Основні принципи механіки Гамільтона

Гамільтонів підхід у класичній механіці є одним з найплідніших методів теоретичної фізики: окрім широкого застосування у класичній механіці, він покладений у основу квантової механіки, квантової теорії поля та статистичної фізики. Дослідження гамільтонових систем є найважливішою частиною теорії диференціальних рівнянь, які зустрічаються у різних галузях фізики, хімії, біології та інших наук.

26. Канонічні рівняння руху

У рамках механіки Лагранжа дослідження механічної системи з n ступенями вільності являє собою дослідження системи n диференціальних рівнянь другого порядку (рівнянь Ейлера-Лагранжа). Такі системи рівнянь, як правило, мають складну структуру, їх дослідження стикається з цілою низкою проблем. Метод Лагранжа фактично полягає у виборі таких узагальнених координат[4]

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_1, \ldots, q_n, t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{26.1}$$

які максимально спрощують структуру цих рівнянь. У системі з n ступенями вільності можна перетворювати не більш ніж n функцій (26.1), оскільки узагальнені швидкості $\dot{q}_i$ є просто похідні за часом від відповідних узагальнених координат $q_i(t)$:

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i(t). \tag{26.2}$$

Метод Гамільтона, у якому використовуються узагальнені координати $q_i(t)$ та узагальнені імпульси $p_i(t)$, дозволяє виконувати вдвічі ширший клас перетворень – перетворень n узагальнених координат та n узагальнених імпульсів, оскільки узагальнені імпульси пов’язані з узагальненими координатами значно складнішими співвідношеннями, ніж (26.2):

[4] Відмітимо, що перетворення (26.1) називаються точковими.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \qquad (26.3)$$

Це істотно поширює можливості пошуку таких змінних, у яких рівняння руху механічної системи можуть бути розв’язані.

У основу механіки Гамільтона так само, як і у основу механіки Лагранжа, покладено принцип найменшої дії, але у дії S (1.1) під знаком інтеграла за часом замість функції Лагранжа L, яка залежить від координат q_i та швидкостей $\dot{q}_i$, повинна бути інша функція – функція координат q_i та імпульсів p_i. Перехід до нового набора незалежних змінних виконується за допомогою перетворення Лежандра[5].

Знайдемо повний диференціал функції Лагранжа механічної системи як функції узагальнених координат та узагальнених швидкостей:

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right). \qquad (26.3)$$

З урахуванням (26.2) з рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,\ldots,n,$$

випливає, що

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad (26.4)$$

тому вираз (26.3) можна переписати у вигляді:

$$dL = \sum_{i=1}^{n} (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i). \qquad (26.5)$$

У другому доданку у дужках внесемо узагальнений імпульс

---

[5] Перетворенням Лежандра у математиці називають такий перехід від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ до змінних $y_1, y_2, \ldots, y_n$, коли диференціальна форма $dz = y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \ldots + y_n dx_n$, де $y_a = y_a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial z}{\partial x_a}$, $a = 1, \ldots, n$, переходить у диференціальну форму $dZ = x_1 dy_1 + x_2 dy_2 + \ldots + x_n dy_n$, де $x_a = x_a(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{\partial Z}{\partial y_a}$, $a = 1, \ldots, n$. За таким перетворенням твірна функція $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переходить у твірну функцію $Z(y_1, y_2, \ldots, y_n)$:
$Z = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n - z$.

p_i під знак диференціала:

$$p_i d\dot{q}_i = d(p_i\dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i\,. \qquad (26.6)$$

Враховуючи, що сума повних диференціалів дорівнює повному диференціалу від суми

$$\sum_{i=1}^{n} d(p_i\dot{q}_i) = d\sum_{i=1}^{n}(p_i\dot{q}_i)\,, \qquad (26.7)$$

перепишемо (26.5) у вигляді:

$$d\sum_{i=1}^{n}(p_i\dot{q}_i - L) = -\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i dp_i\,. \qquad (26.8)$$

Співвідношення (26.8) означає, що функція

$$H = \sum_{i=1}^{n}(p_i\dot{q}_i - L) \qquad (26.9)$$

є функцією узагальнених координат q_i та узагальнених імпульсів p_i. Цю функцію називають ***функцією Гамільтона*** механічної системи. З іншого боку, вираз (26.9) є енергія системи (4.3), тобто ***функція Гамільтона довільної механічної системи – це енергія системи***, записана як функція узагальнених координат та узагальнених імпульсів:

$$H = H(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n,t)\,. \qquad (26.10)$$

Оскільки

$$dH = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\right), \qquad (26.11)$$

з (26.8) маємо:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,. \qquad (26.12)$$

Ці рівняння називаються ***канонічними рівняннями***, або ***рівняннями Гамільтона*** механічної системи, а координати q_i та імпульси p_i – ***канонічними змінними***.

Рівняння (26.12) можна знайти з варіаційного принципу $\delta S = 0$ для дії

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\big(p_i\dot{q}_i - H(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n,t)\big)dt \qquad (26.13)$$

за умови, що координати системи у момент часу t_1 приймають значення $q_i(t_1)$, а у момент часу t_2 – значення $q_i(t_2)$, тобто приріст

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0\,, \quad i = 1,...,n\,. \tag{26.14}$$

Дійсно, варіація дії (26.13) приводиться до вигляду:

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i dt - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt + \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \delta q_i \Bigg|_{t_1}^{t_2} = 0\,, \tag{26.15}$$

звідки і випливають рівняння (26.12).

Покажемо, що для системи взаємодіючих частинок з функцією Лагранжа (3.2)

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} - U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N)$$

рівняння (26.12) співпадають з рівняннями Ньютона. Дійсно, функція Гамільтона системи (3.2) має вигляд:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} + U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N)\,. \tag{26.16}$$

Запишемо канонічні рівняння (26.12) для системи (3.2) у векторній формі:

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i}, \quad \dot{\vec{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i}\,. \tag{26.17}$$

Підставляючи сюди (26.16), бачимо, що перше із співвідношень (26.17) є зв’язок між швидкістю частинки та її імпульсом:

$$\vec{v}_i = \frac{\vec{p}_i}{m_i}\,, \tag{26.18}$$

а друге – це рівняння Ньютона для частинки з номером i:

$$m\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i\,, \tag{26.19}$$

оскільки

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \tag{26.20}$$

– сила, що діє на для цю частинку.

