Механіка суцільних середовищ

У класичній механіці розглядається рух систем із скінченим числом ступенів вільності. Наприклад, тверде тіло, що складене з будь-якої кількості частинок, є системою з шістьма ступенями вільності. Коли розглядаються рухи, складніші, ніж у твердому тілі (пружні коливання, деформації та ін.), необхідно розглядати тіло або як систему точкових частинок, або як суцільне середовище, втрачаючи при цьому частину інформації про рухи окремих частинок. Для будь-якого реального середовища, яке містить у собі число Авогадро атомів або молекул, немає ніякого сенсу розглядати систему 10^{23} диференціальних рівнянь руху з відповідною кількістю початкових умов, оскільки, по-перше, таку кількість умов практично визначити неможливо, по-друге, ніяка ЕОМ не зможе проаналізувати таку кількість рівнянь. Отже використання тієї чи іншої моделі суцільного середовища дозволяє спростити задачу за рахунок огрублювання методів опису, тобто усереднення частки процесів, які відбуваються у середовищі. Фактично процедура усереднення виділяє достатньо малі, але макроскопічні області середовища і враховує швидкі процеси, які у них відбуваються. Це дозволяє дослідити повільні процеси у областях, великих порівняно з областями усереднення за допомогою рівнянь для усереднених характеристик середовища. Іншими словами, замість розгляду рухів окремих атомів або молекул у моделях суцільного середовища частина простору, заповнена середовищем, наділяється додатними скалярними, векторними та тензорними характеристиками – полями (функціями координат та часу). Сама процедура усереднення виконується методами статистичної фізики і дозволяє зв'язати усереднені характеристики речовини з властивостями атомів або молекул, які її складають.

Якщо серед характеристик середовища зустрічаються тензорні величини, відповідні рівняння для середовища записують у тензорній формі. На протязі цієї частини використовується така тензорна форма запису, де тензорні індекси визначають декартові компоненти відповідних тензорів[7]. Однак при обчисленні характеристик середовища може статися доцільним використання криволінійних координат, які відповідали б внутрішній симетрії диференціальних рівнянь, що описують середовище, і знаходилися у процесі розв'язання задачі. Тому для остаточних рівнянь розгляданих середовищ приведена також форма запису у довільних криволінійних координатах, коли треба відрізняти верхні та нижні тензорні індекси, а також враховувати властивості коваріантного диференціювання.

33. Рівняння руху суцільного середовища

У механіці рідин та газів широко використовується поняття ***„рідкої частинки"***. Цим терміном визначають малий об'єм суцільного середовища, який у процесі руху деформується, але маса якого не змішується з навколишнім середовищем. При вивченні рівноваги або будь-яких рухів рідин та газів рідка частинка розглядається як матеріальний об'єкт, який підпорядковується усім законам механіки.

Для характеристики розподілу маси у просторі, заповненому рідиною або газом, звичайно використовують величину, яку називають густиною. Середнє значення густини середовища у деякому малому об'ємі визначається як відношення маси Δm, яка міститься у цьому об'ємі, до величини об'єму ΔV:

$$\rho_{сер} = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{33.1}$$

Замість середнього значення густини часто використовується величина, що називається ***густиною середовища*** у наданій точці:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \tag{33.2}$$

де об'єм ΔV містить у собі цю точку. Відповідно, елемент

[7] Для декартових компонент тензорів не треба відрізняти верхні та нижні тензорні індекси, бо метричний тензор g_{ik} тривимірного простору у декартових координатах – це просто символ Кронекера (19.6): $g_{ik} = \delta_{ik}$. Тому усі індекси для декартових компонент тензорів записують як нижні.

маси dm середовища пов'язаний з елементом об'єму dV, де знаходиться ця маса, співвідношенням:

$$dm = \rho dV . \tag{33.3}$$

Під час руху суцільного середовища маса його елемента dm (рідкої частинки) залишається незмінною. У загальному випадку густина представляє собою скалярну функцію координат та часу

$$\rho = \rho\left(\vec{r}, t\right). \tag{33.4}$$

Для опису рухів суцільного середовища введемо векторне поле $\vec{\upsilon}\left(\vec{r}, t\right)$ – ***швидкість частинок суцільного середовища***, які проходять через точку простору $\vec{r}$ у момент часу t. Швидкість $\vec{\upsilon}\left(\vec{r}, t\right)$ так само, як і густина $\rho(\vec{r}, t)$, не відноситься до будь-яких частинок окремо, а надає усереднену характеристику середовища в заданій точці простору у заданий момент часу.

Оскільки частинки, з яких складається суцільне середовище, підпорядковуються рівнянням Ньютона, подібні рівняння існують і для суцільного середовища. Вони враховують, що зміна імпульсу $\vec{P}$ сукупності частинок у одиницю часу визначаються силами $\vec{F}$, які діють на ці частинки:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \tag{33.5}$$

а зміна моменту імпульсу $\vec{M}$ у одиницю часу – моментом сил $\vec{K}$:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}. \tag{33.6}$$

Розглянемо рівняння (33.5) для елемента об'єму суцільного середовища dV, який складається з одних і тих самих рідких частинок. Сили, які діють на цей елемент об'єму, можна підрозділити на два види: об'ємні та поверхневі.

Об'ємні сили – це сили, які діють на усі частинки усередині об'єму

$$d\vec{F}^{об'єм} = \vec{f}\, dm = \vec{f}\, \rho dV, \tag{33.7}$$

де $\vec{f}$ – густина сил (сума сил, які діють на одиницю маси:

$\vec{f} = \dfrac{d\vec{F}^{об'єм}}{dV}$). Прикладом об'ємної сили є сила ваги

$$d\vec{F}^{об'єм} = \vec{g}\,dm, \quad \vec{f} = \vec{g}\,, \tag{33.8}$$

де $\vec{g}$ – прискорення сили ваги. Співвідношення (33.7) запишемо також у тензорній формі:

$$d\,F_i^{об'єм} = f_i\,dm = f_i\,\rho\,dV\,. \tag{33.9}$$

Поверхневі сили – це сили, які діють на виділений об'єм суцільного середовища з боку сусідніх об'ємів. У загальному випадку сила, з якою наданий об'єм діє на сусідній, який стикається з ним, характеризується трьома складовими: нормальною та двома дотичними. Компоненти поверхневих сил найкраще визначити у тензорній формі:

$$dF_i^{поверх} = p_{ik}d\sigma_k = p_{ik}n_k d\sigma\,. \tag{33.10}$$

Тут p_{ik} – ***тензор механічних напружень***, вектор $d\vec{\sigma} = \vec{n}d\sigma$ характеризує елемент поверхні, вздовж якої стикаються два об'єми, $\vec{n}$ – одиничний вектор, перпендикулярний до поверхні, $d\sigma$ – величина площини поверхні. У цій формулі, а також в усіх подальших формулах з тензорними величинами за повторюваними індексами, як це прийнято у тензорному аналізі, виконується підсумовування (правило Ейнштейна):

$$p_{ik}n_k = p_{i1}n_1 + p_{i2}n_2 + p_{i3}n_3\,. \tag{33.11}$$

Повна сила F_i, яка діє на виділений об'єм V та поверхню Σ_V, що його обмежує,

$$F_i = F_i^{об'єм} + F_i^{поверх} = \int\limits_V f_i\,\rho\,dV + \oint\limits_{\Sigma_V} p_{ik}n_k d\sigma\,. \tag{33.12}$$

Останній інтеграл за теоремою Остроградського-Гаусса можна перетворити у об'ємний. У результаті маємо

$$F_i = \int\limits_V \left(\rho\,f_i + \frac{\partial\,p_{ik}}{\partial\,x_ê}\right)dV\,. \tag{33.13}$$

Щоб записати рівняння руху суцільного середовища (33.5), розглянемо елемент об'єму середовища з масою dm, який знаходиться в точці $\vec{r}$ у момент часу t і має швидкість $\vec{\upsilon}(\vec{r},t)$. Імпульс цього елементу дорівнює $\vec{\upsilon}\,dm$. За час dt цей елемент об'єму переміститься у точку $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{\upsilon}\,dt$ і буде мати швидкість

$$\vec{\upsilon}(\vec{r}\,',t')=\vec{\upsilon}(\vec{r}+\vec{\upsilon}\,dt,t+dt)\approx\vec{\upsilon}(\vec{r},t)+\upsilon_i\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x_i}dt+\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}dt=$$

$$=\vec{\upsilon}(\vec{r},t)+\left(\left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}+\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}\right)dt\,. \qquad (33.14)$$

Похідна

$$\frac{d\,\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}\,, \qquad (33.15)$$

яка називається ***субстанційною похідною***, характеризує зміну швидкості рідкої частинки, яка зміщується у просторі. Перший внесок у (33.15) називається ***локальною похідною*** і характеризує зміну параметрів руху у деякій фіксованій точці простору за часом. Другий внесок (***конвективна похідна***) описує зміну параметрів руху рідкої частинки внаслідок її переміщення з однієї точки простору в іншу.

