Математический анализ

Лекции по математическому анализу

Анатолий КОРЕНОВСКИЙ

Кафедра математического анализа
Институт математики, экономики и механики

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

21 января 2013 г.

Текст лекций

Данные лекции составлены на основе учебника

В. И. Коляда, А. А. Кореновский. *Курс лекций по математическому анализу, ч.1,2. Одесса, Астропринт, 2010.*

Список литературы

Учебники

- 1. Г. М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1,2,3. М., Наука, 1970.*
- 2. Э. Ландау. *Основы анализа. М., ИЛ, 1947.*
- 3. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа, ч. 1,2. М., Наука, 1982.
- 4. А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа, М., Наука, 1988.
- 5. С. М. Никольский. Курс математического анализа, т. 1,2. М., Наука, 1990.
- 6. Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. 1,2. М., Наука, 1964.
- 7. Л. Д. Кудрявцев. Математический анализ, т. 1,2. М., Высшая школа, 1973.

Список литературы

Сборники задач

- 8. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., Наука, 1977.
- 9. Л. Д. Кудрявцев и др. Сборник задач по математическому анализу, М., Наука, 1984.
- 10. И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. Математический анализ в задачах и упражнениях, М., Изд-во МГУ, 1991.
- 11. И. И. Ляшко и др. Математический анализ в примерах и задачах, Киев, Вища школа, 1974.

Тема 16. Функциональные последовательности и ряды

Определение и примеры

Определение и примеры

Определение и примеры

Пусть на множестве E задана последовательность функций

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Предположим, что для любого фиксированного $x \in E$ числовая последовательность $f_n(x)$ имеет предел при $n \to \infty$.
Тогда для $x \in E$ получаем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \equiv f(x)$, где f – некоторая функция, определенная на E. Эту функцию называют предельной функцией последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и говорят, что эта последовательность сходится к функции f поточечно.

Определение и примеры

Пусть на множестве E задана последовательность функций

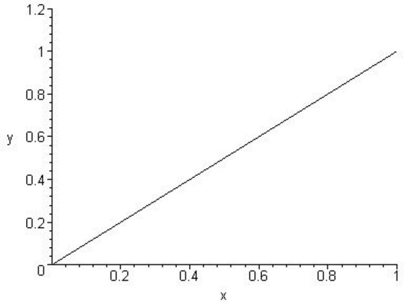
$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Предположим, что для любого фиксированного $x \in E$ числовая последовательность $f_n(x)$ имеет предел при $n \to \infty$.
Тогда для $x \in E$ получаем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \equiv f(x)$, где f – некоторая функция, определенная на E. Эту функцию называют предельной функцией последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и говорят, что эта последовательность сходится к функции f поточечно.

Определение и примеры

Пример 1.

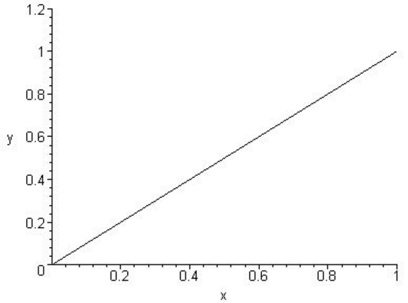
Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \le x \le 1)$.



Определение и примеры

Пример 1.

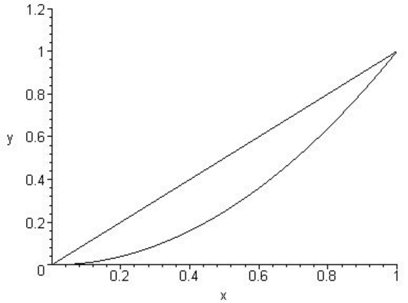
Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \le x \le 1)$.



Определение и примеры

Пример 1.

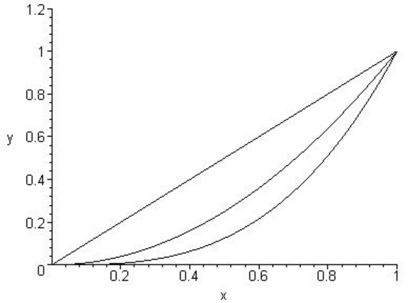
Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \leq x \leq 1)$.



Определение и примеры

Пример 1.

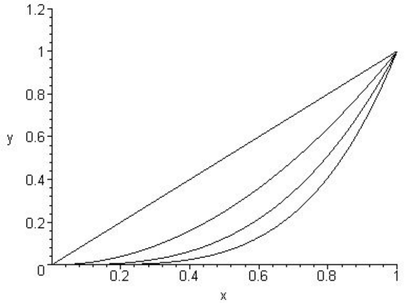
Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \le x \le 1)$.



Определение и примеры

Пример 1.

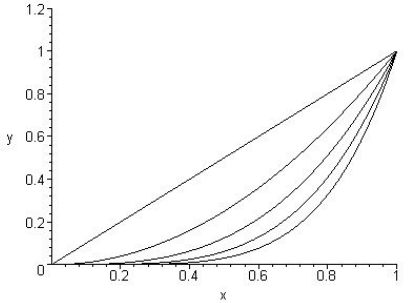
Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \le x \le 1)$.



Определение и примеры

Пример 1.

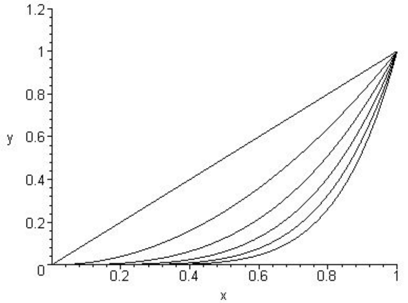
Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \leq x \leq 1)$.



Определение и примеры

Пример 1.

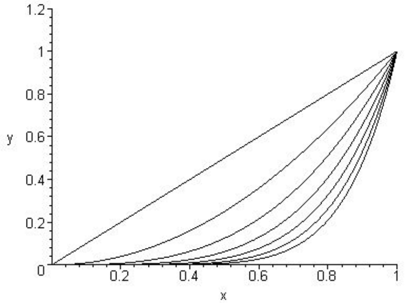
Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \le x \le 1)$.



Определение и примеры

Пример 1.

Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \le x \le 1)$.



Определение и примеры

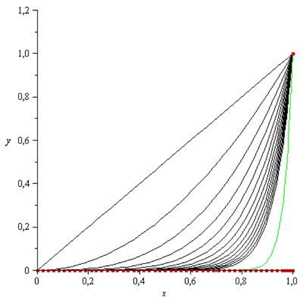
Пример 1.

Если $0 \le x < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

а $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$
Поэтому $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n =$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$



Получили, что последовательность непрерывных на $[0,1]$ функций $f_n(x) = x^n$ сходится к разрывной функции f. To Note

Определение и примеры

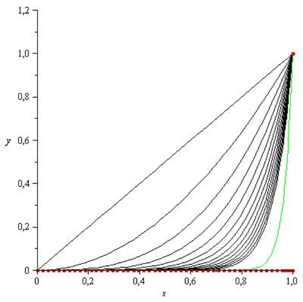
Пример 1.

Если $0 \le x < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

а $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$
Поэтому $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n =$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

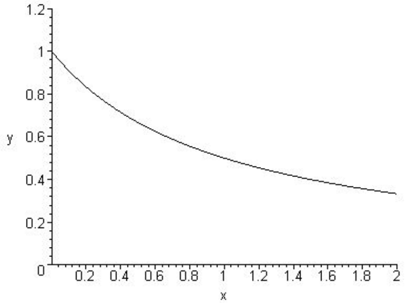


Получили, что последовательность непрерывных на $[0, 1]$ функций $f_n(x) = x^n$ сходится к разрывной функции f. To Note

Определение и примеры

Пример 2.

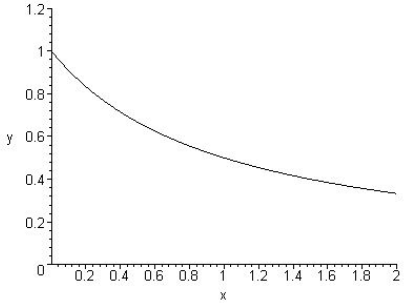
Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$.



Определение и примеры

Пример 2.

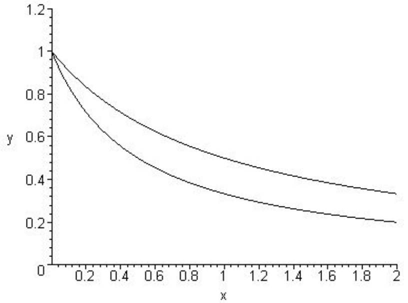
Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$.



Определение и примеры

Пример 2.

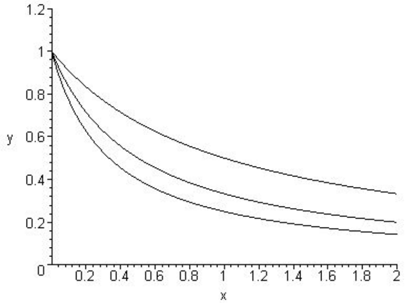
Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$.



Определение и примеры

Пример 2.

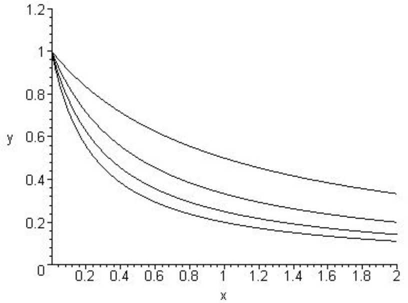
Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$.



Определение и примеры

Пример 2.

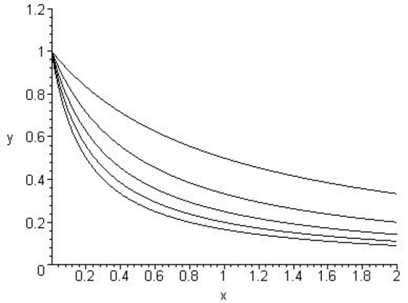
Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$.



Определение и примеры

Пример 2.

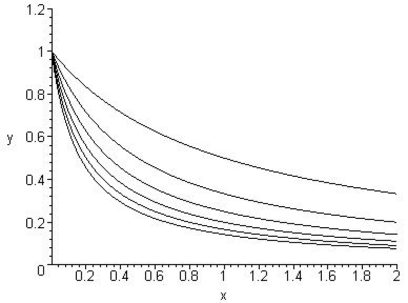
Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$.



Определение и примеры

Пример 2.

Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$.



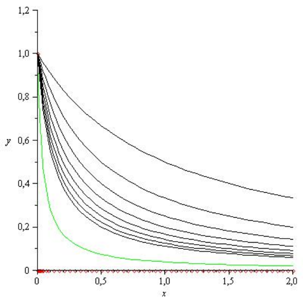
Определение и примеры

Пример 2.

Итак, для $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$, имеем

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} =$$

$$= \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

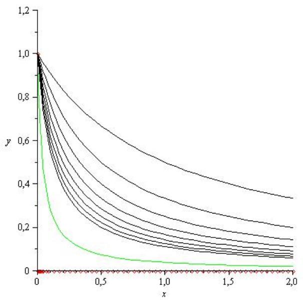


Снова получили, что последовательность непрерывных на полуоси $[0, +\infty)$ функций $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ сходится к разрывной функции f.

Определение и примеры

Пример 2.

Итак, для $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$, имеем



$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} =$$

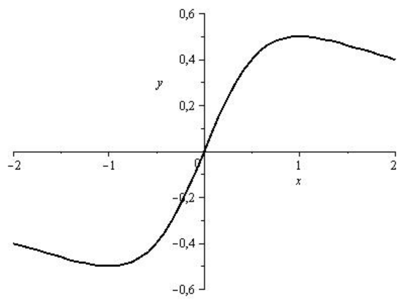
$$= \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Снова получили, что последовательность непрерывных на полуоси $[0, +\infty)$ функций $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ сходится к разрывной функции f.

Определение и примеры

Пример 3.

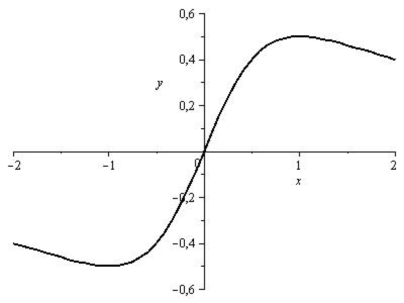
Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Каждая функция f_n – нечетная.



Определение и примеры

Пример 3.

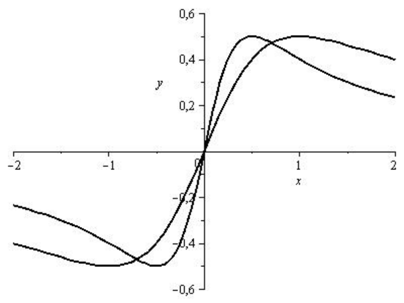
Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Каждая функция f_n – нечетная.



Определение и примеры

Пример 3.

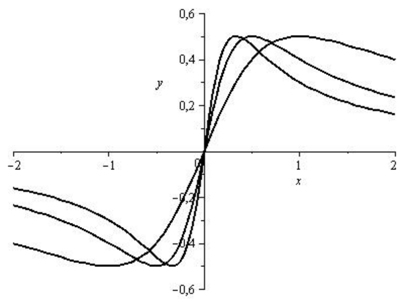
Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Каждая функция f_n – нечетная.



Определение и примеры

Пример 3.

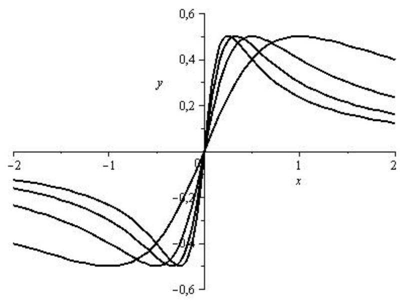
Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Каждая функция f_n – нечетная.



Определение и примеры

Пример 3.