Задача 26.1. Знайти функцію Гамільтона та канонічні рівняння руху вільної частинки у декартових, циліндричних та сферичних координатах.

Задача 26.2. Знайти функцію Гамільтона та канонічні рівняння руху симетричної дзиги с нерухомою нижньою точкою у полі сил тяжіння.

27. Дужки Пуассона

Нехай механічна система, що має n ступенів вільності, характеризується деякою функцією $f = f(q_1,...,q_n, p_1,...,p_n, t)$. Повна похідна цієї функції за часом дорівнює

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right). \tag{27.1}$$

На траєкторії руху, тобто з урахуванням рівнянь руху (26.12), ця функція матиме вигляд:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right).$$

або

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, \tag{27.2}$$

де вираз

$$\{f, H\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \tag{27.3}$$

називається ***дужками Пуассона*** для функцій f та H.

Аналогічно визначаються дужки Пуассона для будь-яких функцій f та g на траєкторії руху механічної системи:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right). \tag{27.4}$$

Якщо функція є інтегралом руху механічної системи, тобто $\frac{df}{dt} = 0$, з (27.2) маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0. \tag{27.5}$$

У випадку, коли інтеграл руху f не залежить явно від часу,

$$\{f, H\} = 0. \tag{27.6}$$

Таким чином, будь-який інтеграл руху f замкненої системи, функція Гамільтона якої не залежить явно від часу $\left(\frac{\partial H}{\partial t}=0\right)$, визначається умовою, що дужки Пуассона для функції f та функції Гамільтона H системи дорівнюватимуть нулю.

Перелічимо властивості дужок Пуассона:

1. $$\{f,g\}=-\{g,f\}, \tag{27.7}$$
що безпосередньо є наслідком визначення (27.4). Звідси випливає:

2. $$\{f,f\}=0. \tag{27.8}$$

Оскільки у дужках Пуассона усі внески складаються з похідних, із законів диференціювання функцій випливають властивості:

3. $$\{f_1+f_2,g\}=\{f_1,g\}+\{f_2,g\}, \tag{27.9}$$

4. $$\{\lambda,f\}=0,\quad \lambda=const, \tag{27.10}$$

5. $$\{f_1f_2,g\}=f_2\{f_1,g\}+f_1\{f_2,g\}, \tag{27.11}$$

6. $$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}. \tag{27.12}$$

Якщо однією з функцій у дужках Пуассона є координата q_i або імпульс p_i,

7. $$\{q_i,f\}=\frac{\partial f}{\partial p_i},\quad \{p_i,f\}=-\frac{\partial f}{\partial q_i}. \tag{27.13}$$

З урахуванням цих співвідношень канонічні рівняння (26.12) можна записати у вигляді:

$$\dot{q}_i=\{q_i,H\},\quad \dot{p}_i=\{p_i,H\}. \tag{27.14}$$

Дужки Пуассона для канонічних змінних q_i, p_i:

8. $$\{q_i,q_k\}=0,\quad \{p_i,p_k\}=0,\quad \{q_i,p_k\}=\delta_{ik}. \tag{27.15}$$

Відмітимо, що співвідношення (27.14) аналогічні відповідним співвідношенням для квантових операторів, які називають співвідношеннями Еренфеста, а останнє з співвідношень (27.15) – квантовим перестановочним співвідношенням Гейзенберга у квантовій механіці.

Безпосередньо з структури дужок Пуассона (27.4), які є різницею двох груп внесків, випливає тотожність Якобі для будь-яких трьох функцій f, g та h на траєкторії руху:

9. $$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0. \tag{27.16}$$

Для дужок Пуассона виконуєтся дуже важлива ***теорема Пуассона***: якщо функції f та g є інтегралами руху механічної системи, дужки Пуассона, складені з цих функцій, також є інтегралом руху:

10. $$\frac{d}{dt}\{f,g\}=0, \text{ якщо } \frac{df}{dt}=0, \ \frac{dg}{dt}=0. \qquad (27.17)$$

Запишемо повну похідну за часом від дужок Пуассона $\{f,g\}$ у вигляді (27.2):

$$\frac{d}{dt}\{f,g\}=\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}+\{\{f,g\},H\}. \qquad (27.18)$$

Перший внесок у (27.18) перетворимо у відповідності з властивістю (27.12), а другий внесок – з властивістю (27.16):

$$\frac{d}{dt}\{f,g\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}-\{\{H,f\},g\}-\{\{g,H\},f\}. \qquad (27.19)$$

Враховуючи співвідношення (27.7), (27.9), а також (27.2), маємо:

$$\frac{d}{dt}\{f,g\}=\left\{\frac{df}{dt},g\right\}+\left\{f,\frac{dg}{dt}\right\}, \qquad (27.20)$$

звідки і випливає співвідношення (27.17). Теорема Пуассона дозволяє знаходити нові інтеграли руху механічної системи, для якої вже відомі будь-які два інтеграли руху. Може статися, що дужки Пуассона, складені з відомих інтегралів руху, є просто сталою величиною або комбінацією відомих інтегралів руху. Більш того, кількість інтегралів руху системи з n ступенями вільності взагалі обмежена (дорівнює $2n$). Тому, починаючи з якогось кроку, нових інтегралів руху теорема Пуассона не дає.

Задача 27.1. Знайти дужки Пуассона, складені з декартових компонент радіус-вектора $\vec{r}$, імпульсу $\vec{p}$, моменту імпульсу $\vec{M}=[\vec{r},\vec{p}]$, квадрата моменту імпульсу $M^2=\vec{M}\vec{M}$: $\{x_i,p_k\}$, $\{x_i,M_k\}$, $\{p_i,M_k\}$, $\{M_i,M_k\}$, $\{M_i,M^2\}$ та інші.

Задача 27.2. За допомогою дужок Пуассона показати, что момент імпульсу системи зберігається, якщо її функція

Гамільтона $H=\sum_i \frac{p_i^2}{2m_i}+U(r_1,...,r_n)$ інвариантна відносно довільного нескінченно малого повороту.

Задача 27.3. Скористатися дужками Пуассона та теоремою Пуассона для знаходження інтегралів руху частинки у кулонівському полі.

