Математический анализ

Лекции по математическому анализу

Анатолий КОРЕНОВСКИЙ

Кафедра математического анализа
Институт математики, экономики и механики

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

21 января 2013 г.

Текст лекций

Данные лекции составлены на основе учебника

В. И. Коляда, А. А. Кореновский. *Курс лекций по математическому анализу, ч.1,2. Одесса, Астропринт, 2010.*

Список литературы

Учебники

- 1. Г. М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1,2,3. М., Наука, 1970.*
- 2. Э. Ландау. *Основы анализа. М., ИЛ, 1947.*
- 3. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа, ч. 1,2. М., Наука, 1982.
- 4. А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа, М., Наука, 1988.
- 5. С. М. Никольский. Курс математического анализа, т. 1,2. М., Наука, 1990.
- 6. Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. 1,2. М., Наука, 1964.
- 7. Л. Д. Кудрявцев. Математический анализ, т. 1,2. М., Высшая школа, 1973.

Список литературы

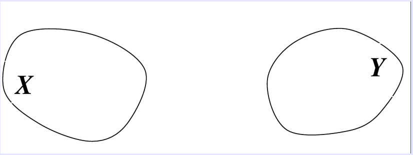
Сборники задач

- 8. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., Наука, 1977.
- 9. Л. Д. Кудрявцев и др. Сборник задач по математическому анализу, М., Наука, 1984.
- 10. И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. Математический анализ в задачах и упражнениях, М., Изд-во МГУ, 1991.
- 11. И. И. Ляшко и др. Математический анализ в примерах и задачах, Киев, Вища школа, 1974.

Тема 3. Пределы функций

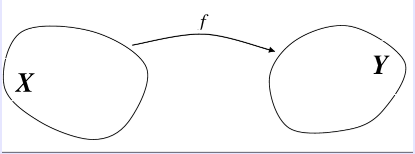
§1. Понятие функции

Пусть X и Y – произвольные множества.



§1. Понятие функции

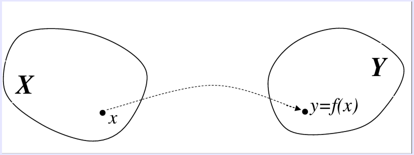
Пусть X и Y – произвольные множества.



Отображение f множества X во множество Y называется *функцией, заданной на X со значениями во множестве Y.*

§1. Понятие функции

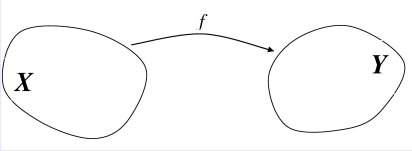
Пусть X и Y – произвольные множества.



Отображение f множества X во множество Y называется *функцией, заданной на X со значениями во множестве Y.*

Другими словами, если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие некоторый единственный элемент $y = f(x)$ множества Y, то говорят, что на множестве X задана функция со значениями в Y.

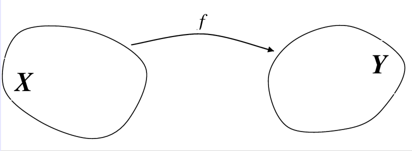
§1. Понятие функции



Обозначения:

1. $y = f(x)$,
2. $f : X \to Y$,
3. $x \to f(x)$.

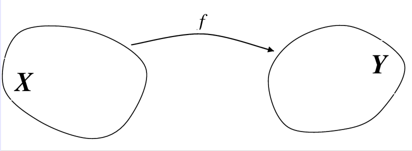
§1. Понятие функции



Обозначения:

1. $y = f(x)$,
2. $f: X \to Y$,
3. $x \to f(x)$.

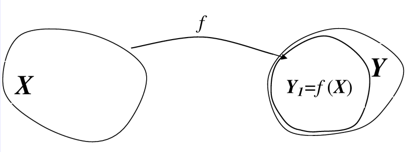
§1. Понятие функции



Обозначения:

1. $y = f(x)$,
2. $f : X \to Y$,
3. $x \to f(x)$.

§1. Понятие функции



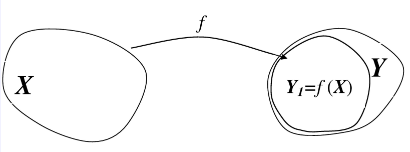
Обозначения:

1. $y = f(x)$,
2. $f : X \to Y$,
3. $x \to f(x)$.

Множество X называют областью определения функции f.

Если $x \in X$, то $f(x)$ называют значением функции f в точке x.
Множество всех значений функции f называется областью значений функции f. Область значений содержится во множестве Y, но не обязана совпадать с Y.

§1. Понятие функции

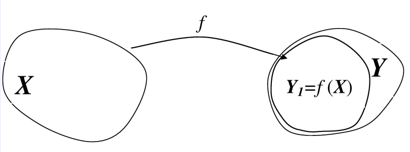


Обозначения:

1. $y = f(x)$,
2. $f : X \to Y$,
3. $x \to f(x)$.

Множество X называют областью определения функции f.
Если $x \in X$, то $f(x)$ называют значением функции f в точке x.
Множество всех значений функции f называется областью значений функции f. Область значений содержится во множестве Y, но не обязана совпадать с Y.

§1. Понятие функции

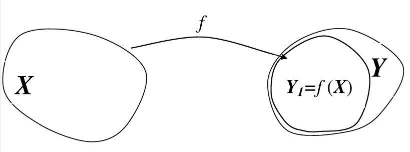


Обозначения:

1. $y = f(x)$,
2. $f : X \to Y$,
3. $x \to f(x)$.

Множество X называют областью определения функции f. Если $x \in X$, то $f(x)$ называют значением функции f в точке x. Множество всех значений функции f называется областью значений функции f. Область значений содержится во множестве Y, но не обязана совпадать с Y.

§1. Понятие функции



Обозначения:

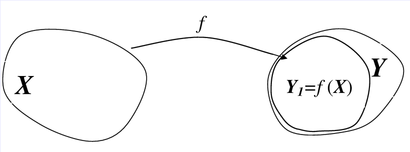
1. $y = f(x)$,
2. $f : X \to Y$,
3. $x \to f(x)$.

Множество X называют областью определения функции f. Если $x \in X$, то $f(x)$ называют значением функции f в точке x. Множество всех значений функции f называется областью значений функции f. Область значений содержится во множестве Y, но не обязана совпадать с Y.

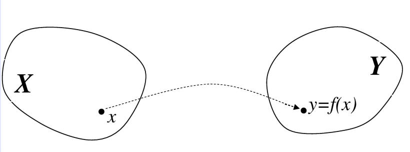
§1. Понятие функции

Например, если функция $f:\ \mathbb{R}\ \to\ \mathbb{R}$ задана равенством $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, то область ее значений $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ содержится в $\mathbb{R}$, но не совпадает с $\mathbb{R}$.

§1. Понятие функции

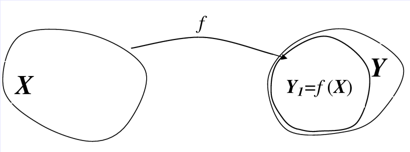


Множество значений называют также образом множества X при отображении f и обозначают $f(X)$.

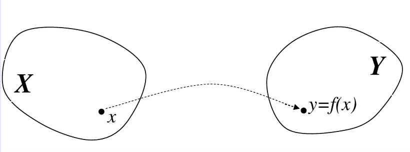


Пусть $x \in X$, $y = f(x) \in Y$. Тогда y называют образом элемента x, а x – прообразом элемента y.

§1. Понятие функции



Множество значений называют также образом множества X при отображении f и обозначают $f(X)$.



Пусть $x \in X$, $y = f(x) \in Y$. Тогда y называют образом элемента x, а x – прообразом элемента y.

§1. Понятие функции

В определении функции множества X и Y произвольные.

Так, последовательность также является функцией, определенной на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ и действующая в $\mathbb{R}$. Это можно записать так: $x_n = f(n),\ n \in \mathbb{N}$.

Другой пример получим, если взять в качестве X совокупность всех числовых последовательностей, а $Y = \overline{\mathbb{R}}$. Тогда на X можно определить функцию следующим образом. Каждой последовательности $x \in X$ поставим в соответствие ее верхний предел, т.е. $y = f(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, где $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

§1. Понятие функции

В определении функции множества X и Y произвольные.

Так, последовательность также является функцией, определенной на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ и действующая в $\mathbb{R}$. Это можно записать так: $x_n = f(n), \ n \in \mathbb{N}$.

Другой пример получим, если взять в качестве X совокупность всех числовых последовательностей, а $Y = \overline{\mathbb{R}}$. Тогда на X можно определить функцию следующим образом. Каждой последовательности $x \in X$ поставим в соответствие ее верхний предел, т.е. $y = f(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, где $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

§1. Понятие функции

Пусть $\mathbb{R}^2$ – совокупность всех упорядоченных пар действительных чисел. Определим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, действующую по такому правилу $f(x) = (\sin x, \cos x)$. Множество всех значений такой функции можно изобразить на плоскости в виде окружности с центром в начале координат радиуса 1.

Другую функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ можно, например, определить равенством $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

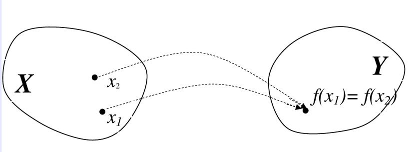
§1. Понятие функции

Пусть $\mathbb{R}^2$ – совокупность всех упорядоченных пар действительных чисел. Определим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, действующую по такому правилу $f(x) = (\sin x, \cos x)$. Множество всех значений такой функции можно изобразить на плоскости в виде окружности с центром в начале координат радиуса 1.

Другую функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ можно, например, определить равенством $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

§1. Понятие функции

Мы определили функции, которые называют однозначными. Этим подчеркивается тот факт, что каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент из множества Y. Под функцией мы всегда будем понимать однозначную функцию, т.е. такую, что условие $f(x_1) \neq f(x_2)$ влечет $x_1 \neq x_2$.

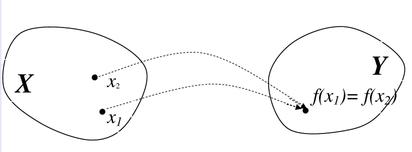


Обратная импликация справедлива не для каждой функции.

Например, если $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, то $f(1) = f(-1) = 1$.

§1. Понятие функции

Мы определили функции, которые называют однозначными. Этим подчеркивается тот факт, что каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент из множества Y. Под функцией мы всегда будем понимать однозначную функцию, т.е. такую, что условие $f(x_1) \neq f(x_2)$ влечет $x_1 \neq x_2$.

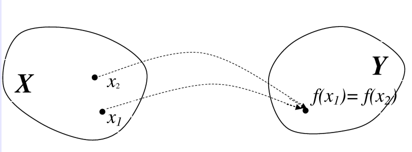


Обратная импликация справедлива не для каждой функции.

Например, если $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, то $f(1) = f(-1) = 1$.

§1. Понятие функции

Мы определили функции, которые называют однозначными. Этим подчеркивается тот факт, что каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент из множества Y. Под функцией мы всегда будем понимать однозначную функцию, т.е. такую, что условие $f(x_1) \neq f(x_2)$ влечет $x_1 \neq x_2$.

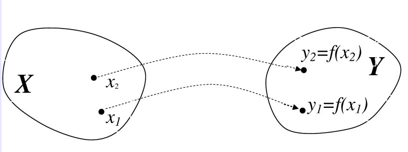


Обратная импликация справедлива не для каждой функции.

Например, если $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, то $f(1) = f(-1) = 1$.

§1. Понятие функции

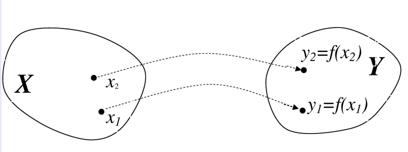
Определение. Функция $f : X \to Y$ называется взаимно однозначной, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 \neq x_2$ вытекает $f(x_1) \neq f(x_2)$.



§1. Понятие функции

Например, рассмотренная нами функция $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ не является взаимно однозначной.

Если же рассмотреть другую функцию $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, действующую по правилу $f(x) = x^2$, то такая функция будет взаимно однозначной. Это вытекает из теоремы о существовании и единственности корня.

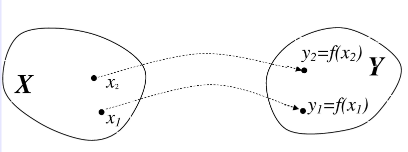


Иначе говоря, взаимно однозначная функция это такая функция, для которой *у каждого образа существует единственный прообраз.*

§1. Понятие функции

Например, рассмотренная нами функция $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ не является взаимно однозначной.

Если же рассмотреть другую функцию $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, действующую по правилу $f(x) = x^2$, то такая функция будет взаимно однозначной. Это вытекает из теоремы о существовании и единственности корня.

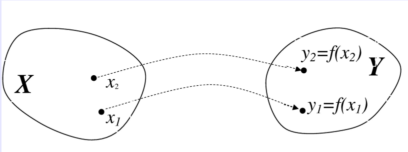


Иначе говоря, взаимно однозначная функция это такая функция, для которой *у каждого образа существует единственный прообраз.*

§1. Понятие функции

Например, рассмотренная нами функция $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ не является взаимно однозначной.

Если же рассмотреть другую функцию $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, действующую по правилу $f(x) = x^2$, то такая функция будет взаимно однозначной. Это вытекает из теоремы о существовании и единственности корня.



Иначе говоря, взаимно однозначная функция это такая функция, для которой *у каждого образа существует единственный прообраз*.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Пусть заданы два множества X и Y. Эти множества называются **эквивалентными**, если существует взаимно однозначная функция $f : X \to Y$, такая, что $f(X) = Y$.

Говорят, что в этом случае между множествами X и Y можно установить взаимно однозначное соответствие.

Обозначают это так: $X \sim Y$.

Если $X \sim Y$, то множества X и Y называют **равномощными**.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Пусть заданы два множества X и Y. Эти множества называются эквивалентными, если существует взаимно однозначная функция $f: X \to Y$, такая, что $f(X) = Y$. Говорят, что в этом случае между множествами X и Y можно установить взаимно однозначное соответствие.

Обозначают это так: $X \sim Y$.

Если $X \sim Y$, то множества X и Y называют равномощными.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Отметим основные свойства равномощных множеств.

1. *Из $X \sim Y$ следует $Y \sim X$ (симметричность).*
2. *Для любого множества X справедливо $X \sim X$ (рефлексивность).*
3. *Если $X \sim Y$ и $Y \sim Z$, то $X \sim Z$ (транзитивность).*

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Отметим основные свойства равномощных множеств.

1. *Из $X \sim Y$ следует $Y \sim X$ (симметричность).*
2. *Для любого множества X справедливо $X \sim X$ (рефлексивность).*
3. *Если $X \sim Y$ и $Y \sim Z$, то $X \sim Z$ (транзитивность).*

§1. Понятие функции
Эквивалентные множества

Отметим основные свойства равномощных множеств.

1. *Из $X \sim Y$ следует $Y \sim X$ (симметричность).*
2. *Для любого множества X справедливо $X \sim X$ (рефлексивность).*
3. *Если $X \sim Y$ и $Y \sim Z$, то $X \sim Z$ (транзитивность).*

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Отметим основные свойства равномощных множеств.

1. *Из $X \sim Y$ следует $Y \sim X$ (симметричность).*
2. *Для любого множества X справедливо $X \sim X$ (рефлексивность).*
3. *Если $X \sim Y$ и $Y \sim Z$, то $X \sim Z$ (транзитивность).*

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

1. Множества $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{2, 3, 4\}$ эквивалентны, т.к. между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, например, по такому правилу $f(x) = x + 1$, $x \in X$. Ясно, что такое соответствие не единственно.

2. Множества $\{1, 2, 3\}$ и $\{2, 3\}$ не эквивалентны т.к. не может каждый элемент множества $\{2, 3\}$ иметь единственный прообраз во множестве $\{1, 2, 3\}$ при каком-либо отображении первого множества на второе, т.е. не существует взаимно однозначного отображения одного из этих множеств на другое.

3. Множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ эквивалентны. Взаимно однозначное отображение множества $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Z}$ можно установить, например, по такому правилу:
$1 \to 0$, $2 \to 1$, $3 \to -1$, $4 \to 2$, $5 \to -2$ и т.д.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

1. Множества $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{2, 3, 4\}$ эквивалентны, т.к. между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, например, по такому правилу $f(x) = x + 1$, $x \in X$. Ясно, что такое соответствие не единственно.

2. Множества $\{1, 2, 3\}$ и $\{2, 3\}$ не эквивалентны т.к. не может каждый элемент множества $\{2, 3\}$ иметь единственный прообраз во множестве $\{1, 2, 3\}$ при каком-либо отображении первого множества на второе, т.е. не существует взаимно однозначного отображения одного из этих множеств на другое.

3. Множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ эквивалентны. Взаимно однозначное отображение множества $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Z}$ можно установить, например, по такому правилу:
$1 \to 0$, $2 \to 1$, $3 \to -1$, $4 \to 2$, $5 \to -2$ и т.д.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

1. Множества $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{2, 3, 4\}$ эквивалентны, т.к. между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, например, по такому правилу $f(x) = x + 1$, $x \in X$. Ясно, что такое соответствие не единственно.