У декартових змінних диференціальний оператор $\left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)$, що діє на $\vec{\upsilon}$ у (33.15), має вигляд:

$$\left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}=\upsilon_x\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial z}\,, \qquad (33.16)$$

У разі використання довільних криволінійних координат x^1,x^2,x^3 в усіх векторних та тензорних величинах треба відрізняти верхні та нижні індекси, оскільки компоненти метричного тензора g_{ik} тривимірного простору у криволінійних координатах залежать від координат, а також замість звичайних частинних похідних треба використовувати коваріантні[8]. Тому i-та компонента виразу (33.16) у довільних криволінійних координатах матиме вигляд

---

[8] З математичної точки зору, перш, ніж вводити у просторі якісь векторні або тензорні поля, треба зробити цей простір векторним, тобто у кожній точці простору треба ввести систему незалежних векторів – базис (у тривимірному просторі це будь-які три не колінеарні, не компланарні вектори). Така процедура дозволяє досліджувати, яким чином змінюються векторні або тензорні поля у різних точках простору. Зміна напрямів базисних векторів при переході від однієї точки простору до іншої враховується у диференціальній геометрії за допомогою коваріантного диференціювання. Властивості коваріантного диференціювання залежать від вибору геометрії розглядуваного простору. У найпростішому випадку припускається, що простір коваріантно постійний, тобто коваріантна похідна метричного тензора g_{ik} простору дорівнює нулю

$$g_{ik;n}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n}-\Gamma^m_{in}g_{mk}-\Gamma^m_{kn}g_{im}=0$$

$$\left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)\upsilon_i = \upsilon^k \upsilon_{i;k}\,, \tag{33.17}$$

де коваріантна похідна $\upsilon_{i;k}$ позначена індексом, відокремленим крапкою з комою:

$$\upsilon_{i;k} = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} - \Gamma^n_{ik}\upsilon_n\,, \tag{33.18}$$

$$\Gamma^n_{ik} = \frac{1}{2} g^{nm}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right) \tag{33.19}$$

– символи Кристофеля, g_{ik} – метричний тензор тривимірного простору у криволінійних координатах x^1, x^2, x^3, двічі коваріантний метричний тензор g_{ik} пов'язаний з двічі контраваріантним метричним тензором g^{ik} співвідношенням:

$$g_{in}g^{kn} = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}. \tag{33.20}$$

Зміна імпульсу маси dm за одиницю часу dt визначається співвідношенням

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \lim_{dt\to 0}\frac{dm\vec{\upsilon}\left(\vec{r}\,',t'\right) - dm\vec{\upsilon}\left(\vec{r},t\right)}{dt} = \lim_{dt\to 0}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}dm\,. \tag{33.21}$$

Таким чином швидкість зміни імпульсу рідких частинок у об'ємі V

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_V \rho\left(\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}\right)dV\,. \tag{33.22}$$

У відповідності з рівнянням (33.6) ця величина дорівнює силі (33.12), яка діє на об'єм V:

$$\int_V \rho\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\upsilon_i\right)dV = \int_V\left(\rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\right)dV\,. \tag{33.23}$$

Оскільки об'єм V – довільний, з (33.23) випливає:

$$\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)\upsilon_i = f_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\,. \tag{33.24}$$

Це і є рівняння руху суцільного середовища. Його називають

та коефіцієнти $\Gamma^m_{in} = \Gamma^m_{ni}$ – це символи Кристофеля. Таку геометрію називають рімановою. Частинним випадком ріманового простору є евклідів простір, у якому тензор кривини Кристофеля-Рімана дорівнює нулю:

$$R_{iknm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{in}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^n}\right) + g_{rs}\left(\Gamma^r_{im}\Gamma^s_{kn} - \Gamma^r_{in}\Gamma^s_{km}\right) = 0\,.$$

диференціальним рівнянням руху у напруженнях.

Покажемо, що за деяких припущень рівняння (33.6) еквівалентно симетричності тензора напружень p_{ik}:

$$p_{ik} = p_{ki}\,. \tag{33.25}$$

Для цього розглянемо момент імпульсу елементу об'єму з масою dm, який знаходиться в точці $\vec{r}$ у момент часу t:

$$\vec{M}(t) = [\vec{r},\vec{\upsilon}]dm\,. \tag{33.26}$$

У момент часу $t' = t + dt$ цей елемент об'єму буде знаходитися в точці $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{\upsilon}\,dt$, його момент імпульсу буде дорівнювати

$$\vec{M}(t') = [\vec{r}\,',\vec{\upsilon}(\vec{r}\,',t')]dm\,. \tag{33.27}$$

Зміна цього моменту імпульсу за одиницю часу

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{[\vec{r}\,',\vec{\upsilon}(\vec{r}\,',t')] - [\vec{r},\vec{\upsilon}(\vec{r},t)]}{dt}dm\,. \tag{33.28}$$

Для будь-якого об'єму V

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \int\limits_V \rho\left[\vec{r},\left(\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t} + (\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla})\vec{\upsilon}\right)\right]dV\,. \tag{33.29}$$

Згідно з формулою (33.6) ця величина дорівнює моменту прикладених до об'єму зовнішніх сил (33.7) та (33.10):

$$\vec{K} = \int\limits_V [\vec{r}, d\,\vec{F}^{\,об'єм}] + \oint\limits_{\Sigma_V}[\vec{r}, d\vec{F}^{\,поверх}], \tag{33.30}$$

тобто

$$\int\limits_V \rho[\vec{r},\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}]dV = \int\limits_V [\vec{r}, d\,\vec{F}^{\,об'єм}] + \oint\limits_{\Sigma_V}[\vec{r}, d\vec{F}^{\,поверх}]. \tag{33.31}$$

Для будь-якої компоненти цього рівняння (напр., компоненти x) маємо:

$$\int\limits_V \rho\left(y\frac{d\upsilon_z}{dt} - z\frac{d\upsilon_y}{dt}\right)dV = \\ = \int\limits_V \rho\left(y\,d\,F_z^{об'єм} - zd\,F_y^{об'єм}\right)dV + \oint\limits_{\Sigma_V}\left(ydF_z^{поверх} - zdF_y^{поверх}\right)\,. \tag{33.32}$$

Якщо підставити сюди (33.9), (33.10) та (33.24) після скорочень внесків з f_i знайдемо

$$\int\limits_V \left(y\frac{\partial\,p_{zk}}{\partial\,x_k} - z\frac{\partial\,p_{yk}}{\partial\,x_k}\right)dV = \oint\limits_{\Sigma_V}\left(yp_{zk}n_k - zp_{yk}n_k\right)d\sigma. \tag{33.33}$$

За теоремою Остроградського-Гаусса поверхневий інтеграл можна перетворити у об'ємний

$$\int_V \left(\frac{\partial\, y p_{zk}}{\partial x_k} - \frac{\partial z p_{yk}}{\partial x_k} \right) dV \,. \tag{33.34}$$

Після скорочення однакових внесків у (33.33) будемо мати

$$\int_V \left(p_{zy} - p_{yz} \right) dV = 0 \,. \tag{33.35}$$

Оскільки об'єм V тут був довільний, з (33.35) випливає

$$p_{zy} = p_{yz} \,.$$

Інші співвідношення (33.25) отримаємо, розглянувши компоненти y та z рівняння (33.31). Таким чином, закон зміни моменту імпульсу суцільного середовища (33.6) проявляється у властивостях симетрії тензора напружень p_{ik} (33.25).

Відмітимо, що будь-який тензор другого рангу π_{ik} можна тотожно представити у вигляді суми симетричного та антисиметричного внесків, де симетричний внесок у свою чергу складається з діагональної та недіагональної частин:

$$\pi_{ik} = \frac{1}{3}\delta_{ik}\pi_{ll} + \left(\frac{\pi_{ik} + \pi_{ki}}{2} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\pi_{ll} \right) + \frac{\pi_{ik} - \pi_{ki}}{2} \,. \tag{33.36}$$

Кожний з них при переході до нової координатної системи перетворюється незалежно: згортка $\pi_{ll} = \pi_{11} + \pi_{22} + \pi_{33}$ – скаляр (форма скаляра не змінюється при координатних перетвореннях), симетричний внесок – через симетричний, антисиметричний – через антисиметричний. Тензор механічних напружень p_{ik} також можна представити у формі (33.36). Перший внесок у тензорі p_{ik} має скаляр, подібний тиску у законі Паскаля (але з протилежним знаком). У ідеальній рідині він лише один – див. далі п.36. Другий внесок з'являється у середовищах, які чинять опір зміні форми при постійному об'ємі. Прикладом суцільного середовища, де тензор p_{ik} має перший і другий внески, є в'язка рідина (див. п.39). Третій внесок взагалі, як показано вище, дорівнює нулю.

У довільних криволінійних координатах рівняння руху суцільного середовища (33.24) матиме вигляд:

$$\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \upsilon^k \, \upsilon_{i;k} = f_i + \frac{1}{\rho} p^k_{i;k}, \tag{33.37}$$

де $\upsilon_{i;k}$ визначається співвідношенням (33.18),

$$p^k_{i;k} = \frac{\partial p^k_i}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ik} p^k_m + \Gamma^k_{mk} p^m_i, \quad p^k_i = p_{in} g^{kn}. \tag{33.38}$$

Задача 33.1. Знайти вигляд диференціального оператора $(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla})$, що діє на коваріантні компоненти вектора $\vec{\upsilon}$ у циліндричних та сферичних координатах.