28. Дія як функція координат

Нехай механічна система з n ступенями вільності, яка характеризується траєкторією руху з узагальненими координатами $q_1(t),...,q_n(t)$, знаходиться у полі зовнішніх сил. Якщо параметри, що характеризують зовнішні сили, змінюються на нескінченно малі величини, траєкторія руху також зазнає нескінченно малих змін. Розглянемо дію

$$S=\int_{t_1}^{t} L dt \tag{28.1}$$

на пучку близьких траєкторій, котрі у момент часу t_1 проходять через точку $q_1(t_1),...,q_n(t_1)$ конфігураційного простору механічної системи[6]. Покажемо, що на кожній з траєкторій пучка дія (28.1) є функцією координат системи і часу.

При переході від однієї траєкторії до нескінченно близької приріст дії має вигляд:

$$\delta S=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\Bigg|_{t_1}^{t}+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i dt. \tag{28.2}$$

Оскільки кожна з траєкторій є дійсною траєкторією руху, тобто траєкторією, яку можна отримати як розв’язок рівнянь Ейлера-Лагранжа, сума інтегралів у (28.2) дорівнюватиме нулю.

Для усіх траєкторій пучка у момент часу t_1

[6] Конфігураційний простір механічної системи з n ступенями вільності – це математичний простір усіх припустимих значень узагальнених координат цієї системи $q_1,..., q_n$, які розглядаються як декартові координати n-вимірного евклідового простору.

$$\delta q_i(t_1) = 0, \quad i = 1,...,n, \tag{28.3}$$

тому з урахуванням (26.3) вираз (28.2) спрощується:

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i \,. \tag{28.4}$$

З цього співвідношення випливає, що частинні похідні від дії за координатами q_i дорівнюють відповідним імпульсам:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \tag{28.5}$$

Повна похідна за часом від дії (28.1) є функцією Лагранжа механічної системи:

$$\frac{dS}{dt} = L\,. \tag{28.6}$$

З іншого боку

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i \,. \tag{28.7}$$

Порівнюючи (28.6) з (28.7) та враховуючи (26.9), (28.5), знаходимо:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1,..,q_n,\frac{\partial S}{\partial q_1},...,\frac{\partial S}{\partial q_n},t) = 0\,. \tag{28.8}$$

Рівняння (28.8) називається ***рівнянням Гамільтона-Якобі***. Це рівняння відіграє найважливішу роль у методі розв'язання рівнянь механічної системи, який називається ***методом Гамільтона-Якобі***.

Враховуючи співвідношення (28.4) та (28.8), знаходимо повний диференціал дії (28.1):

$$dS = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - Hdt\,. \tag{28.9}$$

Якщо дія визначається для будь-яких моментів часу t_1 та t_2

$$S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt\,,$$

її повний диференціал дорівнюватиме різниці співвідношень правої частини (28.9), узятих у моменти t_1 та t_2:

$$dS = \sum_{i=1}^{n} p_i(t_2)dq_i(t_2) - H^{(2)}dt_2 - \sum_{i=1}^{n} p_i(t_1)dq_i(t_1) + H^{(1)}dt_1\,, \tag{28.10}$$

де $H^{(1)}$ та $H^{(2)}$, відповідно, значення функції Гамільтона, узяті у моменти часу t_1 і t_2. Це співвідношення показує, що будь-яка механічна система переходить зі стану у момент часу t_1 до стану у момент часу t_2 таким чином, що права частина (28.10) є повний диференціал.

29. Канонічні перетворення

Рівняння Ейлера-Лагранжа, так само, як і рівняння Гамільтона, інваріантні відносно будь-яких точкових перетворень (26.1), оскільки при переході від координат q_i до якихось нових координат Q_i змінюються тільки аргументи функції Лагранжа.

Розглянемо більш загальний клас перетворень: перехід від старих узагальнених координат $q_1,...,q_n$ та узагальнених імпульсів $p_1,...,p_n$ до нових координат $Q_1,...,Q_n$ та нових імпульсів $P_1,...,P_n$:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n,t), \\ P_i &= P_i(q_1,..,q_n,p_1,..,p_n,t), \quad i=1,...,n\,, \end{aligned} \qquad (29.1)$$

котрі не змінюють форму рівнянь Гамільтона, тобто рівняння

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i=1,...,n \qquad (29.2)$$

переходять у рівняння

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \quad i=1,...,n\,, \qquad (29.3)$$

де

$$H' = H'(Q_1,...,Q_n,P_1,...,P_n,t) \qquad (29.4)$$

– нова функція Гамільтона. Такі перетворення називаються ***канонічними*** або ***контактними***.

Оскільки для механічної системи як у старих, так і у нових змінних виконується принцип найменшої дії, рівняння (29.2) можна отримати з варіації :

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\,\dot{q}_i - H(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n,t)\right)dt = 0\,, \qquad (29.5)$$

а рівняння (29.3) – з варіації

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}P_i\dot{Q}_i - H'(Q_1,...,Q_n,P_1,...,P_n,t)\right)dt = 0. \qquad (29.6)$$

Перша з варіацій виконується за умовою

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \quad i = 1,...,n, \qquad (29.7а)$$

а друга – за умовою

$$\delta Q_i(t_1) = \delta Q_i(t_2) = 0, \quad i = 1,...,n. \qquad (29.7б)$$

Якщо до підінтегральних виразів (29.5), (29.6) додати повну похідну від будь-якої функції

$$F = F(q_1,...,q_n,Q_1,...,Q_n,t), \qquad (29.8)$$

відповідні варіації за умовами (29.7) дорівнюватимуть нулю:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{dF}{dt}dt = \delta F\Big|_{t_1}^{t_2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial Q_i}\delta Q_i\Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \qquad (29.9)$$

Це дозволяє зв’язати підінтегральні вирази (29.5) та (29,6) співвідношенням :

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i - H(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n,t) = \sum_{i=1}^{n}P\dot{Q}_i - \qquad (29.10)$$
$$- H'(Q_1,...,Q_n,P_1,...,P_n,t) + \frac{d}{dt}F(q_1,..,q_n,Q_1,...,Q_n,t).$$

Враховуючи, що повна похідна за часом

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i}\dot{Q}_i\right),$$

а також, що координати q_i та Q_i $\left(i = 1,...,n\right)$ – незалежні одна від одної, з (29.10) маємо

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad i = 1,...,n, \qquad (29.11)$$

$$P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad i = 1,...,n, \qquad (29.12)$$