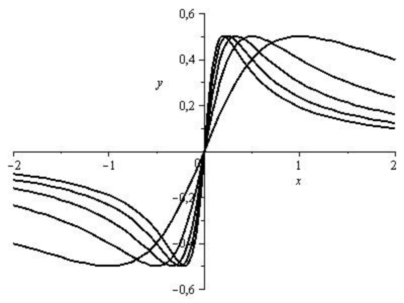
Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Каждая функция f_n – нечетная.



Определение и примеры

Пример 3.

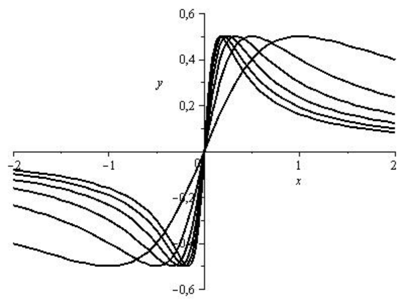
Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Каждая функция f_n – нечетная.



Определение и примеры

Пример 3.

Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Каждая функция f_n – нечетная.



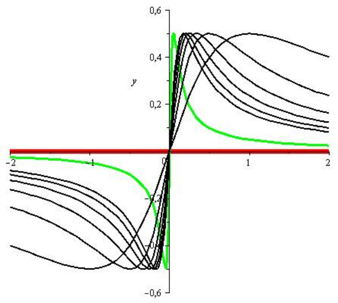
Определение и примеры

Пример 3.

Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.
Из неравенства

$$2|a| \leq 1 + a^2$$

получим, что
$|f_n(x)| \leq \frac{|nx|}{1+|nx|^2} \leq \frac{1}{2}$, $(x \in \mathbb{R})$.
Если же $x = \frac{1}{n}$, то $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.
Ясно, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =$



$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Теперь последовательность непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ сходится к непрерывной функции $f \equiv 0$.

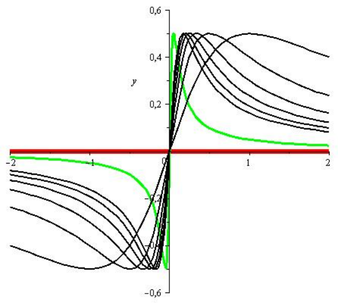
Определение и примеры

Пример 3.

Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.
Из неравенства

$$2|a| \leq 1 + a^2$$

получим, что
$|f_n(x)| \leq \frac{|nx|}{1+|nx|^2} \leq \frac{1}{2}$, $(x \in \mathbb{R})$.
Если же $x = \frac{1}{n}$, то $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.
Ясно, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =$



$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Теперь последовательность непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ сходится к непрерывной функции $f \equiv 0$.

Определение и примеры

Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Предположим, что для каждого фиксированного $x \in E$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится. Обозначим его сумму через $f(x) \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. В этом случае будем говорить, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно на множестве E к функции f.

Замечание. Ясно, что поточечная сходимость функционального ряда эквивалентна поточечной сходимости последовательности его частичных сумм $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$.

Определение и примеры

Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Предположим, что для каждого фиксированного $x \in E$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится. Обозначим его сумму через $f(x) \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. В этом случае будем говорить, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно на множестве E к функции f.

Замечание. Ясно, что поточечная сходимость функционального ряда эквивалентна поточечной сходимости последовательности его частичных сумм $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$.

Определение и примеры

Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Предположим, что для каждого фиксированного $x \in E$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится. Обозначим его сумму через $f(x) \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. В этом случае будем говорить, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно на множестве E к функции f.

Замечание. Ясно, что поточечная сходимость функционального ряда эквивалентна поточечной сходимости последовательности его частичных сумм $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$.

Определение и примеры

Пример 4.

Пусть дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ $(x \in \mathbb{R})$. При каждом фиксированном $x \neq 0$ этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{1+x^2}$ $(|q| < 1)$. Поэтому

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2 \quad (x \neq 0).$$

Если $x = 0$, то, очевидно, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$

Определение и примеры

Пример 4.

Пусть дан функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ $(x \in \mathbb{R})$. При каждом фиксированном $x \neq 0$ этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{1+x^2}$ $(|q| < 1)$. Поэтому

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2 \quad (x \neq 0).$$

Если $x = 0$, то, очевидно, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$

Определение и примеры

Пример 4.

Пусть дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ $(x \in \mathbb{R})$. При каждом фиксированном $x \neq 0$ этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{1+x^2}$ $(|q| < 1)$. Поэтому

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2 \quad (x \neq 0).$$

Если $x = 0$, то, очевидно, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$

Определение и примеры

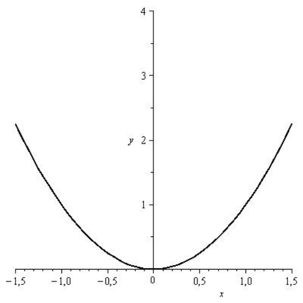
Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.



Определение и примеры

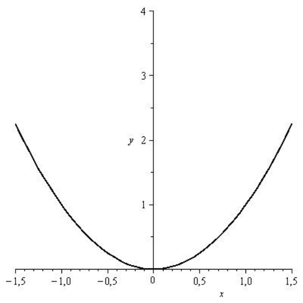
Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.



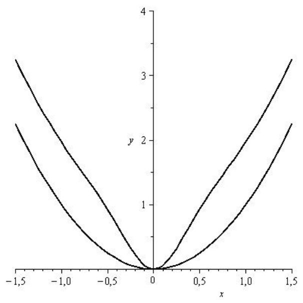
Определение и примеры

Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$



т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.

Определение и примеры

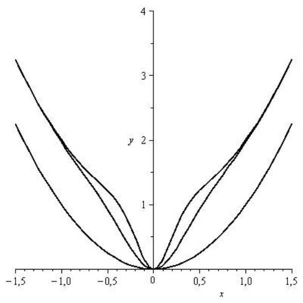
Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.



Определение и примеры

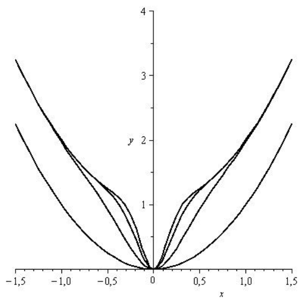
Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.



Определение и примеры

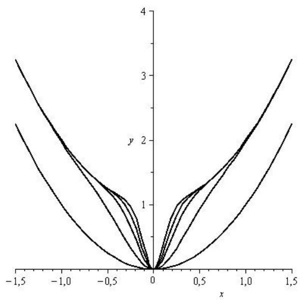
Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.



Определение и примеры

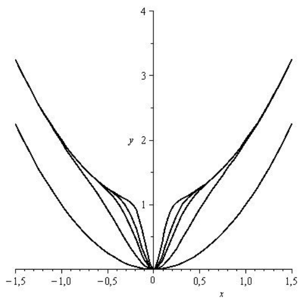
Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.



Определение и примеры

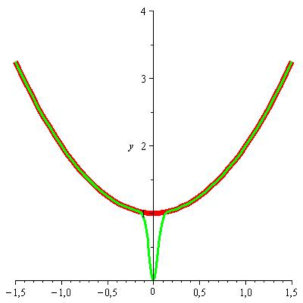
Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.



§1. Равномерная сходимость

§1. Равномерная сходимость

§1. Равномерная сходимость

Определение. Пусть на множестве E задана последовательность функций f_n $(n = 1, 2, \dots)$, сходящаяся на E поточечно к функции f. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к функции f на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, зависящий только от ε (и не зависящий от x), что для каждого $n \geq N$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

§1. Равномерная сходимость

Определение поточечной сходимости на множестве E в кванторах можно записать следующим образом:

$$\forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, x) : \ \forall n \geq N \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

а равномерной сходимости – так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \ \forall n \geq N \ \forall x \in E \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В определении поточечной сходимости номер N зависит, вообще говоря, от ε и от x, а в определении равномерной сходимости N зависит только от ε и не зависит от x. Иначе говоря, поточечная сходимость будет равномерной, если для заданного $\varepsilon > 0$ номер N можно подобрать так, чтобы он был пригоден сразу для всех $x \in E$.

§1. Равномерная сходимость

Определение поточечной сходимости на множестве E в кванторах можно записать следующим образом:

$$\forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, x) : \ \forall n \geq N \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

а равномерной сходимости – так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \ \forall n \geq N \ \forall x \in E \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В определении поточечной сходимости номер N зависит, вообще говоря, от ε и от x, а в определении равномерной сходимости N зависит только от ε и не зависит от x. Иначе говоря, поточечная сходимость будет равномерной, если для заданного $\varepsilon > 0$ номер N можно подобрать так, чтобы он был пригоден сразу для всех $x \in E$.

§1. Равномерная сходимость

Определение поточечной сходимости на множестве E в кванторах можно записать следующим образом:

$$\forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, x): \ \forall n \geq N \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

а равномерной сходимости – так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \ \forall n \geq N \ \forall x \in E \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В определении поточечной сходимости номер N зависит, вообще говоря, от ε и от x, а в определении равномерной сходимости N зависит только от ε и не зависит от x. Иначе говоря, поточечная сходимость будет равномерной, если для заданного $\varepsilon > 0$ номер N можно подобрать так, чтобы он был пригоден сразу для всех $x \in E$.

§1. Равномерная сходимость

Определение поточечной сходимости на множестве E в кванторах можно записать следующим образом:

$$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon, x):\ \forall n \geq N\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

а равномерной сходимости – так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon):\ \forall n \geq N\ \forall x \in E\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

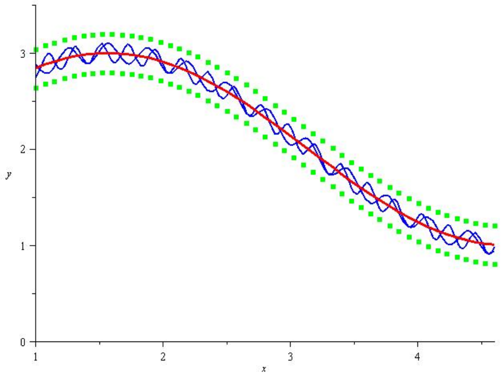
В определении поточечной сходимости номер N зависит, вообще говоря, от ε и от x, а в определении равномерной сходимости N зависит только от ε и не зависит от x. Иначе говоря, поточечная сходимость будет равномерной, если для заданного $\varepsilon > 0$ номер N можно подобрать так, чтобы он был пригоден сразу для всех $x \in E$.

§1. Равномерная сходимость

Геометрический смысл равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon):\ \forall n \geq N\ \forall x \in E\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

состоит в том, что начиная с номера N (т. е. при $n \geq N$) графики функций $f_n(x)$ расположены в ε-полосе графика функции f.



§1. Равномерная сходимость

Теперь видно, что свойство равномерной сходимости не слабее, чем свойство поточечной сходимости, т. е. из равномерной сходимости следует поточечная сходимость. Обратное неверно. Может оказаться, что для каждого $\varepsilon > 0$ и для $x \in E$ найдется номер $N = N(\varepsilon, x)$, но для всех сразу $x \in E$ номер N, не зависящий от x, может и не существовать.

§1. Равномерная сходимость

Теперь видно, что свойство равномерной сходимости не слабее, чем свойство поточечной сходимости, т. е. из равномерной сходимости следует поточечная сходимость. Обратное неверно. Может оказаться, что для каждого $\varepsilon > 0$ и для $x \in E$ найдется номер $N = N(\varepsilon, x)$, но для всех сразу $x \in E$ номер N, не зависящий от x, может и не существовать.

§1. Равномерная сходимость

Пример 1.

Пусть $f_n(x) = x^n$ $(x \in E \equiv [0,1])$. Мы уже видели, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Если бы последовательность $\{x^n\}$ сходилась к функции f равномерно, то неравенство $|x^n - f(x)| < \varepsilon$ при достаточно больших n $(n \ge N(\varepsilon))$ должно было быть выполненным сразу для всех $x \in E$. Но это не так, поскольку при фиксированном n имеем $\lim\limits_{x\to 1-0} x^n = 1$, так что в любой левой полуокрестности точки $x_0 = 1$ найдется такая точка $x_1 < 1$, что $x_1^n > \frac{1}{2}$.

§1. Равномерная сходимость

Пример 1.

Пусть $f_n(x) = x^n$ $(x \in E \equiv [0,1])$. Мы уже видели, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Если бы последовательность $\{x^n\}$ сходилась к функции f равномерно, то неравенство $|x^n - f(x)| < \varepsilon$ при достаточно больших n $(n \ge N(\varepsilon))$ должно было быть выполненным сразу для всех $x \in E$. Но это не так, поскольку при фиксированном n имеем $\lim\limits_{x\to 1-0} x^n = 1$, так что в любой левой полуокрестности точки $x_0 = 1$ найдется такая точка $x_1 < 1$, что $x_1^n > \frac{1}{2}$.

§1. Равномерная сходимость

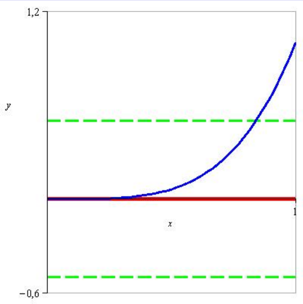
Продолжение примера 1.

Поэтому, если мы возьмем $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, то получим неравенство $|x_1^n - 0| \geq \varepsilon_0$. Окончательно имеем

$$\exists \varepsilon_0 \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right) : \forall N \, \exists n \geq N \, (n = N)$$

$$\exists x_1 = x_1(\varepsilon, n) \in E :$$

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0.$$



Это означает, что данная последовательность не является равномерно сходящейся на множестве E.

§1. Равномерная сходимость

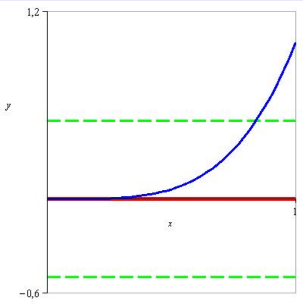
Продолжение примера 1.

Поэтому, если мы возьмем $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, то получим неравенство $|x_1^n - 0| \geq \varepsilon_0$. Окончательно имеем

$$\exists \varepsilon_0 \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \right) : \forall N \, \exists n \geq N \; (n = N)$$

$$\exists x_1 = x_1(\varepsilon, n) \in E :$$

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0.$$



Это означает, что данная последовательность не является равномерно сходящейся на множестве E.