34. Закон збереження маси. Рівняння неперервності

Закон збереження маси для ізольованої системи проявляється у тому, що маса m такої системи залишається постійною під час руху. Якщо система не ізольована і має постійний за величиною об'єм, через поверхню цього об'єму можуть виходити або входити частинки. Зміна маси об'єму у одиницю часу буде дорівнювати

$$\frac{dm}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \tag{34.1}$$

Кількість частинок, які входять всередину об'єму V, або виходять з нього за одиницю часу, може бути визначена за допомогою потоку маси, що проходить крізь поверхню Σ_V, яка обмежує об'єм V. Кількості частинок, які входять всередину об'єму V та які виходять з нього, не однакові, тому кількість маси, яка виходить за час dt зі швидкістю $\vec{\upsilon}$ через елемент поверхні $d\vec{\sigma}$, дорівнюватиме $\rho \vec{\upsilon} dt d\vec{\sigma}$. Зміна маси середовища у цьому об'ємі за одиницю часу буде дорівнювати

$$\frac{dm}{dt} = -\oint_{\Sigma_V} \rho \vec{\upsilon}\, d\vec{\sigma}, \tag{34.2}$$

тобто зменшення маси усередині об'єму V супроводжується потоком маси крізь поверхню назовні (цьому напряму руху частинок відповідає знак „мінус" у правій частині (34.2)). Формула (34.2) є ***закон збереження маси у інтегральній формі***. Величина

$$\vec{j} = \rho\vec{\upsilon} \tag{34.3}$$
називається ***густиною потоку маси***. Закон збереження (34.2) подібний до закону збереження заряду у електродинаміці: зміна заряду у об'ємі V супроводжується потоком заряду через поверхню, що обмежує цей об'єм.

Якщо зміна маси усередині об'єму супроводжується тільки зміною густини, (34.2) можна переписати у вигляді:
$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\oint_{\Sigma_V} \vec{j}\, d\vec{\sigma} \tag{34.4}$$
або, за теоремою Остроградського-Гаусса,
$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\int_V \frac{\partial j_k}{\partial x_k}dV\,. \tag{34.5}$$
Оскільки об'єм V у цій формулі довільний, знаходимо ***закон збереження маси у диференціальній формі (рівняння неперервності)***:
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0\,. \tag{34.6}$$
Якщо середовище нестисливе, тобто $\rho = const$, рівняння (34.6) має вигляд:
$$div\,\vec{\upsilon} = 0\,. \tag{34.7}$$

У довільних криволінійних координатах x^1, x^2, x^3 вираз $div\,\vec{j}$ представляє собою коваріантну похідну $j_{i;k}$ зі згорткою по індексах
$$div\,\vec{j} = j_{i;k}g^{ik} = j^i_{;i}\,, \tag{34.8}$$
де
$$j_{i;k} = \frac{\partial j_i}{\partial x_k} - \Gamma^n_{ik} j_n\,, \quad j^i_{;i} = \frac{\partial j^i}{\partial x_i} + \Gamma^i_{ik} j^k\,, \tag{34.9}$$
Рівняння неперервності (34.6) у довільних криволінійних координатах має вигляд:
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + j^i_{;i} = 0\,. \tag{34.10}$$

Задача 34.1. Записати рівняння неперервності у циліндричних та сферичних координатах.

35. Закон збереження енергії. Повна система рівнянь руху суцільного середовища

Якщо вважати, що тензор напружень p_{ik} у (33.24) залежить тільки від густини ρ та швидкості $\vec{\upsilon}$, система рівнянь (33.24) та (34.6) є замкненою і повністю характеризує рухи суцільного середовища. Однак треба мати на увазі, що у реальному середовищі мають місце дисипативні процеси, тобто внутрішня енергія частково перетворюється у теплоту, змінюється температура середовища, і характер руху у системі теж може змінитися. Такі системи характеризуються ще однією скалярною функцією – температурою $T = T(\vec{r}, t)$, для якої необхідно мати ще одне рівняння. Це рівняння можна знайти, виходячи з першого закону термодинаміки (зміна енергії наданого об'єму дорівнює припливу теплоти внаслідок дисипативних процесів та роботі зовнішніх сил над елементами об'єму):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dA}{dt}. \tag{35.1}$$

Рівняння (35.1) є узагальненням закону збереження енергії на системи, які складаються з великої кількості частинок і не можуть бути описані у рамках класичної механіки. Визначення енергії E та роботи A у формулі (35.1) відрізняються від прийнятих у класичній механіці, хоча і засновані на механічних поняттях. Величини Q – кількості теплоти – у класичній механіці не існує взагалі. Послідовно її можна визначити лише методами статистичної фізики.

Повна енергія рідких частинок у об'ємі V складається із суми кінетичної T_k та внутрішньої енергії U:

$$E = T_k + U. \tag{35.2}$$

Кінетична енергія T_k макроскопічного колективного руху в об'ємі V

$$T_k = \int_V \frac{1}{2}\upsilon^2 dm = \int_V \frac{\rho\upsilon^2}{2} dV. \tag{35.3}$$

Внутрішня енергія U представляє собою усереднену за часом потенціальну енергію взаємодії частинок середовища між собою. У термодинаміці вона пов'язується з питомою теплоємністю середовища c_V та температурою T:

$$U = \int_V u dm = \int_V \rho c_V T dV . \qquad (35.4)$$

Таким чином, повна енергія рідких частинок у об'ємі V може бути записана у вигляді:

$$E = \int_V \rho \varepsilon dV , \qquad (35.5)$$

де $\varepsilon = \dfrac{\upsilon^2}{2} + u$ – енергія одиниці маси суцільного середовища. Зміна кінетичної енергії маси dm у одиницю часу визначається аналогічно (33.21), (33.22)

$$\frac{dT_k}{dt} = \int_V \rho \upsilon_i \frac{d\upsilon_i}{dt} dV = \int_V \left(\rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \right) \upsilon_i dV , \qquad (35.6)$$

де враховані співвідношення (33.15), (33.24). Так само, зміна повної енергії маси dm у одиницю часу дорівнює

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \rho \frac{d\varepsilon}{dt} dV = \int_V \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \upsilon_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) dV . \qquad (35.7)$$

Робота зовнішніх сил над елементами об'єму V у одиницю часу (потужність) складається з внесків об'ємних (33.9) та поверхневих (33.10) сил, помножених скалярно на швидкість $\vec{\upsilon}$:

$$\frac{dA}{dt} = \int_V \rho f_i \upsilon_i dV + \oint_{\Sigma_V} p_{ik} n_k \upsilon_i d\sigma . \qquad (35.8)$$

Поверхневий інтеграл можна перетворити у об'ємний:

$$\oint_{\Sigma_V} p_{ik} n_k \upsilon_i d\sigma = \int_V \frac{\partial p_{ik} \upsilon_i}{\partial x_k} dV = \int_V \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \upsilon_i dV + \int_V p_{ik} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} dV . \qquad (35.9)$$

В останньому інтегралі з врахуванням симетрії p_{ik} (33.25) запишемо

$$p_{ik} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} = p_{ik} \upsilon_{ik} , \quad \upsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} \right). \qquad (35.10)$$

Таким чином, потужність зовнішніх сил має вигляд

$$\frac{dA}{dt} = \int_V \left(\rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \right) \upsilon_i dV + \int_V p_{ik} \upsilon_{ik} dV . \qquad (35.11)$$

Зміна енергії в об'ємі *V,* зумовлена потоком теплоти через його поверхню Σ_V, може бути записана у вигляді інтегралу

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_{\Sigma_V} \vec{q}\, d\vec{\sigma} = -\int_V div\, \vec{q}\, dV\,, \qquad (35.12)$$

де $\vec{q}$ – ***густина потоку теплоти***. Із спостережень відомо, що

$$\vec{q} = -\gamma \vec{\nabla} T\,, \qquad (35.13)$$

де γ – коефіцієнт теплопровідності.

Співвідношення (35.7), (35.11), (35.12), підставлені у перший закон термодинаміки (35.1), з врахуванням рівняння неперервності (34.6) дозволяють записати закон збереження енергії суцільного середовища у вигляді (***закон збереження енергії у інтегральній формі***):

$$\int_V \frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t} dV = -\oint_{\Sigma_V} \vec{S}\, d\vec{\sigma} + \int_V \rho \vec{f}\, \vec{\upsilon}\, dV \qquad (35.14)$$

– зміна енергії у об'ємі V суцільного середовища супроводжується потоком енергії через поверхню Σ_V, що обмежує цей об'єм, та роботою об'ємних сил усередині об'єму. ***Густина потоку енергії*** (***вектор Умова***[9])

$$S_i = \rho\left(\frac{\upsilon^2}{2} + u\right)\upsilon_i - p_{ik}\upsilon_k + q_i\,, \qquad (35.15)$$

складається з внесків конвективного переносу енергії $\rho\left(\frac{\upsilon^2}{2} + u\right)\upsilon_i$ за рахунок макроскопічних рухів суцільного середовища, роботи поверхневих сил $-p_{ik}\upsilon_k$ та переносу теплоти q_i. З (35.14) випливає ***закон збереження енергії суцільного середовища у диференціальній формі***:

$$\frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t} + div\, \vec{S} = \rho \vec{f}\, \vec{\upsilon}\,. \qquad (35.16)$$

Після підстановки (35.2), (35.4), (35.6), (35.11), (35.12) у (35.1) з врахуванням довільності об'єму V будемо мати рівняння

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)u\right) = div\left(\gamma \vec{\nabla} T\right) + p_{ik}\upsilon_{ik}\,. \qquad (35.17)$$

---

[9] Вектор $\vec{S} = (\frac{\rho\upsilon^2}{2} + p)\vec{\upsilon}$, який представляє собою густину потоку енергії ідеальної нестисливої рідини, вперше ввів М.О.Умов у 1873 р. (Одеса). Тут p – тиск (див. далі п.36).