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \qquad (29.13)$$

Набір рівнянь (29.11) дозволяє знайти нові координати

$$Q_i = Q_i(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n,t).$$

Підставляючи ці співвідношення у (29.12), знайдемо

$$P_i = P_i(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n,t),$$

тобто знайдемо канонічне перетворення (29.1) та нову функцію Гамільтона H' (29.4) у рівняннях (29.3). Функцію (29.8) називають ***твірною функцією*** цього канонічного перетворення. Напр., якщо твірна функція F має вигляд

$$F = \sum_{i=1}^{n} q_i Q_i , \tag{29.14}$$

з (29.11), (29.12) знаходимо

$$Q_i = p_i , \quad P_i = -q_i , \tag{29.15}$$

тобто канонічне перетворення з твірною функцією (29.14) визначає нові координати Q_i як старі імпульси, а нові імпульси P_i – як старі координати (зі знаком „мінус”). Нова функція Гамільтона H' після такого канонічного перетворення співпадає зі старою $H' = H$. Цей приклад показує, що назви „нові координати” та „нові імпульси” мають умовний характер. Тому змінні q_i та p_i у методі Гамільтона називають ***канонічно спряженими функціями***.

За допомогою перетворення Лежандра можна знайти також інші твірні функції окрім (29.8). Якщо ввести функцію

$$\Phi = \Phi(q_1,..,q_n,P_1,..,P_n,t), \tag{29.16}$$

пов’язану з функцією F (29.8) співвідношенням

$$\Phi = F + \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i , \tag{29.17}$$

замість (29.10) будемо мати:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(q_1,..,q_n,p_1,..,p_n,t) = -\sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{P}_i - \\ - H'(Q_1,..,Q_n,P_1,..,P_n,t) + \frac{d}{dt}\Phi(q_1,..,q_n,P_1,..,P_n,t) , \end{gathered} \tag{29.18}$$

і звідси

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{29.19}$$

Першій набір з цих співвідношень дозволяє знайти нові імпульси P_i, з другого знаходимо нові координати Q_i, останнє співвідношення встановлює нову функцію Гамільтона H'.

Співвідношення

$$V = F - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \tag{29.20}$$

визначає твірну функцію

$$V = V(p_1,..,p_n,Q_1,..,Q_n,t) \ , \tag{29.21}$$

для якої

$$\begin{gathered}-\sum_{i=1}^{n} q_i \dot{p}_i - H(q_1,..,q_n,p_1,..,p_n,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - \\ - H'(Q_1,..,Q_n,P_1,..,P_n,t) + \frac{d}{dt} V(p_1,..,p_n,Q_1,..,Q_n,t) \ ,\end{gathered} \tag{29.22}$$

звідки знаходимо

$$q_i = -\frac{\partial V}{\partial p_i}, \quad p_i = -\frac{\partial V}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial V}{\partial t}. \tag{29.23}$$

Для твірної функції

$$W = W\big(p_1,..,p_n,P_1,..,P_n,t\big), \tag{29.24}$$

$$W = F - \sum_{i=1}^{n} (p_i q_i - P_i Q_i), \tag{29.25}$$

яка встановлює зв'язок

$$\begin{gathered}-\sum_{i=1}^{n} q_i \dot{p}_i - H(q_1,..,q_n,p_1,..,p_n,t) = -\sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{P}_i - \\ - H'(Q_1,..,Q_n,P_1,..,P_n,t) + \frac{d}{dt} W(p_1,..,p_n,P_1,..,P_n,t) \ ,\end{gathered} \tag{29.26}$$

канонічне перетворення визначається співвідношеннями:

$$q_i = -\frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial W}{\partial t}. \tag{29.27}$$

Таким чином, існує чотири види твірних функцій (29.8), (29.16), (29.21), (29.24), за допомогою яких виконуються канонічні перетворення. Коли якась з цих твірних функцій не залежить явно від часу (як, напр., функція (29.14)) нова функція Гамільтона H' співпадає зі старою

$$H' = H. \tag{29.28}$$

Метою канонічних перетворень є знаходження таких нових канонічно спряжених змінних Q_i, P_i та нової функції Гамільтона H', для яких нові канонічні рівняння (29.3) дозоляли б знайти точні розв'язки, тобто знайти траєкторію руху механічної системи.

Задача 29.1. Знайти умову, за якою лінійне перетворення $Q = aq + bp, \ P = cq + dp$ змінних q та p є канонічним.

30. Метод Гамільтона-Якобі

Метод Гамільтона-Якобі є одним з трьох основних методів теоретичної механіки. *У **методі Лагранжа*** необхідно знайти розв'язання системи n диференціальних рівнянь другого порядку (рівнянь Ейлера-Лагранжа), вигляд яких спрощується за допомогою точкових перетворень (26.1). ***Метод Гамільтона*** пропонує пошуки розв'язання системи $2n$ рівнянь першого порядку, для спрощення яких використовуються канонічні перетворення. ***Метод Гамільтона-Якобі*** використовує таке канонічне перетворення, у результаті якого нова функція Гамільтона дорівнюватиме нулю:

$$H' = 0. \tag{30.1}$$

Як результат, нові рівняння Гамільтона (29.3) – це просто повний набір інтегралів руху механічної системи, який дозволяє знайти траєкторію руху, тобто набір координат як функцій часу та $2n$ довільних сталих (початкових умов для розгляданої механічної системи з n ступенями вільності).

Для знаходження канонічного перетворення з умовою (30.1) використаємо повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі (28.8):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1,...,q_n,\frac{\partial S}{\partial q_1},...,\frac{\partial S}{\partial q_n},t) = 0, \tag{30.2}$$

тобто розв'язок цього рівняння, у якому є стільки сталих інтегрування, скільки ступенів вільності має механічна система.

$$S = S(q_1,...,q_n,\alpha_1,...,\alpha_n,t), \quad \alpha_i = const, \quad i = 1,...,n. \tag{30.3}$$

Цей розв'язок можна розглядати як твірну функцію (29.16) канонічного перетворення, у якому сталі α_i відіграють роль нових імпульсів:

$$P_i = \alpha_i = const. \tag{30.4}$$

З (29.19) випливає, що нові координати – це похідні від функції (30.3) за новими імпульсами:

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1,...,n. \tag{30.5}$$

Однак, як видно з рівнянь (29.3), за умовою (30.1) ці нові координати є інтеграли руху, тобто константи. Тому похідні

$\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ слід прирівняти новим константам β_i:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad \beta_i = const, \quad i = 1,...,n. \qquad (30.6)$$

Співвідношення (30.6) визначають траєкторію руху механічної системи.