§1. Равномерная сходимость

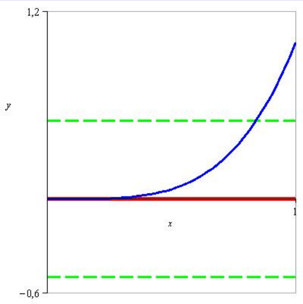
Продолжение примера 1.

Поэтому, если мы возьмем $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, то получим неравенство $|x_1^n - 0| \geq \varepsilon_0$. Окончательно имеем

$$\exists \varepsilon_0 \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right) : \forall N\, \exists n \geq N\ (n = N)$$

$$\exists x_1 = x_1(\varepsilon, n) \in E :$$

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0.$$



Это означает, что данная последовательность не является равномерно сходящейся на множестве E.

§1. Равномерная сходимость

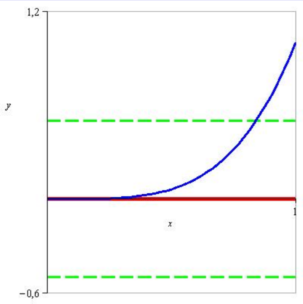
Продолжение примера 1.

Поэтому, если мы возьмем $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, то получим неравенство $|x_1^n - 0| \geq \varepsilon_0$. Окончательно имеем

$$\exists \varepsilon_0 \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right) : \forall N \, \exists n \geq N \, (n = N)$$

$$\exists x_1 = x_1(\varepsilon, n) \in E :$$

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0.$$



Это означает, что данная последовательность не является равномерно сходящейся на множестве E.

§1. Равномерная сходимость

В этом примере "плохие" точки x_1, т. е. такие, в которых выполнено неравенство $|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0$, находятся вблизи точки $x_0 = 1$. Если же мы отделимся от x_0, т. е. рассмотрим последовательность $\{x^n\}$ на множестве $E_\delta = [0, 1-\delta]$, где $\delta > 0$ – произвольное число, то сходимость данной последовательности к функции $f(x) \equiv 0$ на множестве E_δ уже будет равномерной. Действительно, в этом случае

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq (1-\delta)^n < \varepsilon \quad (0 \leq x \leq 1-\delta),$$

если только $n \geq N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln(1-\delta)}\right] + 1$ не зависит от $x \in E_\delta$.

§1. Равномерная сходимость

В этом примере "плохие" точки x_1, т. е. такие, в которых выполнено неравенство $|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0$, находятся вблизи точки $x_0 = 1$. Если же мы отделимся от x_0, т. е. рассмотрим последовательность $\{x^n\}$ на множестве $E_\delta = [0, 1 - \delta]$, где $\delta > 0$ – произвольное число, то сходимость данной последовательности к функции $f(x) \equiv 0$ на множестве E_δ уже будет равномерной. Действительно, в этом случае

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq (1 - \delta)^n < \varepsilon \quad (0 \leq x \leq 1 - \delta),$$

если только $n \geq N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln(1-\delta)}\right] + 1$ не зависит от $x \in E_\delta$.

§1. Равномерная сходимость

В этом примере "плохие" точки x_1, т. е. такие, в которых выполнено неравенство $|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0$, находятся вблизи точки $x_0 = 1$. Если же мы отделимся от x_0, т. е. рассмотрим последовательность $\{x^n\}$ на множестве $E_\delta = [0, 1 - \delta]$, где $\delta > 0$ – произвольное число, то сходимость данной последовательности к функции $f(x) \equiv 0$ на множестве E_δ уже будет равномерной. Действительно, в этом случае

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq (1 - \delta)^n < \varepsilon \quad (0 \leq x \leq 1 - \delta),$$

если только $n \geq N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln(1-\delta)}\right] + 1$ не зависит от $x \in E_\delta$.

§1. Равномерная сходимость

Пример 2.

Для последовательности функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in E \equiv \mathbb{R})$ ранее мы показали, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Поэтому $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$.

§1. Равномерная сходимость

Пример 2.

Для последовательности функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in E \equiv \mathbb{R})$ ранее мы показали, что

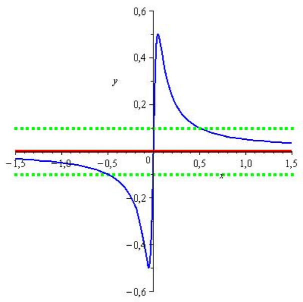
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Поэтому $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 2

Однако при фиксированном n наибольшее значение функция $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ достигает в точке $x_n = \frac{1}{n}$ и это значение равно $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Таким образом, для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0$ не может быть выполненным сразу для всех $x \in \mathbb{R}$.



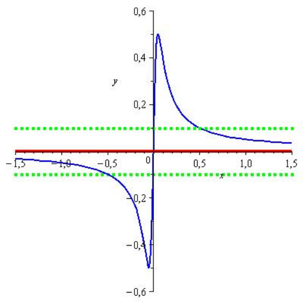
Значит, последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f \equiv 0$ на $\mathbb{R}$, но неравномерно, т. е.

To Note

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 2

Однако при фиксированном n наибольшее значение функция $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ достигает в точке $x_n = \frac{1}{n}$ и это значение равно $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Таким образом, для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0$ не может быть выполненным сразу для всех $x \in \mathbb{R}$.



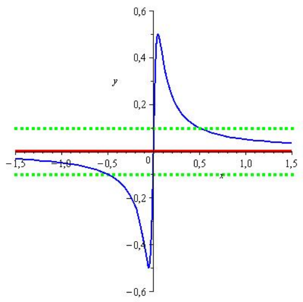
Значит, последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f \equiv 0$ на $\mathbb{R}$, но неравномерно, т. е.

To Note

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 2

Однако при фиксированном n наибольшее значение функция $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ достигает в точке $x_n = \frac{1}{n}$ и это значение равно $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Таким образом, для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0$ не может быть выполненным сразу для всех $x \in \mathbb{R}$.



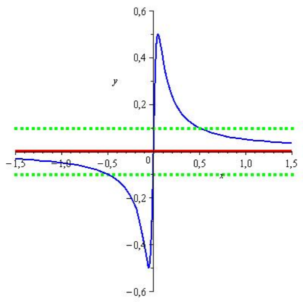
Значит, последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f \equiv 0$ на $\mathbb{R}$, но неравномерно, т. е.

To Note

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 2

Однако при фиксированном n наибольшее значение функция $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ достигает в точке $x_n = \frac{1}{n}$ и это значение равно $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Таким образом, для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0$ не может быть выполненным сразу для всех $x \in \mathbb{R}$.



Значит, последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f \equiv 0$ на $\mathbb{R}$, но неравномерно, т. е.

To Note

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 2

$$\exists \varepsilon_0 \ \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right) : \ \forall N \ \exists n \geq N \ (n = N) \ \exists x_1 \ \left(x_1 = \frac{1}{n}\right) :$$

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0.$$

Если же зафиксировать число $\delta > 0$, то нетрудно показать, что на множестве $E_\delta = [\delta, +\infty)$ последовательность функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ сходится равномерно. Действительно, неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n\delta} < \varepsilon \quad (x \in E_\delta)$$

выполнено, если только $n \geq N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon\delta}\right] + 1$ не зависит от $x \in E_\delta$.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 2

$$\exists \varepsilon_0 \ \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right) : \ \forall N \ \exists n \geq N \ (n = N) \ \exists x_1 \ \left(x_1 = \frac{1}{n}\right) :$$

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0.$$

Если же зафиксировать число $\delta > 0$, то нетрудно показать, что на множестве $E_\delta = [\delta, +\infty)$ последовательность функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ сходится равномерно. Действительно, неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n\delta} < \varepsilon \quad (x \in E_\delta)$$

выполнено, если только $n \geq N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon\delta}\right] + 1$ не зависит от $x \in E_\delta$.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 2

$$\exists \varepsilon_0 \ \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right) : \ \forall N \ \exists n \geq N \ (n = N) \ \exists x_1 \ \left(x_1 = \frac{1}{n}\right) :$$

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0.$$

Если же зафиксировать число $\delta > 0$, то нетрудно показать, что на множестве $E_\delta = [\delta, +\infty)$ последовательность функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ сходится равномерно. Действительно, неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n\delta} < \varepsilon \quad (x \in E_\delta)$$

выполнено, если только $n \geq N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon\delta}\right] + 1$ не зависит от $x \in E_\delta$.

§1. Равномерная сходимость

Равномерная сходимость ряда определяется как равномерная сходимость последовательности его частичных сумм.

Определение. Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{u_n\}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *равномерно сходящимся* на множестве E, если он сходится поточечно на E и последовательность его частичных сумм равномерно сходится к сумме ряда на множестве E.

Другими словами, определение равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, сходящегося к функции f на множестве E, можно сформулировать следующим образом.

§1. Равномерная сходимость

Равномерная сходимость ряда определяется как равномерная сходимость последовательности его частичных сумм.

Определение. Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{u_n\}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется равномерно сходящимся на множестве E, если он сходится поточечно на E и последовательность его частичных сумм равномерно сходится к сумме ряда на множестве E.

Другими словами, определение равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, сходящегося к функции f на множестве E, можно сформулировать следующим образом.

§1. Равномерная сходимость

Равномерная сходимость ряда определяется как равномерная сходимость последовательности его частичных сумм.

Определение. Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{u_n\}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется равномерно сходящимся на множестве E, если он сходится поточечно на E и последовательность его частичных сумм равномерно сходится к сумме ряда на множестве E.

Другими словами, определение равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, сходящегося к функции f на множестве E, можно сформулировать следующим образом.

§1. Равномерная сходимость

Обозначим через $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ – остаток после n-го слагаемого.

Тогда $S_n(x) + r_n(x) = f(x)$, а равномерная сходимость ряда означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий только от ε), что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Но так как $|S_n(x) - f(x)| = |r_n(x)|$, то получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n \geq N \ \forall x \in E \ \ |r_n(x)| < \varepsilon.$$

Это в свою очередь означает, что остаток ряда равномерно стремится к нулю. Таким образом, получили следующее эквивалентное определение равномерной сходимости ряда.

§1. Равномерная сходимость

Обозначим через $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ – остаток после n-го слагаемого. Тогда $S_n(x) + r_n(x) = f(x)$, а равномерная сходимость ряда означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий только от ε), что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Но так как $|S_n(x) - f(x)| = |r_n(x)|$, то получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n \geq N \ \forall x \in E \ \ |r_n(x)| < \varepsilon.$$

Это в свою очередь означает, что остаток ряда равномерно стремится к нулю. Таким образом, получили следующее эквивалентное определение равномерной сходимости ряда.

§1. Равномерная сходимость

Обозначим через $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ – остаток после n-го слагаемого. Тогда $S_n(x) + r_n(x) = f(x)$, а равномерная сходимость ряда означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий только от ε), что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Но так как $|S_n(x) - f(x)| = |r_n(x)|$, то получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \; \forall n \geq N \; \forall x \in E \; |r_n(x)| < \varepsilon.$$

Это в свою очередь означает, что остаток ряда равномерно стремится к нулю. Таким образом, получили следующее эквивалентное определение равномерной сходимости ряда.

§1. Равномерная сходимость

Обозначим через $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ – остаток после n-го слагаемого. Тогда $S_n(x) + r_n(x) = f(x)$, а равномерная сходимость ряда означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий только от ε), что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Но так как $|S_n(x) - f(x)| = |r_n(x)|$, то получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n \geq N \ \forall x \in E \ \ |r_n(x)| < \varepsilon.$$

Это в свою очередь означает, что остаток ряда равномерно стремится к нулю. Таким образом, получили следующее эквивалентное определение равномерной сходимости ряда.

§1. Равномерная сходимость

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на множестве E, если последовательность его остатков после n-го слагаемого $\{r_n\}$ равномерно сходится к нулю на множестве E.

Это определение более выгодно по сравнению с предыдущим тем, что оно использует лишь слагаемые исходного ряда и не использует сумму самого ряда $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

§1. Равномерная сходимость

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве E, если последовательность его остатков после n-го слагаемого $\{r_n\}$ равномерно сходится к нулю на множестве E.

Это определение более выгодно по сравнению с предыдущим тем, что оно использует лишь слагаемые исходного ряда и не использует сумму самого ряда $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

§1. Равномерная сходимость

Пример 1.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится на интервале $(-1, 1)$, т. к. он представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем x, $|x| < 1$. Исследуем его на равномерную сходимость. Для этого рассмотрим остаток $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. При фиксированном x и $n \to \infty$ имеем $r_n(x) \to 0$. Это означает, что данный ряд сходится при каждом x, т. е. поточечно.

§1. Равномерная сходимость

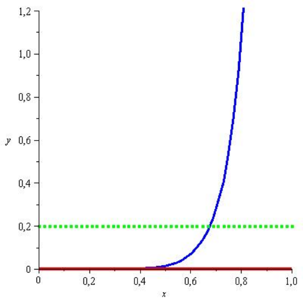
Пример 1.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится на интервале $(-1, 1)$, т. к. он представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем x, $|x| < 1$. Исследуем его на равномерную сходимость. Для этого рассмотрим остаток $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. При фиксированном x и $n \to \infty$ имеем $r_n(x) \to 0$. Это означает, что данный ряд сходится при каждом x, т. е. поточечно.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 1

Если же зафиксировать n и устремить x к $1-0$, то получим, что $\frac{x^{n+1}}{1-x} \to +\infty$, т. е. если x близок к 1, то $r_n(x)$ принимает большие значения. Это означает, что неравенство $|r_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \varepsilon$ сразу для всех $x \in (-1, 1)$ не может быть выполненным, каким бы большим номер n мы ни выбрали.