Рівняння (33.24), (34.6), (35.17) (з субстанційними похідними (33.15))

$$\frac{d\upsilon_i}{dt} = f_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}, \tag{35.18а}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\, \vec{\upsilon} = 0, \tag{35.18б}$$

$$\rho\frac{du}{dt} = div\left(\gamma\vec{\nabla}T\right) + p_{ik}\upsilon_{ik}. \tag{35.18в}$$

представляють собою ***повну систему рівнянь руху суцільного середовища***, якщо її доповнити рівняннями, які пов'язують величини u, γ, p_{ik} з термодинамічними параметрами ρ та T (одне з таких співвідношень – (35.4)). Форма цих рівнянь визначає модель суцільного середовища (твердого тіла, рідини або газу). Далі розглянемо як приклади суцільного середовища ідеальну та в'язку рідини.

36. Ідеальна рідина

Серед суцільних середовищ важливе місце займають рідини та гази. Механіка рідин та газів (***гідромеханіка***) вивчає рівновагу та рух рідких та газоподібних середовищ, їх взаємодію між собою та з твердими тілами. Як і інші області механіки, вона підрозділяється на статику, кінематику та динаміку. Частина гідродинаміки, яка вивчає умови рівноваги рідин та газів називається ***гідростатикою***. ***Кінематика*** рідин та газів вивчає їх рух у часі не цікавлячись причинами, які призводять до цього руху. Предметом вивчення ***гідродинаміки*** є рух одних частин рідин або газів відносно інших у зв'язку з їх взаємодією. Основні фізичні властивості рідин та газів – безперервність (суцільність) та рухливість (текучість) – дозволяють використовувати у гідродинаміці математичні методи, засновані на використовуванні неперервних функцій, зокрема детально розроблену теорію диференціальних та інтегральних рівнянь.

Найпростіша модель рідини – це ***ідеальна рідина***, у якій відсутнє внутрішнє тертя та теплопровідність. При русі ідеальної рідини дотичних сил тертя немає і взаємодія між об'ємами, які стикаються, зводиться до дії нормальних поверхневих сил, тобто недіагональні компоненти тензора напружень p_{ik} (33.10) у будь-який точці ідеальної рідини повинні дорівнювати нулю:

$$p_{ik} = 0, \quad i \neq k\,. \tag{36.1}$$

Така властивість тензора напружень може бути інваріантною відносно поворотів координатної системи тільки тоді, коли усі діагональні компоненти p_{ik} рівні між собою. Це має місце, якщо тензор перетворюється на скаляр, оскільки скаляр ніяк не змінюється при поворотах координатної системи. Тиск, перпендикулярний будь-якому елементу поверхні, яким би чином вона б не була орієнтована у просторі, залишається одним і тим же. Коли рідина покоїться, це має місце завжди (закон Паскаля). Для ідеальної рідини ця властивість зберігається і при русі, тобто,

$$p_{ik} = -p\delta_{ik}\,, \tag{36.2}$$

де p – тиск у рідині. Система рівнянь (35.18) у випадку ідеальної рідини спрощується:

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} grad\, p\,, \tag{36.3а}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \rho \vec{\upsilon} = 0\,, \tag{36.3б}$$

де об'ємна сила $\vec{f}$ розглядається як зовнішня, наперед задана. Перше з цих рівнянь, яке називається ***рівнянням Ейлера***, є одним з основних рівнянь гідродинаміки. Оскільки у рівняннях (36.3) п'ять невідомих функцій ρ, $\vec{\upsilon}$, p, цю систему треба доповнити ще одним рівнянням. Врахуємо, що завдяки молекулярним рухам теплота передається вздовж середовища досить повільно. Тому окремі елементи середовища, які рухаються з більшою швидкістю, не встигають обмінятися теплотою, і основний обмін енергією між такими елементами відбувається шляхом виконання роботи стискування або розширення. Відмітимо, що у реальному середовищі існують також інші канали теплопередачі: внутрішнє тертя (в'язкість), хімічні реакції і т.д. Якщо цього не відбувається, течію можна вважати ізоентропійною (адіабатичною).

Якщо ентропія однакова вздовж усього середовища,

$$s = const, \qquad (36.4)$$

рівняння адіабатичного процесу задає тиск як функцію густини

$$p = p(\rho). \qquad (36.5)$$

У більш загальному випадку треба записувати умови постійності ентропії елемента маси dm:

$$\frac{d}{dt}(sdm) = 0, \qquad (36.6)$$

де s – ентропія одиниці маси. Оскільки для елемента рідкого середовища величина dm – стала, з (36.6) випливає

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{\upsilon}\vec{\nabla})s = 0. \qquad (36.7)$$

Рівняння (36.3а), (36.3б) та (36.5) або (36.7) представляють повну систему рівнянь, які описують рух ідеальної стисливої рідини.

До рівнянь руху ідеальної рідини треба додати крайові умови, а якщо течія нестаціонарна, ще й початкові умови у деякий момент часу t_0. Крайові умови повинні виконуватися на поверхнях, що обмежують рідину. Для ідеальної рідини це просто умови, що рідина не може проникнути крізь тверді поверхні, з якими вона межує. Це означає, що на нерухомих стінках повинна бути нульовою нормальна до поверхні стінки компонента швидкості

$$\upsilon_n = 0. \qquad (36.8)$$

Якщо поверхня рухається, компонента υ_n повинна дорівнювати відповідній компоненті швидкості $\vec{V}^{\Sigma}$ поверхні Σ:

$$\upsilon_n = V_n^{\Sigma}. \qquad (36.9)$$

На межі між двома рідинами, які не змішуються, повинні виконуватися умови рівності тисків та рівності нормальних до поверхні розділу компонент швидкостей обох рідин:

$$p^{(1)} = p^{(2)}, \quad \upsilon_n^{(1)} = \upsilon_n^{(2)} = V_n^{\Sigma}. \qquad (36.10)$$

При цьому кожна з вказаних компонент швидкості повинна дорівнювати швидкості V_n^{Σ} нормального переміщення самої поверхні розділу Σ.

Для адіабатичних рухів ідеальної рідини рівняння Ейлера (36.3а) можна представити у декілька іншій формі. Для цього скористаємось добре відомим термодинамічним співвідношенням

$$d\omega = T\,ds + V_0\,dp\,, \tag{36.11}$$

де ω – теплова функція (ентальпія) одиниці маси ідеальної рідини, T – температура, $V_0 = \dfrac{1}{\rho}$ – питомий об'єм (об'єм одиниці маси). Оскільки $s = const$,

$$d\omega = \frac{1}{\rho}dp\,, \tag{36.12}$$

тому

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}\,\omega, \tag{36.13}$$

і рівняння (36.3а) приймає вигляд

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon} = \vec{f} - grad\,\omega. \tag{36.14}$$

Якщо скористатися формулою

$$\frac{1}{2}grad\,\upsilon^2 = \left[\vec{\upsilon}, rot\vec{\upsilon}\right] + \left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}\,, \tag{36.15}$$

рівняння (36.14) може бути записане у вигляді

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t} - \left[\vec{\upsilon}, rot\,\vec{\upsilon}\right] = \vec{f} - grad\left(\omega + \frac{\upsilon^2}{2}\right). \tag{36.16}$$

Його називають ***рівнянням Ейлера у формі Громеки***. Крайові та початкові умови для цих рівнянь такі ж самі, як і для рівняння Ейлера.

Коли векторний добуток у лівій частині (36.16) перетворюється на нуль, система цих рівнянь значно спрощується. Це відбувається у трьох випадках:

– швидкість потоку $\vec{\upsilon}$ дорівнює нулю

$$\vec{\upsilon} = 0\,; \tag{36.17}$$

– вихор швидкості дорівнює нулю (безвихровий, потенціальний потік)

$$rot\,\vec{\upsilon} = 0\,; \tag{36.18}$$

– вектори швидкості $\vec{\upsilon}$ і вихору швидкості $rot\,\vec{\upsilon}$ колінеарні (гвинтовий рух ідеальної рідини)

$$\vec{\upsilon} \parallel rot\,\vec{\upsilon}\,. \tag{36.19}$$

Введемо поняття ***лінії течії*** як кривої, дотична до якої у будь-якій точці має напрям швидкості $\vec{\upsilon}$, тобто вектори елемента лінії течії $d\vec{r}$ та $\vec{\upsilon}$ паралельні. Умову паралельності цих векторів можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{\upsilon_x} = \frac{dy}{\upsilon_y} = \frac{dz}{\upsilon_z}\,. \tag{36.20}$$

Аналогічно, ***вихрова лінія*** у рідині вводиться таким чином, що дотична до неї паралельна вихору швидкості $rot\,\vec{\upsilon}$, тобто

$$\frac{dx}{rot_x\vec{\upsilon}} = \frac{dy}{rot_y\vec{\upsilon}} = \frac{dz}{rot_z\vec{\upsilon}}\,. \tag{36.21}$$

Для течії (36.19) лінії течії та вихрові лінії співпадають. Подібні лінії можуть утворюватись при обтіканні крила літака.

Застосуємо до обох частин рівняння (36.14) операцію rot. Коли об’ємна сила $\vec{f}$ потенціальна

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}\phi, \tag{36.22}$$

де ϕ – потенціальна енергія одиниці маси, рівняння (36.14) прийме вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial t} rot\,\vec{\upsilon} - rot\left[\vec{\upsilon}, rot\,\vec{\upsilon}\right] = 0\,. \tag{36.23}$$

Цікаво, що у цьому рівнянні присутня тільки швидкість $\vec{\upsilon}$.