Таким чином, метод Гамільтона-Якобі полягає у виконанні наступних операцій:

1. За допомогою функції Гамільтона H знайти рівняння Гамільтона-Якобі (30.2), де у функції H необхідно замінити усі імпульси p_i на похідні $\dfrac{\partial S}{\partial q_i}$.

2. Знайти повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі, тобто розв'язок (30.3), який матиме стільки констант, скільки ступенів вільності має механічна система (сталі $\alpha_1,...,\alpha_n$).

3. Знайти похідні $\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ та прирівняти їх новим константам β_i (30.6).

4. Із співвідношень (30.6) знайти траєкторію руху механічної системи з врахуванням початкових умов задачі.

31. Відокремлення змінних у рівнянні Гамільтона-Якобі

Найважливішою частиною метода Гамільтона-Якобі є знаходження повного інтеграла (30.3) рівняння (30.2). Розглянемо, яким чином можна здобути такий роз'язок . Якщо механічна система є замкненою, тобто якщо функція Гамільтона цієї системи не залежить безпосередньо від часу, зберігається енергія E, і дію S можна представити у формі:

$$S = -Et + S_1(q_1,...,q_n), \qquad (31.1)$$

де S_1 називають ***скороченою дією***. Підстановка (31.1) у (30.2) дає рівняння зі змінними $q_1,...,q_n$:

$$H(q_1,...,q_n,\frac{\partial S_1}{\partial q_1},...,\frac{\partial S_1}{\partial q_n})-E=0\,. \qquad (31.2)$$

Коли функція Гамільтона механічної системи має циклічні змінні $q_1,...,q_l$ $(l<n)$, зберігаються відповідні узагальнені імпульси:

$$p_a=\frac{\partial S}{\partial q_a}=\alpha_a=const\,,\quad a=1,...,l\,, \qquad (31.3)$$

Дія S для такої системи може бути записана у вигляді:

$$S=\sum_{a=1}^{l}\alpha_a q_a+S_2(q_{l+1},...,q_n,t)\,,\quad \alpha_a=const\,. \qquad (31.4)$$

Рівняння (30.2) після такої підстановки матиме змінні t та $q_{l+1},...,q_n$:

$$\frac{\partial S_2}{\partial t}+H(q_{l+1},...,q_n,\alpha_1,...,\alpha_l,\frac{\partial S}{\partial q_{l+1}},...,\frac{\partial S}{\partial q_n},t)=0\,. \qquad (31.5)$$

Послідовне відокремлення внесків інших змінних можливо провести за допомогою процедури, яка називається ***відокремленням змінних***. Для цього рівняння (30.2) необхідно перетворити на рівність, у якій з одного боку є тільки внески з відокремленою змінною (напр., q_n), а з другого – внески з усіма іншими змінними, тобто рівність у формі:

$$f_1(q_n)=f_2(q_1,...,q_{n-1})\,. \qquad (31.6)$$

Оскільки змінні $q_1,...,q_n$ – незалежні, співвідношення (31.6) виконується тільки тоді, коли обидві частини дорівнюють константі α_n:

$$f_1(q_n)=\alpha_n\,, \qquad (31.7)$$

$$f_2(q_1,...,q_{n-1})=\alpha_n\,. \qquad (31.8)$$

Для рівняння (31.8) цю процедуру можна повторити.

Оскільки у рівняння Гамільтона-Якобі (30.2) входять тільки похідні від функції S за часом та узагальненими координатами, метод відокремлення змінних фактично означає, що повний інтеграл цього рівняння матиме структуру:

$$S=S_0(t)+\sum_{a=1}^{n}S_a(q_a)\,. \qquad (31.9)$$

Як приклад визначення траєкторії руху методом відокремлення змінних у рівнянні Гамільтона-Якобі, розглянемо частинку, що рухається у полі:

$$U(r,\vartheta,\varphi) = A(r) + \frac{B(\vartheta)}{r^2} + \frac{C(\varphi)}{r^2 \sin^2 \vartheta}, \qquad (31.10)$$

де r, ϑ, φ – сферичні координати, $A(r)$ характеризує поле зі сферичною симетрією, другий внесок – поле з віссю симетрії, що має сингулярність у точці $r = 0$, останній внесок характеризує анізотропне поле струни, натягнутої вздовж вісі z декартової системи координат (зі сингулярністю у точці $r = 0$).

Функція Гамільтона такої частинки має вигляд:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\vartheta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \vartheta} + A(r) + \frac{B(\vartheta)}{r^2} + \frac{C(\varphi)}{r^2 \sin^2 \vartheta}. \qquad (31.11)$$

Побудуємо рівняння Гамільтона-Якобі, замінивши у (31.11) усі узагальнені імпульси на похідні від дії S за відповідними координатами:

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad p_\vartheta = \frac{\partial S}{\partial \vartheta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi},$$

тобто знайдемо:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + $$
$$+ A(r) + \frac{B(\vartheta)}{r^2} + \frac{C(\varphi)}{r^2 \sin^2 \vartheta} = 0 \; . \qquad (31.12)$$

Оскільки функція Гамільтона (31.11) не залежить явно від часу, зберігається енергія E частинки, і дію S представимо у формі (31.1):

$$S = -Et + S_1(r,\vartheta,\varphi), \quad E = const. \qquad (31.13)$$

Підставимо (31.13) у (31.12) та перепишемо рівняння для функції $S_1(r,\vartheta,\varphi)$ у вигляді:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \varphi}\right) + C(\varphi) =$$
$$= r^2 \sin^2 \vartheta \left\{ Et - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right) - \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \vartheta}\right) - A(r) - \frac{B(r)}{r^2} \right\} \; . \qquad (31.14)$$

Функція S_1 входить у це рівняння тільки через похідні за координатами, тому представимо цю функцію як суму:

$$S_1(r,\vartheta,\varphi) = f(\varphi) + S_2(r,\vartheta). \qquad (31.15)$$

Після підстановки (31.15) у (31.14) видно, що ліва частина співвідношення залежить від φ, а права – від r та ϑ :

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{df(\varphi)}{d\varphi}\right)^2 + C(\varphi) = r^2\sin^2\vartheta\left\{E - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2(r,\vartheta)}{\partial r}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S_2(r,\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)^2 - A(r) - \frac{B(\vartheta)}{r^2}\right\} . \qquad (31.16)$$