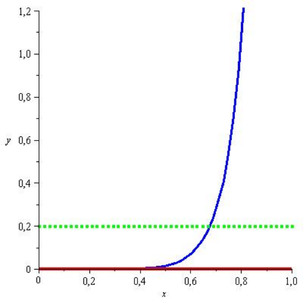


Таким образом, наш ряд сходится на $(-1, 1)$, но неравномерно.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 1

Если же зафиксировать n и устремить x к $1-0$, то получим, что $\frac{x^{n+1}}{1-x} \to +\infty$, т. е. если x близок к 1, то $r_n(x)$ принимает большие значения. Это означает, что неравенство $|r_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \varepsilon$ сразу для всех $x \in (-1,1)$ не может быть выполненным, каким бы большим номер n мы ни выбрали.

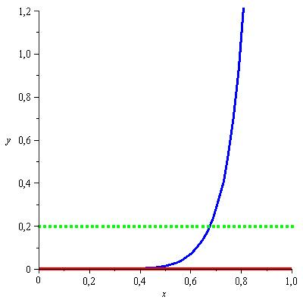


Таким образом, наш ряд сходится на $(-1,1)$, но неравномерно.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 1

Если же зафиксировать n и устремить x к $1-0$, то получим, что $\frac{x^{n+1}}{1-x} \to +\infty$, т. е. если x близок к 1, то $r_n(x)$ принимает большие значения. Это означает, что неравенство $|r_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \varepsilon$ сразу для всех $x \in (-1, 1)$ не может быть выполненным, каким бы большим номер n мы ни выбрали.

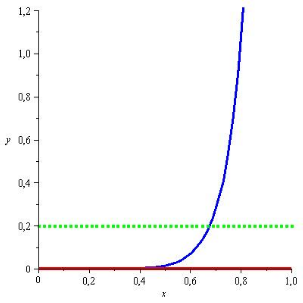


Таким образом, наш ряд сходится на $(-1, 1)$, но неравномерно.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 1

Если же зафиксировать n и устремить x к $1-0$, то получим, что $\frac{x^{n+1}}{1-x} \to +\infty$, т. е. если x близок к 1, то $r_n(x)$ принимает большие значения. Это означает, что неравенство $|r_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \varepsilon$ сразу для всех $x \in (-1,1)$ не может быть выполненным, каким бы большим номер n мы ни выбрали.



Таким образом, наш ряд сходится на $(-1,1)$, но неравномерно.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 1

С другой стороны, на любом отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится равномерно. Действительно, в этом случае

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| \leq \frac{q^{n+1}}{1-q}, \quad (x \in [-q, q]).$$

Отсюда следует, что последовательность $\{r_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на $[-q, q]$, т. е. данный ряд равномерно сходится на $[-q, q]$.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 1

С другой стороны, на любом отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится равномерно. Действительно, в этом случае

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| \leq \frac{q^{n+1}}{1-q}, \quad (x \in [-q, q]).$$

Отсюда следует, что последовательность $\{r_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на $[-q, q]$, т. е. данный ряд равномерно сходится на $[-q, q]$.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 1

С другой стороны, на любом отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится равномерно. Действительно, в этом случае

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \leq \frac{q^{n+1}}{1-q}, \quad (x \in [-q, q]).$$

Отсюда следует, что последовательность $\{r_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на $[-q, q]$, т. е. данный ряд равномерно сходится на $[-q, q]$.

§1. Равномерная сходимость

Пример 2.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. Имеем

$$r_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2)^n}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Если x фиксировано, то $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что ряд является сходящимся при любом $x \in \mathbb{R}$, т. е. он сходится поточечно.

§1. Равномерная сходимость

Пример 2.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. Имеем

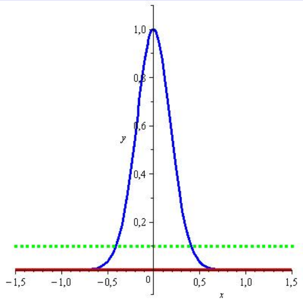
$$r_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2)^n}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Если x фиксировано, то $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что ряд является сходящимся при любом $x \in \mathbb{R}$, т. е. он сходится поточечно.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 2

Если зафиксируем n, то при $x \to 0$, что $r_n(x) \to 1$, а это означает, что неравенство $|r_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} < \varepsilon$ при $0 < \varepsilon < 1$ не может выполняться сразу для всех $x \in \mathbb{R}$, каким бы большим номер n мы ни взяли.

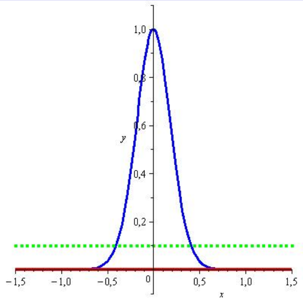


Таким образом, $r_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, но неравномерно. Следовательно, данный ряд сходится на $\mathbb{R}$ неравномерно.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 2

Если зафиксируем n, то при $x \to 0$, что $r_n(x) \to 1$, а это означает, что неравенство $|r_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} < \varepsilon$ при $0 < \varepsilon < 1$ не может выполняться сразу для всех $x \in \mathbb{R}$, каким бы большим номер n мы ни взяли.

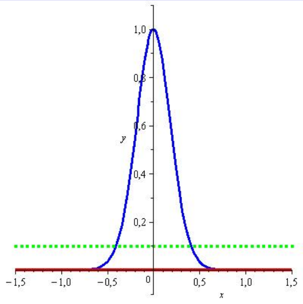


Таким образом, $r_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, но неравномерно.
Следовательно, данный ряд сходится на $\mathbb{R}$ неравномерно.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 2

Если зафиксируем n, то при $x \to 0$, что $r_n(x) \to 1$, а это означает, что неравенство $|r_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} < \varepsilon$ при $0 < \varepsilon < 1$ не может выполняться сразу для всех $x \in \mathbb{R}$, каким бы большим номер n мы ни взяли.



Таким образом, $r_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, но неравномерно. Следовательно, данный ряд сходится на $\mathbb{R}$ неравномерно.

§1. Равномерная сходимость

Замечание. Пусть задан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \in E).$$

Рассмотрим величины

$$\mu_n = \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| = \sup_{x \in E} |r_n(x)| \, .$$

Тогда определение равномерной сходимости этого ряда на множестве E можно сформулировать следующим образом.
Данный ряд сходится равномерно на множестве E, если $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_n = 0$.

§1. Равномерная сходимость

Замечание. Пусть задан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \in E).$$

Рассмотрим величины

$$\mu_n = \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| = \sup_{x \in E} |r_n(x)| \, .$$

Тогда определение равномерной сходимости этого ряда на множестве E можно сформулировать следующим образом. Данный ряд сходится равномерно на множестве E, если $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_n = 0$.

Тема 16. Функциональные последовательности и ряды

Равномерная сходимость

Действительно, если $\mu_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $\mu_n < \varepsilon$, т. е. для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$, а значит ряд сходится равномерно.
Обратно, если $r_n(x)$ равномерно сходится к нулю, то для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$. Поэтому и $\mu_n = \sup_{x \in E} |r_n(x)| \leq \varepsilon$, т. е. $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Тема 16. Функциональные последовательности и ряды

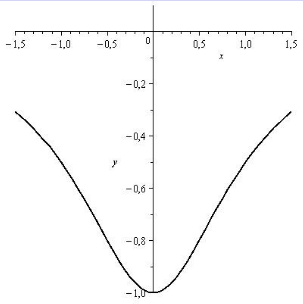
Равномерная сходимость

Действительно, если $\mu_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $\mu_n < \varepsilon$, т. е. для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$, а значит ряд сходится равномерно. Обратно, если $r_n(x)$ равномерно сходится к нулю, то для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$. Поэтому и $\mu_n = \sup_{x \in E} |r_n(x)| \leq \varepsilon$, т. е. $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$.

§1. Равномерная сходимость

Пример 3.

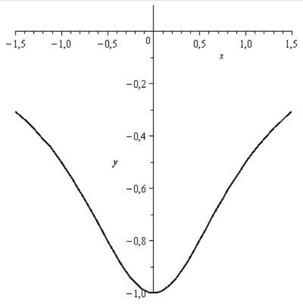
Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \le \frac{1}{x^2+n+1} \le \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \le \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.



§1. Равномерная сходимость

Пример 3.

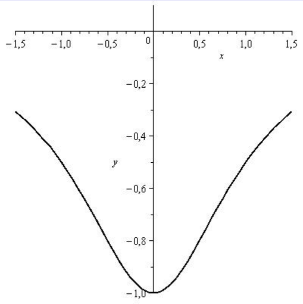
Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.



§1. Равномерная сходимость

Пример 3.

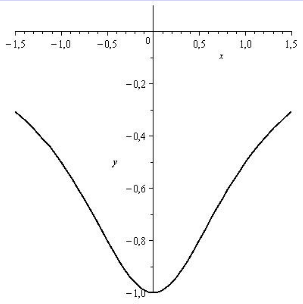
Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.



§1. Равномерная сходимость

Пример 3.

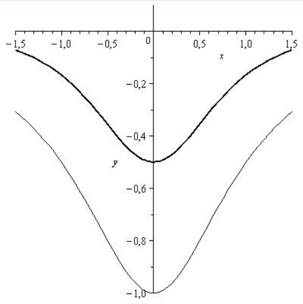
Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.



§1. Равномерная сходимость

Пример 3.

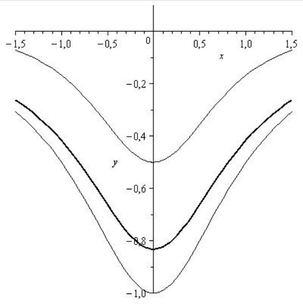
Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \le \frac{1}{x^2+n+1} \le \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \le \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.



§1. Равномерная сходимость

Пример 3.

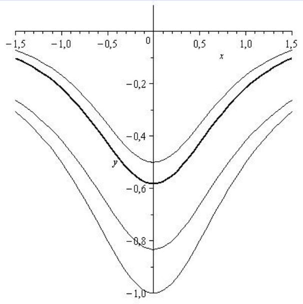
Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.



§1. Равномерная сходимость

Пример 3.

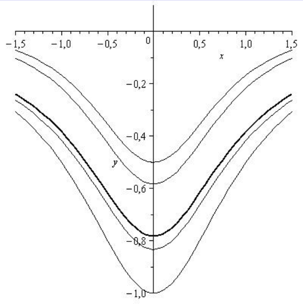
Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.



§1. Равномерная сходимость

Пример 3.

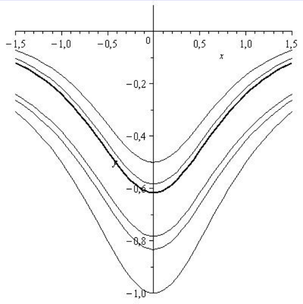
Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \le \frac{1}{x^2+n+1} \le \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \le \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.



§1. Равномерная сходимость

Пример 3.

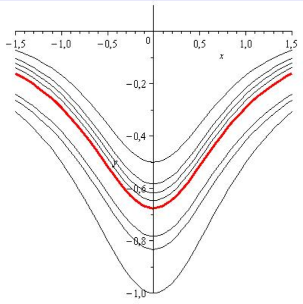
Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \le \frac{1}{x^2+n+1} \le \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \le \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.



§1. Равномерная сходимость

Пример 3.

Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$. To Note 1



§1. Равномерная сходимость

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости последовательности).

Для того чтобы последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно сходилась на множестве E к некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, зависящий только от ε, что для любых $n, m \geq N$ и для любого $x \in E$ было выполнено неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Доказательство.

§1. Равномерная сходимость

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости последовательности).

Для того чтобы последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно сходилась на множестве E к некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, зависящий только от ε, что для любых $n, m \geq N$ и для любого $x \in E$ было выполнено неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Доказательство.

§1. Равномерная сходимость

Доказанную теорему можно переформулировать для рядов следующим образом.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости ряда).

Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, зависящий только от ε, что для всех $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in E$ выполнялось неравенство $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon.$

Эта теорема вытекает из предыдущей, если учесть, что равномерная сходимость ряда определяется как равномерная сходимость последовательности его частичных сумм.

§1. Равномерная сходимость

Доказанную теорему можно переформулировать для рядов следующим образом.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости ряда).

Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, зависящий только от ε, что для всех $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in E$ выполнялось неравенство $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$.

Эта теорема вытекает из предыдущей, если учесть, что равномерная сходимость ряда определяется как равномерная сходимость последовательности его частичных сумм.

§1. Равномерная сходимость

Доказанную теорему можно переформулировать для рядов следующим образом.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости ряда).

Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходился на множестве* E*, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* N*, зависящий только от* ε*, что для всех* $n \geq N$*,* $p \in \mathbb{N}$ *и для любого* $x \in E$ *выполнялось неравенство* $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$*.*

Эта теорема вытекает из предыдущей, если учесть, что равномерная сходимость ряда определяется как равномерная сходимость последовательности его частичных сумм.

§1. Равномерная сходимость

Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда).

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \in E).$$

Предположим, что существует числовая последовательность $\{a_n\}$, *такая, что* $|u_n(x)| \leq a_n$ $(n = 1, 2\ldots)$ *для всех* $x \in E$, *и числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда ряд сходится равномерно на* E.

Доказательство.

§1. Равномерная сходимость

Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда).

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \in E).$$

Предположим, что существует числовая последовательность $\{a_n\}$, *такая, что* $|u_n(x)| \leq a_n$ $(n = 1, 2 \dots)$ *для всех* $x \in E$, *и числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда ряд сходится равномерно на* E.

Доказательство.