37. Закони збереження ідеальної рідини

З’ясуємо, яку форму мають закони збереження ідеальної рідини. Щоб спростити результати, припустимо, що об’ємні сили $\vec{f}$, які діють на ідеальну рідину, потенціальні (36.22).

Почнемо з ***закону збереження енергії***. Помножимо рівняння (36.3а) скалярно на $\vec{\upsilon}$. У випадку стаціонарної течії, тобто коли $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(\vec{r})$, з лівого боку у цьому рівнянні буде субстанційна похідна (33.15): $\vec{\upsilon}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\upsilon^2}{dt}$. Якщо сила $\vec{f}$ не залежить явно від часу, з правого боку теж є субстанційна похідна:

$$\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\phi = \frac{d\phi}{dt}.$$

Внесок $\frac{1}{\rho}\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)p$ можна представити у вигляді різниці:

$$\frac{1}{\rho}\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)p = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad (37.1)$$

де перший доданок з правого боку з урахуванням (36.12) дає $\frac{d\omega}{dt}$. Як результат, це рівняння може бути записане у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{2} + \omega + \phi\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}. \qquad (37.2)$$

Розкриємо субстанційну похідну відповідно з (33.15) та врахуємо рівняння неперервності (36.3б), помножене на суму $\frac{\upsilon^2}{2} + \omega + \phi$. У результаті рівняння (37.2) прийме форму

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{\upsilon^2}{2} + \omega + \phi\right) + div\rho\vec{\upsilon}\left(\frac{\upsilon^2}{2} + \omega + \phi\right) = \frac{\partial p}{\partial t}. \qquad (37.3)$$

Це рівняння можна записати у вигляді, аналогічному закону збереження маси (34.4), (34.5)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{\upsilon^2}{2} + u + \phi\right) + div\rho\vec{\upsilon}\left(\frac{\upsilon^2}{2} + \omega + \phi\right) = 0, \qquad (37.4)$$

якщо замість теплової функції ω (36.11) ввести термодинамічну енергію u та питомий об’єм $V_0 = \frac{1}{\rho}$:

$$\omega = u + V_0 p = u + \frac{p}{\rho}. \qquad (37.5)$$

З (37.4) випливає, що густина енергії ідеальної рідини складається з трьох внесків: кінетичної енергії $\rho\frac{\upsilon^2}{2}$, внутрішньої (термодинамічної) енергії ρu та потенціальної енергії у зовнішньому полі $\rho\phi$. До густини потоку енергії входить не u, а теплова функція ω. Це позначає, що енергія не тільки переноситься з потоком речовини, але також передається від одного об’єму до другого шляхом виконання роботи при стискуванні або розріджуванні. Повний баланс енергії складається з механічних та термодинамічних внесків.

Закон збереження енергії ідеальної рідини у інтегральній формі можна записати виходячи з (37.4) аналогічно закону збереження маси (34.2):

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(\frac{\upsilon^2}{2}+u+\phi)\right)dV=-\oint_{\Sigma_V}\rho(\vec{\upsilon}\,\vec{n})\left(\frac{\upsilon^2}{2}+\omega+\phi\right)d\sigma. \qquad (37.6)$$

Закон збереження імпульсу в ідеальній рідині виконується, звичайно, коли зовнішня сила $\vec{f}$ дорівнює нулю. Перепишемо рівняння (36.3а) у тензорній формі

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t}+\upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\delta_{ik}p=0, \qquad (37.7)$$

де, згідно з (19.6), враховано, що $\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_k}\delta_{ik}p$. Рівняння неперервності (36.3б) також запишемо у тензорній формі та помножимо на компоненту швидкості υ_i:

$$\upsilon_i\frac{\partial\rho}{\partial t}+\upsilon_i\frac{\partial}{\partial x_k}\rho\upsilon_k=0. \qquad (37.8)$$

Склавши ці два рівняння, знайдемо

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\upsilon_i+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\upsilon_i\upsilon_k+\delta_{ik}p\right)=0. \qquad (37.9)$$

Це і є ***закон збереження імпульсу ідеальної рідини у диференціальній формі****,* де густина імпульсу (вектор) дорівнює $\rho\vec{\upsilon}$, а густина потоку імпульсу (тензор другого рангу) дорівнює

$$\Pi_{ik}=\rho\upsilon_i\upsilon_k+\delta_{ik}p. \qquad (37.10)$$

Істотно, що імпульс ідеальної рідини переноситься не тільки потоком речовини, чому відповідає внесок $\rho\upsilon_i\upsilon_k$, але й силами напружень, тобто тиском p. ***Закон збереження імпульсу ідеальної рідини у інтегральній формі***[10] запишемо з

---

[10] Відмітимо, що у законах збереження (34.2), (37.6) зміна скалярної величини (тензора нульового рангу), що характеризує середовище у об'ємі V, за одиницю часу дорівнює відповідному потоку векторної величини (тензора першого рангу) крізь поверхню Σ_V, що обмежує цей об'єм. У законі збереження (37.11) зміна векторної величини (тензора першого рангу) у об'ємі V за одиницю часу дорівнює потоку тензорної величини (тензора другого рангу) крізь поверхню Σ_V. Подібний зв'язок можна встановити також для тензорних полів наступних рангів.

врахуванням (37.9), (37.10):

$$\int_V \frac{\partial \rho \upsilon_i}{\partial t} dV = -\oint_{\Sigma_V} \Pi_{ik} n_k d\sigma . \qquad (37.11)$$

Для ідеальної рідини існує ще один чисто гідродинамічний закон збереження. Для стаціонарної адіабатичної течії ідеальної рідини у потенціальному полі зовнішніх сил (36.22) рівняння руху (36.14) мають вигляд

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\upsilon^2}{2} + \omega + \phi\right) = [\vec{\upsilon}, rot\vec{\upsilon}]. \qquad (37.12)$$

Оскільки скалярний добуток цього вектора на вектор швидкості $\vec{\upsilon}$, або вектор $rot\vec{\upsilon}$ дорівнює нулю, приходимо до висновку, що величина

$$\frac{\upsilon^2}{2} + \omega + \phi = const \qquad (37.13)$$

зберігається вздовж лінії течії (36.18) та вздовж вихрових ліній (36.19). Треба підкреслити, що стала у правій частині (37.13) залишається сталою тільки вздовж лінії течії (або вихрової лінії). При переході до іншої лінії течії або іншої вихрової лінії ця стала змінюється. Співвідношення (37.13) називається ***інтегралом Коші-Бернуллі***.

Формулу (37.13) можна використати для знаходження швидкості витікання води з посудини під впливом сили ваги. Оскільки вода – нестислива рідина,

$$\omega = \frac{p}{\rho}, \quad \phi = gz, \qquad (37.14)$$

де z – висота, на якій тиск дорівнює p, відповідно до формули (37.13)

$$\frac{\upsilon_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{\upsilon_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2, \qquad (37.15)$$

де індекс 1 відноситься до початку лінії течії, а індекс 2 – до кінця цієї ж лінії. Нехай лінія течії починається на нерухомій поверхні води ($\vec{\upsilon}_1 = 0, p_1 = p_{атм}$), а кінець лінії течії знаходиться у отворі, з якого витікає вода ($p_2 = p_{атм}$). Тоді з (37.15) випливає

$$\frac{\upsilon_2^2}{2} + gz_2 = gz_1,$$

або

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gh}\,, \qquad (37.16)$$

де $h = z_1 - z_2$. Цей результат є ***формулою Торрічеллі*** для витікання води з посудини.

Розглянемо рух ідеальної рідини, коли у будь-який момент часу виконується умова

$$rot\,\vec{\upsilon} = 0. \qquad (37.17)$$

Такий рух називається ***потенціальним***, оскільки дає можливість виразити швидкість $\vec{\upsilon}$ через скалярну функцію (потенціал φ):

$$\vec{\upsilon} = \vec{\nabla}\varphi. \qquad (37.18)$$

Для нестаціонарної потенціальної течії з (36.14) маємо

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2}{2} + \omega + \phi = f(t), \qquad (37.19)$$

де *f(t)* – довільна функція часу. Для нестисливої рідини, де

$$\rho = const, \quad \omega = \frac{p}{\rho}, \quad div\,\vec{\upsilon} = 0, \qquad (37.20)$$

цю функцію можна вважати константою або просто покласти рівною нулю, тобто поле тисків p знаходиться з точністю до довільної величини $f(t)$, яка не залежить від координат. Це випливає з того, що у рівняння руху (36.3а) входить не сам тиск, а його градієнт. Заміна φ на $\varphi_1 + \int f(t)\,dt$ ніяк не відбивається на швидкості $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\nabla}\varphi = \vec{\nabla}\varphi_1$$

та умовах нестисливості (37.20).

Для стаціонарного руху рівняння (37.19) має вигляд

$$\frac{\upsilon_1^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi = const \qquad (37.21)$$

і відоме як ***рівняння Бернуллі***. На відміну від інтеграла Коші-Бернуллі (37.13) константа у (37.21) являється сталою величиною вздовж усього об’єму рідини.