2. Множества $\{1, 2, 3\}$ и $\{2, 3\}$ не эквивалентны т.к. не может каждый элемент множества $\{2, 3\}$ иметь единственный прообраз во множестве $\{1, 2, 3\}$ при каком-либо отображении первого множества на второе, т.е. не существует взаимно однозначного отображения одного из этих множеств на другое.

3. Множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ эквивалентны. Взаимно однозначное отображение множества $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Z}$ можно установить, например, по такому правилу:
$1 \to 0$, $2 \to 1$, $3 \to -1$, $4 \to 2$, $5 \to -2$ и т.д.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Определения. Для $n \in \mathbb{N}$ будем обозначать $K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Множество A называется конечным, если оно эквивалентно некоторому K_n. Поскольку $K_n \not\sim K_m$ при $n \neq m$, то натуральное число n в определении конечного множества определяется однозначно. Это число n называется количеством элементов во множестве A.

2. Непустое множество A называется бесконечным, если оно не эквивалентно никакому из K_n. Другими словами, непустое множество A бесконечно, если оно не является конечным.

3. Множество A называется счетным, если $A \sim \mathbb{N}$.

4. Множество A называется не более, чем счетным, если оно пусто, конечно или счетно.

5. Множество A называется несчетным, если A бесконечно и не является счетным.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Определения. Для $n \in \mathbb{N}$ будем обозначать $K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Множество A называется конечным, если оно эквивалентно некоторому K_n. Поскольку $K_n \not\sim K_m$ при $n \neq m$, то натуральное число n в определении конечного множества определяется однозначно. Это число n называется количеством элементов во множестве A.

2. Непустое множество A называется бесконечным, если оно не эквивалентно никакому из K_n. Другими словами, непустое множество A бесконечно, если оно не является конечным.

3. Множество A называется счетным, если $A \sim \mathbb{N}$.

4. Множество A называется не более, чем счетным, если оно пусто, конечно или счетно.

5. Множество A называется несчетным, если A бесконечно и не является счетным.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Определения. Для $n \in \mathbb{N}$ будем обозначать $K_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

1. Множество A называется конечным, если оно эквивалентно некоторому K_n. Поскольку $K_n \not\sim K_m$ при $n \neq m$, то натуральное число n в определении конечного множества определяется однозначно. Это число n называется количеством элементов во множестве A.

2. Непустое множество A называется бесконечным, если оно не эквивалентно никакому из K_n. Другими словами, непустое множество A бесконечно, если оно не является конечным.

3. Множество A называется счетным, если $A \sim \mathbb{N}$.

4. Множество A называется не более, чем счетным, если оно пусто, конечно или счетно.

5. Множество A называется несчетным, если A бесконечно и не является счетным.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Определения. Для $n \in \mathbb{N}$ будем обозначать $K_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

1. Множество A называется **конечным**, если оно эквивалентно некоторому K_n. Поскольку $K_n \not\sim K_m$ при $n \neq m$, то натуральное число n в определении конечного множества определяется однозначно. Это число n называется **количеством элементов** во множестве A.

2. Непустое множество A называется **бесконечным**, если оно не эквивалентно никакому из K_n. Другими словами, непустое множество A бесконечно, если оно не является конечным.

3. Множество A называется **счетным**, если $A \sim \mathbb{N}$.

4. Множество A называется **не более, чем счетным**, если оно пусто, конечно или счетно.

5. Множество A называется **несчетным**, если A бесконечно и не является счетным.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Определения. Для $n \in \mathbb{N}$ будем обозначать $K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Множество A называется конечным, если оно эквивалентно некоторому K_n. Поскольку $K_n \not\sim K_m$ при $n \neq m$, то натуральное число n в определении конечного множества определяется однозначно. Это число n называется количеством элементов во множестве A.

2. Непустое множество A называется бесконечным, если оно не эквивалентно никакому из K_n. Другими словами, непустое множество A бесконечно, если оно не является конечным.

3. Множество A называется счетным, если $A \sim \mathbb{N}$.

4. Множество A называется не более, чем счетным, если оно пусто, конечно или счетно.

5. Множество A называется несчетным, если A бесконечно и не является счетным.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Определения. Для $n \in \mathbb{N}$ будем обозначать $K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Множество A называется конечным, если оно эквивалентно некоторому K_n. Поскольку $K_n \not\sim K_m$ при $n \neq m$, то натуральное число n в определении конечного множества определяется однозначно. Это число n называется количеством элементов во множестве A.

2. Непустое множество A называется бесконечным, если оно не эквивалентно никакому из K_n. Другими словами, непустое множество A бесконечно, если оно не является конечным.

3. Множество A называется счетным, если $A \sim \mathbb{N}$.

4. Множество A называется не более, чем счетным, если оно пусто, конечно или счетно.

5. Множество A называется несчетным, если A бесконечно и не является счетным.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Если множество A счетно, то между его элементами и элементами множества $\mathbb{N}$ можно установить взаимно однозначное соответствие, или, иначе говоря, все элементы множества A можно занумеровать, т.е. расположить в последовательность.

Теорема 1. *Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел счетно.*

Доказательство.

Другое доказательство.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Если множество A счетно, то между его элементами и элементами множества $\mathbb{N}$ можно установить взаимно однозначное соответствие, или, иначе говоря, все элементы множества A можно занумеровать, т.е. расположить в последовательность.

Теорема 1. *Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел счетно.*

Доказательство.

Другое доказательство.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Если множество A счетно, то между его элементами и элементами множества $\mathbb{N}$ можно установить взаимно однозначное соответствие, или, иначе говоря, все элементы множества A можно занумеровать, т.е. расположить в последовательность.

Теорема 1. *Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел счетно.*

Доказательство.

Другое доказательство.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Итак, мы показали, что множество всех рациональных чисел счетно.

Теорема 2.

Множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ несчетно.

Доказательство.

Следствие. *Множество всех иррациональных чисел несчетно.*

Доказательство. Если бы множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ оказалось счетным, то, объединяя его со счетным множеством $\mathbb{Q}$, мы получили бы, что и множество $\mathbb{R}$ счетно. ■

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Итак, мы показали, что множество всех рациональных чисел счетно.

Теорема 2.

Множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ несчетно.

Доказательство.

Следствие. *Множество всех иррациональных чисел несчетно.*

Доказательство. Если бы множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ оказалось счетным, то, объединяя его со счетным множеством $\mathbb{Q}$, мы получили бы, что и множество $\mathbb{R}$ счетно. ■

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Итак, мы показали, что множество всех рациональных чисел счетно.

Теорема 2.

Множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ несчетно.

Доказательство.

Следствие. *Множество всех иррациональных чисел несчетно.*

Доказательство. Если бы множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ оказалось счетным, то, объединяя его со счетным множеством $\mathbb{Q}$, мы получили бы, что и множество $\mathbb{R}$ счетно. ■

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Итак, мы показали, что множество всех рациональных чисел счетно.

Теорема 2.

Множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ несчетно.

Доказательство.

Следствие. *Множество всех иррациональных чисел несчетно.*

Доказательство. Если бы множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ оказалось счетным, то, объединяя его со счетным множеством $\mathbb{Q}$, мы получили бы, что и множество $\mathbb{R}$ счетно. ■

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Итак, мы показали, что множество $\mathbb{R}$ существенно "богаче", нежели $\mathbb{Q}$. Все элементы множества $\mathbb{R}$, в отличие от $\mathbb{Q}$, нельзя занумеровать. Вместе с тем каждый элемент множества $\mathbb{R}$ может быть представлен в виде предела последовательности элементов из $\mathbb{Q}$. Это свойство называется свойством плотности множества $\mathbb{Q}$ во множестве $\mathbb{R}$.

Теорема 3. *Для каждого действительного числа x существует последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$, сходящаяся к x.*

Доказательство.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Итак, мы показали, что множество $\mathbb{R}$ существенно "богаче", нежели $\mathbb{Q}$. Все элементы множества $\mathbb{R}$, в отличие от $\mathbb{Q}$, нельзя занумеровать. Вместе с тем каждый элемент множества $\mathbb{R}$ может быть представлен в виде предела последовательности элементов из $\mathbb{Q}$. Это свойство называется **свойством плотности** множества $\mathbb{Q}$ во множестве $\mathbb{R}$.

Теорема 3. *Для каждого действительного числа x существует последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$, сходящаяся к x.*

Доказательство.

§1. Понятие функции

Эквивалентные множества

Замечание. При доказательстве теоремы 3 мы построили последовательность рациональных чисел, сходящуюся к заданному действительному x, таких, что $r_n > x$ $(n = 1, 2, \dots)$. Легко видеть, что числа r_n можно выбрать так, чтобы полученная последовательность $\{r_n\}$ была строго убывающей. Также легко можно построить строго возрастающую последовательность рациональных чисел, стремящуюся к заданному действительному числу x.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

§2. Предел функции и его элементарные свойства

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Будем рассматривать функции $f: X \to \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}$.

Окрестностью радиуса $\delta > 0$ (или δ-окрестностью) точки $a \in \mathbb{R}$ мы называли множество таких $x \in \mathbb{R}$, что $a - \delta < x < a + \delta$, или, что то же самое, $|x - a| < \delta$.

Проколотой δ-окрестностью точки a называем δ-окрестность точки $a \in \mathbb{R}$, из которой удалена сама точка a.

Другими словами, проколотая δ-окрестность точки a – это множество всех точек $x \in \mathbb{R}$, таких, что $a - \delta < x < a$ или $a < x < a + \delta$.

Это можно записать так: $0 < |x - a| < \delta$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Будем рассматривать функции $f: X \to \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}$.
Окрестностью радиуса $\delta > 0$ (или δ-окрестностью) точки $a \in \mathbb{R}$ мы называли множество таких $x \in \mathbb{R}$, что $a - \delta < x < a + \delta$, или, что то же самое, $|x - a| < \delta$.
Проколотой δ-окрестностью точки a называем δ-окрестность точки $a \in \mathbb{R}$, из которой удалена сама точка a.
Другими словами, проколотая δ-окрестность точки a – это множество всех точек $x \in \mathbb{R}$, таких, что $a - \delta < x < a$ или $a < x < a + \delta$.
Это можно записать так: $0 < |x - a| < \delta$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Будем рассматривать функции $f: X \to \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}$.

Окрестностью радиуса $\delta > 0$ (или δ-окрестностью) точки $a \in \mathbb{R}$ мы называли множество таких $x \in \mathbb{R}$, что $a - \delta < x < a + \delta$, или, что то же самое, $|x - a| < \delta$.

Проколотой δ-окрестностью точки a называем δ-окрестность точки $a \in \mathbb{R}$, из которой удалена сама точка a.

Другими словами, проколотая δ-окрестность точки a – это множество всех точек $x \in \mathbb{R}$, таких, что $a - \delta < x < a$ или $a < x < a + \delta$.

Это можно записать так: $0 < |x - a| < \delta$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Будем рассматривать функции $f : X \to \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}$.
Окрестностью радиуса $\delta > 0$ (или δ-окрестностью) точки $a \in \mathbb{R}$ мы называли множество таких $x \in \mathbb{R}$, что $a - \delta < x < a + \delta$, или, что то же самое, $|x - a| < \delta$.
Проколотой δ-окрестностью точки a называем δ-окрестность точки $a \in \mathbb{R}$, из которой удалена сама точка a.
Другими словами, проколотая δ-окрестность точки a – это множество всех точек $x \in \mathbb{R}$, таких, что $a - \delta < x < a$ или $a < x < a + \delta$.
Это можно записать так: $0 < |x - a| < \delta$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Определение предела функции по Коши.

Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Число A называется **пределом функции f в точке** a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее, вообще говоря, от ε, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Если число A является пределом функции x в точке a, то говорят, что **функция f стремится к A при x, стремящемся к** a, и пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Определение предела функции по Коши.

Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Число A называется пределом функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее, вообще говоря, от ε, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

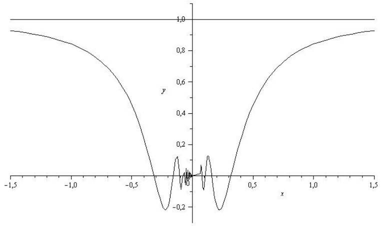
Если число A является пределом функции x в точке a, то говорят, что функция f стремится к A при x, стремящемся к a, и пишут: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 1.

Пусть $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $a = 0$.

Данная функция определена в проколотой окрестности точки $a = 0$.

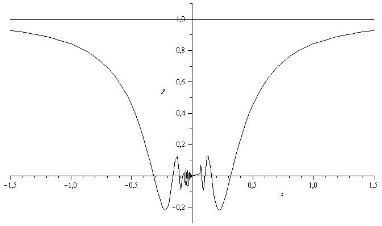


§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 1.

Пусть $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $a = 0$.

Данная функция определена в проколотой окрестности точки $a = 0$.

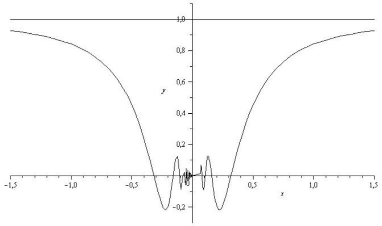


§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 1.

Пусть $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $a = 0$.

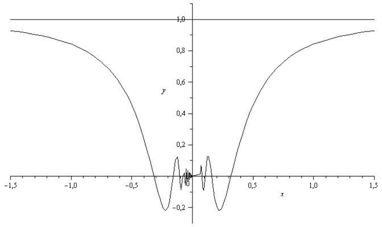
Данная функция определена в проколотой окрестности точки $a = 0$.



§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 1 (продолжение).

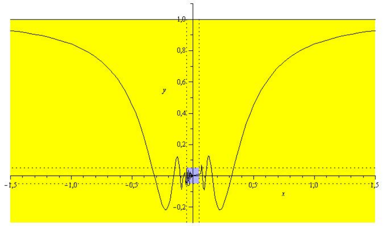
Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.$



§2. Предел функции и его элементарные свойства

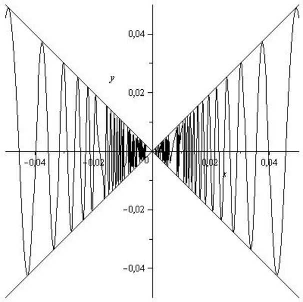
Пример 1 (продолжение).

Показем, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Рассматриваем функцию в малой окрестности точки $a = 0$.



§2. Предел функции и его элементарные свойства

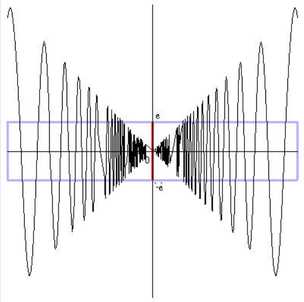
Пример 1 (продолжение).



В окрестности точки $a = 0$ график имеет такой вид.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 1 (продолжение).



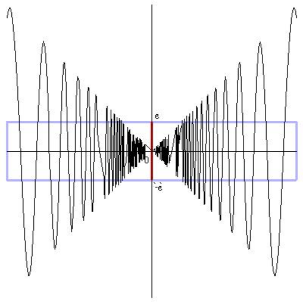
Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда для $x \neq 0$ неравенство

$$|f(x) - 0| = \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon$$

справедливо, если только $0 < |x - 0| = |x| < \delta$, где в качестве δ мы выбираем ε, т. е. $\delta = \varepsilon$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 1 (продолжение).



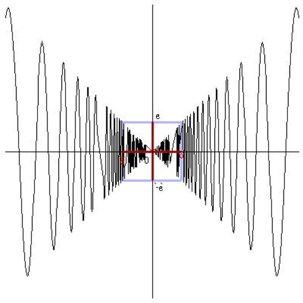
Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда для $x \neq 0$ неравенство

$$|f(x) - 0| = \left|x \cdot \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| < \varepsilon$$

справедливо, если только $0 < |x - 0| = |x| < \delta$, где в качестве δ мы выбираем ε, т. е. $\delta = \varepsilon$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 1 (окончание).



Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда для $x \neq 0$ неравенство

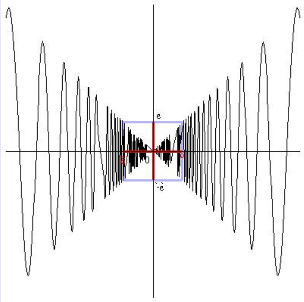
$$|f(x) - 0| = \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon$$

справедливо, если только $0 < |x - 0| = |x| < \delta$, где в качестве δ мы выбираем ε, т. е. $\delta = \varepsilon$.

По определению, это и означает, что $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 1 (окончание).



Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда для $x \neq 0$ неравенство

$$|f(x) - 0| = \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon$$

справедливо, если только $0 < |x - 0| = |x| < \delta$, где в качестве δ мы выбираем ε, т. е. $\delta = \varepsilon$.

По определению, это и означает, что $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 2.

Пусть

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Покажем, что функция f не имеет предела в точке $a = 0$, т. е. для любого $A \in \mathbb{R}$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для каждого $\delta > 0$, найдется такое x, удовлетворяющее условию $0 < |x - 0| < \delta$, при котором $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 2.