§1. Равномерная сходимость

Замечание 1. Признак Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости функционального ряда. В самом деле, рассмотренный выше пример 3 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ показывает, что этот ряд хотя и сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но оценить сверху его слагаемые можно лишь слагаемыми расходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Замечание 2. Признак Вейерштрасса дает достаточное условие не только равномерной, но и абсолютной сходимости ряда. Это сразу следует из неравенства

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \quad (x \in E).$$

§1. Равномерная сходимость

Замечание 1. Признак Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости функционального ряда. В самом деле, рассмотренный выше пример 3 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ показывает, что этот ряд хотя и сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но оценить сверху его слагаемые можно лишь слагаемыми расходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Замечание 2. Признак Вейерштрасса дает достаточное условие не только равномерной, но и абсолютной сходимости ряда. Это сразу следует из неравенства

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \quad (x \in E).$$

§1. Равномерная сходимость

<u>**Замечание 1.**</u> Признак Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости функционального ряда. В самом деле, рассмотренный выше пример 3 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n}$ показывает, что этот ряд хотя и сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но оценить сверху его слагаемые можно лишь слагаемыми расходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

<u>**Замечание 2.**</u> Признак Вейерштрасса дает достаточное условие не только равномерной, но и абсолютной сходимости ряда. Это сразу следует из неравенства

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \quad (x \in E).$$

§1. Равномерная сходимость

Замечание 1. Признак Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости функционального ряда. В самом деле, рассмотренный выше пример 3 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ показывает, что этот ряд хотя и сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но оценить сверху его слагаемые можно лишь слагаемыми расходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Замечание 2. Признак Вейерштрасса дает достаточное условие не только равномерной, но и абсолютной сходимости ряда. Это сразу следует из неравенства

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \quad (x \in E).$$

§1. Равномерная сходимость

Замечание 3. Признак Вейерштрасса заключается в том, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, где $\alpha_n = \sup\limits_{x\in E} |u_n(x)|$, следует равномерная (и абсолютная) сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве E.

§1. Равномерная сходимость

Пример 4.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ на $\mathbb{R}$. Используя очевидное неравенство $2|a| \le 1 + a^2$, находим мажорантный числовой ряд

$$\left| \frac{x}{1+n^4x^2} \right| \le \frac{1}{n^2} \frac{|n^2x|}{1+(n^2x)^2} \le \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}.$$

Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$ сходится, то исходный функциональный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

§1. Равномерная сходимость

Пример 4.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ на $\mathbb{R}$. Используя очевидное неравенство $2|a| \le 1 + a^2$, находим мажорантный числовой ряд

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \le \frac{1}{n^2}\frac{|n^2x|}{1+(n^2x)^2} \le \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}.$$

Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$ сходится, то исходный функциональный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

§1. Равномерная сходимость

Пример 4.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ на $\mathbb{R}$. Используя очевидное неравенство $2|a| \leq 1 + a^2$, находим мажорантный числовой ряд

$$\left| \frac{x}{1+n^4x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \frac{|n^2 x|}{1+(n^2x)^2} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}.$$

Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$ сходится, то исходный функциональный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

§1. Равномерная сходимость

Пример 5.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, поскольку $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

§1. Равномерная сходимость

Теорема (признак Абеля равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две функциональные последовательности $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функции $a_n(x)$ ограничены в совокупности, т. е. существует такое M, что $|a_n(x)| \leq M$ $(x \in E,\ n = 1, 2, \ldots)$,*
3. *ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на E.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E.

§1. Равномерная сходимость

Теорема (признак Абеля равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две функциональные последовательности $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функции $a_n(x)$ ограничены в совокупности, т. е. существует такое M, что $|a_n(x)| \le M$ $(x \in E,\ n = 1, 2, \dots)$,*
3. *ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на E.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на E.

§1. Равномерная сходимость

Теорема (признак Абеля равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две функциональные последовательности $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функции $a_n(x)$ ограничены в совокупности, т. е. существует такое M, что $|a_n(x)| \le M$ $(x \in E,\ n = 1, 2, \dots)$,*
3. *ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на E.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E.

§1. Равномерная сходимость

Теорема (признак Абеля равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две функциональные последовательности $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функции $a_n(x)$ ограничены в совокупности, т. е. существует такое M, что $|a_n(x)| \leq M$ $(x \in E,\ n = 1, 2, \dots)$,*
3. *ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на E.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E.

§1. Равномерная сходимость

Теорема (признак Абеля равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две функциональные последовательности $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функции $a_n(x)$ ограничены в совокупности, т. е. существует такое M, что $|a_n(x)| \leq M$ $(x \in E,\ n = 1, 2, \dots)$,*
3. *ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на E.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E.

§1. Равномерная сходимость

Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две последовательности функций $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функциональная последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на E,*
3. *частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ ограничены в совокупности на E, т. е. существует такое число M, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \le M$ $(x \in E,\ n = 1, 2, \dots)$.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E. to Ex. 6

§1. Равномерная сходимость

Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две последовательности функций $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функциональная последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на E,*
3. *частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ ограничены в совокупности на E, т. е. существует такое число M, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \le M \ (x \in E, \ n = 1, 2, \dots)$.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E. to Ex. 6

§1. Равномерная сходимость

Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две последовательности функций $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функциональная последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на E,*
3. *частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ ограничены в совокупности на E, т. е. существует такое число M, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leq M$ $(x \in E,\ n = 1, 2, \ldots)$.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E. to Ex. 6

§1. Равномерная сходимость

Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две последовательности функций $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функциональная последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на E,*
3. *частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ ограничены в совокупности на E, т. е. существует такое число M, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leq M \ (x \in E,\ n = 1, 2, \dots)$.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E. to Ex. 6

§1. Равномерная сходимость

Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две последовательности функций $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функциональная последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на E,*
3. *частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ ограничены в совокупности на E, т. е. существует такое число M, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \le M \ (x \in E,\ n = 1, 2, \dots)$.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E. to Ex. 6

§1. Равномерная сходимость

Доказательства признаков Абеля и Дирихле легко провести, основываясь на критерии Коши и применяя преобразование Абеля (точно так же, как это было сделано при доказательстве признаков Абеля и Дирихле сходимости числовых рядов).

Рекомендуется провести эти доказательства самостоятельно.

§1. Равномерная сходимость

Доказательства признаков Абеля и Дирихле легко провести, основываясь на критерии Коши и применяя преобразование Абеля (точно так же, как это было сделано при доказательстве признаков Абеля и Дирихле сходимости числовых рядов).

Рекомендуется провести эти доказательства самостоятельно.

§1. Равномерная сходимость

Пример 6.

Рассмотрим ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, где последовательность чисел a_n монотонно стремится к нулю. К ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ применим признак Дирихле. Для этого рассмотрим суммы $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$. Имеем

$$2\sin\frac{x}{2} S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx =$$

$$= \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \dots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x =$$

§1. Равномерная сходимость

Пример 6.

Рассмотрим ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, где последовательность чисел a_n монотонно стремится к нулю. К ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ применим признак Дирихле. Для этого рассмотрим суммы $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$. Имеем

$$2\sin\frac{x}{2} S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx =$$

$$= \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \cdots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x =$$

§1. Равномерная сходимость

Пример 6.

Рассмотрим ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, где последовательность чисел a_n монотонно стремится к нулю. К ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ применим признак Дирихле. Для этого рассмотрим суммы $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$. Имеем

$$2\sin\frac{x}{2} S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx =$$

$$= \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \cdots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x =$$

§1. Равномерная сходимость

Пример 6.

Рассмотрим ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, где последовательность чисел a_n монотонно стремится к нулю. К ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ применим признак Дирихле. Для этого рассмотрим суммы $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$. Имеем

$$2\sin\frac{x}{2} S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx =$$

$$= \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \dots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x =$$

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 6

$$= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}.$$

Поэтому

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \quad (0 < x < 2\pi), \qquad |S_n(x)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Если $x \to 0$, то $S_n(x) \to n$, так что в окрестности нуля нарушается равномерная ограниченность сумм $S_n(x)$. Если же $\delta \le x \le 2\pi - \delta$, где $0 < \delta < \pi$, то $|S_n(x)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}$ и поэтому на $[\delta, 2\pi - \delta]$ выполнены все условия признака Дирихле, в силу которого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ сходится равномерно на $[\delta, 2\pi - \delta]$.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 6

$$= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}.$$

Поэтому

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \quad (0 < x < 2\pi), \quad |S_n(x)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Если $x \to 0$, то $S_n(x) \to n$, так что в окрестности нуля нарушается равномерная ограниченность сумм $S_n(x)$. Если же $\delta \le x \le 2\pi - \delta$, где $0 < \delta < \pi$, то $|S_n(x)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}$ и поэтому на $[\delta, 2\pi - \delta]$ выполнены все условия признака Дирихле, в силу которого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ сходится равномерно на $[\delta, 2\pi - \delta]$.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 6

$$= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}.$$

Поэтому

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \quad (0 < x < 2\pi), \quad |S_n(x)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Если $x \to 0$, то $S_n(x) \to n$, так что в окрестности нуля нарушается равномерная ограниченность сумм $S_n(x)$. Если же $\delta \le x \le 2\pi - \delta$, где $0 < \delta < \pi$, то $|S_n(x)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}$ и поэтому на $[\delta, 2\pi - \delta]$ выполнены все условия признака Дирихле, в силу которого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ сходится равномерно на $[\delta, 2\pi - \delta]$.

§1. Равномерная сходимость

Продолжение примера 6

$$= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}.$$

Поэтому

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \quad (0 < x < 2\pi), \quad |S_n(x)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Если $x \to 0$, то $S_n(x) \to n$, так что в окрестности нуля нарушается равномерная ограниченность сумм $S_n(x)$. Если же $\delta \le x \le 2\pi - \delta$, где $0 < \delta < \pi$, то $|S_n(x)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}$ и поэтому на $[\delta, 2\pi - \delta]$ выполнены все условия признака Дирихле, в силу которого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ сходится равномерно на $[\delta, 2\pi - \delta]$.

§1. Равномерная сходимость

Окончание примера 6

На всем интервале $(0, 2\pi)$ признак Дирихле неприменим, но это еще не означает, что ряд сходится неравномерно, поскольку признак Дирихле – лишь достаточное условие равномерной сходимости ряда.

Покажите самостоятельно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, где последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает к нулю, сходится равномерно на $[\delta, 2\pi - \delta]$, где произвольное $0 < \delta < \pi$.

§1. Равномерная сходимость

Окончание примера 6

На всем интервале $(0, 2\pi)$ признак Дирихле неприменим, но это еще не означает, что ряд сходится неравномерно, поскольку признак Дирихле – лишь достаточное условие равномерной сходимости ряда.

Покажите самостоятельно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, где последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает к нулю, сходится равномерно на $[\delta, 2\pi - \delta]$, где произвольное $0 < \delta < \pi$.

§1. Равномерная сходимость

Для этого полезно использовать равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] \quad (0 < x < 2\pi)$$

и применить признак Дирихле.

§1. Равномерная сходимость

Для этого полезно использовать равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] \quad (0 < x < 2\pi)$$

и применить признак Дирихле.

§1. Равномерная сходимость

Для этого полезно использовать равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] \quad (0 < x < 2\pi)$$

и применить признак Дирихле.

§2. Равномерная сходимость и предельный переход

§2. Равномерная сходимость и предельный переход

§2. Равномерная сходимость и предельный переход

Теорема (о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности функций).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность функций $\{f_n\}$, сходящаяся к функции f равномерно на $[a, b]$. Если все функции f_n непрерывны в точке $x_0 \in [a, b]$, то и предельная функция f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

§2. Равномерная сходимость и предельный переход

Теорема (о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности функций).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность функций $\{f_n\}$, сходящаяся к функции f равномерно на $[a, b]$. Если все функции f_n непрерывны в точке $x_0 \in [a, b]$, то и предельная функция f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

§2. Равномерная сходимость и предельный переход

Замечание. В доказанной теореме условие равномерной сходимости нельзя отбросить. В самом деле, выше мы приводили пример последовательности непрерывных функций $f_n(x) = x^n$, которая всюду на $[0, 1]$ сходится, но предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

разрывна. пример

С другой стороны, требование равномерной сходимости не является необходимым для того, чтобы предельная функция была непрерывной. Другими словами, существует последовательность непрерывных функций, сходящаяся к непрерывной функции, но неравномерно. Такую последовательность $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ мы уже приводили выше в качестве примера. пример

§2. Равномерная сходимость и предельный переход

Замечание. В доказанной теореме условие равномерной сходимости нельзя отбросить. В самом деле, выше мы приводили пример последовательности непрерывных функций $f_n(x) = x^n$, которая всюду на $[0,1]$ сходится, но предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

разрывна. пример

С другой стороны, требование равномерной сходимости не является необходимым для того, чтобы предельная функция была непрерывной. Другими словами, существует последовательность непрерывных функций, сходящаяся к непрерывной функции, но неравномерно. Такую последовательность $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ мы уже приводили выше в качестве примера. пример

§2. Равномерная сходимость и предельный переход

Замечание. В доказанной теореме условие равномерной сходимости нельзя отбросить. В самом деле, выше мы приводили пример последовательности непрерывных функций $f_n(x) = x^n$, которая всюду на $[0, 1]$ сходится, но предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

разрывна. пример

С другой стороны, требование равномерной сходимости не является необходимым для того, чтобы предельная функция была непрерывной. Другими словами, существует последовательность непрерывных функций, сходящаяся к непрерывной функции, но неравномерно. Такую последовательность $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ мы уже приводили выше в качестве примера. пример

§2. Равномерная сходимость и предельный переход

Замечание. В доказанной теореме условие равномерной сходимости нельзя отбросить. В самом деле, выше мы приводили пример последовательности непрерывных функций $f_n(x) = x^n$, которая всюду на $[0,1]$ сходится, но предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

разрывна. пример

С другой стороны, требование равномерной сходимости не является необходимым для того, чтобы предельная функция была непрерывной. Другими словами, существует последовательность непрерывных функций, сходящаяся к непрерывной функции, но неравномерно. Такую последовательность $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ мы уже приводили выше в качестве примера. пример

§2. Равномерная сходимость и предельный переход

Замечание. В доказанной теореме условие равномерной сходимости нельзя отбросить. В самом деле, выше мы приводили пример последовательности непрерывных функций $f_n(x) = x^n$, которая всюду на $[0, 1]$ сходится, но предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

разрывна. пример

С другой стороны, требование равномерной сходимости не является необходимым для того, чтобы предельная функция была непрерывной. Другими словами, существует последовательность непрерывных функций, сходящаяся к непрерывной функции, но неравномерно. Такую последовательность $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ мы уже приводили выше в качестве примера. пример

§2. Равномерная сходимость и предельный переход

Доказанная выше теорема для рядов может быть переформулирована следующим образом.

