными.

5. Потенциальные поля. Два критерия потенциальности.

Тема 24. Поверхностные интегралы.

1. Поверхности в трехмерном пространстве. Непрерывные, простые и почти простые поверхности. Ориентируемые поверхности.

2. Площадь поверхности и ее свойства. Формулы для вычисления площади поверхности.

3. Поверхностные интегралы первого рода, их физическая интерпретация, примеры.

4. Поток вектор-функции через ориентированную поверхность и поверхностный интеграл второго рода, примеры.

Модуль III

Тема 25. Элементы теории поля.

1. Скалярные и векторные поля в трехмерном пространстве.
2. Дивергенция и вихрь векторного поля.
3. Формула Остроградского – Гаусса.
4. Формула Стокса.
5. Потенциалы в трехмерном пространстве.
6. Соленоидальные поля.

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х т. М.: Наука, 1970.

2. Ландау Э. Основы анализа. М.: ИЛ, 1947.

3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: в 2-х ч. М.: Наука, 1982.

4. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

5. Никольский С. М. Курс математического анализа: в 2-х т. М.: Наука, 1990.

6. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: в 2-х т. М.: Наука, 1964.

7. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ: в 2-х т. М.: Высшая школа, 1973.

8. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1977.

9. Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 1984.

10. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях. М.: Изд-во МГУ, 1991.

11. Ляшко И. И. и др. Математический анализ в примерах и задачах. Киев: Вища школа, 1974.

15. Числовые ряды

15.1 Определения и простейшие свойства

Пусть задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Символ $a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$, или, что то же самое, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, называется числовым рядом, а сами числа a_n называются слагаемыми или членами ряда. Обозначим $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n = 1, 2, \dots)$. Числа S_n называются частичными суммами ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение. Если существует $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, а число S называется суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если же не существует конечного предела последовательности частичных сумм S_n, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется расходящимся. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к сумме S, то это обозначают так:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Таким образом, с каждым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мы связываем последовательность его частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, причем сходимость ряда мы определяем как сходимость последовательности частичных сумм этого ряда (понятие сходимости последовательности изучалось нами ранее). Обратно, если задана последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, то легко составить ряд, для которого эта последовательность будет последовательностью частичных сумм. Действительно, достаточно положить $a_1 = S_1$, $a_2 = S_2 - S_1$, ..., $a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n = 2, 3, \dots)$. Ясно, что в этом случае будем иметь $a_1 + \dots + a_n = S_n$, т. е. заданные числа S_n являются частичными суммами построенного нами ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 1 (геометрическая прогрессия). Геометрической прогрессией называется такая последовательность $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots,$ т. е.

$\{q^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$, где q – фиксированное число. Ряд $1+q+q^2+\dots+q^{n-1}+\dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ называется суммой геометрической прогрессии. В этом случае слагаемые ряда равны $a_n = q^{n-1}$. Выведем формулу для суммы первых n слагаемых геометрической прогрессии. Имеем

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1},$$

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n.$$

Если $q \neq 1$, то вычитая второе равенство из первого, получим $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Если же $q = 1$, то, очевидно, $S_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n$ и $S_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, так что при $q = 1$ данный ряд расходится. Пусть $q \neq 1$. Тогда вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ сводится к вопросу о сходимости последовательности $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Ясно, что возможны такие случаи.

a) $|q| < 1$. При этом $S_n \to \frac{1}{1-q}$ $(n \to \infty)$, т. е. наш ряд сходится и его сумма равна $S = \frac{1}{1-q}$.

b) $|q| > 1$. Тогда последовательность S_n не имеет предела, т. е. ряд расходится.

c) $|q| = 1$. Случай $q = 1$ уже рассмотрен. Если же $q = -1$, то, очевидно, $S_{2k} = 0$ и $S_{2k+1} = 1$, так что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ не имеет предела, т. е. ряд расходится.

Окончательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q} \quad \text{при} \quad |q| < 1,$$

а при $|q| \geq 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ расходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Имеем

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Теперь уже легко видеть, что $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, а это означает, что наш ряд сходится и его сумма равна $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Теорема (критерий Коши сходимости ряда). *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при любом $n \geq N$ и при любом натуральном p справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Сумма слева в последнем неравенстве называется отрезком Коши. По определению, сходимость ряда эквивалентна сходимости последовательности его частичных сумм S_n. В силу критерия Коши для числовых последовательностей, сходимость последовательности $\{S_n\}$ эквивалентна ее фундаментальности. Фундаментальность последовательности $\{S_n\}$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для любого $n \geq N$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Но поскольку

$$S_{n+p}-S_n = a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}-(a_1 + \cdots + a_n) = a_{n+1}+\cdots+a_{n+p},$$

то тем самым теорема доказана. $\square$

Следствие (необходимое условие сходимости). *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Доказательство. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то, в силу критерия Коши, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что при любом $n \geq N$ и при любом $p \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$. В частности, если $p = 1$, то получим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при любом $n \geq N$ справедливо неравенство $|a_{n+1}| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. $\square$

Другое доказательство необходимого условия сходимости. Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ равносильна существованию следующего предела: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Но тогда и $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, откуда, в силу равенства $a_n = S_n - S_{n-1}$, следует

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad \square$$

Итак, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, сходится, то его слагаемые стремятся к нулю. Обратное утверждение неверно. Действительно, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ имеем: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Тогда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ и, вместе с тем,

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

откуда следует, что $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Пример. Гармоническим называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Отрезок Коши этого ряда можно оценить следующим образом:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p} \cdot p.$$

Если взять $p = n$, то получим, что $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$. Это означает, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$ $\left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right)$, что для любого $N \in \mathbb{N}$ существует $n \geq N$ (например, $n = N$) и существует такое $p \in \mathbb{N}$ $(p = n)$, при которых справедливо неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}\right| \geq \varepsilon_0$. В силу критерия Коши это означает, что гармонический ряд расходится.

Как правило, на практике необходимое условие сходимости применяется в следующей форме: если предел слагаемых ряда не существует, либо существует, но отличен от нуля, то ряд расходится.

15.1.1 Простейшие свойства сходящихся рядов

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{15.1}$$

и пусть m – фиксированное натуральное число. Тогда ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \dots$$

называется остатком ряда (15.1) после m-го слагаемого.

Теорема 1. *Если сходится ряд* (15.1), *то сходится любой из его остатков. Обратно, если сходится один из остатков ряда* (15.1), *то сходится и исходный ряд* (15.1).

Доказательство. Пусть S_n – частичная сумма ряда (15.1). Зафиксируем натуральное m. Тогда частичная сумма остатка после m-го слагаемого равна $\sigma_k^{(m)} = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}$. Ясно, что

$$S_{m+k} = S_m + \sigma_k^{(m)}. \tag{15.2}$$

Если ряд (15.1) сходится, то при $k \to \infty$ частичная сумма S_{m+k} имеет предел, а поскольку m фиксировано, то при $k \to \infty$ конечный предел имеет и $\sigma_k^{(m)}$, т. е. сходится и остаток ряда (15.1) после m-го слагаемого.

Обратно, если существует $\lim_{k\to\infty} \sigma_k^{(m)}$ при некотором (фиксированном) m, то из (15.2) следует, что существует и $\lim_{k\to\infty} S_{m+k}$, или, что то же самое, существует $\lim_{n\to\infty} S_n$. $\square$

Следствие. *Никакое конечное число слагаемых ряда не влияет на его сходимость (но конечно же они влияют на его сумму) или расходимость. Другими словами, если заменить, отбросить или добавить любое конечное число слагаемых ряда, то от этого сходимость не нарушится.*

Пусть ряд (15.1) сходится. В силу теоремы 1, сходится и каждый из его остатков $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$. Обозначим сумму остатка после m-го слагаемого через $r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$.

Теорема 2. *Если ряд* (15.1) *сходится, то последовательность его остатков* $\{r_m\}$ *стремится к нулю.*

Доказательство. В обозначениях, принятых при доказательстве теоремы 1, имеем $S_{m+k} - S_m = \sigma_k^{(m)}$. Если S – сумма ряда (15.1), то при $k \to \infty$ получим $S_{m+k} \to S$ и $\sigma_k^{(m)} \to r_m$. Поэтому переходя к пределу при

$k \to \infty$, будем иметь $S - S_m = r_m$, где m – любое натуральное число. Если теперь устремить $m \to \infty$ и воспользоваться тем, что $S_m \to S$ $(m \to \infty)$, то получим, что $\lim_{m\to\infty} r_m = 0$. $\square$

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ называется суммой этих двух рядов. Если λ – действительное число, то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ получен из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ путем умножения его на число λ.

Предложение. *Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся к суммам A и B, соответственно. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ сходится и его сумма равна $A + B$. Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ к сумме λA.*

Доказательство. Для $n = 1, 2, \dots$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = A + B$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lambda A. \quad \square$$

15.2 Ряды с неотрицательными слагаемыми

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных чисел. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{15.3}$$

Теорема. *Пусть $a_n \geq 0$. Тогда ряд (15.3) сходится в том и только в том случае, когда последовательность его частичных сумм S_n ограничена сверху.*

Доказательство. Так как $a_n \geq 0$, то $S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$, т. е. последовательность частичных сумм S_n монотонно возрастает. По теореме о пределе монотонной последовательности, сходимость S_n (а значит, и сходимость ряда (15.3)) эквивалентна ее ограниченности. $\square$

Пример. Обобщенным гармоническим рядом называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, где число $s > 0$. Ранее мы уже установили, что при $s = 1$ этот ряд расходится. Если $0 < s < 1$, то

$$S_n(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = S_n(1),$$

и, в силу расходимости гармонического ряда, последовательность частичных сумм обобщенного гармонического ряда не ограничена сверху, т. е. обобщенный гармонический ряд расходится при $0 < s \leq 1$.

По-другому расходимость обобщенного гармонического ряда при $0 < s < 1$ можно было бы доказать так:

$$S_n(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} \geq n \cdot \frac{1}{n^s} = n^{1-s} \to +\infty \quad (n \to \infty),$$

откуда следует, что $S_n(s) \to +\infty$ $(n \to \infty)$, т. е. расходимость ряда.

Рассмотрим теперь случай $s > 1$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Выберем такое натуральное m, что $n < 2^m$. Тогда

$$S_n(s) \leq S_{2^m-1}(s) = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{1}{\left(2^{m-1}\right)^s} + \frac{1}{\left(2^{m-1}+1\right)^s} + \cdots + \frac{1}{\left(2^m-1\right)^s}\right) \leq$$

$$\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^s} + 4 \cdot \frac{1}{4^s} + \cdots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{\left(2^{m-1}\right)^s} =$$

$$= 1 + 2^{1-s} + \left(2^2\right)^{1-s} + \cdots + \left(2^{m-1}\right)^{1-s} =$$

$$= 1 + 2^{1-s} + \left(2^{1-s}\right)^2 + \cdots + \left(2^{1-s}\right)^{m-1} = \frac{1 - \left(2^{1-s}\right)^m}{1 - 2^{1-s}} < \frac{1}{1 - 2^{1-s}}$$

(условие $s>1$ использовано в последнем неравенстве). Отсюда следует, что при $s>1$ имеем $S_n(s) \le \frac{1}{1-2^{1-s}}$, т. е. последовательность частичных сумм $\{S_n(s)\}$ ограничена сверху и, в силу доказанной теоремы, обобщенный гармонический ряд сходится при $s>1$.

Окончательно имеем: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ сходится при $s>1$ и расходится при $0<s\le 1$. При $s\le 0$ этот ряд, очевидно, расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости.

15.2.1 Признак сравнения

Теорема (признак сравнения). *Пусть даны два ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{15.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{15.5}$$

где $a_n \ge 0,\ b_n \ge 0$ $(n=1,2,\dots)$. *Предположим, что ряд* (15.5) *является мажорантным рядом для ряда* (15.4), *т. е. начиная с некоторого номера выполнены неравенства* $a_n \le b_n$. *Тогда из сходимости ряда* (15.5) *следует сходимость ряда* (15.4), *а из расходимости ряда* (15.4) *следует расходимость ряда* (15.5).

Доказательство. Так как конечное число слагаемых ряда не влияет на его сходимость, то, не ограничивая общности, можем считать, что неравенство $a_n \le b_n$ выполнено для всех $n \ge 1$. Пусть S_n' и S_n'' – частичные суммы рядов (15.4) и (15.5), соответственно. Тогда ясно, что $S_n' \le S_n''$ $(n\ge 1)$. Если ряд (15.5) сходится, то S_n'' ограничены и, следовательно, ограничены и S_n', а это влечет сходимость ряда (15.4). Обратно, если расходится ряд (15.4), то S_n' неограниченно возрастают и, следовательно, неограниченно возрастают и S_n'', т. е. ряд (15.5) расходится. □

Замечание 1. При доказательстве существенно было использовано условие $a_n \ge 0,\ b_n \ge 0$ $(n=1,2,\dots)$. Без этого условия теорема теряет силу. Например, если $a_n=-1$, $b_n=0$ $(n=1,2,\dots)$, то $a_n \le b_n$, ряд (15.5) сходится, а ряд (15.4) расходится.

Замечание 2. В доказанной теореме из расходимости ряда (15.5) не следует расходимость ряда (15.4), а из сходимости ряда (15.4) не следует сходимость ряда (15.5). Например, $a_n = 0,\ b_n = 1\ (n = 1, 2, \dots)$.

Следствие (признак сравнения в предельной форме). *Пусть даны ряды* (15.4) *и* (15.5) *с положительными слагаемыми. Предположим, что существует (быть может, и бесконечный)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda.$$

Тогда

a) если $\lambda = 0$, то из сходимости ряда (15.5) *следует сходимость ряда* (15.4)*, а из расходимости ряда* (15.4) *следует расходимость ряда* (15.5)*;*

b) если $\lambda = +\infty$, то из сходимости ряда (15.4) *следует сходимость ряда* (15.5)*, а из расходимости ряда* (15.5) *следует расходимость ряда* (15.4)*;*

c) если $0 < \lambda < +\infty$, то ряды (15.4) *и* (15.5) *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Докажем *c*). Пусть $0 < \lambda < +\infty$. Тогда, начиная с некоторого номера N, выполнено неравенство $\frac{\lambda}{2} \le \frac{a_n}{b_n} \le 2\lambda$ $(n \ge N)$, т. е.

$$\frac{\lambda}{2} b_n \le a_n \le 2\lambda \cdot b_n.$$

Если расходится ряд (15.4), то, в силу доказанного признака сравнения, из правого неравенства следует расходимость ряда (15.5). Если ряд (15.4) сходится, то, в силу признака сравнения, из левого неравенства следует сходимость ряда (15.5).

Доказательства случаев *a*) и *b*) аналогичны и мы их опускаем. □

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}.$$

Из неравенства $\sin x < x$ $(x > 0)$ следует, что $2^n \sin\frac{1}{3^n} \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ сходится (это – геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{2}{3}$), то исходный ряд также сходится в силу признака сравнения.

Пример 2. Ранее мы уже установили с помощью критерия Коши, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится. Докажем его расходимость с использованием признака сравнения. Сравним его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Вычислим частичные суммы

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]=$$

$$=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)=\ln(n+1)\to+\infty.$$

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ расходится. Кроме того, из известного равенства $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ следует, что $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lambda=1$. Отсюда, в силу признака сравнения в предельной форме, вытекает, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ сходятся или расходятся одновременно. Поскольку, как уже установлено, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ расходится, то расходится и исходный гармонический ряд.

Пример 3. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$, где $x\in\mathbb{R}$ – параметр. Ясно, что этот ряд сходится при $x=0$. Пусть $x\neq 0$. В силу известного соотношения $1-\cos\alpha\sim\frac{\alpha^2}{2}$ $(\alpha\to 0)$, имеем $1-\cos\frac{x}{n}\sim\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$ $(n\to\infty)$. Поэтому в качестве ряда для сравнения целесообразно выбрать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, для которого $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{x^2}{2}$. Из признака сравнения в предельной форме следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ и исходный ряд сходятся или расходятся одновременно (при $x\neq 0$). Выше было показано, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (это – обобщенный гармонический ряд при $s=2>1$). Поэтому сходится и исходный ряд при любом x.

15.2.2 Признак Даламбера

Теорема (признак Даламбера). *Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ с положительными слагаемыми. Предположим, что существует такое число q, $0<q<1$, что начиная с некоторого номера N справедливо неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q$ $(n\geq N)$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $a_{N+1}\leq q\cdot a_N$, $a_{N+2}\leq q\cdot a_{N+1},\ldots,a_n\leq q\cdot a_{n-1}$ $(n\geq N+1)$. Перемножая эти неравенства, получаем $a_n \le q^{n-N} \cdot a_N$ $(n \ge N+1)$, т. е. $a_n \le c \cdot q^n$ $(n \ge N+1)$, где $c = a_N \cdot q^{-N}$. По признаку сравнения, из сходимости геометрической прогрессии со знаменателем q, $|q| < 1$, следует сходимость исходного ряда.

□

Замечание 1. Из неравенства

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \tag{15.6}$$

не следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Неравенство (15.6) означает лишь то, что слагаемые ряда строго убывают, из чего вовсе не следует сходимость ряда, например, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ и т. д.

Замечание 2. Из неравенства

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \quad (n \ge N) \tag{15.7}$$

сразу следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. В самом деле, (15.7) означает, что слагаемые ряда образуют неубывающую последовательность положительных чисел и, следовательно, не стремятся к нулю, так что в этом случае не выполнено необходимое условие сходимости.

Следствие (признак Даламбера в предельной форме). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{15.8}$$

с положительными слагаемыми. Предположим, что существует (быть может, и бесконечный) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$. *Тогда*

a) если $0 \le \lambda < 1$, *то ряд* (15.8) *сходится;*

b) если $1 < \lambda \le \infty$, *то ряд* (15.8) *расходится;*

c) если $\lambda = 1$, *то ничего определенного о сходимости ряда* (15.8) *сказать нельзя.*

Доказательство. *a*) Выберем такое $\varepsilon > 0$, что $q \equiv \lambda + \varepsilon < 1$ (например, $\varepsilon = (1+\lambda)/2$). Тогда, начиная с некоторого номера N, будет иметь место неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ $(n \ge N)$, и, в силу признака Даламбера, ряд (15.8) сходится.

b) Если $1 < \lambda \le \infty$, то, начиная с некоторого номера, справедливо неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ и, в силу замечания 2, ряд (15.8) расходится.

c) Для доказательства приведем примеры сходящегося и расходящегося рядов, для которых $\lambda = 1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится и $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$ при $n \to \infty$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится и $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ при $n \to \infty$. □

15.2.3 Признак Коши

Теорема (признак Коши). *Пусть дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными слагаемыми. Предположим, что существует такое число* q, $0 < q < 1$, *что начиная с некоторого номера* N *справедливо неравенство* $\sqrt[n]{a_n} \le q$ $(n \ge N)$. *Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $a_n \le q^n$ $(n \ge N)$, а поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ с $0 < q < 1$ сходится (геометрическая прогрессия), то, в силу признака сравнения, сходится и исходный ряд. □

Замечание 1. Если для бесконечного числа номеров n имеет место неравенство $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Действительно, в этом случае для бесконечного числа номеров n будет выполнено неравенство $a_n \ge 1$ и, следовательно, не выполнено необходимое условие сходимости.

Это замечание существенно отличается от замечания 1 к признаку Даламбера. Ряд может быть сходящимся и таким, что для бесконечного числа номеров n было выполнено неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, например, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$. В замечании 1 к признаку Даламбера было важным, что неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ выполнено для всех номеров, начиная с некоторого.

Следствие (признак Коши в предельной форме). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{15.9}$$

с неотрицательными слагаемыми. Предположим, что существует (быть может, и бесконечный) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. *Тогда*

a) *если* $0 \le \lambda < 1$, *то ряд* (15.9) *сходится;*

b) *если* $1 < \lambda \le \infty$, *то ряд* (15.9) *расходится;*

c) *если* $\lambda = 1$, *то ничего определенного о сходимости ряда* (15.9) *сказать нельзя.*

Доказательство этого следствия аналогично доказательству соответствующего следствия из признака Даламбера (проведите самостоятельно).

Упражнение. Докажите, что признак Коши в предельной форме останется справедливым, если условие $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ заменить условием $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$.

Замечание 2. Можно показать, что признак Коши в предельной форме сильнее признака Даламбера в предельной форме. Именно, если существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, то и $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$, а обратное неверно.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. По признаку Даламбера,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty),$$

следовательно, данный ряд сходится.

По признаку Коши,

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{n} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty),$$

следовательно, данный ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$. К этому ряду удобно применить признак Даламбера

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)!}{(2(n+1)+1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot\dots\cdot(2n+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot(2n+1)(2n+2)(2n+3)} =$$

$$= \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

По признаку Даламбера, данный ряд сходится.

Пример 3. К ряду

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots$$

ни признак Даламбера, ни признак Коши в предельной форме неприменимы, так как не существует пределов $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ и $\sqrt[n]{a_n}$ при $n \to \infty$. В то же время, поскольку

$$a_n = \begin{cases} 2^{-k}, & n = 2k-1, \\ 3^{-k}, & n = 2k, \end{cases}$$

то $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2^{-n/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ и, в силу признака Коши в непредельной форме, данный ряд сходится.

15.2.4 Интегральный признак

Пусть на полупрямой $[1, +\infty)$ задана функция f, интегрируемая на каждом отрезке $[1, x]$ $(x > 1)$. Если существует $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt$, то говорят, что несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и обозначают этот предел $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

Теорема (интегральный признак сходимости). *Пусть неотрицательная функция f монотонно не возрастает на $[1, +\infty)$. Тогда числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{15.10}$$

сходится в том и только в том случае, когда сходится несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{15.11}$$

Доказательство. В силу монотонности f, для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k).$$

Складывая эти неравенства, получим

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n, \tag{15.12}$$

где $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ – n-я частичная сумма ряда (15.10). Если несобственный интеграл (15.11) сходится, то монотонно возрастающая функция $F(x) \equiv \int_1^x f(t)\,dt \to A$ $(x \to +\infty)$, а это означает, что $F(x) \leq$

A $(1 \le x < +\infty)$. Но тогда из левого неравенства в (15.12) следует, что $S_{n+1} \le A + f(1)$ $(n = 1, 2, \dots)$, т. е. частичные суммы ряда (15.10) ограничены сверху и поэтому этот ряд сходится.

Если же сходится ряд (15.10), то его частичные суммы S_n ограничены сверху. В силу правого неравенства в (15.12), ограниченными сверху оказываются и интегралы $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$. Но так как f неотрицательна, то F возрастает, а из ограниченности сверху $F(n+1)$ следует, что $F(x)$ имеет предел при $x \to +\infty$, т. е. несобственный интеграл (15.11) сходится. $\square$

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ $(s > 0)$. Для исследования его на сходимость положим $f(x) = x^{-s}$. Функция $f(x) = x^{-s}$ $(s > 0)$ положительна и убывает на $[1, +\infty)$. Чтобы применить интегральный признак, вычислим $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$. Имеем

$$\int_1^x \frac{dt}{t^s} = \begin{cases} \frac{x^{1-s}}{1-s}, & s \ne 1, \\ \ln x, & s = 1. \end{cases}$$

Если $s > 1$, то $\int_1^x \frac{dt}{t^s} \to \frac{1}{s-1}$ $(x \to +\infty)$, т. е. несобственный интеграл сходится и, следовательно, сходится и данный ряд. Если же $s \le 1$, то $\int_1^x \frac{dt}{t^s} \to \infty$ $(x \to +\infty)$, т. е. несобственный интеграл не является сходящимся и, следовательно, исходный ряд расходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ $(p > 0)$. Полагаем $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$ и применим интегральный признак. Имеем

$$\int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^p} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dz}{z^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left((\ln x)^{1-p} - (\ln 2)^{1-p}\right), & p \ne 1, \\ \ln\ln x - \ln\ln 2, & p = 1. \end{cases}$$

Если $p > 1$, то при $x \to +\infty$ несобственный интеграл сходится, а значит, сходится и данный ряд. Если же $p \le 1$, то несобственный интеграл не является сходящимся, так что и данный ряд расходится.

Пример 3. Ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln\ln n)^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$. Доказательство аналогично предыдущему примеру (проведите самостоятельно).

Упражнение. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{15.13}$$

с положительными слагаемыми. Докажите, что если ряд (15.13) сходится, то существует такая возрастающая к $+\infty$ последовательность чисел $\{E_n\}$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n E_n$ сходится. Если же ряд (15.13) расходится, то существует такая убывающая к нулю последовательность чисел $\{\varepsilon_n\}$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_n$ расходится.

15.3 Знакопеременные ряды и ряды со слагаемыми произвольного знака

15.3.1 Признак Лейбница

Определение. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется знакопеременным (знакочередующимся), если его слагаемые попеременно меняют знак, т. е. если $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Знакопеременный ряд можно записать в виде

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n,$$

где $u_n \geq 0$.

Теорема Лейбница. *Если модули слагаемых знакочередующегося ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \tag{15.14}$$

монотонно убывают к нулю, то этот ряд сходится.

Доказательство. Обозначим через S_n частичную сумму ряда (15.14). Рассмотрим частичные суммы с четными номерами

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Так как u_n убывают по условию, то в каждой скобке выражение неотрицательно. Поэтому

$$S_{2(m+1)} = S_{2m+2} = S_{2m} + (u_{2m+1} - u_{2m+2}) \geq S_{2m}.$$

Это означает, что последовательность $\{S_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ возрастает. С другой стороны, из представления

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m},$$

в силу монотонности u_k, следует, что $S_{2m} \leq u_1$. Таким образом, последовательность $\{S_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена сверху и возрастает и, следовательно, имеет предел. Обозначим $S = \lim_{m\to\infty} S_{2m}$. Для доказательства сходимости ряда (15.14) нужно еще показать, что $S_{2m+1} \to S$ $(m \to \infty)$. Но это сразу следует из равенства $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$ и условия теоремы $u_{2m+1} \to 0$ $(m \to \infty)$.

Окончательно, последовательность частичных сумм ряда (15.14) с четными и с нечетными номерами сходятся к одному и тому же пределу S. Поэтому $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. $\square$

Знакочередующийся ряд, для которого выполнены условия теоремы Лейбница, называется рядом лейбницевского типа. Теорема Лейбница утверждает, что ряд лейбницевского типа сходится.

Пример 1. Рассмотрим полугармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Здесь $u_n = \frac{1}{n}$ и данный ряд является рядом лейбницевского типа. По теореме Лейбница, он сходится. Ранее мы показали, что ряд, составленный из модулей слагаемых, – гармонический – расходится. Таким образом, сходимость исходного ряда обусловлена не малостью его слагаемых, а взаимной интерференцией слагаемых.

Пример 2. Приведем пример, показывающий, что в теореме Лейбница нельзя отбросить условие монотонности.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ является рядом лейбницевского типа и, следовательно, сходится. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Рассмотрим знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right]$. Его слагаемые стремятся к нулю, но их модули не монотонны. Легко видеть, что он расходится. Действительно, если бы он являлся сходящимся, то сходился бы и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, как разность двух сходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. Но гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Теорема (оценка остатка ряда лейбницевского типа). *Остаток после n-го слагаемого ряда лейбницевского типа имеет такой же знак, как и его первое слагаемое, а по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого слагаемого.*

Доказательство. Пусть S_n – частичные суммы ряда лейбницевского типа

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, \tag{15.15}$$

$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ и $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_k$. Тогда $r_n=S-S_n$, и мы хотим оценить r_n.

При доказательстве теоремы Лейбница мы получили, что последовательность частичных сумм ряда (15.15) с четными номерами S_{2m} возрастает, и поэтому $S_{2m}\le S$. С другой стороны,

$$S_{2m+1}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2m}-u_{2m+1}),$$

откуда видно, что $S_{2m+1}\ge S_{2m+3}$, т. е. последовательность частичных сумм ряда (15.15) с нечетными номерами убывает и поэтому $S_{2m+1}\ge S$. Таким образом,

$$S_{2m}\le S\le S_{2m+1},$$

откуда

$$0\le S-S_{2m}\le S_{2m+1}-S_{2m}=u_{2m+1},$$

т. е. остаток четного порядка $r_{2m}=S-S_{2m}$ удовлетворяет неравенству

$$0\le r_{2m}\le u_{2m+1},$$

что и доказывает теорему для остатков четного порядка.

Аналогично, из неравенства

$$S_{2m+2}\le S\le S_{2m+1}$$

следует

$$0 \geq S - S_{2m+1} \geq S_{2m+2} - S_{2m+1} = -u_{2m+2},$$

т. е.

$$-u_{2m+2} \leq r_{2m+1} \leq 0,$$

чем доказано утверждение теоремы для остатков нечетного порядка.

Итак, мы показали, что $\operatorname{sign} r_n = (-1)^n$ и $|r_n| \leq u_{n+1}$ для любого $n = 1, 2, \ldots$. $\square$

15.3.2 Признаки Абеля и Дирихле

Аналогом интегрирования по частям для сумм является следующее равенство, которое называют преобразованием Абеля:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_n B_n,$$

где $B_i = \sum_{j=1}^{i} \beta_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Для его доказательства обозначим $B_0 = 0$. Тогда получим

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_{i-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i B_i + \alpha_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} B_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_n B_n,$$

и тем самым завершается доказательство преобразования Абеля.

Лемма. *Пусть числа α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ монотонны (возрастают или убывают). Тогда справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \right| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |B_k| \left(|\alpha_1| + 2 |\alpha_n| \right).$$

Доказательство. Применим преобразование Абеля

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_n B_n \right| \leq$$

$$\le \max_{1\le k\le n} |B_k| \left(\sum_{i=1}^{n-1} |\alpha_i - \alpha_{i+1}| + |\alpha_n| \right) =$$

$$= \max_{1\le k\le n} |B_k| \left(|\alpha_1 - \alpha_n| + |\alpha_n| \right) \le \max_{1\le k\le n} |B_k| \left(|\alpha_1| + 2\,|\alpha_n| \right),$$

и тем самым лемма доказана. □

Теорема (признак Абеля). *Пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонна (возрастающая или убывающая) и ограничена, а последовательность $\{b_n\}$ такова, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.*

Доказательство основано на применении критерия Коши. В силу этого критерия, нам нужно оценить отрезок Коши

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \equiv \sum_{i=1}^{p} a_{n+i} b_{n+i}.$$

Обозначим $\alpha_i = a_{n+i}$, $\beta_i = b_{n+i}$. Пользуясь леммой, получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| = \left| \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \beta_i \right| \le \max_{1\le k\le p} |B_k| \left(|\alpha_1| + 2\,|\alpha_p| \right) =$$

$$= \max_{1\le k\le p} \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} b_i \right| \left(|a_{n+1}| + 2\,|a_{n+p}| \right). \tag{15.16}$$

По условию, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Поэтому, в силу критерия Коши, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при любом $n \ge N$ и при любом $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\left| \sum_{i=n+1}^{n+k} b_i \right| < \varepsilon$. Далее, в силу ограниченности последовательности $\{a_n\}$, найдется такое M, что $|a_n| \le M$ $(n = 1, 2, \dots)$. Из неравенства (15.16), для заданного $\varepsilon > 0$ и $n \ge N$ имеем

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i \right| \le 3M \cdot \varepsilon,$$

где произвольное $p \in \mathbb{N}$. Таким образом, для ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ выполнено условие критерия Коши, в силу которого этот ряд сходится. □

Теорема (признак Дирихле). *Пусть последовательность* $\{a_n\}$ *монотонно стремится к нулю, а последовательность* $\{b_n\}$ *такова, что частичные суммы* $B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ *ограничены, т. е. существует такое* M*, что* $|B_n| \le M$ $(n = 1, 2, \dots)$. *Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. В силу неравенства (15.16), полученного при доказательстве предыдущей теоремы,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le \max_{1\le k\le p} |B_{n+k} - B_n| \left(|a_{n+1}| + 2\,|a_{n+p}|\right). \tag{15.17}$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь условиями теоремы, найдем такой номер N, что $|a_n| < \varepsilon$ при всех $n \ge N$. Тогда из (15.17) и из ограниченности B_i следует

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le 2M \cdot 3\varepsilon = 6M\varepsilon \quad (n \ge N,\ p \in \mathbb{N}).$$

Таким образом, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполнено условие критерия Коши, в силу которого этот ряд сходится. $\square$

Замечание. Теорема Лейбница является частным случаем признака Дирихле, в котором $a_n = u_n,\ b_n = (-1)^{n-1}$.

15.4 Абсолютная и условная сходимость. Перестановки рядов

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из модулей его слагаемых. Ряд называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд, составленный из модулей его слагаемых, расходится.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится (в силу теоремы Лейбница), а ряд из модулей его слагаемых $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический ряд – расходится. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится условно.

Теорема. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Применяем критерий Коши. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое N, что для всех $n \ge N$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$. Но тогда и $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$, т. е. для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ выполнено условие критерия Коши, в силу которого он сходится. $\square$

15.4.1 Перестановки абсолютно сходящихся рядов

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел, такая, что каждое натуральное число встречается в ней один и только один раз. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ называется перестановкой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Как известно, конечные суммы обладают тем свойством, что их слагаемые можно переставлять в произвольном порядке. Для рядов это свойство, вообще говоря, неверно (соответствующие примеры будут построены ниже). Сейчас мы покажем, что слагаемые абсолютно сходящегося ряда можно переставлять в произвольном порядке и от этого не нарушается свойство сходимости и не изменяется его сумма.

Теорема. *Пусть ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{15.18}$$

сходится абсолютно. Тогда при любой перестановке его слагаемых переставленный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \tag{15.19}$$

также сходится и имеет ту же самую сумму.

Доказательство. Обозначим через S_n и S_n^* частичные суммы рядов (15.18) и (15.19), соответственно, т. е.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S_n^* = \sum_{k=1}^{n} a_k^*,$$

где $a_k^* = a_{n_k}$. Если мы покажем, что $S_n - S_n^* \to 0$ при $n \to \infty$, то тем самым из неравенства

$$|S_n^* - S| \le |S_n^* - S_n| + |S_n - S|,$$

где S – сумма ряда (15.18), получим утверждение теоремы.

Так как сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то, в силу критерия Коши, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N', что при всех $n \geq N'$ и для любого $m > n$ справедливо неравенство $\sum_{k=n+1}^{m}|a_k| < \varepsilon$. Далее, найдем такое N $(N \geq N')$, что все слагаемые $a_1, a_2, \ldots, a_{N'}$ будут находиться среди чисел $a_1^*, a_2^*, \ldots, a_N^*$. Пусть $k \geq N$. Тогда разность $S_k - S_k^*$ представляет собой сумму некоторого конечного числа слагаемых a_n, все номера которых не меньше, чем N' (эти номера идут, вообще говоря, не подряд). Поэтому для любого $k \geq N$ будем иметь $|S_k - S_k^*| < \varepsilon$, чем и завершается доказательство теоремы. $\square$

Итак, мы показали, что абсолютно сходящиеся ряды обладают переместительным свойством. Далее мы покажем, что только такие ряды обладают этим свойством. Другими словами, это означает, что слагаемые условно сходящегося ряда переставлять, вообще говоря, нельзя в том смысле, что от перестановки может не только измениться сумма вновь полученного ряда, но и может получиться расходящийся ряд.

15.4.2 Перестановки условно сходящихся рядов

Пусть дан условно сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{15.20}$$

Через $p_1, p_2, \ldots$ обозначим последовательность неотрицательных слагаемых ряда (15.20), взятых в том порядке, в котором они входят в этот ряд, а через $q_1, q_2, \ldots$ – последовательность модулей отрицательных слагаемых. Ясно, что чисел p_i и q_i бесконечно много.

Лемма. *Если ряд* (15.20) *сходится условно, то ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \tag{15.21}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \tag{15.22}$$

расходятся.

Доказательство. Для $n \in \mathbb{N}$ через n^+ и n^- обозначим количество неотрицательных и отрицательных слагаемых ряда (15.20), соответственно, номера которых не превосходят n. Тогда ясно, что $S_n = S^+_{n^+} - S^-_{n^-}$, где S_n, $S^+_{n^+}$ и $S^-_{n^-}$ – частичные суммы рядов (15.20), (15.21) и (15.22) соответственно. Кроме того, $\sum_{k=1}^{n} |a_k| = S^+_{n^+} + S^-_{n^-}$. Так как ряд (15.20) сходится, то последовательность $\{S_n\}$ ограничена. Если ограничена последовательность $\left\{S^+_k\right\}$, то из равенства $S_n = S^+_{n^+} - S^-_{n^-}$ следует ограниченность последовательности $\left\{S^-_{n^-}\right\}$. Поэтому будет ограниченной и последовательность $\sum_{k=1}^{n} |a_k| = S^+_{n^+} + S^-_{n^-}$, что противоречит условию леммы, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится. Итак, последовательность $\left\{S^+_k\right\}$ неограничена. Из равенства $S_n = S^+_{n^+} - S^-_{n^-}$ следует теперь, что и $\left\{S^-_k\right\}$ также неограничена. Таким образом, частичные суммы S^+_k и S^-_k рядов (15.21) и (15.22) неограничены, т. е. ряды (15.21) и (15.22) расходятся. □

Теорема Римана. *Пусть ряд* (15.20) *сходится условно. Тогда для любого действительного числа α существует такая перестановка ряда* (15.20)*, что переставленный ряд сходится к числу α. Далее, ряд* (15.20) *можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд был расходящимся и при этом его частичные суммы расходились к $+\infty$, к $-\infty$, или же не имели предела ни конечного, ни бесконечного.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Выберем $n_1 \in \mathbb{N}$, такое, что $p_1 + \dots + p_{n_1} > \alpha$ и $p_1 + \dots + p_{n_1 - 1} \le \alpha$. Далее, подберем $m_1 \in \mathbb{N}$ так, чтобы были выполнены неравенства

$$p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{m_1} < \alpha,$$

$$p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{m_1 - 1} \ge \alpha.$$

Пусть построены номера n_{k-1} и m_{k-1}. Через n_k обозначим такой номер, что

$$p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{m_1} + \dots + p_{n_{k-1}+1} + \dots + p_{n_k} > \alpha,$$

$$p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{m_1} + \dots + p_{n_{k-1}+1} + \dots + p_{n_k - 1} \le \alpha,$$

а номер m_k выберем таким, что

$$p_1+\dots+p_{n_1}-q_1-\dots-q_{m_1}+\dots+p_{n_{k-1}+1}+\dots+p_{n_k}-q_{m_{k-1}+1}-\dots-q_{m_k}<\alpha,$$

$$p_1+\dots+p_{n_1}-q_1-\dots-q_{m_1}+\dots+p_{n_{k-1}+1}+\dots+p_{n_k}-q_{m_{k-1}+1}-\dots-q_{m_k-1}\geq\alpha.$$

Существование таких номеров n_k и m_k следует из расходимости рядов (15.21) и (15.22).

Таким образом, мы получаем перестановку ряда (15.20). Покажем, что переставленный ряд сходится к числу α. Через S_n^* обозначим частичные суммы переставленного ряда. Пусть $\nu_k=n_k+m_k$, $\nu_0=0$, $\mu_k=m_{k-1}+n_k$. Тогда $\nu_{k-1}<\mu_k<\nu_k$. В силу выбоа чисел n_k и m_k имеем $0<S_{\mu_k}^*-\alpha\leq p_{n_k}$, $0<\alpha-S_{\nu_k}^*\leq q_{m_k}$, а из сходимости ряда (15.20) следует, что p_{n_k} и q_{m_k} стремятся к нулю, так что $\lim_{k\to\infty}S_{\nu_k}^*=\alpha$ и $\lim_{k\to\infty}S_{\mu_k}^*=\alpha$. Кроме того, по выбору номеров n_k и m_k имеем $S_{\nu_{k-1}}^*\leq S_n^*\leq S_{\mu_k}^*$ при $\nu_{k-1}<n<\mu_k$ и $S_{\nu_k}^*\leq S_n^*\leq S_{\mu_k}^*$, если $\mu_k<n<\nu_k$. Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty}S_n^*=\alpha$, чем завершается доказательство первой части теоремы.

Опишем схему доказательства остальных утверждений теоремы. Если мы хотим построить такую перестановку ряда (15.20), чтобы частичные суммы переставленного ряда стремились к $+\infty$, то достаточно на первом шаге взять столько первых неотрицательных слагаемых, чтобы их сумма была большей, чем 1, а затем одно отрицательное слагаемое. На втором шаге выберем очередные неотрицательные слагаемые так, чтобы частичная сумма была большей, чем 2, а за ними расположить второе отрицательное слагаемое. Продолжая этот процесс, очевидно, получим требуемую перестановку ряда (15.20).

Аналогично строится перестановка, частичные суммы которой стремятся к $-\infty$. Легко также построить и такую перестановку ряда (15.20), у которой частичные суммы колеблются и не имеют ни конечного, ни бесконечного пределов. $\square$

15.4.3 Умножение рядов. Теорема Коши

Рассмотрим два ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{15.23}$$
и
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{15.24}$$
Составим всевозможные произведения $a_i b_j$ и расположим их в матрицу
$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$
Элементы этой бесконечной матрицы различными способами можно располагать в последовательность и тем самым получать различные ряды.

Теорема Коши. *Пусть ряды* (15.23) *и* (15.24) *сходятся абсолютно. Тогда ряд, слагаемыми которого являются всевозможные произведения $a_i b_j$, взятые в произвольном порядке и без повторений, сходится и его сумма равна произведению сумм рядов* (15.23) *и* (15.24).

Доказательство. Пусть элементы матрицы расположены в последовательность каким-либо способом и составлен соответствующий ряд. Пусть S_n и σ_n – частичные суммы полученного ряда и ряда, составленного из модулей его слагаемых, соответственно. Для доказательства абсолютной сходимости ряда достаточно показать ограниченность последовательности $\{\sigma_n\}$. Пусть K – наибольший из номеров i и j, таких, что слагаемое $|a_i b_j|$ входит в σ_n. Тогда, очевидно,
$$\sigma_n \le (|a_1| + \dots + |a_K|)\,(|b_1| + \dots + |b_K|)\,.$$
Но, в силу абсолютной сходимости рядов (15.23) и (15.24),
$$\sum_{i=1}^{K} |a_i| \le A, \quad \sum_{j=1}^{K} |b_j| \le B,$$

где A и B – постоянные. Поэтому $\sigma_n \le A \cdot B$ $(n = 1, 2, \dots)$, и тем самым доказана абсолютная сходимость ряда из произведений.

В силу теоремы о сходимости перестановки абсолютно сходящегося ряда, для доказательства оставшейся части теоремы достаточно показать, что сходится к $A_1 \cdot B_1$, где $A_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $B_1 = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$, ряд, в котором слагаемые как элементы матрицы занумерованы по квадратам. В этом случае

$$S_{n^2} = (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2) + \dots + (a_1 b_n + \dots + a_n b_n + \dots + a_n b_1) =$$

$$= (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n) = S'_n \cdot S''_n,$$

где S'_n и S''_n – частичные суммы рядов (15.23) и (15.24), соответственно. Но так как ряд из произведений сходится и

$$S_{n^2} = S'_n \cdot S''_n \to A_1 \cdot B_1 \quad (n \to \infty),$$

то и $S_n \to A_1 \cdot B_1$ при $n \to \infty$, что и доказывает теорему. □

15.5 Бесконечные произведения

Определение. Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность действительных чисел. Положим $\Pi_1 = p_1$, $\Pi_2 = p_1 p_2, \dots$, $\Pi_n = p_1 p_2 \dots p_n, \dots$. Если последовательность $\{\Pi_n\}$ имеет конечный, отличный от нуля предел, то говорят, что бесконечное произведение сходится, и обозначают $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \Pi_n$. В противном случае говорят, что бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ расходится.

Пример 1. Вычислить $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$. Здесь $p_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$,

$$\Pi_n = p_1 \dots p_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \dots \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{(2-1)(2+1)}{2 \cdot 2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3 \cdot 3} \dots \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1},$$

$\lim_{n\to\infty}\Pi_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2}$. Следовательно, данное бесконечное произведение сходится и

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Вычислить $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n}$ $\left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$. Имеем $p_n = \cos\frac{\varphi}{2^n}$,

$$\Pi_n = \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{4}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n} = \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{4}\cdots\left(\cos\frac{\varphi}{2^n}\sin\frac{\varphi}{2^n}\right)\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}} =$$

$$= \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{4}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2^{n-1}}\right)\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}} =$$

$$= \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{4}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}} = \cdots = \frac{1}{2^n}\sin\varphi\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\Pi_n = \sin\varphi\lim_{n\to\infty}\frac{1/2^n}{\sin(\varphi/2^n)} = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \quad (\varphi \neq 0).$$

Если же $\varphi = 0$, то каждое $p_n = 1$, $\Pi_n = 1$ и $\lim_{n\to\infty}\Pi_n = 1$. Таким образом, данное бесконечное произведение сходится при любом φ $\left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$ и

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n} = \begin{cases} \frac{\sin\varphi}{\varphi}, & \varphi \neq 0, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \varphi = 0. \end{cases}$$

Простейшие свойства бесконечных произведений.

Теорема 1 (необходимое условие сходимости). *Если бесконечное произведение* $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ *сходится, то* $\lim_{n\to\infty}p_n = 1$.

Доказательство. Поскольку $\Pi_n = p_n\Pi_{n-1}$ и $\lim_{n\to\infty}\Pi_n = \alpha \neq 0$, то $p_n = \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} \to 1$ $(n\to\infty)$. $\square$

Теорема 2. *Для того чтобы бесконечное произведение*

$$\prod_{n=1}^{\infty}p_n \quad (p_n > 0) \tag{15.25}$$

сходилось, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n. \tag{15.26}$$

Доказательство. Пусть $\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln p_k$. Тогда

$$\ln \Pi_n = \ln \prod_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} \ln p_k = S_n.$$

Если сходится произведение (15.25), то последовательность $\{\Pi_n\}$ имеет положительный предел, а значит, имеет предел и последовательность $\{\ln \Pi_n\}$ и, следовательно, последовательность $\{S_n\}$, т. е. сходится ряд (15.26). Если сходится $\{S_n\}$, то сходится и $\left\{\mathrm{e}^{S_n}\right\}$ и, следовательно, сходится и $\{\Pi_n\}$, и $\lim_{n\to\infty} \Pi_n \neq 0$. $\square$

Теорема 3. *Пусть задана последовательность чисел $\{a_n\}$ одного знака, $a_n > -1$ $(n = 1, 2, \dots)$. Тогда бесконечное произведение*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \tag{15.27}$$

сходится в том и только в том случае, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{15.28}$$

Доказательство. По теореме 2, сходимость произведения (15.27) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln (1 + a_n) \, . \tag{15.29}$$

Если все $a_n > 0$, то слагаемые ряда (15.29) положительные, а если $a_n < 0$, то все слагаемые ряда (15.29) отрицательные. В любом случае имеем знакопостоянный ряд (15.29), к которому можем применить признак сравнения в предельной форме. В силу этого признака, из равенства

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$, справедливого при условии $a_n \to 0$ $(n\to\infty)$, следует, что ряд (15.29) сходится или расходится одновременно с рядом (15.28). Заметим, что условие $a_n \to 0$ $(n\to\infty)$ является необходимым как для сходимости произведения (15.27), так и для сходимости ряда (15.28). $\square$

Пример 1. Выше мы уже рассмотрели бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$. Здесь $a_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ сходится и, следовательно, сходится и данное произведение.

Пример 2. Рассмотрим произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$. В этом примере $a_n = -\frac{1}{n+1}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$ расходится. Значит, расходится и данное произведение.

Пример 3. Исследуем на сходимость $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Имеем

$$p_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} - 1,$$

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} - 1 = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{-1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}} \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

При $n=1,2,\ldots$ имеем $a_n<0$ и $a_n \sim \frac{-1}{2n^2}$, так что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится. Следовательно, сходится и данное произведение.

16. Функциональные последовательности и ряды

Пусть на множестве E задана последовательность функций

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}. \tag{16.1}$$

Предположим, что для любого фиксированного $x \in E$ числовая последовательность $f_n(x)$ имеет предел при $n \to \infty$. Тогда для $x \in E$ получаем $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \equiv f(x)$, где f – некоторая функция, определенная на E. Эту функцию называют предельной функцией последовательности (16.1) и говорят, что последовательность (16.1) сходится к функции f поточечно.

Пример 1. Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \le x \le 1)$. Тогда для $0 \le x < 1$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

а $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Поэтому получаем

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Получили, что последовательность непрерывных функций сходится к разрывной функции.

Пример 2. Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \ge 0)$. Тогда

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Пример 3. Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Каждая функция f_n – нечетная. Из неравенства $2|a| \le 1 + a^2$ получим, что $|f_n(x)| \le \frac{|nx|}{1+|nx|^2} \le \frac{1}{2}$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Если же $x = \frac{1}{n}$, то $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Легко видеть, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Предположим, что для каждого фиксированного $x \in E$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится. Обозначим его сумму через $f(x)$. В этом случае будем говорить, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно на множестве E к функции f.

Замечание. Из данных выше определений видно, что поточечная сходимость функционального ряда эквивалентна поточечной сходимости последовательности его частичных сумм $\{\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\}$.

Пример 4. Пусть дан функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ $(x \in \mathbb{R})$. При каждом фиксированном $x \neq 0$ этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{1+x^2}$ $(|q| < 1)$. Поэтому

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2 \quad (x \neq 0).$$

Если $x = 0$, то, очевидно, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$. Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} 1 + x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.

16.1 Равномерная сходимость

Определение. Пусть на множестве E задана последовательность функций f_n $(n = 1, 2, \dots)$, сходящаяся на E поточечно к функции f. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к функции f на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, зависящий только от ε (и не зависящий от x), что для каждого $n \geq N$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Определение поточечной сходимости на множестве E в кванторах можно записать следующим образом:

$$\forall x \in E \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon, x) : \; \forall n \geq N \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

а равномерной сходимости – так:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon):\ \forall n \geq N\ \forall x \in E\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В определении поточечной сходимости номер N зависит, вообще говоря, от ε и от x, а в определении равномерной сходимости N зависит только от ε и не зависит от x. Иначе говоря, поточечная сходимость будет равномерной, если для заданного $\varepsilon > 0$ номер N можно подобрать так, чтобы он был пригоден сразу для всех $x \in E$.

Теперь видно, что свойство равномерной сходимости не слабее, чем свойство поточечной сходимости, т. е. из равномерной сходимости следует поточечная сходимость. Обратное неверно. Может оказаться, что для каждого $\varepsilon > 0$ и для $x \in E$ найдется номер $N = N(\varepsilon, x)$, но для всех сразу $x \in E$ номер N, не зависящий от x, может и не существовать. Приведем

Пример 1. Пусть $f_n(x) = x^n$ $(x \in E \equiv [0,1])$. Мы уже видели, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Если бы последовательность $\{x^n\}$ сходилась к функции f равномерно, то неравенство $|x^n - f(x)| < \varepsilon$ при достаточно больших n $(n \geq N(\varepsilon))$ должно было быть выполненным сразу для всех $x \in E$. Но это не так, поскольку при фиксированном n имеем $\lim_{x\to 1-0} x^n = 1$, так что в любой левой полуокрестности точки $x_0 = 1$ найдется такая точка $x_1 < 1$, что $x_1^n > \frac{1}{2}$. Поэтому если мы возьмем $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, то получим неравенство $|x_1^n - 0| \geq \varepsilon_0$. Окончательно имеем

$$\exists\varepsilon_0 \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right):\ \forall N\ \exists n \geq N\ (n = N)\ \exists x_1 = x_1(\varepsilon, n) \in E:$$

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0.$$

Это означает, что данная последовательность не является равномерно сходящейся на множестве E.

В этом примере "плохие" точки x_1, т. е. такие, в которых выполнено неравенство $|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0$, находятся вблизи точки $x_0 = 1$. Если же мы отделимся от x_0, т. е. рассмотрим последовательность $\{x^n\}$ на множестве $E_\delta = [0, 1-\delta]$, где $\delta > 0$ – произвольное число, то сходимость данной последовательности к функции $f(x) \equiv 0$ на множестве E_δ уже будет равномерной. Действительно, в этом случае

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq (1-\delta)^n < \varepsilon \quad (0 \leq x \leq 1-\delta),$$

если только $n \geq N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln(1-\delta)}\right] + 1$ не зависит от $x \in E_\delta$.

Пример 2. Для последовательности функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in E \equiv \mathbb{R})$ ранее мы показали, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Поэтому $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$. Однако при фиксированном n наибольшее значение функция $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ достигает в точке $x_n = \frac{1}{n}$ и это значение равно $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Таким образом, для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0$ не может быть выполненным сразу для всех $x \in \mathbb{R}$. Значит, последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f \equiv 0$ на $\mathbb{R}$, но неравномерно, т. е.

$$\exists\varepsilon_0 \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right): \forall N\, \exists n \geq N\ (n = N)\ \exists x_1 \left(x_1 = \frac{1}{n}\right): |f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0.$$

Если же зафиксировать число $\delta > 0$, то нетрудно показать, что на множестве $E_\delta = [\delta, +\infty)$ последовательность функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ сходится равномерно. Действительно, неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n\delta} < \varepsilon \quad (x \in E_\delta)$$

выполнено, если только $n \geq N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon\delta}\right] + 1$ не зависит от $x \in E_\delta$.

Геометрический смысл равномерной сходимости состоит в том, что начиная с номера N графики функций $f_n(x)$ расположены в ε-полосе графика функции f.

Равномерная сходимость ряда определяется как равномерная сходимость последовательности его частичных сумм.

Определение. Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{u_n\}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется равномерно сходящимся на множестве

E, если он сходится поточечно на E и последовательность его частичных сумм равномерно сходится к сумме ряда на множестве E.

Другими словами, определение равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, сходящегося к функции f на множестве E, можно сформулировать следующим образом. Обозначим через $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ – остаток после n-го слагаемого. Тогда $S_n(x) + r_n(x) = f(x)$, а равномерная сходимость ряда означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий только от ε), что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Но так как $|S_n(x) - f(x)| = |r_n(x)|$, то получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n \geq N \ \forall x \in E \ \ |r_n(x)| < \varepsilon.$$

Это в свою очередь означает, что остаток ряда равномерно стремится к нулю. Таким образом, получили следующее эквивалентное определение равномерной сходимости ряда.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве E, если последовательность его остатков после n-го слагаемого $\{r_n\}$ равномерно сходится к нулю на множестве E.

Это определение более выгодно по сравнению с предыдущим тем, что оно использует лишь слагаемые исходного ряда и не использует сумму самого ряда $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Пример 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится на интервале $(-1, 1)$, т. к. он представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем x, $|x| < 1$. Исследуем его на равномерную сходимость. Для этого рассмотрим остаток $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. При фиксированном x и $n \to \infty$ имеем $r_n(x) \to 0$. Это означает, что данный ряд сходится при каждом x, т. е. поточечно. Если же зафиксировать n и устремить x к $1-0$, то получим, что $\frac{x^{n+1}}{1-x} \to +\infty$, т. е. если x близок к 1, то $r_n(x)$ принимает большие значения. Это означает, что неравенство $|r_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \varepsilon$ сразу для всех $x \in (-1, 1)$ не может быть выполненным, каким бы большим номер n мы ни выбрали. Таким образом, наш ряд сходится на $(-1, 1)$, но неравномерно.

С другой стороны, на любом отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится равномерно. Действительно, в этом случае

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \le \frac{q^{n+1}}{1-q}, \quad (x \in [-q, q]).$$

Отсюда следует, что последовательность $\{r_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на $[-q, q]$, т. е. данный ряд равномерно сходится на $[-q, q]$.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. Имеем

$$r_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2)^n}, & x \ne 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Если x фиксировано, то $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что ряд является сходящимся при любом $x \in \mathbb{R}$, т. е. он сходится поточечно. Если зафиксируем n, то при стремлении x к нулю получаем, что $r_n(x) \to 1$, а это означает, что неравенство $|r_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} < \varepsilon$ при $0 < \varepsilon < 1$ не может выполняться сразу для всех $x \in \mathbb{R}$, каким бы большим номер n мы ни взяли. Таким образом, $r_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, но неравномерно. Следовательно, данный ряд сходится на $\mathbb{R}$ неравномерно.

Замечание. Пусть задан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \in E). \tag{16.2}$$

Рассмотрим величины

$$\mu_n = \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| = \sup_{x \in E} |r_n(x)|.$$

Тогда определение равномерной сходимости ряда (16.2) на множестве E можно сформулировать следующим образом.

Ряд (16.2) сходится равномерно на множестве E, если $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$.

Действительно, если $\mu_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \ge N$ справедливо неравенство $\mu_n < \varepsilon$, т. е. для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$, а значит ряд

(16.2) сходится равномерно. Обратно, если $r_n(x)$ равномерно сходится к нулю, то для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$. Поэтому и $\mu_n = \sup_{x\in E} |r_n(x)| \le \varepsilon$, т. е. $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Пример 3. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$.

Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \le \frac{1}{x^2+n+1} \le \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \le \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости последовательности). *Для того чтобы последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно сходилась на множестве E к некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, зависящий только от ε, что для любых $n, m \ge N$ и для любого $x \in E$ было выполнено неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на E. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой номер N, что для всех $n \ge N$ и для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если возьмем произвольные $n, m \ge N$, то для любого $x \in E$ получим

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. выполнено условие теоремы (условие Коши).

Достаточность. Пусть выполнено условие Коши. Зафиксируем $x \in E$ и получим числовую последовательность $\{f_n(x)\}$, которая, согласно условию Коши, является фундаментальной и, следовательно, сходящейся. Обозначим ее предел через $f(x)$. Так как $x \in E$ произвольное, то, проделав эту операцию для всех $x \in E$, получим функцию $f(x)$. Покажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ стремится к $f(x)$ равномерно на E. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой номер N, что для всех $n, m \ge N$ и для любого $x \in E$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Зафиксируем $n \ge N$, $x \in E$ и устремим $m \to \infty$. Тогда получим $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$.

Это неравенство выполнено для любого $n \geq N$ и для всех $x \in E$, а это и означает, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на E.

□

Доказанную теорему можно переформулировать для рядов следующим образом.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, зависящий только от ε, что для всех $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in E$ выполнялось неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$.*

Эта теорема вытекает из предыдущей, если учесть, что равномерная сходимость ряда определяется как равномерная сходимость последовательности его частичных сумм.

Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \in E). \tag{16.3}$$

Предположим, что существует числовая последовательность $\{a_n\}$, такая, что $|u_n(x)| \leq a_n$ $(n = 1, 2 \dots)$ для всех $x \in E$, и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда ряд (16.3) сходится равномерно на E.

Доказательство. В силу условия теоремы, имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \quad (x \in E).$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по условию, то, в силу критерия Коши для числовых рядов, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$. Но тогда и неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$ будет выполненным для всех $x \in E$, т. е. выполнено условие критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда, в силу которого ряд (16.3) сходится равномерно на E. □

Замечание 1. Признак Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости функционального ряда. В самом деле, рассмотренный выше пример 3 ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ показывает, что этот ряд хотя и сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но оценить сверху его слагаемые можно лишь слагаемыми расходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Замечание 2. Признак Вейерштрасса дает достаточное условие не только равномерной, но и абсолютной сходимости ряда. Это сразу следует из неравенства

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \quad (x \in E).$$

Замечание 3. Признак Вейерштрасса заключается в том, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, где $\alpha_n = \sup_{x \in E} |u_n(x)|$, следует равномерная (и абсолютная) сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве E.

Пример 4. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ на $\mathbb{R}$. Используя очевидное неравенство $2|a| \leq 1 + a^2$, находим мажорантный числовой ряд

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \frac{|n^2x|}{1+(n^2x)^2} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}.$$

Поскольку числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$ сходится, то исходный функциональный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Пример 5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, поскольку $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Теорема (признак Абеля равномерной сходимости). *Пусть на множестве E заданы две функциональные последовательности $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна, функции $a_n(x)$ ограничены в совокупности, т. е. существует такое M, что $|a_n(x)| \leq M$ $(x \in E,\ n = 1, 2, \ldots)$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на E. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на E.*

Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости). *Пусть на множестве E заданы две последовательности функций $\{a_n(x)\}$ и*

$\{b_n(x)\}$, такие, что при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна, функциональная последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на E, а частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ ограничены в совокупности на E, т. е. существует такое число M, что $|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)| \le M$ $(x \in E,\ n = 1, 2, \dots)$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E.