Пусть

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Покажем, что функция f не имеет предела в точке $a = 0$, т. е. для любого $A \in \mathbb{R}$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для каждого $\delta > 0$, найдется такое x, удовлетворяющее условию $0 < |x - 0| < \delta$, при котором $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Окончание примера 2.

Пусть $A \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\varepsilon_0 = 1$ обладает требуемым свойством.

В самом деле, зададим произвольное $\delta > 0$. Если $A \geq 0$, то выберем такое x, что $-\delta < x < 0$, например, $x = -\frac{\delta}{2}$.
Тогда $0 < |x - 0| < \delta$, и $|f(x) - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon_0$.
Если же $A < 0$, то выберем такое x, что $0 < x < \delta$, например, $x = \frac{\delta}{2}$. Тогда снова получим, что $0 < |x - 0| < \delta$, и $|f(x) - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon_0$.
Итак, никакое $A \in \mathbb{R}$ не является пределом функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точке $a = 0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Окончание примера 2.

Пусть $A \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\varepsilon_0 = 1$ обладает требуемым свойством.

В самом деле, зададим произвольное $\delta > 0$. Если $A \geq 0$, то выберем такое x, что $-\delta < x < 0$, например, $x = -\frac{\delta}{2}$.

Тогда $0 < |x - 0| < \delta$, и $|f(x) - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon_0$.

Если же $A < 0$, то выберем такое x, что $0 < x < \delta$, например, $x = \frac{\delta}{2}$. Тогда снова получим, что $0 < |x - 0| < \delta$, и $|f(x) - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon_0$.

Итак, никакое $A \in \mathbb{R}$ не является пределом функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точке $a = 0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Окончание примера 2.

Пусть $A \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\varepsilon_0 = 1$ обладает требуемым свойством.

В самом деле, зададим произвольное $\delta > 0$. Если $A \geq 0$, то выберем такое x, что $-\delta < x < 0$, например, $x = -\frac{\delta}{2}$.

Тогда $0 < |x - 0| < \delta$, и $|f(x) - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon_0$.

Если же $A < 0$, то выберем такое x, что $0 < x < \delta$, например, $x = \frac{\delta}{2}$. Тогда снова получим, что $0 < |x - 0| < \delta$, и $|f(x) - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon_0$.

Итак, никакое $A \in \mathbb{R}$ не является пределом функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точке $a = 0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Окончание примера 2.

Пусть $A \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\varepsilon_0 = 1$ обладает требуемым свойством.
В самом деле, зададим произвольное $\delta > 0$. Если $A \geq 0$, то выберем такое x, что $-\delta < x < 0$, например, $x = -\frac{\delta}{2}$.
Тогда $0 < |x - 0| < \delta$, и $|f(x) - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon_0$.
Если же $A < 0$, то выберем такое x, что $0 < x < \delta$, например, $x = \frac{\delta}{2}$. Тогда снова получим, что $0 < |x - 0| < \delta$, и $|f(x) - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon_0$.
Итак, никакое $A \in \mathbb{R}$ не является пределом функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точке $a = 0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Окончание примера 2.

Пусть $A \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\varepsilon_0 = 1$ обладает требуемым свойством.

В самом деле, зададим произвольное $\delta > 0$. Если $A \geq 0$, то выберем такое x, что $-\delta < x < 0$, например, $x = -\frac{\delta}{2}$.

Тогда $0 < |x - 0| < \delta$, и $|f(x) - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon_0$.

Если же $A < 0$, то выберем такое x, что $0 < x < \delta$, например, $x = \frac{\delta}{2}$. Тогда снова получим, что $0 < |x - 0| < \delta$, и $|f(x) - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon_0$.

Итак, никакое $A \in \mathbb{R}$ не является пределом функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точке $a = 0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Замечание 1. В определении предела мы предполагаем, что функция f определена в проколотой окрестности точки a. Может оказаться, что в самой точке a функция f также определена. Однако значение функции f в этой точке a совершенно не оказывает влияния на предел функции в этой точке, т. к. в определении предела мы рассматриваем лишь те значения x, которые отличны от a.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 3.

Пусть

$$f(x) = |\operatorname{sign} x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и в качестве δ выберем любое положительное число, например, $\delta = 1$. Тогда из неравенства $0 < |x - 0| = |x| < \delta$ вытекает $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$.

Следует обратить внимание на то, что неравенство $|f(x) - 1| < \varepsilon$ может и не выполняться при $x = 0$ (оно действительно не выполняется, если $\varepsilon \leq 1$). Но мы и не требуем, чтобы оно выполнялось при $x = 0$, т. к. рассматриваются лишь такие значения x, для которых $|x| > 0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 3.

Пусть

$$f(x) = |\operatorname{sign} x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и в качестве δ выберем любое положительное число, например, $\delta = 1$. Тогда из неравенства $0 < |x - 0| = |x| < \delta$ вытекает $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$.

Следует обратить внимание на то, что неравенство $|f(x) - 1| < \varepsilon$ может и не выполняться при $x = 0$ (оно действительно не выполняется, если $\varepsilon \leq 1$). Но мы и не требуем, чтобы оно выполнялось при $x = 0$, т. к. рассматриваются лишь такие значения x, для которых $|x| > 0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 3.

Пусть

$$f(x) = |\operatorname{sign} x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и в качестве δ выберем любое положительное число, например, $\delta = 1$. Тогда из неравенства $0 < |x - 0| = |x| < \delta$ вытекает $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$.

Следует обратить внимание на то, что неравенство $|f(x) - 1| < \varepsilon$ может и не выполняться при $x = 0$ (оно действительно не выполняется, если $\varepsilon \leq 1$). Но мы и не требуем, чтобы оно выполнялось при $x = 0$, т. к. рассматриваются лишь такие значения x, для которых $|x| > 0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 4.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$

В самом деле, если $x \neq 1$, то $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$, и тогда $|f(x)-2| = |(x+1)-2| = |x-1| < \varepsilon$, если только $0 < |x-1| < \delta$, где $\delta = \varepsilon$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 4.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

В самом деле, если $x \neq 1$, то $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$, и тогда $|f(x)-2| = |(x+1)-2| = |x-1| < \varepsilon$, если только $0 < |x-1| < \delta$, где $\delta = \varepsilon$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Замечание 2. Определение предела носит локальный характер. Это означает, что существование предела и его величина зависят лишь от значений, принимаемых функцией в достаточно малой проколотой окрестности точки a.

Другими словами, если мы изменим функцию вне некоторой проколотой окрестности точки a, то это никак не скажется на существовании предела и его величине.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Замечание 2. Определение предела носит локальный характер. Это означает, что существование предела и его величина зависят лишь от значений, принимаемых функцией в достаточно малой проколотой окрестности точки a. Другими словами, если мы изменим функцию вне некоторой проколотой окрестности точки a, то это никак не скажется на существовании предела и его величине.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 5.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ при любом $a>0$.

Зададим $\varepsilon>0$. Тогда для $x>0$ неравенство

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\le\frac{1}{\sqrt{a}}|x-a|<\varepsilon$$

будет иметь место, если только $0<|x-a|<\sqrt{a}\cdot\varepsilon=\delta$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример 5.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ при любом $a>0$.
Зададим $\varepsilon>0$. Тогда для $x>0$ неравенство

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\leq\frac{1}{\sqrt{a}}|x-a|<\varepsilon$$

будет иметь место, если только $0<|x-a|<\sqrt{a}\cdot\varepsilon=\delta$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Теорема 1 (единственность предела). *Если функция f имеет предел в точке a, то он единственный.*

Доказательство.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Локальная ограниченность функции, имеющей предел.

Определение. Функция f называется ограниченной сверху (снизу) на множестве E, если существует такое число M (m), что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq m)$.

Функция f называется ограниченной на множестве E, если она ограничена на этом множестве сверху и снизу.

Другое эквивалентное определение ограниченности функции можно дать, используя понятие модуля.

Определение. Функция f называется ограниченной на множестве E, если существует такое число A, что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq A$.

Доказательство равносильности этих двух определений ограниченности элементарно и мы его опускаем.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Локальная ограниченность функции, имеющей предел.

Определение. Функция f называется ограниченной сверху (снизу) на множестве E, если существует такое число M (m), что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq m)$.

Функция f называется ограниченной на множестве E, если она ограничена на этом множестве сверху и снизу.

Другое эквивалентное определение ограниченности функции можно дать, используя понятие модуля.

Определение. Функция f называется ограниченной на множестве E, если существует такое число A, что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq A$.

Доказательство равносильности этих двух определений ограниченности элементарно и мы его опускаем.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Локальная ограниченность функции, имеющей предел.

Определение. Функция f называется ограниченной сверху (снизу) на множестве E, если существует такое число M (m), что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq m)$.

Функция f называется ограниченной на множестве E, если она ограничена на этом множестве сверху и снизу.

Другое эквивалентное определение ограниченности функции можно дать, используя понятие модуля.

Определение. Функция f называется ограниченной на множестве E, если существует такое число A, что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq A$.

Доказательство равносильности этих двух определений ограниченности элементарно и мы его опускаем.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Локальная ограниченность функции, имеющей предел.

Определение. Функция f называется ограниченной сверху (снизу) на множестве E, если существует такое число M (m), что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $f(x) \le M$ $(f(x) \ge m)$.

Функция f называется ограниченной на множестве E, если она ограничена на этом множестве сверху и снизу.

Другое эквивалентное определение ограниченности функции можно дать, используя понятие модуля.

Определение. Функция f называется ограниченной на множестве E, если существует такое число A, что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|f(x)| \le A$.

Доказательство равносильности этих двух определений ограниченности элементарно и мы его опускаем.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Локальная ограниченность функции, имеющей предел.

Определение. Функция f называется ограниченной сверху (снизу) на множестве E, если существует такое число M (m), что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $f(x) \le M$ $(f(x) \ge m)$.

Функция f называется ограниченной на множестве E, если она ограничена на этом множестве сверху и снизу.

Другое эквивалентное определение ограниченности функции можно дать, используя понятие модуля.

Определение. Функция f называется ограниченной на множестве E, если существует такое число A, что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|f(x)| \le A$.

Доказательство равносильности этих двух определений ограниченности элементарно и мы его опускаем.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Выше мы установили, что сходящаяся последовательность ограничена. Рассмотрим аналогичный вопрос для функций. Именно,

следует ли из существования предела функции ее ограниченность?

Отрицательный ответ на этот вопрос дает, например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$, $0 < x < +\infty$.

Действительно, легко видеть, что функция f неограничена на $(0, +\infty)$. В то же время $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$. В самом деле,

$$\left| \frac{1}{x} - 1 \right| = \frac{|x-1|}{x} \leq 2|x-1| < \varepsilon,$$

если только $|x-1| < \delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$.

Тем не менее, справедлива

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Выше мы установили, что сходящаяся последовательность ограничена. Рассмотрим аналогичный вопрос для функций. Именно,

следует ли из существования предела функции ее ограниченность?

Отрицательный ответ на этот вопрос дает, например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$, $0 < x < +\infty$.

Действительно, легко видеть, что функция f неограничена на $(0, +\infty)$. В то же время $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$. В самом деле,

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|x-1|}{x} \leq 2|x-1| < \varepsilon,$$

если только $|x-1| < \delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$.

Тем не менее, справедлива

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Выше мы установили, что сходящаяся последовательность ограничена. Рассмотрим аналогичный вопрос для функций. Именно,

следует ли из существования предела функции ее ограниченность?

Отрицательный ответ на этот вопрос дает, например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$, $0 < x < +\infty$.
Действительно, легко видеть, что функция f неограничена на $(0, +\infty)$. В то же время $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$. В самом деле,

$$\left| \frac{1}{x} - 1 \right| = \frac{|x-1|}{x} \le 2|x-1| < \varepsilon,$$

если только $|x-1| < \delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$.

Тем не менее, справедлива

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Выше мы установили, что сходящаяся последовательность ограничена. Рассмотрим аналогичный вопрос для функций. Именно,

следует ли из существования предела функции ее ограниченность?

Отрицательный ответ на этот вопрос дает, например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$, $0 < x < +\infty$.
Действительно, легко видеть, что функция f неограничена на $(0, +\infty)$. В то же время $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$. В самом деле,

$$\left| \frac{1}{x} - 1 \right| = \frac{|x-1|}{x} \leq 2|x-1| < \varepsilon,$$

если только $|x - 1| < \delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$.

Тем не менее, справедлива

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Теорема 2 (локальная ограниченность функции, имеющей предел). *Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a и имеет предел в этой точке. Тогда существует такая проколотая окрестность $V \subset U$, на которой функция f ограничена.*

Доказательство.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Определение предела функции по Гейне.

Мы хотим связать определения предела функции и предела последовательности.

Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности U точки a. Возьмем произвольную последовательность аргументов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, т. е. $x_n \in U$ $(x_n \neq a, \ n = 1, 2, \dots)$.

Эта последовательность аргументов порождает последовательность значений функции f в точках x_n, т. е. мы получаем последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Определение предела функции по Гейне.

Мы хотим связать определения предела функции и предела последовательности.

Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности U точки a. Возьмем произвольную последовательность аргументов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, т. е. $x_n \in U$ $(x_n \neq a,\ n = 1, 2, \ldots)$.

Эта последовательность аргументов порождает последовательность значений функции f в точках x_n, т. е. мы получаем последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Определение предела функции по Гейне.

Мы хотим связать определения предела функции и предела последовательности.
Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности U точки a. Возьмем произвольную последовательность аргументов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, т. е. $x_n \in U$ $(x_n \neq a, \ n = 1, 2, \dots)$.
Эта последовательность аргументов порождает последовательность значений функции f в точках x_n, т. е. мы получаем последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Определение. Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Число A называется **пределом функции f в точке a**, если каждая последовательность аргументов $\{x_n\}$, стремящаяся к a (т. е. $x_n \in U$, $x_n \neq a$, $n = 1, 2, \ldots$), порождает соответствующую последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, стремящуюся к A.

Итак, мы имеем два определения предела функции: по Коши и по Гейне. Покажем, что эти определения эквивалентны.

Доказательство эквивалентности двух определений предела.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Определение. Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Число A называется **пределом функции f в точке a**, если каждая последовательность аргументов $\{x_n\}$, стремящаяся к a (т. е. $x_n \in U$, $x_n \neq a$, $n = 1, 2, \dots$), порождает соответствующую последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, стремящуюся к A.

Итак, мы имеем два определения предела функции: по Коши и по Гейне. Покажем, что эти определения эквивалентны.

Доказательство эквивалентности двух определений предела.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Итак, мы показали, что определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны. Часто на практике определение предела по Гейне используется для доказательства того, что у функции нет предела в точке a. Именно, отрицание определения предела в смысле Гейне выглядит следующим образом.

Число A не является пределом функции f в точке a, если существует последовательность аргументов $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$, такая, что $f(x_n)$ не стремится к A.

Предположим, что найдется такая последовательность аргументов, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ расходится. Тогда ясно, что никакое число не является пределом функции f в точке a, т. е. f не имеет предела при $x \to a$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Итак, мы показали, что определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны. Часто на практике определение предела по Гейне используется для доказательства того, что у функции нет предела в точке a. Именно, отрицание определения предела в смысле Гейне выглядит следующим образом.

Число A не является пределом функции f в точке a, если существует последовательность аргументов $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$, такая, что $f(x_n)$ не стремится к A.

Предположим, что найдется такая последовательность аргументов, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ расходится. Тогда ясно, что никакое число не является пределом функции f в точке a, т. е. f не имеет предела при $x \to a$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Итак, мы показали, что определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны. Часто на практике определение предела по Гейне используется для доказательства того, что у функции нет предела в точке a. Именно, отрицание определения предела в смысле Гейне выглядит следующим образом.

Число A не является пределом функции f в точке a, если существует последовательность аргументов $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$, такая, что $f(x_n)$ не стремится к A.

Предположим, что найдется такая последовательность аргументов, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ расходится. Тогда ясно, что никакое число не является пределом функции f в точке a, т. е. f не имеет предела при $x \to a$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Итак, для того чтобы показать, что функция f не имеет предела в точке a, достаточно построить последовательность $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$, такую, что $\{f(x_n)\}$ не имеет предела.

Упражнение. Доказать, что справедливо и обратное утверждение. Именно, если функция f не имеет предела в точке a, то существует такая последовательность $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$, что $\{f(x_n)\}$ расходится.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Итак, для того чтобы показать, что функция f не имеет предела в точке a, достаточно построить последовательность $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$, такую, что $\{f(x_n)\}$ не имеет предела.

Упражнение. Доказать, что справедливо и обратное утверждение. Именно, если функция f не имеет предела в точке a, то существует такая последовательность $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$, что $\{f(x_n)\}$ расходится.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

Выберем две последовательности $x'_k = \frac{1}{2\pi k}$ и $x''_k = \frac{1}{2\pi(k+1/4)}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Тогда $x'_k \to 0$, $x''_k \to 0$ $(k \to \infty)$ и $f(x'_k) = 0$, $f(x''_k) = 1$. Составим последовательность аргументов $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots$. Тогда соответствующая им последовательность значений функции будет иметь вид $0, 1, 0, 1, \dots$, которая, очевидно, расходится.