Теорема (о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность непрерывных в точке $x_0 \in [a, b]$ функций u_n, такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда сумма этого ряда является непрерывной в точке x_0 функцией.

Эта теорема сразу следует из предыдущей, если ее применить к последовательности $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ непрерывных в точке x_0 функций как конечной суммы непрерывных функций u_k.

§2. Равномерная сходимость и предельный переход

Доказанная выше теорема для рядов может быть переформулирована следующим образом.

Теорема (о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность непрерывных в точке $x_0 \in [a, b]$ функций u_n, такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда сумма этого ряда является непрерывной в точке x_0 функцией.

Эта теорема сразу следует из предыдущей, если ее применить к последовательности $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ непрерывных в точке x_0 функций как конечной суммы непрерывных функций u_k.

§2. Равномерная сходимость и предельный переход

Доказанная выше теорема для рядов может быть переформулирована следующим образом.

Теорема (о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность непрерывных в точке $x_0 \in [a, b]$ функций u_n, такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда сумма этого ряда является непрерывной в точке x_0 функцией.

Эта теорема сразу следует из предыдущей, если ее применить к последовательности $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ непрерывных в точке x_0 функций как конечной суммы непрерывных функций u_k.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Пусть задана последовательность интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций f_n и пусть последовательность $\{f_n\}$ сходится на $[a, b]$ поточечно к функции f.

Поставим вопрос: обязана ли функция f быть интегрируемой на $[a, b]$ и верно ли равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\ ?$$

Отрицательные ответы на эти вопросы дают следующие примеры.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Пусть задана последовательность интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций f_n и пусть последовательность $\{f_n\}$ сходится на $[a, b]$ поточечно к функции f.

Поставим вопрос: обязана ли функция f быть интегрируемой на $[a, b]$ и верно ли равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \ ?$$

Отрицательные ответы на эти вопросы дают следующие примеры.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Пусть задана последовательность интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций f_n и пусть последовательность $\{f_n\}$ сходится на $[a, b]$ поточечно к функции f.

Поставим вопрос: обязана ли функция f быть интегрируемой на $[a, b]$ и верно ли равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \ ?$$

Отрицательные ответы на эти вопросы дают следующие примеры.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Пример 1.

Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных точек из отрезка $[0,1]$. Обозначим

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \dots, r_n\}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \{r_1, \dots, r_n\}. \end{cases}$$

Тогда каждая функция f_n интегрируема на отрезке $[0,1]$, поскольку она имеет лишь конечное число точек разрыва $\{r_1, \dots, r_n\}$. С другой стороны, легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \mathcal{D}(x)$, где $\mathcal{D}$ – функция Дирихле. Но мы знаем, что функция Дирихле неинтегрируема на отрезке $[0,1]$. Итак, мы построили последовательность интегрируемых функций, сходящуюся к неинтегрируемой функции.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Пример 1.

Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных точек из отрезка $[0,1]$. Обозначим

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \ldots, r_n\}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\}. \end{cases}$$

Тогда каждая функция f_n интегрируема на отрезке $[0,1]$, поскольку она имеет лишь конечное число точек разрыва $\{r_1, \ldots, r_n\}$. С другой стороны, легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \mathcal{D}(x)$, где $\mathcal{D}$ – функция Дирихле. Но мы знаем, что функция Дирихле неинтегрируема на отрезке $[0,1]$. Итак, мы построили последовательность интегрируемых функций, сходящуюся к неинтегрируемой функции.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Пример 1.

Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных точек из отрезка $[0, 1]$. Обозначим

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \ldots, r_n\}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\}. \end{cases}$$

Тогда каждая функция f_n интегрируема на отрезке $[0, 1]$, поскольку она имеет лишь конечное число точек разрыва $\{r_1, \ldots, r_n\}$. С другой стороны, легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \mathcal{D}(x)$, где $\mathcal{D}$ – функция Дирихле. Но мы знаем, что функция Дирихле неинтегрируема на отрезке $[0, 1]$. Итак, мы построили последовательность интегрируемых функций, сходящуюся к неинтегрируемой функции.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Пример 1.

Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных точек из отрезка $[0,1]$. Обозначим

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \ldots, r_n\}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\}. \end{cases}$$

Тогда каждая функция f_n интегрируема на отрезке $[0,1]$, поскольку она имеет лишь конечное число точек разрыва $\{r_1, \ldots, r_n\}$. С другой стороны, легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \mathcal{D}(x)$, где $\mathcal{D}$ – функция Дирихле. Но мы знаем, что функция Дирихле неинтегрируема на отрезке $[0,1]$. Итак, мы построили последовательность интегрируемых функций, сходящуюся к неинтегрируемой функции.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Пример 1.

Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных точек из отрезка $[0,1]$. Обозначим

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \dots, r_n\}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \{r_1, \dots, r_n\}. \end{cases}$$

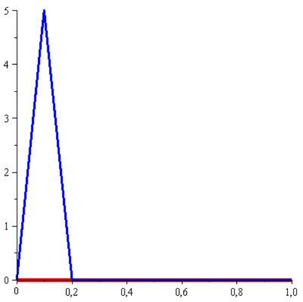
Тогда каждая функция f_n интегрируема на отрезке $[0,1]$, поскольку она имеет лишь конечное число точек разрыва $\{r_1, \dots, r_n\}$. С другой стороны, легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \mathcal{D}(x)$, где $\mathcal{D}$ – функция Дирихле. Но мы знаем, что функция Дирихле неинтегрируема на отрезке $[0,1]$. Итак, мы построили последовательность интегрируемых функций, сходящуюся к неинтегрируемой функции.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Следующий пример показывает, что даже если предельная функция интегрируема, то предел интегралов не обязан равняться интегралу от предельной функции.

Пример 2.

Положим $f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, а на отрезках $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ считаем функцию f_n линейной. Легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$, так что предельная функция $f(x) \equiv 0$ $(x \in [0,1])$ интегрируема и $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.



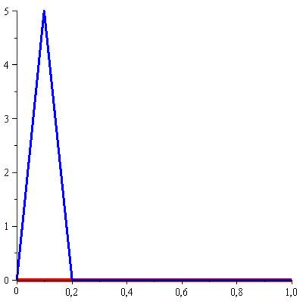
С другой стороны, легко подсчитать, что $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$, и поэтому предельный переход под знаком интеграла недопустим.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Следующий пример показывает, что даже если предельная функция интегрируема, то предел интегралов не обязан равняться интегралу от предельной функции.

Пример 2.

Положим $f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, а на отрезках $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ считаем функцию f_n линейной. Легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$, так что предельная функция $f(x) \equiv 0$ $(x \in [0,1])$ интегрируема и $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.



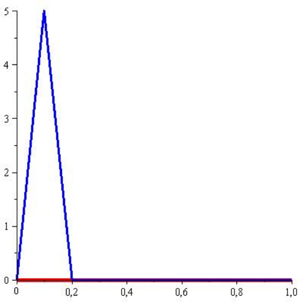
С другой стороны, легко подсчитать, что $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$, и поэтому предельный переход под знаком интеграла недопустим.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Следующий пример показывает, что даже если предельная функция интегрируема, то предел интегралов не обязан равняться интегралу от предельной функции.

Пример 2.

Положим $f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, а на отрезках $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ считаем функцию f_n линейной. Легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$, так что предельная функция $f(x) \equiv 0$ $(x \in [0,1])$ интегрируема и $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.



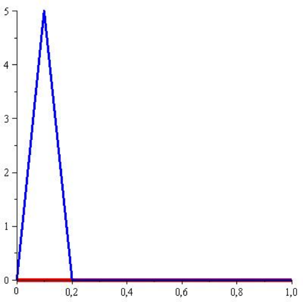
С другой стороны, легко подсчитать, что $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$, и поэтому предельный переход под знаком интеграла недопустим.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Следующий пример показывает, что даже если предельная функция интегрируема, то предел интегралов не обязан равняться интегралу от предельной функции.

Пример 2.

Положим $f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, а на отрезках $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ считаем функцию f_n линейной. Легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$, так что предельная функция $f(x) \equiv 0$ $(x \in [0,1])$ интегрируема и $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.



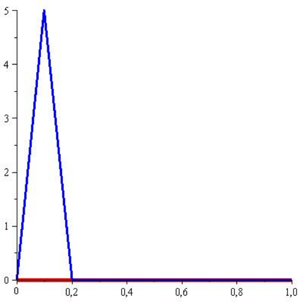
С другой стороны, легко подсчитать, что $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$, и поэтому предельный переход под знаком интеграла недопустим.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Следующий пример показывает, что даже если предельная функция интегрируема, то предел интегралов не обязан равняться интегралу от предельной функции.

Пример 2.

Положим $f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, а на отрезках $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ считаем функцию f_n линейной. Легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$, так что предельная функция $f(x) \equiv 0$ $(x \in [0,1])$ интегрируема и $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.



С другой стороны, легко подсчитать, что $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$, и поэтому предельный переход под знаком интеграла недопустим.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Аналогичный вопрос можно сформулировать и для рядов. Именно, можно ли почленно интегрировать сходящийся ряд? Другими словами, верно ли равенство

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx \ ?$$

Используя построенные выше примеры, легко показать, что ответ на этот вопрос отрицательный в том смысле, что сумма поточечно сходящегося ряда из интегрируемых функций может оказаться неинтегрируемой функцией, а если даже сумма ряда будет функцией интегрируемой, то требуемое равенство все равно нельзя гарантировать.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Аналогичный вопрос можно сформулировать и для рядов. Именно, можно ли почленно интегрировать сходящийся ряд? Другими словами, верно ли равенство

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx\ ?$$

Используя построенные выше примеры, легко показать, что ответ на этот вопрос отрицательный в том смысле, что сумма поточечно сходящегося ряда из интегрируемых функций может оказаться неинтегрируемой функцией, а если даже сумма ряда будет функцией интегрируемой, то требуемое равенство все равно нельзя гарантировать.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Аналогичный вопрос можно сформулировать и для рядов. Именно, можно ли почленно интегрировать сходящийся ряд? Другими словами, верно ли равенство

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx\ ?$$

Используя построенные выше примеры, легко показать, что ответ на этот вопрос отрицательный в том смысле, что сумма поточечно сходящегося ряда из интегрируемых функций может оказаться неинтегрируемой функцией, а если даже сумма ряда будет функцией интегрируемой, то требуемое равенство все равно нельзя гарантировать.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Теорема (о предельном переходе под знаком интеграла для последовательности непрерывных функций).

Пусть $\{f_n\}$ *– последовательность непрерывных на отрезке* $[a,b]$ *функций, равномерно сходящаяся на* $[a,b]$ *к функции* f. *Тогда существует*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

т. е. можно переходить к пределу под знаком интеграла.

Доказательство.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Теорема (о предельном переходе под знаком интеграла для последовательности непрерывных функций).

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, равномерно сходящаяся на $[a, b]$ к функции f. Тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

т. е. можно переходить к пределу под знаком интеграла.

Доказательство.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Доказанная теорема для рядов может быть переформулирована следующим образом.

Теорема (о почленном интегрировании ряда с непрерывными слагаемыми).

Пусть $\{u_n\}$ – последовательность непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций такова, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Доказательство.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Доказанная теорема для рядов может быть переформулирована следующим образом.

Теорема (о почленном интегрировании ряда с непрерывными слагаемыми).

Пусть $\{u_n\}$ – последовательность непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций такова, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Доказательство.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Доказанная теорема для рядов может быть переформулирована следующим образом.

Теорема (о почленном интегрировании ряда с непрерывными слагаемыми).

Пусть $\{u_n\}$ – последовательность непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций такова, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Доказательство.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Из приведенного доказательства теоремы видно, что непрерывность функций f_n была использована лишь для того, чтобы гарантировать их интегрируемость и непрерывность предельной функции f, из которой вытекает ее интегрируемость. Возможность же самого предельного перехода под знаком интеграла обеспечивается условием равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$.
Следующая теорема показывает, что требование непрерывности можно ослабить, и достаточно потребовать лишь интегрируемость.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Из приведенного доказательства теоремы видно, что непрерывность функций f_n была использована лишь для того, чтобы гарантировать их интегрируемость и непрерывность предельной функции f, из которой вытекает ее интегрируемость. Возможность же самого предельного перехода под знаком интеграла обеспечивается условием равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$.

Следующая теорема показывает, что требование непрерывности можно ослабить, и достаточно потребовать лишь интегрируемость.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Из приведенного доказательства теоремы видно, что непрерывность функций f_n была использована лишь для того, чтобы гарантировать их интегрируемость и непрерывность предельной функции f, из которой вытекает ее интегрируемость. Возможность же самого предельного перехода под знаком интеграла обеспечивается условием равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$. Следующая теорема показывает, что требование непрерывности можно ослабить, и достаточно потребовать лишь интегрируемость.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Теорема (о предельном переходе под знаком интеграла для последовательности интегрируемых функций).

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций, равномерно на $[a, b]$ сходящаяся к функции f. Тогда предельная функция f интегрируема на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

Теорема (о предельном переходе под знаком интеграла для последовательности интегрируемых функций).

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций, равномерно на $[a, b]$ сходящаяся к функции f. Тогда предельная функция f интегрируема на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

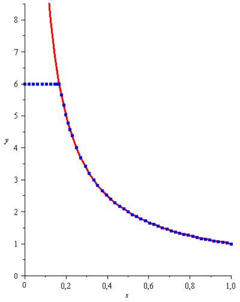
Доказательство.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

В завершение приведем еще один пример последовательности интегрируемых функций, поточечно сходящейся к неограниченной, а значит, неинтегрируемой функции.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ n, & 0 < x \le \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}$$



Тогда каждая функция f_n интегрируема на $[0,1]$, поскольку она имеет единственную точку разрыва $x_0 = 0$.