Розглянемо інтеграл вздовж замкненого контуру L

$$\Gamma = \oint_L \vec{\upsilon}\,d\vec{r}\,, \qquad (37.22)$$

який називається ***циркуляцією швидкості***. Нехай цей контур у рідині рухається разом з рідкими частинками. У момент часу t інтеграл (37.22) дорівнює

$$\Gamma(t)=\oint_L\left(\upsilon_x(\vec{r},t)dx+\upsilon_y(\vec{r},t)dy+\upsilon_z(\vec{r},t)dz\right). \qquad (37.23)$$

У момент часу $t'=t+dt$ частинки рідини займуть нові положення $\vec{r}\,'=\vec{r}+\vec{\upsilon}\,dt$, а їхні швидкості будуть $\vec{\upsilon}(\vec{r}\,',t')$, тому

$$\Gamma(t')=\oint_L\left(\upsilon_x(\vec{r}\,',t')dx+\upsilon_y(\vec{r}\,',t')dy+\upsilon_z(\vec{r}\,',t')dz\right)\approx$$

$$\approx\Gamma(t)+dt\oint_L\left(\upsilon_x d\,\upsilon_x+\upsilon_y d\,\upsilon_y+\upsilon_z d\,\upsilon_z\right)+dt\oint_L\left(\frac{\partial\vec{\upsilon}}{dt}+\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}\right)d\vec{r}. \qquad (37.24)$$

Звідси випливає, що

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint_L\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r}+\oint_L d\,\frac{\upsilon^2}{2}. \qquad (37.25)$$

Останній інтеграл дорівнює нулю, як інтеграл вздовж замкненого контуру від повного диференціала. З урахуванням (36.14), (36.22) маємо

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint_L\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r}=0, \qquad (37.26)$$

тобто

$$\oint_L\vec{\upsilon}\,d\vec{r}=\int_{\Sigma_L}\vec{n}\,rot\,\vec{\upsilon}\,d\sigma=const, \qquad (37.27)$$

де Σ_L – поверхня, натягнена на контур L. Співвідношення (37.27) називається ***теоремою Томсона***: для ідеальної рідини циркуляція швидкості вздовж замкненого контуру, який рухається разом з рідиною, не змінюється. З теореми Томсона випливає, що у адіабатичній ідеальній рідині, яка знаходиться у полі потенціальних зовнішніх сил і у початковий момент покоїлася ($\vec{\upsilon}=0$), тобто у цей момент $rot\,\vec{\upsilon}=0$, не може виникнути вихрового руху – рух такої рідини буде потенціальним.

Задача 37.1. Знайти форму порожнистої вихрової лійки, що утворюється у ванні, коли з неї витікає вода.

Задача 37.2. Знайти оптимальну форму посудини для водяного годинника.

38. Обтікання кулі нестисливою ідеальною рідиною

Як приклад розв'язання рівнянь ідеальної рідини розглянемо рівномірний рух кулі радіуса R_0 зі швидкістю $\vec{\upsilon}_0$ у необмеженій нестисливій ідеальній рідині. На великих відстанях від кулі частинки рідини практично нерухомі, тому ця задача еквівалентна задачі про обтікання кулі стаціонарним потоком рідини, швидкість якого на нескінченності (на великих відстанях від кулі) дорівнює швидкості кулі

$$\vec{\upsilon}_\infty = \vec{\upsilon}_0 . \tag{38.1}$$

Рівняння руху для нестисливої рідини у відсутності зовнішніх сил мають вигляд (36.16), (37.20):

$$\left[\vec{\upsilon}, rot\vec{\upsilon}\right] - \vec{\nabla}\frac{\upsilon^2}{2} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = 0, \tag{38.2}$$

$$div\,\vec{\upsilon} = 0 . \tag{38.3}$$

Крайові умови на поверхні кулі:

$$\upsilon_n\left(R_0\right) = 0, \tag{38.4}$$

(частинки рідини не можуть проникнути всередину кулі). Крайові умови на нескінченності:

$$\vec{\upsilon}\left(\vec{r}\right) \to \vec{\upsilon}_\infty, \quad \text{коли } \vec{r} \to \infty . \tag{38.5}$$

У випадку потенціального обтікання (37.17), (37.18) рівняння неперервності (38.3) є просто рівнянням Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \tag{38.6}$$

а рівняння (38.2) приводиться до рівняння Бернуллі (37.21)

$$\rho\frac{\upsilon^2}{2} + p = \rho\frac{\upsilon^2\left(R_0\right)}{2} + p_0\left(\vartheta\right), \tag{38.7}$$

де $p_0\left(\vartheta\right)$ – тиск на поверхні нерухомої кулі.

Виберемо сферичну систему координат з початком у центрі сфери. Вісь z, від якої відлічують кут ϑ, направимо вздовж швидкості $\vec{\upsilon}_0$. Оскільки задача має осьову симетрію, потенціал φ повинен залежати тільки від змінних r і ϑ. З (38.4) та (38.5) випливають умови на потенціал φ:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R_0} = 0, \tag{38.8}$$

$$\varphi\left(r,\vartheta\right) \to \upsilon_0 r\cos\vartheta, \quad \text{коли} \quad \vec{r} \to \infty . \tag{38.9}$$

Як відомо з математичної фізики, загальний розв'язок рівняння Лапласа у сферичних координатах має вигляд:

$$\varphi(r,\vartheta,\alpha)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(a_{lm}r^{l}+\frac{b_{lm}}{r^{l+1}}\right)P_{l}^{m}(\cos\vartheta)e^{im\alpha}, \qquad (38.10)$$

де a_{lm}, b_{lm} – довільні константи, $P_l^m(\cos\vartheta)$ – приєднані поліноми Лежандра. З (38.9) виходить, що зі всієї суми (38.10) для нашої задачі треба залишити тільки внесок з $l=1$:

$$\varphi(r,\vartheta)=\left(a_1 r+\frac{b_1}{r^2}\right)\cos\vartheta. \qquad (38.11)$$

Умова (38.5) дає

$$a_1=\upsilon_0, \qquad (38.12)$$

а з умови (38.8) випливає:

$$b_1=\frac{\upsilon_0 R_0^3}{2}. \qquad (38.13)$$

Звідси проекції швидкості у будь-якій точці рідини

$$\upsilon_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\upsilon_0\left[1-\left(\frac{R_0}{r}\right)^3\right]\cos\vartheta,$$
$$\upsilon_\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}=-\upsilon_0\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{r}\right)^3\right]\sin\vartheta. \qquad (38.14)$$

На поверхні кулі величина швидкості дорівнює

$$\upsilon=|\upsilon_\vartheta|=\frac{3}{2}\upsilon_0\sin\vartheta. \qquad (38.15)$$

Точки кулі, у яких швидкість дорівнює нулю (***критичні точки поверхні***), будуть при $\vartheta=0$ та $\vartheta=\pi$. Максимальне значення швидкості на поверхні – при $\vartheta=\pi/2$. З (38.7) та (38.15) маємо розподіл тиску на поверхні кулі:

$$p_0(\vartheta)=p_0-\frac{9}{8}\rho\upsilon_0^2\sin^2\vartheta, \qquad (38.16)$$

де p_0 – величина тиску у критичній точці. Тиск у будь-якій точці рідини визначається з (38.7) з урахуванням (38.14), (38.15) та (38.16). З формули (38.16) видно, що розподіл тиску на поверхні кулі симетричний відносно площини $\vartheta=\pi/2$. Звідси випливає, що повна сила тиску ідеальної рідини на поверхню кулі, яка рухається зі сталою швидкістю, дорівнює нулю, тобто куля, швидкість якої не змінюється, не зазнає опору з боку ідеальної рідини (***парадокс Ейлера-Даламбера***).

Цей результат, який вкрай суперечить спостереженням, пояснюється тим, що вище розглядалося безвихрове обтікання кулі, якого в дійсності не буває: з поверхні кулі відриваються вихори, які змінюють як характер течії, так і розподіл тиску на поверхні кулі.

39. Рух в'язкої рідини. Рівняння Нав'є-Стокса

У реальних рідинах та газах між частинками (атомами або молекулами) існують взаємодії, які зумовлюють опір цих середовищ зсувним зусиллям. З макроскопічної точки зору ці взаємодії проявляються у явищах переносу, пов'язаних з ***в'язкістю***, які визначають дисипацію енергії за рахунок тертя при деформаціях середовища. В'язкість при деформаціях зсуву називають ***зсувною***, при деформаціях всестороннього стиснення – ***об'ємною***.

Вперше на наявність внутрішнього тертя між частинками рідини вказав Ньютон у своїй книзі „Математичні основи натуральної філософії”. Він висунув гіпотезу, що сила внутрішнього тертя між частинками рідини пропорційна відносній швидкості цих частинок. Пізніше ця гіпотеза була представлена у вигляді формули, де сила внутрішнього тертя, віднесена до одиниці площини (напруження тертя τ), у якій лежить вісь x, пропорційна градієнту швидкості $\frac{d\upsilon_x}{dy}$ вздовж напряму, перпендикулярному цій площині:

$$\tau = \eta \frac{d\upsilon_x}{dy}, \qquad (39.1)$$

де υ_x – компонента швидкості рідини вздовж вісі x, y – координата, перпендикулярна поверхні. Коефіцієнт η називається ***коефіцієнтом внутрішнього тертя*** або ***в'язкістю*** рідини.