Доказательства признаков Абеля и Дирихле легко провести, основываясь на критерии Коши и применяя преобразование Абеля (точно так же, как это было сделано при доказательстве признаков Абеля и Дирихле сходимости числовых рядов). Рекомендуется провести эти доказательства самостоятельно.

Пример 6. Рассмотрим ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, где последовательность чисел a_n монотонно стремится к нулю. К ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ применим признак Дирихле. Для этого рассмотрим суммы $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx$. Имеем

$$2 \sin \frac{x}{2} S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2 \sin \frac{x}{2} \cos kx =$$

$$= \sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2} + \dots + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x - \sin \left(n - \frac{1}{2}\right) x =$$

$$= \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x - \sin \frac{x}{2}.$$

Поэтому

$$S_n(x) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \quad (0 < x < 2\pi), \quad |S_n(x)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

Если $x \to 0$, то $S_n(x) \to n$, так что в окрестности нуля нарушается равномерная ограниченность сумм $S_n(x)$. Если же $\delta \le x \le 2\pi - \delta$, где $0 < \delta < \pi$, то $|S_n(x)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \sin \frac{\delta}{2}}$ и поэтому на $[\delta, 2\pi - \delta]$ выполнены все условия признака Дирихле, в силу которого ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ сходится равномерно на $[\delta, 2\pi - \delta]$. На всем интервале $(0, 2\pi)$ признак Дирихле неприменим, но это еще не означает, что ряд сходится неравномерно, поскольку признак Дирихле – лишь достаточное условие равномерной сходимости ряда.

Покажите самостоятельно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, где последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает к нулю, сходится равномерно на $[\delta, 2\pi - \delta]$, где произвольное $0 < \delta < \pi$. Для этого полезно использовать равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \quad (0 < x < 2\pi)$$

и применить признак Дирихле.

16.1.1 Равномерная сходимость и предельный переход

Теорема. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность функций $\{f_n\}$, сходящаяся к функции f равномерно на $[a, b]$. Если все функции f_n непрерывны в точке $x_0 \in [a, b]$, то и предельная функция f непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной сходимостью, найдем такой номер N, что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Возьмем произвольное $n \geq N$. Так как f_n непрерывна в точке x_0, то найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Пусть $|x - x_0| < \delta$. Тогда

$$|f(x) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

и теорема доказана. $\square$

Замечание. В доказанной теореме условие равномерной сходимости нельзя отбросить. В самом деле, выше мы приводили пример последовательности непрерывных функций $f_n(x) = x^n$, которая всюду на $[0,1]$ сходится, но предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

разрывна.

С другой стороны, требование равномерной сходимости не является необходимым для того, чтобы предельная функция была непрерывной. Другими словами, существует последовательность непрерывных функций, сходящаяся к непрерывной функции, но неравномерно. Такую последовательность $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ мы уже приводили выше в качестве примера.

Доказанная выше теорема для рядов может быть переформулирована следующим образом.

Теорема. *Пусть на отрезке $[a,b]$ задана последовательность непрерывных в точке $x_0 \in [a,b]$ функций u_n, такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$. Тогда сумма этого ряда является непрерывной в точке x_0 функцией.*

Эта теорема сразу следует из предыдущей, если ее применить к последовательности $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ непрерывных в точке x_0 функций как конечной суммы непрерывных функций u_k.

16.1.2 Равномерная сходимость и интегрирование

Пусть задана последовательность интегрируемых на отрезке $[a,b]$ функций f_n и пусть последовательность $\{f_n\}$ сходится на $[a,b]$ поточечно к функции f. Поставим вопрос: обязана ли функция f быть интегрируемой на $[a,b]$ и верно ли равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \ ?$$

Отрицательные ответы на эти вопросы дают следующие примеры.

Пример 1. Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных точек из отрезка $[0,1]$. Обозначим

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \ldots, r_n\}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\}. \end{cases}$$

Тогда каждая функция f_n интегрируема на отрезке $[0,1]$, поскольку она имеет лишь конечное число точек разрыва $\{r_1, \ldots, r_n\}$. С другой стороны, легко видеть, что $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathcal{D}(x)$, где $\mathcal{D}$ – функция Дирихле. Но мы знаем, что функция Дирихле неинтегрируема на отрезке $[0,1]$.

Итак, мы построили последовательность интегрируемых функций, сходящуюся к неинтегрируемой функции. Следующий пример показывает, что даже если предельная функция интегрируема, то предел интегралов не обязан равняться интегралу от предельной функции.

Пример 2. Положим $f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, а на отрезках $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ считаем функцию f_n линейной. Легко видеть, что $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$, так что предельная функция $f(x) \equiv 0$ $(x \in [0,1])$ интегрируема и $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. С другой стороны, легко подсчитать, что $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$, и поэтому предельный переход под знаком интеграла недопустим.

Аналогичный вопрос можно сформулировать и для рядов. Именно, можно ли почленно интегрировать сходящийся ряд? Другими словами, верно ли равенство

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx\ ?$$

Используя построенные выше примеры, легко показать, что ответ на этот вопрос отрицательный в том смысле, что сумма поточечно сходящегося ряда из интегрируемых функций может оказаться неинтегрируемой функцией, а если даже сумма ряда будет функцией интегрируемой, то требуемое равенство все равно нельзя гарантировать.

Теорема. *Пусть* $\{f_n\}$ *– последовательность непрерывных на отрезке* $[a,b]$ *функций, равномерно сходящаяся на* $[a,b]$ *к функции* f*. Тогда существует*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

т. е. можно переходить к пределу под знаком интеграла.

Доказательство. В силу теоремы о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, предельная функция f непрерывна на $[a,b]$, а значит и интегрируема на $[a,b]$. Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной сходимостью, найдем такой номер N, что для всех $n \geq N$ и для любого $x \in [a,b]$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Интегрируя это неравенство, получаем, что при всех $n \geq N$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon,$$

и теорема доказана. □

Доказанная теорема для рядов может быть переформулирована следующим образом.

Теорема. *Пусть* $\{u_n\}$ *– последовательность непрерывных на отрезке* $[a,b]$ *функций такова, что ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a,b]$*. Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Доказательство. Эта теорема является простым следствием предыдущей. Действительно, функции $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ непрерывны как суммы конечного числа непрерывных функций u_k, и последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно на $[a,b]$. Тогда, по уже доказанной теореме,

$$\sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b f_n(x)\,dx \;\to\; \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx. \quad \square$$

Из приведенного доказательства теоремы видно, что непрерывность функций f_n была использована лишь для того, чтобы гарантировать их интегрируемость и непрерывность предельной функции f, из которой вытекает ее интегрируемость. Возможность же самого предельного перехода под знаком интеграла обеспечивается условием равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$. Следующая теорема показывает, что требование непрерывности можно ослабить, и достаточно потребовать лишь интегрируемость.

Теорема. *Пусть $\{f_n\}$ – последовательность интегрируемых на отрезке $[a,b]$ функций, равномерно на $[a,b]$ сходящаяся к функции f. Тогда предельная функция f интегрируема на $[a,b]$ и справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство равенства производится точно так же, как и в предыдущей теореме, при условии, что $\int_a^b f(x)\,dx$ существует. Поэтому достаточно доказать лишь интегрируемость на $[a,b]$ функции f. Для этого воспользуемся критерием интегрируемости в терминах колебаний, согласно которому функция f интегрируема на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π отрезка $[a,b]$, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, справедливо неравенство $\sum_{i=0}^{s-1} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon$, где $\omega_i(f)$ – колебания функции f на частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь равномерной сходимостью последовательности $\{f_n\}$, найдем такое N, что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in [a,b]$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Если $n \geq N$, то

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')| <$$

$$< |f_n(x') - f_n(x'')| + 2\varepsilon.$$

Отсюда следует, что при любом разбиении $\omega_i(f) \leq \omega_i(f_n) + 2\varepsilon$, так что

$$\sum_{i=0}^{s-1} \omega_i(f)\Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{s-1} \omega_i(f_n)\Delta x_i + 2\varepsilon(b-a).$$

Первое слагаемое справа мало в силу интегрируемости f_n, т. е. существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, первое слагаемое справа будет меньшим, чем ε. Поэтому, в силу критерия интегрируемости в терминах колебаний, получаем, что функция f интегрируема на $[a, b]$. $\square$

В завершение приведем еще один пример последовательности интегрируемых функций, поточечно сходящейся к неограниченной, а значит, неинтегрируемой функции. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ n, & 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Тогда каждая функция f_n интегрируема на $[0, 1]$, поскольку она имеет единственную точку разрыва $x_0 = 0$. Вместе с тем функция

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

неограничена и, следовательно, неинтегрируема на $[0, 1]$.

16.1.3 Равномерная сходимость и дифференцирование

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, поточечно сходящаяся к функции f. Выше мы приводили примеры, показывающие, что мы не можем гарантировать даже непрерывность функции f. Если же последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно, то функция f непрерывна. Зададимся вопросом: можно ли гарантировать дифференцируемость функции f? Покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный.

Пример 1. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & |x| \le \frac{1}{n}, \\ |x|, & \frac{1}{n} < |x| \le 1. \end{cases}$$

Легко убедиться в том, что каждая функция f_n дифференцируема на $[-1,1]$, а последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f(x) = |x|$ равномерно на $[-1,1]$. Вместе с тем предельная функция $f(x) = |x|$ недифференцируема в точке $x_0 = 0 \in [-1,1]$.

Пример 2. Последовательность функций $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ равномерно сходится к функции f, тождественно равной нулю на $\mathbb{R}$ (т. к. $|f_n(x)| \le \frac{1}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$). Вместе с тем $f_n'(x) = \cos nx$ и эта последовательность не имеет предела при $n \to \infty$, например, в точке $x_0 = \pi$.

Первый пример показывает, что предел равномерно сходящейся последовательности дифференцируемых функций может оказаться недифференцируемой функцией в некоторой точке x_0, несмотря на то, что существует $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$. Во втором примере существует $f'(x_0)$, но не существует $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$. Таким образом, для того чтобы гарантировать возможность предельного перехода под знаком дифференцирования, т. е. равенство

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x),$$

при естественном условии, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f, мало потребовать равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ к функции f. Это совершенно естественно и с геометрической точки зрения. Действительно, равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f означает, что графики функций f_n находятся в ε-полосе графика предельной функции f. Но в этой полосе графики функций f_n могут быть какими угодно и вовсе не обязательно, чтобы касательные к этим графикам в фиксированной точке x_0 имели какое-то предельное положение, т. е. стабилизировались.

Теорема. *Пусть $\{f_n\}$ – последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций. Предположим, что в некоторой* *точке* $x_0 \in [a,b]$ *числовая последовательность* $\{f_n(x_0)\}$ *сходится, а функциональная последовательность* $\{f_n'\}$ *равномерно сходится на* $[a,b]$. *Тогда исходная последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно сходится на* $[a,b]$ *к непрерывно дифференцируемой функции* f, *причем для любого* $x \in [a,b]$ *справедливо равенство*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x). \tag{16.4}$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$. По теореме о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций получаем, что функция φ непрерывна на $[a,b]$. Положим $g(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$. Применим на отрезке с концами x_0 и x теорему о предельном переходе под знаком интеграла к последовательности $\{f_n'(t)\}$. Тогда получим

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \left(f_n(x) - f_n(x_0)\right)$$

(последнее равенство справедливо в силу формулы Ньютона – Лейбница). По условию теоремы существует $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Тогда из равенства $g(x) = \lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(x_0))$ следует, что существует и $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, т. е. мы показали, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на $[a,b]$. Обозначим $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ и получим, что $g(x) = f(x) - f(x_0)$, а так как функция g дифференцируема (как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции φ) и $g'(x) = \varphi(x)$ (в силу формулы Ньютона – Лейбница), то отсюда следует, что функция f также дифференцируема и $f'(x) = \varphi(x)$, т. е. функция f имеет производную, эта производная непрерывна и справедливо равенство (16.4). Осталось показать, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f равномерно на $[a,b]$. Имеем

$$|f_n(x) - f(x)| \le |(f_n(x) - f_n(x_0)) - (f(x) - f(x_0))| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Второе слагаемое справа мало при достаточно больших n, а первое оцениваем так:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x} \left(f_n'(t) - \varphi(t)\right)\,dt\right| \le \int_a^b |f_n'(t) - \varphi(t)|\,dt.$$

Теперь остается учесть, что последовательность $\{f'_n\}$ сходится к функции φ равномерно на $[a,b]$, и тем самым завершается доказательство теоремы.

$\square$

Доказанную теорему для рядов можно переформулировать следующим образом.

Теорема (о почленном дифференцировании ряда). *Пусть на отрезке $[a,b]$ задана последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\{u_n\}$, такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$, а ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$. Тогда исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на всем отрезке $[a,b]$, его сумма является непрерывно дифференцируемой функцией и справедливо равенство*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \quad (x \in [a,b]).$$

Для доказательства этой теоремы достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

В двух последних теоремах мы предполагали непрерывность производных. Это существенно использовалось при доказательстве, т. к. оно основывалось на применении формулы Ньютона – Лейбница. Вместе с тем при сформулированных условиях мы смогли гарантировать непрерывность производной предельной функции. Следующая теорема не содержит условия непрерывности производных функций f_n и, естественно, не гарантирует непрерывность производной у предельной функции.

Теорема. *Пусть на отрезке $[a,b]$ задана последовательность дифференцируемых функций $\{f_n\}$, сходящаяся в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$ и такова, что функциональная последовательность $\{f'_n\}$ сходится равномерно на $[a,b]$. Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на всем отрезке $[a,b]$ к некоторой функции f, причем эта функция f*

дифференцируема на $[a, b]$ *и справедливо равенство*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. По критерию Коши, в силу равномерной сходимости последовательности $\{f'_n\}$, существует такой номер N, что для всех $n, m \geq N$ и для любого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon.$$

Обозначим $\varphi_{n,m}(x) = f_n(x) - f_m(x)$. Тогда $\left|\varphi'_{n,m}(x)\right| < \varepsilon$ и, в силу формулы Лагранжа,

$$|\varphi_{n,m}(x) - \varphi_{n,m}(x_0)| \leq \left|\varphi'_{n,m}(\xi)\right| \cdot |x - x_0| \leq \varepsilon |x - x_0|.$$

Отсюда следует, что

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |\varphi_{n,m}(x)| \leq |\varphi_{n,m}(x) - \varphi_{n,m}(x_0)| + |\varphi_{n,m}(x_0)| \leq$$

$$\leq \varepsilon |x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|.$$

Из этого неравенства видно, что последовательность $\{f_n\}$ удовлетворяет условию критерия Коши, а значит, она равномерно сходится. Обозначим $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Далее, для $n, m \geq N$ имеем

$$|\varphi_{n,m}(x+h) - \varphi_{n,m}(x)| \leq \varepsilon |h| \quad (x, x+h \in [a, b]).$$

Это неравенство можем переписать так:

$$\left|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h}\right| \leq \varepsilon.$$

Устремим $n \to \infty$ и тогда получим

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h}\right| \leq \varepsilon \quad (m \geq N).$$

Зафиксируем $m \geq N$ и найдем такое $\delta > 0$, что для всех h, удовлетворяющих условию $0 < |h| < \delta$, справедливо неравенство

$$\left|\frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h} - f'_m(x)\right| < \varepsilon.$$

Тогда получим, что

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'_m(x)\right|<2\varepsilon \quad (0<|h|<\delta).$$

Если в неравенстве $|f'_n(x)-f'_m(x)|<\varepsilon$ $(n,m\geq N)$ перейдем к пределу при $n\to\infty$ (как уже доказано, он существует), то получим

$$|\varphi(x)-f'_m(x)|\leq\varepsilon,$$

где обозначено $\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}f'_n(x)$. Отсюда следует, что

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x)\right|\leq 3\varepsilon \quad (0<|h|<\delta).$$

Это означает, что существует

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}f'_n(x) \quad (x\in[a,b]). \quad \square$$

Упражнение. Сформулируйте самостоятельно аналог последней теоремы для рядов.

16.1.4 Перестановка предельных переходов

Теорема. *Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{f_n\}$, равномерно сходящаяся к функции f на E. Пусть x_0 – предельная точка множества E и при каждом n существует $\lim_{x\to x_0}f_n(x)=y_n$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ имеет конечный предел y_0 и существует $\lim_{x\to x_0}f(x)=y_0$.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon>0$. Пользуясь равномерной сходимостью, найдем такой номер N, что для всех $n,m\geq N$ и для каждого $x\in E$ справедливо неравенство $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$. Устремляя $x\to x_0$, получаем, что $|y_n-y_m|\leq\varepsilon$ для всех $n,m\geq N$, т. е. последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна. В силу критерия Коши, существует $\lim_{n\to\infty}y_n=y_0$.

Имеем

$$|f(x)-y_0|\leq|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-y_n|+|y_n-y_0|.$$

Если $n \geq N$, то для всех $x \in E$, в силу равномерной сходимости, справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Если x достаточно близко к x_0, т. е. $|x - x_0| < \delta$, то $|f_n(x) - y_n| < \varepsilon$. При $n \geq N$ имеем также $|y_n - y_0| < \varepsilon$. Тогда и $|f(x) - y_0| \leq 3\varepsilon$, если только $|x - x_0| < \delta$, а это означает, что $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$. $\square$

Замечание. Доказанная теорема утверждает, что при указанных условиях можно менять местами предельные переходы, а именно,

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

В случае если условия теоремы не выполнены, такое равенство может оказаться неверным.

Аналог доказанной теоремы для рядов имеет следующий вид.

Теорема (о почленном переходе к пределу). *Пусть на множестве E задан равномерно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Пусть x_0 – предельная точка множества E и для любого n существует $\lim_{x\to x_0} u_n(x) = \alpha_n$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится и существует*

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

Замечание. Эта теорема дает достаточные условия, при которых сумму и предел можно менять местами.

17. Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, где x_0 – фиксированная точка, $\{a_n\}$ – числовая последовательность. Числа a_n ($n = 0, 1, \dots$) называются коэффициентами ряда, точка x_0 – центром ряда.

Будем рассматривать ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, т. е. полагаем $x_0 = 0$.

Пример. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ – сумма геометрической прогрессии. Этот ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$.

17.1 Структура множества точек сходимости степенного ряда

Структуру множества точек сходимости степенного ряда устанавливает

Первая теорема Абеля. *Пусть степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{17.1}$$

сходится в некоторой точке $x_1 \neq 0$. Тогда ряд (17.1) *абсолютно сходится в каждой точке x, такой, что $|x| < |x_1|$.*

Доказательство. Из сходимости числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ следует, что его слагаемые стремятся к нулю и, следовательно, ограничены, т. е. существует такое M, что для всех $n = 0, 1, \dots$ справедливо неравенство $|a_n x_1^n| \leq M$. Поэтому для $|x| < |x_1|$ имеем

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n.$$

Поскольку $q = \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится. Значит, по признаку сравнения, сходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, а это означает, что ряд (17.1) сходится и притом абсолютно. $\square$

Замечание. Если степенной ряд (17.1) сходится при $x = x_1$, то нельзя гарантировать, что он сходится и при $x = -x_1$. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ сходится при $x = x_1 = -1$ и расходится при $x = -x_1 = 1$.

Следствие. *Если степенной ряд* (17.1) *расходится в некоторой точке x_1, то для всех x, таких, что $|x| > |x_1|$, ряд* (17.1) *расходится.*

Доказательство. Если бы в некоторой точке x_2, такой, что $|x_2| > |x_1|$, ряд (17.1) оказался сходящимся, то, в силу первой теоремы Абеля, он должен был быть сходящимся в точке x_1. Но в точке x_1 ряд (17.1) расходится по условию, и следствие доказано. $\square$

Теорема. *Множество точек сходимости степенного ряда* (17.1) *представляет собой непустой промежуток с центром в точке $x_0 = 0$. Это может быть одноточечное множество $\{0\}$, интервал (быть может, и бесконечный), отрезок или полуинтервал.*

Доказательство. Ясно, что в точке $x_0 = 0$ ряд (17.1) с любыми коэффициентами $\{a_n\}$ сходится. Если других точек сходимости у ряда (17.1) нет, то множеством точек сходимости ряда (17.1) является множество $\{0\}$. Предположим, что существуют отличные от нуля точки сходимости ряда (17.1). Обозначим через E множество всех таких точек, $R = \sup_{x\in E} |x|$. Пусть $|x| < R$. Тогда найдется такое $x_1 \in E$, что $|x_1| > |x|$. По первой теореме Абеля, ряд (17.1) сходится абсолютно в точке x. Если $R < +\infty$ и $|x| > R$, то ясно, что $x \notin E$ и, следовательно, в этой точке ряд (17.1) расходится. При $x = \pm R$ ряд (17.1) может быть сходящимся или расходящимся. $\square$

Определение. Радиусом сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n \tag{17.2}$$

называется неотрицательное число R (конечное или равное $+\infty$), обладающее тем свойством, что при $|x - x_0| < R$ ряд (17.2) сходится, а при $|x - x_0| > R$ ряд (17.2) расходится. Существование такого числа R установлено в предыдущей теореме. Интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда (17.2).

Из доказанной теоремы следует, что степенной ряд (17.2) сходится в точке $x = x_0$. Если множество точек сходимости ряда (17.2) состоит более чем из одной точки x_0, то ряд (17.2) сходится в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ и расходится вне отрезка $[x_0 - R, x_0 + R]$, причем во всех точках интервала $(x_0 - R, x_0 + R)$ ряд (17.2) сходится абсолютно.

Пример 1. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n \tag{17.3}$$

сходится лишь в одной точке $x = 0$. Действительно, если $x \neq 0$, то, в силу известного равенства $\lim_{n\to\infty} n!x^n = \infty$, ряд (17.3) расходится, т. к. для него не выполнено необходимое условие сходимости. Итак, здесь $R = 0$ и множество точек сходимости состоит из единственной точки $\{0\}$.

Пример 2. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{17.4}$$

сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$. Здесь $R = 1$, интервал сходимости $(-1, 1)$, на концах интервала сходимости ряд (17.4) расходится, так что множество точек сходимости ряда (17.4) – интервал $(-1, 1)$.

Пример 3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \tag{17.5}$$

сходится при $|x| < 1$ по признаку сравнения, т. к. $\left|\frac{x^n}{n}\right| \leq |x|^n$ (сравниваем с геометрической прогрессией). Если $|x| > 1$, то слагаемые ряда (17.5) стремятся к ∞ и, следовательно, ряд (17.5) расходится. Итак, радиус сходимости ряда (17.5) $R = 1$, интервал сходимости $(-1, 1)$. При $x = -1$ ряд (17.5) принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Это – ряд лейбницевского типа и, следовательно, сходящийся. При $x = 1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический, а значит, расходящийся. Итак, на левом конце интервала сходимости ряд (17.5) сходится (условно), а на правом конце – расходится. Множество точек сходимости ряда (17.5) – полуинтервал $[-1, 1)$.

Пример 4. Для ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \tag{17.6}$$
при $|x| \le 1$ имеем $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, т. е. ряд (17.4), в силу признака сравнения, сходится на множестве $[-1, 1]$. Если же $|x| > 1$, то ряд (17.6) расходится, т. к. не выполнено необходимое условие сходимости $\left(\frac{x^n}{n^2} \to \infty \ (n \to \infty)\right)$. Итак, радиус сходимости ряда (17.6) $R = 1$, интервал сходимости $(-1, 1)$, множество точек сходимости $[-1, 1]$.

Пример 5. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{17.7}$$
сходится при каждом $x \in \mathbb{R}$. В самом деле, поскольку
$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty),$$
то, в силу признака Даламбера, получаем, что ряд (17.7) сходится. Имеем $R = +\infty$, интервал сходимости $(-\infty, +\infty)$.

17.2 Вычисление радиуса сходимости степенного ряда

Теорема. *Пусть дан степенной ряд*
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{17.8}$$
Если существует
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \equiv \rho > 0,$$
то радиус сходимости ряда (17.8) *равен* $R = \frac{1}{\rho}$. *Если для любого* n *числа* $a_n \ne 0$ *и существует*
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \equiv \rho^* > 0,$$
то
$$R = \frac{1}{\rho^*} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Доказательство. Для доказательства первого утверждения применим признак Коши. Для фиксированного x имеем

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| \to \rho |x| \quad (n \to \infty).$$

Если $|x| < \frac{1}{\rho}$, то $\rho|x| < 1$ и, по признаку Коши, ряд (17.8) сходится абсолютно. Если $|x| > \frac{1}{\rho}$, то $\rho|x| > 1$ и, следовательно, ряд (17.8) расходится, т. к. не выполнено необходимое условие сходимости.

Доказательство второго утверждения теоремы легко можно провести аналогично, используя признак Даламбера (проведите самостоятельно). Мы покажем, что из существования предела ρ^* следует существование предела ρ и их равенство $\rho = \rho^*$. Ясно, что отсюда также будет следовать второе утверждение теоремы.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство

$$\left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - \rho^* \right| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\rho^* - \varepsilon < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \rho^* + \varepsilon,$$

т. е.

$$|a_n| \left(\rho^* - \varepsilon\right) < |a_{n+1}| < |a_n| \left(\rho^* + \varepsilon\right).$$

Применяя рекуррентно левое неравенство, получаем

$$|a_{N+1}| > \left(\rho^* - \varepsilon\right) |a_N|,$$

$$|a_{N+2}| > \left(\rho^* - \varepsilon\right)^2 |a_N|, \ldots, |a_{N+k}| > \left(\rho^* - \varepsilon\right)^k |a_N|, \ldots,$$

а из правого неравенства следует, что

$$|a_{N+k}| < \left(\rho^* + \varepsilon\right)^k |a_N| \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $n > N$, т. е. $n = N + k$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \left(\rho^* + \varepsilon\right)^{\frac{n-N}{n}} |a_N|^{\frac{1}{n}} = \left(\rho^* + \varepsilon\right)^{1-\frac{N}{n}} \sqrt[n]{|a_N|}.$$

При фиксированном N выражение справа стремится к $\rho^* + \varepsilon$ при $n \to \infty$. Поэтому при $n \geq N_1$ оно меньше, чем $\rho^* + 2\varepsilon$. Аналогично можно показать, что при $n \geq N_2$ справедливо неравенство $\sqrt[n]{|a_n|} > \rho^* - 2\varepsilon$. Получим, что при $n \geq N_3 \equiv \max(N_1, N_2)$ имеет место неравенство

$$\rho^* - 2\varepsilon < \sqrt[n]{|a_n|} < \rho^* + 2\varepsilon,$$

а это означает, что существует

$$\rho \equiv \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho^*. \quad \Box$$

Замечание 1. Если в условии теоремы считать, что $\frac{1}{0} = +\infty$ и $\frac{1}{+\infty} = 0$, то теорема остается справедливой и в случаях $\rho = 0$ и $\rho = +\infty$. При этом необходимые изменения в доказательстве очевидны (проведите самостоятельно).

Замечание 2. Во второй части доказательства нашей теоремы мы, по существу, доказали, что из существования $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $(a_n > 0)$ следует, что существует и $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, и эти пределы равны. Для рядов с положительными слагаемыми это означает, что признак Коши не слабее признака Даламбера.

Итак, мы можем находить радиус сходимости $R = \frac{1}{\rho}$ степенного ряда (17.8) в случае если существует

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

где $0 \leq \rho \leq +\infty$. Но предел ρ может и не существовать. В общем случае радиус сходимости ряда (17.8) находится следующим образом.

Теорема Коши – Адамара. *Пусть дан степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{17.9}$$

Тогда его радиус сходимости равен

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

где понимается $\frac{1}{0} = +\infty$ *и* $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Доказательство этой теоремы основано на применении обобщенного признака Коши сходимости рядов с положительными слагаемыми.

Теорема (обобщенный признак Коши). *Пусть дан числовой ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n, \tag{17.10}$$

где числа $u_n \geq 0$*. Если* $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$*, то ряд* (17.10) *сходится, а если* $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$*, то ряд* (17.10) *расходится.*

Доказательство. Если $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$, то существует подпоследовательность номеров n_k, таких, что $u_{n_k} \geq 1$, а значит, u_n не стремится к нулю, и следовательно, ряд (17.10) расходится, т. к. не выполнено необходимое условие сходимости. Если же $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \equiv q < 1$, то для $0 < \varepsilon < 1 - q$ найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $\sqrt[n]{u_n} < q + \varepsilon < 1$. Отсюда следует, что $u_n < (q+\varepsilon)^n$ при $n \geq N$ и, значит, ряд (17.10) сходится в силу признака сравнения. $\square$

Доказательство теоремы Коши – Адамара. Имеем

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|.$$

Если

$$|x| < \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

то, в силу обобщенного признака Коши, сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, т. е. ряд (17.9) сходится абсолютно. Если же

$$|x| > \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

то для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ не выполнено необходимое условие сходимости. Следовательно, необходимое условие сходимости не выполнено и для ряда (17.9), т. е. он расходится. $\square$

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n.$$

Здесь $a_n = n$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, т. е. $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = 1$. В точках $x = R = 1$ и $x = -R = -1$ ряд расходится. Область его сходимости – интервал $(-1, 1)$.

Пример 2. Для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n \, x^n$$

имеем $a_n = [3 + (-1)^n]^n$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} [3 + (-1)^n] = 4$, $R = \frac{1}{4}$. Данный ряд сходится при $|x| < \frac{1}{4}$ и расходится при $|x| > \frac{1}{4}$. Если $x = \pm\frac{1}{4}$, то $\left|a_{2k}x^{2k}\right| = 4^{2k}\frac{1}{4^{2k}} = 1$, т. е. слагаемые с четными номерами равны 1 и предел слагаемых ряда не равен нулю. Окончательно, область сходимости ряда – интервал $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

17.3 Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда

Теорема 1. *Пусть дан степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{17.11}$$

радиус сходимости которого $R > 0$. Тогда для любого r, такого, что $0 < r < R$, ряд (17.11) *равномерно сходится на* $[-r, r]$.

Доказательство. Ранее мы показывали, что в каждой точке, лежащей внутри интервала сходимости, степенной ряд сходится абсолютно. Следовательно, числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, r^n$ сходится. Поэтому, в силу признака Вейерштрасса, из неравенства $|a_n x^n| \le |a_n| \, r^n$ $(|x| \le r)$ следует, что ряд (17.11) сходится равномерно на $[-r, r]$. $\square$

Замечание. При доказательстве теоремы мы показали, что степенной ряд с радиусом сходимости $R > 0$ равномерно сходится на отрезке $[-r, r]$, где $0 < r < R$. Другими словами, степенной ряд сходится равномерно на каждом отрезке, целиком лежащем в интервале сходимости. В этом случае говорят, что степенной ряд сходится равномерно внутри интервала сходимости. Не следует это путать с понятием равномерной сходимости на всем интервале сходимости. На интервале сходимости степенной ряд может сходиться и неравномерно, но внутри интервала сходимости, как показано выше, степенной ряд всегда сходится равномерно.

Теорема 2. *Сумма степенного ряда* (17.11) *с радиусом сходимости* $R > 0$ *является непрерывной на интервале сходимости* $(-R, R)$ *функцией.*

Доказательство. Согласно предыдущей теореме, ряд (17.11) равномерно сходится на $[-r, r] \subset (-R, R)$ (на всем интервале $(-R, R)$ ряд (17.11) может сходиться и неравномерно). Пусть $x_0 \in (-R, R)$. Выберем такое r, что $|x_0| < r < R$. Так как x_0 – внутренняя точка отрезка $[-r, r]$ и на $[-r, r]$ ряд (17.11) сходится равномерно, то, по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, сумма ряда (17.11) является непрерывной на $[-r, r]$, а значит, и в точке x_0, функцией.

Поскольку $x_0 \in (-R, R)$ – произвольная точка, то сумма ряда (17.11) непрерывна на $(-R, R)$. $\square$

Теорема 3. *Если степенной ряд* (17.11) *с радиусом сходимости* $R > 0$ *расходится в точке* $x = R$ *или* $x = -R$, *то он не является равномерно сходящимся на* $(-R, R)$.

Доказательство. Пусть ряд (17.11) расходится при $x = R$. Если бы на $(-R, R)$ ряд (17.11) сходился равномерно, то, согласно теореме о почленном переходе к пределу, мы получили бы, что сходится ряд из пределов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to R-0} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n,$$

что противоречит предположению. $\square$

Замечание. Степенной ряд, у которого бесконечно много отличных от нуля коэффициентов, не может быть равномерно сходящимся на всей числовой оси. В самом деле, если бы степенной ряд равномерно сходился на всей действительной оси, то, в силу критерия Коши равномерной сходимости ряда, это означало бы, что слагаемые ряда равномерно малы (т. е. равномерно стремятся к нулю при $n \to \infty$). Но это не так, поскольку неравенство $|a_n x^n| < \varepsilon$ для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо лишь в том случае, если $a_n = 0$.

Вторая теорема Абеля. *Если ряд* (17.11) *с радиусом сходимости* $R > 0$ *сходится при* $x = R$*, то он сходится равномерно на* $[0, R]$ *и его сумма является непрерывной слева в точке* $x = R$ *функцией.*

Доказательство. Представим слагаемые степенного ряда (17.11) в виде $a_n x^n = a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$ и обозначим $\alpha_n(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^n$, $\beta_n = a_n R^n$. Тогда исходный ряд (17.11) можно записать в таком виде: $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\beta_n$. Покажем, что выполнены условия признака Абеля равномерной сходимости на $[0, R]$. При фиксированном $x \in [0, R]$ последовательность $\alpha_n(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^n$ монотонно убывает $\left(\text{поскольку } \frac{x}{R} \leq 1\right)$ и ограничена в совокупности (поскольку для $x \in [0, R]$ справедливо неравенство $0 \leq \left(\frac{x}{R}\right)^n \leq 1$). Далее, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ сходится и притом равномерно на $[0, R]$ (т. к. слагаемые этого ряда не зависят от x). По признаку Абеля, ряд (17.11) сходится равномерно на $[0, R]$. Отсюда следует непрерывность суммы этого ряда на $[0, R]$ и, в частности, непрерывность слева в точке $x = R$. □

17.4 Почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда

Как было выяснено выше, если радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{17.12}$$

$0 < R \leq +\infty$, то его сумма $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – непрерывная на $(-R, R)$ функция.

Теорема 1. *Для любого* $x \in (-R, R)$ *справедливо равенство*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Доказательство. Пусть $x \in (-R, R)$. Тогда ряд (17.12) сходится равномерно на отрезке с концами 0 и x и поэтому к нему на этом отрезке можно применить теорему о почленном интегрировании ряда, согласно которой

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \quad \square$$

Замечание 1. Пусть дан степенной ряд (17.12). Тогда проинтегрированный ряд имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{17.13}$$

Ряд (17.13) имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд (17.12). В самом деле, в силу теоремы Коши – Адамара,

$$R_2 = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,\frac{1}{n+1}}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Замечание 2. Если степенной ряд (17.12) сходится при $x = R$, где $0 < R < +\infty$, то, по второй теореме Абеля, он сходится равномерно на $[0, R]$. Поэтому, применяя теорему о почленном интегрировании общих функциональных рядов, получаем, что сходится ряд (17.13) при $x = R$, т. е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{R^{n+1}}{n+1}. \tag{17.14}$$

Замечание 3. Предположим теперь, что сходится ряд (17.14). Тогда, по второй теореме Абеля, равномерно на $[0, R]$ сходится и ряд (17.13). Применяя теорему о почленном переходе к пределу, получим, что существует

$$\lim_{x\to R-0} \int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{R^{n+1}}{n+1}.$$

При этом сама функция f может быть и неинтегрируемой в смысле Римана на $[0, R]$ (например, f может быть неограниченной на $[0, R]$). Выражение $\lim_{x\to R-0} \int_0^x f(t)\,dt$ называется несобственным интегралом от функции f на $[0, R)$.

Теорема 2. *Сумма $f(x)$ степенного ряда* (17.12) *является дифференцируемой в интервале сходимости функцией, причем*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \quad (x \in (-R, R)). \tag{17.15}$$

Доказательство. Прежде всего, согласно теореме Коши – Адамара, радиус сходимости ряда справа в (17.15) равен

$$R_3 = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R,$$

так что продифференцированный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \tag{17.16}$$

имеет интервал сходимости $(-R, R)$, такой же, как и у исходного ряда (17.12). Для доказательства равенства (17.15) воспользуемся общей теоремой о почленном дифференцировании функционального ряда. Зафиксируем $x \in (-R, R)$ и выберем число r, такое, что $0 \le |x| < r < R$. Поскольку радиус сходимости продифференцированного ряда (17.16) равен R, а внутри интервала сходимости степенной ряд сходится равномерно, то ряд (17.16) сходится равномерно на $[-r, r]$. Таким образом, на $[-r, r]$ для ряда (17.12) выполнены условия теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда, согласно которой для $x \in [-r, r]$ имеет место равенство (17.15). $\square$

Замечание. Если продифференцированный ряд (17.16) сходится при $x = R$, т. е. если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} na_n R^{n-1}$, то, по второй теореме Абеля, ряд (17.16) сходится равномерно на $[0, R]$. Поэтому общую теорему о почленном дифференцировании функционального ряда можно применить и при $x = R$. Согласно этой теореме получим, что в этом случае существует $f'_-(R)$ и

$$f'_-(R) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n R^{n-1}.$$

Следствие. *Сумма степенного ряда* (17.12) *является бесконечно дифференцируемой функцией в интервале сходимости и ее производные вычисляются путем последовательного дифференцирования слагаемых исходного ряда.*

Доказательство. Действительно, если

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

то, согласно теореме о дифференцировании суммы степенного ряда,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots \quad x \in (-R, R),$$

и степенной ряд в правой части имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд. Применяя снова к продифференцированному ряду теорему о дифференцировании суммы степенного ряда, находим

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \dots,$$

где $x \in (-R, R)$. Продолжая этот процесс, на k-м шаге получим

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} =$$

$$= k! a_k + (k+1)\dots 2 a_{k+1} x + (k+2)\dots 3 a_{k+2} x^2 + \dots,$$

где $x \in (-R, R)$. $\square$

Замечание. При доказательстве следствия мы получили равенство

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} \quad (x \in (-R, R)),$$

где $k = 0, 1, \dots$. Отсюда, в частности, следует, что

$$f^{(k)}(0) = k! a_k \quad (k = 0, 1, \dots),$$

или $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ $(k = 0, 1, \dots)$. Мы видим, что коэффициенты степенного ряда (17.12) выражаются через производные суммы степенного ряда, вычисленные в центре интервала сходимости.

Если дан степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \, ,$$

то его коэффициенты выражаются равенствами

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Определение. Функция f, заданная в окрестности точки x_0, называется аналитической в точке x_0, если в некоторой окрестности этой точки она представима в виде суммы степенного ряда по степеням $(x - x_0)$, т. е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \, .$$

Как мы видели выше, если функция f аналитична в точке x_0, то она бесконечно дифференцируема в этой точке и справедливы равенства

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

т. е. коэффициенты разложения аналитической функции в степенной ряд выражаются через производные этой функции. Отсюда следует

Теорема (о единственности разложения аналитической функции в степенной ряд). *Если функция f аналитическая в точке x_0, то ее разложение в ряд по степеням $(x - x_0)$ единственно, т. е. коэффициенты этого разложения определяются однозначно.*

Доказательство. Действительно, если

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1))$$

и

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \quad (x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)) \, ,$$

то при $|x - x_0| < \delta \equiv \min(\delta_1, \delta_2)$ имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

и $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, т. е. $a_k = b_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$. $\square$

17.5 Ряды Тейлора

17.5.1 Определение и основные свойства

Выше мы видели, что сумма степенного ряда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ с радиусом сходимости $R > 0$ является аналитической, а значит, бесконечно дифференцируемой функцией, и справедливо равенство $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k = 0, 1, \dots)$. Предположим теперь, что функция f бесконечно дифференцируема в точке x_0. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, где $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Определение. Пусть функция f, заданная в окрестности точки x_0, бесконечно дифференцируема в самой точке x_0. Числа $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ $(n = 0, 1, \dots)$ называются коэффициентами Тейлора функции f в точке x_0, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции f в окрестности точки x_0.

Выше мы показали, что аналитическая функция представима в виде суммы степенного ряда с коэффициентами $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, т. е. она в некоторой окрестности точки x_0 раскладывается в сумму своего ряда Тейлора. Если же отказаться от требования аналитичности, то оказывается, что ряд Тейлора в своем интервале сходимости может сходиться не к функции f, а к другой функции.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$. Применяя индукцию и правило Лопиталя, можно показать (покажите самостоятельно), что в точке $x_0 = 0$ функция f имеет производные любого порядка и все они равны нулю, т. е. $f^{(n)}(0) = 0$ $(n = 0, 1, \dots)$. Поэтому ряд Тейлора нашей функции имеет все коэффициенты, равные нулю, и, следовательно, его сумма тождественно равна нулю. В то же время для любого $x \neq 0$ функция $f(x) \neq 0$, т. е. ряд Тейлора сходится, но не к функции f, а к другой функции.

Рассмотрим вопрос: при каких условиях ряд Тейлора функции f сходится в некоторой окрестности точки x_0 к самой функции f ? Другими словами, при каких условиях функция f допускает в некоторой окрестности точки x_0 разложение в виде суммы степенного ряда? Для исследования этого вопроса будем использовать полученную ранее формулу Тейлора. Напомним ее.

Пусть функция f в интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, где $\delta>0$, имеет непрерывные производные до порядка $n+1$ включительно. Тогда справедливо равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x)\equiv$$

$$\equiv f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x),$$

где остаток $r_n(x)$ может быть представлен в виде

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \quad (x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)).$$

Мы записали остаток формулы Тейлора в интегральной форме. Применяя теорему о среднем для интегралов, отсюда легко получить остаток формулы Тейлора в форме Лагранжа

$$r_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1},$$

где точка ξ находится на интервале с концами x_0 и x.

Итак, формула Тейлора представляет функцию f в окрестности точки x_0 в виде частичной суммы ее ряда Тейлора и остатка формулы Тейлора. Если мы хотим, чтобы ряд Тейлора сходился к функции f, то для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы остаток формулы Тейлора стремился к нулю при $n\to\infty$ при каждом фиксированном $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Отсюда легко получается

Теорема (достаточное условие разложимости функции в степенной ряд). *Пусть функция f бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0. Если все производные функции f ограничены в совокупности в этой окрестности, т. е. если существует такая постоянная M, что*

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M \quad (x\in(x_0-\delta, x_0+\delta),\ n=0,1,\dots),$$

то ряд Тейлора функции f по степеням $(x - x_0)$ сходится к $f(x)$ для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, т. е. справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n .$$

Доказательство. Как уже отмечалось, нам нужно показать, что из условий теоремы следует, что остаток $r_n(x)$ формулы Тейлора стремится к нулю при $n \to \infty$ при каждом фиксированном $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Представим $r_n(x)$ в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x - x_0)^{n+1} .$$

Тогда, в силу ограниченности в совокупности производных функции f, имеем

$$|r_n(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

При фиксированном $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$ (мы используем известное равенство $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ $(a \in \mathbb{R})$). Поэтому и $r_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, и теорема доказана. $\square$

17.5.2 Разложения основных элементарных функций

При $x_0 = 0$ ряд Тейлора называют рядом Маклорена. Ранее мы получили разложения по формулам Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1 + x)$ и $(1 + x)^\alpha$. Построим для этих функций ряды Маклорена.

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$**.** Формула Тейлора (Маклорена) имеет вид

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_n(x),$$

$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ $(n = 0, 1, \dots)$, и поэтому на любом интервале $(-\delta, \delta)$ справедливо неравенство

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq \mathrm{e}^\delta \quad (x \in (-\delta, \delta),\ n = 0, 1, \dots).$$

Таким образом, выполнено достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора (Маклорена). Отсюда следует, что справедливо разложение

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in (-\delta, \delta)).$$

Поскольку $\delta > 0$ произвольное, то полученное разложение справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \sin x$**.** Формула Тейлора (Маклорена) имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_n(x).$$

Далее,

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \; f''(x) = -\sin x = \sin(x + \pi), \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Все производные данной функции ограничены в совокупности $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$ $(x \in \mathbb{R}, \; n = 0, 1, \dots)$. Таким образом, выполнено достаточное условие разложимости функции в ряд Маклорена и поэтому справедливо равенство

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. $f(x) = \cos x$**.** Как и для функции $\sin x$, аналогично получаем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4. $f(x) = \ln(1+x)$**.** Формула Маклорена для функции $\ln(1+x)$ $(x > -1)$ имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + r_n(x).$$

Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = -(1+x)^{-2},\ f'''(x) = 1\cdot 2(1+x)^{-3}, \ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}.$$

Выясним, для каких x остаток $r_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. (Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора применить нельзя, так как производные данной функции не являются ограниченными в совокупности ни при каком x.) Для этого запишем остаток формулы Маклорена в интегральной форме

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt =$$

$$= (-1)^n \int_0^x (x-t)^n \frac{dt}{(1+t)^{n+1}} = (-1)^n x^{n+1}\int_0^1 (1-u)^n \frac{du}{(1+xu)^{n+1}},$$

$$|r_n(x)| \le |x|^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1+xu)^{n+1}}\,du.$$

Пусть $|x| < 1$. Оценим подынтегральную функцию

$$\frac{(1-u)^n}{(1+xu)^{n+1}} \le \frac{(1-u)^n}{(1-|x|u)^{n+1}} = \left(\frac{1-u}{1-|x|u}\right)^n \cdot \frac{1}{1-|x|u} \le \frac{1}{1-|x|u}.$$

Отсюда следует, что

$$|r_n(x)| \le |x|^{n+1}\int_0^1 \frac{du}{1-|x|u} = -|x|^n \int_1^{1-|x|}\frac{dz}{z} =$$

$$= |x|^n \ln|z|\Big|_{1-|x|}^{1} = |x|^n \ln\frac{1}{1-|x|}.$$

Так как $|x| < 1$, то $|x|^n \to 0$ $(n \to \infty)$ и, следовательно, $r_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$. Таким образом, справедливо разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad (x \in (-1,1)).$$

Ряд справа имеет радиус сходимости $R = 1$, поэтому при $|x| > 1$ остаток $r_n(x)$ формулы Маклорена оценивать не нужно.

Рассмотрим полученный ряд на концах интервала сходимости. При $x = -1$ ряд расходится. Если же $x = 1$, то получаем ряд лейбницевского типа, т. е. сходящийся. Исследуем остаток формулы Маклорена. Имеем

$$r_n(1) = (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1+u)^{n+1}}\,du,$$

$$|r_n(1)| \le \int_0^1 (1-u)^n\,du = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Таким образом, $r_n(1) \to 0$ при $n \to \infty$ и, значит, разложение

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

справедливо для $x \in (-1, 1]$. В частности, отсюда следует равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \equiv 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.$$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$**.** При $\alpha \in \{0, 1, \dots\}$ функция f является многочленом и поэтому мы опускаем этот тривиальный случай. Пусть $\alpha \notin \{0, 1, \dots\}$. Формула Маклорена имеет вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x) \equiv$$

$$\equiv 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + r_n(x).$$

Имеем

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Нетрудно показать, что $f^{(n)}(x)$ не являются ограниченными в совокупности ни при каком значении x. Поэтому для разложения данной функции в ряд Маклорена достаточное условие разложимости функции в ряд неприменимо. Как и в предыдущем примере, будем находить те значения x, при которых $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Представим остаток $r_n(x)$ в интегральной форме

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = A_n \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1}\,dt,$$

где $A_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!}$. В результате замены $t = xu$ получим

$$r_n(x) = A_n x^{n+1} \int_0^1 (1-u)^n (1+xu)^{\alpha-n-1}\,du.$$

Пусть $|x| < 1$. Покажем, что $A_n x^{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, а интеграл ограничен. Выберем натуральное число $m_0 \geq |\alpha|$. Тогда для $n \geq m_0$ будем иметь

$$|A_n| = \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!} \leq \frac{m_0\,(m_0+1)\dots(m_0+n)}{n!} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\dots n(n+1)\dots(m_0+n)}{(m_0-1)!\cdot n!} \leq$$

$$\leq \frac{(m_0+n)!}{n!} = (n+1)(n+2)\dots(n+m_0) \leq (2n)^{m_0},$$

откуда следует неравенство

$$|A_n|\cdot|x|^{n+1} \leq (2n)^{m_0}|x|^{n+1} = 2^{m_0}|x|\,(n^{m_0}|x|^n) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(При этом было использовано известное равенство $\lim_{n\to\infty} n^k q^n = 0$, где $k \in \mathbb{N},\ |q| < 1$.) Докажем теперь ограниченность интеграла

$$\int_0^1 (1-u)^n (1+xu)^{\alpha-n-1}\,du, \tag{17.17}$$

где $|x| < 1$. Из неравенства $1 + xu \geq 1 - u \ \ (|x| < 1)$ следует, что

$$(1-u)^n (1+xu)^{\alpha-n-1} \leq (1+xu)^{\alpha-1}.$$

При фиксированном x функция $\varphi(u) = (1+xu)^{\alpha-1} \ \ (u \in [0,1])$ непрерывна. Отсюда следует ограниченность интеграла (17.17).

Окончательно получаем, что при $|x| < 1$ остаток $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ и, следовательно, справедливо равенство

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots \equiv$$

$$\equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

где $|x| < 1$.

Ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

называется биномиальным рядом. Радиус сходимости биномиального ряда $R = 1$. В самом деле, раньше мы показывали, что радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ может быть вычислен по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

если предел справа существует. Для нашего ряда имеем

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)|}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)|} =$$

$$= \frac{n+1}{|\alpha-n|} \to 1 \quad (n\to\infty).$$

Вопрос о сходимости полученного ряда на концах интервала сходимости, т. е. в точках $x = -1$ и $x = 1$, рассматривать не будем.

Пример 1. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Применяя разложение функции $(1+x)^\alpha$ при $\alpha = -1$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n,$$

где $|x| < 1$. Это – сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = -x$ с $|q| < 1$.

Пример 2. Разложить по степеням $x+1$ функцию $f(x) = \frac{1}{x(3x+1)}$.

Полагаем $x+1=t$. Тогда функцию $f(x)=f(t-1)=\frac{1}{(t-1)(3t-2)}=\varphi(t)$ достаточно разложить по степеням t. Раскладывая с неопределенными коэффициентами и вычисляя их, находим

$$\varphi(t)=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{3t-2}=\frac{1}{t-1}-\frac{3}{3t-2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{2}t}-\frac{1}{1-t}=$$

$$=\frac{3}{2}\left(1+\frac{3}{2}t+\left(\frac{3}{2}t\right)^2+\left(\frac{3}{2}t\right)^3+\dots\right)-\left(1+t+t^2+t^3+\dots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right]t^n.$$

Первое разложение справедливо при $\left|\frac{3}{2}t\right|<1$, т. е. при $|t|<\frac{2}{3}$, а второе – при $|t|<1$. Поэтому оба разложения справедливы при $|t|<\frac{2}{3}$. Окончательно, заменяя t на $x+1$, получим

$$\frac{1}{x(3x+1)}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right](x+1)^n,$$

где $|x+1|<\frac{2}{3}$, т. е. $-\frac{5}{3}<x<-\frac{1}{3}$.

Пример 3. Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x)=\operatorname{arctg}x$.

Имеем

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\dots\equiv\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

где $|x|<1$. Так как в интервале сходимости степенной ряд допускает почленное интегрирование, то получаем

$$f(x)=\operatorname{arctg}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\,dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\equiv x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots,$$

где $|x|<1$.

Упражнение. Разложите в ряды Маклорена гиперболические функции $\operatorname{sh}x$ и $\operatorname{ch}x$. Сравните полученные разложения с разложениями тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$.

18. Несобственные интегралы

18.1 Определение несобственных интегралов I и II рода

18.1.1 Несобственные интегралы I рода (интегралы по неограниченным промежуткам)

Пусть функция f задана на промежутке $[a, +\infty)$, где $a \in \mathbb{R}$, и интегрируема по Риману на каждом отрезке $[a, \xi]$, где $a < \xi < +\infty$. Выражение $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называют несобственным интегралом I рода (или I типа). Если существует $\lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} f(x)\,dx$, то этот несобственный интеграл называют сходящимся, а его значение полагают равным

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} f(x)\,dx.$$

Если же не существует конечного предела, то несобственный интеграл называют расходящимся.

Аналогично определяется несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\eta \to -\infty} \int_{\eta}^{a} f(x)\,dx.$$

Пусть теперь функция f задана на всей действительной прямой и интегрируема по Риману на любом отрезке $[\eta, \xi]$, где $-\infty < \eta < \xi < +\infty$. Если существует конечный двойной предел

$$\lim_{\substack{\xi \to +\infty \\ \eta \to -\infty}} \int_{\eta}^{\xi} f(x)\,dx,$$

то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется сходящимся, а его значение полагают равным

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\xi \to +\infty \\ \eta \to -\infty}} \int_{\eta}^{\xi} f(x)\,dx.$$

В противном случае несобственный интеграл называется расходящимся.

Утверждение. *Сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ равносильна тому, что сходятся оба интеграла $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$, причем имеет место равенство*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{18.1}$$

где a – произвольное действительное число.

Доказательство. Пусть при некотором $a \in \mathbb{R}$ интегралы $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ сходятся. Тогда для $-\infty < \eta < a < \xi < +\infty$ будем иметь

$$\int_{\eta}^{\xi} f(x)\,dx = \int_{\eta}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\xi} f(x)\,dx.$$

Отсюда, переходя к пределам при $\xi \to +\infty$ и $\eta \to -\infty$, получаем

$$\lim_{\substack{\xi \to +\infty \\ \eta \to -\infty}} \int_{\eta}^{\xi} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\xi \to +\infty \\ \eta \to -\infty}} \int_{\eta}^{a} f(x)\,dx + \lim_{\substack{\xi \to +\infty \\ \eta \to -\infty}} \int_{a}^{\xi} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и для него справедливо равенство (18.1).

Для доказательства обратного утверждения зафиксируем произвольное $a \in \mathbb{R}$ и предположим, что существует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\xi \to +\infty \\ \eta \to -\infty}} \int_{\eta}^{\xi} f(x)\,dx.$$

Тогда, в силу критерия Коши существования двойного предела, отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое A, что для любых $\xi', \xi'' > A$

и для любых $\eta', \eta'' < -A$ справедливо неравенство

$$\left|\int_{\eta'}^{\xi'} f(x)\,dx - \int_{\eta''}^{\xi''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такое A. Можем считать, что $A > |a|$. Выберем $\eta = \eta' = \eta'' < -A$ и $\xi', \xi'' > A$. Тогда получим

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{\eta}^{\xi'} f(x)\,dx - \int_{\eta}^{\xi''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

т. е. выполнено условие критерия Коши существования предела

$$\lim_{\xi\to+\infty} \int_a^{\xi} f(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Аналогично получаем, что и интеграл $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ также сходится. Имеем

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\eta\to-\infty} \int_{\eta}^{a} f(x)\,dx + \lim_{\xi\to+\infty} \int_a^{\xi} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{\eta\,\to\,-\infty\\ \xi\,\to\,+\infty}} \left(\int_{\eta}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\xi} f(x)\,dx\right) = \lim_{\substack{\eta\,\to\,-\infty\\ \xi\,\to\,+\infty}} \int_{\eta}^{\xi} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Последний предел существует в силу условия, а выражение справа не зависит от a. Тем самым доказано (18.1) для любого $a \in \mathbb{R}$. $\square$

Доказанное утверждение показывает, что для изучения трех видов определенных выше несобственных интегралов по неограниченным промежуткам достаточно изучить лишь один из них. Поэтому будем рассматривать лишь интегралы вида $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

В определении интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ существует аналогия с определением суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Именно, аналогом $\int_a^{\xi} f(x)\,dx$ служит частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^{n} a_k$. Сходимость интеграла определяется как существование предела $\lim_{\xi\to+\infty} \int_a^{\xi} f(x)\,dx$; аналогично, сходимость ряда определяется как существование предела $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$. Однако эта аналогия неполная. Так, из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует, что

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, но из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ не следует, что функция $f(x)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$, даже если функция f неотрицательна. Действительно, пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \in [0,+\infty) \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда для любого $\xi > 1$ интеграл $\int_1^{\xi} f(x)\,dx = 0$ и, следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и равен нулю. Однако же функция $f(x)$ не стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Вместе с тем для монотонной функции f на $[1,+\infty)$ сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ равносильны. Это утверждает интегральный признак сходимости рядов.

Пример 1. Вычислим

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi\to+\infty} \int_0^{\xi} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\xi} = \lim_{\xi\to+\infty} \operatorname{arctg} \xi = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ расходится. В самом деле,

$$\int_0^{\xi} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\xi} = 1 - \cos \xi$$

не имеет предела при $\xi \to +\infty$.

Пример 3. Во многих приложениях важным является $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$. Имеем

$$\int_1^{\xi} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^{\xi}, & \alpha \neq 1, \\ \ln x\big|_1^{\xi}, & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(\xi^{1-\alpha} - 1\right), & \alpha \neq 1, \\ \ln \xi, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Если $\alpha > 1$, то $\xi^{1-\alpha} \to 0$ $(\xi \to +\infty)$, и поэтому этот интеграл сходится и

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Если же $\alpha \leq 1$, то $\int_1^{\xi} \frac{dx}{x^{\alpha}} \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$, и данный интеграл расходится. Окончательно

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1} \quad (\alpha > 1),$$

а при $\alpha \leq 1$ интеграл слева расходится.

18.1.2 Несобственные интегралы II рода (интегралы от неограниченных функций)

Ранее нами было установлено, что интегрируемая по Риману на отрезке функция является ограниченной на этом отрезке. Сейчас мы хотим распространить понятие интеграла для некоторых классов неограниченных функций.

Пусть функция f задана на полуинтервале $[a,b)$, где $-\infty < a < b < +\infty$, и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,\xi]$, где $a < \xi < b$. Если существует конечный предел $\lim_{\xi\to b-0}\int_a^\xi f(x)\,dx$, то несобственный интеграл II рода (или II типа) $\int_a^b f(x)\,dx$ называют сходящимся и полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi\to b-0}\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

В противном случае несобственный интеграл называют расходящимся.

Замечание 1. В данном определении естественно предполагать, что функция f неограничена в любой левой полуокрестности точки b. Действительно, если функция f ограничена на $[a,b)$ и интегрируема на каждом отрезке $[a,\xi]$ при любом $\xi < b$, то, используя критерий интегрируемости функции в смысле Римана в терминах колебаний, легко можно показать, что функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ (в самой точке b функцию можно доопределить произвольным образом и это не влияет ни на свойство функции быть интегрируемой, ни на величину интеграла Римана $\int_a^b f(x)\,dx$).

Замечание 2. Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то, как было установлено ранее, интеграл с переменным верхним пределом $\varphi(\xi)=\int_a^\xi f(x)\,dx$ является непрерывной на $[a,b]$ функцией. В частности, существует $\lim_{\xi\to b-0}\varphi(\xi) = \int_a^b f(x)\,dx$. Это означает, что для интегрируемой в смысле Римана функции интеграл в несобственном смысле также существует и их значения совпадают.

Если функция f неограничена в любой левой полуокрестности точки b, то эту точку называют особой точкой и говорят, что в точке b функция имеет особенность. Иногда это обозначают так: $\int_a^{(b)} f(x)\,dx$.