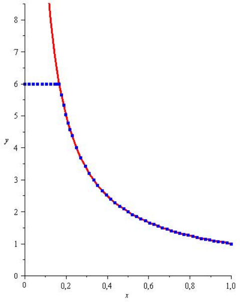
Вместе с тем функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \le 1 \end{cases}$ неограничена и, следовательно, неинтегрируема на $[0,1]$.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

В завершение приведем еще один пример последовательности интегрируемых функций, поточечно сходящейся к неограниченной, а значит, неинтегрируемой функции.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ n, & 0 < x \le \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}$$



Тогда каждая функция f_n интегрируема на $[0,1]$, поскольку она имеет единственную точку разрыва $x_0 = 0$.

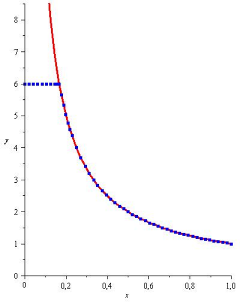
Вместе с тем функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \le 1 \end{cases}$ неограничена и, следовательно, неинтегрируема на $[0,1]$.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

В завершение приведем еще один пример последовательности интегрируемых функций, поточечно сходящейся к неограниченной, а значит, неинтегрируемой функции.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ n, & 0 < x \le \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}$$



Тогда каждая функция f_n интегрируема на $[0, 1]$, поскольку она имеет единственную точку разрыва $x_0 = 0$.

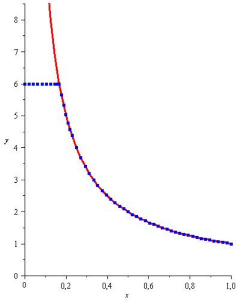
Вместе с тем функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \le 1 \end{cases}$ неограничена и, следовательно, неинтегрируема на $[0, 1]$.

§3. Равномерная сходимость и интегрирование

В завершение приведем еще один пример последовательности интегрируемых функций, поточечно сходящейся к неограниченной, а значит, неинтегрируемой функции.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ n, & 0 < x \le \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}$$



Тогда каждая функция f_n интегрируема на $[0, 1]$, поскольку она имеет единственную точку разрыва $x_0 = 0$.

Вместе с тем функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \le 1 \end{cases}$ неограничена и, следовательно, неинтегрируема на $[0, 1]$.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, поточечно сходящаяся к функции f.
Выше мы приводили примеры, показывающие, что мы не можем гарантировать даже непрерывность функции f. Если же последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно, то функция f непрерывна.
Зададимся вопросом: можно ли гарантировать дифференцируемость функции f?
Покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, поточечно сходящаяся к функции f. Выше мы приводили примеры, показывающие, что мы не можем гарантировать даже непрерывность функции f. Если же последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно, то функция f непрерывна.

Зададимся вопросом: можно ли гарантировать дифференцируемость функции f?

Покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, поточечно сходящаяся к функции f. Выше мы приводили примеры, показывающие, что мы не можем гарантировать даже непрерывность функции f. Если же последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно, то функция f непрерывна.

Зададимся вопросом: можно ли гарантировать дифференцируемость функции f?

Покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, поточечно сходящаяся к функции f. Выше мы приводили примеры, показывающие, что мы не можем гарантировать даже непрерывность функции f. Если же последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно, то функция f непрерывна.

Зададимся вопросом: можно ли гарантировать дифференцируемость функции f?

Покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, поточечно сходящаяся к функции f. Выше мы приводили примеры, показывающие, что мы не можем гарантировать даже непрерывность функции f. Если же последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно, то функция f непрерывна.

Зададимся вопросом: можно ли гарантировать дифференцируемость функции f?

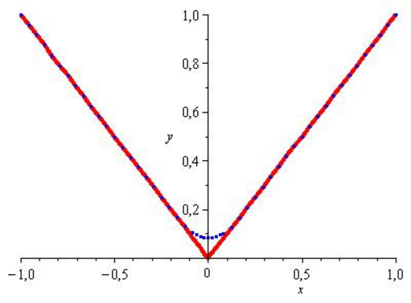
Покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Пример 1.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & |x| \le \frac{1}{n}, \\ |x|, & \frac{1}{n} < |x| \le 1. \end{cases}$$



Легко убедиться в том, что каждая функция f_n дифференцируема на $[-1, 1]$, а последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f(x) = |x|$ равномерно на $[-1, 1]$. Вместе с тем предельная функция $f(x) = |x|$ недифференцируема в точке $x_0 = 0 \in [-1, 1]$.

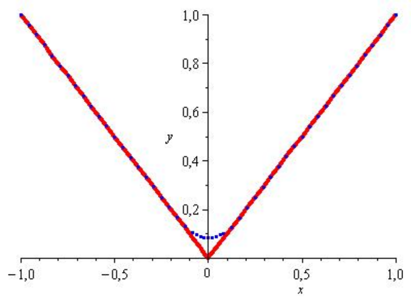
§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Пример 1.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & |x| \le \frac{1}{n}, \\ |x|, & \frac{1}{n} < |x| \le 1. \end{cases}$$

Легко убедиться в том, что каждая функция f_n дифференцируема на $[-1, 1]$, а последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f(x) = |x|$ равномерно на $[-1, 1]$. Вместе с тем предельная функция $f(x) = |x|$ недифференцируема в точке $x_0 = 0 \in [-1, 1]$.

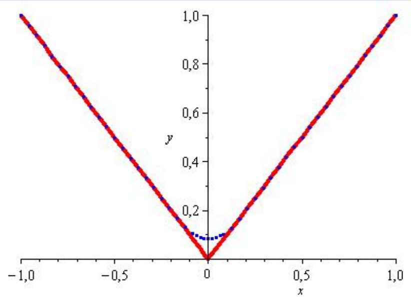


§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Пример 1.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & |x| \le \frac{1}{n}, \\ |x|, & \frac{1}{n} < |x| \le 1. \end{cases}$$



Легко убедиться в том, что каждая функция f_n дифференцируема на $[-1, 1]$, а последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f(x) = |x|$ равномерно на $[-1, 1]$. Вместе с тем предельная функция $f(x) = |x|$ недифференцируема в точке $x_0 = 0 \in [-1, 1]$.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Пример 2.

Последовательность функций $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ равномерно сходится к функции f, тождественно равной нулю на $\mathbb{R}$ (т. к. $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$). Вместе с тем $f_n'(x) = \cos nx$ и эта последовательность не имеет предела при $n \to \infty$, например, в точке $x_0 = \pi$.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Пример 2.

Последовательность функций $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ равномерно сходится к функции f, тождественно равной нулю на $\mathbb{R}$ (т. к. $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$). Вместе с тем $f_n'(x) = \cos nx$ и эта последовательность не имеет предела при $n \to \infty$, например, в точке $x_0 = \pi$.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Первый пример показывает, что предел равномерно сходящейся последовательности дифференцируемых функций может оказаться недифференцируемой функцией в некоторой точке x_0, несмотря на то, что существует $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$.

Во втором примере существует $f'(x_0)$, но не существует $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$.

Таким образом, для того чтобы гарантировать возможность предельного перехода под знаком дифференцирования, т. е. равенство

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x),$$

при естественном условии, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f, мало потребовать равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ к функции f.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Первый пример показывает, что предел равномерно сходящейся последовательности дифференцируемых функций может оказаться недифференцируемой функцией в некоторой точке x_0, несмотря на то, что существует $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$.

Во втором примере существует $f'(x_0)$, но не существует $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$.

Таким образом, для того чтобы гарантировать возможность предельного перехода под знаком дифференцирования, т. е. равенство

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x),$$

при естественном условии, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f, мало потребовать равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ к функции f.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Первый пример показывает, что предел равномерно сходящейся последовательности дифференцируемых функций может оказаться недифференцируемой функцией в некоторой точке x_0, несмотря на то, что существует $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$.
Во втором примере существует $f'(x_0)$, но не существует $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$.
Таким образом, для того чтобы гарантировать возможность предельного перехода под знаком дифференцирования, т. е. равенство

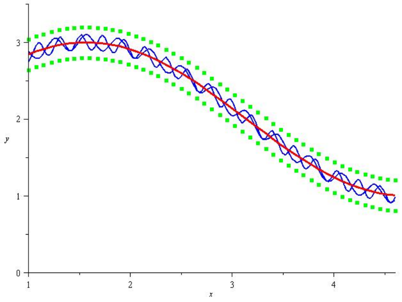
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x),$$

при естественном условии, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f, мало потребовать равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ к функции f.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Это совершенно естественно и с геометрической точки зрения.

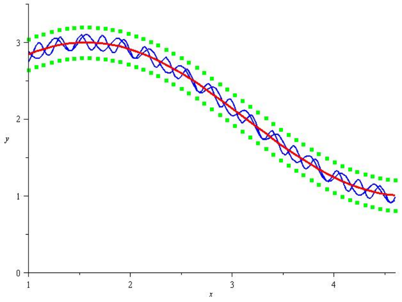
Действительно, равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f означает, что графики функций f_n находятся в ε-полосе графика предельной функции f.



Но в этой полосе графики функций f_n могут быть какими угодно и вовсе не обязательно, чтобы касательные к этим графикам в фиксированной точке x_0 имели какое-то предельное положение, т. е. стабилизировались.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

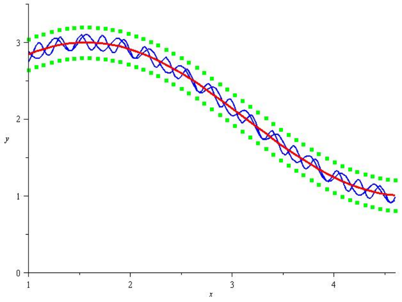
Это совершенно естественно и с геометрической точки зрения. Действительно, равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f означает, что графики функций f_n находятся в ε-полосе графика предельной функции f.



Но в этой полосе графики функций f_n могут быть какими угодно и вовсе не обязательно, чтобы касательные к этим графикам в фиксированной точке x_0 имели какое-то предельное положение, т. е. стабилизировались.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

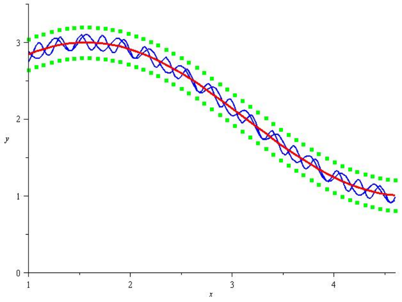
Это совершенно естественно и с геометрической точки зрения. Действительно, равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f означает, что графики функций f_n находятся в ε-полосе графика предельной функции f.



Но в этой полосе графики функций f_n могут быть какими угодно и вовсе не обязательно, чтобы касательные к этим графикам в фиксированной точке x_0 имели какое-то предельное положение, т. е. стабилизировались.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Это совершенно естественно и с геометрической точки зрения. Действительно, равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f означает, что графики функций f_n находятся в ε-полосе графика предельной функции f.



Но в этой полосе графики функций f_n могут быть какими угодно и вовсе не обязательно, чтобы касательные к этим графикам в фиксированной точке x_0 имели какое-то предельное положение, т. е. стабилизировались.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Теорема (о дифференцировании предела последовательности непрерывно дифференцируемых функций).

Пусть $\{f_n\}$ *– последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке* $[a, b]$ *функций. Предположим, что в некоторой точке* $x_0 \in [a, b]$ *числовая последовательность* $\{f_n(x_0)\}$ *сходится, а функциональная последовательность* $\{f_n'\}$ *равномерно сходится на* $[a, b]$. *Тогда исходная последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно сходится на* $[a, b]$ *к непрерывно дифференцируемой функции* f, *причем для любого* $x \in [a, b]$ *справедливо равенство*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Доказательство.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Теорема (о дифференцировании предела последовательности непрерывно дифференцируемых функций).

Пусть $\{f_n\}$ *– последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке* $[a, b]$ *функций. Предположим, что в некоторой точке* $x_0 \in [a, b]$ *числовая последовательность* $\{f_n(x_0)\}$ *сходится, а функциональная последовательность* $\{f_n'\}$ *равномерно сходится на* $[a, b]$. *Тогда исходная последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно сходится на* $[a, b]$ *к непрерывно дифференцируемой функции* f, *причем для любого* $x \in [a, b]$ *справедливо равенство*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Доказательство.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Доказанную теорему для рядов можно переформулировать следующим образом.

Теорема (о почленном дифференцировании ряда).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\{u_n\}$, такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$, а ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на всем отрезке $[a, b]$, его сумма является непрерывно дифференцируемой функцией и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad (x \in [a, b]).$$

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Доказанную теорему для рядов можно переформулировать следующим образом.

Теорема (о почленном дифференцировании ряда).