Оскільки φ, r та ϑ – незалежні змінні, співвідношення (31.16) виконується тільки коли кожна з частин його дорівнює константі:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{df(\varphi)}{d\varphi}\right)^2 + C(\varphi) = \alpha_1, \quad \alpha_1 = const, \qquad (31.17)$$

$$r^2\sin^2\vartheta\left\{E - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2(r,\vartheta)}{\partial r}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S_2(r,\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)^2 - A(r) - \frac{B(\vartheta)}{r^2}\right\} = \alpha_1 . \qquad (31.18)$$

Розв’язок рівняння (31.17) знаходимо методом відокремлення змінних:

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} = \sqrt{2m(\alpha_1 - C(\varphi))}. \qquad (31.19)$$

Знак „±” перед коренем не виписуємо, але його треба враховувати при підстановці конкретних початкових умов задачі. З (31.19) маємо вираз для функції $f(\varphi)$:

$$f(\varphi) = \int\sqrt{2m(\alpha_1 - C(\varphi))}d\varphi. \qquad (31.20)$$

Рівняння (31.18) представимо у вигляді:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2(r,\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)^2 + B(\vartheta) + \frac{\alpha_1}{\sin^2\vartheta} =$$
$$= r^2\left(E - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2(r,\vartheta)}{\partial r}\right)^2 - A(r)\right) . \qquad (31.21)$$

Якщо функцію $S_2(r,\vartheta)$ шукати як суму :

$$S_2(r,\vartheta) = g(r) + h(\vartheta), \qquad (31.22)$$

змінні у (31.21) повністю відокремлюються:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dh(\vartheta)}{d\vartheta}\right)^2+B(\vartheta)+\frac{\alpha_1}{\sin^2\vartheta}=\alpha_2,\quad \alpha_2=const, \tag{31.23}$$

$$r^2\left(E-\frac{1}{2m}\left(\frac{dg(r)}{dr}\right)^2-A(r)\right)=\alpha_2. \tag{31.24}$$

Розв'язки цих рівнянь мають вигляд:

$$h(\vartheta)=\int\sqrt{2m\left(\alpha_2-B(\vartheta)-\frac{\alpha_1}{\sin^2\vartheta}\right)}d\vartheta, \tag{31.25}$$

$$g(r)=\int\sqrt{2m\left(E-A(r)-\frac{\alpha_2}{r^2}\right)}dr. \tag{31.26}$$

У результаті повний інтеграл рівняння (31.12) має вигляд:

$$S=-Et+\int\sqrt{2m(\alpha_1-C(\varphi))}d\varphi+\int\sqrt{2m\left(\alpha_2-B(\vartheta)-\frac{\alpha_1}{\sin^2\vartheta}\right)}d\vartheta$$

$$+\int\sqrt{2m\left(E-A(r)-\frac{\alpha_2}{r^2}\right)}dr,\qquad E,\alpha_1,\alpha_2-const\ . \tag{31.27}$$

Розглянемо цю функцію як твірну (29.16) для канонічного перетворення до нових імпульсів:

$$P_1=E,\quad P_2=\alpha_1,\quad P_3=\alpha_2. \tag{31.28}$$

Згідно з (29.19), похідні від функції (31.27) за цими імпульсами є нові узагальнені координати:

$$Q_1=\frac{\partial S}{\partial E},\quad Q_2=\frac{\partial S}{\partial\alpha_1},\quad Q_3=\frac{\partial S}{\partial\alpha_2}. \tag{31.29}$$

Оскільки, відповідно з (29.18), нова функція Гамільтона:

$$H'=H+\frac{\partial S}{\partial t},$$

а права частина цього співвідношення – рівняння Гамільтона-Якобі (30.2), тому

$$H'=0.$$

З (29.3) приходимо до висновку, що узагальнені координати (31.29) – константи:

$$Q_a=\beta_a=const,\quad a=1,2,3.$$

Таким чином, з (31.27), (31.29) знаходимо:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t - \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{\left(E - A(r) - \frac{\alpha_2}{r^2}\right)}} = \beta_1 , \qquad (31.30)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_1 - C(\varphi)}} - \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta \sqrt{\sin^2\vartheta(\alpha_2 - B(\vartheta)) - \alpha_1}} = \beta_2 ,$$

(31.31)

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\sin\vartheta d\vartheta}{\sqrt{\sin^2\vartheta(\alpha_2 - B(\vartheta)) - \alpha_1}} - \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{r\sqrt{r^2(E - A(r)) - \alpha_2}} = \beta_3$$

(31.32)

Рівняння (31.30)-(31.32) визначають траєкторію руху частинки у полі (31.10): маємо $r = r(t)$ – із співвідношення (31.30), $\vartheta = \vartheta(r)$ – із співвідношення (31.32), $\varphi = \varphi(\vartheta)$ – з (31.31).

Задача 31.1. Заряджена частинка у кулонівському та однорідному електричному полях (потенціальна енергія $U = \frac{a}{r} + bz;\ a, b - const$).

У кінетичній енергії частинки перейти від циліндричних координат (ρ, φ, z) до параболічних (ξ, η, φ) за формулами $z = \frac{1}{2}(\xi - \eta),\ \rho = \sqrt{\xi\eta}$, знайти рівняння Гамільтона, обчислити дужку Пуассона $\{\xi, H\}$ та визначити траєкторію руху методом Гамільтона-Якобі.

32. Змінні „дія-кут”

Нехай для консервативної механічної системи, тобто для системи, де зберігається енергія, існують такі узагальнені координати, у яких рівняння Гамільтона-Якобі допускає відокремлення змінних. Вибір констант $\alpha_1, ..., \alpha_n$ у твірній функції S (30.3) може бути довільним. Виконаємо канонічне перетворення до таких нових координат $\varphi_1, ..., \varphi_n$ та нових імпульсів $I_1, ..., I_n$, у яких нова функція Гамільтона (29.4) H' залежатиме тільки від імпульсів $I_a = I_a(\alpha_1, ..., \alpha_n),\ a = 1, ..., n$:

$$H' = H'(I_1, ..., I_n). \qquad (32.1)$$

Канонічні рівняння (29.3) у таких змінних мають вигляд:

$$\dot{\varphi}_a = \frac{\partial H'}{\partial I_a}, \quad \dot{I}_a = 0, \quad a = 1,...,n. \qquad (32.2)$$

Оскільки система консервативна, усі похідні $\frac{\partial H'}{\partial I_a}$ не залежать від часу:

$$\frac{\partial H'}{\partial I_a} = \omega_a = const, \qquad (32.3)$$

і закон руху системи має вигляд:

$$\varphi_a(t) = \omega_a t + \varphi_{0a}, \quad \varphi_{0a} = const, \quad a = 1,...,n. \qquad (32.4)$$

Величини ω_a представляють собою ***частоти*** зміни координат φ_a.