Аналогично определяется $\int_{(a)}^b f(x)\,dx$ с особенностью в точке a. Именно, полагаем

$$\int_{(a)}^b f(x)\,dx \equiv \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to a+0}\int_\eta^b f(x)\,dx,$$

если предел справа существует. В этом случае интеграл называют сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Пример 1. У интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ имеется особенность в точке $x=1$. Имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\xi\to 1-0}\int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\xi\to 1-0} \arcsin x\Big|_0^\xi = \lim_{\xi\to 1-0}\arcsin\xi = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Как и в приведенном выше примере 3, следующий пример имеет много важных приложений. Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, где $\alpha>0$. Он имеет особенность в точке $x=0$. При $\alpha\neq 1$ имеем

$$\int_\eta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_\eta^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\eta^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

а если $\alpha=1$, то

$$\int_\eta^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_\eta^1 = \ln\frac{1}{\eta}.$$

Если $\alpha<1$, то существует

$$\lim_{\eta\to 0+}\int_\eta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Если же $\alpha\geq 1$, то предел $\lim_{\eta\to 0+}\int_\eta^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ не существует. Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \quad (\alpha<1)$$

и интеграл расходится при $\alpha\geq 1$.

Интеграл с несколькими особенностями определяется как сумма интегралов по таким промежуткам, на каждом из которых имеется лишь одна особенность. При этом интеграл называют сходящимся, если сходятся все интегралы указанной суммы. Если хотя бы один из них расходится, то и исходный интеграл называют расходящимся.

Пример. Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x-1}\sqrt[4]{x-2}}$ определяется как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x-1}\sqrt[4]{x-2}} = \int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{0} + \int_{0}^{b} + \int_{b}^{1} + \int_{1}^{c} + \int_{c}^{2} + \int_{2}^{d} + \int_{d}^{+\infty},$$

где $-\infty < a < 0 < b < 1 < c < 2 < d < +\infty$.

18.2 Простейшие свойства несобственных интегралов

Будем рассматривать функцию f, заданную на $[a, b)$, где b – конечное или бесконечное, и изучать свойства интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi\to b,\ \xi<b} \int_a^{\xi} f(x)\,dx.$$

Тем самым охватываем свойства интегралов как I, так и II рода.

1. Аддитивность. *Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $c \in (a, b)$ сходится интеграл $\int_c^b f(x)\,dx$. При этом справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{18.2}$$

Доказательство следует из определения, т. к. при $c < \xi < b$ имеем

$$\int_a^{\xi} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{\xi} f(x)\,dx.$$

Переходя к пределу при $\xi \to b$ $(\xi < b)$, получаем требуемое свойство. $\square$

Замечание. Из равенства (18.2) вытекает, что у сходящегося интеграла его "остаток" $\int_c^b f(x)\,dx$ стремится к нулю при $c \to b$. Действительно, если в (18.2) устремить c к b, то первое слагаемое справа стремится к $\int_a^b f(x)\,dx$, т. е. $\int_c^b f(x)\,dx \to 0$ при $c \to b$ $(c < b)$.

2. Линейность. *Пусть функции f и g интегрируемы в несобственном смысле на $[a, b)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a, b)$ и*

$$\int_a^b [\alpha f + \beta g](x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx. \tag{18.3}$$

Доказательство следует из линейности собственного интеграла Римана. Действительно, для $\xi < b$ имеем

$$\int_a^\xi [\alpha f + \beta g](x)\,dx = \alpha \int_a^\xi f(x)\,dx + \beta \int_a^\xi g(x)\,dx$$

и, переходя к пределу при $\xi \to b$ $(\xi < b)$ (пределы каждого слагаемого справа существуют по условию), получаем (18.3). $\square$

3. Формула Ньютона – Лейбница. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b)$, где $-\infty < a < b \le +\infty$ и F – ее первообразная на $[a, b)$. Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится в том и только в том случае, если существует конечный предел $\lim_{x\to b,\ x<b} F(x)$; при этом*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b,$$

где $F(x)\big|_a^b$ понимается в следующем смысле:

$$F(x)\Big|_a^b = \lim_{x\to b,\ x<b} (F(x) - F(a)) = F(b-0) - F(a).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что первообразная F у непрерывной функции f существует в силу основной теоремы интегрального исчисления. В частности, одна из первообразных – это интеграл с переменным верхним пределом $\int_a^x f(t)\,dt$, где $a \le x < b$. Далее, по формуле Ньютона – Лейбница, $\int_a^\xi f(x)\,dx = F(\xi) - F(a)$, где $a \le \xi < b$. Существование предела левой части при $\xi \to b$ $(\xi < b)$ равносильно существованию предела правой части. $\square$

4. Интегрирование неравенств. *Пусть функции f и g интегрируемы в несобственном смысле на $[a,b)$ и $f(x) \le g(x)$ при всех $a \le x < b$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство сразу следует из соответствующего свойства для собственных интегралов Римана, в силу которого для $a \le \xi < b$ имеем

$$\int_a^\xi f(x)\,dx \le \int_a^\xi g(x)\,dx,$$

и остается перейти к пределу при $\xi \to b$ $(\xi < b)$. $\square$

5. Интегрирование по частям. *Пусть функции u и v непрерывно дифференцируемы на $[a,b)$. Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx, \tag{18.4}$$

где $u(x)v(x)\big|_a^b$ понимается как

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \lim_{\xi\to b,\ \xi<b} \left[u(\xi)v(\xi) - u(a)v(a)\right].$$

Доказательство. Запишем обычную формулу интегрирования по частям на отрезке $[a,\xi]$ и устремим ξ к b. Следует заметить, что при этом будут иметь место три предельных перехода. Их следует понимать в том смысле, что если любые два из трех пределов существуют, то существует и третий предел и имеет место равенство (18.4). $\square$

Пример 1. Вычислим

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,dx = -x\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx = -\,\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{+\infty} = 1.$$

Пример 2 (интеграл Эйлера). Так называется интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = x\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx.$$

Интеграл справа существует как собственный интеграл Римана. При этом мы воспользовались тем, что $\lim_{x\to 0+} x\ln\sin x = 0$. Это легко установить по правилу Лопиталя. Таким образом, мы показали, что интеграл Эйлера сходится. Его значение будет вычислено позже.

6. Замена переменной. *Пусть функция f непрерывна на $[a,b)$, а функция φ – непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta)$, где $-\infty < \alpha < \beta \le +\infty$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t\to\beta,\ t<\beta}\varphi(t) = b$, $\varphi(t) \in [a,b)$ при всех $t \in [\alpha,\beta)$. Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \tag{18.5}$$

в предположении, что один из этих интегралов существует, и это влечет существование другого интеграла.

Доказательство. Пусть существует интеграл справа в (18.5). Для $a \le \xi < b$ обозначим через $\tau_\xi = \sup\{\tau \in [\alpha,\beta) :\ \varphi(\tau) = \xi\}$. Тогда, по теореме о замене переменной в собственном интеграле Римана,

$$\int_a^\xi f(x)\,dx = \int_\alpha^{\tau_\xi} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{18.6}$$

Если $\xi \to b$, то, как легко видеть, $\tau_\xi \to \beta$ и, по условию, правая часть в (18.6) имеет конечный предел, равный $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. Отсюда следует, что существует и предел слева в (18.6) при $\xi \to b$, т. е. имеет место равенство (18.5) в предположении, что существует интеграл в правой части.

Предположим теперь, что существует интеграл слева в (18.5). Выберем $\alpha \le \tau < \beta$. Тогда, по теореме о замене переменной в собственном интеграле Римана,

$$\int_\alpha^\tau f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_a^{\varphi(\tau)} f(x)\,dx. \tag{18.7}$$

Если теперь $\tau \to \beta$, то, по условию, $\varphi(\tau) \to b$ и поэтому правая часть в (18.7) стремится к конечному пределу. Следовательно, выражение в левой части (18.7) также имеет конечный предел при $\tau \to \beta$. $\square$

Пример 1 (интеграл Эйлера). Обозначим интеграл Эйлера

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx.$$

Выше мы показали, что этот интеграл сходится. В результате замены $x = 2t$ получим

$$I = 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin 2t\,dt = 2\int_0^{\pi/4} \ln(2\sin t\cos t)\,dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} [\ln 2 + \ln\sin t + \ln\cos t]\,dt =$$

$$= 2\ln 2\cdot\frac{\pi}{4} + 2\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt + 2\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt.$$

Имеем

$$\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt = \int_0^{\pi/4}\ln\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\,dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin z\,dz.$$

Поэтому

$$I = 2\ln 2\cdot\frac{\pi}{4} + 2\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin t\,dt = 2\ln 2\cdot\frac{\pi}{4} + 2I.$$

Отсюда получаем, что $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Пример 2. Вычислим

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}. \tag{18.8}$$

Замена $x = \frac{1}{t}$ приводит к интегралу

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{1+t^4}. \tag{18.9}$$

Складывая равенства (18.8) и (18.9), получаем

$$2I = \int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt.$$

В интеграле справа сделаем замену $z = t - \frac{1}{t}$ и получим

$$2I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{2+z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

18.3 Сходимость несобственных интегралов

18.3.1 Интегралы от неотрицательных функций

Теорема 1. *Пусть функция f неотрицательна на $[a, b)$ и интегрируема по Риману на каждом отрезке, содержащемся в $[a, b)$. Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi(\xi) \equiv \int_a^\xi f(x)\,dx$ была ограниченной на $[a, b)$.*

Доказательство. Эта теорема сразу следует из того, что функция $\Phi(\xi)$ возрастает на $[a, b)$ (монотонность функции Φ вытекает из того, что $f(x) \geq 0$). Действительно, $\lim_{\xi \to b,\ \xi < b} \Phi(\xi)$ существует в том и только в том случае, когда Φ ограничена. $\square$

Теорема 2 (признак сравнения). *Пусть функции f и g неотрицательны на $[a, b)$ и интегрируемы на каждом отрезке, содержащемся в $[a, b)$. Предположим, что $f(x) \leq g(x)$ для любого $x \in [a, b)$. Тогда из сходимости интеграла*

$$\int_a^b g(x)\,dx \tag{18.10}$$

вытекает сходимость интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{18.11}$$

а из расходимости интеграла (18.11) *следует расходимость интеграла* (18.10).

Доказательство сразу следует из теоремы 1. Действительно, пусть $\Phi(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx$, $G(\xi) = \int_a^\xi g(x)\,dx$. Тогда ясно, что $\Phi(\xi) \leq G(\xi)$ при всех $a \leq \xi < b$. Если сходится интеграл (18.10), то $G(\xi)$ ограничена и, следовательно, $\Phi(\xi)$ также ограничена, т. е. сходится интеграл (18.11). Если расходится интеграл (18.11), то $\Phi(\xi)$ неограничена и, следовательно, $G(\xi)$ также неограничена, т. е. (18.10) расходится. $\square$

Следствие. *Пусть неотрицательные на $[a, b)$ функции f и g интегрируемы на любом отрезке, содержащемся в $[a, b)$. Предположим, что существует*

$$\lim_{x \to b,\ x < b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda,$$

где $0 \le \lambda \le +\infty$. *Тогда*

a) если $\lambda = 0$, *то из сходимости интеграла* (18.10) *следует сходимость интеграла* (18.11), *а из расходимости интеграла* (18.11) *следует расходимость интеграла* (18.10);

b) если $0 < \lambda < +\infty$, *то интегралы* (18.10) *и* (18.11) *сходятся или расходятся одновременно;*

c) если $\lambda = +\infty$, *то из сходимости интеграла* (18.11) *следует сходимость интеграла* (18.10), *а из расходимости интеграла* (18.10) *следует расходимость интеграла* (18.11).

Доказательство. Достаточно учесть, что сходимость интегралов (18.10) и (18.11) эквивалентна сходимости интегралов $\int_c^b g(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$, соответственно, где произвольное $a \le c < b$. Дальнейшее доказательство этого следствия совершенно аналогично тому, как был доказан признак сравнения для рядов в предельной форме. $\square$

Пример. Найти совокупность всех значений α, при которых сходится интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{|\ln x|^\alpha}$. При $\alpha = 0$ – это собственный интеграл Римана. Если $\alpha > 0$, то интеграл имеет особенность в точке $x = 1$, а при $\alpha < 0$ – особенность в точке $x = 0$.

Пусть $\alpha > 0$. Учитывая, что $\ln x = \ln(1 + x - 1) \sim x - 1$ при $x \to 1 - 0$, имеем $\frac{1}{|\ln x|^\alpha} \sim \frac{1}{(1-x)^\alpha}$. Поскольку $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при остальных α, то и исходный интеграл сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \ge 1$.

Пусть теперь $\alpha < 0$. Обозначим $\beta = -\alpha > 0$. Тогда данный интеграл принимает такой вид: $\int_0^1 |\ln x|^\beta\,dx$. Воспользуемся тем, что $|\ln x|^\beta = \overline{o}\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right)$ при $x \to 0+$ для любого $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда из сходимости интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, в силу признака сравнения, вытекает сходимость интеграла $\int_0^1 |\ln x|^\beta\,dx$ при любом $\beta > 0$.

Окончательно получаем, что исходный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{|\ln x|^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \ge 1$.

18.3.2 Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимость

Теорема (критерий Коши сходимости несобственных интегралов). *Пусть функция f задана на $[a,b)$, где $-\infty < a < b \leq +\infty$, и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,\xi] \subset [a,b)$. Для того чтобы сходился несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\eta \in [a,b)$, что для любых $\xi,\xi' \in [a,b)$, таких, что $\xi,\xi' > \eta$, выполнялось неравенство*

$$\left|\int_{\xi}^{\xi'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство мгновенно вытекает из того, что высказанное условие необходимо и достаточно для существования предела функции $\Phi(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)\,dx$ при $\xi \to b$ $(\xi < b)$. $\square$

Пусть функция f задана на $[a,b)$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,\xi] \subset [a,b)$. Тогда этим же свойством обладает и функция $|f|$. Несобственный интеграл Римана $\int_a^b f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Теорема. *Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится абсолютно, то он сходится, и при этом справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{18.12}$$

Доказательство. Сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ вытекает из критерия Коши и из неравенства

$$\left|\int_{\xi}^{\xi'} f(x)\,dx\right| \leq \int_{\xi}^{\xi'} |f(x)|\,dx \quad (\xi < \xi').$$

Неравенство (18.12) следует из неравенства

$$\left|\int_a^{\xi} f(x)\,dx\right| \leq \int_a^{\xi} |f(x)|\,dx,$$

если в нем перейти к пределу при $\xi \to b$ $(\xi < b)$. $\square$

Определение. Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ расходится, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится условно.

Пример. Рассмотрим интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Это – несобственный интеграл I рода. Подынтегральная функция ограничена в окрестности нуля и непрерывна на $(0,+\infty)$, а значит, интегрируема на любом отрезке $[0,\xi]$ в смысле Римана. Поэтому данный интеграл сходится или расходится вместе с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Применим к последнему интегралу формулу интегрирования по частям и получим

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = \frac{1}{x} & du = -\frac{1}{x^2}\,dx \\ & \\ dv = \sin x\,dx & v = -\cos x \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{x}\cos x\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Интеграл справа сходится абсолютно, т. к. $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, так что, в силу признака сравнения, абсолютно сходится и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$. Таким образом, интеграл Дирихле сходится. Покажем, что он сходится условно. Для этого нужно показать, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ расходится. Это мы сделаем двумя способами.

I. Из неравенства $|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ следует, что $\frac{|\sin x|}{x} \ge \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$. Точно так же, как была доказана сходимость интеграла Дирихле, можно показать, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\,dx$ сходится. Далее, раньше мы показывали, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$ расходится. Следовательно, расходится и интеграл $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}\right)\,dx$. В силу признака сравнения, расходится также интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$.

II. Достаточно показать, что расходится интеграл $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$. Оценим

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Поэтому

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Справа мы получили частичные суммы гармонического ряда. Поскольку гармонический ряд расходится, то его частичные суммы стремятся к $+\infty$. Следовательно, и

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

18.3.3 Признаки Абеля и Дирихле

Теорема (признак Абеля сходимости несобственных интегралов). *Пусть функция f непрерывна на $[a,b)$ и несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится. Пусть, далее, непрерывно дифференцируемая функция g монотонна и ограничена на $[a,b)$. Тогда сходится несобственный интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$.*

Доказательство. Применим формулу интегрирования по частям

$$\int_a^{\xi} f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^{\xi} - \int_a^{\xi} F(x)g'(x)\,dx,$$

где $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ – первообразная функции f. Так как $F(\xi)$ имеет предел при $\xi \to b$ $(\xi < b)$ (в силу сходимости интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$) и $g(\xi)$ имеет предел при $\xi \to b$ $(\xi < b)$ (как монотонная и ограниченная функция), то первое слагаемое справа имеет предел при $\xi \to b$ $(\xi < b)$. Покажем, что интеграл $\int_a^b F(x)g'(x)\,dx$ сходится абсолютно. Так как функция F непрерывна на $[a,b)$ и существует $\lim_{x\to b} F(x)$, то функция F ограничена на $[a,b)$, т. е. существует такое M, что $|F(x)| \le M$ при всех $x \in [a,b)$. Так как функция g монотонна, то функция g' не меняет знака на $[a,b)$. Поэтому

$$\int_a^b |F(x)|\cdot|g'(x)|\,dx \le M\int_a^b |g'(x)|\,dx = M\left|\int_a^b g'(x)\,dx\right| =$$

$$= M \lim_{\xi\to b,\ \xi<b} |g(\xi) - g(a)|,$$

а это и означает, что интеграл $\int_a^b F(x)g'(x)\,dx$ сходится абсолютно. Итак, в силу формулы интегрирования по частям, интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится. □

Теорема (признак Дирихле сходимости несобственных интегралов). *Пусть непрерывная на $[a, b)$ функция f такова, что*

$$\left| \int_a^\xi f(x)\,dx \right| \le M$$

при любом $a \le \xi < b$. Пусть, далее, непрерывно дифференцируемая функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to b$ $(x < b)$. Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Доказательство. Применим формулу интегрирования по частям

$$\int_a^\xi f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^\xi - \int_a^\xi F(x)g'(x)\,dx.$$

Первое слагаемое справа стремится к конечному пределу при $\xi \to b$ $(\xi < b)$ (так как $F(\xi) \equiv \int_a^\xi f(x)\,dx$ ограничена, а $g(\xi) \to 0$ при $\xi \to b$ $(\xi < b)$). Покажем, что интеграл справа сходится абсолютно. Имеем

$$\int_a^\xi |F(x)| \cdot |g'(x)|\,dx \le M \int_a^\xi |g'(x)|\,dx = M \left| \int_a^\xi g'(x)\,dx \right| =$$

$$= M\,|g(\xi) - g(a)| \le 2M\,|g(a)|\,.$$

Отсюда следует абсолютная сходимость интеграла $\int_a^b F(x)g'(x)\,dx$. В силу формулы интегрирования по частям, получаем, что сходится также и интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$. $\square$

Замечание. Можно показать, что признак Абеля следует из признака Дирихле.

Пример. Исследуем на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$.

Если $\alpha > 1$, то этот интеграл сходится абсолютно. Это сразу следует из неравенства $\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}$ и из признака сравнения. Если же $0 < \alpha \le 1$, то данный интеграл сходится условно. Действительно, его сходимость можно установить по признаку Дирихле, полагая $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Тогда

$$\left| \int_1^\xi f(x)\,dx \right| = \left| \int_1^\xi \sin x\,dx \right| \le 2,$$

а функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Расходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\, dx$ при $\alpha = 1$ была доказана выше. Если же $0 < \alpha < 1$, то расходимость этого интеграла следует из неравенства $\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \geq \frac{|\sin x|}{x}$ $(x \geq 1)$.

Упражнение. Докажите, что при $\alpha \leq 0$ интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ расходится.

Пример. Чтобы исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \sin \frac{1}{x}\, dx$ $(\alpha > 0)$, достаточно выполнить замену $t = \frac{1}{x}$ и придем к интегралу $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t\, dt}{t^{2-\alpha}}$, который исследован нами в предыдущем примере.

18.3.4 Связь несобственных интегралов с рядами

Пусть функция f задана на $[a, b)$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \xi] \subset [a, b)$. По определению, сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\, dx$ означает существование предела у функции $F(\xi) \equiv \int_a^\xi f(x)\, dx$ при $\xi \to b$ $(\xi < b)$. Далее, в силу определения предела функции $F(\xi)$ при $\xi \to b$ $(\xi < b)$ по Гейне, это означает, что для любой последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$, стремящейся к b $(\xi_n < b,\ n = 1, 2, \dots)$, последовательность $\{F(\xi_n)\}$ сходится. Обозначим $\xi_0 = a$. Тогда частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^\infty [F(\xi_n) - F(\xi_{n-1})]$ равна $S_n = \sum_{k=1}^n [F(\xi_k) - F(\xi_{k-1})] = F(\xi_n)$ и, следовательно, сходимость ряда $\sum_{n=1}^\infty [F(\xi_n) - F(\xi_{n-1})]$ эквивалентна сходимости последовательности $\{F(\xi_n)\}$. Поскольку $F(\xi_n) - F(\xi_{n-1}) = \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} f(x)\, dx$, то мы получаем следующее утверждение.

Теорема. *Для того чтобы сходился интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности чисел $\{\xi_n\}$, стремящейся к b $(\xi_n < b,\ \xi_0 = a)$, сходился ряд $\sum_{n=1}^\infty \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} f(x)\, dx$.*

19. Интегралы, зависящие от параметра

Интегралом, зависящим от параметра, называется интеграл вида

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx,$$

где y – параметр. Более простой случай – это интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$.

19.1 Собственные интегралы, зависящие от параметра

Будем рассматривать случай, когда функция $f(x,y)$ задана на прямоугольнике $[a,b;c,d]$.

19.1.1 Непрерывность по параметру

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Pi \equiv [a,b;c,d]$. Тогда интеграл $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ является непрерывной функцией от переменной y на $[c,d]$.*

Доказательство. Так как функция f непрерывна на Π, то для любого $y \in [c,d]$ функция $f(x,y)$ непрерывна по x на $[a,b]$ и, следовательно, интегрируема на $[a,b]$. Далее, из непрерывности f на замкнутом и ограниченном (а значит, компактном) прямоугольнике Π следует равномерная непрерывность функции f на Π. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь равномерной непрерывностью f, найдем такое $\delta > 0$, что из условий $|x' - x''| < \delta$, $|y' - y''| < \delta$ следует неравенство

$$|f(x',y') - f(x'',y'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Отсюда, в частности, следует, что для любого $x \in [a,b]$ и любых $y', y'' \in [c,d]$, таких, что $|y' - y''| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x,y') - f(x,y'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Поэтому

$$|I(y') - I(y'')| = \left| \int_a^b f(x, y')\, dx - \int_a^b f(x, y'')\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b [f(x, y') - f(x, y'')]\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y') - f(x, y'')|\, dx \leq \varepsilon,$$

если только $|y' - y''| < \delta$. Тем самым доказана равномерная непрерывность на $[c, d]$ интеграла $I(y)$. $\square$

19.1.2 Дифференцирование по параметру

Теорема 2. *Пусть функция f непрерывна на прямоугольнике $\Pi \equiv [a, b; c, d]$ и имеет на нем непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$. Тогда интеграл $I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ является непрерывно дифференцируемой функцией на $[c, d]$ и при этом*

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx \quad (y \in [c, d]).$$

Доказательство. Зафиксируем $y_0 \in [c, d]$ и выберем μ такое, что $y_0 + \mu \in [c, d]$. Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{I(y_0 + \mu) - I(y_0)}{\mu} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + \mu) - f(x, y_0)}{\mu}\, dx.$$

По формуле конечных приращений (теореме Лагранжа), для любого $x \in [a, b]$ существует $\theta \equiv \theta(x, \mu) \in (0, 1)$, такое, что

$$\frac{f(x, y_0 + \mu) - f(x, y_0)}{\mu} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta\mu).$$

Поэтому

$$\frac{I(y_0 + \mu) - I(y_0)}{\mu} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta\mu)\, dx,$$

где $\theta \in (0, 1)$.

Зададим $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$ на Π, существует $\delta > 0$, такое, что из условия $|y - y_0| < \delta$ для каждого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Тогда для $|\mu| < \delta$ получим

$$\left| \frac{I(y_0 + \mu) - I(y_0)}{\mu} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta\mu) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right] dx \right| \le$$

$$\le \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta\mu) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right| dx \le \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$I'(y_0) \equiv \lim_{\mu \to 0} \frac{I(y_0 + \mu) - I(y_0)}{\mu} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx,$$

т. е. функция $I(y)$ дифференцируема в точке y_0.

Непрерывность $I'(y)$ следует из предыдущей теоремы. В самом деле, по условию, $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна на Π и поэтому, в силу предыдущей теоремы,

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$$

непрерывна на $[c, d]$. $\square$

Пример. Вычислить интеграл $I_3(y) \equiv \int_0^a \frac{dx}{(x^2+y^2)^3}$, где $a, y > 0$.

Обозначим $I_1(y) = \int_0^a \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{a}{y}$. Тогда

$$I_1'(y) = -\frac{1}{y^2} \operatorname{arctg} \frac{a}{y} + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a^2}{y^2}} \cdot a \left(-\frac{1}{y^2} \right) = -\frac{1}{y^2} \operatorname{arctg} \frac{a}{y} - \frac{a}{y} \cdot \frac{1}{y^2 + a^2}.$$

С другой стороны, в силу теоремы о дифференцировании интеграла по параметру y, получаем

$$I_1'(y) = \int_0^a \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{x^2 + y^2}\, dx = \int_0^a -\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2y\, dx = -2y \int_0^a \frac{dx}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Отсюда следует, что

$$I_2(y) \equiv \int_0^a \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{2y} I_1'(y) = \frac{1}{2y^3}\operatorname{arctg}\frac{a}{y} + \frac{a}{2y^2}\cdot\frac{1}{y^2+a^2}.$$

Далее, применяя теорему о дифференцировании интеграла по параметру, имеем

$$I_2'(y) = \int_0^a \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx =$$

$$= \int_0^a \frac{-2}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2y\,dx = -4y\int_0^a \frac{dx}{(x^2+y^2)^3} = -4yI_3(y).$$

Отсюда получаем

$$I_3(y) = -\frac{1}{4y}I_2'(y) = -\frac{1}{4y}\left[-\frac{3}{2}\frac{1}{y^4}\operatorname{arctg}\frac{a}{y} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2y^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{a^2}{y^2}}\cdot a\left(-\frac{1}{y^2}\right) + \frac{a}{2}\cdot\frac{-2}{y^3}\cdot\frac{1}{y^2+a^2} + \frac{a}{2y^2}\cdot\frac{-1}{(y^2+a^2)^2}\cdot 2y\right].$$

Теорема 3. *Пусть функция f непрерывна на $\Pi \equiv [a,b;c,d]$. Тогда*

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx, \tag{19.1}$$

где $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$.

Замечание. Равенство (19.1) можно переписать в таком виде:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

В левой части этого равенства интегрирование по переменной y производится под знаком интеграла. Это равенство можно истолковать как формулу для перемены порядка интегрирования.

Доказательство теоремы 3. Существование $\int_c^d I(y)\,dy$ следует из непрерывности функции $I(y)$ (теорема 1). Поэтому нужно лишь доказать равенство (19.1).

Зададим разбиение отрезка $[c,d]$: $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$, выберем точки $\eta_k \in [y_{k-1}, y_k]$ и составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} I\left(\eta_k\right) \Delta y_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f\left(x, \eta_k\right)\, dx \right) \Delta y_k =$$

$$= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f\left(x, \eta_k\right) \Delta y_k \right) dx.$$

Теперь будем оценивать разность

$$\left| \sigma - \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f\left(x, \eta_k\right) \Delta y_k - \sum_{k=1}^{n} \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(x,y)\, dy \right) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left| f\left(x, \eta_k\right) - f(x,y) \right| dy \right) dx.$$

Пользуясь равномерной непрерывностью функции f на Π, по заданному $\varepsilon > 0$ найдем такое δ, что из условий $|x' - x''| < \delta$ и $|y' - y''| < \delta$ следует неравенство

$$\left| f\left(x', y'\right) - f\left(x'', y''\right) \right| < \frac{\varepsilon}{(b-a)(c-d)}.$$

Если теперь точки y_k $(k = 1, \ldots, n)$ выбрать так, чтобы диаметр разбиения был $\max |y_k - y_{k-1}| < \delta$, то получим что $|\eta_k - y| < \delta$ для $y \in [y_{k-1}, y_k]$. Поэтому для $y \in [y_{k-1}, y_k]$ получим

$$\left| f\left(x, \eta_k\right) - f(x,y) \right| < \frac{\varepsilon}{(b-a)(c-d)}.$$

Отсюда следует

$$\left| \sigma - \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)(c-d)} \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{y_{k-1}}^{y_k} dy \right) dx = \varepsilon.$$

Это означает, что предел интегральных сумм для интеграла $\int_c^d I(y)\, dy$ равен $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx$. $\square$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$, где $0<a<b$.

В этом интеграле нет особенностей, поскольку при $x\to 1-0$ подынтегральная функция стремится к конечному пределу. Имеем

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\,dy \quad (0<x<1).$$

Поэтому данный интеграл имеет вид

$$\int_0^1\left(\int_a^b x^y\,dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_0^1 x^y\,dx\right)dy=\int_a^b\left(\frac{1}{y+1}x^{y+1}\Big|_{x=0}^{x=1}\right)dy=$$

$$=\int_a^b\frac{dy}{y+1}=\ln(y+1)\Big|_a^b=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

19.1.3 Интегралы с пределами, зависящими от параметра

Теорема 4 (непрерывность по параметру). *Пусть функция f непрерывна на $\Pi\equiv[a,b;c,d]$, а функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывны на $[c,d]$, причем все их значения содержатся в отрезке $[a,b]$. Тогда функция*

$$I(y)\equiv\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y)\,dx$$

непрерывна на $[c,d]$.

Доказательство. Фиксируем $y_0\in[c,d]$. Тогда

$$I(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)}f(x,y)\,dx+\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)}f(x,y)\,dx+\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)}f(x,y)\,dx\equiv\sum_{k=1}^{3}I_k(y).$$

Интеграл $I_1(y)$ имеет фиксированные пределы интегрирования. Поэтому, в силу доказанной выше теоремы о непрерывности интеграла, зависящего от параметра (с фиксированными пределами), $I_1(y)$ непрерывный в точке y_0. Далее, из непрерывности f на Π следует ограниченность, т. е. существует такое M, что $|f(x,y)|\le M$ для всех $(x,y)\in\Pi$. Поэтому

$$|I_2(y)|\le M\,|\beta(y)-\beta(y_0)|\,,\quad |I_3(y)|\le M\,|\alpha(y)-\alpha(y_0)|\,.$$

При $y \to y_0$ правые части неравенств стремятся к нулю (в силу непрерывности функций $\alpha(y)$ и $\beta(y)$). Поэтому $I_2(y) \to 0$ и $I_3(y) \to 0$ при $y \to y_0$. Итак, при $y \to y_0$ имеем

$$I(y) = I_1(y) + I_2(y) + I_3(y) \to I_1(y_0) + 0 + 0 = I_1(y_0) = I(y_0). \quad \square$$

Замечание. В условии теоремы 4 функция f предполагается определенной на более широком множестве Π, чем это необходимо для определения функции $I(y)$. На самом деле функцию f достаточно предполагать непрерывной лишь на множестве $E \equiv \{(x, y): \ c \leq y \leq d, \ \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$. В этом случае утверждение теоремы 4 также остается в силе. Для его доказательства достаточно продолжить функцию f на $\Pi \setminus E$, полагая $f(x, y) = f(\alpha(y), y)$ при $y \in [c, d], \ a \leq x < \alpha(y)$ и $f(x, y) = f(\beta(y), y)$ при $y \in [c, d], \ \beta(y) < x \leq b$. Ясно, что при таком продолжении полученная функция будет непрерывной на Π, и останется применить доказанную теорему.

Теорема 5 (дифференцирование по параметру). *Пусть функция f непрерывна на $\Pi \equiv [a, b; c, d]$ и имеет на нем непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$. Пусть, далее, функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывно дифференцируемы на $[c, d]$ и таковы, что все их значения содержатся в $[a, b]$. Тогда функция*

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx$$

непрерывно дифференцируема на $[c, d]$, причем

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx + f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y).$$

Доказательство. Фиксируем $y_0 \in [c, d]$. Тогда

$$I(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\, dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx + \int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x, y)\, dx \equiv \sum_{k=1}^{3} I_k(y).$$

Согласно теореме о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, с постоянными пределами интегрирования, имеем

$$I_1'(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx \quad (c \le y \le d).$$

Найдем производную от $I_2(y)$ и $I_3(y)$. Для этого составим разностные отношения и учтем, что $I_2(y_0) = 0$. Тогда получим

$$\frac{I_2(y) - I_2(y_0)}{y - y_0} = \frac{I_2(y)}{y - y_0} = \frac{1}{y - y_0}\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx = \frac{\beta(y) - \beta(y_0)}{y - y_0} \cdot f(x_y, y),$$

где x_y – некоторая точка, лежащая между $\beta(y)$ и $\beta(y_0)$. Последнее равенство справедливо на основании первой теоремы о среднем (для определенного интеграла). Если $y \to y_0$, то, в силу непрерывности функции $\beta(y)$, $x_y \to \beta(y_0)$. Тогда, в силу непрерывности функции $f(x,y)$, при $y \to y_0$ имеем $f(x_y, y) \to f(\beta(y_0), y_0)$ и $\frac{\beta(y)-\beta(y_0)}{y-y_0} \to \beta'(y_0)$. Поэтому

$$I_2'(y_0) = \beta'(y_0) \cdot f(\beta(y_0), y_0).$$

Аналогично показываем, что $I_3'(y_0) = -\alpha'(y_0) \cdot f(\alpha(y_0), y_0)$.

Окончательно, имеем

$$I'(y_0) = I_1'(y_0) + I_2'(y_0) + I_3'(y_0) =$$

$$= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\,dx + f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0) - f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0).$$

Непрерывность производной $I'(y)$ следует из предыдущей теоремы. $\square$

19.2 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция $f(x,y)$ задана на $[a,b) \times Y$ и при каждом фиксированном $y \in Y$ и при любом $\xi \in [a,b)$ функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману по переменной x на отрезке $[a,\xi]$. Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится при любом $y \in Y$, то говорят, что этот несобственный интеграл сходится на множестве Y.

19.2.1 Равномерная сходимость

Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на множестве Y, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\xi_0 = \xi_0(\varepsilon) \in [a,b)$, что для всех $\xi > \xi_0$ и для любого $y \in Y$ справедливо неравенство

$$\left| \int_\xi^b f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Пример 1. Рассмотрим интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2}$. Этот несобственный интеграл сходится при любом значении $y \in \mathbb{R}$ (например, в силу признака сравнения, т. к. $0 \le \frac{1}{x^2+y^2} \le \frac{1}{x^2}$ при $1 \le x < +\infty,\ y \in \mathbb{R}$). Поэтому на множестве $\mathbb{R}$ он сходится. Исследуем его на равномерную сходимость. Из неравенства

$$\int_\xi^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2} \le \int_\xi^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\xi} \quad (y \in \mathbb{R},\ 1 \le \xi < +\infty)$$

следует, что данный интеграл сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\xi_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, такое, что для всех $y \in \mathbb{R}$ и для любого $\xi \ge \xi_0$ справедливо неравенство $\int_\xi^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2} < \varepsilon$.

Пример 2. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-xy}\,dx$. Этот интеграл сходится при $y = 0$. Если $y > 0$, то интеграл также сходится, в чем легко убедиться, пользуясь определением. Легко показать, что при $y < 0$ интеграл расходится. Таким образом, область сходимости данного интеграла является множество $Y = \{y :\ \ y \ge 0\}$. Исследуем этот интеграл на равномерную сходимость. Если $y = 0$, то $\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-xy}\,dx = 0$. Если $y > 0$, то

$$\int_\xi^{+\infty} y\mathrm{e}^{-xy}\,dx = \int_{\xi y}^{+\infty} \mathrm{e}^{-z}\,dz = \mathrm{e}^{-\xi y}.$$

Отсюда видно, что неравенство $\left|\int_\xi^{+\infty} y\mathrm{e}^{xy}\,dx\right| < \varepsilon$ не может быть выполненным сразу для всех $y \in Y = [0,+\infty)$ при фиксированном ξ, если только фиксированное $\varepsilon < 1$. Действительно, если $y \to 0+$, то $\mathrm{e}^{-\xi y} \to 1$. Таким образом, данный интеграл сходится на множестве Y неравномерно. Если же $Y_1 = [y_0,+\infty)$, где $y_0 > 0$, то на Y_1 интеграл сходится равномерно. В самом деле, на Y_1 остаток можно оценить так:

$$\int_{\xi}^{+\infty} y\mathrm{e}^{-xy}\,dx = \mathrm{e}^{-\xi y} \le \mathrm{e}^{-\xi y_0} \quad (y \in Y_1)\,.$$

Правая часть этого неравенства не зависит от y и стремится к нулю при $\xi \to +\infty$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\xi_0 = \frac{\ln 1/\varepsilon}{y_0}$, такое, что для любого $\xi \ge \xi_0$ и для любого $y \in Y_1$ справедливо неравенство $\int_{\xi}^{+\infty} y\mathrm{e}^{-xy}\,dx < \varepsilon$.

Пример 3. Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^y}$. При $y > 0$ данный интеграл несобственный, а сходится он при $y < 1$. Поэтому будем исследовать его на равномерную сходимость на множестве $Y = (0, 1)$. Рассмотрим остатки

$$\int_0^{\xi} \frac{dx}{x^y} = \frac{\xi^{1-y}}{1-y}.$$

Если ξ фиксировано, то неравенство $\left|\frac{\xi^{1-y}}{1-y}\right| < \varepsilon$ не может выполняться сразу для всех $y \in Y$, ибо при $y \to 1-0$ имеем $\frac{\xi^{1-y}}{1-y} \to +\infty$. Это означает, что на всем Y данный интеграл сходится неравномерно. Если же рассматривать данный интеграл на множестве $Y_1 = (0, 1-\delta]$, где $0 < \delta < 1$, то на Y_1 будет иметь место равномерная сходимость. В самом деле, имеем $\int_0^{\xi} \frac{dx}{x^y} \le \frac{\xi^{\delta}}{\delta}$ для всех $y \in Y_1$. В последнем неравенстве правая часть не зависит от y и стремится к нулю при $\xi \to 0+$. Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\xi_0 = (\delta\varepsilon)^{1/\delta}$, что для любого $\xi \in (0, \xi_0)$ и для любого $y \in Y_1$ справедливо неравенство $\int_0^{\xi} \frac{dx}{x^y} \le \varepsilon$. Это и означает, что на Y_1 интеграл сходится равномерно.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов). *Пусть функция $f(x, y)$ определена на $[a, b) \times Y$, где $-\infty < a < b \le +\infty$, и при каждом фиксированном $y \in Y$ интегрируема по Риману по переменной x на любом отрезке $[a, \xi] \subset [a, b)$. Для того чтобы несобственный интеграл*

$$\int_a^b f(x, y)\,dx \tag{19.2}$$

равномерно сходился на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие Коши, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существовало *такое* $\xi_0 \in [a, b)$, *что для всех* $\xi', \xi'' > \xi_0$, *таких, что* $\xi', \xi'' < b$, *и для любого* $y \in Y$ *выполнялось неравенство*

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon. \tag{19.3}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть интеграл (19.2) сходится равномерно на Y. Тогда, пользуясь определением, для заданного $\varepsilon > 0$ найдем такое ξ_0, что для любого $\xi > \xi_0$ справедливо неравенство

$$\left| \int_{\xi}^{b} f(x, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для $\xi', \xi'' \geq \xi_0$ получим

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x, y)\, dx \right| \leq \left| \int_{\xi'}^{b} f(x, y)\, dx \right| + \left| \int_{\xi''}^{b} f(x, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (y \in Y),$$

т. е. выполнено условие Коши.

Достаточность. Пусть выполнено условие Коши. Пусть $y \in Y$. Тогда выполнено условие Коши сходимости несобственного интеграла, т. е. несобственный интеграл $\int_a^b f(x, y)\, dx$ сходится при каждом фиксированном $y \in Y$. Докажем, что он сходится равномерно на Y. В неравенстве (19.3), сохраняя фиксированным ξ', устремим ξ'' к b ($\xi'' < b$). Получим, что

$$\left| \int_{\xi'}^{b} f(x, y)\, dx \right| \leq \varepsilon$$

для любого $\xi' \geq \xi_0$ и $y \in Y$. Это означает, что интеграл (19.2) сходится равномерно на Y. $\square$

Пример. Интеграл $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-yx^2}\, dx$, очевидно, сходится при любом $y > 0$. Если бы он сходился равномерно, то при любых фиксированных $\xi', \xi'' \geq \xi_0$ было бы выполнено неравенство

$$\int_{\xi'}^{\xi''} \mathrm{e}^{-yx^2}\, dx < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad y > 0. \tag{19.4}$$

Интеграл в левой части является непрерывной функцией переменной y (по теореме о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра). Поэтому

$$F(y) \equiv \int_{\xi'}^{\xi''} \mathrm{e}^{-yx^2}\, dx \to F(0) = \xi'' - \xi' \quad (y \to 0).$$

Значит, так как $F(y) < \varepsilon$, то и $F(0) = \lim_{y\to 0} F(y) \le \varepsilon$, т. е. $\xi'' - \xi' \le \varepsilon$. Но поскольку $\xi', \xi'' \in [\xi_0, +\infty)$ могут быть выбраны так, чтобы $\xi'' - \xi'$ было сколь угодно большим, то это означает, что (19.4) не может быть выполнено сразу для всех $\xi', \xi'' \in [\xi_0, +\infty)$. Таким образом, для данного интеграла нарушено условие Коши, и, значит, он сходится неравномерно.

19.2.2 Признаки равномерной сходимости

Теорема (признак Вейерштрасса). *Пусть функция $f(x, y)$ задана на $[a, b) \times Y$, а неотрицательная функция $g(x)$ задана на $[a, b)$. Предположим, что обе эти функции интегрируемы по x на любом отрезке $[a, \xi] \subset [a, b)$. Если для любого $x \in [a, b)$ и любого $y \in Y$ справедливо неравенство $|f(x, y)| \le g(x)$ и несобственный интеграл $\int_a^b g(x)\, dx$ сходится, то интеграл $\int_a^b f(x, y)\, dx$ сходится абсолютно и равномерно на Y.*

Доказательство. Эта теорема сразу следует из критерия Коши. Действительно, если $a \le \xi' < \xi'' < b$, то

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x, y)\, dx\right| \le \int_{\xi'}^{\xi''} |f(x, y)|\, dx \le \int_{\xi'}^{\xi''} g(x)\, dx \quad (y \in Y).$$

Отсюда, в силу критерия Коши, вытекает абсолютная и равномерная сходимость интеграла $\int_a^b f(x, y)\, dx$. $\square$

Пример 1. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2}\, dx$. Из очевидного неравенства $\frac{|\cos xy|}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$ и из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, в силу признака Вейерштрасса, следует, что данный интеграл сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}$.

Пример 2. Рассмотрим $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$. Из неравенства $\frac{1}{1+x^2+y^2} \le \frac{1}{1+x^2}$ и из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, в силу признака Вейерштрасса, вытекает равномерная и абсолютная сходимость данного интеграла на $\mathbb{R}$.

Замечание. Для применения признака Вейерштрасса можно выбирать мажоранту $g(x) = \sup_{y\in Y} |f(x,y)|$. Если окажется, что интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится, то можно применить признак Вейерштрасса. В противном случае мы не можем утверждать, что интеграл не является равномерно сходящимся, т. е. признак Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости.

Пример 3. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-yx^2}\,dx$. Он сходится при $y \geq 0$. Найдем $\sup_{y\geq 0}|f(x,y)|$, где $f(x,y) = y\mathrm{e}^{-yx^2}$. Пусть $x \in [0,+\infty)$ фиксировано. Тогда

$$f'_y(x,y) = \mathrm{e}^{-yx^2} + y\mathrm{e}^{-yx^2}\left(-x^2\right) = \mathrm{e}^{-yx^2}\left(1 - x^2 y\right) = 0,$$

если только $x^2 y = 1$, т. е. $y = \frac{1}{x^2}$. Поэтому

$$\sup_{y\geq 0}|f(x,y)| = f\left(x, \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1} \equiv g(x).$$

Но интеграл $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{1}{\mathrm{e}}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ расходится из-за особенности в нуле. Если учесть, что исходный интеграл не имеет особенности в нуле, то это означает, что его равномерная сходимость эквивалентна равномерной сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} y\mathrm{e}^{-yx^2}\,dx$. Если теперь принять во внимание, что интеграл $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{1}{\mathrm{e}}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, то, в силу признака Вейерштрасса, интеграл $\int_1^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно, а значит, и исходный интеграл сходится равномерно.

Теорема (признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла). *Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ определены на множестве $[a,b)\times Y$. Предположим, что*

a) функция $f(x,y)$ непрерывна по переменной x на $[a,b)$ при каждом фиксированном $y \in Y$ и такова, что интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на Y;

b) функция $g(x,y)$ непрерывно дифференцируема по переменной x на $[a,b)$ при каждом фиксированном $y \in Y$, монотонна по x при каждом фиксированном $y \in Y$ и ограничена на $[a,b)\times Y$, т. е. существует такое M, что $|g(x,y)| \leq M$ при всех $x \in [a,b)$, $y \in Y$.

Тогда интеграл $\int_a^b f(x,y)g(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* Y.

Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла). *Пусть функции* $f(x,y)$ *и* $g(x,y)$ *определены на множестве* $[a,b)\times Y$. *Предположим, что*

a) функция $f(x,y)$ *непрерывна по переменной* x *на* $[a,b)$ *при каждом фиксированном* $y\in Y$ *и такова, что интеграл* $\int_a^\xi f(x,y)\,dx$ *равномерно ограничен на* Y, *т. е. существует такое* M, *что* $\left|\int_a^\xi f(x,y)\,dx\right|\le M$ *при всех* $\xi\in[a,b)$, $y\in Y$;

b) функция $g(x,y)$ *непрерывно дифференцируема по переменной* x *на* $[a,b)$ *при каждом фиксированном* $y\in Y$, *монотонна по* x *при каждом фиксированном* $y\in Y$ *и равномерно стремится к нулю при* $x\to b$ $(x<b)$, *т. е. для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* $\xi_0\in[a,b)$, *что при любом* $\xi\in[\xi_0,b)$ *и при любом* $y\in Y$ *справедливо неравенство* $|g(\xi,y)|<\varepsilon$.
Тогда интеграл $\int_a^b f(x,y)g(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* Y.

Доказательство признаков Абеля и Дирихле основано на применении критерия Коши и формулы интегрирования по частям. Пусть $a\le \xi'<\xi''<b$. Тогда для $y\in Y$ имеем

$$\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y)g(x,y)\,dx = F(x,y)g(x,y)\Big|_{x=\xi'}^{x=\xi''} - \int_{\xi'}^{\xi''} F(x,y)g'_x(x,y)\,dx, \quad (19.5)$$

где $F(x,y)=\int_{\xi'}^x f(t,y)\,dt$.

Для доказательства признака Абеля зафиксируем $\varepsilon>0$ и, пользуясь равномерной сходимостью интеграла $\int_a^b f(x,y)\,dx$ на множестве Y, выберем такое $\xi_0\in[a,b)$, что для всех ξ',ξ'' $(\xi_0\le\xi'<\xi''<b)$ и для любого $y\in Y$ справедливо неравенство

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Тогда первое слагаемое справа в (19.5) оценим так:

$$|F(\xi'',y)\cdot g(\xi'',y) - F(\xi',y)\cdot g(\xi',y)| = |F(\xi'',y)|\cdot|g(\xi'',y)| =$$
$$= \left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y)\,dx\right|\cdot|g(\xi'',y)| \le \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Оценим второе слагаемое

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} F(x,y) g'_x(x,y)\,dx\right| \le \sup_{x\in[\xi',\xi'']} |F(x,y)| \cdot \int_{\xi'}^{\xi''} |g'_x(x,y)|\,dx =$$

$$= \sup_{x\in[\xi',\xi'']} \left|\int_{\xi'}^{x} f(t,y)\,dt\right| \cdot \left|\int_{\xi'}^{\xi''} g'_x(x,y)\,dx\right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3M} \left|g(\xi'',y) - g(\xi',y)\right| \le \frac{\varepsilon}{3M} \left(\left|g(\xi'',y)\right| + \left|g(\xi',y)\right|\right) \le \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любых $\xi', \xi'' \in [\xi_0, b)$ $(\xi' < \xi'')$ и для всех $y \in Y$ справедливо неравенство

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y) g(x,y)\,dx\right| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

т. е. для интеграла $\int_a^b f(x,y)g(x,y)\,dx$ выполнено условие Коши равномерной сходимости. В силу критерия Коши, этот интеграл сходится равномерно на Y.

Для доказательства признака Дирихле зафиксируем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь равномерной сходимостью к нулю функции $g(x,y)$ при $x \to b$ $(x < b)$ на множестве $y \in Y$, найдем такое ξ_0, что для всех ξ' $(\xi_0 \le \xi' < b)$ и для любого $y \in Y$ справедливо неравенство

$$\left|g(\xi',y)\right| \le \frac{\varepsilon}{6M}.$$

Тогда для $\xi' < \xi'' < b$ и для любого $y \in Y$ первое слагаемое справа в (19.5) оценим так:

$$\left|F(\xi'',y) \cdot g(\xi'',y) - F(\xi',y) \cdot g(\xi',y)\right| = \left|F(\xi'',y)\right| \cdot \left|g(\xi'',y)\right| =$$

$$= \left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y)\,dx\right| \cdot \left|g(\xi'',y)\right| \le$$

$$\le \left(\left|\int_a^{\xi'} f(x,y)\,dx\right| + \left|\int_a^{\xi''} f(x,y)\,dx\right|\right) \left|g(\xi'',y)\right| \le 2M\frac{\varepsilon}{6M} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Оценим второе слагаемое

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} F(x,y)g'_x(x,y)\,dx\right| \le \sup_x \left|\int_{\xi'}^{x} f(t,y)\,dt\right| \cdot \int_{\xi'}^{\xi''} |g'_x(x,y)|\,dx \le$$

$$\le \left(\sup_x \left|\int_a^x f(t,y)\,dt\right| + \left|\int_a^{\xi'} f(t,y)\,dt\right|\right)(|g(\xi',y)| + |g(\xi'',y)|) \le$$

$$\le 2M \cdot 2 \cdot \frac{\varepsilon}{6M} = \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любых $\xi', \xi'' \in [\xi_0, b)$ и для любых $y \in Y$ справедливо неравенство

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y)g(x,y)\,dx\right| \le \varepsilon,$$

т. е. для интеграла $\int_a^b f(x,y)g(x,y)\,dx$ выполнено условие Коши равномерной сходимости. В силу критерия Коши, этот интеграл сходится равномерно на множестве Y. $\square$

Пример. Рассмотрим интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x\sin xy}{1+x^2}\,dx$. Найдем область сходимости этого интеграла. Если $y=0$, то он, очевидно, сходится. При фиксированном $y \ne 0$ применим признак Дирихле. Обозначим $f(x,y) = \sin xy$, $g(x,y) = \frac{x}{1+x^2}$. Тогда имеем

$$\int_1^{\xi} f(x,y)\,dx = \int_1^{\xi} \sin xy\,dx = -\frac{1}{y}\cos xy\Big|_{x=1}^{x=\xi} = \frac{1}{y}(\cos y - \cos \xi y),$$

так что

$$\left|\int_1^{\xi} f(x,y)\,dx\right| \le \frac{2}{|y|}.$$

Далее, функция $g(x,y)$ при каждом y (т. к. она не зависит от y) монотонно стремится к нулю, так как

$$g'_x(x,y) = \frac{1+x^2-2x\cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2} \le 0 \quad (x \ge 1).$$

Следовательно, в силу признака Дирихле сходимости несобственного интеграла, данный интеграл сходится и при $y \neq 0$. Итак, область сходимости данного интеграла – множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$.

Если $|y| \geq \delta > 0$, то

$$\left|\int_1^{\xi} f(x,y)\,dx\right| \leq \frac{2}{|y|} \leq \frac{2}{\delta} \quad (|y| \geq \delta).$$

Поэтому на множестве $|y| \geq \delta$ выполнено условие признака Дирихле равномерной сходимости, в силу которого данный интеграл сходится равномерно на множестве $|y| \geq \delta$.

Покажем, что на $\mathbb{R}$ данный интеграл сходится неравномерно. Если бы он сходился равномерно, то для достаточно больших ξ' и ξ'' было бы выполнено неравенство

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} \frac{x\sin xy}{1+x^2}\,dx\right| < \varepsilon$$

сразу для всех $y \in \mathbb{R}$. Возьмем $y = \frac{1}{n}$, $\xi' = \frac{\pi n}{2}$, $\xi'' = \pi n$. Тогда для $\frac{\pi n}{2} \leq x \leq n\pi$ будет $\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{n} \leq \pi$, так что $\sin\frac{x}{n} \geq 0$, и поэтому

$$\int_{\frac{n\pi}{2}}^{n\pi} \frac{x\sin xy}{1+x^2}\,dx \geq \frac{n\pi}{1+n^2\pi^2}\int_{\frac{n\pi}{2}}^{n\pi} \sin\frac{x}{n}\,dx =$$

$$= \frac{n\pi}{1+n^2\pi^2}\cdot n\left(-\cos\frac{x}{n}\right)\Bigg|_{\frac{n\pi}{2}}^{n\pi} = \frac{n^2\pi}{1+n^2\pi^2} \to \frac{1}{\pi} > 0 \quad (n\to\infty).$$

Таким образом, если n достаточно большое, то $\frac{n^2\pi}{1+n^2\pi^2} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0$, т. е. существует ε_0 $\left(\varepsilon_0 = \frac{1}{4}\right)$, такое, что для любого ξ_0 найдутся ξ' $\left(\xi' = \frac{n\pi}{2}\right)$, ξ'' $(\xi'' = n\pi)$ и $y = \frac{1}{n}$, такие, что справедливо неравенство

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} \frac{x\sin xy}{1+x^2}\,dx\right| \geq \varepsilon_0.$$

Это означает, что для данного интеграла не выполнено условие Коши равномерной сходимости интеграла. Значит, исходный интеграл не является равномерно сходящимся на $\mathbb{R}$.

19.2.3 Связь с функциональными рядами

Ранее было показано, что несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi\to b,\ \xi<b} \int_a^{\xi} f(x)\,dx$$

сходится тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$, такой, что $\xi_0 = a$, $\xi_n \in [a,b)$, $\xi_n \to b$ $(n \to \infty)$, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} f(x)\,dx$. Аналогом этого утверждения для равномерной сходимости интеграла, зависящего от параметра, является следующая

Теорема. *Пусть функция $f(x,y)$ задана на $[a,b)\times Y$ и при каждом фиксированном $y \in Y$ интегрируема по Риману по переменной x на любом отрезке $[a,\xi] \subset [a,b)$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на множестве Y в том, и только в том случае, когда для любой последовательности $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$, такой, что $\xi_0 = a$, $\xi_n \in [a,b)$, $\xi_n \to b$ $(n \to \infty)$, функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} f(x,y)\,dx \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y)$$

сходится равномерно на Y.

Доказательство. В силу определения, равномерная сходимость интеграла $\int_a^b f(x,y)\,dx$ равносильна равномерному по y стремлению к нулю при $\xi \to b$ $(\xi < b)$ функции

$$F(\xi,y) = \int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^{\xi} f(x,y)\,dx = \int_{\xi}^b f(x,y)\,dx.$$

Последнее, в свою очередь, эквивалентно тому, что для любой последовательности $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$, такой, что $\xi_0 = a$, $\xi_n \in [a,b)$, $\xi_n \to b$ $(n \to \infty)$, $F(\xi_n, y)$ равномерно по y стремится к нулю. Из равенства

$$F(\xi_n, y) = \int_{\xi_n}^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^{\xi_n} f(x,y)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f(x,y)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f(x,y)\,dx =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f(x,y)\,dx \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k(y) \quad (y \in Y)$$

следует, что равномерное по y стремление к нулю последовательности $\{F(\xi_n, y)\}$ равносильно равномерному по y стремлению к нулю остатков ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y)$, а это равносильно равномерной сходимости этого ряда. □

19.2.4 Основные свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 1 (непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b)\times[c,d]$ $(-\infty < a < b \le +\infty)$ и несобственный интеграл*

$$I(y) \equiv \int_a^b f(x,y)\,dx$$

сходится равномерно относительно y на $[c,d]$. Тогда функция $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

Доказательство. Фиксируем $y_0 \in [c,d]$ и задаем $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости интеграла на $[c,d]$, найдется такое $\xi_0 \in [a,b)$, что для любого $\xi \in [\xi_0, b)$ и для любого $y \in [c,d]$ справедливо неравенство

$$\left| \int_{\xi}^{b} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Фиксируем ξ. Так как $f(x,y)$ непрерывна на $[a,\xi]\times[c,d]$, то, по теореме о непрерывности собственного интеграла по параметру, функция $\int_a^{\xi} f(x,y)\,dx$ равномерно непрерывна по переменной y на $[c,d]$. Поэтому найдется такое $\delta > 0$, что для всех $y \in [c,d]$, таких, что $|y - y_0| < \delta$, справедливо неравенство

$$\left| \int_a^{\xi} f(x,y)\,dx - \int_a^{\xi} f(x,y_0)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому

$$|I(y) - I(y_0)| \le \left| \int_a^{\xi} f(x,y)\,dx - \int_a^{\xi} f(x,y_0)\,dx \right| +$$

$$+\left|\int_{\xi}^{b} f(x,y)\,dx\right| + \left|\int_{\xi}^{b} f(x,y_0)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

для всех $y \in [c,d]$, таких, что $|y-y_0|<\delta$. $\square$

Замечание. Если в условии теоремы отбросить требование равномерной сходимости, то утверждение теоремы теряет силу. Действительно, ранее мы рассмотрели интеграл $\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-xy}\,dx$ и показали, что на области сходимости $Y \equiv [0,+\infty)$ этот интеграл сходится неравномерно. Функция

$$I(y)=\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-xy}\,dx=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,dt=1 \quad (y>0),$$

$I(0)=0$, разрывна в точке $y_0=0$.

Теорема 2 (дифференцирование несобственного интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $\Pi \equiv [a,b)\times[c,d]$ и имеет на Π непрерывную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$. Пусть, далее, интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится в точке $y_0 \in [c,d]$, а интеграл $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ сходится равномерно по y на $[c,d]$. Тогда интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $[c,d]$, функция $I(y)\equiv\int_a^b f(x,y)\,dx$ непрерывно дифференцируема на $[c,d]$ и справедливо равенство*

$$I'(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx \quad (y\in[c,d]). \tag{19.6}$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon>0$ и, пользуясь равномерной сходимостью интеграла $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$, найдем такое $\xi_0\in[a,b)$, что для всех $\xi',\xi''\in[\xi_0,b)$ и для любого $y\in[c,d]$ справедливо неравенство

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Существование такого ξ_0 вытекает из критерия Коши. Покажем, что для $\xi',\xi''\in[\xi_0,b)$ и $y\in[c,d]$ $(y\neq y_0)$ справедливо неравенство

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\,dx\right|<\varepsilon.$$

Для этого обозначим $\Phi(y) = \int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y)\,dx$. По теореме о дифференцировании собственного интеграла, зависящего от параметра, функция $\Phi(y)$ непрерывно дифференцируема на $[c,d]$ и для всех $y \in [c,d]$

$$|\Phi'(y)| = \left|\int_{\xi'}^{\xi''} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}\,dx\right| = \left|\frac{\Phi(y) - \Phi(y_0)}{y - y_0}\right| = |\Phi'(\widetilde{y})| < \varepsilon,$$

где $\widetilde{y}$ принадлежит интервалу с концами y и y_0. Последнее равенство справедливо в силу теоремы Лагранжа (формулы конечных приращений). Имеем

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y)\,dx\right| \leq \left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y_0)\,dx\right| + \left|\int_{\xi'}^{\xi''} \left(f(x,y) - f(x,y_0)\right)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y_0)\,dx\right| + \varepsilon\,|y - y_0| \quad (y \in [c,d]).$$

Поскольку интеграл $\int_a^b f(x,y_0)\,dx$ сходится (по условию), то существует $\xi_1 > \xi_0$, такое, что для любых $\xi', \xi'' \in [\xi_1, b)$ справедливо неравенство

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y_0)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Тогда получим, что

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon + \varepsilon(d - c),$$

где $y \in [c,d]$ произвольное, а $\xi', \xi'' \in [\xi_1, b)$. Это означает, что для интеграла $\int_a^b f(x,y)\,dx$ выполнено условие Коши равномерной сходимости. В силу критерия Коши, он сходится равномерно на $[c,d]$.