З точки зору закону збереження імпульсу в'язкість рідини проявляється порівняно з ідеальною рідиною у наявності додатного незворотного переносу імпульсу з місць з більшою до місць з меншою швидкістю, тобто тензор густини потоку імпульсу у в'язкій рідині повинен мати вигляд

$$\Pi_{ik} = \rho \upsilon_i \upsilon_k + p\delta_{ik} - \sigma'_{ik} \ , \tag{39.2}$$

де σ'_{ik} – ***тензор в'язких напружень***, який визначає частину потоку імпульсу, не зв'язану безпосередньо з переносом імпульсу разом з масою рідини. Наявність цього тензору проявляється тільки тоді, коли різні ділянки рідини рухаються з різною швидкістю, тобто коли має місце рух частин рідини одна відносно одної. Внаслідок цього тензор σ'_{ik} повинен залежати від похідних від швидкості за координатами. Для не дуже великих градієнтів швидкостей ця залежність повинна включати тільки похідні першого порядку, причому самі похідні повинні входити лінійно (***ньютонові рідини***). Усі ці умови звичайно виконуються при дозвукових течіях рідин або газів. Тензор σ'_{ik} повинен бути нульовим не тільки тоді, коли швидкість $\vec{\upsilon} = const$, але й тоді, коли рідина як ціле рівномірно обертається з кутовою швидкістю $\vec{\Omega} = const$, оскільки при такому русі внутрішнього тертя у рідині не існує. Як вказувалось у п.33, тензор механічних напружень суцільного середовища p_{ik} повинен бути симетричним (33.25). Для в'язкої рідини це твердження відноситься і до тензору σ'_{ik}:

$$\sigma'_{ik} = \sigma'_{ki}, \tag{39.3}$$

оскільки для такого середовища тензор механічних напружень має вигляд

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}. \tag{39.4}$$

З компонент $\dfrac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}$ можна скласти тільки дві симетричні комбінації: $\delta_{ik}\dfrac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l}$ та $\dfrac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}$. Залежність σ'_{ik} від цих комбінацій зручно представити у вигляді, аналогічному (33.36),

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l}\right) + \xi\delta_{ik}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l}, \tag{39.5}$$

де η – коефіцієнт зсувної в'язкості, ξ – коефіцієнт об'ємної в'язкості. Оскільки в'язка рідина ізотропна, ці коефіцієнти можуть бути лише скалярами.

Рівняння руху в'язкої рідини отримаємо підстановкою

(39.4) у (35.18а):

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t}+\upsilon_k\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}\right)=\rho f_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}+\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\xi\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l}\right). \quad (39.6)$$

Це найзагальніша форма рівнянь руху в'язкої рідини. Взагалі кажучи, коефіцієнти η, ξ можуть бути функціями тиску p та температури T. Коли останні величини залежать від координат, η і ξ також залежать від координат, і їх не можна просто виносити за знак похідної.

Коли коефіцієнти η та ξ постійні, рівняння (39.6) у векторній формі має вигляд:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}\right)=\rho\vec{f}-grad\, p+\eta\Delta\vec{\upsilon}+\left(\xi+\frac{\eta}{3}\right)grad\, div\,\vec{\upsilon}\,. \quad (39.7)$$

Воно називається ***рівнянням Нав'є-Стокса***. Разом з рівнянням неперервності (35.18б) та рівнянням енергії (35.18в) з урахуванням (39.4), (39.5) повна система рівнянь руху в'язкої рідини або газу має вигляд:

$$\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\rho\vec{f}-\vec{\nabla}p+\eta\Delta\vec{\upsilon}+\left(\xi+\frac{\eta}{3}\right)\vec{\nabla}\,div\,\vec{\upsilon}, \quad (39.8а)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+div\,\vec{\upsilon}=0, \quad (39.8б)$$

$$\rho\frac{du}{dt}=div\left(\gamma\vec{\nabla}T\right)-p\,div\,\vec{\upsilon}+\sigma'_{ik}\upsilon_{ik}, \quad (39.8в)$$

де σ'_{ik} та υ_{ik} визначені формулами (39.5) та (35.10). До цих рівнянь треба додати залежність u, η, ξ, γ від термодинамічних параметрів та рівняння стану речовини.

Для нестисливої в'язкої речовини ($\rho=const$) ця система рівнянь спрощується

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}=\vec{f}-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p+\nu\,\Delta\vec{\upsilon}\,, \quad (39.9а)$$

$$div\,\vec{\upsilon}=0, \quad (39.9б)$$

де $\nu=\dfrac{\eta}{\rho}$ – кінематична в'язкість.

Сили міжмолекулярної взаємодії, які існують у будь-якій речовині, призводять до того, що прилеглий до твердої поверхні шар в'язкої рідини повністю утримується нею (ніби прилипає до поверхні). Це означає, що швидкість в'язкої рідини на нерухомій поверхні Σ повинна дорівнювати нулю

$$\vec{\upsilon}\big|_{\Sigma} = 0, \qquad (39.10)$$

а на рухомій – швидкості руху $\vec{V}^{\Sigma}$ твердої поверхні Σ:

$$\vec{\upsilon}\big|_{\Sigma} = \vec{V}^{\Sigma}. \qquad (39.11)$$

На межі поділу двох в'язких рідин, які не змішуються, швидкості обох рідин повинні бути однаковими

$$\vec{\upsilon}^{(1)} = \vec{\upsilon}^{(2)}, \qquad (39.12)$$

а сили, з якими ці рідини діють одна на одну, повинні бути однаковими за величиною та протилежно спрямованими. Оскільки, згідно з (33.9) та третім законом Ньютона, сила, яка діє на одиницю елемента поверхні $d\vec{\sigma}$, дорівнює

$$dF_i = -p_{ik} d\sigma_k = -p_{ik} n_k \, d\sigma, \qquad (39.13)$$

де n_i – одиничний вектор нормалі до поверхні, на межі двох рідин

$$n_i p_{ik}^{(1)} = n_i p_{ik}^{(2)}. \qquad (39.14)$$

На вільній поверхні рідини повинна виконуватись умова

$$p_{ik} n_k = -p n_i + \sigma'_{ik} n_k = 0. \qquad (39.15)$$

Задача 39.1. Записати рівняння Нав'є-Стокса у декартових, циліндричних та сферичних координатах.

40. Течія Пуазейля

Наявність конвективної похідної $(\vec{\upsilon}\vec{\nabla})\vec{\upsilon}$ істотно ускладнює структуру рівняння Нав'є-Стокса (39.9а). Тому точні розв'язки рівняння руху в'язкої рідини вдається знайти тільки в декількох окремих випадках. Одним з них є стаціонарна течія нестисливої в'язкої рідини вздовж прямої труби круглого перерізу (***течія Пуазейля***).

Спрямуємо вісь z вздовж труби і будемо вважати, що об'ємні сили $\vec{f}$ відсутні. Розглянемо стаціонарний рух рідини вздовж труби радіуса R_0, коли швидкість має тільки одну компоненту υ_z. У цьому випадку рівняння (39.9) мають вигляд:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\,\Delta\upsilon_z, \tag{40.1}$$

$$\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = 0. \tag{40.2}$$

Крайова умова задачі

$$\upsilon_z(R_0) = 0. \tag{40.3}$$

Підстановка (40.2) у (40.1) спрощує рівняння для z-складової швидкості:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \nu\,\Delta\upsilon_z. \tag{40.4}$$

З перших двох рівнянь (40.1) випливає, що тиск p залежить тільки від z, а з рівняння (40.2) виходить, що

$$\upsilon_z = \upsilon_z(x, y). \tag{40.5}$$

Таким чином, стаціонарний рух в'язкої рідини вздовж труби описується рівнянням

$$\frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{40.6}$$

у декартових змінних x, y, z або рівнянням

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \upsilon_z}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{40.7}$$

у циліндричних змінних R, φ, z. З міркувань симетрії випливає, що υ_z не може залежати від кутової змінної φ. Тому рівняння (40.7) має вигляд:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\upsilon_z}{dR}\right) = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{40.8}$$

Оскільки у цьому рівнянні змінні відокремлені (ліва частина залежить від R, а права – від z), кожна з частин може бути тільки константою:

$$\frac{dp}{dz} = C_1, \tag{40.9}$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\upsilon_z}{dR}\right) = \frac{C_1}{\eta}. \tag{40.10}$$

Після інтегрування (40.9) та (40.10) маємо

$$p = C_1 z + p_0, \qquad (40.11)$$

$$\upsilon_z = \frac{C_1}{4\eta} R^2 + C_2 \ln R + C_3, \qquad (40.12)$$

де p_0, C_2, C_3 – константи інтегрування. На вісі труби швидкість рідини повинна бути скінченою, тому $C_2 = 0$. Константа C_3 знаходиться з крайової умови (40.3):

$$C_3 = -\frac{C_1}{4\eta} R_0^2. \qquad (40.13)$$

Константа p_0 дорівнює тиску рідини на початку труби (коли $z = 0$), константа C_1 визначається тиском p_1 рідини наприкінці труби довжини l:

$$p_1 = C_1 l + p_0, \qquad (40.14)$$

тому

$$C_1 = \frac{p_1 - p_0}{l} = -\frac{\Delta p}{l}, \qquad (40.15)$$

тобто ця стала характеризує перепад тиску на одиницю довжини труби.

Таким чином, розв’язок задачі має вигляд

$$\vec{\upsilon} = (0, 0, \upsilon_z), \quad \upsilon_z = \frac{\Delta p}{4l\eta}\left(R_0^2 - R^2\right), \quad p = -\frac{\Delta p}{l} z + p_0, \qquad (40.16)$$

де Δp – різниця тиску на кінцях труби довжини l.