Итак, мы построили стремящуюся к нулю последовательность отличных от нуля аргументов, такую, что соответствующая последовательность значений функции не имеет предела.

Значит, на основании определения предела функции, функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.
Выберем две последовательности $x'_k = \frac{1}{2\pi k}$ и $x''_k = \frac{1}{2\pi(k+1/4)}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Тогда $x'_k \to 0$, $x''_k \to 0$ $(k \to \infty)$ и $f(x'_k) = 0$, $f(x''_k) = 1$. Составим последовательность аргументов $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots$. Тогда соответствующая им последовательность значений функции будет иметь вид $0, 1, 0, 1, \dots$, которая, очевидно, расходится.
Итак, мы построили стремящуюся к нулю последовательность отличных от нуля аргументов, такую, что соответствующая последовательность значений функции не имеет предела.
Значит, на основании определения предела функции, функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.
Выберем две последовательности $x'_k = \frac{1}{2\pi k}$ и $x''_k = \frac{1}{2\pi(k+1/4)}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Тогда $x'_k \to 0$, $x''_k \to 0$ $(k \to \infty)$ и $f(x'_k) = 0$, $f(x''_k) = 1$. Составим последовательность аргументов $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots$. Тогда соответствующая им последовательность значений функции будет иметь вид $0, 1, 0, 1, \dots$, которая, очевидно, расходится.
Итак, мы построили стремящуюся к нулю последовательность отличных от нуля аргументов, такую, что соответствующая последовательность значений функции не имеет предела.
Значит, на основании определения предела функции, функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.
Выберем две последовательности $x'_k = \frac{1}{2\pi k}$ и $x''_k = \frac{1}{2\pi(k+1/4)}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Тогда $x'_k \to 0$, $x''_k \to 0$ $(k \to \infty)$ и $f(x'_k) = 0$, $f(x''_k) = 1$. Составим последовательность аргументов $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots$. Тогда соответствующая им последовательность значений функции будет иметь вид $0, 1, 0, 1, \dots$, которая, очевидно, расходится.
Итак, мы построили стремящуюся к нулю последовательность отличных от нуля аргументов, такую, что соответствующая последовательность значений функции не имеет предела.
Значит, на основании определения предела функции, функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Пример.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.
Выберем две последовательности $x_k' = \frac{1}{2\pi k}$ и $x_k'' = \frac{1}{2\pi(k+1/4)}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Тогда $x_k' \to 0$, $x_k'' \to 0$ $(k \to \infty)$ и $f(x_k') = 0$, $f(x_k'') = 1$. Составим последовательность аргументов $x_1', x_1'', x_2', x_2'', \dots$. Тогда соответствующая им последовательность значений функции будет иметь вид $0, 1, 0, 1, \dots$, которая, очевидно, расходится.
Итак, мы построили стремящуюся к нулю последовательность отличных от нуля аргументов, такую, что соответствующая последовательность значений функции не имеет предела.
Значит, на основании определения предела функции, функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Идея решения этого примера часто используется и при решении других задач. Именно, для того чтобы показать, что функция f не имеет предела при $x \to a$, достаточно построить две последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$, стремящиеся к a ($x_n' \neq a,\ x_n'' \neq a$), такие, что $\{f(x_n')\}$ и $\{f(x_n'')\}$ сходятся к различным пределам (или хотя бы одна из них расходится). Тогда для последовательности аргументов $x_1', x_1'', x_2', x_2'', \ldots$ соответствующая последовательность значений функции $f(x_1'), f(x_1''), f(x_2'), f(x_2''), \ldots$ будет расходящейся, так как у нее есть два различных частичных предела (не выполнено условие критерия сходимости в терминах верхнего и нижнего пределов последовательности).

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Идея решения этого примера часто используется и при решении других задач. Именно, для того чтобы показать, что функция f не имеет предела при $x \to a$, достаточно построить две последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$, стремящиеся к a $(x_n' \neq a,\ x_n'' \neq a)$, такие, что $\{f(x_n')\}$ и $\{f(x_n'')\}$ сходятся к различным пределам (или хотя бы одна из них расходится). Тогда для последовательности аргументов $x_1', x_1'', x_2', x_2'', \ldots$ соответствующая последовательность значений функции $f(x_1'), f(x_1''), f(x_2'), f(x_2''), \ldots$ будет расходящейся, так как у нее есть два различных частичных предела (не выполнено условие критерия сходимости в терминах верхнего и нижнего пределов последовательности).

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Теорема (арифметические свойства пределов).

Пусть функции f и g заданы в проколотой окрестности U точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$;
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;
3. *если* $g(x) \neq 0$ $(x \in U)$ *и* $B \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Эта теорема мгновенно может быть получена как следствие соответствующей теоремы об арифметических свойствах пределов последовательностей. Достаточно применить определение предела в смысле Гейне.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Теорема (арифметические свойства пределов).

Пусть функции f и g заданы в проколотой окрестности U точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$;
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;
3. *если* $g(x) \neq 0$ $(x \in U)$ *и* $B \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Эта теорема мгновенно может быть получена как следствие соответствующей теоремы об арифметических свойствах пределов последовательностей. Достаточно применить определение предела в смысле Гейне.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Теорема (предельный переход и неравенства).

Пусть функции f и g заданы в проколотой окрестности U точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, причем $A < B$. Тогда найдется проколотая окрестность $\Delta \subset U$ точки a, такая, что $f(x) < g(x)$ для всех $x \in \Delta$.

Доказательство.

Следствие.

Если $f(x) \geq g(x)$ для всех x, принадлежащих проколотой окрестности U точки a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq \lim\limits_{x\to a} g(x)$, если эти пределы существуют.

Действительно, если предположить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, то, в силу предыдущей теоремы, в некоторой проколотой окрестности точки a будет справедливо неравенство $f(x) < g(x)$, что противоречит условию.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Теорема (предельный переход и неравенства).

Пусть функции f и g заданы в проколотой окрестности U точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, причем $A < B$. Тогда найдется проколотая окрестность $\Delta \subset U$ точки a, такая, что $f(x) < g(x)$ для всех $x \in \Delta$.

Доказательство.

Следствие.

Если $f(x) \geq g(x)$ для всех x, принадлежащих проколотой окрестности U точки a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq \lim\limits_{x\to a} g(x)$, если эти пределы существуют.

Действительно, если предположить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, то, в силу предыдущей теоремы, в некоторой проколотой окрестности точки a будет справедливо неравенство $f(x) < g(x)$, что противоречит условию.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Теорема (предельный переход и неравенства).

Пусть функции f и g заданы в проколотой окрестности U точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, причем $A < B$. Тогда найдется проколотая окрестность $\Delta \subset U$ точки a, такая, что $f(x) < g(x)$ для всех $x \in \Delta$.

Доказательство.

Следствие.

Если $f(x) \geq g(x)$ для всех x, принадлежащих проколотой окрестности U точки a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq \lim\limits_{x\to a} g(x)$, если эти пределы существуют.

Действительно, если предположить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, то, в силу предыдущей теоремы, в некоторой проколотой окрестности точки a будет справедливо неравенство $f(x) < g(x)$, что противоречит условию.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Теорема (предельный переход и неравенства).

Пусть функции f и g заданы в проколотой окрестности U точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, причем $A < B$. Тогда найдется проколотая окрестность $\Delta \subset U$ точки a, такая, что $f(x) < g(x)$ для всех $x \in \Delta$.

Доказательство.

Следствие.

Если $f(x) \geq g(x)$ для всех x, принадлежащих проколотой окрестности U точки a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq \lim\limits_{x\to a} g(x)$, если эти пределы существуют.

Действительно, если предположить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, то, в силу предыдущей теоремы, в некоторой проколотой окрестности точки a будет справедливо неравенство $f(x) < g(x)$, что противоречит условию.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Теорема (о трех пределах).

Пусть функции f, g, h определены в проколотой окрестности U точки a и такие, что $f(x) \le g(x) \le h(x)$ для всех $x \in U$. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = A$, то существует $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

Для доказательства этой теоремы достаточно применить определение предела функции по Гейне и соответствующую теорему о трех пределах для последовательностей.

§2. Предел функции и его элементарные свойства

Теорема (о трех пределах).

Пусть функции f, g, h определены в проколотой окрестности U точки a и такие, что $f(x) \le g(x) \le h(x)$ для всех $x \in U$. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = A$, то существует $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

Для доказательства этой теоремы достаточно применить определение предела функции по Гейне и соответствующую теорему о трех пределах для последовательностей.

§3. Первый замечательный предел

§3. Первый замечательный предел

§3. Первый замечательный предел

Так называется следующее равенство:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

где величина x выражена в радианах.

Для доказательства этого равенства докажем сначала два важных неравенства –

$$\sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.1}$$

$$x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.2}$$

которые имеют многочисленные приложения в различных вопросах.

Приведем геометрическое доказательство этих неравенств.

§3. Первый замечательный предел

Так называется следующее равенство:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

где величина x выражена в радианах.

Для доказательства этого равенства докажем сначала два важных неравенства –

$$\sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.1}$$

$$x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.2}$$

которые имеют многочисленные приложения в различных вопросах.

Приведем геометрическое доказательство этих неравенств.

§3. Первый замечательный предел

Так называется следующее равенство:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

где величина x выражена в радианах.

Для доказательства этого равенства докажем сначала два важных неравенства –

$$\sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.1}$$

$$x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.2}$$

которые имеют многочисленные приложения в различных вопросах.

Приведем геометрическое доказательство этих неравенств.

§3. Первый замечательный предел

Выпишем доказанные неравенства:

$$\sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.1}$$

$$x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \tag{3.2}$$

Из (3.1) получаем, что $\frac{\sin x}{x} < 1 \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, а из (3.2) следует, что $\cos x < \frac{\sin x}{x} \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

Итак,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда, так как $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, следует:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}.$$

§3. Первый замечательный предел

Выпишем доказанные неравенства:

$$\sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.1}$$

$$x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \tag{3.2}$$

Из (3.1) получаем, что $\frac{\sin x}{x} < 1 \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, а из (3.2) следует, что $\cos x < \frac{\sin x}{x} \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

Итак,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда, так как $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, следует:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}.$$

§3. Первый замечательный предел

Выпишем доказанные неравенства:

$$\sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.1}$$

$$x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \tag{3.2}$$

Из (3.1) получаем, что $\frac{\sin x}{x} < 1$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, а из (3.2) следует, что $\cos x < \frac{\sin x}{x}$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

Итак,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда, так как $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, следует:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}.$$

§3. Первый замечательный предел

Окончательно,

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Учитывая еще, что функция $\frac{\sin x}{x}$ четная, для $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ получим

$$1 - \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{\sin(-x)}{(-x)} < \frac{(-x)^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

и

$$1 - \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{\sin(-x)}{(-x)} > 0.$$

§3. Первый замечательный предел

Окончательно,

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Учитывая еще, что функция $\frac{\sin x}{x}$ четная, для $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ получим

$$1 - \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{\sin(-x)}{(-x)} < \frac{(-x)^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

и

$$1 - \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{\sin(-x)}{(-x)} > 0.$$

§3. Первый замечательный предел

Таким образом, неравенство

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}$$

справедливо для всех x, таких, что $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.
Применяя к этому неравенству теорему о трех пределах, получаем

$$\lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0,$$

а это равносильно тому, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

§3. Первый замечательный предел

Таким образом, неравенство

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}$$

справедливо для всех x, таких, что $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.
Применяя к этому неравенству теорему о трех пределах, получаем

$$\lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0,$$

а это равносильно тому, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пусть функция f определена на интервале (a, b). Число A называется **пределом справа функции f в точке** a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Это записывают следующим образом: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$.

Аналогично определяется предел $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$ функции f слева в точке b.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пусть функция f определена на интервале (a, b). Число A называется пределом справа функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Это записывают следующим образом: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$.

Аналогично определяется предел $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$ функции f слева в точке b.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пусть функция f определена на интервале (a, b). Число A называется **пределом справа функции f в точке** a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Это записывают следующим образом: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$.

Аналогично определяется предел $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$ функции f слева в точке b.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Можно сформулировать эти определения в терминах последовательностей. Эквивалентность таких определений доказывается таким же образом, как и для обычных пределов.

Например, число B называется пределом слева функции f в точке b, если любая последовательность $\{x_n\}$ точек из (a, b), стремящаяся к b, порождает соответствующую последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, стремящуюся к B.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Можно сформулировать эти определения в терминах последовательностей. Эквивалентность таких определений доказывается таким же образом, как и для обычных пределов.

Например, число B называется пределом слева функции f в точке b, если любая последовательность $\{x_n\}$ точек из (a, b), стремящаяся к b, порождает соответствующую последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, стремящуюся к B.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Говорят, что предел функции f при x, стремящемся к a, равен $+\infty$ (или f стремится к $+\infty$ при x, стремящемся к a), если для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $f(x) > E$.

Обозначают это так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Аналогично, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, если для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $f(x) < -E$.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Говорят, что предел функции f при x, стремящемся к a, равен $+\infty$ (или f стремится к $+\infty$ при x, стремящемся к a), если для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $f(x) > E$.

Обозначают это так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Аналогично, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, если для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $f(x) < -E$.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Говорят, что предел функции f при x, стремящемся к a, равен $+\infty$ (или f стремится к $+\infty$ при x, стремящемся к a), если для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $f(x) > E$.

Обозначают это так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Аналогично, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, если для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $f(x) < -E$.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Если же для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)| > E$, то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Ясно, что любое из условий $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ влечет $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.
Легко, однако, привести пример функции f, такой, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, но f не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.

Данные определения бесконечных пределов легко можно сформулировать в терминах последовательностей.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Если же для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)| > E$, то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Ясно, что любое из условий $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ влечет $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.
Легко, однако, привести пример функции f, такой, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, но f не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.

Данные определения бесконечных пределов легко можно сформулировать в терминах последовательностей.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Если же для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)| > E$, то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Ясно, что любое из условий $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ влечет $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.
Легко, однако, привести пример функции f, такой, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, но f не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.

Данные определения бесконечных пределов легко можно сформулировать в терминах последовательностей.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Если же для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)| > E$, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Ясно, что любое из условий $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ влечет $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.
Легко, однако, привести пример функции f, такой, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, но f не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.

Данные определения бесконечных пределов легко можно сформулировать в терминах последовательностей.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пусть функция f определена на полуоси $(a, +\infty)$. Число A называется **пределом функции f при $x \to +\infty$**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\Delta > 0$, что для всех $x > \Delta$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначают это так: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пусть функция f определена на полуоси $(a, +\infty)$. Число A называется пределом функции f при $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\Delta > 0$, что для всех $x > \Delta$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначают это так: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Сформулируем еще некоторые определения с помощью кванторов:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta > 0 :\ \forall x < -\Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta > 0 :\ \forall x : |x| > \Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$f(x) \to A + 0\ (x \to a - 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x : a - \delta < x < a \quad A < f(x) < A + \varepsilon.$$

Как и в предыдущих случаях, подобные определения легко можно сформулировать в терминах последовательностей.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Сформулируем еще некоторые определения с помощью кванторов:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta > 0 :\ \forall x < -\Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta > 0 :\ \forall x : |x| > \Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$f(x) \to A + 0\ (x \to a - 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x : a - \delta < x < a \quad A < f(x) < A + \varepsilon.$$

Как и в предыдущих случаях, подобные определения легко можно сформулировать в терминах последовательностей.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Сформулируем еще некоторые определения с помощью кванторов:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta > 0:\ \forall x < -\Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta > 0:\ \forall x : |x| > \Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$f(x) \to A + 0\ (x \to a - 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ \forall x : a - \delta < x < a \quad A < f(x) < A + \varepsilon.$$

Как и в предыдущих случаях, подобные определения легко можно сформулировать в терминах последовательностей.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Сформулируем еще некоторые определения с помощью кванторов:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta > 0 :\ \forall x < -\Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta > 0 :\ \forall x : |x| > \Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$f(x) \to A + 0\ (x \to a - 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x : a - \delta < x < a \quad A < f(x) < A + \varepsilon.$$

Как и в предыдущих случаях, подобные определения легко можно сформулировать в терминах последовательностей.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Сформулируем еще некоторые определения с помощью кванторов:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta > 0:\ \forall x < -\Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta > 0:\ \forall x : |x| > \Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$f(x) \to A + 0\ (x \to a - 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ \forall x : a - \delta < x < a \quad A < f(x) < A + \varepsilon.$$

Как и в предыдущих случаях, подобные определения легко можно сформулировать в терминах последовательностей.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пример 1.

Покажем, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Действительно

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| \leq \frac{1}{|x|} < \varepsilon,$$

если только $|x| > \Delta = \frac{1}{\varepsilon}$.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пример 1.

Покажем, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Действительно

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| \le \frac{1}{|x|} < \varepsilon,$$

если только $|x| > \Delta = \frac{1}{\varepsilon}$.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пример 2.