Щоб з'ясувати, яким може бути рух таких систем, розглянемо траєкторію одновимірної системи у ***фазовому просторі***, тобто у двовимірному евклідовому просторі з декартовими вісями q та p.

Рух одновимірної консервативної системи може бути двох типів.

а) Координата $q(t)$ та імпульс $p(t)$ є періодичні функції з однаковим періодом T:

$$q(t) = q(t+T), \quad p(t) = p(t+T). \qquad (32.5)$$

Якщо з цих співвідношень виключити час, тобто побудувати криву $p = p(q)$, вона буде мати у площині q, p замкнену форму (Рис.16а). Цей рух характерний для коливальних систем, наприклад, для одновимірного гармонічного осцилятора. Делоне, який, розглядаючи задачу трьох тіл (Земля, Місяць, Сонце), вперше ввів змінні „дія-кут”, назвав такий рух ***лібрацією***.

б) Інший характер руху буде у системи, координата q якої може приймати будь-які значення, а імпульс p є періодичною функцією координати:

$$p(q) = p(q+T). \qquad (32.6)$$

У цьому випадку траєкторія у фазовому просторі є незамкненою періодичною лінією (Рис.16б). Прикладом такого руху є обертання твердого тіла навколо нерухомої вісі, координата q якого – це кут обертання φ. Через період

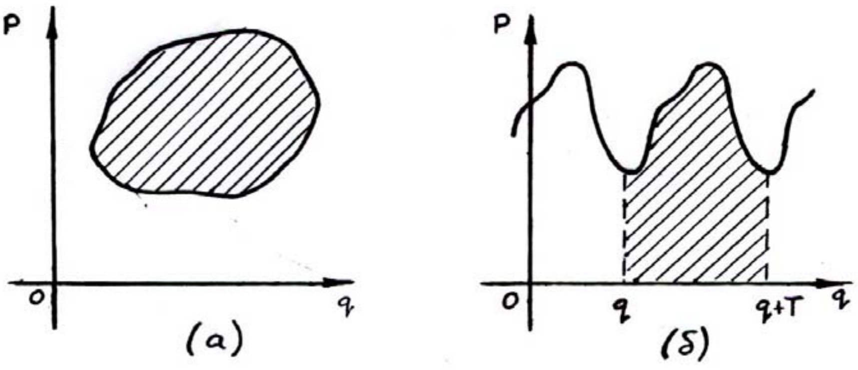

Рис. 16. Траєкторія руху одновимірної механічної системи
у фазовому просторі (***фазовий портрет***):
а) лібрація; б) обертання

$T = 2\pi$ будь-яке положення твердого тіла повторюється знову. Такий рух називають ***обертанням***.

Як приклад, розглянемо одновимірний математичний маятник довжини l, рух якого відбувається у фіксованій вертикальній площині. Енергія такої системи не змінюється:

$$E = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi = const\,, \tag{32.7}$$

де φ – кут відхилення маятника від положення рівноваги (Рис.17). Залежність імпульсу p від кута φ

$$p = \sqrt{2ml^2(E + mgl\cos\varphi)} \tag{32.8}$$

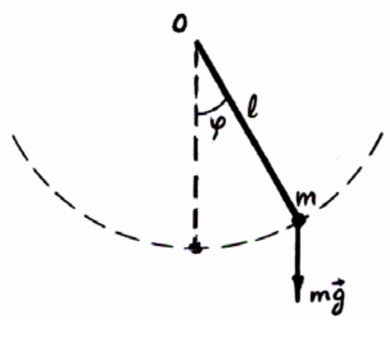

Рис. 17. Математичний маятник

визначає траєкторію маятника у фазовому просторі. Якщо енергія $E < mgl$, рух маятника можливий тільки для кутів $|\varphi| \le \varphi_1$, де φ_1 визначається умовою

$$E + mgl\cos\varphi_1 = 0\,. \tag{32.9}$$

У цьому випадку фазова траєкторія маятника є замкненою (крива 1 на Рис.18). Енергії $E = mgl$ відповідає крива 2 Рис.18.

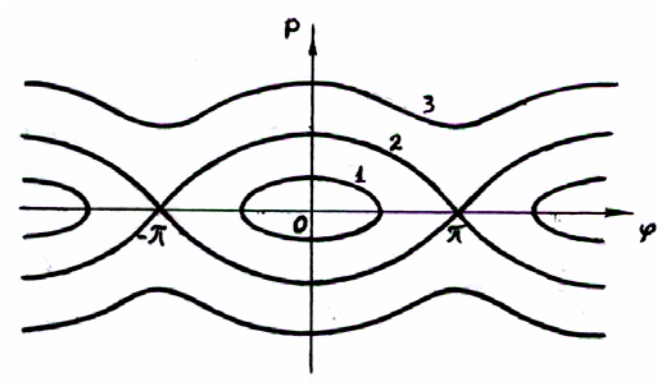

Рис. 18. Фазовий портрет
математичного маятника

Маятник досягає найвищої точки траєкторії – кута $\varphi = \pi$ з нульовою швидкістю. Крива 2 називається ***сепаратрисою***. Вона відокремлює на фазовій площині області з різними типами фазових траєкторій.

Коли енергія маятника $E > mgl$, фазова крива (крива 3 на Рис.18) є незамкненою періодичною лінією. За таких значень енергії маятник буде безперервно обертатися навколо точки O (Рис.17).