Маса рідини, яка протікає у одиницю часу через поперечний переріз труби Σ (повна витрата рідини Q), визначається ***формулою Пуазейля***:

$$Q = \int_{\Sigma} \rho \upsilon_z d\sigma = \frac{\pi \Delta p}{8 \nu l} R^4. \qquad (40.17)$$

Ця формула використовується для експериментального визначення в’язкості рідини, оскільки усі інші величини у (40.17) можна виміряти незалежно від течії.

Задача 40.1. Знайти розподіл швидкості та повну витрату нестисливої в’язкої рідини, яка стаціонарно тече вздовж простору між двома коаксіальними прямими трубами круглого перерізу.

41. Обтікання кулі в'язкою рідиною

Розглянемо тепер рівномірний рух кулі радіуса R_0 зі швидкістю $\vec{\upsilon}_0$ у в'язкій нестисливій рідині. Так само, як і у випадку ідеальної рідини, будемо вважати, що стаціонарний потік в'язкої рідини обтікає нерухому кулю. Рівняння руху (39.9) у відсутності об'ємної сили $\vec{f}$ мають вигляд

$$\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\,\Delta\vec{\upsilon}\,, \tag{41.1}$$

$$div\,\vec{\upsilon} = 0\,. \tag{41.2}$$

Перш ніж знаходити розв'язок цих рівнянь, запишемо (41.1) у безрозмірній формі. Для цього помножимо рівняння (41.1) на $\dfrac{R_0}{\upsilon_0^2}$ та введемо безрозмірні величини:

$$\vec{u} = \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon_0}, \quad \vec{r}\,' = \frac{\vec{r}}{R_0}, \quad P = \frac{p}{\rho\upsilon_0{}^2},$$
$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial\vec{r}} = \frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial\vec{r}\,'} \equiv \frac{\vec{\nabla}'}{R_0}, \quad \Delta' = \vec{\nabla}'\vec{\nabla}'\,. \tag{41.3}$$

Тоді рівняння (41.1), (41.2) приймуть вигляд

$$\left(\vec{u}\,\vec{\nabla}'\right)\vec{u} = -\vec{\nabla}'P + \frac{\nu}{\upsilon_0 R_0}\Delta'\vec{u}, \qquad \vec{\nabla}'\vec{u} = 0\,. \tag{41.4}$$

Безрозмірна величина

$$\frac{\upsilon_0 R_0}{\nu} = \mathrm{Re} \tag{41.5}$$

називається ***числом Рейнольдса***. З (41.4) випливає, що $\vec{u}$ та p залежать від трьох змінних r',ϑ,α та від параметра Re.

Рівняння (41.1) нелінійне і його точний розв'язок невідомий. Для малих чисел Рейнольдса (коли велика в'язкість рідини) можна знайти розв'язок цього рівняння у вигляді ряду за степенями Re, обмежуючись першим внеском:

$$\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon_0} = \vec{u}_0 + \mathrm{Re}\,\vec{u}_1 + \ldots\ . \tag{41.6}$$

Мале значення числа Re позначає, що внесок $\nu\Delta\vec{\upsilon}$ у (41.1) великий порівняно з конвективною похідною $\left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}$, і останньою можна знехтувати, тобто це рівняння стає лінійним:

$$\vec{\nabla} p = \eta \Delta \vec{\upsilon}. \tag{41.7}$$

Якщо до цього рівняння застосувати операцію div, тоді з урахуванням рівняння (41.2) маємо

$$\Delta p = 0. \tag{41.8}$$

Так само, як і у випадку ідеальної рідини, використовуємо сферичну систему координат і приходимо до висновку, що усі величини залежать тільки від r та ϑ.

Розв'язок (41.8), який задовольняє крайовим умовам, має вигляд

$$p = \frac{C_1}{r^2}\cos\vartheta + p_\infty, \tag{41.9}$$

де C_1, p_∞ – константи.

З міркувань симетрії поле швидкостей має дві ненульові компоненти υ_r та υ_ϑ. Щоб знайти ці компоненти, запишемо проекцію рівняння (41.7) на радіальний напрям

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial r} = \eta \Bigg\{ \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \upsilon_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\upsilon_r}{\partial\vartheta}\right)\right) - \\ - \frac{2}{r^2}\left(\upsilon_r + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,\upsilon_\vartheta)\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{41.10}$$

та рівняння неперервності (41.2)

$$div\,\vec{\upsilon} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\upsilon_r) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,\upsilon_\vartheta) = 0. \tag{41.11}$$

Після підстановки (41.11) у (41.10) останнє рівняння матиме вигляд:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\eta}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r^2\upsilon_r\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\upsilon_r}{\partial\vartheta}\right)\right). \tag{41.12}$$

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у формі

$$\upsilon_r = \frac{f(r)}{r}\cos\vartheta. \tag{41.13}$$

Після підстановки (41.9), (41.13) у (41.12) знайдемо звичайне диференціальне рівняння для $f(r)$:

$$r^2 f'' + 2rf' - 2f = -\frac{2C_1}{\eta}, \tag{41.14}$$

де штрих визначає похідну за змінною r. Розв'язок рівняння (41.12) складається з частинного розв'язку неоднорідного рівняння та загального розв'язку однорідного рівняння:

$$f(r) = \frac{C_1}{\eta} + C_2 r + \frac{C_3}{r^2}. \tag{41.15}$$

Таким чином, радіальна компонента швидкості υ_r має вигляд

$$\upsilon_r = \left(\frac{C_1}{\eta r} + C_2 + \frac{C_3}{r^3} \right) \cos\vartheta. \tag{41.16}$$

Компоненту υ_ϑ найпростіше знайти з рівняння неперервності (41.11). Якщо цю компоненту шукати у вигляді

$$\upsilon_\vartheta = f_1(r)\sin\vartheta, \tag{41.17}$$

після підстановки (41.13) та (41.17) у (41.11) маємо рівняння

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{f}{r} \right) + \frac{2f_1}{r} = 0,$$

звідки з врахуванням (41.15) знаходимо

$$f_1(r) = -\frac{C_1}{2\eta r} - C_2 + \frac{C_3}{2r^3}. \tag{41.18}$$

Константи C_1, C_2, C_3 у (41.16), (41.18) знайдемо з крайових умов:

$$\begin{aligned} &\upsilon_r = \upsilon_\vartheta = 0, \quad \textit{коли} \quad r = R_0, \\ &\upsilon_r = \upsilon_0 \cos\vartheta, \quad \upsilon_\vartheta = -\upsilon_0 \sin\vartheta, \quad \textit{коли} \quad r \to \infty. \end{aligned} \tag{41.19}$$

У результаті розв'язок задачі має вигляд:

$$\begin{aligned} \upsilon_r &= \upsilon_0 \left(1 - \frac{3}{2}\frac{R_0}{r} + \frac{R_0^3}{2r^3} \right) \cos\vartheta, \\ \upsilon_r &= \upsilon_0 \left(-1 + \frac{3}{4}\frac{R_0}{r} + \frac{R_0^3}{4r^3} \right) \sin\vartheta, \\ p &= -\frac{3}{2}\eta\upsilon_0 \frac{R_0}{r^2}\cos\vartheta + p_\infty. \end{aligned} \tag{41.20}$$

Користуючись цим розв'язком легко встановити силу гідродинамічного тиску в'язкої рідини на сферичну частинку. Згідно з (33.9) сила, яка діє на поверхню Σ рідини, що обмежує кулю, дорівнює:

$$F_i^{поверх} = \oint_\Sigma p_{ik} n_k d\sigma. \tag{41.21}$$

У відповідності з третім законом Ньютона така сама сила, але з протилежним знаком, діє з боку в'язкої рідини на поверхню кулі Σ:

$$F_i = -\oint_{\Sigma} p_{ik} n_k d\sigma\,, \tag{41.22}$$

де у тензор напружень p_{ik} в'язкої нестисливої рідини

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right) \tag{41.23}$$

треба підставити (41.20). Результат має вигляд (***формула Стокса***):

$$\vec{F} = 6\pi R_0 \eta \vec{\upsilon}_0. \tag{41.24}$$

Ця формула часто використовується як у фізичних, так і у технічних розрахунках.

Задача 41.1. При малих числах Рейнольдса для нестисливої в'язкої рідини ($\rho = const$) рівняння Нав'є-Стокса у векторній формі має вигляд:

$$\vec{\nabla} p = -\eta\; rot\; rot\; \vec{\upsilon}\,. \tag{41.25}$$

Знайти проекції цього рівняння на орти сферичної системи координат.

Задача 41.2. Те ж саме для циліндричної системи координат.

Задача 41.3. Знайти формулу Стокса (41.24), користуючись співвідношеннями (41.22), (41.23) та розв'язком (41.20).

Література

1. Голдстейн Г. Классическая механика. М. 1957; 1975.
2. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. МГУ.1974.
3. Федорченко А.М. Теоретична фізика: т.1. Класична механіка і електродинаміка. К. 1992.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М. 1973; 2004.
5. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.1974.
6. Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике. МГУ. 1991; 2002.
7. Коткин Г.Л., Сербо В.Г. Сборкик задач по классической механике. М. 1977; 2001.
8. Тер-Хаар Д. Основы гамильтоновой механики. М. 1974.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М. 1986; 2001.
10. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.I, II. М. 1963.
11. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М. 1973.
12. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М. 1955.

Зміст