Докажем, что функция $f(x) = \sin x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

Для этого рассмотрим две последовательности:

$$x'_n = \pi n \quad \text{и} \quad x''_n = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Обе эти последовательности стремятся к $+\infty$, но при этом соответствующие последовательности значений функции $f(x'_n) = \sin \pi n = 0 \to 0$ и $f(x''_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 1 \to 1$.

Отсюда следует, что функция не имеет предела при $x \to +\infty$.

Пример 3.

Если $f(x) = \operatorname{sign} x$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sign} x = -1$.

Однако f не имеет предела при $x \to \infty$. В самом деле, для доказательства достаточно рассмотреть последовательности $x'_n = n$ и $x''_n = -n$.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пример 2.

Докажем, что функция $f(x) = \sin x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

Для этого рассмотрим две последовательности:

$$x_n' = \pi n \quad \text{и} \quad x_n'' = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Обе эти последовательности стремятся к $+\infty$, но при этом соответствующие последовательности значений функции $f(x_n') = \sin \pi n = 0 \to 0$ и $f(x_n'') = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 1 \to 1$. Отсюда следует, что функция не имеет предела при $x \to +\infty$.

Пример 3.

Если $f(x) = \operatorname{sign} x$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sign} x = -1$.

Однако f не имеет предела при $x \to \infty$. В самом деле, для доказательства достаточно рассмотреть последовательности $x_n' = n$ и $x_n'' = -n$.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пример 2.

Докажем, что функция $f(x) = \sin x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.
Для этого рассмотрим две последовательности:

$$x_n' = \pi n \quad \text{и} \quad x_n'' = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Обе эти последовательности стремятся к $+\infty$, но при этом соответствующие последовательности значений функции $f(x_n') = \sin \pi n = 0 \to 0$ и $f(x_n'') = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 1 \to 1$.
Отсюда следует, что функция не имеет предела при $x \to +\infty$.

Пример 3.

Если $f(x) = \operatorname{sign} x$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sign} x = -1$.
Однако f не имеет предела при $x \to \infty$. В самом деле, для доказательства достаточно рассмотреть последовательности $x_n' = n$ и $x_n'' = -n$.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пример 2.

Докажем, что функция $f(x) = \sin x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

Для этого рассмотрим две последовательности:

$$x'_n = \pi n \quad \text{и} \quad x''_n = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Обе эти последовательности стремятся к $+\infty$, но при этом соответствующие последовательности значений функции $f(x'_n) = \sin \pi n = 0 \to 0$ и $f(x''_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 1 \to 1$.

Отсюда следует, что функция не имеет предела при $x \to +\infty$.

Пример 3.

Если $f(x) = \operatorname{sign} x$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sign} x = -1$.

Однако f не имеет предела при $x \to \infty$. В самом деле, для доказательства достаточно рассмотреть последовательности $x'_n = n$ и $x''_n = -n$.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пример 2.

Докажем, что функция $f(x) = \sin x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

Для этого рассмотрим две последовательности:

$$x'_n = \pi n \quad \text{и} \quad x''_n = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Обе эти последовательности стремятся к $+\infty$, но при этом соответствующие последовательности значений функции $f(x'_n) = \sin \pi n = 0 \to 0$ и $f(x''_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 1 \to 1$.

Отсюда следует, что функция не имеет предела при $x \to +\infty$.

Пример 3.

Если $f(x) = \operatorname{sign} x$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sign} x = -1$.

Однако f не имеет предела при $x \to \infty$. В самом деле, для доказательства достаточно рассмотреть последовательности $x'_n = n$ и $x''_n = -n$.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пример 2.

Докажем, что функция $f(x) = \sin x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

Для этого рассмотрим две последовательности:

$$x_n' = \pi n \quad \text{и} \quad x_n'' = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Обе эти последовательности стремятся к $+\infty$, но при этом соответствующие последовательности значений функции $f(x_n') = \sin \pi n = 0 \to 0$ и $f(x_n'') = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 1 \to 1$.

Отсюда следует, что функция не имеет предела при $x \to +\infty$.

Пример 3.

Если $f(x) = \operatorname{sign} x$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sign} x = -1$.

Однако f не имеет предела при $x \to \infty$. В самом деле, для доказательства достаточно рассмотреть последовательности $x_n' = n$ и $x_n'' = -n$.

§4. Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пример 2.

Докажем, что функция $f(x) = \sin x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

Для этого рассмотрим две последовательности:

$$x'_n = \pi n \quad \text{и} \quad x''_n = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Обе эти последовательности стремятся к $+\infty$, но при этом соответствующие последовательности значений функции $f(x'_n) = \sin \pi n = 0 \to 0$ и $f(x''_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 1 \to 1$. Отсюда следует, что функция не имеет предела при $x \to +\infty$.

Пример 3.

Если $f(x) = \operatorname{sign} x$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sign} x = -1$. Однако f не имеет предела при $x \to \infty$. В самом деле, для доказательства достаточно рассмотреть последовательности $x'_n = n$ и $x''_n = -n$.

§5. Критерий Коши

§5. Критерий Коши

§5. Критерий Коши

В этом параграфе речь будет идти о существовании конечного предела.

Для последовательностей мы доказывали критерий Коши, который состоит в том, что сходимость последовательности равносильна ее фундаментальности. Аналогичное утверждение справедливо и для пределов функций.

Теорема (критерий Коши).

Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Для того чтобы функция f имела конечный предел при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что для любых $x', x'' \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$, выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Доказательство.

§5. Критерий Коши

В этом параграфе речь будет идти о существовании конечного предела.
Для последовательностей мы доказывали критерий Коши, который состоит в том, что сходимость последовательности равносильна ее фундаментальности. Аналогичное утверждение справедливо и для пределов функций.

Теорема (критерий Коши).

Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Для того чтобы функция f имела конечный предел при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что для любых $x', x'' \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$, выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Доказательство.

§5. Критерий Коши

В этом параграфе речь будет идти о существовании конечного предела.
Для последовательностей мы доказывали критерий Коши, который состоит в том, что сходимость последовательности равносильна ее фундаментальности. Аналогичное утверждение справедливо и для пределов функций.

Теорема (критерий Коши).

Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Для того чтобы функция f имела конечный предел при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что для любых $x', x'' \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$, выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Доказательство.

§5. Критерий Коши

В этом параграфе речь будет идти о существовании конечного предела.
Для последовательностей мы доказывали критерий Коши, который состоит в том, что сходимость последовательности равносильна ее фундаментальности. Аналогичное утверждение справедливо и для пределов функций.

Теорема (критерий Коши).

Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Для того чтобы функция f имела конечный предел при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что для любых $x', x'' \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$, выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Доказательство.

§5. Критерий Коши

Аналогично можно сформулировать и доказать критерий Коши для пределов при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и $x \to \infty$, а также для односторонних пределов. Приведем, например, формулировку критерия Коши для предела при $x \to +\infty$.

Теорема (критерий Коши для случая $x \to +\infty$).

Пусть функция f определена на полупрямой $(a, +\infty)$. Для того чтобы функция f имела конечный предел при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\Delta > 0$, что при любых $x', x'' > \Delta$ выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

§5. Критерий Коши

Аналогично можно сформулировать и доказать критерий Коши для пределов при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и $x \to \infty$, а также для односторонних пределов. Приведем, например, формулировку критерия Коши для предела при $x \to +\infty$.

Теорема (критерий Коши для случая $x \to +\infty$).

Пусть функция f определена на полупрямой $(a, +\infty)$. Для того чтобы функция f имела конечный предел при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\Delta > 0$, что при любых $x', x'' > \Delta$ выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

§5. Критерий Коши

Пример.

Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не имеет конечного предела справа в точке $a = 0$.

Для доказательства покажем, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся x', x'', удовлетворяющие условию $0 < x' < \delta$, $0 < x'' < \delta$, такие, что $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$. Пусть $\varepsilon_0 = 1$. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$ и выберем $x' = \frac{\delta}{2}$, $x'' = \frac{\delta}{2+\delta}$. Тогда $0 < x' < \delta$, $0 < x'' < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{2}{\delta} - \left(\frac{2}{\delta} + 1\right)\right| = 1 = \varepsilon_0$, и тем самым завершается рассмотрение примера.

§5. Критерий Коши

Пример.

Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не имеет конечного предела справа в точке $a = 0$.

Для доказательства покажем, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся x', x'', удовлетворяющие условию $0 < x' < \delta,\ 0 < x'' < \delta$, такие, что $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$.
Пусть $\varepsilon_0 = 1$. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$ и выберем $x' = \frac{\delta}{2},\ x'' = \frac{\delta}{2+\delta}$. Тогда $0 < x' < \delta,\ 0 < x'' < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{2}{\delta} - \left(\frac{2}{\delta} + 1\right)\right| = 1 = \varepsilon_0$, и тем самым завершается рассмотрение примера.

§5. Критерий Коши

Пример.

Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не имеет конечного предела справа в точке $a = 0$.

Для доказательства покажем, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся x', x'', удовлетворяющие условию $0 < x' < \delta$, $0 < x'' < \delta$, такие, что $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$. Пусть $\varepsilon_0 = 1$. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$ и выберем $x' = \frac{\delta}{2}$, $x'' = \frac{\delta}{2+\delta}$. Тогда $0 < x' < \delta$, $0 < x'' < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{2}{\delta} - \left(\frac{2}{\delta} + 1\right)\right| = 1 = \varepsilon_0$, и тем самым завершается рассмотрение примера.

§5. Критерий Коши

Пример.

Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не имеет конечного предела справа в точке $a = 0$.

Для доказательства покажем, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся x', x'', удовлетворяющие условию $0 < x' < \delta,\ 0 < x'' < \delta$, такие, что $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$. Пусть $\varepsilon_0 = 1$. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$ и выберем $x' = \frac{\delta}{2},\ x'' = \frac{\delta}{2+\delta}$. Тогда $0 < x' < \delta,\ 0 < x'' < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{2}{\delta} - \left(\frac{2}{\delta} + 1\right)\right| = 1 = \varepsilon_0$, и тем самым завершается рассмотрение примера.

§6. Монотонные функции

§6. Монотонные функции

§6. Монотонные функции

Определение.

Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и функция f определена на (a, b). Функция f называется монотонно возрастающей (убывающей) на (a, b), если для любых $x, y \in (a, b)$, таких, что $x < y$, справедливо неравенство $f(x) \leq f(y) \quad (f(x) \geq f(y))$.

Если в данном определении нестрогие неравенства поменять на строгие, то получим определение строго возрастающей (убывающей) функции.

§6. Монотонные функции

Определение.

Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и функция f определена на (a, b). Функция f называется монотонно возрастающей (убывающей) на (a, b), если для любых $x, y \in (a, b)$, таких, что $x < y$, справедливо неравенство $f(x) \leq f(y) \quad (f(x) \geq f(y))$.

Если в данном определении нестрогие неравенства поменять на строгие, то получим определение строго возрастающей (убывающей) функции.

§6. Монотонные функции

Для монотонной последовательности мы доказывали критерий сходимости, который состоит в том, что сходимость монотонной последовательности эквивалентна ее ограниченности (сверху для возрастающей последовательности и снизу для убывающей). Соответствующее утверждение имеет место и для функций.

Теорема (о существовании предела монотонной функции).

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$ и функция f монотонно возрастает на (a, b). Если f ограничена сверху на (a, b), то существует $\lim_{x\to b-0} f(x)$. Если же f неограничена сверху, то $\lim_{x\to b-0} f(x) = +\infty$.

Доказательство.

§6. Монотонные функции

Для монотонной последовательности мы доказывали критерий сходимости, который состоит в том, что сходимость монотонной последовательности эквивалентна ее ограниченности (сверху для возрастающей последовательности и снизу для убывающей). Соответствующее утверждение имеет место и для функций.

Теорема (о существовании предела монотонной функции).

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$ *и функция* f *монотонно возрастает на* (a, b). *Если* f *ограничена сверху на* (a, b), *то существует* $\lim_{x \to b-0} f(x)$. *Если же* f *неограничена сверху, то* $\lim_{x \to b-0} f(x) = +\infty$.

Доказательство.

§6. Монотонные функции

Для монотонной последовательности мы доказывали критерий сходимости, который состоит в том, что сходимость монотонной последовательности эквивалентна ее ограниченности (сверху для возрастающей последовательности и снизу для убывающей). Соответствующее утверждение имеет место и для функций.

Теорема (о существовании предела монотонной функции).

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$ *и функция* f *монотонно возрастает на* (a, b). *Если* f *ограничена сверху на* (a, b), *то существует* $\lim_{x \to b-0} f(x)$. *Если же* f *неограничена сверху, то* $\lim_{x \to b-0} f(x) = +\infty$.

Доказательство.

§6. Монотонные функции

Аналогично можно показать, что если f возрастает на $(a, +\infty)$, то
1) если f ограничена сверху, то существует $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;
2) если f неограничена сверху, то $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Точно так же можно доказать аналоги приведенной теоремы для правого предела функции в точке a для конечного a и для $a = -\infty$.

Следствие.

Если функция f монотонна на интервале (a, b), то в каждой точке этого интервала она имеет конечные левый и правый пределы.

Доказательство.

§6. Монотонные функции

Аналогично можно показать, что если f возрастает на $(a, +\infty)$, то
1) если f ограничена сверху, то существует $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;
2) если f неограничена сверху, то $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Точно так же можно доказать аналоги приведенной теоремы для правого предела функции в точке a для конечного a и для $a = -\infty$.

Следствие.

Если функция f монотонна на интервале (a, b), то в каждой точке этого интервала она имеет конечные левый и правый пределы.

Доказательство.

§6. Монотонные функции

Аналогично можно показать, что если f возрастает на $(a, +\infty)$, то
1) если f ограничена сверху, то существует $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;
2) если f неограничена сверху, то $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Точно так же можно доказать аналоги приведенной теоремы для правого предела функции в точке a для конечного a и для $a = -\infty$.

Следствие.

Если функция f монотонна на интервале (a, b), то в каждой точке этого интервала она имеет конечные левый и правый пределы.

Доказательство.

§6. Монотонные функции

Аналогично можно показать, что если f возрастает на $(a, +\infty)$, то
1) если f ограничена сверху, то существует $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;
2) если f неограничена сверху, то $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Точно так же можно доказать аналоги приведенной теоремы для правого предела функции в точке a для конечного a и для $a = -\infty$.

Следствие.

Если функция f монотонна на интервале (a, b), то в каждой точке этого интервала она имеет конечные левый и правый пределы.

Доказательство.

§7. Замена переменной в пределах

§7. Замена переменной в пределах

§7. Замена переменной в пределах

Теорема (о замене переменной в пределах).

Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки x_0, а функция g определена в проколотой окрестности V точки t_0 и такова, что для всех $t \in V$ значение $x = g(t)$ принадлежит U и $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Тогда $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = A$.

Доказательство.

§7. Замена переменной в пределах

Теорема (о замене переменной в пределах).

Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки x_0, а функция g определена в проколотой окрестности V точки t_0 и такова, что для всех $t \in V$ значение $x = g(t)$ принадлежит U и $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Тогда $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = A$.

Доказательство.

§7. Замена переменной в пределах

Смысл доказанной теоремы состоит в том, что если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то, считая x зависимой переменной $(x = g(t))$ и такой, что $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$, мы получим то же самое значение $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = A$.

Иначе говоря, при вычислении предела $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t))$ можно выполнять замену $x = g(t)$ и (при выполнении соответствующих условий, т. е. $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$, $g(t) \neq x_0$) вычислять $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Эти пределы равны.

§7. Замена переменной в пределах

Смысл доказанной теоремы состоит в том, что если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то, считая x зависимой переменной $(x = g(t))$ и такой, что $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$, мы получим то же самое значение $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = A$.

Иначе говоря, при вычислении предела $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t))$ можно выполнять замену $x = g(t)$ и (при выполнении соответствующих условий, т. е. $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0,\ g(t) \neq x_0$) вычислять $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Эти пределы равны.

§7. Замена переменной в пределах

Пример.

Вычислить $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}$, где $n\in\mathbb{N}$.

Полагаем $t=x^n-1$, т. е. считаем, что $f(g(t))=\frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}$, где $x=g(t)=\sqrt[n]{1+t}$, а $f(x)=\frac{x-1}{x^n-1}$. Тогда условие $t\to t_0=0$ равносильно тому, что $x\to x_0=1$, а данный предел, согласно теореме о замене переменной, равен такому пределу $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$. Вычислим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1}=\frac{1}{n}.$$

Поэтому и $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}=\frac{1}{n}$.

§7. Замена переменной в пределах

Пример.

Вычислить $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}$, где $n\in\mathbb{N}$.

Полагаем $t = x^n - 1$, т. е. считаем, что $f(g(t)) = \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}$, где $x = g(t) = \sqrt[n]{1+t}$, а $f(x) = \frac{x-1}{x^n-1}$. Тогда условие $t\to t_0 = 0$ равносильно тому, что $x\to x_0 = 1$, а данный предел, согласно теореме о замене переменной, равен такому пределу $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$. Вычислим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1} = \frac{1}{n}.$$

Поэтому и $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t} = \frac{1}{n}$.

§7. Замена переменной в пределах

Пример.