Введемо новий узагальнений імпульс

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p d\varphi, \tag{32.10}$$

де межі інтегрування визначаються областю зміни координати φ за період (тобто для кривих типу (a) на Рис.16 – у межах замкненої фазової траєкторії, а для кривих типу ($б$) на Рис.16 – у межах періоду). Для математичного маятника (32.10) має вигляд:

$$I = \frac{2l}{\pi}\int_0^{\varphi_1}\sqrt{2m\left(E + mgl\cos\varphi\right)}d\varphi, \quad E \le mgl. \tag{32.11}$$

де кут φ_1 визначається умовою (32.9), або вигляд

$$I = \frac{2l}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{2m\left(E + mgl\cos\varphi\right)}d\varphi, \quad E \ge mgl. \tag{32.12}$$

Інтеграли (32.11), (32.12) залежать тільки від енергії системи

$$I = I(E), \tag{32.13}$$

тобто від її функції Гамільтона H':

$$H' = H'(I) = E . \tag{32.14}$$

Твірна функція канонічного перетворення до нового імпульсу I та нової функції Гамільтона H' (29.16) є скорочена дія

$$S(\varphi, I) = \int_0^{\varphi} p d\varphi = l \int_0^{\varphi} \sqrt{2m\left(E + mgl\cos\varphi\right)} d\varphi . \tag{32.15}$$

Імпульс (32.10) має розмірність дії і називається ***дією***. Згідно з (29.18) нова координата

$$Q = \frac{\partial S}{\partial I} \tag{32.16}$$

є безрозмірною, оскільки як твірна функція, так і новий імпульс мають розмірність дії.

Канонічні рівняння (29.3) для нових змінних такі:

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}, \quad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial I} . \tag{32.17}$$

Нова функція Гамільтона H' (32.14) не залежить від нової координати Q (ця координата – циклічна), тому

$$I = const . \tag{32.18}$$

У другому рівнянні (32.17) похідна $\dfrac{\partial H'}{\partial I}$ не залежить від часу. Його розв'язок:

$$Q = \omega(I)t + q_0, \quad q_0 = const , \tag{32.19}$$

де $\omega(I)$ – частота нелінійних коливань математичного маятника.

Зміна твірної функції (32.15) на періоді руху дорівнює

$$\Delta S = \oint p d\varphi = 2\pi I . \tag{32.20}$$

Відповідно, зміна нової координати на періоді

$$\Delta Q = \frac{\partial \Delta S}{\partial I} = 2\pi . \tag{32.21}$$

Це виправдовує назву нової координати Q – ***кут***.

Визначимо частоту нелінійних коливань маятника $\omega(I)$. Введемо параметр κ:

$$\kappa^2 = \frac{1}{2\omega_0^2}\left(H' + \omega_0^2\right), \quad \omega_0^2 = mgl , \tag{32.22}$$

який може змінюватися від 0 до ∞ і на сепаратрисі (крива 2

Рис.18) дорівнює одиниці. Якщо замість змінної φ у (32.11) ввести змінну ξ співвіношенням

$$\kappa \sin\xi = \sin\frac{\varphi}{2}, \quad \kappa \le 1, \tag{32.23}$$

з урахуванням (32.11) знайдемо

$$I(H') = \frac{8\omega_0 l\sqrt{m}}{\pi}\left\{E\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right) - \left(1-\kappa^2\right)F\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right)\right\}, \quad \kappa \le 1. \tag{32.24}$$

Аналогічно, після заміни у (32.12)

$$\sin\xi = \sin\frac{\varphi}{2}, \quad \kappa \ge 1, \tag{32.25}$$

маємо результат інтегрування:

$$I(H') = \frac{8\omega_0 l\kappa\sqrt{m}}{\pi} E\left(\frac{\pi}{2};\frac{1}{\kappa}\right), \quad \kappa \ge 1. \tag{32.26}$$

У (32.24), (32.26) $F\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right)$ та $E\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right)$ – повні еліптичні інтеграли, відповідно, першого та другого роду:

$$F\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}}; \quad E\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\,. \tag{32.27}$$

Згідно з (32.17), (32.19) частота нелінійних коливань

$$\omega(I) = \frac{\partial H'}{\partial I} = \left(\frac{\partial I}{\partial H'}\right)^{-1}. \tag{32.28}$$

З урахуванням похідних від еліптичних інтегралів (32.27)

$$\frac{dF}{d\kappa} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{E}{1-\kappa^2} - F\right), \quad \frac{dE}{d\kappa} = \frac{1}{\kappa}\left(E - F\right),$$

де у функцій $F\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right)$ та $E\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right)$ аргументи не виписані, знайдемо:

$$\omega(I) = \frac{\pi\omega_0}{2l\sqrt{m}}\begin{cases} \dfrac{1}{F\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right)}, & \kappa \le 1 \\[2ex] \dfrac{\kappa}{F\left(\frac{\pi}{2};\frac{1}{\kappa}\right)}, & \kappa \ge 1 \end{cases}. \tag{32.29}$$

Твірна функція (32.15) з урахуванням підстановок (32.23), (32.25) матиме вигляд

$$S(\varphi,I)=4\omega_0\, l\sqrt{m}\begin{cases}E(\xi;\kappa)-\left(1-\kappa^2\right)F(\xi;\kappa), & \kappa\le 1\\ \kappa\, E\left(\xi;\dfrac{1}{\kappa}\right), & \kappa\ge 1\end{cases}. \tag{32.30}$$

Траєкторія руху $t=t(\varphi)$ визначається співвідношеннями (32.16), (32.15), (32.30). Швидкість маятника

$$\dot{\varphi}=\frac{p}{m}=\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial\varphi}=\frac{2\omega_0}{l\sqrt{m}}\begin{cases}\kappa\cos\xi, & \kappa\le 1\\ \sqrt{\kappa^2-\sin^2\xi}, & \kappa\ge 1\end{cases}. \tag{32.31}$$

На сепаратрисі, де

$$\dot{\varphi}=\frac{2\omega_0}{l\sqrt{m}}\cos\frac{\varphi}{2},$$

інтегрування за початковою умовою $\varphi(0)=0$ дає

$$\frac{\omega_0}{l\sqrt{m}}t=\ln tg\frac{\varphi+\pi}{4},$$

тобто

$$\varphi=4\,arctg\, e^{\frac{\omega_0}{l\sqrt{m}}t}-\pi .$$

Звідси швидкість маятника

$$\dot{\varphi}=\frac{2\omega_0}{l\sqrt{m}\,ch\left(\dfrac{\omega_0}{l\sqrt{m}}t\right)}. \tag{32.32}$$

Таким чином, канонічне перетворення до нової функції Гамільтона H' (32.1) надає можливість визначити власні нелінійні частоти ω_a (32.28) механічної системи. Змінні „дія-кут" I_a, Q_a корисні тим, що для визначення частот ω_a (32.28) не обов'язково проводити повне дослідження механічної системи, достатньо тільки відокремити відповідні ступені вільності.