Пусть на отрезке $[a, b]$ *задана последовательность непрерывно дифференцируемых функций* $\{u_n\}$, *такая, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится в некоторой точке* $x_0 \in [a, b]$, *а ряд из производных* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *сходится равномерно на* $[a, b]$. *Тогда исходный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на всем отрезке* $[a, b]$, *его сумма является непрерывно дифференцируемой функцией и*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad (x \in [a, b]).$$

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Для доказательства этой теоремы достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

В двух последних теоремах мы предполагали непрерывность производных. Это существенно использовалось при доказательстве, т. к. оно основывалось на применении формулы Ньютона – Лейбница. Вместе с тем, при сформулированных условиях мы смогли гарантировать непрерывность производной предельной функции. Следующая теорема не содержит условия непрерывности производных функций f_n и, естественно, не гарантирует непрерывность производной у предельной функции.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Для доказательства этой теоремы достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

В двух последних теоремах мы предполагали непрерывность производных. Это существенно использовалось при доказательстве, т. к. оно основывалось на применении формулы Ньютона – Лейбница. Вместе с тем, при сформулированных условиях мы смогли гарантировать непрерывность производной предельной функции. Следующая теорема не содержит условия непрерывности производных функций f_n и, естественно, не гарантирует непрерывность производной у предельной функции.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Для доказательства этой теоремы достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

В двух последних теоремах мы предполагали непрерывность производных. Это существенно использовалось при доказательстве, т. к. оно основывалось на применении формулы Ньютона – Лейбница. Вместе с тем, при сформулированных условиях мы смогли гарантировать непрерывность производной предельной функции.
Следующая теорема не содержит условия непрерывности производных функций f_n и, естественно, не гарантирует непрерывность производной у предельной функции.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Для доказательства этой теоремы достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

В двух последних теоремах мы предполагали непрерывность производных. Это существенно использовалось при доказательстве, т. к. оно основывалось на применении формулы Ньютона – Лейбница. Вместе с тем, при сформулированных условиях мы смогли гарантировать непрерывность производной предельной функции. Следующая теорема не содержит условия непрерывности производных функций f_n и, естественно, не гарантирует непрерывность производной у предельной функции.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Теорема (о дифференцировании предела последовательности дифференцируемых функций).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность дифференцируемых функций $\{f_n\}$, сходящаяся в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ и такова, что функциональная последовательность $\{f_n'\}$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на всем отрезке $[a, b]$ к некоторой функции f, причем эта функция f дифференцируема на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Доказательство.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Теорема (о дифференцировании предела последовательности дифференцируемых функций).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность дифференцируемых функций $\{f_n\}$, сходящаяся в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ и такова, что функциональная последовательность $\{f_n'\}$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на всем отрезке $[a, b]$ к некоторой функции f, причем эта функция f дифференцируема на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Доказательство.

§4. Равномерная сходимость и дифференцирование

Упражнение. Сформулируйте и докажите самостоятельно аналог последней теоремы для рядов.

§5. Перестановка предельных переходов

§5. Перестановка предельных переходов

Теорема (о предельном переходе в пределе функциональной последовательности).

Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{f_n\}$, равномерно сходящаяся к функции f на E. Пусть x_0 – предельная точка множества E и при каждом n существует $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = y_n$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ имеет конечный предел y_0 и существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

Доказательство.

§5. Перестановка предельных переходов

Теорема (о предельном переходе в пределе функциональной последовательности).

Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{f_n\}$, равномерно сходящаяся к функции f на E. Пусть x_0 – предельная точка множества E и при каждом n существует $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = y_n$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ имеет конечный предел y_0 и существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

Доказательство.

§5. Перестановка предельных переходов

<u>**Замечание.**</u> Доказанная теорема утверждает, что при указанных условиях можно менять местами предельные переходы, а именно,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

В случае, если условия теоремы не выполнены, такое равенство может оказаться неверным.

§5. Перестановка предельных переходов

Замечание. Доказанная теорема утверждает, что при указанных условиях можно менять местами предельные переходы, а именно,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

В случае, если условия теоремы не выполнены, такое равенство может оказаться неверным.

§5. Перестановка предельных переходов

Аналог доказанной теоремы для рядов имеет следующий вид.

Теорема (о почленном переходе к пределу).

Пусть на множестве E задан равномерно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Пусть x_0 – предельная точка множества E и для любого n существует $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = \alpha_n$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится и существует

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

§5. Перестановка предельных переходов

Замечание. Эта теорема дает достаточные условия, при которых сумму и предел можно менять местами.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Доказательство критерия Коши

Необходимость. Пусть последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на E. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если возьмем произвольные $n, m \geq N$, то для любого $x \in E$ получим

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. выполнено условие теоремы (условие Коши).

Продолжение доказательства критерия Коши

Достаточность. Пусть выполнено условие Коши.
Зафиксируем $x \in E$ и получим числовую последовательность $\{f_n(x)\}$, которая, согласно условию Коши, является фундаментальной и, следовательно, сходящейся. Обозначим ее предел через $f(x)$. Так как $x \in E$ произвольное, то, проделав эту операцию для всех $x \in E$, получим функцию $f(x)$.

Продолжение доказательства критерия Коши

Достаточность. Пусть выполнено условие Коши. Зафиксируем $x \in E$ и получим числовую последовательность $\{f_n(x)\}$, которая, согласно условию Коши, является фундаментальной и, следовательно, сходящейся. Обозначим ее предел через $f(x)$. Так как $x \in E$ произвольное, то, проделав эту операцию для всех $x \in E$, получим функцию $f(x)$.

Окончание доказательства критерия Коши

Покажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ стремится к $f(x)$ равномерно на E. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой номер N, что для всех $n, m \geq N$ и для любого $x \in E$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Зафиксируем $n \geq N$, $x \in E$ и устремим $m \to \infty$. Тогда получим $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Это неравенство выполнено для любого $n \geq N$ и для всех $x \in E$, а это и означает, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на E. ■

Доказательство признака Вейерштрасса

В силу условия теоремы, имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \quad (x \in E).$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по условию, то, в силу критерия Коши для числовых рядов, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$. Но тогда и неравенство $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$ будет выполненным для всех $x \in E$, т. е. выполнено условие критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда, в силу которого исходный ряд сходится равномерно на E. ■

Доказательство теоремы о непрерывности предела

Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной сходимостью, найдем такой номер N, что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Возьмем произвольное $n \geq N$. Так как f_n непрерывна в точке x_0, то найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Пусть $|x - x_0| < \delta$. Тогда

$$|f(x) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

и теорема доказана. ■

Доказательство теоремы о предельном переходе под знаком интеграла

Случай непрерывных функций

В силу теоремы о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, предельная функция f непрерывна на $[a, b]$, а значит и интегрируема на $[a, b]$. Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной сходимостью, найдем такой номер N, что для всех $n \geq N$ и для любого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Интегрируя это неравенство, получаем, что при всех $n \geq N$

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

и теорема доказана. ■

Доказательство теоремы о почленном интегрировании ряда

Случай непрерывных функций

Эта теорема является простым следствием предыдущей. Действительно, функции $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ непрерывны как суммы конечного числа непрерывных функций u_k, и последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно на $[a, b]$. Тогда, по уже доказанной теореме,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b f_n(x)\,dx \;\to\; \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx.$$

Доказательство теоремы о почленном интегрировании ряда

Случай интегрируемых функций

Доказательство равенства производится точно так же, как и в предыдущей теореме, при условии, что $\int_a^b f(x)\,dx$ существует. Поэтому достаточно доказать лишь интегрируемость на $[a, b]$ функции f. Для этого воспользуемся критерием интегрируемости в терминах колебаний, согласно которому функция f интегрируема на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π отрезка $[a, b]$, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, справедливо неравенство $\sum\limits_{i=0}^{s-1} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon$, где $\omega_i(f)$ – колебания функции f на частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$.

Продолжение доказательства теоремы о почленном интегрировании ряда

Случай интегрируемых функций

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь равномерной сходимостью последовательности $\{f_n\}$, найдем такое N, что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Если $n \geq N$, то

$$\left| f\left(x'\right) - f\left(x''\right) \right| \leq$$

$$\leq \left| f\left(x'\right) - f_n\left(x'\right) \right| + \left| f_n\left(x'\right) - f_n\left(x''\right) \right| + \left| f_n\left(x''\right) - f\left(x''\right) \right| <$$

$$< \left| f_n\left(x'\right) - f_n\left(x''\right) \right| + 2\varepsilon.$$

Окончание доказательства теоремы о почленном интегрировании ряда

Случай интегрируемых функций

Отсюда следует, что при любом разбиении $\omega_i(f) \leq \omega_i\left(f_n\right) + 2\varepsilon$, так что

$$\sum_{i=0}^{s-1} \omega_i(f)\Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{s-1} \omega_i\left(f_n\right)\Delta x_i + 2\varepsilon(b-a).$$

Первое слагаемое справа мало в силу интегрируемости f_n, т. е. существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения П, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, первое слагаемое справа будет меньшим, чем ε. Поэтому, в силу критерия интегрируемости в терминах колебаний, получаем, что функция f интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай непрерывно дифференцируемых функций

Обозначим $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. По теореме о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций получаем, что функция φ непрерывна на $[a, b]$. Положим $g(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$. Применим на отрезке с концами x_0 и x теорему о предельном переходе под знаком интеграла к последовательности $\{f_n'(t)\}$. Тогда получим

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(x_0))$$

(последнее равенство справедливо в силу формулы Ньютона – Лейбница).

Доказательство теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай непрерывно дифференцируемых функций

Обозначим $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. По теореме о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций получаем, что функция φ непрерывна на $[a, b]$. Положим $g(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$. Применим на отрезке с концами x_0 и x теорему о предельном переходе под знаком интеграла к последовательности $\{f_n'(t)\}$. Тогда получим

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \left(f_n(x) - f_n(x_0)\right)$$

(последнее равенство справедливо в силу формулы Ньютона – Лейбница).

Доказательство теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай непрерывно дифференцируемых функций

Обозначим $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. По теореме о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций получаем, что функция φ непрерывна на $[a, b]$. Положим $g(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$. Применим на отрезке с концами x_0 и x теорему о предельном переходе под знаком интеграла к последовательности $\{f_n'(t)\}$. Тогда получим

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \left(f_n(x) - f_n\left(x_0\right)\right)$$

(последнее равенство справедливо в силу формулы Ньютона – Лейбница).

Продолжение доказательства теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай непрерывно дифференцируемых функций

По условию теоремы существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Тогда из равенства $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(f_n(x)-f_n(x_0))$ следует, что существует и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, т. е. мы показали, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на $[a,b]$. Обозначим $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ и получим, что $g(x)=f(x)-f(x_0)$, а так как функция g дифференцируема (как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции φ) и $g'(x)=\varphi(x)$ (в силу формулы Ньютона – Лейбница), то отсюда следует, что функция f также дифференцируема и $f'(x)=\varphi(x)$, т. е. функция f имеет производную, эта производная непрерывна и справедливо равенство, которое утверждается в формулировке теоремы.

Продолжение доказательства теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай непрерывно дифференцируемых функций

Осталось показать, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f равномерно на $[a, b]$. Имеем

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |(f_n(x) - f_n(x_0)) - (f(x) - f(x_0))| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Второе слагаемое справа мало при достаточно больших n, а первое оцениваем так:

$$\left| \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt - \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x} \left(f_n'(t) - \varphi(t) \right) \, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{a}^{b} \left| f_n'(t) - \varphi(t) \right| \, dt.$$

Ококнчание доказательства теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай непрерывно дифференцируемых функций

Теперь остается учесть, что последовательность $\{f_n'\}$ сходится к функции φ равномерно на $[a, b]$, и тем самым завершается доказательство теоремы. $\blacksquare$

Доказательство теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай дифференцируемых функций

Зададим $\varepsilon > 0$. По критерию Коши, в силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n'\}$, существует такой номер N, что для всех $n, m \geq N$ и для любого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$\left|f_n'(x) - f_m'(x)\right| < \varepsilon.$$

Обозначим $\varphi_{n,m}(x) = f_n(x) - f_m(x)$. Тогда $\left|\varphi_{n,m}'(x)\right| < \varepsilon$ и, в силу формулы Лагранжа,

$$\left|\varphi_{n,m}(x) - \varphi_{n,m}\left(x_0\right)\right| \leq \left|\varphi_{n,m}'(\xi)\right| \cdot \left|x - x_0\right| \leq \varepsilon \left|x - x_0\right|.$$

Продолжение доказательства теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай дифференцируемых функций

Отсюда следует, что

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |\varphi_{n,m}(x)| \le |\varphi_{n,m}(x) - \varphi_{n,m}(x_0)| + |\varphi_{n,m}(x_0)| \le$$

$$\le \varepsilon |x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|.$$

Из этого неравенства видно, что последовательность $\{f_n\}$ удовлетворяет условию критерия Коши, а значит, она равномерно сходится.

Продолжение доказательства теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай дифференцируемых функций

Обозначим $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Далее, для $n, m \geq N$ имеем

$$|\varphi_{n,m}(x+h) - \varphi_{n,m}(x)| \leq \varepsilon |h| \quad (x, x+h \in [a, b]).$$

Это неравенство можем переписать так:

$$\left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h} \right| \leq \varepsilon.$$

Устремим $n \to \infty$ и тогда получим

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h} \right| \leq \varepsilon \quad (m \geq N).$$

Продолжение доказательства теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай дифференцируемых функций

Зафиксируем $m \geq N$ и найдем такое $\delta > 0$, что для всех h, удовлетворяющих условию $0 < |h| < \delta$, справедливо неравенство

$$\left| \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h} - f'_m(x) \right| < \varepsilon.$$

Тогда получим, что

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'_m(x) \right| < 2\varepsilon \quad (0 < |h| < \delta).$$

Если в неравенстве $|f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon$ $(n, m \geq N)$ перейдем к пределу при $n \to \infty$ (как уже доказано, он существует), то получим

$$|\varphi(x) - f'_m(x)| \leq \varepsilon,$$

где обозначено $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$.

Окончание доказательства теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай дифференцируемых функций

Отсюда следует, что

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x)\right| \leq 3\varepsilon \quad (0<|h|<\delta).$$

Это означает, что существует

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\varphi(x)=\lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad (x\in[a,b]).$$

$\blacksquare$

Доказательство теоремы о перестановке предельных переходов

Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной сходимостью, найдем такой номер N, что для всех $n, m \geq N$ и для каждого $x \in E$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Устремляя $x \to x_0$, получаем, что $|y_n - y_m| \leq \varepsilon$ для всех $n, m \geq N$, т. е. последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна. В силу критерия Коши, существует $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Окончание доказательства теоремы о перестановке предельных переходов

Имеем

$$|f(x) - y_0| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - y_n| + |y_n - y_0| .$$

Если $n \geq N$, то для всех $x \in E$, в силу равномерной сходимости, справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Если x достаточно близко к x_0, т. е. $|x - x_0| < \delta$, то $|f_n(x) - y_n| < \varepsilon$. При $n \geq N$ имеем также $|y_n - y_0| < \varepsilon$. Тогда и $|f(x) - y_0| \leq 3\varepsilon$, если только $|x - x_0| < \delta$, а это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$. ■