Пусть $y_1 \in [c,d]$, $\xi', \xi'' \in [\xi_0, b)$. Тогда, как и выше, получаем

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} \frac{f(x,y) - f(x,y_1)}{y - y_1}\,dx\right| = \left|\frac{\Phi(y) - \Phi(y_1)}{y - y_1}\right| = |\Phi'(\overline{y}_1)| < \varepsilon.$$

Отсюда, устремляя ξ'' к b ($\xi'' < b$), получим, что для любого $y \in [c, d]$

$$\left| \int_{\xi'}^{b} \frac{f(x,y) - f(x, y_1)}{y - y_1} \, dx \right| \le \varepsilon,$$

а из неравенства

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \, dx \right| < \varepsilon$$

следует, что

$$\left| \int_{\xi'}^{b} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \, dx \right| \le \varepsilon \quad (y \in [c,d]).$$

Тогда

$$\left| \frac{I(y) - I(y_1)}{y - y_1} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) \, dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{y - y_1} \left(\int_a^b f(x,y) \, dx - \int_a^b f(x, y_1) \, dx \right) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) \, dx \right| \le$$

$$\le \left| \frac{1}{y - y_1} \left(\int_a^{\xi'} f(x,y) \, dx - \int_a^{\xi'} f(x, y_1) \, dx \right) - \int_a^{\xi'} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) \, dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{\xi'}^{b} \frac{f(x,y) - f(x, y_1)}{y - y_1} \, dx \right| + \left| \int_{\xi'}^{b} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) \, dx \right| \le$$

$$\le \left| \frac{\widetilde{I}(y) - \widetilde{I}(y_1)}{y - y_1} - \int_a^{\xi'} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) \, dx \right| + \varepsilon + \varepsilon,$$

где $\widetilde{I}(y) = \int_a^{\xi'} f(x,y) \, dx$. Так как $\xi' \in [\xi_0, b)$ фиксировано, то на отрезке $[a, \xi']$ можем применить теорему о производной собственного интеграла Римана, зависящего от параметра. Согласно этой теореме, имеем

$$\widetilde{I}'(y_1) = \int_a^{\xi'} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) \, dx.$$

Поэтому

$$\left| \frac{\widetilde{I}(y) - \widetilde{I}(y_1)}{y - y_1} - \int_a^{\xi'} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) \, dx \right| \to 0 \quad (y \to y_1),$$

т. е. разность слева может быть сделана меньшей ε при $|y-y_1|<\delta$. Окончательно,

$$\left|\frac{I(y)-I(y_1)}{y-y_1}-\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_1)\,dx\right| \le 3\varepsilon \quad (|y-y_1|<\delta),$$

т. е.

$$I'(y_1) \equiv \lim_{y\to y_1} \frac{I(y)-I(y_1)}{y-y_1} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_1)\,dx,$$

а это и есть равенство (19.6) при $y=y_1$. Непрерывность функции $I'(y)$ вытекает из равенства (19.6) и из предыдущей теоремы. $\square$

Теорема 3 (интегрирование несобственного интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $\Pi \equiv [a,b)\times[c,d]$ и интеграл $I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx. \tag{19.7}$$

Доказательство. По теореме 1 функция $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$ и, следовательно, интегрируема на $[c,d]$, так что интеграл в левой части (19.7) существует. В правой части (19.7) внешний интеграл понимается как несобственный по $[a,b)$ от функции $J(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$. Так как $f(x,y)$ непрерывна по y при фиксированном $x\in[a,b)$, то $J(x)$ определена для каждого $x\in[a,b)$. По теореме о непрерывности собственного интеграла Римана, зависящего от параметра, функция $J(x)$ непрерывна на каждом отрезке $[a,\xi]\subset[a,b)$ и, следовательно, непрерывна на $[a,b)$. Неявным утверждением теоремы является тот факт, что несобственный интеграл справа в (19.7), т. е. $\int_a^b J(x)\,dx$, является сходящимся.

Докажем (19.7). Возьмем произвольное $\xi\in[a,b)$. По теореме о перемене порядка интегрирования для собственного интеграла, имеем

$$\int_c^d \left(\int_a^\xi f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^\xi \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx. \tag{19.8}$$

Поэтому достаточно показать, что при $\xi\to b$ $(\xi<b)$ левая часть в этом равенстве имеет предел, равный левой части (19.7). Тем самым мы получим, что и правая часть имеет предел и справедливо равенство (19.7).

Имеем

$$\left|\int_c^d \left(\int_a^\xi f(x,y)\,dx\right) dy - \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy\right| =$$

$$= \left|\int_c^d \left(\int_\xi^b f(x,y)\,dx\right) dy\right| \le \int_c^d \left|\int_\xi^b f(x,y)\,dx\right| dy. \qquad (19.9)$$

Пользуясь равномерной сходимостью интеграла $I(y)$, для заданного $\varepsilon > 0$ найдем такое $\xi_0 \in [a,b)$, что для всех $\xi \in [\xi_0, b)$ и для любого $y \in [c,d]$ справедливо неравенство

$$\left|\int_\xi^b f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}.$$

Тогда для $\xi \in [\xi_0, b)$ левая часть в (19.9) не превосходит ε, а это и означает, что левая часть в (19.8) стремится к левой части (19.7) при $\xi \to b$ $(\xi < b)$.

$\square$

Теорема 4 (перестановка порядка интегрирования для случая, когда оба интеграла несобственные). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $\Pi \equiv [a,b) \times [c,d)$, где $-\infty < a < b \le +\infty$, $-\infty < c < d \le +\infty$. Пусть, далее, $\int_a^b |f(x,y)|\,dx$ сходится равномерно относительно y на любом отрезке $[\gamma,\delta] \subset (c,d)$, а $\int_c^d |f(x,y)|\,dy$ сходится равномерно относительно x на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. Если сходится хотя бы один из интегралов*

$$\int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|\,dy\right) dx \quad \text{или} \quad \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|\,dx\right) dy, \qquad (19.10)$$

то сходится и другой интеграл, и имеет место равенство

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy, \qquad (19.11)$$

Доказательство. Докажем сначала теорему для случая $f \ge 0$. Пусть, например, сходится первый из интегралов (19.10). Обозначим его I_1. Выберем $c < \gamma < \delta < d$ и на $[a,b) \times [\gamma,\delta]$ применим теорему 3. В силу этой теоремы,

$$\int_\gamma^\delta \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy\right) dx \le$$

$$\le \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx \equiv I_1.$$

Поскольку $\gamma < \delta$ произвольные из (c,d), то, устремляя γ к c, а δ к d, получаем, что интеграл

$$I_2 \equiv \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$$

ограничен и, следовательно, сходящийся, а также $I_2 \le I_1$. Если теперь, учитывая сходимость интеграла I_2, поменять в наших рассуждениях местами интегралы I_1 и I_2, то получим неравенство $I_1 \le I_2$. Отсюда следует, что $I_1 = I_2$, т. е. равенство (19.11) для случая $f \ge 0$.

Пусть теперь функция f произвольного знака. Обозначим $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$, $f^- = \frac{|f|-f}{2}$. Тогда $|f| = f^+ + f^-$, $f = f^+ - f^-$ и функции f^+ и f^- неотрицательные и непрерывны на П. Поскольку из равномерной сходимости интегралов $\int_a^b |f(x,y)|\,dx$ и $\int_c^d |f(x,y)|\,dy$ следует равномерная сходимость интегралов $\int_a^b f(x,y)\,dx$ и $\int_c^d f(x,y)\,dy$, а отсюда вытекает равномерная сходимость соответствующих интегралов от функций f^+ и f^-, то к функциям f^+ и f^- можем применить уже доказанную часть теоремы. Записав равенство (19.11) для f^+ и f^- и вычитая одно из другого, получим равенство (19.11) для функции f. $\square$

Пример (интеграл Эйлера – Пуассона). Так называется интеграл $I \equiv \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$. Он имеет многочисленные применения в различных вопросах. Очевидно, что этот интеграл сходится. Мы хотим вычислить его значение. Известно, что первообразная функции e^{-x^2} не выражается в элементарных функциях, и поэтому формула Ньютона – Лейбница неприменима. Имеем

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = t\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2y^2}\,dy.$$

Умножим обе части этого равенства на e^{-t^2} и проинтегрируем по t от 0 до $+\infty$. Получим

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} I\,dt = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2y^2}\,dy\right) dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} te^{-t^2\left(1+y^2\right)}\,dt\right) dy = \left[\begin{array}{l} z = \left(1+y^2\right)t^2 \\ dz = 2t\left(1+y^2\right)\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\left(1+y^2\right)} \int_0^{+\infty} e^{-z}\,dz\right) dy = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\left(1+y^2\right)}\,\left(-e^{-z}\right)\Big|_0^{+\infty}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Осталось обосновать перемену порядка интегрирования. Для этого покажем, что выполнены условия теоремы 4 для функции $f(x,y) = xe^{-x^2\left(1+y^2\right)}$ на множестве $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$. В самом деле, интеграл $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2\left(1+y^2\right)}\,dx$ сходится равномерно по переменной y на множестве $[0,+\infty)$. Это можно установить с помощью признака Вейерштрасса, т. к. $xe^{-x^2\left(1+y^2\right)} \le xe^{-x^2}$ $(y \ge 0)$ и функция справа интегрируема на $[0,+\infty)$. Другой интеграл $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2\left(1+y^2\right)}\,dy$ сходится равномерно по x на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (0,+\infty)$. Это также следует из неравенства $xe^{-x^2\left(1+y^2\right)} \le \beta e^{-\alpha^2\left(1+y^2\right)}$ $(\alpha \le x \le \beta,\ y \ge 0)$ и из интегрируемости по y на $[0,+\infty)$ функции в правой части. И, наконец, интеграл

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} xe^{-x^2\left(1+y^2\right)}\,dx\right) dy,$$

как было показано, является сходящимся. Следовательно, выполнены условия теоремы 4, в силу которой перемена порядка интегрирования законна.

19.2.5 Интегралы Эйлера

Гамма-функцией Эйлера называется несобственный интеграл

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx \quad (s > 0).$$

Этот интеграл сходится при $s > 0$. Действительно, интеграл $\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ сходится, так как $x^{s-1}\mathrm{e}^{-x} \le x^{s-1}$ $(0 \le x \le 1)$, где $s-1 > -1$, то интеграл сходится по признаку Вейерштрасса. Другой интеграл $\int_1^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ сходится при любом s, поскольку $x^{s-1}\mathrm{e}^{-x} \le \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ $(x \ge x_0(s))$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,dx$ сходится. Поэтому сходится и исходный интеграл при $s > 0$.

Значение $\Gamma(0)$ не определено, так как интеграл расходится при $s = 0$. Интеграл $\Gamma(s)$ сходится равномерно относительно s на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$. Действительно, для $s \in [\alpha, \beta]$ справедливо неравенство

$$x^{s-1}\mathrm{e}^{-x} \le x^{\alpha-1} \quad (0 < x \le 1),$$

так что для интеграла $\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ выполнено условие признака Вейерштрасса. Далее,

$$x^{s-1}\mathrm{e}^{-x} \le x^{\beta-1}\mathrm{e}^{-x} \quad (x \ge 1),$$

и интеграл $\int_1^{+\infty} x^{\beta-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ сходится, так что и интеграл $\int_1^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$ по признаку Вейерштрасса.

Из равномерной сходимости на $[\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$ и из теоремы о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра, получаем, что функция $\Gamma(s)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Так как $0 < \alpha < \beta < +\infty$ произвольные, то отсюда следует, что функция $\Gamma(s)$ непрерывна на $(0, +\infty)$.

Продифференцируем функцию $x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}$ под знаком интеграла по параметру s. Получим интеграл $\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\,dx$. Аналогично тому, как мы доказали равномерную сходимость на $[\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$ интеграла $\Gamma(s)$, можно показать, что и интеграл $\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\,dx$ равномерно сходится на $[\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$. Это означает, что к исходному интегралу $\Gamma(s)$ можно применить теорему о дифференцировании интеграла по параметру. Согласно этой теореме, $\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\,dx$. Рассуждая аналогично, получим, что функция $\Gamma(s)$ имеет производные любого порядка на $(0, +\infty)$ и $\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^k\,dx$. В частности, $\Gamma''(s) \ge 0$, так что функция $\Gamma(s)$ выпукла вниз.

Применяя формулу интегрирования по частям, находим

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s\mathrm{e}^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^s & du = sx^{s-1}\,dx \\ dv = \mathrm{e}^{-x}\,dx & v = -\mathrm{e}^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$= -x^s \mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx = s\Gamma(s).$$

Если учесть, что $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx = 1$, то, применяя рекуррентно полученное равенство, находим

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n! \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Бета-функцией Эйлера называется интеграл

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (p,q > 0).$$

Он сходится при $p,q > 0$. Для доказательства разобьем данный интеграл на два интеграла $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ и $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$. Ясно, что первый интеграл сходится при $p > 0$, а второй – при $q > 0$.

Аналогично тому, как мы доказывали равномерную сходимость на $[\alpha,\beta] \subset (0,+\infty)$ гамма-функции $\Gamma(s)$, легко можно показать, что интеграл $B(p,q)$ сходится равномерно по переменным p и q на любом отрезке из $(0,+\infty)$. Отсюда следует, что функция $B(p,q)$ непрерывна при $p,q > 0$.

Если в интеграле $B(p,q)$ сделать замену переменной $x = \frac{y}{1+y}$, то получим другое представление бета-функции –

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \left[\begin{array}{ll} x = \frac{y}{1+y} & y = \frac{x}{1-x} \\ dx = \frac{dy}{(1+y)^2} & \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p-1}} \cdot \frac{1}{(1+y)^{q-1}} \cdot \frac{dy}{(1+y)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy.$$

Связь между гамма- и бета-функциями устанавливает следующая формула Эйлера:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Докажем это равенство. Имеем

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx =$$

$$= t^s \int_0^{+\infty} y^{s-1} \mathrm{e}^{-ty}\, dy = t^s \int_0^{+\infty} x^{s-1} \mathrm{e}^{-tx}\, dx \quad (t > 0).$$

Отсюда

$$\frac{\Gamma(s)}{t^s} = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \mathrm{e}^{-tx}\, dx.$$

Положим $s = p + q$, $t = 1 + y$. Тогда

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+y)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} x^{p+q-1} \mathrm{e}^{-x(1+y)}\, dx.$$

Умножим это равенство на y^{p-1} и проинтегрируем по y от 0 до $+\infty$. Получим

$$\Gamma(p+q) \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\, dy = \int_0^{+\infty} \left(y^{p-1} \int_0^{+\infty} x^{p+q-1} \mathrm{e}^{-x(1+y)}\, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(x^{p+q-1} \int_0^{+\infty} y^{p-1} \mathrm{e}^{-x(1+y)}\, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(x^{p+q-1} \mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} y^{p-1} \mathrm{e}^{-xy}\, dy \right) dx.$$

Внутренний интеграл равен

$$\int_0^{+\infty} y^{p-1} \mathrm{e}^{-xy}\, dy = \left[\ z = xy, \quad y = \tfrac{z}{x}\ \right] = \frac{1}{x^p} \int_0^{+\infty} z^{p-1} \mathrm{e}^{-z}\, dx = \frac{\Gamma(p)}{x^p}.$$

Поэтому

$$\Gamma(p+q) B(p,q) = \int_0^{+\infty} x^{p+q-1} \mathrm{e}^{-x} \frac{\Gamma(p)}{x^p}\, dx =$$

$$= \Gamma(p) \int_0^{+\infty} x^{q-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx = \Gamma(p)\Gamma(q).$$

Отсюда следует формула Эйлера, если только обосновать перемену порядка интегрирования. Для этого обоснования покажем, что выполнены условия теоремы 4. Обозначим

$$f(x,y) = x^{p+q-1} y^{p-1} \mathrm{e}^{-x(1+y)}.$$

Ясно, что $f(x,y) \geq 0$ на $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} x^{p+q-1} y^{p-1} \mathrm{e}^{-x(1+y)}\,dx$$

сходится равномерно по переменной y на любом отрезке $[\gamma,\delta] \subset (0,+\infty)$. Это следует из неравенства

$$x^{p+q-1} y^{p-1} \mathrm{e}^{-x(1+y)} \leq \left\{ \begin{array}{ll} \delta^{p-1} \cdot x^{p+q-1} \cdot \mathrm{e}^{-x(1+\gamma)}, & p \geq 1, \\ \gamma^{p-1} \cdot x^{p+q-1} \cdot \mathrm{e}^{-x(1+\gamma)}, & 0 < p < 1 \end{array} \right\} \leq$$

$$\leq \left(\delta^{p-1} + \gamma^{p-1}\right) x^{p+q-1} \cdot \mathrm{e}^{-x(1+\gamma)} \quad (y \in [\gamma,\delta]),$$

сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} x^{p+q-1} \mathrm{e}^{-x(1+\gamma)}\,dx$ и из признака Вейерштрасса. Далее, интеграл

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{+\infty} x^{p+q-1} y^{p-1} \mathrm{e}^{-x(1+y)}\,dy$$

сходится равномерно по переменной x на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (0,+\infty)$. Это следует из неравенства

$$x^{p+q-1} y^{p-1} \mathrm{e}^{-x(1+y)} \leq \left\{ \begin{array}{ll} \beta^{p+q-1} \cdot y^{p-1} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha(1+y)}, & p+q \geq 1, \\ \alpha^{p+q-1} \cdot y^{p-1} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha(1+y)}, & 0 < p+q < 1 \end{array} \right\} \leq$$

$$\leq \left(\alpha^{p+q-1} + \beta^{p+q-1}\right) y^{p-1} \mathrm{e}^{-\alpha(1+y)} \quad (x \in [\alpha,\beta]),$$

сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} y^{p-1} \mathrm{e}^{-\alpha(1+y)}\,dy$ и из признака Вейерштрасса. Наконец, последнее условие теоремы 4, а именно, сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy$, мы показали выше, точнее, мы даже выразили его значение через гамма-функцию.

Итак, бета-функция выражается через гамма-функцию. Продолжим изучение свойств гамма-функции. Выше уже отмечалось, что функция $\Gamma(s)$ непрерывна на $(0,+\infty)$. Поскольку $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$, то при $s \to 0+$ имеем $\Gamma(s+1) \to \Gamma(1) = 1$ и, следовательно, при $s \to 0+$ имеем $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} \sim \frac{\Gamma(1)}{s} = \frac{1}{s}$.

Гамма-функция может быть определена с сохранением полученных свойств для отрицательных $s \neq 0, -1, -2, \ldots$. Положим по определению

$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$, где $-1 < s < 0$. Так как $s+1 \in (0,1)$, то такое определение корректно. Исследуем поведение $\Gamma(s)$ при $s \to -1+0$. Имеем

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \frac{\Gamma(t)}{t-1} \sim -\Gamma(t) \sim -\frac{1}{t} = -\frac{1}{s+1} \quad (t = s+1 \to 0+).$$

Теперь по индукции можно определить функцию $\Gamma(s)$ на любом интервале $(-n-1, -n)$ $(n \in \mathbb{N})$ равенством

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

Упражнение. Используя полученные свойства, постройте график функции $\Gamma(s)$.

20. Ряды Фурье

20.1 Ортонормированные системы и ряды Фурье по ортонормированным системам

Пусть задано некоторое линейное пространство R. Это пространство будем называть евклидовым, если каждой паре элементов $f, g \in R$ поставлено в соответствие некоторое число, называемое скалярным произведением элементов f и g (это число будем обозначать (f, g)), причем операция скалярного произведения обладает следующими свойствами:

1) $(f, g) = (g, f)$;

2) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$;

3) $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$;

4) $(f, f) \geq 0$, $(f, f) = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0$ – нулевой элемент пространства R.

Кусочно непрерывной на отрезке $[a, b]$ называется функция f, непрерывная всюду на $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек $x_1, \ldots, x_n$, причем в каждой точке разрыва x_i функция f имеет скачок и справедливо равенство $f\left(x_i\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(x_i - 0\right) + f\left(x_i + 0\right)\right)$.

Пространство всех кусочно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций f будет евклидовым, если в нем определить скалярное произведение равенством

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx. \tag{20.1}$$

Ясно, что интеграл от произведения двух кусочно непрерывных функций существует и свойства 1) – 4) скалярного произведения выполнены. В доказательстве нуждается, разве что, следующее свойство:

$$(f, f) = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

Докажем его. Пусть $(f, f) = 0$. Если f отлична от тождественного нуля, то найдется такая точка x^*, что $f(x^*) \neq 0$. При этом если x^* совпадает с какой-либо точкой разрыва функции x_i, то, поскольку $f(x^*) = \frac{1}{2}(f(x^* - 0) + f(x^* + 0))$, найдется и точка x^{**} непрерывности функции f, в которой $f(x^{**}) \neq 0$. Поэтому сразу можем считать, что функция f непрерывна в точке x^* и $f(x^*) \neq 0$. Пусть, например, $f(x^*) > 0$. Тогда найдется такая δ-окрестность точки x^*, что $f(x) > \frac{1}{2} f(x^*)$ для всех $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$. Но тогда

$$\int_a^b f^2(x)\, dx \geq \int_{x^*-\delta}^{x^*+\delta} f^2(x)\, dx \geq 2\delta \left(\frac{1}{2} f(x^*)\right)^2 > 0,$$

что противоречит условию.

В частности, пространство $C([a, b])$ всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций является евклидовым пространством, если скалярное произведение в $C([a, b])$ определено равенством (20.1).

Теорема (неравенство Коши – Буняковского). *Для любых двух элементов f, g евклидова пространства R справедливо неравенство*

$$(f, g)^2 \leq (f, f) \cdot (g, g).$$

Доказательство. Поскольку для любого действительного числа λ справедливо неравенство

$$0 \leq (f - \lambda g, f - \lambda g) = (f, f) - 2\lambda(f, g) + \lambda^2(g, g),$$

т. е. квадратный трехчлен относительно λ неотрицателен, то его дискриминант $D = 4(f, g)^2 - 4(f, f) \cdot (g, g) \leq 0$, а это равносильно требуемому неравенству. $\square$

Определение. Линейное пространство R называется нормированным, если каждому элементу $f \in R$ поставлено в соответствие действительное число $\|f\|$, называемое нормой элемента f, причем норма удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \iff f = 0$ – нулевой элемент пространства R;

2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ для любых $f \in R$ и $\lambda \in \mathbb{R}$;

3) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ – неравенство треугольника или неравенство Минковского.

Пусть R – евклидово пространство. Тогда его можно превратить в нормированное, если норму определить равенством

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}.$$

В самом деле, справедливость аксиом 1) и 2) очевидна, а аксиома 3) вытекает из неравенства Коши – Буняковского

$$\|f+g\|^2 = (f+g, f+g) = (f,f) + 2(f,g) + (g,g) \leq$$

$$\leq (f,f) + 2|(f,g)| + (g,g) \leq \left(\sqrt{(f,f)}\right)^2 + 2\sqrt{(f,f)}\sqrt{(g,g)} + \left(\sqrt{(g,g)}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{(f,f)} + \sqrt{(g,g)}\right)^2 = (\|f\| + \|g\|)^2.$$

Определение. Два элемента f и g евклидова пространства R называются ортогональными, если $(f,g) = 0$.

Система элементов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ евклидова пространства R называется ортогональной системой, если любые два различных элемента этой системы ортогональны, т. е. если $(\varphi_n, \varphi_m) = 0$ при $n \neq m$.

Система элементов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ нормированного пространства R называется нормированной, если норма каждого элемента $\|\varphi_n\| = 1$.

Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ортонормированной, если она ортогональна и нормированная.

Важнейшим примером ортогональной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций является тригонометрическая система

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

Чтобы проверить ортогональность этой системы, достаточно убедиться в справедливости равенств

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n\ (\neq 0), \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx = 0.$$

Тригонометрическая система станет нормированной, если каждый ее элемент разделить на его норму, т. е. получим такую ортонормированную систему:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \ldots$$

Упражнение. Покажите, что система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},\ \ldots$$

ортонормированная на отрезке $[-l, l]$.

Пусть задана ортонормированная система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке $[a, b]$, где все функции φ_n непрерывны на $[a, b]$. Пусть, далее, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда, по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций, его сумма $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Теорема. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x) = f(x)$ по ортонормированной на отрезке $[a, b]$ системе непрерывных функций $\{\varphi_n\}$ сходится равномерно на $[a, b]$, то для коэффициентов a_n этого ряда справедливы равенства*

$$a_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\, dx \quad (k = 1, 2 \ldots). \tag{20.2}$$

Доказательство. Зафиксируем k. Поскольку функция φ_k непрерывна на $[a, b]$, то, в силу первой теоремы Вейерштрасса, она ограничена на $[a, b]$. Умножим равенство $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ на $\varphi_k(x)$ и получим

$$f(x)\varphi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)\varphi_k(x).$$

Ряд в правой части этого равенства сходится равномерно, так как его слагаемые получены путем умножения слагаемых равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ на ограниченную функцию φ_k. Проинтегрировав почленно, с учетом ортонормированности системы $\{\varphi_n\}$, получим

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)\varphi_k(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)\,dx = a_k \int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx = a_k. \quad \square$$

В частном случае, для тригонометрической системы коэффициенты a_k и b_k равномерно на $[-\pi, \pi]$ сходящегося к функции f ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = f(x)$$

могут быть выражены через функцию f следующими равенствами:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Доказанная теорема дает возможность выразить числа a_k – коэффициенты ряда по ортонормированной системе функций $\{\varphi_n\}$ – через сумму этого ряда f в том случае, когда этот ряд сходится равномерно, а функции φ_k непрерывны на $[a, b]$. Однако же равенством (20.2) можно определить числа a_k для более широкого класса функций f, чем таких, которые могут быть представлены в виде суммы равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$. Именно, пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[a, b]$, т. е. пусть f имеет на $[a, b]$ конечное число особых точек и интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится как несобственный. Тогда

$$|f(x)\varphi_k(x)| \le M_k|f(x)|, \quad \text{где} \quad M_k = \sup_{x\in[a,b]} |\varphi_k(x)|\,.$$

Поэтому, в силу признака сравнения, интеграл $\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx$ сходится и даже абсолютно. Следовательно, числа

$$a_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{20.3}$$

определены для абсолютно интегрируемой в несобственном смысле функции f.

Определение. Пусть функция f абсолютно интегрируема в несобственном смысле на отрезке $[a, b]$, а система непрерывных на $[a, b]$ функций φ_k ортонормированная. Числа a_k, определяемые равенством (20.3), называются коэффициентами Фурье функции f по системе $\{\varphi_n\}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, где числа a_n – коэффициенты Фурье функции f, называется рядом Фурье функции f и обозначается

$$f(x) \ \sim \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x).$$

Равенства здесь может и не быть. Ряд в правой части может оказаться расходящимся. Символом $\sim$ указывается лишь на то, что ряд справа соответствует функции f, но не обязательно сходится к функции f в каком-либо смысле.

Последняя теорема, в частности утверждает, что равномерно сходящийся ряд Фурье является рядом Фурье своей суммы.

Пусть теперь система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортономированная в произвольном нормированном пространстве R и пусть $f \in R$. Коэффициентами Фурье элемента $f \in R$ по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют числа $a_k = (f, \varphi_k)$ $(k = 1, 2, \dots)$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n$ называют рядом Фурье элемента f по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Основное свойство коэффициентов Фурье выражает следующая

Теорема (о минимальном свойстве частичных сумм ряда Фурье). *Среди всех сумм вида $\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$ наименьшее отклонение по норме данного евклидова пространства от элемента f имеет n-я ча-*

стичная сумма ряда Фурье элемента f, т. е.

$$\inf_{c_1,\dots c_n\in\mathbb{R}}\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\right\|=\left\|f-\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k\right\|,$$

где числа a_k $(k=1,\dots,n)$ – коэффициенты Фурье функции f.

Доказательство. Учитывая ортонормированность системы $\{\varphi_n\}$, преобразуем

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\right\|^2=\left(f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k, f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}c_k^2-2\sum_{k=1}^{n}c_k\left(f,\varphi_k\right)+(f,f)=\sum_{k=1}^{n}\left(c_k-(f,\varphi_k)\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\left(f,\varphi_k\right)^2+(f,f)\geq$$

$$\geq(f,f)-\sum_{k=1}^{n}\left(f,\varphi_k\right)^2,$$

причем, как легко видеть, равенство достигается в том и только в том случае, когда $c_k=(f,\varphi_k)$. □

Следствие 1. *Если $\{a_k\}$ – коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\varphi_k\}$, то*

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k\right\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$

Это вытекает непосредственно из доказательства теоремы.

Следствие 2 (неравенство Бесселя). *Если $\{a_k\}$ – коэффициенты Фурье элемента f по некоторой ортонормированной системе, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\leq\|f\|^2.$$

Это неравенство для любого конечного числа n слагаемых в левой части вытекает из следствия 1. Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем неравенство Бесселя.

Следствие 3. *Если* $\{a_k\}$ *– коэффициенты Фурье некоторого элемента* f, *то* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Это вытекает из следствия 2 и из необходимого условия сходимости ряда в левой части неравенства Бесселя.

Вернемся к тригонометрической системе

$$\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots\}.$$

По этой системе коэффициенты Фурье имеют вид

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ряд Фурье

$$f(x)\ \sim\ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

мы определили для абсолютно интегрируемой на $[-\pi,\pi]$ функции f. Но пространство абсолютно интегрируемых функций не является евклидовым пространством с тем скалярным произведением, которое мы определили выше. В самом деле, функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ абсолютно интегрируема на $[-\pi,\pi]$ и в то же время $(f,f) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \int_{\pi}^{\pi} \frac{dx}{|x|}$ – расходящийся интеграл. Поэтому в нашем случае минимальное свойство коэффициентов Фурье, так же, как и следствия 1 и 2, не имеет смысла. Вместе с тем утверждение следствия 3 остается справедливым и в этом случае. Это фундаментальное свойство коэффициентов Фурье по тригонометрической системе содержится в следующей теореме.

Теорема Римана. *Если функция* f *абсолютно интегрируема на интервале* (a,b) *(конечном или бесконечном), то справедливы следующие равенства:*

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\omega x\,dx = 0, \quad \lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\omega x\,dx = 0.$$

Доказательство проведем в несколько шагов. Сначала покажем, что теорема верна для случая, когда

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \alpha \le x < \beta, \\ 0, & x \notin [\alpha, \beta). \end{cases}$$

В этом случае имеем

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \omega x \, dx \right| = \left| \int_\alpha^\beta \cos \omega x \, dx \right| = \frac{1}{|\omega|} \left| \sin \omega\beta - \sin \omega\alpha \right| \le \frac{2}{|\omega|},$$

так что интеграл в левой части стремится к нулю при $\omega \to \infty$.

Пусть теперь f – финитная ступенчатая функция, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \text{ или } x \ge \beta, \\ \gamma_i, & x_i \le x < x_{i+1}, \ i = 0, 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

где γ_i – произвольные действительные числа, $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \beta$. В этом случае имеем

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \omega x \, dx \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \cos \omega x \, dx \right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma_i| \frac{2}{|\omega|} = \frac{2}{|\omega|} \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma_i| \to 0 \quad (\omega \to \infty).$$

Покажем теперь, что для абсолютно интегрируемой функции f и заданного $\varepsilon > 0$ найдется такая финитная ступенчатая функция φ, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{20.4}$$

Отсюда сразу получим утверждение теоремы, т. к.

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \omega x \, dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \cos \omega x \, dx + \int_a^b \varphi(x) \cos \omega x \, dx \right| \le$$

$$\le \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \, dx + \left| \int_a^b \varphi(x) \cos \omega x \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

если только $|\omega| > \Delta$. Это вытекает из уже доказанной части теоремы, так как

$$\int_a^b \varphi(x)\cos\omega x\,dx \to 0 \quad (\omega\to\infty), \qquad \text{т. е.} \left|\int_a^b \varphi(x)\cos\omega x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

если только $|\omega| > \Delta$.

Для доказательства (20.4), не ограничивая общности, можем считать, что $a = -\infty$ и $b = +\infty$. Так как мы рассматриваем несобственные интегралы в смысле Римана, то у функции f может быть лишь конечное число особых точек $x_1, \dots, x_N$. По условию, все интегралы $\int_{-\infty}^{x_1} |f(x)|\,dx$, $\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)|\,dx$ и $\int_{x_N}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходятся. Поэтому найдутся точки

$$-\infty < \alpha_1 < \beta_1 < x_1 < \alpha_2 < \beta_2 < x_2 < \dots <$$

$$< x_{N-1} < \alpha_N < \beta_N < x_N < \alpha_{N+1} < \beta_{N+1} < +\infty,$$

такие, что функция f интегрируема в собственном смысле Римана на каждом отрезке $[\alpha_k, \beta_k]$ $(k = 1, 2, \dots, N+1)$ и

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)|\,dx - \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |f(x)|\,dx \le \frac{\varepsilon}{2(N+1)} \quad (i = 1, 2, \dots, N+1),$$

где понимается $x_0 = -\infty$ и $x_{N+1} = +\infty$. Это следует из определения несобственного интеграла

$$\int_{x_{i-1}}^{x_1} |f(x)|\,dx = \lim_{\substack{\alpha_i \to x_{i-1} \\ \beta_i \to x_i}} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |f(x)|\,dx.$$

Далее, поскольку на отрезке $[\alpha_i, \beta_i]$ функция f интегрируема по Риману в собственном смысле, то нижняя сумма Дарбу стремится к $\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x)\,dx$ при стремлении к нулю диаметра разбиения. Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое δ_i, что при любом разбиении отрезка $[\alpha_i, \beta_i]$, диаметра меньшего, чем δ_i, нижняя сумма Дарбу $\sum_{k=1}^{s_i} m_k^i \left|\Delta_k^i\right|$ отличается от интеграла $\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x)\,dx$ меньше чем на $\frac{\varepsilon}{2(N+1)}$, где обозначено $\Delta_k^i = \left[x_{k-1}^i, x_k^i\right)$, $\left|\Delta_k^i\right| = x_k^i - x_{k-1}^i$, $m_k^i = \inf_{x\in\Delta_k^i} f(x)$, $\alpha_i = x_0^i < x_1^i < \dots < x_{s_i}^i = \beta_i$, $\max_k \left|\Delta_k^i\right| < \delta_i$.

Положим $\varphi(x) = m_k^i$, если $x \in \Delta_k^i$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \notin \cup_{i=1}^{N+1} \cup_{k=1}^{s_i} \Delta_k^i$. Ясно, что φ – финитная ступенчатая функция. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - \varphi(x)|\, dx = \sum_{i=0}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - \varphi(x)|\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1} \left(\int_{x_{i-1}}^{\alpha_i} |f(x)|\, dx + \int_{\beta_i}^{x_i} |f(x)|\, dx + \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |f(x) - \varphi(x)|\, dx \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)|\, dx - \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |f(x)|\, dx \right) + \sum_{i=1}^{N+1} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |f(x) - \varphi(x)|\, dx \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{k=1}^{s_i} \int_{x_{k-1}^i}^{x_k^i} \left(f(x) - m_k^i \right)\, dx =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{N+1} \left(\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x)\, dx - \sum_{k=1}^{s_i} m_k^i \left| \Delta_k^i \right| \right) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда следует (20.4) и тем самым завершается доказательство первого равенства теоремы.

Второе равенство доказывается аналогично. $\square$

20.2 Замкнутые и полные ортонормированные системы

Рассмотрим произвольную ортонормированную систему $\{\varphi_k\}$ в евклидовом пространстве R.

Определение. Ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ называется замкнутой, если для любого элемента $f \in R$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая линейная комбинация конечного числа элементов φ_k, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\| < \varepsilon.$$

Теорема 1. *Если ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ замкнута, то для любого элемента $f \in R$ неравенство Бесселя обращается в равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2 = \|f\|^2,$$

называемое равенством Парсеваля.

Доказательство. Фиксируем $f \in R$ и $\varepsilon > 0$. Из замкнутости системы $\{\varphi_k\}$ следует, что найдутся такие число n и коэффициенты $c_, \ldots, c_n$, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 < \varepsilon^2.$$

Но, в силу свойства минимальности коэффициентов Фурье $a_k = (f, \varphi_k)$ и следствия 1 из него,

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right\|^2 \leq \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 < \varepsilon^2,$$

откуда, учитывая неравенство Бесселя, получаем

$$0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 < \varepsilon^2.$$

Поскольку с ростом n выражение $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ убывает, то отсюда вытекает, что для всех номеров $m \geq n$ также справедливо неравенство

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{m} a_k^2 < \varepsilon^2,$$

а это и означает, что

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2. \quad \square$$

Теорема 2. *Если ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ замкнута в R, то для любого элемента $f \in R$ его ряд Фурье сходится к f по норме пространства R, т. е.*

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\, \varphi_k \right\| = 0.$$

Доказательство мгновенно следует из теоремы 1 и следствия 1 из свойства минимальности коэффициентов Фурье. В самом деле, в силу равенства Парсеваля,

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\, \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)^2 \to 0 \quad (n \to \infty). \qquad \square$$

Замечание. В пространстве кусочно непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций тригонометрическая система является замкнутой (это мы докажем позже). Норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx}.$$

Сходимость по норме этого пространства имеет такой вид:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) \right)^2 dx = 0,$$

где a_k и b_k – коэффициенты Фурье функции f. Такой вид сходимости называют также сходимостью в среднем. Из сходимости в среднем последовательности функций не следует поточечная сходимость этой последовательности. Например, последовательность

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} 1, & \frac{k}{n} \le x < \frac{k+1}{n}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right), \end{cases} \quad k = 0, \ldots, n-1,\ n = 1, 2, \ldots,$$

сходится в среднем к функции, тождественно равной нулю, но расходится в каждой точке.

Определение. Ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ называется полной, если не существует ненулевого элемента $f \in R$, ортогонального ко всем φ_k. Другими словами, для полной системы $\{\varphi_k\}$ из равенств $(f, \varphi_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ следует, что f – нулевой элемент в R.

Теорема 3. *Если ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ замкнута, то она полная.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}$ замкнута, а f – ортогональный ко всем φ_k. Тогда все коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\varphi_k\}$ равны нулю и, в силу равенства Парсеваля,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Из аксиом нормы следует, что f – нулевой элемент пространства R. $\square$

Теорема 4 (единственность ряда Фурье). *Если ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ полная, то два различных элемента $f, g \in R$ не могут иметь одинаковые ряды Фурье.*

Доказательство. Если $(f, \varphi_k) = (g, \varphi_k)$, то $(f - g, \varphi_k) = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$, т. е. разность $f - g$ ортогональна ко всем φ_k. Отсюда, в силу полноты $\{\varphi_k\}$, следует, что $f - g = 0$, т. е. $f = g$. $\square$

Из теорем 3 и 4 мгновенно вытекает

Следствие. *Если ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ замкнута, то два различных элемента $f, g \in R$ не могут иметь одинаковых рядов Фурье.*

20.3 Тригонометрические ряды Фурье

20.3.1 Ядро Дирихле и его свойства. Принцип локализации

Пусть функция f абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$ в несобственном смысле. Найдем выражение для частичной суммы ее ряда Фурье по тригонометрической системе

$$S_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx]\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \right] dt.$$

Обозначим

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt. \tag{20.5}$$

Функция $D_n(t)$ называется ядром Дирихле. Тогда получим

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t)\, dt.$$

Интеграл в правой части называется интегралом Дирихле.

Свойства ядра Дирихле.

1) $$D_n(0) = n + \frac{1}{2} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

2) $$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, dt = 1 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

3) $$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad (n = 0, 1, \dots,\ t \neq 2\pi k,\ k \in \mathbb{N}).$$

Первые два свойства вытекают сразу из определения (20.5) ядра Дирихле. Докажем 3). Для $n = 0, 1 \dots,\ t \neq 2\pi k,\ k \in \mathbb{N}$ имеем

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left(\sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2 \sin \frac{t}{2} \cos kt \right) =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left[\sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{2k+1}{2} t - \sin \frac{2k-1}{2} t \right) \right] = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

4) *Из* (20.5) *сразу видно, что ядро Дирихле – четная, непрерывная,* 2π*-периодическая функция. Поэтому*

$$\int_{-\pi}^{0} D_n(t)\, dt = \int_{0}^{\pi} D_n(t)\, dt = \frac{\pi}{2},$$

или
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\,dt = 1.$$

Вернемся к частичным суммам ряда Фурье абсолютно интегрируемой на $[-\pi,\pi]$, 2π-периодической функции f. Имеем

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u)f(x+u)\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)f(x+u)\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(u)f(x+u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)f(x+u)\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)f(x-t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)f(x+u)\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]\,dt.$$

Отсюда вытекает

Следствие. *Пусть* $0<\delta<\pi$, $x\in[-\pi,\pi]$, 2π*-периодическая функция* f *абсолютно интегрируема на* $[-\pi,\pi]$. *Тогда*

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]\,dt + \overline{o}(1) \quad (n\to\infty).$$

Доказательство. В силу полученного выше равенства,

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]\,dt.$$

Поэтому достаточно показать, что последнее слагаемое справа стремится к нулю при $n\to\infty$. При фиксированном $x\in[-\pi,\pi]$ на отрезке $t\in[\delta,\pi]$ функция $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируема и поэтому, в силу теоремы Римана,

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t \cdot \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt \to 0 \quad (n \to \infty). \quad \square$$

Из этого следствия вытекает

Теорема (принцип локализации). *Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда сходимость ряда Фурье функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ зависит только от существования при $n \to \infty$ предела интеграла*

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\delta} D_n(t) \left[f\left(x_0 + t\right) + f\left(x_0 - t\right)\right] dt,$$

где δ – сколь угодно малое положительное число. Иначе говоря, сходимость ряда Фурье в точке x_0 определяется лишь поведением функции f в любой сколь угодно малой окрестности точки x_0.

20.3.2 Условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке

Лемма. *Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на $[0, \pi]$. Тогда при любом $\delta \in (0, \pi]$ интегралы*

$$\int_{0}^{\delta} \frac{|f(t)|}{t}\, dt \quad \text{и} \quad \int_{0}^{\pi} \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt \tag{20.6}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Выберем $\delta_1 \in (0, \delta]$, такое, что у функции f нет других особенностей на $(0, \delta_1]$, за исключением, быть может, точки 0. Это возможно, поскольку у функции f может быть не более конечного числа особых точек на $[0, \pi]$. Функции $\frac{1}{t}$ и $\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ ограничены на $[\delta_1, \delta]$ и $[\delta_1, \pi]$, соответственно, а функция f абсолютно интегрируема на $[\delta_1, \pi]$ по условию. Поэтому функции $\frac{|f(t)|}{t}$ и $\frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируемы на $[\delta_1, \delta]$ и $[\delta_1, \pi]$, соответственно. Значит, сходимость интегралов в (20.6) определяется сходимостью интегралов

$$\int_{0}^{\delta_1} \frac{|f(t)|}{t}\, dt \quad \text{и} \quad \int_{0}^{\delta_1} \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt, \tag{20.7}$$

причем единственная особенность у этих интегралов может быть лишь в нуле. Но поскольку функции $\varphi_1(t) = \frac{|f(t)|}{t}$ и $\varphi_2(t) = \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}$ эквивалентны при $t \to 0+$

$$\left(\lim_{t\to 0+} \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} = \lim_{t\to 0+} \frac{2\sin\frac{t}{2}}{t} = 1\right),$$

то оба интеграла в (20.7), в силу признака сравнения, сходятся или расходятся одновременно. $\square$

Предположим, что в некоторой точке x у 2π-периодической, абсолютно интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ функции f существуют односторонние пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$. Обозначим

$$\varphi_x(t) = f(x+t) - f(x+0) + f(x-t) - f(x-0).$$

Ясно, что функция $\varphi_x(t)$ при фиксированном x 2π-периодическая и абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$.

Теорема (признак Дини сходимости ряда Фурье в точке). *Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$ и пусть в некоторой точке x у функции f существуют односторонние пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$. Если при некотором $\delta > 0$ интеграл*

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi_x(t)|}{t}\,dt \tag{20.8}$$

сходится, то ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{20.9}$$

Доказательство. Имеем

$$S_n(x,f) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]\,dt - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\varphi_x(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

Если сходится интеграл (20.8), то, в силу леммы, интеграл

$$\int_0^\pi \frac{|\varphi_x(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

сходится, т. е. функция $\frac{\varphi_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируема на $[0,\pi]$. Поэтому, в силу теоремы Римана,

$$\int_0^\pi \frac{\varphi_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt \to 0 \quad (n\to\infty). \quad \square$$

Следствие 1. *Пусть f – кусочно непрерывная функция. Если в точке x интеграл* (20.8) *сходится, то ряд Фурье функции f сходится к $f(x)$.*

Это сразу следует из доказанной теоремы и из определения кусочно непрерывной функции, для которой в каждой точке x справедливо равенство $f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Следствие 2. *Пусть 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ функция f такова, что в некоторой точке x существуют $f(x+0)$, $f(x-0)$,*

$$f'_+(x) = \lim_{t\to 0+}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}, \quad f'_-(x) = \lim_{t\to 0-}\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}.$$

Тогда ряд Фурье функции f в точке x сходится к значению (20.9).

Доказательство. Достаточно показать, что сходится интеграл (20.8). Имеем

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\varphi_x(t)}{t} = \lim_{t\to 0+}\left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right) =$$

$$= f'_+(x) - f'_-(x).$$

Поэтому функция $\frac{\varphi_x(t)}{t}$ ограничена в некоторой окрестности точки 0 и, следовательно, точка 0 не является особой для интеграла (20.8). Поэтому при некотором $\delta > 0$ этот интеграл сходится и тем самым завершается доказательство. $\square$

Следствие 3. *Если функция f дифференцируема в точке x, то ее ряд Фурье в точке x сходится к значению $f(x)$.*

Это сразу вытекает из следствия 2 и из признака Дини.

Пример 1. Пусть $f(x) = \operatorname{ch} x$ $(-\pi < x \le \pi)$. Тогда

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x \sin nx\, dx = 0$$

и

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x \cos nx\ dx = \frac{1}{\pi}\ \operatorname{sh} x \cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh} x \sin nx\, dx =$$

$$= (-1)^n \frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi + \frac{n}{\pi}\operatorname{ch} x \sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - n^2\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x \cos nx\, dx =$$

$$= (-1)^n \frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi - n^2 a_n, \quad \text{откуда} \quad a_n = (-1)^n \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sh}\pi}{1+n^2},$$

а ряд Фурье имеет вид

$$\operatorname{ch} x \ \sim\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sh}\pi}{1+n^2}\cos nx = \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{1+n^2}.$$

Этот ряд сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$. Функция $\operatorname{ch} x$ дифференцируема на $(-\pi, \pi)$ и поэтому ее ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in (-\pi, \pi)$ к значению $f(x) = \operatorname{ch} x$. В точке $x = \pi$ функция $\operatorname{ch} x$, периодически продолженная на всю числовую ось, имеет конечные односторонние производные. Поэтому, в силу следствия 2, ряд Фурье функции $\operatorname{ch} x$ в точке $x = \pi$ сходится к значению $\operatorname{ch}\pi$. Аналогично, в точке $x = -\pi$ ряд Фурье сходится к значению $\operatorname{ch}(-\pi) = \operatorname{ch}\pi$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{sh} x$ $(-\pi < x \le \pi)$. Ее коэффициенты Фурье $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sh} x \cos nx\, dx = 0$,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh} x \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\operatorname{ch} x \sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x \cos nx\, dx =$$

$$= -n(-1)^n \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sh}\pi}{1+n^2} = (-1)^{n-1}\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\frac{n}{1+n^2},$$

а ее ряд Фурье имеет вид

$$\operatorname{sh} x \sim \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{1+n^2} \sin nx.$$

Если $x \in (-\pi, \pi)$, то функция $f(x) = \operatorname{sh} x$ дифференцируема в точке x и, следовательно, ее ряд Фурье сходится к $f(x) = \operatorname{sh} x$. Если $x = \pi$, то периодически продолженная на всю числовую ось функция $\operatorname{sh} x$ в точке $x = \pi$ имеет односторонние производные. Значит, ее ряд Фурье, в силу следствия 2, сходится к значению $\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = 0$. Аналогично, в точке $x = -\pi$ ряд Фурье сходится к нулю.

Ряд Фурье функции f не является равномерно сходящимся на $[-\pi, \pi]$, ибо в противном случае его сумма была бы непрерывной на $[-\pi, \pi]$.

Пример 3. Пусть $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ $(0 < x < 2\pi)$. Продолжим функцию f периодически и получим нечетную функцию. Следовательно, $a_n = 0$, а

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{2n\pi} x \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{n}.$$

Итак, данной функции соответствует ряд Фурье

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx.$$

Как и для функции $\operatorname{sh} x$, показываем, что при $0 < x < 2\pi$ ряд Фурье сходится к $\frac{\pi - x}{2}$. Если же $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, то ряд Фурье сходится к нулю. Ясно, что ряд Фурье не является равномерно сходящимся на $[-\pi, \pi]$.

Пример 4. Разложим в ряд Фурье неограниченную периодическую функцию $f(x) = \ln \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right|$ $(x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z})$. Эта функция четная, и поэтому $b_n = 0$. Далее,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln(2 \cos x) \, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln(2 \sin x) \, dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx\right].$$

Ранее мы вычислили интеграл $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$. Отсюда следует, что $a_0 = 0$. Найдем

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\sin nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right]dx =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\left[D_n(x) + D_{n-1}(x)\right]dx =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\cos kx\right]dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Окончательно имеем

$$\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos nx.$$

Поскольку функция $f(x) = \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$ дифференцируема на $(-\pi,\pi)$, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in (-\pi,\pi)$ к значению $f(x)$. Далее, в силу периодичности, имеем

$$\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos nx \quad (x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}),$$

а при $x = (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ряд Фурье, очевидно, расходится. Ясно, что ряд Фурье не является равномерно сходящимся.

Замечание. Из непрерывности функции f в некоторой точке x не следует сходимость интеграла (20.8) из признака Дини. Например, функция

$$f(x) = \frac{1}{\ln \frac{1}{|x|}} \ (0 < |x| \leq \pi), \quad f(0) = 0,$$

очевидно, непрерывна в точке 0. Имеем

$$\varphi_0(t) = f(t) + f(-t) = \frac{2}{\ln \frac{1}{|t|}}$$

и интеграл (20.8) имеет вид

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi_0(t)|}{t}\, dt = 2 \int_0^\delta \frac{dt}{t \ln \frac{1}{t}}.$$

Этот интеграл, очевидно, расходится.

Признак Дини – достаточное условие сходимости ряда Фурье в точке x. Если не выполнено условие признака Дини, то отсюда еще не следует, что ряд Фурье расходится. Существуют примеры непрерывных функций, для которых их ряды Фурье расходятся в некоторых точках. Пример такой функции был построен Дю Буа Реймоном во второй половине XIX в. Однако долгое время оставался открытым следующий вопрос: обязан ли ряд Фурье непрерывной функции f сходиться хотя бы в одной точке? Положительный ответ на этот вопрос вытекает из знаменитой теоремы Карлесона (1966 г.), которая утверждает, что для достаточно широкого класса функций их ряды Фурье сходятся на достаточно большом множестве (мы сейчас не можем привести точную формулировку теоремы Карлесона, т. к. для этого нужно вводить понятия меры и интеграла Лебега). С другой стороны, Колмогоровым в 1927 г. был построен пример интегрируемой (в смысле Лебега) на $[-\pi, \pi]$ функции f, у которой ряд Фурье расходится в каждой точке.

20.3.3 Суммирование ряда Фурье методом Чезаро

Выше было сказано, что даже для непрерывной на всей числовой оси 2π-периодической функции ее ряд Фурье не обязан быть сходящимся в каждой точке. В этом параграфе рассматривается метод, который позволяет для любой непрерывной функции построить последовательность тригонометрических полиномов, сходящуюся к ней равномерно.

Пусть сначала 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$, а $S_n(x, f)$ – частичные суммы ее ряда Фурье. Рассмотрим средние арифметические

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{n+1}\left(S_0(x, f) + S_1(x, f) + \cdots + S_n(x, f)\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x, f).$$

Обозначим

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_n(x)\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x),$$

где D_k – ядра Дирихле. Функция Φ_n называется ядром Фейера, а сумма $\sigma_n(x, f)$ – суммой Фейера n-го порядка. При исследовании сходимости ряда мы изучали вопрос о существовании предела последовательности его частичных сумм. Сейчас будем исследовать на сходимость последовательность средних арифметических частичных сумм исходного ряда. Сходимость последовательности средних арифметических $\sigma_n(x, f)$ в терминах ряда означает, что исходный ряд суммируем в смысле Чезаро или суммируется методом средних арифметических. Ясно, что из сходимости ряда вытекает его суммируемость в смысле Чезаро к той же сумме. Обратное неверно, в чем легко убедиться на примере расходящегося числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, у которого последовательность средних арифметических сходится к нулю.

Вернемся к рядам Фурье. Если воспользоваться полученным ранее представлением

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\, dt$$

частичной суммы через ядро Дирихле, то будем иметь

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x, f) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) f(x+t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t) f(x+t)\, dt.$$

Таким образом, для изучения поведения средних рядов Фурье нужно знать свойства ядер Фейера. Отметим некоторые из них.

1) *Ядра Фейера – четные, 2π-периодические, непрерывные функции и* $\Phi_n(0) = \frac{n+1}{2}$.

2) $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = 1.$$

3) *При $t \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ справедливо равенство*

$$\Phi_n(t) = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Свойства 1) и 2) вытекают мгновенно из свойств ядер Дирихле. Докажем 3). Имеем

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}2\sin\frac{t}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t =$$

$$= \frac{1}{n+1}\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}[\cos kt - \cos(k+1)t] = \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}(1-\cos(n+1)t)\frac{1}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)4\sin^2\frac{t}{2}}2\sin^2\frac{n+1}{2}t = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}. \quad \square$$

Из свойства 3) вытекает следующее свойство.

4) *Ядро Фейера неотрицательно и при любом δ $(0 < \delta < \pi)$*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{\delta\le|t|\le\pi}\Phi_n(t) = 0.$$

В самом деле, неравенство $\Phi_n(t) \ge 0$ очевидно, а при $0 < \delta \le |t| < \pi$ имеем

$$\Phi_n(t) \le \frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} \to 0 \quad (n\to\infty). \quad \square$$

Пусть теперь f – непрерывная на всей числовой оси, 2π-периодическая функция. Тогда, в силу первой теоремы Вейерштрасса, она ограничена на $[-\pi, \pi]$, а значит, и на $\mathbb{R}$. Поэтому найдется такое число M, что $|f(x)| \le M$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Далее, покажем, что f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Из теоремы Кантора следует, что непрерывная на $[-3\pi, 3\pi]$ функция f равномерно непрерывна, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x', x'' \in [-2\pi, 2\pi]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Можем считать, что $\delta < \pi$. Если теперь $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $|x_1 - x_2| < \delta$, то найдутся такие $x', x'' \in [-2\pi, 2\pi]$, что $x' = x_1 + 2k\pi$, $x'' = x_2 + 2k\pi$. Поэтому, в силу периодичности функции f, так как $|x' - x''| < \delta$, то

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Замечание. Если функция f задана на $[-\pi, \pi]$ и непрерывна на нем, то, при условии, что $f(-\pi) = f(\pi)$, функцию f можно продолжить на всю числовую ось так, что вновь полученная функция будет непрерывной на $\mathbb{R}$. Такую продолженную функцию мы также будем обозначать через f.

Теорема Фейера. *Пусть функция f непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда последовательность сумм Фейера $\sigma_n(x, f)$ сходится к функции f равномерно на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Продолжим функцию f периодически на всю числовую ось. Оценим разность

$$|f(x) - \sigma_n(x, f)| = \left| f(x)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) f(x+t)\,dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x+t)|\Phi_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi},$$

где $\delta > 0$ пока произвольное.

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь равномерной непрерывностью функции f, найдем такое $\delta > 0$, что для любых x', x'', удовлетворяющих условию $|x' - x''| \le \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$. Если теперь

$|t| \leq \delta$, то для любого x справедливо неравенство $|(x+t)-x| = |t| \leq \delta$ и поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x)-f(x+t)|\Phi_n(t)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Далее, пользуясь ограниченностью f, найдем такое M, что $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(x)-f(x+t)|\Phi_n(t)\,dt \leq \frac{2M}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt \leq$$

$$\leq \frac{2M}{\pi}(\pi-\delta)\max_{\delta\leq t\leq\pi}\Phi_n(t) \leq 2M\max_{\delta\leq t\leq\pi}\Phi_n(t).$$

Но выше мы показали, что $\lim_{n\to\infty}\max_{\delta\leq t\leq\pi}\Phi_n(t) = 0$ при любом $\delta > 0$. Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ и найденного $\delta > 0$ найдется такое N_1, что при всех $n \geq N_1$ справедливо неравенство $\max_{\delta\leq t\leq\pi}\Phi_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{6M}$. Тогда при $n \geq N_1$ будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(x)-f(x+t)|\Phi_n(t)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Аналогично получаем, что при $n \geq N_2$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}|f(x)-f(x+t)|\Phi_n(t)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому при $n \geq N \equiv \max(N_1, N_2)$ для любого $x \in \mathbb{R}$ получим

$$|f(x)-\sigma_n(x,f)| \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Таким образом, мы показали, что последовательность $\sigma_n(x,f)$ равномерно сходится к функции f. $\square$

20.3.4 Теоремы о приближении непрерывных функций

Теорема Вейерштрасса (о приближении непрерывной функции тригонометрическими полиномами). *Пусть функция f непрерывна на $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой* *тригонометрический полином* $T(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$, *что*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \quad (-\pi \le x \le \pi).$$

Доказательство. Ясно, что любая частичная сумма ряда Фурье, а значит, и сумма Фейера, представляют собой тригонометрические полиномы. В силу теоремы Фейера, суммы Фейера сходятся равномерно к функции f. Поэтому в качестве искомого полинома $T(x)$ в данной теореме можно взять соответствующую сумму Фейера $\sigma_n(x, f)$. $\square$

Теорема Вейерштрасса (о приближении непрерывной функции алгебраическими полиномами). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический полином $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, такой, что*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad (a \le x \le b).$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(t) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi} t\right)$. Тогда получим функцию φ, непрерывную на $[0, \pi]$. Продолжим функцию φ четным образом на $[-\pi, 0]$, положив $\varphi(-t) = \varphi(t)$ $(0 \le t \le \pi)$. Получим непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию φ, причем $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$. Применяя теорему Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическими полиномами, для заданного $\varepsilon > 0$ найдем такой тригонометрический полином $T(t)$, что

$$|\varphi(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Пусть

$$T(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kt + B_k \sin kt.$$

Каждая из функций $\cos kt$ и $\sin kt$ является аналитической и поэтому раскладывается в степенной ряд, сходящийся на всей числовой прямой. Поэтому и $T(t)$ является суммой степенного ряда, сходящегося на всей числовой прямой и, следовательно, сходящегося равномерно на каждом отрезке. Значит, найдется такая частичная сумма степенного ряда $\sum_{k=0}^{m} c_k t^k$,

что
$$\left|T(t)-\sum_{k=0}^{m}c_kt^k\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(0\le t\le\pi).$$
Тогда получим
$$\left|\varphi(t)-\sum_{k=0}^{m}c_kt^k\right|\le|\varphi(t)-T(t)|+\left|T(t)-\sum_{k=0}^{m}c_kt^k\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$
Но тогда для $x\in[a,b]$ имеем $f(x)=\varphi\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right)$ и
$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{m}c_k\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right)^k\right|=\left|\varphi(t)-\sum_{k=0}^{m}c_kt^k\right|<\varepsilon\quad(a\le x\le b\ \Leftrightarrow\ 0\le t\le\pi).$$
Поскольку $\sum_{k=0}^{m}c_k\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right)^k$ – многочлен относительно x, то тем самым завершается доказательство теоремы. □

20.3.5 Замкнутость тригонометрической системы в классе кусочно непрерывных функций

Выше мы отмечали (но не доказывали), что тригонометрическая система замкнута в классе кусочно непрерывных функций. Напомним определение.

Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется замкнутой в евклидовом пространстве R, если для любого элемента $f\in R$ и для любого $\varepsilon>0$ найдется конечная линейная комбинация элементов φ_k, такая, что $\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\|<\varepsilon$.

Напомним также, что норма определяется равенством $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$, где в классе кусочно непрерывных на $[a,b]$ функций скалярное произведение определено равенством
$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Применительно к нашему случаю свойство замкнутости тригонометрической системы формулируется следующим образом.

Теорема. *Для любой кусочно непрерывной на $[-\pi,\pi]$ функции f и для любого $\varepsilon>0$ найдется такой тригонометрический полином T_n, что*
$$\|f-T_n\|^2\equiv\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-T_n(x)\right)^2\,dx<\varepsilon^2.$$

Доказательство. Пусть функция f кусочно непрерывна на $[-\pi, \pi]$. Легко показать, что тогда f ограничена на $[-\pi, \pi]$. Пусть $|f(x)| \le M$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$. Пусть $x_1, \dots, x_N \in (-\pi, \pi)$ – точки разрыва функции f (по определению кусочно непрерывной функции, их количество конечно и все они являются точками разрыва I рода). Зададим $\varepsilon > 0$ и положим

$$\delta = \frac{1}{2}\min\left\{|x_i - x_j| \ \ (i \ne j),\ x_i - (-\pi),\ \pi - x_j,\ \frac{\varepsilon^2}{16M^2(N+1)}\right\}.$$

Тогда ясно, что интервалы $(-\pi, -\pi + \delta)$, $(\pi - \delta, \pi)$ и $(x_i - \delta, x_i + \delta)$ $(i = 1, \dots, N)$ не пересекаются. Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x = \pi,\ x = -\pi, \\ f(x), & x \notin (-\pi, -\pi + \delta) \cup (\pi - \delta, \pi) \cup \left(\cup_{i=1}^N (x_i - \delta, x_i + \delta)\right), \end{cases}$$

а на отрезках $[-\pi, -\pi + \delta]$, $[\pi - \delta, \pi]$ и $[x_i - \delta, x_i + \delta]$ $(i = 1, \dots, N)$ определим функцию φ как линейную. Полученная таким образом функция φ непрерывна, $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ и $|\varphi(x)| \le M$ $(-\pi \le x \le \pi)$. Так как φ отличается от f лишь на множестве $[-\pi, -\pi+\delta] \cup [\pi - \delta, \pi] \cup \left(\cup_{i=1}^N [x_i - \delta, x_i + \delta]\right)$, то

$$\|f - \varphi\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \varphi(x))^2\, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} (f(x) - \varphi(x))^2\, dx + \int_{\pi-\delta}^{\pi} (f(x) - \varphi(x))^2\, dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_{x_i-\delta}^{x_i+\delta} (f(x) - \varphi(x))^2\, dx \le$$

$$\le 4M^2(\delta + \delta + 2N\delta) = 8M^2(N+1)\delta \le \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Отсюда имеем

$$\|f - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, так как функция φ непрерывна и $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, то, в силу теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическими полиномами, найдется такой тригонометрический полином $T_n(x) =$

$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, что для всех $x \in [-\pi, \pi]$ справедливо неравенство

$$|\varphi(x) - T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}.$$

Тогда

$$\|\varphi - T_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(x) - T_n(x))^2 \, dx \le \frac{\varepsilon^2}{4 \cdot 2\pi} \cdot 2\pi = \frac{\varepsilon^2}{4},$$

или

$$\|\varphi - T_n\| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Окончательно, в силу неравенства треугольника, получим

$$\|f - T_n\| \le \|f - \varphi\| + \|\varphi - T_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

20.3.6 Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Определение. Пусть функция f непрерывна на $[-\pi, \pi]$. Будем называть ее кусочно непрерывно дифференцируемой на $[-\pi, \pi]$, если существует такое разбиение $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = \pi$, что на каждом $[x_{i-1}, x_i]$ функция f непрерывно дифференцируема.

Например, функция $f(x) = |x|$ кусочно непрерывно дифференцируема на $[-\pi, \pi]$, так как на $[-\pi, 0]$ и на $[0, \pi]$ она непрерывно дифференцируема. Ясно, что кусочно непрерывно дифференцируемая функция f может быть недифференцируемой в конечном числе точек, однако в таких точках функция f имеет односторонние производные.

Замечание. Легко видеть, что формула интегрирования по частям, доказанная ранее для случая непрерывно дифференцируемых функций u и v, справедлива также и для кусочно непрерывно дифференцируемых функций. Действительно, в этом случае будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(x)v'(x) \, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x)v'(x) \, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[u(x)v(x)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} u'(x)v(x)\,dx \right] =$$

$$= u(\pi)v(\pi) - u(-\pi)v(-\pi) - \int_{-\pi}^{\pi} u'(x)v(x)\,dx.$$

При этом в интегралах в левой и в правой частях полученного равенства подынтегральные функции могут быть не определены в точках недифференцируемости $x_0, x_1, \ldots, x_n$, но это не влияет ни на существование, ни на величины соответствующих интегралов.

Теорема 1. *Пусть функция f кусочно непрерывно дифференцируема на $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и пусть*

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Тогда

$$f' \sim \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nx + nb_n \cos nx.$$

Доказательство. Поскольку f' непрерывна на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения $[-\pi, \pi]$, то f' (определенная всюду, кроме конечного числа точек x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$) интегрируема в собственном смысле на $[-\pi, \pi] = \cup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$. Поэтому для производной f' определены коэффициенты Фурье. Пусть

$$f' \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

Тогда, учитывая последнее замечание, получим

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,dt = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i - 0) - f(x_{i-1} + 0)] = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}f(t)\cos nt\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}n\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(-1)^n f(\pi) - (-1)^n f(-\pi)\right] + nb_n = nb_n,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}f(t)\sin nt\Big|_{-\pi}^{\pi} - n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = -na_n. \quad \square$$

Доказанная теорема показывает, что для кусочно непрерывно дифференцируемой функции f ряд Фурье ее производной получается путем формального почленного дифференцирования ряда Фурье функции f без всяких предположений относительно сходимости этих рядов. Если бы мы пользовались теоремой о почленном дифференцировании функционального ряда, то нам пришлось бы требовать более сильное условие – равномерную сходимость ряда из производных. Вместе с тем наша теорема не дает соответствующих равенств. Утверждается лишь, что если функции f соответствует ряд Фурье, то ее производной f' соответствует формально продифференцированный ряд Фурье исходной функции f.

Лемма (неравенство Коши – Буняковского). *Если последовательности чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ таковы, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ сходится абсолютно и справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $N \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n y_n|\right)^2 \le \sum_{n=1}^{N} x_n^2 \sum_{n=1}^{N} y_n^2, \tag{20.10}$$

и перейти к пределу при $N \to \infty$. Можем считать, что в неравенстве (20.10) все $x_n \geq 0$ и $y_n \geq 0$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ получим

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} (x_n - \lambda y_n)^2 = \sum_{n=1}^{N} x_n^2 - 2\lambda \sum_{n=1}^{N} x_n y_n + \lambda^2 \sum_{n=1}^{N} y_n^2.$$

Так как квадратный трехчлен относительно λ неотрицательный, то его дискриминант $D = 4\left(\sum_{n=1}^{N} x_n y_n\right)^2 - 4\sum_{n=1}^{N} x_n^2 \sum_{n=1}^{N} y_n^2 \leq 0$, а это и есть неравенство (20.10). $\square$

Пусть функция f кусочно непрерывно дифференцируема на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Продолжая f 2π-периодически на всю числовую ось, получим функцию, для которой в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$ выполнено условие одного из следствий из признака Дини сходимости тригонометрического ряда в точке. Поэтому в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$ ряд Фурье функции f сходится к значению $f(x)$. Следующая теорема показывает, что в этом случае ряд Фурье сходится к функции f равномерно.

Тоерема 2. *Пусть f – кусочно непрерывно дифференцируемая на $[-\pi, \pi]$ функция и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда ее ряд Фурье сходится к f равномерно на $[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Пусть

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

а на основании вышесказанного можем записать

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

Далее, в силу теоремы 1,

$$f' \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx,$$

где $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n = nb_n$, $\beta_n = -na_n$. Поскольку функция f' отличается от кусочно непрерывной лишь в конечном числе точек (в которых f' не определена), то функция $(f')^2$ интегрируема на $[-\pi, \pi]$. Поэтому, в силу неравенства Бесселя, для $\varepsilon_n = \max(|\alpha_n|, |\beta_n|)$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f'(x)\right)^2 dx < \infty.$$

Покажем теперь, что остатки $r_N(x)$ ряда Фурье функции f стремятся к нулю равномерно. Имеем

$$|r_N(x)| \equiv \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right| \le$$

$$\le \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\alpha_n| + |\beta_n|).$$

Поэтому, в силу неравенства Коши – Буняковского,

$$|r_N(x)|^2 \le 4 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[\max(|\alpha_n|, |\beta_n|)\right]^2 = 4 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n^2.$$

Поскольку в правой части мы получили произведение остатков сходящихся рядов и это выражение не зависит от x, то отсюда следует, что остатки $r_N(x)$ стремятся к нулю при $N \to \infty$ равномерно по x на $[-\pi, \pi]$. □

Теорема 3 (о почленном интегрировании ряда Фурье). *Пусть функция f непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и*

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{20.11}$$

Тогда

$$\int_0^t f(x)\, dx = \int_0^t \frac{a_0}{2}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, dx =$$

$$= \frac{a_0}{2} t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt - \frac{b_n}{n} (\cos nt - 1), \tag{20.12}$$

причем ряд справа в (20.12) сходится равномерно.

Доказательство. Функция $F(t) = \int_0^t \left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right] dx$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и имеет непрерывную производную $F'(t) = f(t) - \frac{a_0}{2}$. Далее,

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_0^{\pi} - \int_0^{-\pi} = \int_{-\pi}^{0} + \int_0^{\pi} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right] dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx - \pi a_0 = 0,$$

т. е. $F(\pi) = F(-\pi)$. Таким образом, к функции F можно применить теорему 2, в силу которой ряд Фурье функции F сходится к F равномерно. Пусть A_n, B_n – коэффициенты Фурье функции F. Тогда

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nt + B_n \sin nt. \tag{20.13}$$

Найдем эти коэффициенты:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} F(t) \frac{1}{n} \sin nt \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] \sin nt\, dt =$$

$$= -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt + \frac{a_0}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\, dt = -\frac{b_n}{n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin nt\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} F(t) \frac{-1}{n} \cos nt \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] \cos nt\, dt =$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt - \frac{a_0}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, dt = \frac{a_n}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Для нахождения A_0 положим в (20.13) $t = 0$. Так как $F(0) = 0$, то получим

$$0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n},$$

откуда

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Подставляя полученные выражения A_n и B_n в (20.13), будем иметь

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n}{n} \cos nt + \frac{a_n}{n} \sin nt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt - \frac{b_n}{n}(\cos nt - 1),$$

а это и есть равенство (20.12). Равномерная сходимость ряда справа в (20.12) следует из равномерной сходимости ряда справа в (20.13). $\square$

Замечание. Утверждение о сходимости (и даже равномерной) проинтегрированного почленно ряда Фурье непрерывной функции f мы получили без каких-либо предположений о сходимости исходного ряда Фурье функции f (в (20.11)).

Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании рядов Фурье могут применяться для построения рядов Фурье. Это удобно в том случае, если можем построить ряд Фурье не самой функции, а ее производной или первообразной. Тогда, почленно интегрируя или дифференцируя построенный ряд, мы получим ряд Фурье исходной функции.

21. Интеграл Римана – Стилтьеса

21.1 Интеграл Римана – Стилтьеса относительно монотонной функции

Рассмотрим одно обобщение интеграла Римана от функции, заданной на отрезке. Такое обобщение имеет многочисленные применения. Сначала напомним вкратце определение интеграла Римана.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f. Разбиением отрезка $[a, b]$ называется система точек $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ и обозначается $\Pi = \{x_i\}_{i=0}^{n}$. Отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ называются частичными отрезками, их длины обозначаются через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$, а число $d(\Pi) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ называется диаметром разбиения. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выбираем точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и составляем интегральную сумму $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$. Если существует конечный предел $\lim_{d(\Pi) \to 0} \sigma \equiv I$, не зависящий ни от выбора точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки, то функция f называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, а число I называется интегралом Римана от функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)\, dx$.

Интеграл Римана можно было бы определять и в терминах сумм Дарбу, используя понятия верхнего $\overline{I} = \inf_{\Pi}\{\overline{S}\}$ и нижнего $\underline{I} = \sup_{\Pi}\{\underline{S}\}$ интегралов, где

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad \overline{S} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$. При построении интеграла Римана мы отмечали, что интегрируемость функции f равносильна равенству $\overline{I} = \underline{I}$.

Рассмотрим теперь более общую ситуацию. Пусть α – монотонно возрастающая на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда эта функция ограничена, поскольку $-\infty < \alpha(a) \le \alpha(x) \le \alpha(b) < +\infty$. Для разбиения $\Pi = \{x_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[a, b]$ положим $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$ $(i = 1, \ldots, n)$. Далее, для ограниченной на $[a, b]$ функции f определим нижнюю и верхнюю суммы

$$\underline{S}(\Pi, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i, \quad \overline{S}(\Pi, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i,$$

где числа m_i и M_i определены выше. Далее, положим

$$\underline{I}(f, \alpha) = \sup\left\{\underline{S}(\Pi, f, \alpha)\right\}, \quad \overline{I}(f, \alpha) = \inf\left\{\overline{S}(\Pi, f, \alpha)\right\},$$

где верхняя и нижняя грани берутся по всевозможным разбиениям Π отрезка $[a, b]$. Если $\underline{I}(f, \alpha) = \overline{I}(f, \alpha)$, то функция f называется интегрируемой по отрезку $[a, b]$ в смысле Римана – Стилтьеса относительно функции α, а общее значение $\underline{I}(f, \alpha)$ и $\overline{I}(f, \alpha)$ называют интегралом Римана – Стилтьеса

$$\underline{I}(f, \alpha) = \overline{I}(f, \alpha) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \equiv \int_a^b f(x)\, d\alpha.$$

Совокупность всех функций f, интегрируемых относительно α на $[a, b]$, будем обозначать через $R(\alpha) \equiv R(\alpha; [a, b])$.

Ясно, что при $\alpha(x) = x$ получим обычный интеграл Римана. В общем же случае мы не требуем даже непрерывности функции α. Пока предполагаем только монотонность α, а ниже определим понятие интеграла Римана – Стилтьеса для более широкого класса функций α. Сначала изучим некоторые свойства интеграла Римана – Стилтьеса для монотонных функций α.

Теорема 1. *При добавлении к разбиению* Π *новой точки верхняя сумма не увеличивается, а нижняя сумма не уменьшается.*

Доказательство. Пусть $\Pi = \{x_i\}_{i=0}^n$, $x^* \in (x_{k-1}, x_k)$,

$$\underline{\omega}_1 = \inf_{x \in [x_{k-1}, x^*]} f(x), \quad \underline{\omega}_2 = \inf_{x \in [x^*, x_k]} f(x),$$

$$\overline{\omega}_1 = \sup_{x \in [x_{k-1}, x^*]} f(x), \quad \overline{\omega}_2 = \sup_{x \in [x^*, x_k]} f(x).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i = \sum_{i \neq k} m_i \Delta\alpha_i + m_k \Delta\alpha_k \leq$$

$$\leq \sum_{i \neq k} m_i \Delta\alpha_i + \underline{\omega}_1 \left(\alpha\left(x^*\right) - \alpha\left(x_{k-1}\right)\right) + \underline{\omega}_2 \left(\alpha\left(x_k\right) - \alpha\left(x^*\right)\right),$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i = \sum_{i \neq k} M_i \Delta\alpha_i + M_k \Delta\alpha_k \geq$$

$$\geq \sum_{i \neq k} M_i \Delta\alpha_i + \overline{\omega}_1 \left(\alpha\left(x^*\right) - \alpha\left(x_{k-1}\right)\right) + \overline{\omega}_2 \left(\alpha\left(x_k\right) - \alpha\left(x^*\right)\right). \quad \square$$

Следствие 1. *Для любых разбиений* Π_1, Π_2 *справедливо неравенство*

$$\underline{S}\left(\Pi_1, f, \alpha\right) \leq \overline{S}\left(\Pi_2, f, \alpha\right).$$

Доказательство. Строим разбиение $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$ и применяем теорему 1, в силу которой

$$\underline{S}\left(\Pi_1, f, \alpha\right) \leq \underline{S}\left(\Pi, f, \alpha\right) \leq \overline{S}\left(\Pi, f, \alpha\right) \leq \overline{S}\left(\Pi_2, f, \alpha\right). \quad \square$$

Следствие 2. *Справедливо неравенство*

$$\underline{I}(f, \alpha) \leq \overline{I}(f, \alpha).$$

Это следствие сразу вытекает из следствия 1.

Теорема 2 (критерий интегрируемости). *Пусть функция* α *не убывает на* $[a, b]$. *Функция* f *интегрируема в смысле Римана – Стилтьеса тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое разбиение* Π, *что справедливо неравенство*

$$\overline{S}(\Pi, f, \alpha) - \underline{S}(\Pi, f, \alpha) < \varepsilon. \tag{21.1}$$

Доказательство. Достаточность. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое разбиение Π, что справедливо (21.1). Тогда из неравенств

$$\underline{S}(\Pi, f, \alpha) \leq \underline{I}(f, \alpha) \leq \overline{I}(f, \alpha) \leq \overline{S}(\Pi, f, \alpha)$$

следует, что $0 \leq \overline{I}(f, \alpha) - \underline{I}(f, \alpha) \leq \varepsilon$. В силу произвольности ε, отсюда получаем, что $\overline{I}(f, \alpha) = \underline{I}(f, \alpha)$.

Необходимость. Пусть $f \in R(\alpha)$. Это означает, что $\overline{I}(f, \alpha) = \underline{I}(f, \alpha)$. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь определением $\overline{I}(f, \alpha)$ и $\underline{I}(f, \alpha)$, найдем такие разбиения Π_1 и Π_2, что

$$\overline{S}\,(\Pi_1, f, \alpha) - \overline{I}(f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \underline{I}(f, \alpha) - \underline{S}\,(\Pi_2, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для разбиения $\Pi \equiv \Pi_1 \cup \Pi_2$ будем иметь

$$\overline{S}\,(\Pi, f, \alpha) - \underline{S}\,(\Pi, f, \alpha) \leq \overline{S}\,(\Pi_1, f, \alpha) - \underline{S}\,(\Pi_2, f, \alpha) <$$

$$< \overline{I}(f, \alpha) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{I}(f, \alpha) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon. \quad \square$$

Теорема 3 (достаточные условия интегрируемости). *Пусть функция α не убывает на $[a, b]$.*

I. Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то $f \in R(\alpha; [a, b])$ и, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\Pi = \{x_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[a, b]$, удовлетворяющего условию $d(\Pi) \equiv \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i < \delta$, и при любом выборе точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_1]$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f\,(\xi_i)\,\Delta\alpha_i - \int_a^b f(x)\,d\alpha \right| < \varepsilon. \tag{21.2}$$

II. Если функция f монотонна на $[a, b]$, а функция α непрерывна на $[a, b]$, то $f \in R(\alpha; [a, b])$.

Доказательство. *I.* Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\eta > 0$, что справедливо неравенство $[\alpha(b) - \alpha(a)]\,\eta < \varepsilon$. Далее, пользуясь равномерной непрерывностью функции f на $[a, b]$ (которая вытекает из непрерывности f и из теоремы Кантора), найдем такое $\delta > 0$, что из условия $|x' - x''| < \delta$

вытекает неравенство $|f(x') - f(x'')| < \eta$. Отсюда получим, что для любого разбиения $\Pi = \{x_i\}_{i-0}^n$, у которого $d(\Pi) < \delta$, справедливо неравенство $M_i - m_i < \eta$ $(i = 1, \ldots, n)$. Поэтому

$$\overline{S}(\Pi, f, \alpha) - \underline{S}(\Pi, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \Delta\alpha_i \le \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \eta(\alpha(b) - \alpha(a)) < \varepsilon.$$

Из этого неравенства, в силу теоремы 2, следует интегрируемость f, а также и неравенство (21.2), в силу очевидных неравенств

$$\underline{S}(\Pi, f, \alpha) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta\alpha_i \le \overline{S}(\Pi, f, \alpha),$$

$$\underline{S}(\Pi, f, \alpha) \le \int_a^b f(x)\, d\alpha \le \overline{S}(\Pi, f, \alpha).$$

II. Пусть f возрастает и функция α непрерывна. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь непрерывностью α, для натурального n выберем разбиение Π так, что $\Delta\alpha_i < \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда, в силу монотонности f, имеем $M_i = f(x_i)$, $m_i = f(x_{i-1})$, и поэтому

$$\overline{S}(\Pi, f, \alpha) - \underline{S}(\Pi, f, \alpha) < \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] =$$

$$= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \cdot (f(b) - f(a)) < \varepsilon,$$

если только n выбрано достаточно большим. По теореме 2 получаем, что $f \in R(\alpha; [a, b])$. $\square$

Теорема 4 (элементарные свойства интеграла Римана – Стилтьеса).

a) Если $f_1 \in R(\alpha)$, $f_2 \in R(\alpha)$ на $[a, b]$, то $f_1 + f_2 \in R(\alpha)$, $c \cdot f_1 \in R(\alpha)$ при любом $c \in \mathbb{R}$, причем

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\, d\alpha = \int_a^b f_1\, d\alpha + \int_a^b f_2\, d\alpha, \quad \int_a^b c \cdot f_1\, d\alpha = c \int_a^b f_1\, d\alpha.$$

b) Если функции $f_1, f_2 \in R(\alpha)$ удовлетворяют условию $f_1(x) \le f_2(x)$ $(x \in [a, b])$, то $\int_a^b f_1\, d\alpha \le \int_a^b f_2\, d\alpha$.

c) Если $f \in R(\alpha;[a,b])$ и $a<c<b$, то $f \in R(\alpha;[a,c])$ и $f \in R(\alpha;[c,b])$, причем
$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha.$$

d) Если $f \in R(\alpha;[a,b])$ и $|f(x)| \le M$ $(x \in [a,b])$, то
$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \le M(\alpha(b)-\alpha(a)).$$

e) Если $f \in R(\alpha_1;[a,b])$ и $f \in R(\alpha_2;[a,b])$, то $f \in R(\alpha_1+\alpha_2;[a,b])$ и
$$\int_a^b f\,d(\alpha_1+\alpha_2) = \int_a^b f\,d\alpha_1 + \int_a^b f\,d\alpha_2,$$
а для $f \in R(\alpha;[a,b])$ при любом $c>0$ справедливо равенство
$$\int_a^b f\,d(c\alpha) = c\int_a^b f\,d\alpha.$$

Доказательство этих свойств аналогично доказательству соответствующих свойств интеграла Римана (проведите самостоятельно).

Теорема 5. *Пусть $f \in R(\alpha;[a,b])$ и $m \le f(x) \le M$ $(x \in [a,b])$, а функция φ непрерывна на $[m,M]$. Тогда функция $h(x) \equiv \varphi(f(x)) \in R(\alpha;[a,b])$.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь равномерной непрерывностью φ на $[m,M]$, найдем такое δ $(0<\delta<\varepsilon)$, что условие $|t'-t''|<\delta$ влечет неравенство $|\varphi(t')-\varphi(t'')|<\varepsilon$. Далее, пользуясь условием $f \in R(\alpha;[a,b])$, найдем такое $\Pi = \{x_i\}_{i=0}^n$, что
$$\overline{S}(\Pi,f,\alpha) - \underline{S}(\Pi,f,\alpha) < \delta^2.$$

Обозначим
$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$
$$M_i^* = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} h(x), \quad m_i^* = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} h(x).$$

Множество всех индексов $i=1,\ldots,n$ разобьем на два класса. К первому (обозначим его A) отнесем те номера i, для которых $M_i - m_i < \delta$, а ко второму (обозначим его B) отнесем все остальные номера i, т. е. такие, что $M_i - m_i \geq \delta$.

Если $i \in A$, то $M_i - m_i < \delta$, т. е.

$$\sup_{x' \in [x_{i-1}, x_i]} f(x') - \inf_{x'' \in [x_{i-1}, x_i]} f(x'') < \delta.$$

Отсюда следует, что $M_i^* - m_i^* \leq \varepsilon$. Если же $i \in B$, то $M_i^* - m_i^* \leq 2K$, где обозначено $K = \sup_{m \leq t \leq M} |\varphi(t)|$. Поэтому имеем

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\,\Delta\alpha_i \leq \overline{S}(\Pi, f, \alpha) - \underline{S}(\Pi, f, \alpha) < \delta^2,$$

откуда следует, что $\sum_{i \in B} \Delta\alpha_i < \delta$.

Итак,

$$\overline{S}(\Pi, h, \alpha) - \underline{S}(\Pi, h, \alpha) = \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*)\,\Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*)\,\Delta\alpha_i \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i \in A} \Delta\alpha_i + 2K \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i \leq \varepsilon(\alpha(b) - \alpha(a) + 2K).$$

Отсюда и из теоремы 2 следует, что $h \in R(\alpha)$. $\square$

Следствие. *Если $f \in R(\alpha)$, $g \in R(\alpha)$, то $f \cdot g \in R(\alpha)$, $|f| \in R(\alpha)$ и*

$$\left| \int_a^b f\,d\alpha \right| \leq \int_a^b |f|\,d\alpha.$$

Доказательство. В силу теоремы 5 при $\varphi(t) = t^2$, получаем, что $f^2 \in R(\alpha)$ и $g^2 \in R(\alpha)$. Поэтому и

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right] \in R(\alpha).$$

Если же применим теорему 5 при $\varphi(t) = |t|$, то получим, что $|f| \in R(\alpha)$, а из неравенств $f \leq |f|$ и $f \geq -|f|$ следует, что $\int_a^b f\,d\alpha \leq \int_a^b |f|\,d\alpha$ и $\int_a^b f\,d\alpha \geq -\int_a^b |f|\,d\alpha$, т. е. $\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \leq \int_a^b |f|\,d\alpha$. $\square$

Мы определили интеграл Римана – Стилтьеса с помощью верхнего и нижнего интегралов, а интеграл Римана – как предел интегральных сумм.

Для интеграла Римана – Стилтьеса тоже можно было бы рассматривать интегральные суммы Римана – Стилтьеса

$$\sigma(\Pi, f, \alpha) \equiv \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta\alpha_i,$$

где $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$. Связь между определенным выше интегралом Римана – Стилтьеса и пределом интегральных сумм Римана – Стилтьеса устанавливает следующая теорема.

Теорема. *Если существует предел* $\lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma(\Pi, f, \alpha) \equiv A$, *то* $f \in R(\alpha)$ *и справедливо равенство*

$$\int_a^b f\,d\alpha = A. \tag{21.3}$$

Доказательство. Пусть существует предел $\lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma(\Pi, f, \alpha) \equiv A$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta > 0$, что для любых $\Pi = \{x_i\}_{i=0}^n$ и $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ справедливо неравенство

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma(\Pi, f, \alpha) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда получим, что

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \le \underline{S}(\Pi, f, \alpha) \le \overline{S}(\Pi, f, \alpha) \le A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу теоремы 2, отсюда, очевидно, следует, что $f \in R(\alpha)$, а равенство (21.3) получаем из неравенства

$$\underline{S}(\Pi, f, \alpha) \le \int_a^b f\,d\alpha \le \overline{S}(\Pi, f, \alpha). \quad \square$$

Замечание. Для $\alpha(x) = x$ (случай интеграла Римана) эта теорема обратима, т. е. для интеграла Римана определение с помощью верхнего и нижнего интегралов эквивалентно определению с помощью интегральных сумм. В общем случае это не так. Из интегрируемости функции в смысле Римана – Стилтьеса, вообще говоря, не следует существование предела интегральных сумм Римана – Стилтьеса.

Следующая теорема описывает важный случай, когда интеграл Римана – Стилтьеса сводится к интегралу Римана.

Теорема. *Если функции f и α таковы, что f и α' интегрируемы в смысле Римана на $[a,b]$, то $f \in R(\alpha)$ и справедливо равенство*

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx. \tag{21.4}$$

Доказательство. По следствию из теоремы 5, функция $f\alpha'$ интегрируема по Риману на $[a,b]$. Пользуясь интегрируемостью по Риману функций $f\alpha'$ и α', для заданного $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π, такого, что $d(\Pi) < \delta$, и при любом выборе точек ξ_i справедливы неравенства

$$\left|\sum_{i-1}^{n} f\left(\xi_i\right)\alpha'\left(\xi_i\right)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha'\left(\xi_i\right)\Delta x_i - \int_a^b \alpha'(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Если $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то, в силу критерия интегрируемости по Риману функции α', получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\alpha'\left(\xi_i\right) - \alpha'\left(\eta_i\right)\right|\Delta x_i \le \sum_{i-1}^{n} \left(M_i - m_i\right)\Delta x_i < 2\varepsilon.$$

Так как функция α дифференцируема на $[x_{i-1}, x_i]$, то, в силу теоремы Лагранжа, $\Delta\alpha_i = \alpha\left(x_i\right) - \alpha\left(x_{i-1}\right) = \alpha'\left(\eta_i\right)\Delta x_i$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\alpha'\left(\eta_i\right)\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\alpha'\left(\xi_i\right)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\left[\alpha'\left(\eta_i\right) - \alpha'\left(\xi_i\right)\right]\Delta x_i.$$

Поэтому, используя ограниченность функции f ($|f(x)| \le M$ $(x \in [a,b])$), получим

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta\alpha_i - \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx\right| \le$$

$$\leq \left| \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \alpha'\left(\xi_i\right) \Delta x_i - \int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx \right| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left|f\left(\xi_i\right)\right| \cdot \left|\alpha'\left(\eta_i\right) - \alpha'\left(\xi_i\right)\right| \Delta x_i \leq \varepsilon + 2M\varepsilon = (2M+1)\varepsilon,$$

т. е. существует

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma(\Pi, f, \alpha) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx.$$

Теперь, в силу предыдущей теоремы, получаем равенство (21.4). □

21.2 Функции ограниченной вариации и интеграл Римана – Стилтьеса

До сих пор мы рассматривали интеграл Римана – Стилтьеса относительно монотонной функции α, и это было существенным, так как во всех доказательствах, связанных с суммами Римана – Стилтьеса $\underline{S}(\Pi, f, \alpha)$ и $\overline{S}(\Pi, f, \alpha)$, важную роль играло неравенство $\Delta\alpha_i \geq 0$. Мы можем расширить класс функций α в теории интегралов Римана – Стилтьеса на случай так называемых функций ограниченной вариации.

Определение. Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$ и пусть $\Pi = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ – разбиение $[a, b]$. Обозначим $\Delta f_i = f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)$ и

$$V_a^b f = \sup \sum_{i=1}^{n} \left|\Delta f_i\right|,$$

где верхняя грань берется по всевозможным разбиениям Π отрезка $[a, b]$. Число $V_a^b f$ называется полной вариацией функции f на $[a, b]$. Если $V_a^b f < +\infty$, то говорят, что функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$. Класс всех функций ограниченной вариации на $[a, b]$ будем обозначать через $V \equiv V([a, b])$.

Пример 1. Если функция f монотонна на $[a, b]$, то f имеет на $[a, b]$ ограниченную вариацию и $V_a^b f = |f(b) - f(a)|$. Это очевидно.

Пример 2. Если у функции f существует на $[a, b]$ ограниченная производная, то f имеет на $[a, b]$ ограниченную вариацию. Действительно, если $|f'(x)| \leq M$ $(a \leq x \leq b)$, то для любого разбиения Π отрезка $[a, b]$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta f_i| = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = M(b-a).$$

Пример 3. Примером непрерывной функции, имеющей неограниченную вариацию, может служить функция $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ $(0 < x \leq 2)$, $f(0) = 0$. Действительно, для разбиения $\Pi = \left\{0, \frac{2}{2n-1}, \frac{2}{2n-3}, \ldots, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, 2\right\}$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta f_i| = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| =$$

$$= \frac{2}{2n-1} + \left(\frac{2}{2n-3} + \frac{2}{2n-1}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} + 2\right) \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Пример 4. Из очевидного неравенства $|f(x) - f(a)| \leq V_a^b f$ $(a \leq x \leq b)$ следует, что каждая функция ограниченной вариации ограничена на $[a, b]$. Как показывает предыдущий пример, обратное неверно.

В отличие от монотонных, совокупность всех функций ограниченной вариации образует линейное пространство. Более того, справедлива

Теорема 1. *Пусть функции f и g имеют ограниченную вариацию на $[a, b]$, а A и B постоянные. Тогда функции $Af + Bg$ и $f \cdot g$ также имеют ограниченные вариации на $[a, b]$.*

Доказательство. Для любого разбиения $\Pi = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ отрезка $[a, b]$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} |A\Delta f_i + B\Delta g_i| \leq |A| \sum_{i=1}^{n} |\Delta f_i| + |B| \sum_{i=1}^{n} |\Delta g_i| \leq |A| V_a^b f + |B| V_a^b g.$$

Отсюда следует, что $V_a^b(Af + Bg) \leq |A| V_a^b f + |B| V_a^b g$.

Далее, так как функция с ограниченной вариацией ограничена, то из неравенств $|f(x)| \leq F$ и $|g(x)| \leq G$ следует, что

$$|f(x_i) g(x_i) - f(x_{i-1}) g(x_{i-1})| \leq$$

$$\leq |f(x_i)\, g(x_i) - f(x_i)\, g(x_{i-1})| + |f(x_i)\, g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})\, g(x_{i-1})| =$$

$$= |f(x_i)|\, |\Delta g_i| + |g(x_{i-1})|\, |\Delta f_i| \leq F\, |\Delta g_i| + G\, |\Delta f_i|\,.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta(f \cdot g)_i| \leq F \sum_{i=1}^{n} |\Delta g_i| + G \sum_{i=1}^{n} |\Delta f_i| \leq F \cdot V_a^b g + G \cdot V_a^b f.$$

Отсюда имеем

$$V_a^b(f \cdot g) \leq F \cdot V_a^b g + G \cdot V_a^b f. \quad \square$$

Следствие. *Если функции f и g монотонны на $[a, b]$, то $f - g$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$.*

Ниже мы покажем, что это следствие обратимо в том смысле, что каждая функция ограниченной вариации представима в виде разности двух монотонных функций. Это и позволит нам распространить понятие интеграла Римана – Стилтьеса относительно не только возрастающей функции, но и функции ограниченной вариации.

Определение. Пусть функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$. Функцию $v_f(x) = V_a^x f$ $(a \leq x \leq b)$ будем называть функцией полной вариации функции f на $[a, b]$.

Очевидно, что функция полной вариации v_f – неубывающая на $[a, b]$ функция.

Теорема 2. *Пусть $f \in V([a, b])$. Тогда*

a) $V_a^y f = V_a^x f + V_x^y f \quad (a \leq x \leq y \leq b)$;

b) *если, кроме того, функция f непрерывна на $[a, b]$, то и функция v_f также непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. *a*) Пусть Π_1 – разбиение отрезка $[a, x]$, а Π_2 – разбиение отрезка $[x, y]$. Тогда $\Pi \equiv \Pi_1 \cup \Pi_2$ – разбиение отрезка $[a, y]$ и

$$V_a^y f \geq \sum |\Delta f_i| = \sum\nolimits_1 |\Delta f_i| + \sum\nolimits_2 |\Delta f_i|\,.$$

Отсюда, переходя к верхней грани по всевозможным разбиениям Π_1 и Π_2, получаем

$$V_a^y f \geq V_a^x f + V_x^y f.$$

С другой стороны, так как от прибавления к разбиению новой точки сумма $\sum |\Delta f_i|$ не уменьшается, то, прибавляя к произвольному разбиению Π отрезка $[a, y]$ точку x, получим

$$\sum |\Delta f_i| \leq \sum{}' |\Delta f_i| = \sum\nolimits_1 |\Delta f_i| + \sum\nolimits_2 |\Delta f_i| \leq V_a^x f + V_x^y f.$$

Отсюда следует, что $V_a^y f \leq V_a^x f + V_x^y f$. Итак, получили равенство

$$V_a^y f = V_a^x f + V_x^y f.$$

b) Сначала покажем, что если функция f непрерывна слева в точке y $(a < y \leq b)$, то и функция v_f также непрерывна слева в точке y. Предположим противное. Учитывая монотонность функции v_f, наше предположение означает, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что $v_f(x) < v_f(y) - \varepsilon_0$ при $x < y$. Найдем такое разбиение $\Pi = \{x_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[a, y]$, что

$$v_f(y) - \frac{\varepsilon_0}{2} < \sum_{i=1}^{n} |\Delta f_i| = \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta f_i| + |f(x_{n-1}) - f(x_n)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta f_i| + |f(x_{n-1}) - f(x)| + |f(x) - f(y)| \leq$$

$$\leq v_f(x) + |f(x) - f(y)| < v_f(y) - \varepsilon_0 + |f(x) - f(y)|,$$

где произвольное $x \in (x_{n-1}, y)$. Отсюда следует, что для $x \in (x_{n-1}, y)$ справедливо неравенство $|f(x) - f(y)| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$, которое противоречит непрерывности слева функции f в точке y.

Аналогично показываем, что непрерывность справа функции f в точке $y \in [a, b)$ влечет непрерывность справа функции v_f в точке y. $\square$

Замечание. Обратное утверждению *b*) доказанной теоремы также справедливо. Именно, из непрерывности функции v_f следует непрерывность f. Это мгновенно вытекает из очевидного неравенства

$$|f(x) - f(y)| \leq |v_f(x) - v_f(y)|.$$

Теорема 3. *Пусть* $f \in V([a,b])$. *Тогда существуют монотонно возрастающие на* $[a,b]$ *функции* v_f^+ *и* v_f^-, *такие, что* $v_f^+(a) = v_f^-(a) = 0$, $f(x) - f(a) = v_f^+(x) - v_f^-(x)$ *и* $v_f(x) = v_f^+(x) + v_f^-(x)$ $(a \le x \le b)$.

Доказательство. Обозначим

$$v_f^+(x) = \frac{1}{2}\left(v_f(x) + f(x) - f(a)\right), \quad v_f^-(x) = \frac{1}{2}\left(v_f(x) - f(x) + f(a)\right).$$

Тогда, очевидно, $v_f^+(a) = v_f^-(a) = 0$, $v_f^+(x) - v_f^-(x) = f(x)$, $v_f^+(x) + v_f^-(x) = v_f(x)$ $(a \le x \le b)$. Далее, для $a \le x \le y \le b$ имеем

$$v_f^+(y) - v_f^+(x) = \frac{1}{2}\left[v_f(y) - v_f(x) + f(y) - f(x)\right] = \frac{1}{2}\left[V_x^y f + (f(y) - f(x))\right],$$

$$v_f^-(y) - v_f^-(x) = \frac{1}{2}\left[v_f(y) - v_f(x) - f(y) + f(x)\right] = \frac{1}{2}\left[V_x^y f - (f(y) - f(x))\right],$$

и монотонность v_f^+ и v_f^- следует из неравенства

$$|f(y) - f(x)| \le V_x^y f. \quad \square$$

Функции v_f^+ и v_f^- называют соответственно положительной и отрицательной вариациями функции f.

Следствие 1. *Если функция* $f \in V([a,b])$ *непрерывна, то* v_f^+ *и* v_f^- *также непрерывны.*

Это вытекает из части b) предыдущей теоремы и из определения функций v_f^+ и v_f^-.

Следствие 2. *Если функция* $f \in V([a,b])$, *то* f *может иметь разве что разрывы* I *рода, а множество всех точек разрыва функции* f *не более чем счетно.*

Это вытекает из соответствующего свойства монотонных функций.

Теперь мы можем определить интеграл Римана – Стилтьеса не только относительно монотонно возрастающей функции α, а относительно любой функции α ограниченной вариации. Действительно, пусть $\alpha \in V([a,b])$. Тогда, согласно теореме 3, представим $\alpha = v_\alpha^+ - v_\alpha^-$, где функции v_α^+ и v_α^- монотонно возрастают и поэтому для них интеграл Римана – Стилтьеса уже определен. Естественно теперь положить по определению

$$\int_a^b f\ d\alpha = \int_a^b f\ dv_\alpha^+ - \int_a^b f\, dv_\alpha^-.$$

Легко проверить, что при таком определении сохраняются рассмотренные выше свойства интеграла Римана – Стилтьеса, однако с некоторыми уточнениями. Отметим те из них, которые не совпадают со свойствами интеграла относительно монотонно возрастающей функции α (или не рассматривались выше).

1) *Для* $\alpha \in V([a,b])$ *справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^b f\, d\alpha\right| \le \int_a^b |f|\, dv_\alpha.$$

2) *Для* $\alpha \in V([a,b])$ *справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^b f\, d\alpha\right| \le V_a^b\alpha \cdot \sup_{a\le x\le b} |f(x)|.$$

3) **Формула интегрирования по частям.** *Пусть* $f, \alpha \in V([a,b])$, $f \in C([a,b])$. *Тогда*

$$\int_a^b f\, d\alpha = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha\, df.$$

4) **Аналог теоремы о среднем значении.** *Если* $f \in C([a,b])$, *а функция* α *монотонно возрастает, то существует такое* $x \in [a,b]$, *что*

$$\int_a^b f\, d\alpha = f(x)[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

5) **Аналог формулы замены переменной.** *Если* $f, \varphi \in C([a,b])$, *функция* φ *строго возрастает на* $[a,b]$, *а функция* ψ *обратная к* φ, *то справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\psi(y))\, d\psi(y).$$

Пример. Для функции

$$\alpha_1(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

для любой функции f при любом разбиении $\Pi = \{x_i\}$ имеем

$$\underline{S}\,(\Pi, f, \alpha_1) = \sum_i m_i \Delta\alpha_i = m_{i_1}, \quad \overline{S}\,(\Pi, f, \alpha_1) = \sum_i M_i \Delta\alpha_i = M_{i_1},$$

где номер i_1 такой, что $x_{i_1-1} < 0 \le x_{i_1}$. Поэтому

$$\underline{I}\,(f, \alpha_1) = \sup_{\Pi} \{\underline{S}\,(\Pi, f, \alpha_1)\} = \lim_{\delta\to 0+} \inf_{-\delta<x\le 0} f(x),$$

$$\overline{I}\,(f, \alpha_1) = \inf_{\Pi} \left\{\overline{S}\,(\Pi, f, \alpha_1)\right\} = \lim_{\delta\to 0+} \sup_{-\delta<x\le 0} f(x).$$

Отсюда видно, что интегрируемость функции f относительно α_1 равносильна непрерывности функции f слева в точке $x = 0$ и справедливо равенство

$$\int_{-1}^{1} f\, d\alpha_1 = f(0).$$

Аналогично, для функции

$$\alpha_2(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0, \\ 1, & 0 < x \le 1, \end{cases}$$

для любой функции f при любом разбиении $\Pi = \{x_i\}$ имеем

$$\underline{S}\,(\Pi, f, \alpha_1) = \sum_i m_i \Delta\alpha_i = m_{i_2}, \quad \overline{S}\,(\Pi, f, \alpha_1) = \sum_i M_i \Delta\alpha_i = M_{i_2},$$

где номер i_2 такой, что $x_{i_2-1} \le 0 < x_{i_2}$. Поэтому

$$\underline{I}\,(f, \alpha_2) = \sup_{\Pi} \{\underline{S}\,(\Pi, f, \alpha_2)\} = \lim_{\delta\to 0+} \inf_{0\le x<\delta} f(x),$$

$$\overline{I}\,(f, \alpha_2) = \inf_{\Pi} \left\{\overline{S}\,(\Pi, f, \alpha_2)\right\} = \lim_{\delta\to 0+} \sup_{0\le x<\delta} f(x).$$

Отсюда видно, что интегрируемость функции f относительно α_2 равносильна непрерывности функции f справа в точке $x = 0$ и справедливо равенство

$$\int_{-1}^{1} f\,d\alpha_1 = f(0).$$

Для функции

$$\alpha(x) = \alpha_1(x) - \alpha_2(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

интегрируемость функции f относительно α равносильна непрерывности функции f в точке $x = 0$, а

$$\int_{-1}^{1} f\,d\alpha = 0.$$

22. Кратные интегралы

22.1 Мера Жордана

Для множеств из $\mathbb{R}^n$ меру Жордана определим в три этапа.

22.1.1 Мера сегмента и ее свойства

Определение. Сегментом в $\mathbb{R}^n$ назовем множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$a^i \le x^i \le b^i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $a = \left(a^1, \ldots, a^n\right)$ и $b = \left(b^1, \ldots, b^n\right)$ фиксированные векторы, такие, что $a^i \le b^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Обозначаем $I = [a, b] = \left[a^1, b^1; \ldots; a^n, b^n\right]$.

Мерой сегмента $I = \left[a^1, b^1; \ldots; a^n, b^n\right]$ называется число

$$|I| \equiv mI = \prod_{i=1}^{n} \left(b^i - a^i\right).$$

Пусть произвольное множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Точка $x_0 \in E$ называется внутренней точкой множества E, если существует некоторая окрестность точки x_0, целиком содержащаяся в E. Другими словами, точка $x_0 \in E$ – внутренняя, если найдется такое $\delta > 0$, что

$$B(x_0, \delta) \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ d(x, x_0) \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x^i - x_0^i\right)^2} < \delta \right\} \subset E.$$

Совокупность всех внутренних точек множества E называется внутренностью E и обозначается $\operatorname{int} E$ или $\overset{\circ}{E}$. Например, если задан сегмент $I = \left[a^1, b^1; \ldots; a^n, b^n\right]$, то, очевидно,

$$\overset{\circ}{I} = (a, b) \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ a^i < x^i < b^i \ (i = 1, \ldots, n) \right\}$$

при условии, что $a^i < b^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Если же хотя бы при одном i_0 справедливо равенство $a^{i_0} = b^{i_0}$ (такой сегмент называют вырожденным), то $\overset{\circ}{I} = \emptyset$.

Лемма 1. *Пусть сегмент* $I = \left[a^1, b^1; \ldots; a^n, b^n\right]$ *является объединением конечного числа сегментов* $I_1, \ldots, I_s$, *причем* $\overset{\circ}{I_i} \cap \overset{\circ}{I_j} = \emptyset$ $(i \neq j)$. *Тогда*

$$|I| = \sum_{i=1}^{s} |I_i|\,.$$

Доказательство. Если каждую сторону $\left[a^i, b^i\right]$ сегмента I разбить на конечное число отрезков $a^i = \alpha_0^i < \alpha_1^i < \cdots < \alpha_{k_i}^i = b^i$ $(i = 1, \ldots, n)$, то получим разбиение I на сегменты $\Delta_{i_1,\ldots,i_n} \equiv \left[\alpha_{i_1}^1, \alpha_{i_1+1}^1; \ldots; \alpha_{i_n}^n, \alpha_{i_n+1}^n\right]$ $(0 \le i_j \le k_j - 1,\ j = 1, \ldots, n)$, и при этом равенство $|I| = \sum |\Delta_{i_1,\ldots,i_n}|$ очевидно.

Если же теперь $I_1, \ldots, I_s$ – произвольное разбиение сегмента I, где $I_i = \left[a_i^1, b_i^1; \ldots; a_i^n, b_i^n\right]$ $(i = 1, \ldots, s)$, то при фиксированном $k \in \{1, \ldots, n\}$, располагая числа $a_1^k, b_1^k, a_2^k, b_2^k, \ldots, a_s^k, b_s^k$ в порядке возрастания, получим разбиение отрезка $\left[a^k, b^k\right]$. Проделав эту операцию для всех $k \in \{1, \ldots, n\}$, получим такие сегменты $\Delta_{i_1,\ldots,i_n}$, которые имеют попарно непересекающиеся внутренности, $I = \cup_{i_1,\ldots,i_n} \Delta_{i_1,\ldots,i_n}$, причем каждый сегмент I_i представлен в виде объединения некоторых сегментов $\Delta_{i_1,\ldots,i_n}$. Поэтому на основании уже доказанной части леммы получим

$$|I| = \sum |\Delta_{i_1,\ldots,i_n}| = \sum_{r=1}^{s} \left(\sum_{\left\{i_1,\ldots,i_n:\ \Delta_{i_1,\ldots,i_n} \subset I_r\right\}} |\Delta_{i_1,\ldots,i_n}| \right) = \sum_{r=1}^{s} |I_r|\,. \quad \square$$

Лемма 2. *Для любого конечного набора сегментов* $I_1, \ldots, I_s$ *найдется такой конечный набор сегментов* $Q_1, \ldots, Q_r$, *что*

a) $$\overset{\circ}{Q}_i \cap \overset{\circ}{Q}_j = \emptyset \quad (i \neq j);$$

b) $$\bigcup_{i=1}^{r} Q_i = \bigcup_{j=1}^{s} I_j;$$

c) $$\textit{если} \quad \operatorname{int}(Q_i \cap I_j) \neq \emptyset, \quad \textit{то} \quad Q_i \subset I_j.$$

Доказательство. В одномерном случае лемма очевидна. Действительно, пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2s}$ – занумерованные в неубывающем порядке числа $a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s$. Если $[\alpha_k, \alpha_{k+1}] \subset \cup_{j=1}^{s} I_j$, то полагаем $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ в качестве очередного Q_i, а в противном случае переходим к следующему номеру k. Перебрав таким образом все номера $k = 1, \ldots, 2s-1$, получим лемму в одномерном случае.

Доказательство леммы в пространстве размерности большей, чем 1, проводим индукцией по n. Пусть лемма верна в $\mathbb{R}^{n-1}$. Тогда она верна и в $\mathbb{R}^n$, поскольку n-мерный сегмент можно представить в виде декартова произведения $(n-1)$-мерного сегмента и одномерного сегмента. В самом деле, просматривая всевозможные декартовы произведения одномерных и $(n-1)$-мерных сегментов, полученных в результате применения предположения индукции к проекциям исходных сегментов на соответствующие подпространства, нужно оставить те n-мерные сегменты, которые содержатся в $\cup_{j=1}^{s} I_j$. Они и будут составлять требуемый набор сегментов $\{Q_i\}$. $\square$

22.1.2 Мера фигуры и ее свойства

Определение. Фигурой в $\mathbb{R}^n$ называется такое множество, которое может быть представлено в виде конечного объединения сегментов.

Очевидно сегмент – это частный случай фигуры. Непосредственно из определения вытекают следующие свойства фигур.

1) *Каждая фигура – замкнутое и ограниченное множество.*

2) *Объединение конечного числа фигур является фигурой.*

3) *Если X_1 и X_2 фигуры, и $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, то $X_1 \cap X_2$ фигура.*

4) *Если X_1 и X_2 фигуры, и $X_1 \setminus X_2 \neq \emptyset$, то $\overline{X_1 \setminus X_2}$ фигура.*

В определении фигуры не требуется, чтобы сегменты не пересекались. Из леммы 2, в частности, вытекает следующее важное свойство, которое используется при определении меры фигуры.

5) *Каждую фигуру можно представить в виде конечного объединения сегментов, внутренности которых попарно не пересекаются.*

Набор сегментов, существование которого гарантирутся свойством 5), называется дизъюнктивным набором, а сами сегменты называют составляющими сегментами. Ясно, что у данной фигуры дизъюнктивный набор сегментов не единственный.

Определение. Пусть фигура X представлена в виде конечного объединения составляющих сегментов $I_1, \dots, I_s$. Мерой фигуры X называется число

$$mX = \sum_{k=1}^{s} |I_k|\,.$$

Для того чтобы показать корректность данного определения, нужно доказать, что определенная нами мера фигуры не зависит от способа представления данной фигуры в виде объединения составляющих сегментов. Докажем это. Пусть $X = \cup_{k=1}^{s} I_k$ и $X = \cup_{i=1}^{r} Q_i$, где $\{I_k\}$ и $\{Q_i\}$ дизъюнктивные наборы сегментов. Нужно показать, что $\sum_{k=1}^{s} |I_k| = \sum_{i=1}^{r} |Q_i|$. Обозначим $T_{k,i} = I_k \cap Q_i$. Ясно, что $T_{k,i}$ – сегмент (или $\emptyset$) и внутренности сегментов $T_{k,i}$ попарно не пересекаются. Имеем

$$I_k = I_k \cap X = I_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^{r} Q_i \right) = \bigcup_{i=1}^{r} (I_k \cap Q_i) = \bigcup_{i=1}^{r} T_{k,i}$$

и, поскольку внутренности сегментов $T_{k,i}$ попарно не пересекаются, по лемме 1 получаем $|I_k| = \sum_{i=1}^{r} |T_{k,i}|$. Отсюда следует, что $\sum_{k=1}^{s} |I_k| = \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} |T_{k,i}|$. Аналогично получаем, что $\sum_{i=1}^{r} |Q_i| = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} |T_{k,i}|$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{s} |I_k| = \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} |T_{k,i}| = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} |T_{k,i}| = \sum_{i=1}^{r} |Q_i|\,.$$

Лемма 3 (монотонность меры фигур). *Если фигуры $X \subset Y$, то $mX \le mY$.*

Доказательство. Выберем наборы составляющих сегментов для фигур X и Y. Применим к объединению этих наборов лемму 2 и построим систему сегментов $J_1, \dots, J_s$ с попарно непересекающимися внутренностями, т. е. составляющими для фигуры Y. При этом часть из этих сегментов образует дизъюнктивный набор для фигуры X. Пусть это будут сегменты $J_{i_1}, \ldots, J_{i_l}$. Тогда

$$mX = \sum_{r=1}^{l} |J_{i_r}| \leq \sum_{i=1}^{s} |J_i| = mY. \quad \square$$

Лемма 4 (полуаддитивность меры фигур). *Пусть X и Y – фигуры. Тогда $m(X \cup Y) \leq mX + mY$. Если, кроме того, $\overset{\circ}{X} \cap \overset{\circ}{Y} = \emptyset$, то $m(X \cup Y) = mX + mY$.*

Доказательство. К объединению составляющих сегментов фигур X и Y применим лемму 2 и получим набор сегментов $J_1, \ldots, J_s$, который разобьем на три непересекающихся набора. К первому набору отнесем те сегменты J_i, внутренности которых не пересекаются с X, ко второму – те сегменты, внутренности которых не пересекаются с Y. Оставшиеся сегменты образуют третий набор. Ясно, что каждый сегмент из третьего набора содержится в $X \cap Y$. Через S_1, S_2 и S_3 обозначим сумму мер сегментов из первого, второго и третьего наборов, соответственно. Тогда получим

$$m(X \cup Y) = S_1 + S_2 + S_3 \leq (S_1 + S_3) + (S_2 + S_3) = mY + mX.$$

Если же $\overset{\circ}{X} \cap \overset{\circ}{Y} = \emptyset$, то третий набор сегментов либо пустой, либо состоит лишь из вырожденных сегментов. Поэтому

$$m(X \cup Y) = S_1 + S_2 + S_3 = (S_1 + S_3) + (S_2 + S_3) = mY + mX. \quad \square$$

22.1.3 Мера Жордана

Мера Жордана определяется с помощью приближения множества фигурами извне и изнутри. Если эти приближения дают один и тот же результат, то множество объявляется измеримым по Жордану.

Определение. Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ ограничено. Внутренней мерой множества E назывется число $m_*E = \sup_{X \subset E} mX$. Внешней мерой множества E называется число $m^*E = \inf_{X \supset E} mX$.

Для любого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $m_* E \leq m^* E$. Действительно, если фигуры X и Y таковы, что $X \subset E \subset Y$, то, в силу монотонности меры фигур, $mX \leq mY$. Фиксируя Y и переходя к верхней грани по всевозможным фигурам $X \subset E$, получаем, что $m_* E \leq mY$. Переходя теперь в этом неравенстве к нижней грани по всем фигурам $Y \supset E$, получаем неравенство $m_* E \leq m^* E$.

Определение. Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется измеримым по Жордану, если $m_* E = m^* E$. В этом случае общее значение $m_* E$ и $m^* E$ называется мерой Жордана и обозначается mE. Если же $m_* E < m^* E$, то говорят, что множество E неизмеримо.

Непосредственно из определения внешней и внутренней мер мгновенно вытекает их монотонность. Поэтому и мера Жордана измеримых по Жордану множеств обладает свойством монотонности.

Пример 1. Пусть $E = X$ – фигура. Тогда E измеримо по Жордану и его мера Жордана mE равна определенной выше мере фигуры mX. Это сразу вытекает из определения меры Жордана и из свойства монотонности меры фигур.

Пример 2. Пусть $E = \overset{\circ}{X}$, где X – фигура. Тогда E измеримо по Жордану и его мера mE равна мере фигуры mX. В самом деле, так как $\overset{\circ}{X} \subset X$, то для любой фигуры $Y \supset E$, в силу замкнутости Y, справедливо также вложение $Y \supset X$. Поэтому, в силу монотонности меры фигур, $mY \geq mX$. Кроме того, существует фигура $Y \supset E$, такая, что $mY = mX$ (в качестве Y можно взять X). Это означает, что $m^* E = mX$. С другой стороны, зададим $\varepsilon > 0$ и разобьем фигуру X на составляющие сегменты $\{I_j\}_{j=1}^s$. В тех сегментах I_j, внутренности которых непустые, построим замкнутый сегмент $I'_j \subset \overset{\circ}{I}_j$, так, чтобы $\left|I'_j\right| > |I_j| - \frac{\varepsilon}{s}$. Тогда фигура $X_\varepsilon \equiv \cup_{j=1}^s I'_j \subset E$ и $mX_\varepsilon = \sum_{j=1}^s \left|I'_j\right| \geq \sum_{j=1}^s |I_j| - \varepsilon = mX - \varepsilon$. Получили, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется фигура $X_\varepsilon \subset E$, такая, что $mX_\varepsilon \geq mX - \varepsilon$. Поэтому и $m_* E \geq mX$. Учитывая, что $m_* E \leq m^* E$, получим, что $m_* E = m^* E = mX$.

Пример 3. Счетное множество может оказаться неизмеримым по Жордану. Приведем соответствующий пример. Пусть E – множество всех рациональных точек из отрезка $[0,1]$ (это множество счетное). В $\mathbb{R}$ фигурами являются конечные объединения отрезков. Пусть фигура $Y = \cup_{j=1}^{s} I_j \supset E$, где отрезки $I_j = [a_j, b_j]$ образуют дизъюнктивное разбиение фигуры Y. Можем считать, что $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_s$, а поскольку разбиение дизъюнктивное, то $a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le \cdots \le a_s \le b_s$. Покажем, что $Y \supset [0,1]$. Действительно, если $0 \le b_{k-1} < a_k \le 1$ при некотором k, то найдется рациональное число $r \in (b_{k-1}, a_k)$ и, следовательно, $Y \not\supset E$. Итак, получили, что $Y \supset [0,1]$. Отсюда, в силу монотонности меры фигур, $mY \ge m([0,1]) = 1$, а поскольку фигура $Y \supset E$ произвольная, то $m^*E \ge 1$. Легко видеть, что на самом деле $m^*E = 1$. С другой стороны, любая фигура $X \subset E$ не может содержать ни одного невырожденного отрезка, ибо в противном случае в X имелись бы иррациональные точки. Поэтому любая фигура $X \subset E$ имеет меру $mX = 0$ и, стало быть, $m_*E = 0$. Окончательно имеем $m_*E = 0 < 1 = m^*E$.