Вычислить $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Полагаем $t = x^n - 1$, т. е. считаем, что $f(g(t)) = \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}$, где $x = g(t) = \sqrt[n]{1+t}$, а $f(x) = \frac{x-1}{x^n-1}$. Тогда условие $t \to t_0 = 0$ равносильно тому, что $x \to x_0 = 1$, а данный предел, согласно теореме о замене переменной, равен такому пределу $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$.

Вычислим

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1} = \frac{1}{n}.$$

Поэтому и $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t} = \frac{1}{n}$.

§7. Замена переменной в пределах

Пример.

Вычислить $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Полагаем $t = x^n - 1$, т. е. считаем, что $f(g(t)) = \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}$, где $x = g(t) = \sqrt[n]{1+t}$, а $f(x) = \frac{x-1}{x^n-1}$. Тогда условие $t \to t_0 = 0$ равносильно тому, что $x \to x_0 = 1$, а данный предел, согласно теореме о замене переменной, равен такому пределу $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$.

Вычислим

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1} = \frac{1}{n}.$$

Поэтому и $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t} = \frac{1}{n}$.

§7. Замена переменной в пределах

Пример.

Вычислить $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}$, где $n\in\mathbb{N}$.

Полагаем $t=x^n-1$, т. е. считаем, что $f(g(t))=\frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}$, где $x=g(t)=\sqrt[n]{1+t}$, а $f(x)=\frac{x-1}{x^n-1}$. Тогда условие $t\to t_0=0$ равносильно тому, что $x\to x_0=1$, а данный предел, согласно теореме о замене переменной, равен такому пределу $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$. Вычислим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}=\frac{1}{n}.$$

Поэтому и $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}=\frac{1}{n}$.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

Определение.

Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Число A (конечное, $+\infty$ или $-\infty$) называется частичным пределом функции f в точке a, если существует такая последовательность $\{x_n\}$ $(x_n \in U,\ x_n \to a\ (n \to \infty), x_n \neq a)$, что $f\,(x_n) \to A\ (n \to \infty)$.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

Каждая функция, определенная в проколотой окрестности U точки a, имеет частичные пределы. В самом деле, если функция f ограничена в некоторой проколотой окрестности $\Delta \subset U$ точки a, то для любой последовательности $\{x_n\}$ $(x_n \in U,\ x_n \to a\ (n \to \infty), x_n \neq a)$, начиная с некоторого номера $x_n \in \Delta$, и, следовательно, $\{f(x_n)\}$ – ограниченная последовательность.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

Каждая функция, определенная в проколотой окрестности U точки a, имеет частичные пределы. В самом деле, если функция f ограничена в некоторой проколотой окрестности $\Delta \subset U$ точки a, то для любой последовательности $\{x_n\}$ $(x_n \in U,\ x_n \to a\ (n \to \infty), x_n \neq a)$, начиная с некоторого номера $x_n \in \Delta$, и, следовательно, $\{f(x_n)\}$ – ограниченная последовательность.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

В силу леммы Больцано – Вейерштрасса, из ограниченной последовательности $\{f(x_n)\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{f(x_{n_k})\}$, т. е. у функции f будет существовать конечный частичный предел.

Если же f неограничена в любой проколотой окрестности точки a, то она неограничена либо сверху, либо снизу. Если, например, f неограничена сверху, то, выбирая последовательность $x_n \in \left(\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \setminus \{a\}\right) \cap U$ так, что $f(x_n) > n$, получим, что $x_n \to a$ и $f(x_n) \to +\infty$, т. е. $+\infty$ является частичным пределом функции f в точке a. Аналогично показываем, что у неограниченной снизу функции $-\infty$ является ее частичным пределом.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

В силу леммы Больцано – Вейерштрасса, из ограниченной последовательности $\{f(x_n)\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{f(x_{n_k})\}$, т. е. у функции f будет существовать конечный частичный предел.

Если же f неограничена в любой проколотой окрестности точки a, то она неограничена либо сверху, либо снизу. Если, например, f неограничена сверху, то, выбирая последовательность $x_n \in \left(\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \setminus \{a\}\right) \cap U$ так, что $f(x_n) > n$, получим, что $x_n \to a$ и $f(x_n) \to +\infty$, т. е. $+\infty$ является частичным пределом функции f в точке a.

Аналогично показываем, что у неограниченной снизу функции $-\infty$ является ее частичным пределом.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

В силу леммы Больцано – Вейерштрасса, из ограниченной последовательности $\{f(x_n)\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{f(x_{n_k})\}$, т. е. у функции f будет существовать конечный частичный предел.

Если же f неограничена в любой проколотой окрестности точки a, то она неограничена либо сверху, либо снизу. Если, например, f неограничена сверху, то, выбирая последовательность $x_n \in \left(\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \setminus \{a\}\right) \cap U$ так, что $f(x_n) > n$, получим, что $x_n \to a$ и $f(x_n) \to +\infty$, т. е. $+\infty$ является частичным пределом функции f в точке a.

Аналогично показываем, что у неограниченной снизу функции $-\infty$ является ее частичным пределом.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

В силу леммы Больцано – Вейерштрасса, из ограниченной последовательности $\{f(x_n)\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{f(x_{n_k})\}$, т. е. у функции f будет существовать конечный частичный предел.

Если же f неограничена в любой проколотой окрестности точки a, то она неограничена либо сверху, либо снизу. Если, например, f неограничена сверху, то, выбирая последовательность $x_n \in \left(\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \setminus \{a\}\right) \cap U$ так, что $f(x_n) > n$, получим, что $x_n \to a$ и $f(x_n) \to +\infty$, т. е. $+\infty$ является частичным пределом функции f в точке a.

Аналогично показываем, что у неограниченной снизу функции $-\infty$ является ее частичным пределом.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

Итак, во множестве $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ для любой функции f множество ее частичных пределов непусто.

Определение. Верхняя грань множества частичных пределов функции f в точке a называется верхним пределом в точке a и обозначается $\varlimsup\limits_{x \to a} f(x)$. Нижняя грань множества частичных пределов функции f в точке a называется нижним пределом в точке a и обозначается $\varliminf\limits_{x \to a} f(x)$.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

Итак, во множестве $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ для любой функции f множество ее частичных пределов непусто.

Определение. Верхняя грань множества частичных пределов функции f в точке a называется **верхним пределом** в точке a и обозначается $\overline{\lim\limits_{x \to a}} f(x)$. Нижняя грань множества частичных пределов функции f в точке a называется **нижним пределом** в точке a и обозначается $\underline{\lim\limits_{x \to a}} f(x)$.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

Итак, во множестве $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ для любой функции f множество ее частичных пределов непусто.

Определение. Верхняя грань множества частичных пределов функции f в точке a называется верхним пределом в точке a и обозначается $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x)$. Нижняя грань множества частичных пределов функции f в точке a называется нижним пределом в точке a и обозначается $\varliminf\limits_{x\to a} f(x)$.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

Пример.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $a = 0$.
Множество частичных пределов этой функции в точке 0 – это отрезок $[-1, 1]$. В самом деле, для любого числа $A \in [-1, 1]$ легко построить последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to 0$, такую, что $\sin\frac{1}{x_n} \to A$ $(n \to \infty)$. Также легко видеть, что если число $A \notin [-1, 1]$, то оно не является частичным пределом функции $\sin\frac{1}{x}$ в точке 0.
Таким образом, $\varliminf\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = -1$ и $\varlimsup\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = 1$.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

Пример.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $a = 0$.
Множество частичных пределов этой функции в точке 0 – это отрезок $[-1, 1]$. В самом деле, для любого числа $A \in [-1, 1]$ легко построить последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to 0$, такую, что $\sin\frac{1}{x_n} \to A$ $(n \to \infty)$. Также легко видеть, что если число $A \notin [-1, 1]$, то оно не является частичным пределом функции $\sin\frac{1}{x}$ в точке 0.
Таким образом, $\varliminf\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = -1$ и $\varlimsup\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = 1$.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

Пример.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $a = 0$.
Множество частичных пределов этой функции в точке 0 – это отрезок $[-1, 1]$. В самом деле, для любого числа $A \in [-1, 1]$ легко построить последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to 0$, такую, что $\sin\frac{1}{x_n} \to A$ $(n \to \infty)$. Также легко видеть, что если число $A \notin [-1, 1]$, то оно не является частичным пределом функции $\sin\frac{1}{x}$ в точке 0.
Таким образом, $\varliminf\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = -1$ и $\varlimsup\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = 1$.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

Пример.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $a = 0$.
Множество частичных пределов этой функции в точке 0 – это отрезок $[-1, 1]$. В самом деле, для любого числа $A \in [-1, 1]$ легко построить последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to 0$, такую, что $\sin\frac{1}{x_n} \to A$ $(n \to \infty)$. Также легко видеть, что если число $A \notin [-1, 1]$, то оно не является частичным пределом функции $\sin\frac{1}{x}$ в точке 0.
Таким образом, $\varliminf\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = -1$ и $\varlimsup\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = 1$.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

Теорема 1.

Верхний и нижний пределы функции являются ее частичными пределами.

Теорема 2.

Для того чтобы функция f имела в точке a предел, равный A (конечный, равный $+\infty$ или $-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\varliminf_{x\to a} f(x) = \varlimsup_{x\to a} f(x) = A.$$

Доказательства теорем 1 и 2 аналогичны доказательствам соответствующих теорем для последовательностей, и мы их не приводим.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

Теорема 1.

Верхний и нижний пределы функции являются ее частичными пределами.

Теорема 2.

Для того чтобы функция f имела в точке a предел, равный A (конечный, равный $+\infty$ или $-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\varliminf_{x\to a} f(x) = \varlimsup_{x\to a} f(x) = A.$$

Доказательства теорем 1 и 2 аналогичны доказательствам соответствующих теорем для последовательностей, и мы их не приводим.

§8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы функций

Теорема 1.

Верхний и нижний пределы функции являются ее частичными пределами.

Теорема 2.

Для того чтобы функция f имела в точке a предел, равный A (конечный, равный $+\infty$ или $-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\varliminf_{x\to a} f(x) = \varlimsup_{x\to a} f(x) = A.$$

Доказательства теорем 1 и 2 аналогичны доказательствам соответствующих теорем для последовательностей, и мы их не приводим.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Далее содержатся

вспомогательные материалы

Доказательство теоремы 1.

Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел это совокупность всех чисел вида $\frac{p}{q}$, где p – целое, а q – натуральное. Выпишем по строкам

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
q=1: & \frac{0}{1} & \rightarrow & \frac{1}{1} & & \frac{-1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{-2}{1} & \dots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
q=2: & \frac{1}{2} & & \frac{-1}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{-3}{2} & & \frac{5}{2} & \dots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
q=3: & \frac{1}{3} & & \frac{-1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{-2}{3} & & \frac{4}{3} & \dots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
q=4: & \frac{1}{4} & & \frac{-1}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{-3}{4} & & \frac{5}{4} & \dots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
q=5: & \frac{1}{5} & & \frac{-1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{-2}{5} & & \frac{3}{5} & \dots \\
\dots & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots
\end{array}
$$

Каждая строка этой таблицы содержит только несократимые дроби. В этой таблице содержатся все рациональные числа. Пример расположения всех чисел в последовательность указан в самой таблице. Этим самым доказано, что $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. $\blacksquare$

Другое доказательство теоремы 1.

Занумеруем сначала множество $\mathbb{Q}^+$ всех положительных рациональных чисел. Для этого каждое число $r \in \mathbb{Q}^+$ представим в виде $r = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь. Высотой числа r назовем $p+q$. Тогда, очевидно, для каждого натурального $n \geq 2$ существует лишь конечное число дробей высоты n. В самом деле, это будет множество чисел $\left\{\frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \dots, \frac{n-1}{1}\right\}$, из которого удалены все сократимые дроби. Теперь множество всех элементов из $\mathbb{Q}^+$ легко расположить в последовательность следующим образом: сначала запишем все дроби высоты 2, затем все дроби высоты 3 и т.д. Получим последовательность $r_1, r_2, \dots$, в которой содержатся все положительные рациональные числа. Теперь уже и все элементы множества $\mathbb{Q}$ можно расположить в последовательность, например, следующим образом: $0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, \dots$.

Доказательство теоремы 2.

Достаточно показать, что отрезок $[0,1]$ не является счетным. В самом деле, если бы множество $\mathbb{R}$ было бы счетным, то перебирая последовательно один за другим занумерованные элементы множества $\mathbb{R}$ и оставляя лишь те, которые содержатся в $[0,1]$, мы получили бы, что и $[0,1]$ счетен.
Итак, докажем, что $[0,1]$ несчетен. Предположим противное. Пусть $x_1, x_2, \dots$ – занумерованные все точки отрезка $[0,1]$. Разобьем $[0,1]$ на три отрезка равной длины и в качестве I_1 выберем тот из них, который не содержит x_1. Далее, разобьем I_1 на три равных по длине отрезка и выберем такой из них, который не содержит x_2.

Окончание доказательства теоремы 2.

Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных друг в друга отрезков I_n длины $|I_n| = 3^{-n}$, таких, что I_n не содержит точек $x_1, \dots, x_n$. По лемме Кантора последовательность I_n имеет единственную общую точку x. Эта точка x не может совпасть с какой-либо точкой x_{n_0}. В самом деле, если $x = x_{n_0}$, то x не принадлежал бы I_{n_0}, а x принадлежит всем отрезкам I_n.

Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Доказательство теоремы 3.

Используем следствие из принципа Архимеда, согласно которому в каждом интервале (a, b) существует рациональное число r, т. е. такое, что $a < r < b$.

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Зададим $\varepsilon = 1$ и найдем рациональное число r_1, такое, что $x < r_1 < x + 1$. Для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ найдем рациональное число r_2, такое, что $x < r_2 < x + \frac{1}{2}$. Продолжая этот процесс, построим последовательность рациональных чисел r_n, такую, что $x < r_n < x + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что $r_n \to x$ $(n \to \infty)$. ∎

Доказательство теоремы 1.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta_1 > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta_1$ следует $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Далее, найдем $\delta_2 > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta_2$ следует $|f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и выберем такое x, что $0 < |x - a| < \delta$. Тогда

$$|B - A| \le |f(x) - A| + |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольное и $|B - A| < \varepsilon$, то это означает, что $A = B$.

Доказательство теоремы 1.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$.
Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta_1 > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x-a| < \delta_1$ следует $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Далее, найдем $\delta_2 > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x-a| < \delta_2$ следует $|f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и выберем такое x, что $0 < |x-a| < \delta$. Тогда

$$|B - A| \le |f(x) - A| + |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольное и $|B - A| < \varepsilon$, то это означает, что $A = B$.

Доказательство теоремы 1.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$.
Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta_1 > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta_1$ следует $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Далее, найдем $\delta_2 > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta_2$ следует $|f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и выберем такое x, что $0 < |x - a| < \delta$. Тогда

$$|B - A| \leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольное и $|B - A| < \varepsilon$, то это означает, что $A = B$.

Доказательство теоремы 1.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$.
Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta_1 > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x-a| < \delta_1$ следует $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Далее, найдем $\delta_2 > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x-a| < \delta_2$ следует $|f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и выберем такое x, что $0 < |x-a| < \delta$. Тогда

$$|B - A| \le |f(x) - A| + |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольное и $|B - A| < \varepsilon$, то это означает, что $A = B$.

Доказательство теоремы 1.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$.
Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta_1 > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x-a| < \delta_1$ следует $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Далее, найдем $\delta_2 > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x-a| < \delta_2$ следует $|f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и выберем такое x, что $0 < |x-a| < \delta$. Тогда

$$|B - A| \leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольное и $|B - A| < \varepsilon$, то это означает, что $A = B$.

Доказательство теоремы 2.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Зададим $\varepsilon = 1$ и найдем такое $\delta > 0$, что для всех $x \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < 1$.

Обозначим $V = U \cap \{x : \ 0 < |x - a| < \delta\}$. Тогда для всех $x \in V$ справедливо неравенство $|f(x)| \le |f(x) - A| + |A| \le |A| + 1$, которое и означает, что функция f ограничена на V.

Доказательство теоремы 2.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Зададим $\varepsilon = 1$ и найдем такое $\delta > 0$, что для всех $x \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < 1$.
Обозначим $V = U \cap \{x : \ 0 < |x - a| < \delta\}$. Тогда для всех $x \in V$ справедливо неравенство
$|f(x)| \leq |f(x) - A| + |A| \leq |A| + 1$, которое и означает, что функция f ограничена на V.

Доказательство эквивалентности двух определений предела функции в точке.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ в смысле определения по Коши. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, $x_n \neq a$ и покажем, что $f(x_n) \to A$ $(n \to \infty)$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$. Пользуясь тем, что $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, для найденного δ найдем номер N, такой, что при каждом $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \delta$. Но тогда при каждом $n \geq N$ будет выполнено неравенство $|f(x_n) - a| < \varepsilon$.
Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.
Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Доказательство эквивалентности двух определений предела функции в точке.