Пример 4. Даже открытое множество может оказаться неизмеримым по Жордану. Действительно, чтобы построить пример такого множества, расположим в последовательность $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ множество всех рациональных точек из интервала $(0,1)$. Далее, для фиксированного $\delta > 0$ точку r_i окружим окрестностью $\Delta_i = \left(r_i - \frac{\delta}{2^{i+1}}, r_i + \frac{\delta}{2^{i+1}}\right)$. Обозначим $G = \cup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$. Ясно, что множество G открыто как объединение открытых интервалов. Как и в предыдущем примере, легко показать, что каждая фигура, содержащая G, содержит также и весь отрезок $[0,1]$. Поэтому $m^*G \ge 1$. С другой стороны, если фигура $X \subset G$, то $mX \le \sum_{i=1}^{\infty} |\Delta_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^i} = \delta$. Значит, и $m_*G \le \delta$. Если $\delta < 1$, то получили, что $m_*G \le \delta < 1 \le m^*G$, а это означает, что множество G неизмеримо.

22.1.4 Множества жордановой меры нуль и критерий измеримости по Жордану

Из неравенств $0 \le m_*E \le m^*E$ и из условия $m^*E = 0$ следует, что $m_*E = 0$, т. е. если $m^*E = 0$, то множество E измеримо по Жордану и $mE = 0$. Другими словами, множество E имеет жорданову меру нуль тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая фигура $X \supset E$, что $mX < \varepsilon$, или, иначе говоря, для любого $\varepsilon > 0$ множество E можно покрыть конечным набором сегментов, сумма мер которых меньше, чем ε.

Простейшие свойства множеств жордановой меры нуль.

1) *Если множество E имеет меру нуль, а множество $Q \subset E$, то Q также имеет меру нуль.*

Это очевидно.

2) *Объединение любого конечного числа множеств меры нуль является множеством меры нуль.*

Доказательство. Действительно, пусть даны множества $E_1, \ldots, E_s$ нулевой меры. Зададим $\varepsilon > 0$ и каждое множество E_i погрузим в фигуру $X_i \supset E_i$, такую, что $mX_i < \frac{\varepsilon}{s}$. Тогда для фигуры $X = \cup_{i=1}^{s} X_i$ получим $E = \cup_{i=1}^{s} E_i \subset X$ и, в силу полуаддитивности меры фигур, $mX = m\left(\cup_{i=1}^{s} X_i\right) \leq \sum_{i=1}^{s} mX_i < \varepsilon$. Таким образом, $mE = 0$. $\square$

Замечание. Свойство 2 теряет силу для случая счетного объединения множеств. В самом деле, в примере 3 мы привели счетное, неизмеримое по Жордану множество рациональных точек из отрезка $[0, 1]$. В то же время одноточечное множество, очевидно, измеримо и имеет меру нуль.

Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть граничной точкой множества E, если в любой окрестности точки x_0 содержатся как точки множества E, так и точки, не принадлежащие E. Не следует путать понятие граничной и предельной точки множества. Так, изолированная точка множества является, очевидно, его граничной, но не предельной точкой. Легко показать, что все точки множества подразделяются на внутренние и граничные. Но среди граничных точек множества могут оказаться и точки, не принадлежащие самому множеству. Совокупность всех граничных точек множества E называется границей множества E и обозначается через ∂E.

Утверждение. *Для любого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ его граница ∂E – замкнутое множество.*

Доказательство. Нужно показать, что каждая точка, предельная для ∂E, принадлежит ∂E. Пусть x_0 – предельная для ∂E. Выберем произвольную окрестность U_0 точки x_0. В ней содержится точка $x_1 \in \partial E$. Выберем окрестность $U_1 \subset U_0$ точки x_1. Так как $x_1 \in \partial E$, то в окрестности U_1 содержатся как точки из E, так и точки, не принадлежащие E, а так как $U_1 \subset U_0$, то это же справедливо и для U_0. Это означает, что x_0 – граничная для E, т. е. $x_0 \in \partial E$. $\square$

Напомним, что компактным называется такое множество, из любого открытого покрытия которого можно извлечь конечное подпокрытие. Ранее был доказан следующий критерий компактности множества в $\mathbb{R}^n$.

Теорема Гейне – Бореля. *Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Теорема (критерий измеримости по Жордану). *Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда его граница ∂E имеет жорданову меру нуль.*

Доказательство. Пусть множество E измеримо. Покажем, что ∂E имеет меру нуль. Зададим $\varepsilon > 0$ и построим фигуру $Y \supset E$, такую, что $mY < m^*E + \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, построим фигуру $X_1 \subset E$, такую, что $mX_1 > m_*E - \frac{\varepsilon}{4}$. Стягивая каждый из составляющих фигуру X_1 сегментов относительно центра, можем построить такую фигуру $X \subset X_1$, что $mX > mX_1 - \frac{\varepsilon}{4}$ и $X \subset \overset{\circ}{X}_1$. Если точка $x \in X$, то x входит в $\overset{\circ}{X}_1$ вместе с некоторой окрестностью, а из вложения $X \subset \overset{\circ}{X}_1 \subset E$ следует, что x входит в E вместе с некоторой окрестностью. Таким образом, фигура X состоит лишь из внутренних точек множества E (т. е. не содержит точек из ∂E) и

$$mX > mX_1 - \frac{\varepsilon}{4} > m_*E - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = m_*E - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку $Y \supset E$ и Y – замкнутое множество, то $\partial E \subset Y$. Поэтому $Y \setminus X \supset \partial E$. Обозначим $W = \overline{Y \setminus X}$. По свойству фигур, W – фигура, и ясно, что $Y = X \cup W$, причем $\overset{\circ}{X} \cap \overset{\circ}{W} = \emptyset$. В силу аддитивности меры фигур, получаем, что $mY = mX + mW$, откуда

$$mW = mY - mX < m^*E + \frac{\varepsilon}{2} - \Big(m_*E - \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \varepsilon$$

(мы воспользовались равенством $m_*E = m^*E$, которое справедливо в силу измеримости E). Итак, по заданному $\varepsilon > 0$ мы построили фигуру $W \supset \partial E$, такую, что $mW < \varepsilon$. Это и означает, что ∂E имеет жорданову меру нуль.

Обратно, пусть ∂E имеет жорданову меру нуль. Зададим $\varepsilon > 0$ и построим фигуру $W \supset \partial E$, такую, что $mW < \varepsilon$. Можем сразу предполагать, что $\partial E \subset \overset{\circ}{W}$, ибо в противном случае достаточно взять такую фигуру $W_1 \supset \partial E$, что $mW_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, и расширить относительно центра составляющие сегменты фигуры W_1 так, чтобы получить такую фигуру W, что $\overset{\circ}{W} \supset W_1$ и $mW < \varepsilon$.

Обозначим $Y = E \cup W$, $X = \overline{Y \setminus W}$ и покажем, что X и Y фигуры. Множество X замкнуто, т. к. это замыкание множества $Y \setminus W$, и $X \subset Y$, а Y – ограниченное множество (как объединение ограниченного множества E и фигуры W). Поэтому ограничено и множество X. В силу теоремы Гейне – Бореля, множество X компактно. Кроме того, из равенств $X = \overline{Y \setminus W} = \overline{(E \cup W) \setminus W}$ и из того, что $\partial E \subset \overset{\circ}{W}$, следует, что $X \subset \overset{\circ}{E}$. Для каждой точки $x \in X$ построим открытый куб с центром в точке x, содержащийся в $\overset{\circ}{E}$. Совокупность всех таких кубов образует открытое покрытие компактного множества X, из которого можно выбрать конечное число кубов, покрывающих X и содержащихся во внутренности E. Объединение замыканий этих кубов дает нам фигуру $\tilde{X} \supset X$. Из построения ясно, что $\tilde{X} \subset Y$. Далее, так как $Y \supset W$ и $X = \overline{Y \setminus W}$, то $Y = X \cup W$, а из вложения $X \subset \tilde{X} \subset Y$ следует, что $Y = \tilde{X} \cup W$, т. е. Y – фигура. Но тогда и $X = \overline{Y \setminus W}$ также является фигурой.

Наконец, поскольку X и W не имеют общих внутренних точек, то по свойству аддитивности меры фигур, имеем $mY = mX + mW$, т. е. $mY - mX = mW < \varepsilon$. Отсюда и из неравенства $mX \le m_*E \le m^*E \le mY$ следует, что $m^*E - m_*E < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ – произвольное, то $m_*E = m^*E$. $\square$

Пример 1. В $\mathbb{R}^2$ многоугольник – измеримое множество. Действительно, граница многоугольника состоит из конечного числа отрезков. Поэтому достаточно показать, что отрезок в $\mathbb{R}^2$ имеет меру нуль. Для этого разбиваем отрезок на достаточно мелкие части и на каждой из них как на диагонали строим сегмент (т. е. прямоугольник в $\mathbb{R}^2$, стороны которого параллельны координатным осям). Ясно, что таким способом можем получить фигуру, мера которой меньше любого наперед заданного положительного ε.

Пример 2. Множество точек квадрата $[0,1]^2$ с рациональными координатами не измеримо. Действительно, границей этого множества является весь квадрат $[0,1]^2$, мера которого равна 1, т. е. положительна.

22.1.5 Свойства меры Жордана

Теорема 1. *Объединение, пересечение, разность и симметрическая разность двух измеримых по Жордану множеств – измеримые множества.*

Доказательство. В силу критерия измеримости, достаточно показать, что для измеримых множеств A и B справедливы следующие включения:

1) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$; 2) $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$;

3) $\partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B$; 4) $\partial(A \Delta B) \subset \partial A \cup \partial B$.

Докажем 1). Если $x_0 \notin \partial A \cup \partial B$, то $x_0 \notin \partial A$ и $x_0 \notin \partial B$. Поэтому найдется окрестность U_1 точки x_0, состоящая либо только из точек множества A, либо из точек дополнения cA, и окрестность U_2 точки x_0, состоящая либо только из точек множества B, либо только из точек дополнения cB. Обозначим $U = U_1 \cap U_2$. Возможен один из следующих четырех случаев:

$a)$ $U \subset A \cap B$; $b)$ $U \subset A \cap cB$; $c)$ $U \subset cA \cap B$; $d)$ $U \subset cA \cap cB$. В первых трех случаях имеем $U \subset A \cup B$, а в последнем $U \subset c(A \cup B)$. В любом случае получаем, что x_0 не является граничной точкой множества $A \cup B$.

Для доказательства 2) заметим, что в случае $a)$ имеем $U \subset A \cap B$, а в случаях $b)$, $c)$ и $d)$ в U нет точек из $A \cap B$. Поэтому $x_0 \notin \partial(A \cap B)$.

Докажем 3). Так как в случаях a) и c) U состоит из точек множества B, то в U нет точек из $A \setminus B$. В случае b) U состоит из точек множества $A \setminus B$, а в случае d) U состоит из точек дополнения к множеству $A \setminus B$. Поэтому $x_0 \notin \partial(A \setminus B)$.

Для доказательства 4) группируем случаи b), c) и a), d). □

Теорема 2 (конечная аддитивность меры). *Пусть множества* $E_1, \ldots, E_s$ *измеримы по Жордану и* $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. *Тогда множество* $E = \cup_{i=1}^{s} E_i$ *измеримо и справедливо равенство*

$$mE = \sum_{i=1}^{s} mE_i. \tag{22.1}$$

Доказательство. Измеримость множества E следует из предыдущей теоремы по индукции. Для доказательства равенства (22.1) достаточно показать, что это равенство справедливо для двух множеств, а затем применить индукцию.

Пусть фигуры $X \supset E_1, Y \supset E_2$. Тогда $X \cup Y$ – фигура и $X \cup Y \supset E_1 \cup E_2$. Поэтому, в силу полуаддитивности меры фигур,

$$m^* (E_1 \cup E_2) \leq m(X \cup Y) \leq mX + mY.$$

Переходя в правой части к нижней грани по всевозможным фигурам $X \supset E_1$ и $Y \supset E_2$, получаем

$$m^* (E_1 \cup E_2) \leq m^* E_1 + m^* E_2. \tag{22.2}$$

С другой стороны, для любых фигур $X \subset E_1$ и $Y \subset E_2$ фигура $X \cup Y \subset E_1 \cup E_2$ и поэтому

$$m_* (E_1 \cup E_2) \geq m(X \cup Y) = mX + mY$$

(последнее равенство справедливо в силу аддитивности меры фигур, причем условие $X \cap Y = \emptyset$ вытекает из того, что $E_1 \cap E_2 = \emptyset$). Переходя к верхней грани по всем фигурам $X \subset E_1$ и $Y \subset E_2$, из последнего неравенства получим, что

$$m_* (E_1 \cup E_2) \geq m_* E_1 + m_* E_2. \tag{22.3}$$

Теперь из (22.2) и (22.3) и из измеримости множеств E_1 и E_2 следует, что

$$m^*\left(E_1 \cup E_2\right) \leq mE_1 + mE_2 \leq m_*\left(E_1 \cup E_2\right),$$

а если учесть, что $m_*\left(E_1 \cup E_2\right) \leq m^*\left(E_1 \cup E_2\right)$, то получим равенство

$$m_*\left(E_1 \cup E_2\right) = m^*\left(E_1 \cup E_2\right) = mE_1 + mE_2. \quad \square$$

Следствие. *Если множества A и B измеримы, то*

$$m(A \cup B) = mA + mB - m(A \cap B).$$

Доказательство. Измеримость множеств $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$ доказана в теореме 1. На основании конечной аддитивности меры имеем

$$m(A \cup B) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A) + m(A \cap B) =$$

$$= m(A \setminus B) + m(A \cap B) + m(B \setminus A) + m(A \cap B) - m(A \cap B) =$$

$$= m((A \setminus B) \cup (A \cap B)) + m((B \setminus A) \cup (A \cap B)) - m(A \cap B) = mA + mB - m(A \cap B).$$

$\square$

22.2 Интеграл Римана в многомерном пространстве

Диаметром множества A будем называть величину

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} |x - y| = \sup_{x,y \in A} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(y^i - x^i\right)^2},$$

где верхняя грань берется по всевозможным векторам $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in A$, $y = \left(y^1, \ldots, y^n\right) \in A$.

Пусть E – измеримое по Жордану множество в $\mathbb{R}^n$. Набор множеств $\Pi = \{E_1, \ldots, E_s\}$ называется разбиением множества E, если все множества E_i измеримы, попарно не пересекаются и $E = \cup_{i=1}^{s} E_i$. Диаметром разбиения Π называется наибольший из диаметров множеств E_i, составляющих разбиение Π, т. е.

$$d(\Pi) = \max_{i=1,\ldots,s} \operatorname{diam} E_i.$$

Пусть измеримое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ и функция f задана на E. Далее, пусть $\Pi = \{E_1, \ldots, E_s\}$ – разбиение множества E. В каждом из E_i выберем точку $\xi_i \in E_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Сумма

$$\sigma = \sum_{i=1}^{s} f\left(\xi_i\right) mE_i$$

называется интегральной суммой, соответствующей данному разбиению Π и данному выбору точек ξ_i.

Определение. Число I называется пределом интегральных сумм σ при стремлении к нулю диаметра разбиения $d(\Pi)$, если для любого положительного ε найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\Pi = \{E_1, \ldots, E_s\}$ диаметра меньшего, чем δ, при любом выборе точек $\xi_i \in E_i$ справедливо неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$. Обозначают это так:

$$I = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma.$$

Если существует конечный предел интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения, то функцию f называют интегрируемой по Риману на множестве E, а значение этого предела называют интегралом (многомерным, кратным) от функции f по множеству E. Обозначают это так:

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma = I = \int_E f(x)\, dx = \underbrace{\int \ldots \int}_{E} f\left(x^1, \ldots, x^n\right)\, dx^1 \ldots dx^n$$

$\big($здесь вектор $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right)\big)$.

Замечание. Данное определение похоже на определение интегрируемости функции, заданной на отрезке. Вместе с тем отличие состоит не только в том, что здесь $E \subset \mathbb{R}^n$, но и в том, что и в одномерном случае множество E не обязано быть отрезком и, кроме того, даже если $E \subset \mathbb{R}$ – отрезок, то разбиения Π, по которым строятся интегральные суммы, состоят не обязательно из отрезков, а из произвольных измеримых множеств.

В связи с тем, что данное определение интеграла применимо для более сложных множеств по сравнению с отрезком в $\mathbb{R}$, то и свойства интеграла, доказанные нами ранее в одномерном случае, могут не сохраняться. Например, ранее мы показывали, что из интегрируемости функции на отрезке следует ее ограниченность. Если же функция интегрируема на произвольном измеримом множестве, то она не обязана быть ограниченной. Действительно, на множестве нулевой меры интегрируема любая функция (так как каждая интегральная сумма на множестве нулевой меры равна нулю). Однако на множестве нулевой меры функция не обязана быть ограниченной. Например, функция $f(x,y) = \frac{1}{x}$ неограничена на множестве $E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = 0,\ 0 < x \le 1\big\}$. Вместе с тем нетрудно показать, что из интегрируемости функции f на множестве E следует ограниченность этой функции на внутренности $\operatorname{int} E$ множества E (если только $\operatorname{int} E \ne \emptyset$).

22.2.1 Суммы Дарбу и их свойства

Пусть на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ задана ограниченная функция f. Возьмем разбиение $\Pi = \{E_1, \ldots, E_s\}$ и обозначим

$$\underline{S}_\Pi = \sum_{i=1}^{s} \mu_i m E_i, \quad \overline{S}_\Pi = \sum_{i=1}^{s} M_i m E_i,$$

где $\mu_i = \inf_{x \in E_i} f(x)$, $M_i = \sup_{x \in E_i} f(x)$ $(i = 1, \ldots, s)$. Суммы $\underline{S}_\Pi$ и $\overline{S}_\Pi$ называются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу, соответствующими разбиению Π.

Ясно, что каждая интегральная сумма σ, построенная по разбиению Π, удовлетворяет неравенству

$$\underline{S}_\Pi \le \sigma \le \overline{S}_\Pi.$$

Разбиение $\Pi_2 = \left\{E_1^{(2)}, \dots, E_r^{(2)}\right\}$ будем называть продолжением (или измельчением) разбиения $\Pi_1 = \left\{E_1^{(1)}, \dots, E_s^{(1)}\right\}$, если для любого $j \in \{1, \dots, r\}$ найдется такое $i \in \{1, \dots, s\}$, что $E_j^{(2)} \subset E_i^{(1)}$, или, иначе говоря, если каждое множество $E_j^{(2)}$ содержится в некотором $E_i^{(1)}$.

Лемма 1. *Если разбиение* Π_2 *является измельчением разбиения* Π_1, *то* $\underline{S}_{\Pi_2} \geq \underline{S}_{\Pi_1}$ *и* $\overline{S}_{\Pi_2} \leq \overline{S}_{\Pi_1}$.

Доказательство. Достаточно доказать лемму для случая, когда Π_2 получено из Π_1 разбиением лишь одного множества E_i на два подмножества E' и E''. В этом случае $\underline{S}_{\Pi_2}$ отличается от $\underline{S}_{\Pi_1}$ лишь тем, что вместо одного слагаемого $\mu_i mE_i$ в $\underline{S}_{\Pi_1}$ будет два слагаемых $\mu_i' mE' + \mu_i'' mE''$ в $\underline{S}_{\Pi_2}$, где $\mu_i' = \inf_{x \in E'} f(x)$, $\mu_i'' = \inf_{x \in E''} f(x)$. Но из равенства $mE_i = mE' + mE''$ и из неравенств $\mu_i' \geq \mu_i$, $\mu_i'' \geq \mu_i$ сразу следует, что $\mu_i' mE' + \mu_i'' mE'' \geq mE_i$, а значит, и $\underline{S}_{\Pi_2} \geq \underline{S}_{\Pi_1}$.

Аналогично показываем, что $\overline{S}_{\Pi_2} \leq \overline{S}_{\Pi_1}$. $\square$

Лемма 2. *Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы, т. е. для любых разбиений* Π_1 *и* Π_2 *справедливо неравенство*

$$\underline{S}_{\Pi_1} \leq \overline{S}_{\Pi_2}.$$

Доказательство. Пусть $\Pi_1 = \{E_1, \dots, E_s\}$, $\Pi_2 = \{Q_1, \dots, Q_r\}$. Обозначим $T_{i,j} = Q_i \cap E_j$ $(i = 1, \dots, r,\ j = 1 \dots, s)$. Совокупность множеств $T_{i,j}$ образует разбиение множества E. Обозначим это разбиение через Π. Ясно, что Π является измельчением как разбиения Π_1, так и разбиения Π_2. Поэтому, в силу леммы 1, имеем

$$\underline{S}_{\Pi_1} \leq \underline{S}_{\Pi} \leq \overline{S}_{\Pi} \leq \overline{S}_{\Pi_2}. \quad \square$$

Связь между суммами Дарбу и интегральными суммами устанавливает следующая лемма.

Лемма 3. *Для любого разбиения* Π *суммы Дарбу* $\underline{S}_{\Pi}$ *и* $\overline{S}_{\Pi}$ *являются соответственно нижней и верхней гранями множества всех интегральных сумм* σ, *построенных по данному разбиению.*

Доказательство. Пусть $\Pi = \{E_1, \dots, E_s\}$. Ясно, что

$$\sigma = \sum_{i=1}^{s} f(\xi_i)\, mE_i \geq \sum_{i=1}^{s} \mu_i mE_i = \underline{S}_\Pi.$$

С другой стороны, для заданного $\varepsilon > 0$ в каждом E_i найдем точку $\xi_i^0 \in E_i$, такую, что $f\left(\xi_i^0\right) < \mu_i + \frac{\varepsilon}{mE}$. Тогда получим

$$\sigma_0 = \sum_{i=1}^{s} f\left(\xi_i^0\right) mE_i \leq \sum_{i=1}^{s} \left(\mu_i + \frac{\varepsilon}{mE}\right) mE_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \mu_i mE_i + \frac{\varepsilon}{mE} \sum_{i=1}^{s} mE_i = \underline{S}_\Pi + \varepsilon.$$

Вместе с предыдущим неравенством это означает, что $\underline{S}_\Pi = \inf_{\xi_i \in E_i} \sigma$.

Равенство $\overline{S}_\Pi = \sup_{\xi_i \in E_i} \sigma$ доказывается аналогично. $\square$

Теорема 1 (критерий Римана интегрируемости в терминах сумм Дарбу). *Пусть функция f ограничена на измеримом по Жордану множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Для того чтобы f была интегрируемой на E, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие*

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \left(\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi\right) = 0, \tag{22.4}$$

т. е. чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что при любом разбиении Π, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, выполнялось неравенство $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi < \varepsilon$.

Доказательство этой теоремы проводим аналогично тому, как была доказана соответствующая теорема в одномерном случае для интеграла Римана по отрезку.

Пусть f интегрируема на E. Тогда существует $I = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\Pi = \{E_1, \dots, E_s\}$, даметр которого $d(\Pi) < \delta$, при любом выборе точек $\xi_i \in E_i$ справедливо неравенство $|\sigma - I| < \frac{\varepsilon}{2}$, т. е.

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{s} f(\xi_i)\, mE_i < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда, поочередно переходя к верхней и нижней граням по всем $\xi_i \in E_i$, получим, что

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \le \underline{S}_\Pi \le \overline{S}_\Pi \le I + \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда следует, что $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi \le \varepsilon$. Это и означает, что справедливо (22.4).

Обратно, пусть выполнено условие (22.4). Обозначим через $\underline{I} = \sup_\Pi \underline{S}_\Pi$ (верхняя грань существует, так как множество всех нижних сумм Дарбу, в силу леммы 2, ограничено сверху, например, какой-нибудь верхней суммой Дарбу). Аналогично получаем, что существует $\overline{I} = \inf_\Pi \overline{S}_\Pi$. Из леммы 2 следует, что $\underline{I} \le \overline{I}$, а если учесть, что справедливо условие (22.4), то получим, что $\underline{I} = \overline{I} \equiv I$. Зададим $\varepsilon > 0$ и пользуясь условием (22.4), найдем такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, справедливо неравенство $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi < \varepsilon$. Но тогда из неравенств $\underline{S}_\Pi \le \underline{I} = I = \overline{I} \le \overline{S}_\Pi$ и $\underline{S}_\Pi \le \sigma \le \overline{S}_\Pi$ (последнее справедливо при любом выборе точек ξ_i) получим, что $|\sigma - I| \le \overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi < \varepsilon$. Отсюда, в силу произвольности ε, следует, что $I = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma$, т. е. функция f интегрируема. $\square$

Замечание. При доказательстве критерия Римана мы определили величины $\underline{I} = \sup_\Pi \underline{S}_\Pi$ и $\overline{I} = \inf_\Pi \overline{S}_\Pi$, называемые соответственно нижним и верхним интегралами, а также установили, что справедливо неравенство $\underline{I} \le \overline{I}$. Можно показать, что

$$\underline{I} = \lim_{d(\Pi)\to 0} \underline{S}_\Pi, \quad \overline{I} = \lim_{d(\Pi)\to 0} \overline{S}_\Pi$$

(мы не будем доказывать эти равенства). Тогда критерий интегрируемости может быть выражен в терминах нижнего и верхнего интегралов следующим образом.

Теорема 2. *Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство $\underline{I} = \overline{I}$.*

Доказательство. Достаточность следует из доказанного выше критерия, так как если $\underline{I} = \overline{I}$, т. е. если $\lim_{d(\Pi)\to 0} \underline{S}_\Pi = \lim_{d(\Pi)\to 0} \overline{S}_\Pi$, то

$$\lim_{d(\Pi)\to 0}\left(\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi\right) = 0,$$

а значит, выполнено условие (22.4) теоремы 1, из которой следует интегрируемость f.

Необходимость следует из неравенств $\underline{S}_\Pi \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S}_\Pi$ и из теоремы 1, так как из интегрируемости f следует, что $\lim_{d(\Pi)\to 0}\left(\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi\right) = 0$, а это влечет равенство $\underline{I} = \overline{I}$. $\square$

Итак, мы получили, что для ограниченной на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ функции f следующие три условия равносильны:

1) функция f интегрируема на E;

2) $$\lim_{d(\Pi)\to 0}\left(\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi\right) = 0;$$

3) $\underline{I} = \overline{I}$.

Отсюда сразу получается следующий критерий интегрируемости ограниченной функции.

Теорема 3. *Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируемой на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение Π, что $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi < \varepsilon$.*

Напомним, что величина

$$\omega_i = \sup_{x',x''\in E_i}\left(f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right) = \sup_{x\in E_i} f(x) - \inf_{x\in E_i} f(x) = M_i - \mu_i$$

называется колебанием ограниченной функции f на множестве E_i. В терминах колебаний разность $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi$ может быть представлена в следующем виде:

$$\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi = \sum_{i=1}^{s}\omega_i m E_i.$$

Поэтому в терминах колебаний равносильная формулировка теоремы 1 выглядит следующим образом.

Теорема 4. *Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируемой на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие*

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \sum_{i=1}^{s} \omega_i m E_i = 0.$$

Аналогично, теорема 3 может быть записана в таком виде.

Теорема 5. *Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируемой на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение Π, что*

$$\sum_{i=1}^{s} \omega_i m E_i < \varepsilon.$$

22.2.2 Достаточные условия интегрируемости

Теорема 1. *Пусть измеримое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно. Если функция f непрерывна на E, то f интегрируема на E.*

Доказательство. Так как функция f непрерывна на компактном множестве E, то, в силу теоремы Кантора, она равномерно непрерывна на E. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $x', x'' \in E$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь равномерной непрерывностью функции f, найдем δ. Пусть теперь $\Pi = \{E_i\}_{i=1}^{s}$ – произвольное разбиение множества E, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$. Тогда $\omega_i = \sup_{x',x''\in E_i} |f(x') - f(x'')| \le \varepsilon$ и поэтому

$$\sum_{i=1}^{s} \omega_i m E_i \le \varepsilon \sum_{i=1}^{s} m E_i = \varepsilon m E.$$

Это означает, что $\lim_{d(\Pi)\to 0} \sum_{i=1}^{s} \omega_i m E_i = 0$ и поэтому, в силу критерия интегрируемости, f интегрируема на E. $\square$

Теорема 2. *Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, а ограниченная на E функция f непрерывна всюду, за исключением, быть может, множества $e \subset E$ жордановой меры нуль. Тогда f интегрируема на E.*

Доказательство. Обозначим $\tilde{E} = E \setminus e$. Так как $me = 0$, то $m\tilde{E} = mE$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такую фигуру $X \subset \tilde{E}$, что $mX > m\tilde{E} - \frac{\varepsilon}{2} = mE - \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, найдем такую фигуру $Y \supset E$, что $mY < mE + \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $W = \overline{Y \setminus X}$. Ясно, что W – фигура. Получим

$$mW = mY - mX < mE + \frac{\varepsilon}{2} - \Big(mE - \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \varepsilon.$$

Представим фигуру W в виде конечного объединения составляющих сегментов $I_1, \ldots, I_s$. Можем считать, что все сегменты I_k невырожденные. Действительно, для этого достаточно выбирать невырожденную фигуру Y и такую фигуру X, что $X \subset \operatorname{int} Y$, что, очевидно, можно сделать. Обозначим через $\delta_1 > 0$ наименьшую из всех длин сторон всех сегментов I_k $(k = 1, \ldots, s)$. Так как функция f непрерывна на замкнутом и ограниченном (а значит, компактном) множестве $X \subset \tilde{E}$, то f равномерно непрерывна на X. Поэтому найдется такое $\delta_2 > 0$, что для всех $x', x'' \in X$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta_2$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Обозначим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Пусть $\Pi = \{E_1, \ldots, E_r\}$ – произвольное разбиение множества E, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$. Сумму $\sum_{j=1}^{r} \omega_j mE_j$ разобьем на две суммы $\sum'$ и $\sum''$. В $\sum'$ отнесем те слагаемые, для которых $E_j \subset X$, а остальные слагаемые отнесем к $\sum''$. Если $E_j \subset X$, то $\omega_j \le \varepsilon$ и поэтому $\sum' \le \varepsilon \sum_{j=1}^{r} mE_j = \varepsilon mE$. Пусть $E_j \not\subset X$. Тогда E_j пересекается с каким-либо из сегментов, составляющих фигуру W. Пусть это будет I_k. Через $\tilde{I}_k$ обозначим сегмент с тем же центром, что и у I_k, каждая сторона которого увеличена по сравнению со стороной сегмента I_k в 3 раза. Поскольку $\operatorname{diam} E_j < \delta_1$, то ясно, что $E_j \subset \tilde{I}_k$. Но $m\tilde{I}_k = 3^n mI_k$. Поэтому

$$\sum{}'' = \sum_j{}'' \omega_j mE_j \le 2M \sum_j{}'' mE_j \le 2M \sum_{k=1}^{s} m\tilde{I}_k =$$

$$= 2M \cdot 3^n \sum_{k=1}^{s} mI_k = 2M \cdot 3^n mW < 2M \cdot 3^n \varepsilon,$$

где $M = \sup_{x\in E}|f(x)|$. Таким образом, мы получили, что если только $d(\Pi) < \delta$, то

$$\sum_{j=1}^{r}\omega_j mE_j = \sum{}' + \sum{}'' < \varepsilon\,(mE + 2M\cdot 3^n)\,.$$

Поэтому, в силу критерия интегрируемости, функция f интегрируема на E. $\square$

В связи с двумя последними теоремами возникает вопрос. Каким может быть множество точек разрыва ограниченной интегрируемой по Риману функции? Чтобы дать ответ на этот вопрос, введем одно понятие. Будем называть внутренность n-мерного сегмента n-мерным интервалом. Ранее было доказано, что жорданова мера n-мерного интервала равна жордановой мере n-мерного сегмента.

Определение. Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством лебеговой меры нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечный или счетный набор $\{\Delta_i\}_{i\geq 1}$ интервалов, таких, что $E \subset \cup_{i\geq 1}\Delta_i$ и $\sum_{i\geq 1} m\Delta_i < \varepsilon$.

Определение множества лебеговой меры нуль отличается от определения множества жордановой меры нуль лишь тем, что множество жордановой меры нуль обязано допускать покрытие конечным набором сегментов, а множество лебеговой меры нуль – конечным или счетным набором интервалов, сумма мер которых меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Легко видеть, что множество жордановой меры нуль имеет также и лебегову меру нуль. Обратное неверно. Например, рассмотренное нами выше множество $E = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ рациональных точек из отрезка $[0,1]$ неизмеримо по Жордану. В то же время это множество имеет лебегову меру нуль. Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и покроем каждую точку r_k интервалом $\Delta_k = \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$. Тогда получим, что $E \subset \cup_{k=1}^{\infty}\Delta_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} m\Delta_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.

Теорема (критерий Лебега интегрируемости по Риману). *Пусть функция f ограничена на измеримом по Жордану множестве*

$E \subset \mathbb{R}^n$. Для того чтобы функция f была интегрируемой по Риману на E, необходимо и достаточно, чтобы множество точек разрыва функции f имело лебегову меру нуль.

Эту теорему мы принимаем без доказательства.

Пример. Функция Римана

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ – несократимая дробь} \end{cases}$$

непрерывна в каждой иррациональной точке и разрывна в каждой рациональной точке. Множество точек разрыва неизмеримо по Жордану и поэтому теорема 2 неприменима. Вместе с тем, так как множество рациональных точек имеет лебегову меру нуль, то, в силу критерия Лебега, такая функция интегрируема по Риману на $[0,1]$.

22.2.3 Свойства интеграла Римана

1. *Если E – измеримое множество, то для любой постоянной c справедливо равенство $\int_E c\,dx = c \cdot mE$.*

Это сразу следует из того, что каждая интегральная сумма равна $\sigma = \sum_{i=1}^{s} c \cdot mE_i = c \cdot mE$.

2. *Если ограниченная функция f интегрируема на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и измеримое подмножество $A \subset E$, то f интегрируема на A.*

Доказательство. Применим критерий Римана в терминах колебаний. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение $\Pi = \{A_i\}_{i=1}^{s}$ множества A, что $\sum_{i=1}^{s} \omega_i m A_i < \varepsilon$. Так как f интегрируема на E, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение $\Pi_1 = \{E_1, \ldots, E_r\}$ множества E, что $\sum_{i=1}^{r} \omega_i m E_i < \varepsilon$. Выберем разбиение Π_1 и обозначим $A_i = E_i \cap A$. Ясно, что $\omega_i\,(A_i) \le \omega_i\,(E_i)$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i\,(A_i)\, mA_i \le \sum_{i=1}^{r} \omega_i\,(E_i)\, mE_i < \varepsilon,$$

а это и означает, что f интегрируема на A. $\square$

3. *Если функция f ограничена и интегрируема на каждом из множеств E' и E'', где $E' \cap E'' = \emptyset$, то f интегрируема и на множестве $E = E' \cup E''$, причем*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E'} f(x)\,dx + \int_{E''} f(x)\,dx. \tag{22.5}$$

Это свойство называется аддитивностью интеграла. Его доказательство основано на применении следующих двух лемм, для формулировки которых нам понадобится понятие расстояния между множествами $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^n$, которое определяется равенством

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x \in A,\ y \in B} |x - y|.$$

Лемма 1. *Пусть измеримое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ и $e \subset E$ – подмножество жордановой меры нуль. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\Pi = \{E_1, \ldots, E_s\}$ множества E, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, справедливо неравенство $\sum_i{}' mE_i < \varepsilon$, где $\sum_i{}'$ означает сумму по таким номерам i, что $\operatorname{dist}(E_i, e) < \delta$.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такую содержащую множество e фигуру $X = \cup_{i=1}^r \Delta_i$, что $mX < \frac{\varepsilon}{5^n}$, где составляющие сегменты Δ_i имеют непустые внутренности. Пусть $\delta > 0$ – наименьшая из всех длин сторон всех сегментов Δ_i. Далее, пусть $\Pi = \{E_1, \ldots, E_s\}$ – произвольное разбиение множества E диаметра $d(\Pi) < \delta$. Если множество E_i такое, что $\operatorname{dist}(E_i, e) < \delta$, то ясно, что $E_i \subset \cup_{j=1}^r \tilde{\Delta}_j$, где $\tilde{\Delta}_j$ имеют те же центры, что и Δ_j, а длина каждой стороны у $\tilde{\Delta}_j$ в 5 раз больше, чем у Δ_j. Тогда получим, что

$$\sum_i{}' mE_i \le \sum_{j=1}^r m\tilde{\Delta}_j = 5^n \sum_{j=1}^r m\Delta_j = 5^n mX < \varepsilon. \quad \square$$

Лемма 2. *Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$, $E \ne \mathbb{R}^n$. Если $a \in E$, $b \notin E$, то на отрезке $[a, b] \equiv \{x \in \mathbb{R}^n :\ x = (1-t)a + tb,\ 0 \le t \le 1\}$ найдется хотя бы одна граничная точка множества E.*

Доказательство. Обозначим $x(t) = (1-t)a + tb$ $(0 \le t \le 1)$. Тогда $x(0) = a \in E$, $x(1) = b \notin E$. Далее, обозначим $\tau = \sup\{t \in [0,1] :\ x(t) \in E\}$ и покажем, что $x(\tau) \in \partial E$. В самом деле, $x(\tau)$ не является внутренней точкой множества E и не является внутренней точкой дополнения cE. Поэтому $x(\tau) \in \partial E$. $\square$

Доказательство свойства 3. Пусть $\Pi = \{E_1, \ldots, E_s\}$ – разбиение множества E. Обозначим через $\sum_i{}'$ и $\sum_i{}''$ суммы по тем номерам i, для которых $E_i \subset E'$ и $E_i \subset E''$, соответственно. Тогда

$$\sum_{i=1}^{s} \omega_i m E_i = \sum_i{}' \omega_i m E_i + \sum_i{}'' \omega_i m E_i + \sum_i{}''' \omega_i m E_i,$$

где через $\sum_i{}'''$ обозначена сумма по тем номерам i, для которых $E_i \cap E' \ne \emptyset$ и $E_i \cap E'' \ne \emptyset$. В силу интегрируемости функции f на E' и E'', суммы $\sum_i{}'$ и $\sum_i{}''$ стремятся к нулю при $d(\Pi) \to 0$. Далее, поскольку $E' \cap E'' = \emptyset$ и если $E_i \cap E' \ne \emptyset$ и $E_i \cap E'' \ne \emptyset$, то найдутся точки $x_i' \in E_i \cap E'$ и $x_i'' \in E_i \cap E''$. В силу леммы 2, на отрезке $[x_i', x_i'']$ найдется граничная точка множества E'. Иначе говоря, в сумму $\sum_i{}'''$ входят такие E_i, для которых $\operatorname{dist}(E_i, \partial E') < d(\Pi)$. Но поскольку $m(\partial E') = 0$, то, применяя лемму 1, получим, что

$$\sum_i{}''' \omega_i m E_i \le 2M \sum_i{}''' m E_i < 2M\varepsilon,$$

если только диаметр разбиения $d(\Pi) < \delta$, где δ получено из леммы 1, а $M = \sup_{x \in E} |f(x)|$. Отсюда получаем интегрируемость функции f на E.

Для доказательства равенства (22.5) строим разбиения Π' и Π'' множеств E' и E'', соответственно. Тогда $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$ – разбиение множества E. Переходя к пределу при $d(\Pi) \to 0$, получаем равенство (22.5). $\square$

Замечание. Свойство 3 теряет силу, если не требовать ограниченности функции f. Например, если $f(x,y) = 0$ $(\ (x,y) \in E' \equiv \{0 < x, y \le 1\})$, $f(x,y) = \frac{1}{y}$ $(\ (x,y) \in E'' \equiv \{x = 0,\ 0 < y \le 1\})$, то получим, что f интегрируема на E' и на E'', но неинтегрируема на $E = E' \cup E''$.

4. *Пусть функции f и g ограничены на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и пусть множество $e = \{x \in E :\ f(x) \ne g(x)\}$ имеет жорданову ме-*

ру нуль. Если f интегрируема на E, то g также интегрируема на E и

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx.$$

Доказательство. Положим $E' = E \setminus e$, $E'' = e$ и применим свойство 3. Тогда получим

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E'} f(x)\,dx + \int_{E''} f(x)\,dx = \int_{E'} g(x)\,dx \ + \ 0 =$$

$$= \int_{E'} g(x)\,dx + \int_{E''} g(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx. \quad \square$$

5. *Если функции f и g интегрируемы на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, то для любых постоянных α и β функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема на E и справедливо равенство*

$$\int_E (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_E f(x)\,dx + \beta \int_E g(x)\,dx.$$

Для доказательства составляем интегральные суммы и переходим к пределу при стремлении к нулю диаметра разбиения.

6. *Если функции f и g интегрируемы на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и $f(x) \le g(x)$ $(x \in E)$, то*

$$\int_E f(x)\,dx \le \int_E g(x)\,dx.$$

Доказательство следует из соответствующего неравенства для интегральных сумм.

7. *Если функция f интегрируема на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, то $|f|$ также интегрируем на E и справедливо неравенство*

$$\left| \int_E f(x)\,dx \right| \le \int_E |f(x)|\,dx.$$

Доказательство. Действительно, интегрируемость $|f|$ вытекает из неравенства $\omega_i(|f|) \le \omega_i(f)$ и из критерия интегрируемости в терминах колебаний. Требуемое неравенство для интегралов вытекает из соответствующего неравенства для интегральных сумм. $\square$

8. *Если ограниченные функции f и g интегрируемы на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, то функция $\varphi = f \cdot g$ интегрируема на E.*

Доказательство. Пусть $M_f = \sup_{x\in E} |f(x)|$, $M_g = \sup_{x\in E} |g(x)|$. Тогда из неравенства

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| = |f(x')\,g(x') - f(x'')\,g(x'')| \le$$

$$\le |f(x')|\,|g(x') - g(x'')| + |g(x'')|\,|f(x') - f(x'')| \le$$

$$\le M_f\,|g(x') - g(x'')| + M_g\,|f(x') - f(x'')|$$

следует, что $\omega_i(\varphi) \le M_f\omega_i(g) + M_g\omega_i(f)$, и поэтому

$$\sum_{i=1}^{s} \omega_i(\varphi) mE_i \le M_f \sum_{i=1}^{s} \omega_i(g) mE_i + M_g \sum_{i=1}^{s} \omega_i(f) mE_i.$$

Теперь остается применить критерий интегрируемости. $\square$

9. Теорема о среднем. *Пусть ограниченные функции f и g интегрируемы на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, функция g не меняет знака на E и $m \le f(x) \le M$ $(x \in E)$. Тогда существует такое число $\mu \in [m, M]$, что справедливо равенство*

$$\int_E f(x)g(x)\,dx = \mu \int_E g(x)\,dx. \tag{22.6}$$

Доказательство. Можем считать, что функция g неотрицательна. Умножая неравенство $m \le f(\xi_i) \le M$ на $g(\xi_i) \ge 0$ и складывая, получим

$$m \sum_{i=1}^{s} g(\xi_i)\, mE_i \le \sum_{i=1}^{s} f(\xi_i)\, g(\xi_i)\, mE_i \le M \sum_{i=1}^{s} g(\xi_i)\, mE_i.$$

Отсюда, переходя к пределу при стремлении к нулю диаметра разбиения, имеем

$$m \int_E g(x)\,dx \le \int_E f(x)g(x)\,dx \le M \int_E g(x)\,dx.$$

Если $\int_E g(x)\,dx > 0$, то из этого неравенства получим (22.6), если обозначим $\mu = \int_E f(x)g(x)\,dx / \int_E g(x)\,dx$. Если же $\int_E g(x)\,dx = 0$, то из полученного неравенства следует, что и интеграл слева в (22.6) также равен нулю, так что и в этом случае равенство (22.6) справедливо. $\square$

10. Сведение кратного интеграла к повторному. Ограничимся рассмотрением случая $n = 2$.

Теорема. *Пусть ограниченная функция $f(x,y)$ интегрируема на прямоугольнике $I \equiv [a,b;c,d]$. Для $x \in [a,b]$ обозначим через $\underline{J}(x)$ и $\overline{J}(x)$ соответственно нижний и верхний интегралы от функции $f(x,y)$ по переменной y, взятые по отрезку $[c,d]$. Пусть, далее, $J(x)$ – произвольная функция на $[a,b]$, удовлетворяющая условию $\underline{J}(x) \le J(x) \le \overline{J}(x)$. Тогда функция $J(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и справедливо равенство*

$$\int_a^b J(x)\,dx = \underbrace{\int\!\!\int}_{I} f(x,y)\,dxdy. \tag{22.7}$$

Доказательство. Каждый из отрезков $I' = [a,b]$ и $I'' = [c,d]$ разобьем точками

$$\Pi' = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b\}, \quad \Pi'' = \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_q = d\}$$

и обозначим $I'_i = [x_i, x_{i+1}]$, $I''_j = [y_j, y_{j+1}]$, $I_{i,j} = I'_i \times I''_j$. Пусть $x \in [a,b]$. Тогда

$$J(x) \ge \underline{J}(x) \ge \sum_{j=0}^{q-1} \inf_{y \in I''_j} f(x,y) \left| I''_j \right|.$$

Поэтому нижняя сумма Дарбу для $J(x)$, соответствующая разбиению Π', удовлетворяет неравенству

$$\underline{S}_{\Pi'}(J) = \sum_{i=0}^{p-1} \inf_{x \in I'_i} J(x)\,|I'_i| \ge \sum_{i=0}^{p-1} \inf_{x \in I'_i} \left(\sum_{j=0}^{q-1} \inf_{y \in I''_j} f(x,y) \left| I''_j \right| \right) |I'_i| \ge$$

$$\ge \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} \inf_{x \in I'_i,\ y \in I''_j} f(x,y)\,|I_{i,j}| = \underline{S}_{\Pi}(f),$$

где разбиение $\Pi = \{I_{i,j}\}_{i=0,1,\ldots,p-1;\ j=0,1,\ldots,q-1}$. Аналогично получаем неравенство $\overline{S}_{\Pi'}(J) \le \overline{S}_{\Pi}(f)$. Таким образом, имеем

$$\underline{S}_{\Pi}(f) \le \underline{S}_{\Pi'}(J) \le \overline{S}_{\Pi'}(J) \le \overline{S}_{\Pi}(f).$$

Поскольку f интегрируема на I, то $\underline{S}_{\Pi}(f)$ и $\overline{S}_{\Pi}(f)$ стремятся к интегралу $\int_I f(x,y)\,dxdy$ при $d(\Pi) \to 0$. Значит, к этому же пределу стремятся и $\underline{S}_{\Pi'}(J)$ и $\overline{S}_{\Pi'}(J)$, а это, в силу критерия интегрируемости функции $J(x)$ в терминах сумм Дарбу, означает, что $J(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и справедливо равенство (22.7). $\square$

Следствие 1. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $I = [a,b;c,d]$. Тогда справедливо равенство*

$$\underbrace{\int\!\!\int}_{I} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Доказательство. Из непрерывности f следует, что при фиксированном $x \in [a,b]$ функция $f(x,y)$ непрерывна по переменной y. Поэтому существует

$$\int_c^d f(x,y)\,dy = \underline{J}(x) = \overline{J}(x).$$

Единственная функция $J(x)$, удовлетворяющая условию теоремы, будет функция $J(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$. Из равенства (22.7) тогда получаем

$$\underbrace{\int\!\!\int}_{I} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx. \quad \square$$

Следствие 2. *Если в следствии* 1 *условие непрерывности функции f заменить условием интегрируемости f по переменной y при каждом фиксированном $x \in [a,b]$, то утверждение следствия* 1 *остается в силе.*

Это очевидно, так как доказательство предыдущей теоремы повторяется дословно.

Следствие 3. *Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы две непрерывные функции $\varphi(x) \le \psi(x)$ и пусть $E = \{(x,y): \ a \le x \le b, \ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$. Далее, пусть функция f непрерывна на E. Тогда справедливо равенство*

$$\underbrace{\int\int}_{E} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Доказательство. Обозначим $c = \min_{x\in[a,b]} \varphi(x)$, $d = \max_{x\in[a,b]} \psi(x)$. Тогда $E \subset I \equiv [a,b;c,d]$. Положим $f(x,y) = 0$, если $(x,y) \in I \setminus E$. Тогда доопределенная на I функция f непрерывна всюду, за исключением, быть может, таких точек (x,y), что $y = \varphi(x)$ или $y = \psi(x)$. Но множество таких точек имеет жорданову меру нуль. Поэтому функция f интегрируема на I. Далее, при каждом фиксированном $x \in [a,b]$ функция $f(x,y)$ переменной y имеет не более двух точек разрыва на $[c,d]$ и поэтому интегрируема на $[c,d]$. Значит, можем применить следствие 2, в силу которого

$$\underbrace{\int\int}_{E} f(x,y)\,dxdy = \underbrace{\int\int}_{I} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx =$$

$$= \int_a^b dx \left[\int_c^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy + \int_{\psi(x)}^{d} f(x,y)\,dy\right] =$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \quad \square$$

22.2.4 Замена переменной в кратном интеграле

Сначала напомним некоторые сведения, установленные нами ранее.

Теорема (об обратном отображении). *Пусть открытое множество $E \subset \mathbb{R}^n$, отображение $\varphi: \ E \to \mathbb{R}^n$ класса $C^1(E)$ и точка $a \in E$ такая, что якобиан $J\varphi(a) \ne 0$. Тогда существует окрестность $U \subset E$ точки a, такая, что*

1) *сужение $\varphi|U$ биективно (т. е. взаимно однозначно);*

2) *образ* $V = \varphi(U)$ *открыт;*

3) *обратное отображение* φ^{-1} *является отображением класса* $C^1(V)$. *При этом якобианы прямого и обратного отображений связаны равенством*

$$J\varphi^{-1}(y) = [J\varphi(x)]^{-1},$$

где $x \in U$, $y = \varphi(x) \in V$.

Следствие. *Пусть открытое множество* $E \subset \mathbb{R}^n$, *отображение* $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^1(E)$ *и* $J\varphi(x) \neq 0$ *для любого* $x \in E$. *Тогда* φ *– открытое отображение, т. е. образ* $\varphi(G)$ *любого открытого множества* $G \subset E$ *является открытым множеством.*

Определение. Пусть открытое множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Отображение $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ называется C^1-диффеоморфизмом множества E, если

1) отображение $\varphi \in C^1(E)$;

2) отображение φ биективно;

3) обратное отображение $\varphi^{-1} \in C^1(\varphi(E))$.

Одно из основных свойств C^1-диффеоморфизма φ множества E состоит в том, что $J\varphi(x) \neq 0$ для любого $x \in E$.

Лемма 1. *Пусть* φ *–* C^1*-диффеоморфизм открытого множества* $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ *на множество* $D \subset \mathbb{R}^n$. *Пусть множество* $A \subset \Delta$ *такое, что его граница* $\partial A \subset \Delta$. *Тогда* $\partial\varphi(A) = \varphi(\partial A)$.

Доказательство. Докажем сначала, что $\partial\varphi(A) \subset \varphi(\partial A)$. Пусть $x \in \partial\varphi(A)$. Найдем $t \in \Delta$, такое, что $x = \varphi(t)$, и выберем окрестность $U \subset \Delta$ точки t. Так как отображение φ открыто, то образ $\varphi(U)$ – открытое множество и $x \in \varphi(U)$. Выберем окрестность $V \subset \varphi(U)$ с центром в точке x. Поскольку $x \in \partial\varphi(A)$, то найдутся такие точки $x', x'' \in V$, что $x' \in \varphi(A)$, $x'' \notin \varphi(A)$. Пусть t' и t'' – прообразы точек x' и x'' соответственно, т. е. $x' = \varphi(t')$ и $x'' = \varphi(t'')$. Тогда $t' \in A \cap U$, $t'' \in U \setminus A$, а это означает, что $t \in \partial A$, т. е. $x = \varphi(t) \in \varphi(\partial A)$.

Для доказательства обратного включения обозначим $B = \varphi(A)$ и применим приведенные выше рассуждения к отображению φ^{-1}. Тогда получим $\partial\varphi^{-1}(B) \subset \varphi^{-1}(\partial B)$, т. е. $\partial A \subset \varphi^{-1}(\partial B)$. Отсюда следует, что

$\varphi(\partial A) \subset \partial B$, т. е. $\varphi(\partial A) \subset \partial\varphi(A)$. $\square$

Лемма 2. *Пусть I – невырожденный сегмент в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует конечный набор сегментов Q_k $(k = 1, \ldots, s)$, таких, что $\cup_{i=1}^{s} Q_k = I$, $\operatorname{int} Q_i \cap \operatorname{int} Q_k = \emptyset$ $(i \neq k)$ и для любого k отношение длин двух любых сторон сегмента Q_k не превосходит 2.*

Доказательство. Пусть d – наименьшая из длин сторон сегмента I. Если какая-либо из сторон сегмента I больше, чем $2d$, то, разделив ее пополам, получим два сегмента I_1 и I_2 с непересекающимися внутренностями. Если среди этих сегментов есть такой, что длина какой-либо из его сторон больше, чем $2d$, то снова поделим его пополам путем деления его стороны на две равные части. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока у полученных сегментов длины всех сторон не будут превосходить $2d$. Ясно, что при этом длина каждой из сторон будет иметь длину не меньшую, чем d, и эта ситуация наступит после конечного числа шагов. В результате этого процесса получим требуемый набор сегментов Q_k. $\square$

Замечание 1. Полученные в лемме 2 сегменты Q_k обладают свойствами, близкими к свойствам кубов. Назовем сегмент Q почти кубом, если для любых двух его сторон $l_i(Q)$ и $l_j(Q)$ справедливо неравенство $\frac{l_i(Q)}{l_j(Q)} \leq 2$. Для любого почти куба Q существуют кубы $Q' \subset Q$ и $Q'' \supset Q$, такие, что $2^{-n} mQ'' \leq mQ \leq 2^n mQ'$. Действительно, в качестве Q' достаточно взять куб с тем же центром, что и у почти куба Q и длиной стороны $l\left(Q'\right) = \min_{1 \leq i \leq n} l_i(Q)$. Если же возьмем куб с тем же центром, длина стороны которого $l\left(Q''\right) = \max_{1 \leq i \leq n} l_i(Q)$, то получим требуемый куб Q''.

Замечание 1 означает, что в определении множества E жордановой меры нуль не обязательно рассматривать совокупность всевозможных фигур $X \supset E$, а только лишь конечные объединения кубов, покрывающих E. Точнее, из леммы 2 вытекает

Предложение 1. *Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет жорданову меру нуль тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечный набор кубов, покрывающий E, сумма мер которых меньше чем ε.*

Лемма 3. *Пусть φ – C^1-диффеоморфизм открытого множества $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ на множество $D \subset \mathbb{R}^n$ и компактное измеримое множество $A \subset \Delta$. Тогда множество $B = \varphi(A)$ измеримо.*

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = \left(\varphi^1\left(t^1, \ldots, t^n\right), \ldots, \varphi^n\left(t^1, \ldots, t^n\right)\right)$, куб $Q \subset \Delta$ с центром в точке t_0, длина стороны которого равна $2l$. Тогда, в силу теоремы Лагранжа, для любой точки $t \in Q$ имеем

$$\left|\varphi^i(t) - \varphi^i\left(t_0\right)\right| = \left|\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j}\left(\xi_i\right)\left(t^j - t_0^j\right)\right| \le l \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j}\left(\xi_i\right)\right|,$$

где точка ξ_i принадлежит отрезку, соединяющему точки t_0 и t. Обозначим

$$\rho_Q = \max_{1 \le i \le n} \max_{\xi \in Q} \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j}(\xi)\right|.$$

Из непрерывности функций $\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j}$ на компактном множестве Q следует, что $\rho_Q < \infty$. Итак, мы получили, что образ куба Q содержится в кубе с центром в точке $\varphi\left(t_0\right)$ и длиной стороны $2l\rho_Q$. Поэтому для внешней меры образа куба Q справедливо неравенство

$$m^* \varphi(Q) \le \rho_Q^n (2l)^n = \rho_Q^n mQ. \tag{22.8}$$

Используя это неравенство, докажем измеримость $\varphi(A)$.

Пользуясь компактностью A, построим фигуру $X \subset \Delta$, такую, что $A \subset \operatorname{int} X$. Обозначим

$$\rho_X = \max_{1 \le i \le n} \max_{\xi \in X} \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j}(\xi)\right|.$$

В силу критерия измеримости, имеем $m\partial A = 0$. Зададим $\varepsilon > 0$ и построим конечный набор кубов Q_k $(k = 1, \ldots, s)$, таких, что $\partial A \subset \cup_{k=1}^s Q_k$ и $\sum_{k=1}^s mQ_k < \varepsilon$. Это возможно в силу предложения 1. Не ограничивая общности, можем считать, что $Q_k \subset X$ $(k = 1, \ldots, s)$. Действительно, для этого достаточно заметить, что расстояние d между двумя компактными множествами ∂X и ∂A положительно. Затем построить фигуру $Y_1 \supset \partial A$, такую, что $mY_1 < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Тогда $Y = Y_1 \cap X \supset \partial A$, Y – фигура. Разобьем составляющие сегменты фигуры Y так, чтобы длины их сторон были меньшими, чем $\frac{d}{2\sqrt{n}}$. Тогда, применяя лемму 2 и замечание 1, построим кубы, длины сторон которых меньше, чем $\frac{d}{\sqrt{n}}$, а значит, диаметры этих кубов меньшие, чем d. Выбирая среди них те, которые содержат точки из ∂A, получаем кубы $Q_k \subset X$. Из (22.8) следует, что

$$m^*\varphi\left(Q_k\right) \leq \rho_X m Q_k \quad (k = 1, \ldots, s).$$

Далее, в силу леммы 1,

$$\partial\varphi(A) = \varphi(\partial A) \subset \varphi\left(\bigcup_{k=1}^{s} Q_k\right) = \bigcup_{k=1}^{s} \varphi\left(Q_k\right).$$

Используя монотонность и полуаддитивность внешней меры, находим

$$m^*\partial\varphi(A) \leq m^*\left(\bigcup_{k=1}^{s} \varphi\left(Q_k\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{s} m^*\varphi\left(Q_k\right) \leq \rho_X \sum_{k=1}^{s} m Q_k < \rho_X \varepsilon.$$

Это означает, что $\partial\varphi(A)$ имеет меру нуль. Отсюда, в силу критерия измеримости, следует измеримость множества $\varphi(A)$. □

Лемма 4. *Пусть компактное измеримое множество $E \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – невырожденное линейное преобразование (т. е. $\det\lambda \neq 0$). Тогда*

$$m\lambda(E) = |\det\lambda| mE. \tag{22.9}$$

Доказательство. Измеримость $\lambda(E)$ вытекает из предыдущей леммы. Для доказательства равенства (22.9) достаточно доказать это равенство для сегментов. Действительно, доказав (22.9) для сегментов, получим (22.9) для фигур, а затем и для произвольного E.

Чтобы получить (22.9) для сегментов, достаточно доказать (22.9) в следующих случаях:

a) λ является умножением одной из координат на скаляр α, т. е.

$$\lambda : \quad \left(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n\right) \to \left(x^1, \ldots, \alpha x^i, \ldots, x^n\right);$$

b) λ – инверсия, т. е.

$$\lambda: \quad \left(x^1, \dots, x^i, \dots, x^j, \dots, x^n\right) \to \left(x^1, \dots, x^j, \dots, x^i, \dots, x^n\right);$$

c) λ к i-й координате прибавляет j-ю координату, т. е.

$$\lambda: \quad \left(x^1, \dots, x^i, \dots, x^j, \dots, x^n\right) \to \left(x^1, \dots, x^i + x^j, \dots, x^j, \dots, x^n\right).$$

В каждом из этих случаев лемма доказывается простым подсчетом. Затем используется хорошо известное свойство, которое состоит в том, что любое линейное преобразование можно представить в виде композиции конечного числа преобразований вида a), b) и c). Отсюда получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 5. *Пусть невырожденный сегмент $I \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся два конечных набора кубов $\{Q_i'\}_{i=1}^s$ и $\left\{Q_j''\right\}_{j=1}^r$, таких, что* $\operatorname{int} Q_i' \cap \operatorname{int} Q_k' = \emptyset$, $\operatorname{int} Q_i'' \cap \operatorname{int} Q_k'' = \emptyset$ $(i \neq k)$, $\cup_{i=1}^s Q_i' \subset I \subset \cup_{j=1}^r Q_j''$ *и*

$$\sum_{i=1}^s mQ_i' + \varepsilon \geq mI \geq \sum_{j=1}^r mQ_j'' - \varepsilon.$$

Доказательство. Если стороны сегмента I имеют рациональные координаты, то утверждение леммы очевидно. В этом случае кубы Q_i' и Q_j'' можно построить так, что $\cup_{i=1}^s Q_i' = \cup_{j=1}^r Q_j'' = I$. Если же некоторые из сторон сегмента I имеют иррациональные координаты, то построим сегменты $I' \subset I \subset I''$ с рациональными координатами так, что $mI' + \varepsilon \geq mI \geq mI'' - \varepsilon$, а затем для сегментов I' и I'' с рациональными координатами построим кубы Q_i' $(i = 1, \dots, s)$, Q_j'' $(j = 1, \dots, r)$, так, что $I' = \cup_{i=1}^s Q_i'$, $I'' = \cup_{j=1}^r Q_j''$. $\square$

Замечание 2. Из леммы 5 следует, что для любого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$m_* E = \sup_{X' \subset E} mX',$$

где X' – конечное объединение кубов из $\mathbb{R}^n$ с попарно не пересекающимися внутренностями (это простое упражнение предлагается доказать самостоятельно). Другими словами, в определении внутренней меры можно использовать не всевозможные фигуры, а лишь дизъюнктивные объединения кубов.

Лемма 6 (оценка мер образов малых кубов). *Пусть φ – C^1-диффеоморфизм открытого множества $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ на множество $D \subset \mathbb{R}^n$ и точка $t_0 \in \Delta$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого куба $Q \subset \Delta$ с центром в точке t_0, длина стороны которого меньшая, чем δ, справедливо неравенство*

$$m\varphi(Q) \leq (1+\varepsilon)\,|J\varphi\,(t_0)|\,mQ,$$

где $J\varphi\,(t_0)$ – якобиан отображения φ в точке t_0.

Доказательство. Для любого куба $Q \subset \Delta$ множество $\varphi(Q)$ измеримо в силу леммы 3. Рассмотрим линейное отображение $\lambda = \varphi'\,(t_0)$. Составим композицию $\Phi = \lambda^{-1} \circ \varphi$. В силу леммы 4, имеем

$$m\Phi(Q) = \left|\det\lambda^{-1}\right| m\varphi(Q) = \frac{1}{|\det\lambda|} m\varphi(Q).$$

Далее, по теореме о производной композиции отображений и с учетом того, что производная линейного отображения является самим этим отображением, получаем

$$\Phi'\,(t_0) = \lambda^{-1} \circ \varphi'\,(t_0) = \lambda^{-1} \circ \lambda,$$

т. е. $\Phi'\,(t_0)$ – единичное (тождественное) отображение. Значит,

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial \Phi^i}{\partial t^j}\,(t_0)\right| = 1 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь непрерывностью отображения Φ' (как композиции линейного отображения λ^{-1} и непрерывного отображения φ'), найдем такое $\delta > 0$, что для всех t, удовлетворяющих условию $|t - t_0| < \sqrt{n}\delta$, справедливо неравенство

$$\Psi^i\,(t_0, t) \equiv \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial \Phi^i}{\partial t^j}(t)\right| < (1+\varepsilon)^{1/n} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда получим, что для любого куба $Q \subset \Delta$ с центром в точке t_0 и длиной стороны меньшей, чем δ, справедливо неравенство

$$\max_{1\le i\le n}\max_{\xi\in Q}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\Phi^i}{\partial t^j}(\xi)\right| \le (1+\varepsilon)^{1/n}.$$

Пусть $2l$ – длина стороны куба Q, $2l < \delta$. В силу теоремы Лагранжа, для любого $t \in Q$ имеем

$$\left|\Phi^i(t) - \Phi^i(t_0)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Phi^i}{\partial t^j}(\xi_i)\left(t^j - t_0^j\right)\right| \le l\max_{\xi\in Q}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\Phi^i}{\partial t^j}(\xi)\right| \le l(1+\varepsilon)^{1/n},$$

т. е. образ куба Q при отображении Φ лежит в кубе с центром в точке $\Phi(t_0)$ и длиной стороны $2l(1+\varepsilon)^{1/n}$. Значит,

$$m\Phi(Q) \le \left(2l(1+\varepsilon)^{1/n}\right)^n = (1+\varepsilon)(2l)^n = (1+\varepsilon)mQ.$$

Окончательно получаем

$$m\varphi(Q) = |\det\lambda| m\Phi(Q) \le (1+\varepsilon)\left|J\varphi(t_0)\right| mQ. \quad \square$$

Теорема (о замене переменной в кратном интеграле). *Пусть φ – C^1-диффеоморфизм открытого множества $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ на множество $D \subset \mathbb{R}^n$ и действительная функция f непрерывна на D. Тогда для любого измеримого компактного множества $A \subset \Delta$ справедливо равенство*

$$\int_B f(x)\,dx = \int_A f(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt, \tag{22.10}$$

где $B = \varphi(A)$.

Доказательство. Измеримость множества $B = \varphi(A)$ вытекает из леммы 3. Подынтегральные функции в (22.10) непрерывны и, следовательно, интегрируемы. Поэтому нужно только доказать равенство (22.10).

Предположим сначала, что $f(x) \ge 0$ $(x \in D)$. При доказательстве леммы 6 мы определили непрерывные функции $\Psi^i(t_0, t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и показали, что $\Psi^i(t_0, t_0) = 1$ для любого $t_0 \in \Delta$. Поэтому, пользуясь компактностью множества A, для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое

$\delta > 0$, что для любых $t', t'' \in A$, удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \delta$, справедливо неравенство $\Psi^i(t', t'') < (1+\varepsilon)^{1/n}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Пусть фигура $X \subset A$ является объединением конечного числа кубов Q_k $(k = 1, \ldots, \nu)$ с попарно непересекающимися внутренностями, длины сторон которых меньше, чем δ. Пусть t_k – центр куба Q_k. Тогда, в силу леммы 6,

$$m\varphi(Q_k) \le (1+\varepsilon)\,|J\varphi(t_k)|\, mQ_k \quad (k = 1, \ldots, \nu).$$

Умножим это неравенство на $f(\varphi(t_k)) \ge 0$ и сложим. В результате получим

$$\sum_{k=1}^{\nu} f(x_k)\, m\varphi(Q_k) \le (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{\nu} f(\varphi(t_k))\, |J\varphi(t_k)|\, mQ_k,$$

где $x_k = \varphi(t_k)$. Измельчая разбиение фигуры X, приходим к неравенству

$$\int_{\varphi(X)} f(x)\, dx \le (1+\varepsilon) \int_X f(\varphi(t))|J\varphi(t)|\, dt.$$

Устремляя ε к нулю и увеличивая область интегрирования в правой части, приходим к неравенству

$$\int_{\varphi(X)} f(x)\, dx \le \int_A f(\varphi(t))|J\varphi(t)|\, dt.$$

Пусть теперь фигура $Y \subset \Delta$, такая, что $A \subset \operatorname{int} Y$. Далее, пусть $\{X_\nu\}_{\nu \ge 1}$ – последовательность фигур, таких, что $X_\nu \subset A$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ и $mX_\nu \to mA$ $(\nu \to \infty)$. Тогда

$$0 \le \int_{\varphi(A)} f(x)\, dx - \int_{\varphi(X_\nu)} f(x)\, dx = \int_{\varphi(A \setminus X_\nu)} f(x)\, dx \le$$

$$\le \sup_{x \in \varphi(A)} f(x) \cdot m\varphi(A \setminus X_\nu).$$

Покажем, что $m\varphi(A \setminus X_\nu) \to 0$ $(\nu \to \infty)$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое ν_0, что для всех $\nu \ge \nu_0$ справедливо неравенство $m(A \setminus X_\nu) < \varepsilon \cdot 2^{-n-1}$. Пусть $\nu \ge \nu_0$. Построим фигуру $Y_\nu \supset A \setminus X_\nu$, такую, что $mY_\nu < m(A \setminus X_\nu) + \varepsilon \cdot 2^{-n-1} < \varepsilon \cdot 2^{-n}$. Применяя к фигуре Y_ν лемму 2 и замечание 1, получим набор почти кубов $\{Q_{k,\nu}\}_{k=1}^{s_\nu}$, таких, что $Y_\nu = \cup_{k=1}^{s_\nu} Q_{k,\nu}$, и набор кубов $Q''_{k,\nu}$, для которых $mQ''_{k,\nu} \le 2^n mQ_{k,\nu}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{s_\nu} mQ''_{k,\nu} \le 2^n \sum_{k=1}^{s_\nu} mQ_{k,\nu} = 2^n mY_\nu < \varepsilon.$$

Ясно, что кубы $Q''_{k,\nu}$ могут быть построены так, что $Q''_{k,\nu} \subset Y$, и длины их сторон достаточно малы. Тогда, обозначая $M_1 = \sup_{t\in Y} |J\varphi(t)|$ и применяя лемму 6, получаем

$$m\varphi\left(A \setminus X_\nu\right) \le m\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{s_\nu} Q''_{k,\nu}\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{s_\nu} \varphi\left(Q''_{k,\nu}\right)\right) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{s_\nu} m\varphi\left(Q''_{k,\nu}\right) < 2M_1\varepsilon.$$

Таким образом, мы показали, что

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\varphi(X_\nu)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(A)} f(x)\,dx.$$

Отсюда получаем, что

$$\int_{\varphi(A)} f(x)\,dx \le \int_A f(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt.$$

Чтобы получить противоположное неравенство, введем в рассмотрение функцию $g(t) = f(\varphi(t))|J\varphi(t)|$ и отображение $\psi = \varphi^{-1}$. Повторяя предыдущие рассуждения, получим неравенство

$$\int_{\psi(B)} g(t)\,dt \le \int_B g(\psi(x))|J\psi(x)|\,dx.$$

Учитывая определение функции g и равенство

$$g(\psi(x))|J\psi(x)| = f(\varphi(\psi(x)))|J\varphi(\psi(x))||J\psi(x)| =$$

$$= f(x)|J\varphi(t)| \cdot |J\psi(x)| \equiv f(x),$$

в котором обозначено $t = \psi(x)$, перепишем последнее неравенство в следующем виде:

$$\int_A f(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt \le \int_{\varphi(A)} f(x)\,dx.$$

Окончательно, для непрерывной, неотрицательной функции f получили равенство

$$\int_A f(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt = \int_{\varphi(A)} f(x)\,dx.$$

Если теперь f – произвольная непрерывная на D функция, то положим $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$. Легко показать, что обе эти функции непрерывны на D, неотрицательны и $f = f^+ - f^-$. Из доказанной части теоремы получаем, что

$$\int_A f^+(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt = \int_{\varphi(A)} f^+(x)\,dx,$$

$$\int_A f^-(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt = \int_{\varphi(A)} f^-(x)\,dx.$$

Вычитая второе равенство из первого и используя линейность интеграла, получаем равенство (22.10). $\square$

Следствие. *Пусть φ – C^1-диффеоморфизм открытого множества $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ на множество $D \subset \mathbb{R}^n$. Далее, пусть A – измеримое по Жордану множество, такое, что $\overline{A} \subset \Delta$. Тогда его образ $B = \varphi(A)$ измерим и*

$$mB = \int_A |J\varphi(t)|\,dt. \tag{22.11}$$

Доказательство. В силу доказанной теоремы,

$$\int_{\overline{B}} f(x)\,dx = \int_{\overline{A}} f(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt$$

для любой непрерывной на D функции f. Положим $f(x) \equiv 1$. Тогда, учитывая, что $\int_{\overline{B}} dx = m\overline{B}$, получаем

$$m\overline{B} = \int_{\overline{A}} |J\varphi(t)|\,dt.$$

Отсюда следует равенство (22.11), если учесть, что $m(\partial A) = m(\partial B) = 0$.

$\square$

Геометрический смысл модуля якобиана. *Пусть* φ – C^1*-диффеоморфизм открытого множества* $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ *на множество* $D \subset \mathbb{R}^n$ *и точка* $t_0 \in \Delta$*. Далее, пусть* $\{A_\nu\}$ – *последовательность таких компактных множеств, что* $A_\nu \subset \Delta$*,* $t_0 \in A_\nu$ *и* $\operatorname{diam} A_\nu \to 0$ $(\nu \to \infty)$*. Тогда*

$$\frac{1}{mA_\nu} \int_{A_\nu} |J\varphi(t)|\, dt \to |J\varphi\,(t_0)| \quad (\nu \to \infty).$$

Это утверждение следует из непрерывности модуля якобиана $|J\varphi(t)|$ и из условия $\operatorname{diam} A_\nu \to 0$ $(\nu \to \infty)$. С другой стороны, используя следствие, это равенство можно переписать так:

$$\frac{m\varphi\,(A_\nu)}{mA_\nu} \to |J\varphi\,(t_0)| \quad (\nu \to \infty).$$

Это означает, что модуль якобиана характеризует локальное изменение меры при отображении φ, т. е. для множеств A малого диаметра, содержащих точку t_0, справедливо следующее приближенное равенство:

$$m\varphi(A) \approx |J\varphi\,(t_0)|\, mA.$$

23. Криволинейные интегралы

23.1 Спрямляемые кривые

Сначала напомним некоторые сведения о кривых. Кривая в $\mathbb{R}^n$ задается как вектор-функция $r(t) \equiv (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ $(\alpha \le t \le \beta)$, отображающая отрезок $[\alpha, \beta]$ в пространство $\mathbb{R}^n$. При этом совокупность точек

$$\Gamma \equiv \left\{ x^i = x_i(t),\ \alpha \le t \le \beta,\ i = 1, \ldots, n \right\}$$

называется следом кривой Γ. В ряде случаев мы будем отождествлять понятие кривой и ее следа. Если все функции x_i $(i = 1, \ldots, n)$ непрерывны, то кривая Γ называется непрерывной. Если все $x_i \in C^1([\alpha, \beta])$ и $\sum_{i=1}^n \left(x_i'(t)\right)^2 > 0$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$, то кривая Γ называется гладкой. Если отображение r отрезка $[\alpha, \beta]$ на множество Γ взаимно однозначно, то кривая Γ называется простой. Если существуют точки $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $t_1 \ne t_2$, такие, что $r(t_1) = r(t_2)$, то точка $r(t_1) = r(t_2)$ называется точкой самопересечения кривой Γ. Точки $r(\alpha)$ и $r(\beta)$ называются соответственно началом и концом кривой Γ. Если у кривой Γ начало и конец совпадают, то кривая Γ называется замкнутой. Если непрерывная замкнутая кривая Γ не имеет других точек самопересечения, кроме концов, то такая кривая называется простым контуром.

Мы будем рассматривать кусочно гладкие кривые, т. е. такие непрерывные кривые, которые распадаются на конечное число гладких кривых. Кроме того, будем рассматривать ориентированные кривые. Именно, если A_t – точка кривой Γ, соответствующая значению параметра t, то для $\alpha \le t_1 < t_2 \le \beta$ будем говорить, что точка A_{t_1} предшествует точке A_{t_2}, и обозначать это таким образом: $A_{t_1} \prec A_{t_2}$.

Если Γ – кривая, определенная уравнением $r = r(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то уравнение $\rho = r(\beta + \alpha - t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ определяет то же самое множество точек в $\mathbb{R}^n$, но если такую кривую рассматривать как ориентированную, то, очевидно, ориентация вновь полученной кривой изменяется на противоположную. Такую кривую будем обозначать через Γ_-.

Спрямляемой мы называли такую кривую, для которой существует верхняя грань длин ломаных, вписанных в эту кривую. Для случая, когда функции x_i кусочно гладкие (т. е. кривая Γ – кусочно гладкая), длина S кривой Γ равна

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{i=1}^n [x_i'(t)]^2}\, dt.$$

Для спрямляемой кусочно гладкой кривой Γ определим интеграл с переменным верхним пределом

$$l(t) = \int_\alpha^t \sqrt{\sum_{i=1}^n [x_i'(\tau)]^2}\, d\tau.$$

Производная этого интеграла в точках непрерывности всех функций x_i' $(i = 1, \dots, n)$ равна

$$l'(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^n [x_i'(t)]^2} = |r'(t)|,$$

а дифференциал длины дуги (т. е. линейная часть изменения) равен

$$dl = l'(t)\, dt = \sqrt{\sum_{i=1}^n [x_i'(t)]^2}\, dt = |r'(t)|\ dt.$$

Каждая кривая Γ может быть задана различными представлениями. Будем говорить, что уравнение $\rho = \rho(\tau)$ $(a \le \tau \le b)$ определяет ту же самую кривую, что и уравнение $r = r(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, если уравнение $\rho = \rho(\tau)$ может быть получено из уравнения $r = r(t)$ заменой переменной $t = t(\tau)$, где функция $t(\tau)$ кусочно непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и отображает отрезок $[a, b]$ на $[\alpha, \beta]$, причем $t(a) = \alpha$, $t(b) = \beta$ и $t'(\tau) > 0$ во всех точках $\tau \in [a, b]$, где эта производная существует.

Пусть кривая Γ задана уравнением $r = r(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$. Предположим, что она спрямляема. Тогда на $[\alpha, \beta]$ определена функция $l(\tau)$ – длина части кривой Γ, определенной уравнением $r = r(t)$, где $\alpha \le t \le \tau$. Если Γ –

кусочно гладкая (т. е. $\sum_{i=1}^n \left[x_i'(t)\right]^2 > 0$ всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек), то получаем строго возрастающую на $[\alpha, \beta]$ функцию $l(\tau)$, причем $l(\alpha) = 0$, $l(\beta) = S$, где S – длина кривой, причем, как выше уже упоминалось, функция $l(\tau)$ кусочно непрерывно дифференцируема. Поэтому существует обратная функция $\tau = l^{-1}(s)$ $(0 \le s \le S)$, кусочно непрерывно дифференцируемая на $[0, S]$ и строго возрастающая. Тогда получаем представление кривой Γ

$$\rho(s) = r\left(l^{-1}(s)\right) \quad (0 \le s \le S),$$

которое называется естественной параметризацией кривой Γ. Для естественной параметризации характерно то, что для любого $s \in [0, S]$ длина части кривой $\rho = \rho(\sigma)$ $(0 \le \sigma \le s)$ равна s. Кроме того, для $s = l(\tau)$ имеем

$$|\rho'(s)| = \left| r'\left(l^{-1}(s)\right) \frac{1}{l'(\tau)} \right| = \left| \frac{r'(\tau)}{l'(\tau)} \right| = \left| \frac{r'(\tau)}{|r'(\tau)|} \right| = 1.$$

Это равенство означает, что при естественной параметризации приращение длины дуги кривой равняется приращению параметра.

23.2 Криволинейные интегралы первого рода

Пусть гладкая кривая Γ задана уравнением

$$r = r(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \ \ (\alpha \le t \le \beta).$$

Далее, пусть на множестве $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ задана непрерывная функция f. Тогда интеграл

$$\int_\alpha^\beta f(r(t))\,|r'(t)|\;dt \equiv \int_\alpha^\beta f\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right)|r'(t)|\;dt,$$

где $|r'(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[x_i'(t)\right]^2}$, называется криволинейным интегралом I рода от функции f вдоль кривой Γ и обозначается

$$\int_\Gamma f(x)\,ds \equiv \int_\Gamma f\left(x^1, \ldots, x^n\right)\,ds.$$

Свойства криволинейного интеграла I рода.

1. *Криволинейный интеграл I рода аддитивен относительно кривой, т. е. если* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_N$, *то*

$$\int_\Gamma f(x)\, ds = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Gamma_i} f(x)\, ds.$$

Доказательство следует непосредственно из аддитивности определенного интеграла относительно области интегрирования. В самом деле, если $\Gamma_i = r(t)$ $(\alpha_i \le t \le \beta_i)$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_N = \beta$, то

$$\int_\Gamma f(x)\, ds = \int_\alpha^\beta f(x(t))\, |r'(t)|\; dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x(t))\, |r'(t)|\; dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Gamma_i} f(x)\, ds. \quad \square$$

Свойство 1 позволяет естественным образом распространить определение криволинейного интеграла I рода на случай кусочно гладких кривых Γ.

2. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от способа параметризации кривой.*

Доказательство. Действительно, пусть $r = r(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ $(\alpha \le t \le \beta)$ – уравнение кривой Γ, а к другому уравнению $\rho = \rho(\tau) = (\bar{x}_1(\tau), \dots, \bar{x}_n(\tau))$ $(a \le \tau \le b)$ этой же кривой Γ осуществляется переход заменой переменной $t = t(\tau)$, где свойства функции $t(\tau)$ описаны выше. Тогда

$$\int_\Gamma f(x)\, ds = \int_\alpha^\beta f\left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right) |r'(t)|\; dt =$$

$$= \int_a^b f\left(x_1(t(\tau)), \dots, x_n(t(\tau))\right) |r'(t(\tau))|\, t'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_a^b f\left(\bar{x}_1(\tau), \dots, \bar{x}_n(\tau)\right) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[(x_i)'_t\left(t(\tau)\right)\right]^2} t'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_a^b f(\bar{x}(\tau)) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[(\bar{x}_i)'_\tau(\tau)\right]^2} \, d\tau = \int_\Gamma f(x)\, ds. \quad \square$$

3. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой, т. е.*

$$\int_\Gamma f(x)\, ds = \int_{\Gamma_-} f(x)\, ds.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_\Gamma f(x)\, ds = \int_\alpha^\beta f(x_1(t), \ldots, x_n(t))\, |r'(t)|\, dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x_1(\alpha+\beta-\tau), \ldots, x_n(\alpha+\beta-\tau))\, |r'(\alpha+\beta-\tau)|\, d\tau = \int_{\Gamma_-} f(x)\, ds.$$

$\square$

4. *Если $\rho = \rho(s)$ – естественная параметризация кривой Γ, то поскольку в этом случае $|\rho'(s)| = 1$ $(0 \le s \le S)$, криволинейный интеграл $\int_\Gamma f(x)\, ds$ принимает такой вид:*

$$\int_\Gamma f(x)\, ds = \int_0^S f(x_1(s), \ldots, x_n(s))\, ds. \tag{23.1}$$

5. *Из перечисленных выше свойств следует, что для вычисления криволинейного интеграла вдоль некоторой кусочно гладкой кривой Γ от функции f достаточно взять любую кусочно гладкую параметризацию кривой Γ, т. е. представить ее в виде $x_i = x_i(t)$, $(\alpha \le t \le \beta,\ i = 1, \ldots, n)$, и тогда получим*

$$\int_\Gamma f(x)\, ds = \int_\alpha^\beta f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [x_i'(t)]^2}\, dt.$$

Физический смысл криволинейного интеграла первого рода. Воспользуемся представлением (23.1) и интеграл справа запишем как предел интегральных сумм. Тогда получим

$$\int_{\Gamma} f(x)\,ds = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sum_{i=1}^{N} f\left(x_1\left(\xi_i\right), \ldots, x_n\left(\xi_i\right)\right) \Delta s_i,$$

где $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$, $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, Π – разбиение $[0, S]$, т. е. $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = S$. Поскольку разбиение отрезка $[0, S]$ порождает разбиение кривой Γ на кривые Γ_{s_{i-1}, s_i} $(i = 1, \ldots, N)$ длины Δs_i, то в случае неотрицательной функции f выражение $f\left(x_1\left(\xi_i\right), \ldots, x_n\left(\xi_i\right)\right) \Delta s_i$ можно интерпретировать как приближенное значение массы кривой Γ_{s_{i-1}, s_i}, а саму интегральную сумму – как приближенное значение массы кривой Γ с плотностью распределения массы f. Поэтому сам криволинейный интеграл можно интерпретировать как массу кривой Γ с плотностью распределения массы f.

Пример. Вычислить массу эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$, если плотность распределения массы равна $f(x, y) = |y|$.

Параметрическое представление эллипса можно записать в виде

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

Масса кривой Γ выражается криволинейным интегралом $\int_{\Gamma} f(x, y)\,ds$. Имеем

$$ds = |r'(t)|\;dt = \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\,dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt,$$

$$f(x(t), y(t)) = |y(t)| = |b\sin t|.$$

Поэтому

$$\int_{\Gamma} f(x, y)\,ds = b\int_0^{2\pi} |\sin t|\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= b\int_0^{2\pi} |\sin t|\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 2b\int_0^{\pi} \sin t\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 2b \int_{-1}^{1} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\, z^2}\, dz = 4b \int_{0}^{1} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\, z^2}\, dz.$$

Упражнение. Вычислите самостоятельно последний интеграл. Для этого рекомендуется рассмотреть случаи $a < b$, $a > b$ и $a = b$.

23.3 Криволинейные интегралы второго рода

Областью в $\mathbb{R}^n$ называется открытое связное множество. Замкнутой областью называется объединение области и ее границы. Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что каждой точке $x \in \Omega$ поставлен в соответствие вектор $F(x) \in \mathbb{R}^n$. Это можно записать с помощью n функций в следующем виде:

$$F(x) = \left(\varphi_1\left(x^1, \ldots, x^n\right), \ldots, \varphi_n\left(x^1, \ldots, x^n\right)\right) \equiv (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))\,.$$

В этом случае говорят, что на Ω задано векторное поле F. Если функции $\varphi_i\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ $(i = 1, \ldots, n)$ непрерывные, то векторное поле F называется непрерывным. Если все φ_i $(i = 1, \ldots, n)$ непрерывно дифференцируемы, то поле F называется непрерывно дифференцируемым в области Ω.

Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задано непрерывное векторное поле $F = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, а $r = r(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ определяет кусочно гладкую кривую Γ, лежащую в области Ω. Криволинейным интегралом II рода от векторного поля F вдоль кривой Γ называется интеграл

$$\int_\Gamma (F, dr) \equiv \int_\alpha^\beta \left(\left(\varphi_1\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right), \ldots, \varphi_n\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right)\right), r'(t)\right)\, dt \equiv$$

$$\equiv \int_\alpha^\beta \left[\varphi_1\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right) x_1'(t) + \cdots + \varphi_n\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right) x_n'(t)\right]\, dt \equiv$$

$$\equiv \int_\Gamma \varphi_1\, dx^1 + \cdots + \varphi_n\, dx^n.$$

В частности, в $\mathbb{R}^2$ обозначим $F = (P(x,y), Q(x,y))$, $\Gamma :\ \ r = r(t) = (x(t), y(t))$ $(\alpha \le t \le \beta)$. Тогда получим

$$\int_\Gamma (F, dr) \equiv \int_\Gamma P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\, dt.$$

В этой записи первые два интеграла – суть обозначения криволинейного интеграла II рода, а интеграл справа – определение криволинейного интеграла II рода.

Аналогично, в $\mathbb{R}^3$ имеем $F = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, $\Gamma: \ r = r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $(\alpha \le t \le \beta)$,

$$\int_{\Gamma} (F, dr) = \int_{\Gamma} P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy + R(x,y,z)\, dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\, dt.$$

Свойства криволинейных интегралов II рода.

Мы будем рассматривать эти свойства в $\mathbb{R}^2$ (изменения на случай произвольного $n \ge 2$ очевидны).

1. *Криволинейный интеграл II рода не зависит от способа параметризации кривой.*

Доказательство. Если $\Gamma: \ r = r(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ и $\Gamma: \ \rho = \rho(\tau)$ $(a \le \tau \le b)$, то $t = t(\tau)$, $t(a) = \alpha$, $t(b) = \beta$ и t – кусочно непрерывно дифференцируемая функция переменной τ. Тогда

$$\int_{\Gamma} (F, dr) = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\, dt =$$

$$= \int_{a}^{b} [P(x(t(\tau)), y(t(\tau)))x'(t(\tau)) + Q(x(t(\tau)), y(t(\tau)))y'(t(\tau))]\, t'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{a}^{b} \left[P\left(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)\right) \bar{x}'(\tau) + Q\left(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)\right) \bar{y}'(\tau)\right]\, d\tau = \int_{\Gamma} (F, d\rho),$$

где $r(t) = (x(t), y(t))$ $\alpha \le t \le \beta)$, $\rho(\tau) = (\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))$ $(a \le \tau \le b)$. □

Замечание. Напомним, что $r = r(t)$ и $\rho = \rho(\tau)$ – два параметрических задания кривой Γ, если они, кроме того, что $t = t(\tau)$, сохраняют ориентацию кривой. Другими словами, доказательство свойства 1 имеет силу лишь в том случае, когда представления $r = r(t)$ и $\rho = \rho(\tau)$ определяют одну и ту же кривую Γ и имеют одну и ту же ориентацию.

2. *При изменении ориентации кривой на противоположную криволинейный интеграл II рода меняет знак на противоположный, т. е.*

$$\int_\Gamma (F, dr) = -\int_{\Gamma_-} (F, dr).$$

Доказательство. Пусть $\Gamma:\ r = r(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, $\Gamma_-:\ \rho = r(\alpha+\beta-t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$. Тогда $\rho'(t) = -r'(\alpha+\beta-t)$ и

$$\int_{\Gamma_-} (F, dr) = \int_\alpha^\beta (F(\rho(t)), \rho'(t))\, dt =$$

$$= -\int_\alpha^\beta (F(r(\alpha+\beta-t)), r'(\alpha+\beta-t))\, dt =$$

$$= -\int_\alpha^\beta (F(r(\tau)), r'(\tau))\, d\tau = -\int_\Gamma (F, dr). \quad \square$$

3. *Криволинейный интеграл II рода аддитивен относительно кривой* Γ.

Доказательство этого свойства такое же, как и для интегралов I рода, и мы его опускаем.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int_\Gamma y\,dx - x\,dy$, где Γ – дуга окружности $x^2 + y^2 = 1$, которая начинается в точке $(1, 0)$ и заканчивается в точке $(0, 1)$.

Параметрическое представление кривой Γ имеет вид $\Gamma:\ x = \cos t,\ y = \sin t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому

$$\int_\Gamma y\,dx - x\,dy = \int_0^{\pi/2} [\sin t(-\sin t) - \cos t \cdot \cos t]\, dt = -\int_0^{\pi/2} dt = -\frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Пусть в предыдущем примере Γ – отрезок, начинающийся в точке $(1, 0)$ и заканчивающийся в точке $(0, 1)$. Тогда параметрическое представление имеет вид $\Gamma:\ x = 1 - t,\ y = t$ $(0 \le t \le 1)$ и поэтому

$$\int_\Gamma y\,dx - x\,dy = \int_0^1 [t(-1) - (1-t)\cdot 1]\, dt = -1.$$

Пример 3. Вычислить $\int_\Gamma y\,dx + x\,dy$, где $\Gamma: \; x = \cos t, \; y = \sin t$ $(0 \le t \le \pi/2)$. Имеем

$$\int_\Gamma y\,dx + x\,dy = \int_0^{\pi/2} [\sin t(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t]\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos 2t\,dt = 0.$$

4. Вычислить $\int_\Gamma y\,dx + x\,dy$, где $\Gamma: \; x = 1 - t, \; y = t \; (0 \le t \le 1)$.
Имеем

$$\int_\Gamma y\,dx + x\,dy = \int_0^1 [t(-1) + (1-t)\cdot 1]\,dt = \int_0^1 (1-2t)\,dt = 0.$$

Замечание. Как в первых двух примерах, так и в двух последних мы вычисляли интегралы от одних и тех же векторных полей вдоль разных кривых, начала и концы которых совпадают. В первой паре примеров интегралы оказались разными, а во второй паре – одинаковыми. Ниже мы увидим, что совпадение интегралов во второй паре примеров не является случайностью.

23.4 Формула Грина

Напомним, что областью в $\mathbb{R}^2$ называется открытое связное множество. Замкнутой областью называется объединение области и ее границы. Для дальнейшего нам понадобится следующая теорема, которую мы принимаем без доказательства.

Теорема Жордана. *Каждая простая, непрерывная, замкнутая кривая в $\mathbb{R}^2$ разделяет всю плоскость на две области – ограниченную и неограниченную, причем сама кривая является границей для обеих областей.*

Простую непрерывную замкнутую кривую в $\mathbb{R}^2$ называют простым контуром. Говорят, что простой контур γ ограничивает область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, если Ω – ограниченная область, существование которой гарантируется теоремой Жордана.

Область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ называется односвязной, если для любого простого контура $\gamma \subset \Omega$ область, ограниченная контуром γ, содержится в Ω.

Введем понятие ориентации простого контура Γ. Будем говорить, что простой контур Γ ориентирован положительно, если при обходе контура Γ ограничиваемая им область остается слева. Противоположно ориентированный простой контур называют отрицательно ориентированным и обозначают через Γ_-. Иначе говоря, кусочно гладкий простой контур ориентирован положительно, если в каждой точке простого контура Γ, в которой существует касательный вектор, он образует с вектором внутренней нормали правую пару.

Замечане. Данное определение ориентации простого контура носит интуитивный характер. Можно дать и строгое формальное определение ориентации, но мы не будем на этом останавливаться.

Следующая важная теорема устанавливает связь между интегралом по замкнутому контуру и двойным интегралом по области, ограниченной этим контуром.

Теорема (формула Грина). *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, а простой кусочно гладкий контур $\Gamma \subset \Omega$ ограничивает область $G \subset \Omega$. Тогда справедливо равенство*

$$\int_{\partial G} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int\int_G \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy, \tag{23.2}$$

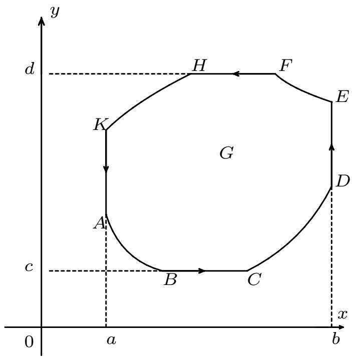
где ∂G – положительно ориентированная граница области G.

Доказательство. Докажем сначала равенство (23.2) для случая, когда область G элементарна, т. е.

$$\overline{G} = \{(x, y) : \ a \le x \le b, \ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\} =$$

$$= \{(x, y) : \ c \le y \le d, \ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\},$$

где функции φ, ψ, α и β – кусочно непрерывно дифференцируемы.



В этом случае, применяя формулу сведения двойного интеграла к повторному, получим

$$-\int\int_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy =$$

$$= -\int_a^b \left[P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))\right]\,dx = \int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx - \int_a^b P(x,\psi(x))\,dx =$$

$$= \int_{\Gamma_{ABCD}} P(x,y)\,dx + \int_{\Gamma_{DE}} P(x,y)\,dx + \int_{\Gamma_{EFHK}} P(x,y)\,dx +$$

$$+\int_{\Gamma_{KA}} P(x,y)\,dx = \int_{\partial G} P(x,y)\,dx.$$

Аналогично имеем

$$\int\int_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \int_{\partial G} Q(x,y)\,dy.$$

Складывая эти два равенства, получаем (23.2).

Предположим теперь, что область G ограничена кусочно гладкой кривой ∂G и такова, что ее можно разбить кусочно гладкой кривой Γ на две элементарные области G_1 и G_2. Введем обозначения $\Gamma_i = \partial G \cap \partial G_i$ ($i = 1,2$). Ясно, что $\partial G_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma$ и $\partial G_2 = \Gamma_2 \cup \Gamma_-$. Применяя к каждой из областей G_1 и G_2 уже доказанную формулу Грина, получаем

$$\int\int_{G_1}\left[\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right]dxdy =$$

$$= \int_{\partial G_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$$

и

$$\int\int_{G_2} \left[\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right] dxdy =$$

$$= \int_{\partial G_2} P\,dx + Q\,dy = \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy + \int_{\Gamma_-} P\,dx + Q\,dy.$$

Поэтому

$$\int\int_{G} \left[\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right] dxdy =$$

$$= \int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + \int_{\Gamma_-} P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial G} P\,dx + Q\,dy.$$

Далее, применяя метод математической индукции, можно доказать формулу Грина для случая, когда область G с помощью $n-1$ кусочно гладких кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ разбивается на n элементарных областей $G_1, \dots, G_n$. В частности, любой многоугольник можно разбить на конечное число треугольников, т. е. элементарных областей. Таким образом, формула Грина справедлива и для любого многоугольника.

В общем случае произвольной области G, ограниченной кусочно гладким контуром Γ, формула Грина получается, если контур Γ аппроксимировать замкнутой ломаной или, что то же самое, область G аппроксимировать многоугольником. $\square$

Формула Грина может быть обобщена и на случай многосвязных областей. Точнее, пусть область G ограничена внешним контуром Γ и n контурами $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Тогда формально имеет место равенство (23.2), где под символом $\int_{\partial G}$ понимается $\int_\Gamma + \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i}$.

Положим в формуле Грина $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = -y$. Тогда получим

$$\int\int_G dxdy = \frac{1}{2}\int_{\partial G} x\,dy - y\,dx.$$

Но поскольку $\int\int_G dxdy = m(G)$, то получили формулу, выражающую меру области G, ограниченной кусочно гладким контуром ∂G, через криволинейный интеграл по этому контуру

$$m(G) = \frac{1}{2}\int_{\partial G} x\,dy - y\,dx.$$

Пример. Вычислить площадь области, заключенной между кривой $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ $(0 \le t \le 1)$ и биссектрисой первой четверти.

На данной кривой имеем

$$x\,dy - y\,dx = 9a^2\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,dt.$$

Если же $x = y$, то $x\,dy - y\,dx = 0$. Таким образом, получаем

$$m(G) = \frac{1}{2}\int_{\partial G} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}9a^2\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^3)}\,dt = \frac{1}{2}9a^2\frac{1}{6} = \frac{3}{4}a^2.$$

23.5 Потенциальные поля

Непрерывное векторное поле $(P(x,y), Q(x,y))$ называется потенциальным в области $G \subset \mathbb{R}^2$, если существует непрерывно дифференцируемая функция $U(x,y)$, заданная на G, такая, что

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

Такая функция U называется потенциалом поля (P,Q). Другими словами, функция U называется потенциалом поля (P,Q), если

$$dU(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Следующая теорема содержит необходимое и достаточное условие потенциальности поля.

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывное поле $(P(x,y), Q(x,y))$ было потенциальным в области G, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие*

$$\int_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{23.3}$$

для любой кусочно гладкой замкнутой кривой $\Gamma \subset G$.

Доказательство. Необходимость. Пусть поле (P, Q) потенциально, т. е. пусть существует такая функция $U(x, y)$, что

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \quad ((x,y) \in G).$$

Далее, пусть $\Gamma: \ r = r(t) = (x(t), y(t))$ $(\alpha \le t \le \beta)$ – произвольная кусочно гладкая, замкнутая кривая, лежащая в G. Тогда

$$\int_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right]\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\frac{\partial U}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)\right]\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}U(x(t),y(t))\,dt = U(x(\beta),y(\beta)) - U(x(\alpha),y(\alpha)) = 0.$$

Последнее равенство справедливо в силу условия $r(\alpha) = r(\beta)$, т. е. в силу замкнутости кривой Γ.

Достаточность. Пусть выполнено условие (23.3). Покажем сначала, что в этом случае криволинейный интеграл $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ зависит лишь от начальной и от конечной точек кривой $\gamma \subset G$ и не зависит от самой кривой γ, соединяющей эти точки.

Итак, пусть $\gamma_1: \ r = r_1(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ и $\gamma_2: \ r = r_2(\tau)$ $(a \le \tau \le b)$ – две кусочно гладкие кривые, лежащие в G и такие, что $r_1(\alpha) = r_2(a)$, $r_1(\beta) = r_2(b)$. Тогда кривая $\Gamma = \gamma_1 \cup (\gamma_2)_-$ является замкнутой, и поэтому, в силу условия (23.3),

$$0 = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{(\gamma_2)_-} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy.$$

Отсюда следует, что $\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy$.

Зафиксируем теперь точку $(\xi_0, \eta_0) \in G$. В силу связности G, для любой точки $(\xi, \eta) \in G$ найдется кусочно гладкая кривая $\gamma \subset G$, начало которой в точке (ξ_0, η_0), а конец – в точке (ξ, η), причем для любой такой кривой интеграл $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ зависит лишь от точек (ξ_0, η_0) и (ξ, η). Таким образом, на G определена функция

$$U(\xi, \eta) = \int_\gamma P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

где $\gamma \subset G$ – кусочно гладкая кривая, соединяющая точки (ξ_0, η_0) и (ξ, η). Покажем, что функция $U(\xi, \eta)$ будет потенциалом нашего векторного поля, т. е.

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi, \eta) = P(\xi, \eta), \quad \frac{\partial U}{\partial \eta}(\xi, \eta) = Q(\xi, \eta).$$

Пусть $(\xi, \eta) \in G$ и $\Delta\xi$ таково, что отрезок I, соединяющий точки (ξ, η) и $(\xi + \Delta\xi, \eta)$, содержится в G. Соединим точки (ξ_0, η_0) и (ξ, η) кривой $\gamma \subset G$. Тогда

$$\frac{1}{\Delta\xi}\left[U(\xi + \Delta\xi, \eta) - U(\xi, \eta)\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta\xi}\left[\int_{\gamma \cup I} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy - \int_\gamma P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta\xi}\int_I P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \frac{1}{\Delta\xi}\int_\xi^{\xi+\Delta\xi} P(x, \eta)\,dx = P(\xi + \theta\Delta\xi, \eta),$$

где $0 \le \theta \le 1$. Последнее равенство справедливо в силу непрерывности функции $P(x, y)$ и следует из теоремы о среднем значении для интеграла Римана по отрезку $[\xi, \xi + \Delta\xi]$. При $\Delta\xi \to 0$ правая часть стремится к $P(\xi, \eta)$. Поэтому существует

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \lim_{\Delta\xi \to 0} \frac{U(\xi + \Delta\xi, \eta) - U(\xi, \eta)}{\Delta\xi} = P(\xi, \eta).$$

Аналогично доказываем, что

$$\frac{\partial U}{\partial \eta}(\xi, \eta) = Q(\xi, \eta).$$

Наконец, поскольку функции $P(\xi,\eta)$ и $Q(\xi,\eta)$ непрерывны в G, то функция $U(\xi,\eta)$ непрерывно дифференцируема в G. $\square$

Замечание 1. В условии теоремы 1 не требуется, чтобы кривая Γ была контуром, т. е. эта кривая не обязана быть простой.

Замечание 2. При доказательстве достаточности было показано, что из равенства нулю криволинейного интеграла II рода вдоль любой замкнутой кривой следует, что интеграл не зависит от кривой, а только лишь от начальной и конечной ее точек. Обратное утверждение, очевидно, также имеет место, т. е. если интеграл не зависит от кривой, соединяющей начальную и конечную точки, то по замкнутой кривой он равен нулю.

Замечание 3. При доказательстве достаточности была построена такая функция U, что $dU = P\,dx + Q\,dy$, где заданные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ удовлетворяют условию (23.3). Ясно, что задача нахождения этой функции U является двухмерным аналогом задачи нахождения первообразной в одномерном случае. Напомним, что в одномерном случае было показано, что для любой непрерывной функции f ее первообразная F может быть записана в виде интеграла с переменным верхним пределом

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Полученная нами формула

$$U(\xi,\eta) = \int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \quad (\gamma:\ (\xi_0,\eta_0) \to (\xi,\eta))$$

является аналогом указанной выше формулы из одномерного случая для случая функции двух переменных. Следует, однако, отметить, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ уже не для каждой пары непрерывных функций P и Q найдется соответствующая функция U. Пример таких функций P и Q приведем ниже. Мы доказали, что функция U существует, если функции (P,Q) удовлетворяют условию (23.3).

Замечание 4. Можно показать, что условие (23.3) эквивалентно условию равенства нулю интеграла по любому кусочно гладкому контуру, т. е. можно рассматривать лишь простые кривые.

Замечание 5. Теорема 1 не дает практических рекомендаций для выяснения вопроса о потенциальности поля (P, Q), так как на практике условие (23.3) проверяется трудно.

Следующая теорема в частном случае содержит условие, легко проверяемое с практической точки зрения.

Теорема 2. *Пусть поле $(P(x, y), Q(x, y))$ непрерывно дифференцируемо в области $G \subset \mathbb{R}^2$. Для того чтобы оно было потенциальным, необходимо, а если область G односвязна, то и достаточно, чтобы было выполнено равенство*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \quad ((x, y) \in G). \tag{23.4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть поле (P, Q) потенциальное, т. е. пусть существует такая функция U, что

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y), \quad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) \quad ((x, y) \in G).$$

Поскольку функции P и Q непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x, y),$$

то, в силу равенства смешанных производных функции U, которое следует из теоремы Шварца, получаем, что справедиво равенство (23.4).

Достаточность. Пусть область G односвязна. Возьмем произвольный кусочно гладкий контур $\Gamma \subset G$ и обозначим через Ω область, ограниченную этим контуром. Тогда, по формуле Грина, получим

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int\int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Отсюда, в силу условия (23.4), следует, что по произвольному кусочно гладкому контуру $\Gamma \subset G$ справедливо равенство

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = 0.$$

С учетом замечания 4, из этого равенства следует, что поле (P, Q) является потенциальным. $\square$

В заключение рассмотрим пример, показывающий, что условие односвязности в теореме 2 нельзя отбросить. Этот же пример показывает, что не для любых непрерывных (и даже непрерывно дифференцируемых) функций P и Q существует такая функция U, что $dU = P\,dx + Q\,dy$.

Пример. Пусть $P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ $((x,y) \neq (0,0))$. Функции P и Q удовлетворяют условию (23.4) в области $G \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Вместе с тем поле (P, Q) не является потенциальным, так как в противном случае было бы выполнено условие (23.3). Мы же покажем, что $\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy \neq 0$, где Γ – окружность $x = \cos t,\ y = \sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Имеем

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t]\; dt = 2\pi \neq 0.$$

Таким образом, в неодносвязной области G наше поле не является потенциальным. Вместе с тем так как условие (23.4) выполнено, то, в силу теоремы 2, наше поле потенциально в любой односвязной области G, не содержащей начала координат.

24. Поверхностные интегралы

24.1 Поверхности в трехмерном пространстве

24.1.1 Простые и почти простые поверхности

Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^2$ замкнуто. Функция $f(u,v)$ называется непрерывно дифференцируемой на E, если существует такое открытое множество $G \supset E$, что f определена на G и имеет на G непрерывные частные производные.

Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, а функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ непрерывно дифференцируемые на замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Отображение $F: \ \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$

$$F: \ x = \varphi(u,v), \ y = \psi(u,v), \ z = \chi(u,v) \quad \big((u,v) \in \overline{\Omega}\big)$$

называется непрерывно дифференцируемым отображением замкнутой области $\overline{\Omega}$ в пространство $\mathbb{R}^3$. Если при этом в каждой точке $(u,v) \in \Omega$ ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\chi}{\partial u}(u,v) \\ \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial\chi}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

равен 2, то отображение F называется гладким.

Пусть отображение $F: \ \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ гладкое. Если это отображение множества $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ на множество $\Sigma = F\left(\overline{\Omega}\right)$ взаимно однозначное, то множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ называют простой поверхностью в $\mathbb{R}^3$. При этом уравнения $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $z = \chi(u,v)$ $\big((u,v) \in \overline{\Omega}\big)$ называют параметрическими уравнениями простой поверхности Σ.

Если $\gamma = \partial\Omega$ – кусочно гладкая кривая, то образ этой кривой при гладком отображении $F: \ \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ называют краем простой поверхности

Σ и обозначают $\partial\Sigma$, т. е. $\partial\Sigma = F(\partial\Omega)$. Если $\gamma: \ u = u(t),\ v = v(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то

$$\partial\Sigma: \ x = \varphi(u(t), v(t)),\ y = \psi(u(t), v(t)),\ z = \chi(u(t), v(t)) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

т. е. $\partial\Sigma$ – кривая в $\mathbb{R}^3$.

Если функция $f(x,y)$ непрерывно дифференцируема на замкнутой области $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$, то ее график $\{(x,y,z): \ z = f(x,y)\}$ является простой поверхностью, определяемой параметрическими уравнениями $x = u$, $y = v$, $z = f(u,v)$ $\big((u,v) \in \overline{\Omega}\big)$. Действительно, в этом случае матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

имеет ранг, равный 2.

В векторной форме уравнение простой поверхности можно записать в следующем виде:

$$r = r(u,v) \quad \big((u,v) \in \overline{\Omega}\big),$$

где

$$r(u,v) = \varphi(u,v) \cdot i + \psi(u,v) \cdot j + \chi(u,v) \cdot k,$$

а i, j, k – единичные векторы в $\mathbb{R}^3$, т. е. $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$.

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $F: \ \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ – непрерывно дифференцируемое отображение. Множество $\Sigma = F\left(\overline{\Omega}\right)$ называется почти простой поверхностью в $\mathbb{R}^3$, если найдется расширяющая последовательность областей $\{\Omega_n\}$, таких, что $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$, $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ и поверхности $\Sigma_n = F\left(\overline{\Omega}_n\right)$ простые. Например, сфера $S_R = \left\{(x,y,z): \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}$ не является простой поверхностью, но она – почти простая поверхность. В самом деле, S_R является образом прямоугольника

$$\overline{\Omega} = \left\{(\varphi, \psi): \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

при непрерывно дифференцируемом отображении

$$F: \ x = R\cos\varphi\cos\psi,\ y = R\sin\varphi\cos\psi,\ z = R\sin\psi,$$

но это отображение $F: \overline{\Omega} \to S_R$ не является взаимно однозначным, так как образы отрезков $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ совпадают, а отрезки $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$ переходят в точки. В качестве Ω_n можно взять

$$\Omega_n = \left\{(\varphi, \psi): \ \frac{1}{n} < \varphi < 2\pi - \frac{1}{n}, \ -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} < \psi < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right\}.$$

Если Σ – простая поверхность, заданная уравнением

$$r = r(u, v) = \varphi(u, v) \cdot i + \psi(u, v) \cdot j + \chi(u, v) \cdot k \quad \left((u, v) \in \overline{\Omega}\right),$$

а функции $u = u\left(u', v'\right)$, $v = v\left(u', v'\right)$ $\left(u', v'\right) \in \Omega'$ непрерывно дифференцируемые и взаимно однозначно отображают $\overline{\Omega}'$ на $\overline{\Omega}$, причем якобиан

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial\left(u', v'\right)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \left(\left(u', v'\right) \in \overline{\Omega}'\right),$$

то уравнение

$$\rho = r\left(u\left(u', v'\right), v\left(u', v'\right)\right) = \rho\left(u', v'\right) \quad \left(\left(u', v'\right) \in \overline{\Omega}'\right)$$

определяет ту же самую поверхность Σ. В этом случае говорят, что уравнения $r = r(u, v)$ и $\rho = \rho\left(u', v'\right)$ являются двумя различными параметрическими представлениями поверхности Σ (или двумя различными параметризациями поверхности Σ).

Предположим, что простая поверхность Σ задана уравнением $r = r(u, v)$ $\left((u, v) \in \overline{\Omega}\right)$, где Ω – выпуклая область. Если зафиксировать $u = u_0$, то уравнение $r = r\left(u_0, v\right)$ $\left(\alpha\left(u_0\right) \leq v \leq \beta\left(u_0\right)\right)$ определяет кривую, лежащую на поверхности Σ. Ясно, что вектор-функция $r = r\left(u_0, v\right)$ является непрерывно дифференцируемой функцией переменной v, т. е. полученная кривая – гладкая. Поэтому у этой кривой в каждой точке v_0 имеется касательный вектор, который, как известно, может быть вычислен следующим образом:

$$r_v\left(u_0, v_0\right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(u_0, v_0\right), \frac{\partial\psi}{\partial v}\left(u_0, v_0\right), \frac{\partial\chi}{\partial v}\left(u_0, v_0\right)\right).$$

Аналогично, вектор

$$r_u\left(u_0, v_0\right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(u_0, v_0\right), \frac{\partial\psi}{\partial u}\left(u_0, v_0\right), \frac{\partial\chi}{\partial u}\left(u_0, v_0\right)\right)$$

является касательным в точке $(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0), \chi(u_0, v_0)) = r(u_0, v_0)$ к кривой $r(u, v_0)$. Таким образом, в каждой точке $r(u_0, v_0)$ поверхности Σ определена пара касательных векторов $r_u(u_0, v_0)$ и $r_v(u_0, v_0)$ к кривым $r(u, v_0)$ и $r(u_0, v)$, соответственно, причем оба эти векторы ненулевые. В самом деле, если хотя бы один из этих векторов нулевой, то ранг рассмотренной выше матрицы не может равняться 2.

В более общем случае, когда область Ω не является выпуклой, а точка $(u_0, v_0) \in \Omega$, то выбирают выпуклую окрестность точки (u_0, v_0) (например, круг с центром в точке (u_0, v_0)) и на куске поверхности Σ в точке $r(u_0, v_0)$ строят векторы $r_u(u_0, v_0)$ и $r_v(u_0, v_0)$.

Построенные векторы r_u и r_v позволяют строить касательную плоскость к поверхности Σ в заданной точке $r(u_0, v_0)$. В самом деле, если покажем, что векторы $r_u(u_0, v_0)$ и $r_v(u_0, v_0)$ неколлинеарны, то учитывая, что они ненулевые, получим, что они определяют некоторую плоскость. Тогда параллельную плоскость, проходящую через точку $r(u_0, v_0)$, называют касательной плоскостью к поверхности Σ в точке $r(u_0, v_0)$.

Чтобы убедиться в том, что векторы r_u и r_v неколлинеарны, достаточно показать, что их векторное произведение отлично от нуля. Имеем

$$N \equiv [r_u, r_v] = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot i + \frac{\partial\psi}{\partial u} \cdot j + \frac{\partial\chi}{\partial u} \cdot k, \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot i + \frac{\partial\psi}{\partial v} \cdot j + \frac{\partial\chi}{\partial v} \cdot k\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) \cdot i + \left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right) \cdot j + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) \cdot k =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} \\ \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot i + \begin{vmatrix} \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot k.$$

Поскольку ранг матрицы равен 2, то вектор $N \neq 0$, и поэтому векторы r_u и r_v неколлинеарны. Как известно из курса аналитической геометрии, вектор $N = [r_u, r_v]$ ортогонален к векторам r_u и r_v. Этот вектор N называют вектором нормали к поверхности Σ в точке $r(u_0, v_0)$. Ясно, что и вектор $-N = -[r_u, r_v]$ также будет вектором нормали к поверхности Σ в точке $r(u_0, v_0)$, противоположно направленным к вектору N.

Данное определение нормали на первый взгляд связано с параметрическим представлением $r = r(u, v)$ поверхности Σ. Покажем, что переходя к другому параметрическому представлению $\rho\,(u', v')$, получим вектор нормали N', коллинеарный вектору N. Это и будет означать, что вектор нормали не зависит от параметризации. Имеем

$$N' \equiv [\rho_{u'}, \rho_{v'}] = \left[r_u \cdot \frac{\partial u}{\partial u'} + r_v \cdot \frac{\partial v}{\partial u'}, r_u \cdot \frac{\partial u}{\partial v'} + r_v \cdot \frac{\partial v}{\partial v'}\right] =$$

$$= [r_u, r_v] \left(\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'}\right) = [r_u, r_v] \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u'} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} = [r_u, r_v]\,\frac{\partial(u, v)}{\partial\,(u', v')}.$$

Таким образом, $N' = \frac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')} \cdot N$. Но поскольку $\frac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')} \neq 0$, то получили, что векторы N' и N коллинеарны, причем они сонаправленные, если $\frac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')} > 0$, и противоположно направленные, если $\frac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')} < 0$.

24.1.2 Ориентируемые поверхности

Говорят, что гладкая поверхность Σ ориентируема, если на этой поверхности можно построить непрерывное поле единичных нормальных векторов. В этом случае это поле единичных нормалей определяет ориентацию (или сторону) поверхности. Если построено непрерывное поле единичных нормалей, то меняя направление всех нормальных векторов на противоположное, получаем еще одно непрерывное поле единичных нормальных векторов. Говорят, что это поле определяет противоположную, или другую сторону поверхности.

Если гладкая поверхность простая, то на ней всегда определено непрерывное поле единичных нормалей $n = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}$. Произвольная гладкая поверхность может оказаться неориентируемой, например, лист Мебиуса.

Можно доказать, что если гладкая поверхность является границей области в $\mathbb{R}^3$, то она ориентируема. Ее внутренняя сторона задается полем внутренних нормалей (т. е. направленных внутрь области), а противоположная сторона задается полем внешних нормалей, т. е. направленных во внешнюю область.

Границу области G, ориентированную внешними нормалями, будем обозначать через ∂G, а ориентированную внутренними нормалями – через ∂G^{-}. Если поверхность не является границей замкнутой области, то будем говорить, что ориентация простой поверхности Σ, задаваемая полем единичных нормалей $n = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}$, согласована с положительной ориентацией простых контуров, лежащих на поверхности Σ.

В общем случае будем рассматривать кусочно гладкие поверхности, т. е. такие непрерывные поверхности, которые можно разбить на конечное число гладких поверхностей. Мы не будем формулировать точных определений, а понимаем это на интуитивном уровне.

24.1.3 Площадь поверхности

Пусть простая поверхность задана уравнением

$$r = r(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \quad ((u,v) \in \Omega).$$

Зафиксируем $(u_0, v_0) \in \Omega$, зададим приращение Δu и Δv для u_0 и v_0, соответственно, так, чтобы прямоугольник $I \equiv [u_0, u_0 + \Delta u; v_0, v_0 + \Delta v] \subset \Omega$. Образом этого прямоугольника при отображении $r = r(u,v)$ будет криволинейный параллелограмм на данной поверхности. Пара векторов $r_u\,(u_0, v_0) \cdot \Delta u$ и $r_v\,(u_0, v_0) \cdot \Delta v$ будут касательными векторами к сторонам этого криволинейного параллелограмма. Покажем, что длины сторон этого криволинейного параллелограмма с точностью до $\overline{o}(\Delta u)$ и $\overline{o}(\Delta v)$ равны длинам векторов $r_u\,(u_0, v_0) \cdot \Delta u$ и $r_v\,(u_0, v_0) \cdot \Delta v$, соответственно. В самом деле, если зафиксировано $v = v_0$, то образ отрезка $[u_0, u_0 + \Delta u]$ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$, задаваемая уравнением $r = r\,(u, v_0)$ $(u_0 \le u \le u_0 + \Delta u)$. Длина этой кривой равна

$$\int_{u_0}^{u_0+\Delta u} \sqrt{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,(u, v_0)\right]^2 + \left[\frac{\partial \psi}{\partial u}\,(u, v_0)\right]^2 + \left[\frac{\partial \chi}{\partial u}\,(u, v_0)\right]^2}\, du =$$

$$= \int_{u_0}^{u_0+\Delta u} |r_u\,(u, v_0)|\; du = |r_u\,(u_0 + \theta\Delta u, v_0)| \cdot \Delta u = |r_u\,(u_0, v_0)| \cdot \Delta u + \overline{o}(\Delta u),$$

где $0 \le \theta \le 1$, и считаем, что $\Delta u > 0$.

Аналогично можно показать, что длина другой стороны криволинейного параллелограмма равна $|r_v(u_0, v_0)| \cdot \Delta v + \overline{o}(\Delta v)$.