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ в смысле определения по Коши. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, $x_n \neq a$ и покажем, что $f(x_n) \to A$ $(n \to \infty)$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$. Пользуясь тем, что $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, для найденного δ найдем номер N, такой, что при каждом $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \delta$. Но тогда при каждом $n \geq N$ будет выполнено неравенство $|f(x_n) - a| < \varepsilon$.
Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.
Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Доказательство эквивалентности двух определений предела функции в точке.

Пусть $\lim_{x \to a} f(x) = A$ в смысле определения по Коши. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, $x_n \neq a$ и покажем, что $f(x_n) \to A$ $(n \to \infty)$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$. Пользуясь тем, что $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, для найденного δ найдем номер N, такой, что при каждом $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \delta$. Но тогда при каждом $n \geq N$ будет выполнено неравенство $|f(x_n) - a| < \varepsilon$. Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Доказательство эквивалентности двух определений предела функции в точке.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ в смысле определения по Коши. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to a$ $(n\to\infty)$, $x_n \neq a$ и покажем, что $f(x_n) \to A$ $(n\to\infty)$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x-a| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$. Пользуясь тем, что $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, для найденного δ найдем номер N, такой, что при каждом $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \delta$. Но тогда при каждом $n \geq N$ будет выполнено неравенство $|f(x_n) - a| < \varepsilon$.
Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.
Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Доказательство эквивалентности двух определений предела функции в точке.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ в смысле определения по Коши. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, $x_n \neq a$ и покажем, что $f(x_n) \to A$ $(n \to \infty)$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$. Пользуясь тем, что $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, для найденного δ найдем номер N, такой, что при каждом $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \delta$. Но тогда при каждом $n \geq N$ будет выполнено неравенство $|f(x_n) - a| < \varepsilon$.
Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.
Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Доказательство эквивалентности двух определений предела функции в точке.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ в смысле определения по Коши. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to a$ $(n\to\infty)$, $x_n \neq a$ и покажем, что $f(x_n)\to A$ $(n\to\infty)$. Зададим $\varepsilon>0$ и найдем $\delta>0$, такое, что из неравенства $0<|x-a|<\delta$ следует $|f(x)-A|<\varepsilon$. Пользуясь тем, что $x_n\to a$ $(n\to\infty)$, для найденного δ найдем номер N, такой, что при каждом $n\geq N$ справедливо неравенство $|x_n-a|<\delta$. Но тогда при каждом $n\geq N$ будет выполнено неравенство $|f(x_n)-a|<\varepsilon$.
Итак, для заданного $\varepsilon>0$ найдется такой номер N, что для всех $n\geq N$ справедливо неравенство $|f(x_n)-A|<\varepsilon$.
Так как $\varepsilon>0$ произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Продолжение доказательства эквивалентности двух определений предела функции в точке.

Обратно, пусть число A является пределом функции f при $x \to a$ в смысле Гейне, т. е. для любой последовательности $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к A. Предположим, что A не является пределом функции f в точке a в смысле Коши. Это означает, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует такое x, что $0 < |x - a| < \delta$, но $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$. Возьмем $\delta = 1$ и найдем такое x_1, что $0 < |x_1 - a| < 1$ и $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$. Далее, для $\delta = \frac{1}{2}$ найдем такое x_2, что $0 < |x_2 - a| < \frac{1}{2}$ и $|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$. Полагая $\delta = \frac{1}{n}$, найдем такое x_n, что $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$.

Продолжение доказательства эквивалентности двух определений предела функции в точке.

Обратно, пусть число A является пределом функции f при $x \to a$ в смысле Гейне, т. е. для любой последовательности $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к A. Предположим, что A не является пределом функции f в точке a в смысле Коши. Это означает, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует такое x, что $0 < |x - a| < \delta$, но $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$. Возьмем $\delta = 1$ и найдем такое x_1, что $0 < |x_1 - a| < 1$ и $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$. Далее, для $\delta = \frac{1}{2}$ найдем такое x_2, что $0 < |x_2 - a| < \frac{1}{2}$ и $|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$. Полагая $\delta = \frac{1}{n}$, найдем такое x_n, что $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$.

Продолжение доказательства эквивалентности двух определений предела функции в точке.

Обратно, пусть число A является пределом функции f при $x \to a$ в смысле Гейне, т. е. для любой последовательности $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к A. Предположим, что A не является пределом функции f в точке a в смысле Коши. Это означает, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует такое x, что $0 < |x - a| < \delta$, но $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$. Возьмем $\delta = 1$ и найдем такое x_1, что $0 < |x_1 - a| < 1$ и $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$. Далее, для $\delta = \frac{1}{2}$ найдем такое x_2, что $0 < |x_2 - a| < \frac{1}{2}$ и $|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$. Полагая $\delta = \frac{1}{n}$, найдем такое x_n, что $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$.

Продолжение доказательства эквивалентности двух определений предела функции в точке.

Обратно, пусть число A является пределом функции f при $x \to a$ в смысле Гейне, т. е. для любой последовательности $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к A. Предположим, что A не является пределом функции f в точке a в смысле Коши. Это означает, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует такое x, что $0 < |x - a| < \delta$, но $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$. Возьмем $\delta = 1$ и найдем такое x_1, что $0 < |x_1 - a| < 1$ и $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$. Далее, для $\delta = \frac{1}{2}$ найдем такое x_2, что $0 < |x_2 - a| < \frac{1}{2}$ и $|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$. Полагая $\delta = \frac{1}{n}$, найдем такое x_n, что $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$.

Окончание доказательства эквивалентности двух определений предела функции в точке.

В результате получим последовательность $\{x_n\}$. Из условия $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ следует, что $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, а поскольку $|x_n - a| > 0$, то $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \dots)$. Кроме того, $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. Это неравенство означает, что $\{f(x_n)\}$ не стремится к A.

Окончательно, мы построили такую последовательность аргументов $\{x_n\}$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ не стремится к A. Это противоречит условию.

Окончание доказательства эквивалентности двух определений предела функции в точке.

В результате получим последовательность $\{x_n\}$. Из условия $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ следует, что $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, а поскольку $|x_n - a| > 0$, то $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \dots)$. Кроме того, $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. Это неравенство означает, что $\{f(x_n)\}$ не стремится к A.

Окончательно, мы построили такую последовательность аргументов $\{x_n\}$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ не стремится к A. Это противоречит условию.

Окончание доказательства эквивалентности двух определений предела функции в точке.

В результате получим последовательность $\{x_n\}$. Из условия $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ следует, что $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, а поскольку $|x_n - a| > 0$, то $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \dots)$. Кроме того, $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. Это неравенство означает, что $\{f(x_n)\}$ не стремится к A.

Окончательно, мы построили такую последовательность аргументов $\{x_n\}$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ не стремится к A. Это противоречит условию.

Доказательство теоремы о предельном переходе в неравенствах.

Зададим $\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$ и найдем такое $\delta' > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta'$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.
Далее, найдем такое $\delta'' > 0$, что если только $0 < |x-a| < \delta''$, то $|g(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon$.
Положим $\delta = \min(\delta', \delta'') > 0$. Тогда для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, справедливы неравенства $f(x) < A + \varepsilon = \frac{A+B}{2} = B - \varepsilon < g(x)$, из которых следует, что $f(x) < g(x)$ $(x \in \Delta = \{x : 0 < |x-a| < \delta\})$.

Доказательство теоремы о предельном переходе в неравенствах.

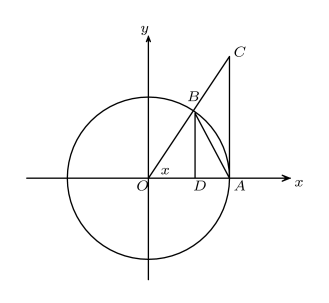
Зададим $\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$ и найдем такое $\delta' > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta'$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.
Далее, найдем такое $\delta'' > 0$, что если только $0 < |x - a| < \delta''$, то $|g(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon$.
Положим $\delta = \min(\delta', \delta'') > 0$. Тогда для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливы неравенства $f(x) < A + \varepsilon = \frac{A+B}{2} = B - \varepsilon < g(x)$, из которых следует, что $f(x) < g(x)$ $(x \in \Delta = \{x : 0 < |x - a| < \delta\})$.

Доказательство теоремы о предельном переходе в неравенствах.

Зададим $\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$ и найдем такое $\delta' > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta'$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.
Далее, найдем такое $\delta'' > 0$, что если только $0 < |x-a| < \delta''$, то $|g(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon$.
Положим $\delta = \min(\delta', \delta'') > 0$. Тогда для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, справедливы неравенства $f(x) < A + \varepsilon = \frac{A+B}{2} = B - \varepsilon < g(x)$, из которых следует, что $f(x) < g(x)$ $(x \in \Delta = \{x : 0 < |x-a| < \delta\})$.

Геометрическое доказательство двух основных тригонометрических неравенств.

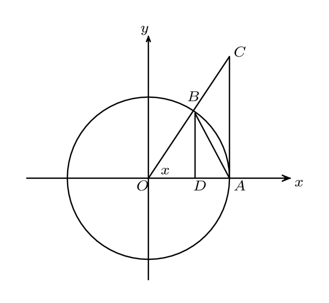
Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат:



Пусть точка B находится в первой четверти на окружности. Получим угол $\angle AOB$, радианная мера которого равна x. Проведем в точке A перпендикуляр к оси абсцисс и продолжим OB до пересечения с этим перпендикуляром в точке C. Из точки B опустим перпендикуляр на ось абсцисс в точку D.

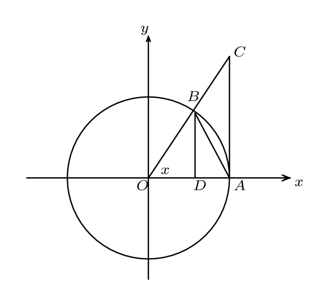
Геометрическое доказательство двух основных тригонометрических неравенств.

Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат:



Пусть точка B находится в первой четверти на окружности. Получим угол $\angle AOB$, радианная мера которого равна x. Проведем в точке A перпендикуляр к оси абсцисс и продолжим OB до пересечения с этим перпендикуляром в точке C. Из точки B опустим перпендикуляр на ось абсцисс в точку D.

Геометрическое доказательство двух основных тригонометрических неравенств.

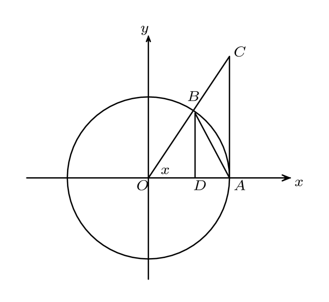


Тогда из чертежа ясно, что сектор $\measuredangle AOB$ содержится в треугольнике $\triangle AOC$ и этот сектор содержит треугольник $\triangle AOB$.

Поэтому для площадей $S_{\triangle AOB}$ треугольника $\triangle AOB$, $S_{\measuredangle AOB}$ сектора $\measuredangle AOB$ и $S_{\triangle AOC}$ треугольника $\triangle AOC$ справедливо следующее неравенство:

$$S_{\triangle AOB} < S_{\measuredangle AOB} < S_{\triangle AOC}. \tag{3.3}$$

Геометрическое доказательство двух основных тригонометрических неравенств.

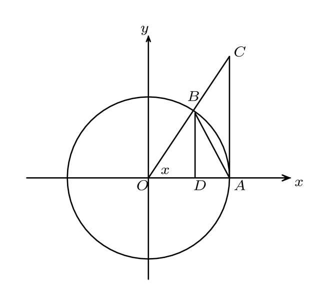


Тогда из чертежа ясно, что сектор $\angle\!)AOB$ содержится в треугольнике $\triangle AOC$ и этот сектор содержит треугольник $\triangle AOB$.

Поэтому для площадей $S_{\triangle AOB}$ треугольника $\triangle AOB$, $S_{\angle\!)AOB}$ сектора $\angle\!)AOB$ и $S_{\triangle AOC}$ треугольника $\triangle AOC$ справедливо следующее неравенство:

$$S_{\triangle AOB} < S_{\angle\!)AOB} < S_{\triangle AOC}. \tag{3.3}$$

Геометрическое доказательство двух основных тригонометрических неравенств.



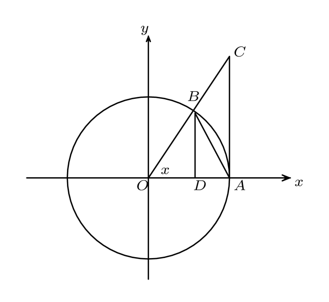
Имеем $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|BD|$, $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|AC|$ и $S_{\measuredangle AOB} = \frac{1}{2}|AO|\cdot\ell(\overset{\frown}{AB}) = \frac{1}{2}x$ (т. к. $|AO| = 1$, а длина $\ell(\overset{\frown}{AB})$ дуги окружности равна произведению радиуса на величину угла (в радианах), на который опирается эта дуга).

Далее, $|BD| = \sin x$, поэтому левое неравенство в (3.3)

$$S_{\triangle AOB} < S_{\measuredangle AOB} < S_{\triangle AOC}. \tag{3.3}$$

принимает вид $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x$, или $\sin x < x$.

Геометрическое доказательство двух основных тригонометрических неравенств.



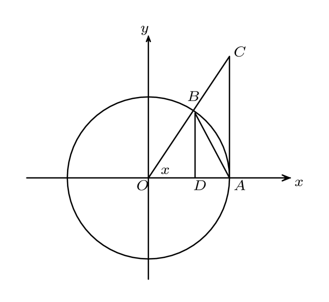
Имеем $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |BD|$, $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |AC|$ и $S_{\measuredangle AOB} = \frac{1}{2}|AO| \cdot \ell(\overset{\frown}{AB}) = \frac{1}{2}x$ (т. к. $|AO| = 1$, а длина $\ell(\overset{\frown}{AB})$ дуги окружности равна произведению радиуса на величину угла (в радианах), на который опирается эта дуга).

Далее, $|BD| = \sin x$, поэтому левое неравенство в (3.3)

$$S_{\triangle AOB} < S_{\measuredangle AOB} < S_{\triangle AOC}. \tag{3.3}$$

принимает вид $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x$, или $\sin x < x$.

Геометрическое доказательство двух основных тригонометрических неравенств.



Правое неравенство в (3.3)

$$S_{\triangle AOB} < S_{\sphericalangle AOB} < S_{\triangle AOC}. \tag{3.3}$$

имеет такой вид:

$$\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,x,$$

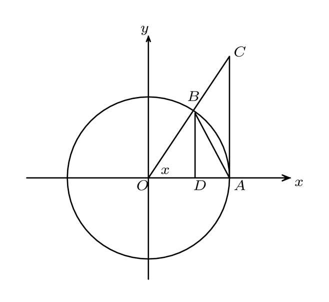
т. е. $x < \mathrm{tg}\,x$.

Тем самым доказаны неравенства

$$\sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.1}$$

$$x < \mathrm{tg}\,x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \tag{3.2}$$

Геометрическое доказательство двух основных тригонометрических неравенств.



Правое неравенство в (3.3)

$$S_{\triangle AOB} < S_{\measuredangle AOB} < S_{\triangle AOC}. \tag{3.3}$$

имеет такой вид:

$$\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

т. е. $x < \operatorname{tg} x$.

Тем самым доказаны неравенства

$$\sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.1}$$

$$x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \tag{3.2}$$

Доказательство Критерия Коши. Необходимость.

Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь определением предела, найдем такое δ, что для всех $x \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $x', x'' \in U$ такие, что $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$. Тогда

$$\left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| \leq \left|f\left(x'\right) - A\right| + \left|f\left(x''\right) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Доказательство Критерия Коши. Необходимость.

Пусть существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь определением предела, найдем такое δ, что для всех $x \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Пусть $x', x'' \in U$ такие, что $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$.
Тогда

$$\left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| \leq \left|f\left(x'\right) - A\right| + \left|f\left(x''\right) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Доказательство Критерия Коши. Достаточность.

Применим определение предела функции по Гейне и критерий Коши для последовательностей. Пусть выполнено условие Коши, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x', x'' \in U : \ 0 < |x' - a| < \delta, \ 0 < |x'' - a| < \delta$$

$$\left| f\left(x'\right) - f\left(x''\right) \right| < \varepsilon.$$

Покажем, что существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ $(x_n \in U, \ x_n \to a \ (n \to \infty), \ x_n \neq a)$ и докажем, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится.

Доказательство Критерия Коши. Достаточность.

Применим определение предела функции по Гейне и критерий Коши для последовательностей. Пусть выполнено условие Коши, т. е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ \forall x', x'' \in U:\ 0 < |x' - a| < \delta,\ 0 < |x'' - a| < \delta$$

$$\left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| < \varepsilon.$$

Покажем, что существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ $(x_n \in U,\ x_n \to a\ (n \to \infty),\ x_n \neq a)$ и докажем, что соответствующая последовательность значений функции $\{f\left(x_n\right)\}$ сходится.

Доказательство Критерия Коши. Достаточность.

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь условием Коши, найдем такое $\delta > 0$, что для всех $x', x'' \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Но поскольку $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, то найдется такое N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \delta$.

Пусть $n, m \geq N$. Тогда $0 < |x_n - a| < \delta$ и $0 < |x_m - a| < \delta$, а значит, $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.

Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для любых $n, m \geq N$ справедливо неравенство $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.