Таким образом, естественно считать, что площадь криволинейного параллелограмма приближенно равна площади ΔS параллелограмма, построенного на векторах $r_u \cdot \Delta u$ и $r_v \cdot \Delta v$. Найдем эту площадь. Для этого обзначим

$$|r_u(u_0, v_0)|^2 = (r_u, r_u) \equiv E, \quad |r_v(u_0, v_0)|^2 = (r_v, r_v) \equiv G, \quad (r_u, r_v) \equiv F.$$

Тогда получим, что

$$\Delta S = |[r_u \cdot \Delta u, r_v \cdot \Delta v]| = \Delta u \Delta v \, |[r_u, r_v]| \, .$$

Но поскольку для двух любых векторов a и b справедливы равенства $|(a, b)| = |a| \cdot |b| \cdot |\cos(\widehat{a, b})|$ и $|[a, b]| = |a| \cdot |b| \cdot |\sin(\widehat{a, b})|$, то $|[a, b]|^2 = |a|^2 |b|^2 - |(a, b)|^2$. Значит,

$$|[r_u, r_v]|^2 = |r_u|^2 |r_v|^2 - |(r_u, r_v)|^2 = EG - F^2,$$

и тогда

$$\Delta S = \sqrt{EG - F^2} \Delta u \Delta v.$$

Замечание. Выше было показано, что в любой точке $(u, v) \in \Omega$ векторы r_u и r_v неколлинеарны, т. е. $[r_u, r_v] \ne 0$. Поэтому и в любой точке области Ω имеем $EG - F^2 = |[r_u, r_v]|^2 > 0$.

Определение. Выражение $dS = \sqrt{EG - F^2}\, dudv$ называется элементом площади поверхности. Площадь поверхности Σ определяется формально равенством

$$S(\Sigma) = \int\int_\Omega dS = \int\int_\Omega \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Такое определение оправдано приведенными выше эвристическими рассуждениями. С практической точки зрения для вычисления площади поверхности находим

$$E = (r_u, r_u) = (\varphi_u i + \psi_u j + \chi_u k, \varphi_u i + \psi_u j + \chi_u k) = \varphi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2,$$

$$G=\varphi_v^2+\psi_v^2,+\chi_v^2,\quad F=\varphi_u\varphi_v+\psi_u\psi_v+\chi_u\chi_v,$$

и тогда площадь $S(\Sigma)$ поверхности Σ равна

$$\int\int_\Omega \sqrt{\left(\varphi_u^2+\psi_u^2+\chi_u^2\right)\left(\varphi_v^2+\psi_v^2+\chi_v^2\right)-\left(\varphi_u\varphi_v+\psi_u\psi_v+\chi_u\chi_v\right)^2}\,dudv.$$

Свойства площади поверхности.

1. *Площадь $S(\Sigma)$ не зависит от параметризации поверхности Σ.*

Доказательство. Если два параметрических представления поверхности $\rho=\rho\left(u',v'\right)$ $\left(\left(u',v'\right)\in\Omega'\right)$ и $r=r(u,v)$ $((u,v)\in\Omega)$, то $u=u\left(u',v'\right)$, $v=v\left(u',v'\right)\in C^1(\Omega')$ и $\frac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')}\neq 0$ $\left(\left(u',v'\right)\in\Omega'\right)$. Поэтому

$$\int\int_{\Omega'}\left|\left[\rho_{u'},\rho_{v'}\right]\right|\,du'dv'=\int\int_{\Omega'}\left|\left[r_u,r_v\right]\right|\left|\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(u',v'\right)}\right|\,du'dv'=$$

$$=\int\int_\Omega\left|\left[r_u,r_v\right]\right|\,dudv.$$

При этом мы воспользовались равенством

$$\left[\rho_{u'},\rho_{v'}\right]=\left[r_u,r_v\right]\frac{\partial(u,v)}{\partial\left(u',v'\right)}\quad\left(\left(u',v'\right)\in\Omega'\right),$$

которое было получено ранее. □

2. *Если Σ – плоская измеримая по Жордану область Ω, заданная уравнениями $x=u$, $y=v$, $z=0$ $((u,v)\in\Omega)$, то площадь поверхности Σ совпадает с мерой Жордана плоской области Ω.*

Доказательство. Поскольку $r=r(u,v)=(u,v,0)$, $r_u=(1,0,0)$, $r_v=(0,1,0)$, $E=(r_u,r_u)=1$, $G=(r_v,r_v)=1$, $F=(r_u,r_v)=0$, то

$$S(\Sigma)=\int\int_\Omega\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\int\int_\Omega dudv=m(\Omega).\quad\square$$

3. *Если поверхность задана как график непрерывно дифференцируемой на замкнутой области $\overline{\Omega}$ функции $f(x,y)$, т. е.*

$$\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega\right\},$$

то

$$S(\Sigma)=\int\int_\Omega\sqrt{1+\left(f_x'\right)^2+\left(f_y'\right)^2}\,dxdy.$$

Доказательство. Имеем

$$r = r(u,v) = (u, v, f(u,v)) \quad ((u,v) \in \Omega), \quad r_u = (1, 0, f'_u), \ r_v = (0, 1, f'_v),$$

$$E = (r_u, r_u) = 1 + (f'_u)^2, \quad G = 1 + (f'_v)^2, \quad F = f'_u f'_v,$$

$$EG - F^2 = \left(1 + (f'_u)^2\right)\left(1 + (f'_v)^2\right) - (f'_u)^2 (f'_v)^2 = 1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2.$$

Отсюда сразу следует требуемое равенство. □

4. *Площадь поверхности аддитивна относительно поверхности.*

Это свойство является следствием свойства аддитивности двойного интеграла относительно области интегрирования.

Площадь почти простой поверхности. Выше мы определили почти простую поверхность Σ как образ замыкания области Ω при отображении $r = r(u,v)$, таком, что найдется последовательность областей $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$, $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, где поверхности Σ_n – образы областей Ω_n – простые. Естественно под площадью почти простой поверхности понимать следующую величину –

$$S(\Sigma) = \lim_{n\to\infty} S(\Sigma_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\int_{\Omega_n} \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \int\int_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dudv,$$

где интеграл справа понимается как несобственный в определенном последним равенством смысле. Если область Ω измерима по Жордану, а функция $\sqrt{EG - F^2}$ ограниченная на $\overline{\Omega}$, то последний интеграл является двойным интегралом Римана по Ω.

Упражнение. Доказать, что $EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$, где

$$A = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix},$$

т. е. A, B, C – миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем еще одну формулу для вычисления площади –

$$S(\Sigma) = \int\int_{\Omega} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv.$$

24.2 Поверхностные интегралы первого рода

Пусть Σ – простая поверхность, заданная уравнением $r = r(u, v)$ ($(u, v) \in \Omega$). Далее, пусть на поверхности Σ задана непрерывная функция $F(x, y, z)$. Поверхностным интегралом I рода от функции F по поверхности Σ будем называть такой интеграл:

$$\int\int_{\Sigma} F\, dS \equiv \int\int_{\Sigma} F(x, y, z)\, dS =$$

$$= \int\int_{\Omega} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\, |[r_u, r_v]|\, dudv =$$

$$= \int\int_{\Omega} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Определенный таким образом поверхностный интеграл I рода не зависит от способа параметризации поверхности Σ. Это доказывается точно так же, как было доказано, что площадь поверхности не зависит от способа ее параметризации. Аддитивность поверхностного интеграла I рода вытекает из аддитвности двойного интеграла. (Докажите эти свойства самостоятельно.)

Физическая интерпретация поверхностного интеграла I рода. Если $F(x, y, z) \geq 0$ на Σ, то функцию F можно интерпретировать как плотность материальной поверхности Σ. Пусть $\{\Omega_i\}_{i=1}^n$ – произвольное разбиение области Ω. Ему соответствует разбиение поверхности Σ на $\{\Sigma_i\}_{i=1}^n$. По теореме о среднем для двойного интеграла имеем

$$S(\Sigma_i) = \int\int_{\Omega_i} |[r_u, r_v]|\, du\, dv = |[r_u, r_v]|_i\, m(\Omega_i),$$

где $|[r_u, r_v]|_i$ – значение функции $|[r_u, r_v]|$ в некоторой точке $(u_i, v_i) \in \Omega_i$. Тогда масса поверхности Σ приближенно равна

$$M \approx \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\, S(\Sigma_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F(x(u_i, v_i), y(x_i, v_i), z(u_i, v_i))\, |[r_u, r_v]|_i\, m(\Omega_i).$$

Точное значение массы $M(\Sigma)$ определяется как предел сумм в правой части при стремлении к нулю диаметра разбиения области Ω. С другой стороны, этот предел, по определению двойного интеграла, равен

$$\int\int_{\Omega} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\, |[r_u, r_v]|\, dudv.$$

Таким образом, $\int\int_{\Sigma} F\, dS$ можно интерпретировать как массу поверхности Σ, где F – плотность распределения массы.

Упражнение. Показать, что в случае, когда поверхность Σ представляет собой график дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ $((x, y) \in \Omega)$, то

$$\int\int_{\Sigma} F\, dS = \int\int_{\Omega} F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + (f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2}\, dxdy.$$

Пример. Вычислить поверхностный интеграл

$$I \equiv \int\int_{\Sigma} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\, dS,$$

где Σ – поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Параметрическое представление эллипсоида можно записать в следующем виде: $x = a\cos\varphi\sin\theta$, $y = b\sin\varphi\sin\theta$, $z = c\cos\theta$, где $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. Тогда получим:

$$r_\varphi = (-a\sin\varphi\sin\theta, b\cos\varphi\sin\theta, 0), \quad r_\theta = (a\cos\varphi\cos\theta, b\sin\varphi\cos\theta, -c\sin\theta),$$

$$E = (r_\varphi, r_\varphi) = a^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + b^2\cos^2\varphi\sin^2\theta,$$

$$G = (r_\theta, r_\theta) = a^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + b^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta,$$

$$F = (r_\varphi, r_\theta) = -a^2 \sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + b^2 \sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta,$$

$$EG - F^2 = \left(a^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + b^2\cos^2\varphi\sin^2\theta\right) \times$$
$$\times \left(a^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + b^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta\right) -$$
$$-\left(-a^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + b^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\right)^2 =$$

$$= a^2b^2c^2\sin^2\theta\left[\frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2} + \frac{\cos^2\varphi\sin^2\theta}{a^2}\right],$$

$$dS = \sqrt{EG-F^2}\,d\varphi d\theta = abc\sin\theta\sqrt{\frac{\cos^2\varphi\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}\,d\varphi d\theta.$$

Подынтегральная функция равна

$$F(x,y,z) = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \sqrt{\frac{\cos^2\varphi\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}.$$

Поэтому имеем

$$I = abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\sin\theta\left(\frac{\cos^2\varphi\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

24.3 Поверхностные интегралы второго рода

Пусть в некоторой окрестности простой поверхности Σ задано непрерывное векторное поле

$$a(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Ориентируем поверхность Σ непрерывным полем единичных нормалей

$$n = n(x,y,z) = \left(n_x(x,y,z), n_y(x,y,z), n_z(x,y,z)\right),$$

где $n_x,\ n_y$ и n_z – скалярные функции – проекции вектора n на оси x, y и z, соответственно. Заметим, что для простой поверхности Σ существуют два различных непрерывных векторных поля единичных нормалей $n(x,y,z)$ и $-n(x,y,z)$. Фиксируя одно из них, мы тем самым выбираем сторону поверхности Σ. Спроектируем в каждой точке поверхности Σ вектор a на вектор нормали n. Тогда на поверхности Σ будет определена функция $(a,n) = F(x,y,z)$. Заметим, что при переходе к противоположной стороне поверхности вектор нормали меняет знак, а значит, и функция $F(x,y,z)$ меняет знак на противоположный.

Определение. Потоком вектор-функции $a(x,y,z)$ через ориентированную поверхность Σ называется поверхностный интеграл I рода

$$\int\int_{\Sigma}(a,n)\,dS = \int\int_{\Sigma}F(x,y,z)\,dS.$$

Этот интеграл называют также поверхностным интегралом II рода.

В наших обозначениях $n = (n_x, n_y, n_z)$, где n_x, n_y и n_z – проекции вектора n на оси x, y и z, т. е. $n_x = \cos(\widehat{n,x})$, $n_y = \cos(\widehat{n,y})$ и $n_z = \cos(\widehat{n,z})$ – направляющие косинусы нормального единичного вектора. Поэтому

$$\int\int_{\Sigma}(a,n)\,dS = \int\int_{\Sigma}\left[P\cdot\cos(\widehat{n,x}) + Q\cdot\cos(\widehat{n,y}) + R\cdot\cos(\widehat{n,z})\right]\,dS.$$

Еще одно часто используемое обозначение поверхностного интеграла II рода имеет такой вид:

$$\int\int_{\Sigma}P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy \equiv \int\int_{\Sigma}(a,n)\,dS.$$

Смысл этого обозначения становится понятным, если простая поверхность Σ задана в параметрическом виде $r = r(u,v)$, где $(u,v)\in\Omega$. Тогда, как было показано выше, вектор нормали $N = [r_u, r_v]$, а поле единичных нормалей может быть записано в виде $n = \frac{N}{|N|}$. Поэтому, согласно определению поверхностного интеграла,

$$\int\int_{\Sigma}(a,n)\,dS = \int\int_{\Omega}\left(a, \frac{N}{|N|}\right)|[r_u, r_v]|\,dudv =$$

$$= \int\int_{\Omega}(a,N)\,dudv = \int\int_{\Omega}(a, r_u, r_v)\,dudv.$$

Под знаком последенего интеграла стоит смешанное произведение трех векторов a, r_u и r_v. Как известно, в координатной форме его можно записать так:

$$(a, r_u, r_v) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} =$$

$$= P \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$\int\int_\Sigma (a, n)\, dS = \int\int_\Omega \left[P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] dudv.$$

Если $dy = y'_u\, du + y'_v\, dv$ и $dz = z'_u\, du + z'_v\, dv$ понимать как разложение векторов dy и dz по векторам du и dv с компонентами y'_u, y'_v и z'_u, z'_v, соответственно, то

$$[dy, dz] = [y'_u\, du + y'_v\, dv, z'_u\, du + z'_v\, dv] =$$

$$= (y'_u z'_v - y'_v z'_u)\, [du, dv] = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\, [du, dv]\,.$$

Тем самым оправдано обозначение

$$\int\int_\Sigma P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy = \int\int_\Sigma (a, n)\, dS =$$

$$= \int\int_\Omega \left[P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] dudv.$$

Следует понимать, что в выражениях типа $dxdy$ нельзя менять местами символы dx и dy. Точнее, $dxdy = -dydx$. Это равенство означает, что

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, dudv = -\frac{\partial(y,x)}{\partial(u,v)}\, dudv,$$

которое, в свою очередь, следует из свойств определителей.

Окончательно, выпишем формулу, которая на практике дает возможность сводить вычисление поверхностных интегралов II рода к вычислению двойных интегралов

$$\int\int_\Sigma P(x,y,z)\, dydz + Q(x,y,z)\, dzdx + R(x,y,z)\, dxdy =$$

$$= \int\int_{\Omega} \Big[P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} +$$

$$+ Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \Big] \, dudv.$$

При этом в левой части интеграл берется по той стороне поверхности Σ, которая ориентирована нормалями $n = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}$. По противоположной стороне поверхности Σ поверхностный интеграл II рода будет иметь противоположный знак.

Пример. Вывести формулу для вычисления поверхностного интеграла II рода

$$\int\int_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$$

в случае, когда поверхность Σ задана как график функции $z = z(x,y)$ ($(x,y) \in \Omega$), а интеграл берется по верхней стороне поверхности Σ.

Запишем параметрическое представление поверхности Σ в виде $x = u$, $y = v$, $z = z(u,v)$ ($(u,v) \in \Omega$). Имеем $r_u = (1, 0, z'_u)$, $r_v = (0, 1, z'_v)$,

$$N = [r_u, r_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & z'_u \\ 0 & 1 & z'_v \end{vmatrix} = -z'_u \cdot i - z'_v \cdot j + k.$$

Поскольку коэффициент при k в разложении вектора N равен 1, то это означает, что вектор нормали

$$n = \frac{1}{\sqrt{(z'_u)^2 + (z'_v)^2 + 1}} (-z'_u \cdot i - z'_v \cdot j + k)$$

направлен вверх, т. е. поле нормалей n ориентирует верхнюю сторону данной поверхности. Далее, имеем

$$dydz = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \, dudv = \begin{vmatrix} 0 & z'_u \\ 1 & z'_v \end{vmatrix} dudv = -z'_u \, dudv,$$

$$dzdx = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \, dudv = \begin{vmatrix} z'_u & 1 \\ z'_v & 0 \end{vmatrix} dudv = -z'_v \, dudv,$$

$$dxdy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,dudv = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\,dudv = dudv.$$

Таким образом,

$$\int\int_\Sigma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy =$$

$$= \int\int_\Omega \left[P(u,v,z(u,v))\,(-z'_u) + Q(u,v,z(u,v))\,(-z'_v) + R(u,v,z(u,v))\right]\,dudv.$$

Пример. Вичислить $\int\int_\Sigma z^2\,dxdy$ по внешности полусферы $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$. Здесь $P(x,y,z)\equiv Q(x,y,z)\equiv 0$, $R(x,y,z)=z^2$, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Согласно полученной формуле,

$$\int\int_\Sigma z^2\,dxdy = \int\int_{u^2+v^2\leq 1}\left(1-u^2-v^2\right)\,dudv =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\left(1-r^2\right)\,dr = 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

25. Элементы теории поля

Введем в рассмотрение следующий символический оператор ∇:

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},$$

где i, j, k – набор стандартных базисных векторов в $\mathbb{R}^3$. Его называют оператором Гамильтона. С помощью этого опрератора удобно записывать различные операции дифференциального исчисления векторного анализа, если с оператором ∇ обращаться как с обычным вектором, но с некоторыми оговорками, которые мы поясним на примерах.

Если в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задана функция $f : \ \Omega \to \mathbb{R}$, то говорят, что на Ω задано скалярное поле f. Как известно, функция f (или скалярное поле f) называется дифференцируемой в точке $M_0 \in \Omega$, если существует такой вектор c, что

$$f(M) - f(M_0) =$$

$$= c_1 (x - x_0) + c_2 (y - y_0) + c_3 (z - z_0) + \overline{o}\left(\left|\overline{M_0, M}\right|\right) \quad (M \to M_0), \ (25.1)$$

где обозначено $M = (x, y, z)$, $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$. Известно также, что в этом случае

$$c_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \quad c_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0), \quad c_3 = \frac{\partial f}{\partial z}(M_0).$$

Линейную часть справа в (25.1) можно записать в виде $(M - M_0, c)$, где

$$c = ic_1 + jc_2 + kc_3 = i\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + j\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + k\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = \nabla f(M_0).$$

В этой записи под действием оператора ∇ на скалярную функцию f в точке M_0 понимается вектор

$$i\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + j\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + k\frac{\partial f}{\partial z}(M_0).$$

Если $b = (b_1, b_2, b_3)$ – произвольный вектор, то запись $b\nabla$ будет обозначать дифференциальный оператор, определенный равенством

$$b\nabla = (b, \nabla) = b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + b_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда линейная часть справа в (25.1) может быть записана так:

$$(M - M_0, c) = (M - M_0, \nabla f(M_0)) = (M - M_0, \nabla) f(M_0).$$

Таким образом, равенство (25.1) можно переписать в следующем виде:

$$f(M) - f(M_0) = (M - M_0, \nabla) f(M_0) + \overline{o}\left(\left|\overline{M_0, M}\right|\right) \quad (M \to M_0).$$

Сформулируем описанные правила обращения с оператором ∇.

1. Если оператор ∇ применяется к функции (т. е. если справа от ∇ записана функция f), то

$$\nabla f = i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z},$$

т. е. результатом действия оператора ∇ на функцию f является вектор-функция.

2. Если вектор b умножается на ∇ (в этом случае он записывается слева от ∇), то действуем как при обычном скалярном произведении двух векторов –

$$b\nabla = (b, \nabla) = b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + b_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Результатом является дифференциальный оператор, а результатом действия этого дифференциального оператора на скалярное поле f (т. е. на скалярную функцию f) является функция

$$(b\nabla)f = b_1 \frac{\partial f}{\partial x} + b_2 \frac{\partial f}{\partial y} + b_3 \frac{\partial f}{\partial z}.$$

При этом запись $(b\nabla)f(M_0)$ обозначает значение этой функции в точке M_0.

Упражнение. Покажите, что производная дифференцируемого скалярного поля f в точке M_0 по направлению единичного вектора l равна

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = (l\nabla)f(M_0).$$

25.1 Векторные поля. Дивергенция и вихрь

Пусть в каждой точке области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задан вектор $a = (a_1, a_2, a_3)$. В этом случае говорят, что на Ω задано векторное поле.

Задание векторного поля равносильно заданию трех скалярных функций $a_1(x, y, z)$, $a_2(x, y, z)$ и $a_3(x, y, z)$, т. е. трех скалярных полей.

Говорят, что векторное поле a дифференцируемо в точке M_0, если существует такое линейное отображение A, что

$$a(M) - a(M_0) = A(M - M_0) + \overline{o}\left(\left|\overline{M_0, M}\right|\right) \quad (M \to M_0).$$

В координатной записи это равенство имеет такой вид ($i = 1, 2, 3$):

$$a_i(M) - a_i(M_0) = A_{i,1}(x - x_0) + A_{i,2}(y - y_0) + A_{i,3}(z - z_0) + \overline{o}\left(\left|\overline{M_0, M}\right|\right)$$

при $M \to M_0$, где $M = (x, y, z)$, $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $A_{i,j}$ – компоненты матрицы линейного отображения A. Последнее равенство можно переписать в таком виде:

$$a_i(M) - a_i(M_0) = (M - M_0, \nabla)\, a_i(M_0) + \overline{o}\left(\left|\overline{M_0, M}\right|\right) \quad (M \to M_0),$$

или в векторной форме

$$a(M) - a(M_0) = (M - M_0, \nabla)\, a(M_0) + \overline{o}\left(\left|\overline{M_0, M}\right|\right) \quad (M \to M_0). \quad (25.2)$$

Справа в (25.2) дифференциальный оператор $(M - M_0, \nabla)$ применяется к вектору a, т. е. к каждой его компоненте применяется один и тот же оператор.

Определение. Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ определено векторное поле

$$a(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Дивергенцией поля a называется следующая скалярная функция:

$$\operatorname{div} a = (\nabla, a) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Вихрем векторного поля a называется следующая векторная функция:

$$\operatorname{rot} a = [\nabla, a] = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Можно доказать, что $\operatorname{div} a$ не зависит от системы координат, а $\operatorname{rot} a$ зависит лишь от ориентации системы координат.

Итак, с оператором ∇ можно формально обращаться как с обычным вектором. Если функция или вектор записаны слева от ∇, то действия производятся по обычным правилам векторной алгебры. В результате такой операции получается новый дифференциальный оператор. Если же функция или вектор записаны справа от ∇, то в этом случае оператор ∇ действует как дифференциальный оператор.

Пример 1. Покажем, что $\operatorname{div} \operatorname{rot} a = 0$.

Действительно,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} a = (\nabla, [\nabla, a]) = (\nabla, \nabla, a) = 0.$$

Пример 2. Справедливо равенство

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = [\nabla, \nabla f] = [\nabla, \nabla] f = 0.$$

Упражнение. Проверьте справедливость этих двух равенств в координатной записи.

25.2 Формула Остроградского – Гаусса

Так называется аналог формулы Грина в трехмерном пространстве. Формула Грина связывает двойной интеграл по некоторой области в $\mathbb{R}^2$ с криволинейным интегралом по границе этой области. Формула Остроградского – Гаусса связывает тройной интеграл по некоторой области в

$\mathbb{R}^3$ с поверхностным интегралом по границе этой области. Схема доказательства формулы Остроградского – Гаусса также напоминает схему доказательства формулы Грина. Сначала приведем следующее

Определение. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется элементарной относительно оси z, если найдутся две такие кусочно непрерывно дифференцируемые в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, что

$$\overline{G} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y), \ \left((x, y) \in \overline{\Omega}\right)\right\}.$$

Теорема (формула Остроградского – Гаусса). *Пусть ограниченная область $G \subset \mathbb{R}^3$, граница которой ∂G является кусочно гладкой поверхностью, ориентированной внешними нормалями. Далее, пусть в $\overline{G}$ задано дифференцируемое векторное поле $a = (P, Q, R)$. Тогда поток векторного поля a через границу области ∂G равен тройному интегралу от $\operatorname{div} a$ по области G, т. е. справедливо следующее равенство:*

$$\int\int_{\partial G} (a, n)\, dS = \int\int\int_G \operatorname{div} a\, dxdydz,$$

или, что то же самое,

$$\int\int_{\partial G} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy = \int\int\int_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz. \tag{25.3}$$

Доказательство. Докажем сначала равенство (25.3) в случае, когда область G элементарна относительно каждой из осей. Применяя формулу сведения тройного интеграла к повторному, получим

$$\int\int\int_G \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dxdydz = \int\int_\Omega dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int\int_\Omega dxdy\ [R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))] =$$

$$= \int\int_{\Sigma_1} R(x, y, z)\, dxdy + \int\int_{\Sigma_2} R(x, y, z)\, dxdy,$$

где Σ_1 и Σ_2 – поверхности, являющиеся графиками функций $z = \psi(x, y)$ и $z = \varphi(x, y)$ $((x, y) \in \Omega)$, соответственно. При этом мы учитываем, что поверхность Σ_1 ориентирована внешними нормалями по отношению к ∂G, а Σ_2 – внутренними нормалями по отношению к ∂G. Если еще учесть, что

$$\int\int_{\Sigma_3} R(x, y, z)\, dxdy = 0,$$

где Σ_3 – цилиндрическая поверхность –

$$\Sigma_3 = \left\{(x, y, z) :\ \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y),\ (x, y) \in \partial\Omega\right\},$$

то получим

$$\int\int\int_G \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dxdydz = \sum_{i=1}^{3} \int\int_{\Sigma_i} R(x, y, z)\, dxdy =$$

$$= \int\int_{\partial G} R(x, y, z)\, dxdy.$$

Аналогично, пользуясь тем, что область G элементарна относительно осей x и y, получаем

$$\int\int\int_G \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z)\, dxdydz = \int\int_{\partial G} P(x, y, z)\, dydz,$$

$$\int\int\int_G \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z)\, dxdydz = \int\int_{\partial G} Q(x, y, z)\, dzdx.$$

Складывая все эти три равенства, получим формулу Остроградского – Гаусса (25.3) для элементарной области G.

Дальнейшее обобщение формулы (25.3) на более общие области G производится точно так же, как и при доказательстве формулы Грина. Именно, сначала доказываем формулу (25.3) для случая, когда область G кусочно гладкой перегородкой Σ может быть разбита на две элементарные относительно каждой из осей области G_1 и G_2. Если

$$\partial G = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \quad \partial G_1 = \Sigma_1 \cup \Sigma, \quad \partial G_2 = \Sigma_2 \cup \Sigma^-$$

и ∂G_1 и ∂G_2 ориентированы внешними нормалями, то Σ и Σ^- ориентированы противоположно. На основании уже доказанной формулы Остроградского – Гаусса для элементарных областей, имеем

$$\iiint_{G_1} \operatorname{div} a\, dxdydz = \iint_{\partial G_1} (a,n)\, dS = \iint_{\Sigma_1} (a,n)\, dS + \iint_{\Sigma} (a,n)\, dS,$$

$$\iiint_{G_2} \operatorname{div} a\, dxdydz = \iint_{\partial G_2} (a,n)\, dS = \iint_{\Sigma_2} (a,n)\, dS + \iint_{\Sigma^-} (a,n)\, dS.$$

Складывая эти два равенства, получим формулу (25.3).

Далее, формула (25.3) доказывается для случая, когда область G можно разбить на конечное число попарно непересекающихся элементарных областей. Затем формулу (25.3) доказываем для выпуклых многогранников, из нее получаем эту формулу для произвольных многогранников, а затем осуществляем предельный переход от произвольных многогранников к произвольной односвязной области G с кусочно гладкой границей ∂G. $\square$

Дальнейшее обобщение формулы Остроградского – Гаусса, так же, как и формулы Грина, возможны на случай области с одной "дырой", с конечным числом "дыр" и т. д.

Вычисление объемов тел. Положим в формуле Остроградского – Гаусса $P(x,y,z) = x$, $Q(x,y,z) = y$ и $R(x,y,z) = z$. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3,$$

и поэтому получим такую формулу для вычисления объема области G:

$$m(G) = \iiint_G dxdydz = \frac{1}{3}\iint_{\partial G} x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy.$$

Эта формула аналогична той, которую мы получили из формулы Грина для нахождения меры плоской области через криволинейный интеграл по границе этой области.

25.3 Формула Стокса

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана простая поверхность

$$\Sigma:\ r = r(u,v) \quad \big((u,v)\in\overline{\Omega}\subset\mathbb{R}^2\big).$$

Далее, пусть $\partial\Omega$ – положительно ориентированная граница области Ω – задается уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$. Образ кривой $\partial\Omega$ при отображении $r = r(u,v)$ называется краем поверхности Σ и обозначается через $\partial\Sigma$. Поверхность Σ имеет две стороны, а ее край $\partial\Sigma$ – кривая в $\mathbb{R}^3$ – две различные ориентации. При отображении $r = r(u,v)$ $\big((u,v)\in\overline{\Omega}\big)$ мы выбираем ту сторону поверхности Σ, которая определена полем нормалей $N = [r_u, r_v]$. Если при этом граница $\partial\Omega$ области Ω пробегается в положительном направлении и задается уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то тем самым определена ориентация края поверхности Σ, т. е. $\partial\Sigma$ задается уравнением $r = r(u(t), v(t))$ $(\alpha \le t \le \beta)$. В этом случае говорят, что ориентация поверхности Σ согласована с ориентацией края $\partial\Sigma$. Можно показать, что такое согласование совпадает с правилом правого винта.

Определение. Пусть в окрестности поверхности Σ задано непрерывно дифференцируемое векторное поле

$$a = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Если $\gamma:\ r = r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $(\alpha \le t \le \beta)$ – замкнутый кусочно гладкий контур в $\mathbb{R}^3$, то криволинейный интеграл II рода $\int_\gamma (a, dr)$ называется циркуляцией векторного поля a по контуру γ,

$$\int_\gamma (a, dr) = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Говорят, что поверхность Σ натянута на контур γ, если $\gamma = \partial\Sigma$ и ориентация поверхности Σ согласована с ориентацией контура γ.

Теорема Стокса. *Циркуляция непрерывно дифференцируемого векторного поля a по гладкому контуру $\gamma = \partial\Sigma$ равна потоку вихря* $\operatorname{rot} a$

через гладкую поверхность Σ, *натянутую на контур* $\gamma = \partial\Sigma$, *т. е.*

$$\int_{\partial\Sigma} (a, dr) = \int\int_{\Sigma} (\operatorname{rot} a, n)\, dS. \tag{25.4}$$

Доказательство основано на применении следующего равенства:

$$(b, (c\nabla)a) - (c, (b\nabla)a) = (c, b, \operatorname{rot} a). \tag{25.5}$$

Докажем это равенство. Имеем

$$(b, (c\nabla)a) - (c, (b\nabla)a) = \sum_i b_i (c\nabla) a_i - c_i (b\nabla) a_i =$$

$$= \sum_i \left[b_i \left(c_1 \frac{\partial a_i}{\partial x} + c_2 \frac{\partial a_i}{\partial y} + c_3 \frac{\partial a_i}{\partial z} \right) - c_i \left(b_1 \frac{\partial a_i}{\partial x} + b_2 \frac{\partial a_i}{\partial y} + b_3 \frac{\partial a_i}{\partial z} \right) \right] =$$

$$= \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x} (b_i c_1 - c_i b_1) + \frac{\partial a_i}{\partial y} (b_i c_2 - c_i b_2) + \frac{\partial a_i}{\partial z} (b_i c_3 - c_i b_3) =$$

$$= \frac{\partial a_1}{\partial x} (b_1 c_1 - c_1 b_1) + \frac{\partial a_2}{\partial y} (b_2 c_2 - c_2 b_2) + \frac{\partial a_3}{\partial z} (b_3 c_3 - c_3 b_3) +$$

$$+ \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) (b_2 c_1 - c_2 b_1) + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial z} \right) (b_3 c_1 - c_3 b_1) +$$

$$+ \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) (b_3 c_2 - c_3 b_2) =$$

$$= \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} - \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} & \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} & \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \end{vmatrix} = (c, b, \operatorname{rot} a).$$

Докажем теперь равенство (25.4). Имеем

$$\int_{\partial\Sigma} (a, dr) = \int_\alpha^\beta \left[(a(r(u(t), v(t))), r_u(u(t), v(t)))\, u'(t) + \right.$$

$$\left. + \, (a(r(u(t), v(t))), r_v(u(t), v(t)))\, v'(t) \right] dt = \int_{\partial\Omega} (a, r_u)\ du + (a, r_v)\ dv.$$

Применяя формулу Грина к области Ω, получаем

$$\int_{\partial\Sigma} (a, dr) = \int\int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial u} (a, r_v) - \frac{\partial}{\partial v} (a, r_u) \right] dudv =$$

$$= \int\int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial u} (Px'_v + Qy'_v + Rz'_v) - \frac{\partial}{\partial v} (Px'_u + Qy'_u + Rz'_u) \right] dudv =$$

$$= \int\int_\Omega [P'_u x'_v + Q'_u y'_v + R'_u z'_v - P'_v x'_u - Q'_v y'_u - R'_v z'_u]\ dudv =$$

$$= \int\int_\Omega \left[\left(P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u \right) x'_v + \left(Q'_x x'_u + Q'_y y'_u + Q'_z z'_u \right) y'_v + \right.$$

$$+ \left(R'_x x'_u + R'_y y'_u + R'_z z'_u \right) z'_v - \left(P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_z z'_v \right) x'_u -$$

$$\left. - \left(Q'_x x'_v + Q'_y y'_v + Q'_z z'_v \right) y'_u - \left(R'_x x'_v + R'_y y'_v + R'_z z'_v \right) z'_u \right] dudv =$$

$$= \int\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial a}{\partial x} \cdot x'_u + \frac{\partial a}{\partial y} \cdot y'_u + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot z'_u, r_v \right) - \right.$$

$$- \left(\frac{\partial a}{\partial x} \cdot x'_v + \frac{\partial a}{\partial y} \cdot y'_v + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot z'_v, r_u \right) \Big] \, dudv =$$

$$= \int\!\!\int_\Omega [(r_v, (r_u \nabla)\, a) - (r_u, (r_v \nabla)\, a)] \, dudv = \int\!\!\int_\Omega (r_u, r_v, \operatorname{rot} a) \, dudv,$$

где последнее равенство вытекает из (25.5). Если теперь воспользоваться полученной ранее следующей формулой сведения поверхностного интеграла II рода к двойному –

$$\int\!\!\int_\Sigma (a, n) \, dS = \int\!\!\int_\Omega (a, r_u, r_v) \, dudv,$$

то получим

$$\int_{\partial\Sigma} (a, dr) = \int\!\!\int_\Omega (r_u, r_v, \operatorname{rot} a) \, dudv = \int\!\!\int_\Sigma (\operatorname{rot} a, n) \, dS,$$

и тем самым теорема доказана. $\square$

Формулу Стокса легко можно распространить на случай кусочно гладкой поверхности Σ. Действительно, для этого поверхность Σ нужно разрезать на конечное число гладких поверхностей Σ_i, записать для каждой из них формулу Стокса, сложить и учесть, что криволинейные интегралы по разрезам взаимно уничтожаются т. к. разрезы входят в ориентированные границы кусков с противоположными ориентациями.

25.4 Потенциалы в $\mathbb{R}^3$

Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задано непрерывное векторное поле

$$a = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Аналогично тому, как было дано определение в $\mathbb{R}^2$, поле a назовем потенциальным в области G, если существует такая функция U, что $a = \operatorname{grad} U$, т. е.

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

При этом функция U называется потенциалом поля a.

Аналогично тому, как были доказаны соответствующие теоремы о потенциалах в плоском случае, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывное в области* $G \subset \mathbb{R}^3$ *поле* $a = (P, Q, R)$ *было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие*

$$\int_\gamma (a, dr) = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

для любой кусочно гладкой замкнутой кривой $\gamma \subset G$.

В $\mathbb{R}^3$ аналогом односвязной области в данных вопросах является понятие линейной односвязности. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется линейно односвязной, если на любой простой кусочно гладкий контур $\Gamma \subset G$ можно натянуть кусочно гладкую поверхность $\Sigma \subset G$.

Теорема 2. *Пусть поле* $a = (P, Q, R)$ *непрерывно дифференцируемо в области* $G \subset \mathbb{R}^3$. *Для того чтобы оно было потенциальным, необходимо, а в случае линейной односвязности области* G *– и достаточно, чтобы всюду в* G *было выполнено равенство* $\operatorname{rot} a = 0$.

Доказательство этой теоремы основано на применении формулы Стокса. Оно аналогично доказательству соответствующей теоремы для потенциальных полей в $\mathbb{R}^2$ и поэтому мы его опускаем.

Условие $\operatorname{rot} a = 0$ в терминах координатных функций P, Q и R можно записать так:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0,$$

а это равносильно тому, что

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

25.5 Соленоидальные поля

Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $a = (a_1, a_2, a_3)$. Это векторное поле a называется соленоидальным на G, если на G существует такое векторное поле $W = (P, Q, R)$, вихрь которого равняется a, т. е.

$$\operatorname{rot} W = a,$$

или, в координатной форме,

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = a_1, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = a_2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = a_3.$$

Такое векторное поле W называют векторным потенциалом поля a.

Теорема 1. *Для того чтобы векторное поле $a = (a_1, a_2, a_3)$ было соленоидальным в области G, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство*

$$\operatorname{div} a = 0,$$

или, в координатной форме,

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = 0.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть поле a соленоидальное, т. е. существует векторный потенциал W поля a. Поскольку $a = \operatorname{rot} W$, то

$$\operatorname{div} a = \operatorname{div} \operatorname{rot} W = 0,$$

где последнее равенство было установлено ранее.

Достаточность. Пусть $\operatorname{div} a = 0$. Для нахождения векторного потенциала $W = (P, Q, R)$ имеем следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = a_1, \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = a_2, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = a_3. \end{cases}$$

Мы ищем по крайней мере одно частное решение этой системы. Положим $R(x, y, z) \equiv 0$. Тогда получим

$$\begin{cases} -\frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) = a_1(x, y, z), \\ \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) = a_2(x, y, z), \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = a_3(x, y, z). \end{cases}$$

Зафиксируем точку $(x_0, y_0, z_0) \in G$. Тогда из первого уравнения системы получим

$$Q(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} a_1(x, y, \zeta)\, d\zeta + \varphi(x, y),$$

где функция $\varphi(x, y)$ будет определена ниже. Одно из решений второго уравнения системы имеет вид

$$P(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} a_2(x, y, \zeta)\, d\zeta.$$

Дифференцируя под знаком интеграла, получим

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial a_1}{\partial x}(x, y, \zeta)\, d\zeta + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y),$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial a_2}{\partial y}(x, y, \zeta)\, d\zeta,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) =$$

$$= \int_{z_0}^{z} \left[-\frac{\partial a_1}{\partial x}(x, y, \zeta) - \frac{\partial a_2}{\partial y}(x, y, \zeta) \right] d\zeta + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y).$$

Но условие $\operatorname{div} a = 0$ влечет за собой то, что подынтегральное выражение в правой части последнего равенства равно $\frac{\partial a_3}{\partial z}(x, y, \zeta)$, а левая часть, согласно последнему уравнению системы, равняется $a_3(x, y, z)$. Поэтому получаем такое уравнение для нахождения неизвестной функции φ:

$$a_3(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial a_3}{\partial z}(x, y, \zeta)\, d\zeta + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y).$$

Учитывая, что

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\partial a_3}{\partial z}(x, y, \zeta)\, d\zeta = a_3(x, y, z) - a_3\left(x, y, z_0\right),$$

получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = a_3\left(x, y, z_0\right).$$

Отсюда находим

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0}^{x} a_3\left(\xi, y, z_0\right)\, d\xi + \psi(y),$$

где ψ – произвольная функция переменной y. Так как мы ищем частное решение системы, то можем положить $\psi(y) \equiv 0$.

Итак, мы нашли векторный потенциал поля $a = (a_1, a_2, a_3)$ в таком виде:

$$W = \left(\int_{z_0}^{z} a_2(x, y, \zeta)\, d\zeta, -\int_{z_0}^{z} a_1(x, y, \zeta)\, d\zeta + \int_{x_0}^{x} a_3\left(\xi, y, z_0\right)\, d\xi, 0\right). \quad \square$$

Выясним, какие еще бывают векторные потенциалы W_1 для заданного векторного поля $a = (a_1, a_2, a_3)$, кроме того, которое мы построили при доказательстве теоремы 1. Пусть W_1 – другой векторный потенциал поля a. Тогда имеем

$$a = \operatorname{rot} W, \quad a = \operatorname{rot} W_1,$$

откуда следует, что $\operatorname{rot}(W_1 - W) = 0$. Итак, $W_1 = W + U$, где векторное поле U таково, что $\operatorname{rot} U = 0$. При изучении потенциальных полей мы установили (теорема 2), что для линейно односвязной области G условие $\operatorname{rot} U = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы векторное поле U было потенциальным. Поэтому мы приходим к такому утверждению

Теорема 2. *Пусть в линейно односвязной области G непрерывно дифференцируемое векторное поле a таково, что* $\operatorname{div} a = 0$. *Тогда совокупность всех векторных потенциалов поля a имеет следующий вид:*

$$W = \left(\int_{z_0}^{z} a_2(x, y, \zeta)\, d\zeta + U_1(x, y, z),\right.$$

$$
-\int_{z_0}^{z} a_1(x,y,\zeta)\,d\zeta + \int_{x_0}^{x} a_3\left(\xi,y,z_0\right)\,d\xi + U_2(x,y,z), U_3(x,y,z)\Big),
$$

где поле $U = (U_1, U_2, U_3)$ *потенциальное на* G.

Напомним, что согласно формуле Остроградского – Гаусса, для любой области $\Omega \subset G$ справедливо равенство

$$
\int\int_{\partial\Omega} (a,n)\,dS = \int\int\int_{\Omega} \operatorname{div} a\,dxdydz.
$$

Вместе с теоремой 1 это равенство приводит к такому утверждению.

Теорема 3. *Для того чтобы векторное поле a было соленоидальным в линейно односвязной области* G*, необходимо и достаточно, чтобы поток этого поля через любую замкнутую поверхность* $\partial\Omega$*, ограничивающую область* $\Omega \subset G$*, равнялся нулю, т. е.*

$$
\int\int_{\partial\Omega} (a,n)\,dS = 0.
$$

Эта теорема объясняет название "соленоидальное поле". Термин "соленоид" происходит от греческого слова "трубка", а соленоидальное поле иначе называют еще трубчатым полем. Теорема 3 показывает, что любая область $\Omega \subset G$ имеет "свойство трубки", т. е. "количество" векторного поля, "поступившего" в Ω, равно "количеству" поля, "вытекшего" из Ω.

Экзаменационные билеты

Третий семестр

Билет 1.

1. Определение числового ряда, частичной суммы. Понятие сходящегося и расходящегося ряда. Примеры. Критерий Коши сходимости числового ряда. Следствие (необходимое условие сходимости). Расходимость гармонического ряда.

2. Теорема Римана о стремлении к нулю коэффициентов Фурье по тригонометрической системе.

Билет 2.

1. Связь сходимости ряда со сходимостью его остатков. Стремление к нулю остатков сходящегося ряда. Теорема о сходимости суммы сходящихся рядов и произведения на постоянную. Критерий сходимости ряда с неотрицательными слагаемыми. Обобщенный гармонический ряд и условия его сходимости.

2. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$.

Билет 3.

1. Признак сравнения для числовых рядов (в форме неравенств и в предельной форме). Признаки Даламбера и Коши (в форме неравенств и в предельной форме). Интегральный признак сходимости числового ряда.

2. Скалярное произведение и его свойства. Скалярное произведение в пространстве кусочно непрерывных функций. Неравенство Коши – Буняковского. Норма и ее свойства. Ортогональность и ортонормированнные системы. Тригонометрическая система функций. Представление коэффициентов равномерно сходящегося ряда с помощью интегралов. Определение коэффициентов Фурье. Понятие ряда Фурье. Минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Стремление к нулю коэффициентов Фурье.

Билет 4.

1. Знакопеременные числовые ряды. Признак Лейбница. Теорема об оценке остатка ряда лейбницевского типа.

2. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Примеры равномерно и неравномерно сходящихся несобственных интегралов. Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Примеры. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов. Примеры.

Билет 5.

1. Преобразование Абеля для конечной суммы. Лемма об оценке суммы произведений. Признаки Абеля и Дирихле сходимости числового ряда.

2. Непрерывность собственного интеграла, зависящего от параметра, с постоянными пределами интегрирования.

Билет 6.

1. Понятие абсолютной и условной сходимости. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда. Теорема о перестановке абсолютно сходящегося числового ряда. Перестановки условно сходящегося ряда. Теорема Римана.

2. Определение несобственного интеграла I рода. Примеры сходящихся и расходящихся интегралов. Определение несобственного интеграла по всей действительной оси. Определение несобственного интеграла II рода. Примеры сходящихся и расходящихся интегралов. Определение несобственного интеграла с несколькими особенностями. Свойство аддитивности несобственных интегралов. Стремление к нулю остатков сходящихся несобственных интегралов. Линейность несобственных интегралов.

Билет 7.

1. Умножение рядов. Теорема Коши.

2. Интегрирование несобственного интеграла, зависящего от параметра, в несобственном смысле. Вычислить интеграл Эйлера – Пуассона $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$.

Билет 8.

1. Бесконечные произведения – определение и примеры. Необходимое условие сходимости бесконечного произведения. Связь бесконечных произведений с рядами.

2. Неравенство Коши – Буняковского для рядов. Теорема о равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье кусочно непрерывно дифференцируемой функции.

Билет 9.

1. Понятие последовательности функций и функционального ряда, область сходимости. Примеры. Определение равномерной сходимости последовательности функций и функционального ряда. Примеры равномерно и неравномерно сходящихся последовательностей и рядов. Геометрический смысл равномерной сходимости.

2. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2}\, dx$.

Билет 10.

1. Критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций и функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной и абсолютной сходимости функционального ряда. Примеры.

2. Дифференцирование собственного интеграла, зависящего от параметра, с постоянными пределами интегрирования.

Билет 11.

1. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.

2. Определение кусочно непрерывно дифференцируемой функции, формула интегрирования по частям. Теорема о почленном дифференцировании ряда Фурье.

Билет 12.

1. Теорема о непрерывности предела последовательности непрерывных функций и ее аналог для рядов. Пример, показывающий, что условие равномерной сходимости отбросить нельзя. Пример, показывающий, что условие равномерной сходимости не является необходимым.

2. Интегрирование несобственного интеграла, зависящего от параметра, в собственном смысле.

Билет 13.

1. Теорема о почленном интегрировании последовательности непрерывных функций и функционального ряда. Примеры, показывающие, что условие равномерной сходимости отбросить нельзя. Теорема об интегрируемости предела последовательности интегрируемых функций.

2. Замкнутые ортономированные системы, равенство Парсеваля и сходимость ряда Фурье по норме пространства. Полнота ортонормированной системы и ее связь с замкнутостью.

Билет 14.

1. Теорема о дифференцируемости предела последовательности непрерывно дифференцируемых функций и ее аналог для рядов. Примеры, показывающие, что условие равномерной сходимости отбросить нельзя. Теорема о дифференцируемости предела последовательности дифференцируемых функций и ее аналог для рядов. Примеры, показывающие, что условие равномерной сходимости отбросить нельзя.

2. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими полиномами.

Билет 15.

1. Теорема о перестановке предельных переходов для последовательности функций и ее аналог для рядов. Пример, показывающий, что условие равномерной сходимости отбросить нельзя.

2. Представление частичной суммы ряда Фурье по тригонометрической системе с помощью ядра Дирихле. Ядро Дирихле и его свойства. Принцип локализации.

Билет 16.

1. Понятие степенного ряда, примеры. Первая теорема Абеля и следствие. Структура множества точек сходимости степенного ряда. Определение радуса сходимости. Примеры. Теорема о вычислении радиуса сходимости степенного ряда с помощью пределов (включая случаи нулевого и бесконечного пределов).

2. Средние Фейера, ядро Фейера и его свойства. Теорема Фейера.

Билет 17.

1. Доказать, что признак Коши сходимости числового ряда сильнее признака Даламбера. Обобщенный признак Коши сходимости числового ряда. Теорема Коши - Адамара. Примеры.

2. Критерий сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций. Признак сравнения для несобственных интегралов (в форме неравенств и в предельной форме). Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{|\ln x|^\alpha}$. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов и связь между ними. Доказать сходимость интеграла Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Билет 18.

1. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда внутри интервала сходимости. Теорема о непрерывности суммы степенного ряда. Теорема о неравномерной сходимости степенного ряда, расходящегося на конце интервала сходимости.

2. Дифференцирование собственного интеграла, зависящего от параметра, с переменными пределами интегрирования.

Билет 19.

1. Неравномерная сходимость степенного ряда на всей числовой оси. Вторая теорема Абеля.

2. Гамма-функция Эйлера и ее свойства. График гамма-функции.

Билет 20.

1. Теорема о почленном интегрировании степенного ряда и замечания. Теорема о почленном дифференцировании степенного ряда и замечание. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Выражение для производных.

2. Формула Ньютона – Лейбница для несобственных интегралов. Формула интегрирования по частям для несобственных интегралов. Примеры. Доказать сходимость интеграла Эйлера $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$. Замена переменной в несобственном интеграле. Вычислить интеграл Эйлера $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$.

Билет 21.

1. Выражение коэффициентов степенного ряда через производные его суммы в центре ряда. Определение аналитической функции. Теорема о едиственности разложения аналитической функции в степенной ряд. Определение коэффициентов Тейлора и ряда Тейлора. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не являющейся аналитической.

2. Бета-функция Эйлера и ее связь с гамма-функцией.

Билет 22.

1. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Ряд Маклорена показательной функции и область его сходимости.

2. Интегрирование собственного интеграла, зависящего от параметра, с постоянными пределами интегрирования.

Билет 23.

1. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Ряд Маклорена для синуса и область его сходимости.

2. Непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра. Пример, показывающий, что условие равномерной сходимости отбросить нельзя.

Билет 24.

1. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Ряд Маклорена для косинуса и область его сходимости.

2. Теорема о почленном интегрировании тригонометрического ряда Фурье.

Билет 25.

1. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Ряд Маклорена логарифмической функции и область его сходимости.

2. Лемма о равносходимости интегралов $\int_0^\delta \frac{|f(t)|\,dt}{t}$ и $\int_0^\pi \frac{|f(t)|\,dt}{2\sin\frac{t}{2}}$. Признак Дини сходимости ряда Фурье в точке и следствия.

Билет 26.

1. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Ряд Маклорена степенной функции и интервал его сходимости.

2. Непрерывность собственного интеграла, зависящего от параметра, с переменными пределами интегрирования.

Билет 27.

1. Признак сравнения для числовых рядов (в форме неравенств и в предельной форме). Признаки Даламбера и Коши (в форме неравенств и в предельной форме). Интегральный признак сходимости числового ряда.

2. Дифференцирование несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Билет 28.

1. Понятие последовательности функций и функционального ряда, область сходимости. Примеры. Определение равномерной сходимости последовательности функций и функционального ряда. Примеры равномерно и неравномерно сходящихся последовательностей и рядов. Геометрический смысл равномерной сходимости.

2. Разложения в ряды Фурье функций $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\frac{\pi-x}{2}$ и $\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|$. Пример непрерывной функции, для которой не выполнено условие признака Дини.

Билет 29.

1. Знакопеременные числовые ряды. Признак Лейбница. Теорема об оценке остатка ряда лейбницевского типа.

2. Замкнутость тригонометрической системы в классе кусочно непрерывных функций.

Четвертый семестр

Билет 1.

1. Теорема о замене переменной в кратном интеграле (формулировка и доказательство, начиная с неравенства $\int_{\varphi(A)} f(x)\,dx \leq \int_A f(\varphi(t))\,|J\varphi(t)|\;dt$, справедливого для неотрицательной функции).

2. Кривая и ее след. Гладкая кривая. Замкнутая кривая, простой контур. Ориентация кривой. Длина кривой и ее независимость от параметризации. Естественная параметризация.

Билет 2.

1. Лемма об измеримости образа компактного измеримого множества при C^1-диффеоморфизме.

2. Криволинейный интеграл первого рода и его элементарные свойства (аддитивность, независимость от параметризации и от ориентации). Физический смысл.

Билет 3.

1. Лемма о мере образа компактного измеримого множества при линейном отображении.

2. Криволинейный интеграл второго рода и его элементарные свойства (независимость от параметризации, зависимость от ориентации). Примеры.

Билет 4.

1. Интегральные суммы и их предел. Определение многомерного интеграла Римана. Суммы Дарбу и их элементарные свойства.

2. Формула Грина.

Билет 5.

1. Множества жордановой меры нуль и их элементарные свойства. Граница множества. Замкнутость границы.

2. Потенциальные поля в двумерном пространстве. Критерий потенциальности в терминах криволинейных интегралов вдоль замкнутых кривых.

Билет 6.

1. Линейность интеграла Римана, интегрирование неравенств, интегрирование модуля, интегрируемость произведения, теорема о среднем значении.

2. Потенциальные поля в двумерном пространстве. Критерий потенциальности в терминах частных производных. Пример, показывающий, что условие односвязности нельзя отбросить.

Билет 7.

1. Лемма о приближении невырожденного сегмента объединением кубов. Следствие (представление внутренней меры через меры объединений кубов).

2. Понятие гладкого отображения и простой поверхности, параметрическое представление, явное задание поверхности. Край поверхности. Почти простая поверхность. Различные параметризации поверхности.

Билет 8.

1. Критерий измеримости по Жордану.

2. Касательные векторы и касательная плоскость к гладкой поверхности. Нормальный вектор. Независимость от параметризации.

Билет 9.

1. Теорема о замене переменной в кратном интеграле (формулировка и доказательство неравенства $\int_{\varphi(A)} f(x)\,dx \leq \int_A f(\varphi(t))\,|J\varphi(t)|\,dt$, справедливого для неотрицательной функции).

2. Ориентируемые поверхности. Ориентация (сторона) поверхности. Случай, когда гладкая поверхность является границей некоторой области.

Билет 10.

1. Лемма об оценке мер образов малых кубов при C^1-диффеоморфизме.

2. Площадь криволинейного параллелограмма. Определение элемента площади поверхности и площади поверхности.

Билет 11.

1. Интегрируемость функции на объединении множеств. Равенство интегралов от функций, отличающихся на множестве жордановой меры нуль.

2. Свойства площади поверхности (независимость от параметризации, случай плоской области, случай явно заданной поверхности, аддитивность). Площадь почти простой поверхности.

Билет 12.

1. Теорема о сведении кратного интеграла к повторному и следствия.

2. Определение и физический смысл поверхностного интеграла первого рода. Независимость от ориентации поверхности. Случай явного задания поверхности. Примеры.

Билет 13.

1. Определение C^1-диффеоморфизма. Лемма о границе образа при C^1-диффеоморфизме.

2. Определение потока векторного поля через ориентированную поверхность (поверхностный интеграл второго рода). Перемена знака при переходе к противоположной стороне поверхности. Формула сведения поверхностного интеграла второго рода к двойному интегралу.

Билет 14.

1. Критерий Римана интегрируемости ограниченной функции в терминах сумм Дарбу, в терминах верхнего и нижнего интегралов и в терминах колебаний.

2. Формула сведения поверхностного интеграла второго рода к двойному в случае явно заданной поверхности. Примеры.

Билет 15.

1. Интегрируемость непрерывной функции на компактном множестве. Интегрируемость ограниченной на компактном множестве функции, множество точек разрыва которой имеет жорданову меру нуль.

2. Оператор Гамильтона и операции над ним. Определение дивергенции и вихря. Дивергенция вихря и вихрь градиента.

Билет 16.

1. Определение фигуры и ее элементарные свойства. Мера фигуры. Монотонность, аддитивность и полуаддитивность меры фигур.

2. Формула Остроградского – Гаусса для элементарной области и ее обобщение на более общие области. Формулы для вычисления объемов тел.

Билет 17.

1. Определение почти куба. Лемма о разложении невырожденного сегмента на почти кубы. Критерий измеримости по Жордану в терминах кубов.

2. Согласованность ориентации стороны поверхности и ее края. Понятие поверхности, натянутой на контур. Теорема Стокса.

Билет 18.

1. Внешняя и внутренняя меры Жордана. Определение измеримого по Жордану множества. Измеримость фигуры и ее внутренности. Примеры счетного и открытого множеств, неизмеримых по Жордану.

2. Потенциальные поля в трехмерном пространстве. Критерий потенциальности в терминах криволинейных интегралов.

Билет 19.

1. Замкнутость системы измеримых по Жордану множеств относительно теоретико-множественных операций. Конечеая аддитивность меры Жордана.

2. Потенциальные поля в трехмерном пространстве. Критерий потенциальности в терминах вихря.

Билет 20.

1. Сегмент и его мера. Аддитивность меры сегментов. Лемма о дизъюнктивном разложении фигуры.

2. Соленоидальные поля. Критерий соленоидальности.

Билет 21.

1. Теорема о замене переменной в кратном интеграле (формулировка) и следствие об измеримости и мере образа измеримого множества при C^1-диффеоморфизме. Геометрический смысл модуля якобиана.

2. Криволинейный интеграл второго рода и его элементарные свойства (независимость от параметризации, зависимость от ориентации). Примеры.

Предметный указатель

Навчальне видання

КОЛЯДА В. І.
КОРЕНОВСЬКИЙ А. О.

КУРС ЛЕКЦІЙ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

У двох частинах

Частина 2

Російською мовою

Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Редактор *Н. Я. Рихтік*
Технічний редактор *М. М. Бушин*
Дизайнер обкладинки *В. І. Костецький*
Коректор *О. Г. Дайбова*

Здано у виробництво 04.06.2009. Підписано до друку 28.07.2010.
Формат 60x84/16. Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 18,60.
Тираж 100 прим. Вид. № 105. Зам. № 286.

Надруковано з готового оригінал-макета

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
www.astroprint.odessa.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Коляда В. И., Кореновский А. А.

К 62 Курс лекций по математическому анализу : в 2-х ч. Ч. 2 / В. И. Коляда, А. А. Кореновский. — Одесса : Астропринт, 2010. — XXVI, 294 с.

ISBN 978–966–190–174–1

Данный курс лекций предназначен для студентов математических факультетов. Изложенный материал рассчитан на 280 лекционных часов при условии, что имеется примерно столько же часов практических или лабораторных занятий. Приведена программа всего курса, разбитого на четыре семестра. Каждый семестр делится на три модуля, продолжительность которых составляет соответственно 8, 8 и 2 недели в первом и третьем семестрах и 7, 7 и 3 недели — во втором и четвертом. По истечении каждого модуля предполагается свободная от занятий неделя, во время которой студенты сдают прослушанный материал и получают баллы. В конце каждого семестра студент получает соответствующую оценку в зависимости от общего количества баллов, набранных на теоретических и практических контрольных мероприятиях.

Курс лекций состоит из двух частей. Первая часть относится к первым двум семестрам, вторая — к третьему и четвертому семестрам. В конце каждой части приведены комплекты экзаменационных билетов по программе каждого семестра в целом.

ББК 22.161я73
УДК 517(075.8)

Поданий курс лекцій призначено для студентів математичних факультетів. Викладений матеріал розраховано на 280 лекційних годин за умови, що є приблизно стільки ж годин практичних і лабораторних занять. Наведено програму усього курсу, поділеного на чотири семестри. Кожний семестр поділено на три модулі, тривалість яких становить відповідно 8, 8 і 2 тижні у першому та третьому семестрах та 7, 7 і 3 тижні — у другому та четвертому. Після закінчення кожного модуля пропонується вільний від занять тиждень, під час якого студенти складають прослуханий матеріал і отримують бали. Наприкінці кожного семестру студент отримує відповідну оцінку залежно від загальної кількості балів, набраних на теоретичних та практичних контрольних заходах.

Курс лекцій складається з двох частин. Перша частина відноситься до перших двох семестрів, друга — до третього і четвертого семестрів. Наприкінці кожної частини наведено комплекти екзаменаційних білетів за програмою кожного семестру у цілому.