Это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна и, следовательно, сходится (в силу критерия Коши для последовательностей).

Доказательство Критерия Коши. Достаточность.

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь условием Коши, найдем такое $\delta > 0$, что для всех $x', x'' \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.
Но поскольку $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, то найдется такое N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \delta$.
Пусть $n, m \geq N$. Тогда $0 < |x_n - a| < \delta$ и $0 < |x_m - a| < \delta$, а значит, $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.
Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для любых $n, m \geq N$ справедливо неравенство $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.
Это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна и, следовательно, сходится (в силу критерия Коши для последовательностей).

Доказательство Критерия Коши. Достаточность.

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь условием Коши, найдем такое $\delta > 0$, что для всех $x', x'' \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.
Но поскольку $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, то найдется такое N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \delta$.
Пусть $n, m \geq N$. Тогда $0 < |x_n - a| < \delta$ и $0 < |x_m - a| < \delta$, а значит, $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.
Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для любых $n, m \geq N$ справедливо неравенство $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.
Это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна и, следовательно, сходится (в силу критерия Коши для последовательностей).

Доказательство Критерия Коши. Достаточность.

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь условием Коши, найдем такое $\delta > 0$, что для всех $x', x'' \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.
Но поскольку $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, то найдется такое N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \delta$.
Пусть $n, m \geq N$. Тогда $0 < |x_n - a| < \delta$ и $0 < |x_m - a| < \delta$, а значит, $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.
Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для любых $n, m \geq N$ справедливо неравенство $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.
Это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна и, следовательно, сходится (в силу критерия Коши для последовательностей).

Доказательство Критерия Коши. Достаточность.

Таким образом, для любой последовательности $\{x_n\}$ (с отмеченными выше свойствами) последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится.

Нужно еще показать, что все последовательности $\{f(x_n)\}$ сходятся к одному и тому же пределу. Но это действительно так, ибо в противном случае, если $f(x_n') \to A$ и $f(x_n'') \to B$, где $B \neq A$, то последовательность $\{f(x_1'), f(x_1''), f(x_2'), f(x_2''), \dots\}$ не имела бы предела, что противоречит уже доказанному.

Доказательство Критерия Коши. Достаточность.

Таким образом, для любой последовательности $\{x_n\}$ (с отмеченными выше свойствами) последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится.
Нужно еще показать, что все последовательности $\{f(x_n)\}$ сходятся к одному и тому же пределу. Но это действительно так, ибо в противном случае, если $f(x_n') \to A$ и $f(x_n'') \to B$, где $B \neq A$, то последовательность $\{f(x_1'), f(x_1''), f(x_2'), f(x_2''), \ldots\}$ не имела бы предела, что противоречит уже доказанному.

Доказательство Критерия Коши. Достаточность.

Таким образом, для любой последовательности $\{x_n\}$ (с отмеченными выше свойствами) последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится.

Нужно еще показать, что все последовательности $\{f(x_n)\}$ сходятся к одному и тому же пределу. Но это действительно так, ибо в противном случае, если $f(x_n') \to A$ и $f(x_n'') \to B$, где $B \neq A$, то последовательность $\{f(x_1'), f(x_1''), f(x_2'), f(x_2''), \ldots\}$ не имела бы предела, что противоречит уже доказанному.

Доказательство теоремы о пределе монотонной функции.

Пусть f ограничена сверху. Это означает, что ограничено сверху множество ее значений $E(f) = \{f(x): \ x \in (a,b)\}$. Обозначим $A = \sup E(f)$ (верхняя грань ограниченного сверху множества $E(f)$ существует в силу теоремы о существовании верхней грани). Покажем, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = A$. Так как $A = \sup E(f)$, то
1) для любого $y \in E(f)$ справедливо неравенство $y \leq A$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $y' \in E(f)$, что $y' > A - \varepsilon$.
Условие 1) означает, что для любого $x \in (a,b)$ справедливо неравенство $f(x) \leq A$.

Доказательство теоремы о пределе монотонной функции.

Пусть f ограничена сверху. Это означает, что ограничено сверху множество ее значений $E(f) = \{f(x) : \ x \in (a, b)\}$. Обозначим $A = \sup E(f)$ (верхняя грань ограниченного сверху множества $E(f)$ существует в силу теоремы о существовании верхней грани). Покажем, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = A$. Так как $A = \sup E(f)$, то

1) для любого $y \in E(f)$ справедливо неравенство $y \leq A$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $y' \in E(f)$, что $y' > A - \varepsilon$.

Условие 1) означает, что для любого $x \in (a, b)$ справедливо неравенство $f(x) \leq A$.

Доказательство теоремы о пределе монотонной функции.

Пусть f ограничена сверху. Это означает, что ограничено сверху множество ее значений $E(f) = \{f(x) : \ x \in (a, b)\}$. Обозначим $A = \sup E(f)$ (верхняя грань ограниченного сверху множества $E(f)$ существует в силу теоремы о существовании верхней грани). Покажем, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = A$. Так как $A = \sup E(f)$, то

1) для любого $y \in E(f)$ справедливо неравенство $y \leq A$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $y' \in E(f)$, что $y' > A - \varepsilon$.

Условие 1) означает, что для любого $x \in (a, b)$ справедливо неравенство $f(x) \leq A$.

Доказательство теоремы о пределе монотонной функции.

Пусть f ограничена сверху. Это означает, что ограничено сверху множество ее значений $E(f) = \{f(x) : \ x \in (a, b)\}$. Обозначим $A = \sup E(f)$ (верхняя грань ограниченного сверху множества $E(f)$ существует в силу теоремы о существовании верхней грани). Покажем, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = A$. Так как $A = \sup E(f)$, то
1) для любого $y \in E(f)$ справедливо неравенство $y \leq A$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $y' \in E(f)$, что $y' > A - \varepsilon$.
Условие 1) означает, что для любого $x \in (a, b)$ справедливо неравенство $f(x) \leq A$.

Продолжение доказательства теоремы о пределе монотонной функции.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $y' \in E(f)$, такое, что $y' = f(x') > A - \varepsilon$, где $x' \in (a, b)$. Обозначим $\delta = b - x' > 0$. Тогда для всех $x > b - \delta = x'$ из монотонности f вытекает, что $f(x) \geq f(x') > A - \varepsilon$. Итак, с учетом 1) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ ($\delta = b - x'$), что для всех $x \in (b - \delta, b)$ (т. е. $b - \delta < x < b$) справедливо неравенство $A - \varepsilon < f(x) \leq A < A + \varepsilon$, т. е. $|f(x) - A| < \varepsilon$. Последнее означает, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = A$.

Продолжение доказательства теоремы о пределе монотонной функции.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $y' \in E(f)$, такое, что $y' = f(x') > A - \varepsilon$, где $x' \in (a, b)$. Обозначим $\delta = b - x' > 0$. Тогда для всех $x > b - \delta = x'$ из монотонности f вытекает, что $f(x) \geq f(x') > A - \varepsilon$. Итак, с учетом 1) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ ($\delta = b - x'$), что для всех $x \in (b - \delta, b)$ (т. е. $b - \delta < x < b$) справедливо неравенство $A - \varepsilon < f(x) \leq A < A + \varepsilon$, т. е. $|f(x) - A| < \varepsilon$. Последнее означает, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = A$.

Окончание доказательства теоремы о пределе монотонной функции.

Предположим теперь, что f неограничена сверху на (a, b), и покажем, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$.

Наше условие равносильно тому, что неограничено сверху множество $E(f)$. Поэтому для любого $M > 0$ найдется такое $y' \in E(f)$, что $y' > M$.

Зададим $M > 0$ и найдем такое $y' \in E(f)$, что $y' > M$. Так как $y' \in E(f)$, то существует такое $x' \in (a, b)$, что $y' = f(x')$. Из монотонности f следует, что для всех $x > x'$ $(x \in (a, b))$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x') > M$. Обозначим $\delta = b - x' > 0$. Тогда получим, что для всех $x \in (a, b)$, удовлетворяющих условию $b - \delta < x < b$, справедливо неравенство $f(x) > M$. Так как M произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$.

Окончание доказательства теоремы о пределе монотонной функции.

Предположим теперь, что f неограничена сверху на (a, b), и покажем, что $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$.

Наше условие равносильно тому, что неограничено сверху множество $E(f)$. Поэтому для любого $M > 0$ найдется такое $y' \in E(f)$, что $y' > M$.

Зададим $M > 0$ и найдем такое $y' \in E(f)$, что $y' > M$. Так как $y' \in E(f)$, то существует такое $x' \in (a, b)$, что $y' = f(x')$. Из монотонности f следует, что для всех $x > x'$ $(x \in (a, b))$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x') > M$. Обозначим $\delta = b - x' > 0$. Тогда получим, что для всех $x \in (a, b)$, удовлетворяющих условию $b - \delta < x < b$, справедливо неравенство $f(x) > M$. Так как M произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$.

Окончание доказательства теоремы о пределе монотонной функции.

Предположим теперь, что f неограничена сверху на (a, b), и покажем, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$.

Наше условие равносильно тому, что неограничено сверху множество $E(f)$. Поэтому для любого $M > 0$ найдется такое $y' \in E(f)$, что $y' > M$.

Зададим $M > 0$ и найдем такое $y' \in E(f)$, что $y' > M$. Так как $y' \in E(f)$, то существует такое $x' \in (a, b)$, что $y' = f(x')$. Из монотонности f следует, что для всех $x > x'$ $(x \in (a, b))$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x') > M$. Обозначим $\delta = b - x' > 0$. Тогда получим, что для всех $x \in (a, b)$, удовлетворяющих условию $b - \delta < x < b$, справедливо неравенство $f(x) > M$. Так как M произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$.

Окончание доказательства теоремы о пределе монотонной функции.

Предположим теперь, что f неограничена сверху на (a, b), и покажем, что $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$.

Наше условие равносильно тому, что неограничено сверху множество $E(f)$. Поэтому для любого $M > 0$ найдется такое $y' \in E(f)$, что $y' > M$.

Зададим $M > 0$ и найдем такое $y' \in E(f)$, что $y' > M$. Так как $y' \in E(f)$, то существует такое $x' \in (a, b)$, что $y' = f(x')$. Из монотонности f следует, что для всех $x > x'$ $(x \in (a, b))$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x') > M$. Обозначим $\delta = b - x' > 0$. Тогда получим, что для всех $x \in (a, b)$, удовлетворяющих условию $b - \delta < x < b$, справедливо неравенство $f(x) > M$. Так как M произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$.

Окончание доказательства теоремы о пределе монотонной функции.

Предположим теперь, что f неограничена сверху на (a, b), и покажем, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$.

Наше условие равносильно тому, что неограничено сверху множество $E(f)$. Поэтому для любого $M > 0$ найдется такое $y' \in E(f)$, что $y' > M$.

Зададим $M > 0$ и найдем такое $y' \in E(f)$, что $y' > M$. Так как $y' \in E(f)$, то существует такое $x' \in (a, b)$, что $y' = f(x')$. Из монотонности f следует, что для всех $x > x'$ $(x \in (a, b))$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x') > M$. Обозначим $\delta = b - x' > 0$. Тогда получим, что для всех $x \in (a, b)$, удовлетворяющих условию $b - \delta < x < b$, справедливо неравенство $f(x) > M$. Так как M произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$.

Окончание доказательства теоремы о пределе монотонной функции.

Предположим теперь, что f неограничена сверху на (a, b), и покажем, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$.

Наше условие равносильно тому, что неограничено сверху множество $E(f)$. Поэтому для любого $M > 0$ найдется такое $y' \in E(f)$, что $y' > M$.

Зададим $M > 0$ и найдем такое $y' \in E(f)$, что $y' > M$. Так как $y' \in E(f)$, то существует такое $x' \in (a, b)$, что $y' = f(x')$. Из монотонности f следует, что для всех $x > x'$ $(x \in (a, b))$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x') > M$. Обозначим $\delta = b - x' > 0$. Тогда получим, что для всех $x \in (a, b)$, удовлетворяющих условию $b - \delta < x < b$, справедливо неравенство $f(x) > M$. Так как M произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$.

Доказательство следствия.

Рассмотрим случай, когда f возрастает на (a, b).

Выберем $x_0 \in (a, b)$ и покажем, что существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Так как f возрастает на (a, b), то f возрастает и на (a, x_0), и на (a, x_0) функция f ограничена сверху, поскольку $f(x) \le f(x_0)$ для всех $x \in (a, x_0)$. В силу доказанной теоремы, существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.

Аналогично получаем, что существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Доказательство следствия.

Рассмотрим случай, когда f возрастает на (a, b).
Выберем $x_0 \in (a, b)$ и покажем, что существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Так как f возрастает на (a, b), то f возрастает и на (a, x_0), и на (a, x_0) функция f ограничена сверху, поскольку $f(x) \leq f(x_0)$ для всех $x \in (a, x_0)$. В силу доказанной теоремы, существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.
Аналогично получаем, что существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Доказательство следствия.

Рассмотрим случай, когда f возрастает на (a, b).
Выберем $x_0 \in (a, b)$ и покажем, что существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Так как f возрастает на (a, b), то f возрастает и на (a, x_0), и на (a, x_0) функция f ограничена сверху, поскольку $f(x) \leq f(x_0)$ для всех $x \in (a, x_0)$. В силу доказанной теоремы, существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.
Аналогично получаем, что существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Доказательство следствия.

Рассмотрим случай, когда f возрастает на (a, b).
Выберем $x_0 \in (a, b)$ и покажем, что существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Так как f возрастает на (a, b), то f возрастает и на (a, x_0), и на (a, x_0) функция f ограничена сверху, поскольку $f(x) \leq f(x_0)$ для всех $x \in (a, x_0)$. В силу доказанной теоремы, существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.
Аналогично получаем, что существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Доказательство следствия.

Рассмотрим случай, когда f возрастает на (a, b).
Выберем $x_0 \in (a, b)$ и покажем, что существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Так как f возрастает на (a, b), то f возрастает и на (a, x_0), и на (a, x_0) функция f ограничена сверху, поскольку $f(x) \leq f(x_0)$ для всех $x \in (a, x_0)$. В силу доказанной теоремы, существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.
Аналогично получаем, что существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.
$\square$

Доказательство теоремы о замене переменной в пределах.

Так как $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что при всех $x \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \eta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Так как $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$, то для любого $\eta > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом $t \in V$, удовлетворяющем условию $0 < |t - t_0| < \delta$, справедливо неравенство $|g(t) - x_0| < \eta$.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\eta > 0$, что условие $0 < |x - x_0| < \eta$ влечет неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Для найденного η найдем такое $\delta > 0$, что условие $0 < |t - t_0| < \delta$ влечет неравенство $|g(t) - x_0| < \eta$.

Доказательство теоремы о замене переменной в пределах.

Так как $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что при всех $x \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \eta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Так как $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$, то для любого $\eta > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом $t \in V$, удовлетворяющем условию $0 < |t - t_0| < \delta$, справедливо неравенство $|g(t) - x_0| < \eta$.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\eta > 0$, что условие $0 < |x - x_0| < \eta$ влечет неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Для найденного η найдем такое $\delta > 0$, что условие $0 < |t - t_0| < \delta$ влечет неравенство $|g(t) - x_0| < \eta$.

Доказательство теоремы о замене переменной в пределах.

Так как $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что при всех $x \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \eta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Так как $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$, то для любого $\eta > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом $t \in V$, удовлетворяющем условию $0 < |t - t_0| < \delta$, справедливо неравенство $|g(t) - x_0| < \eta$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\eta > 0$, что условие $0 < |x - x_0| < \eta$ влечет неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Для найденного η найдем такое $\delta > 0$, что условие $0 < |t - t_0| < \delta$ влечет неравенство $|g(t) - x_0| < \eta$.

Окончание доказательства теоремы о замене переменной в пределах.

Пусть $0 < |t - t_0| < \delta$. Тогда $0 < |g(t) - x_0| < \eta$ (левое неравенство следует из того, что при любом $t \in V$ значение $g(t) \in U$, т. е. $g(t) \neq x_0$). Из последнего неравенства следует, что $|f(g(t)) - A| < \varepsilon$.

Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что условие $0 < |t - t_0| < \delta$ влечет неравенство $|f(g(t)) - A| < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{t \to t_0} f(g(t)) = A$.

Окончание доказательства теоремы о замене переменной в пределах.

Пусть $0 < |t - t_0| < \delta$. Тогда $0 < |g(t) - x_0| < \eta$ (левое неравенство следует из того, что при любом $t \in V$ значение $g(t) \in U$, т. е. $g(t) \neq x_0$). Из последнего неравенства следует, что $|f(g(t)) - A| < \varepsilon$.

Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что условие $0 < |t - t_0| < \delta$ влечет неравенство $|f(g(t)) - A| < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{t \to t_0} f(g(t)) = A$.

Окончание доказательства теоремы о замене переменной в пределах.

Пусть $0 < |t - t_0| < \delta$. Тогда $0 < |g(t) - x_0| < \eta$ (левое неравенство следует из того, что при любом $t \in V$ значение $g(t) \in U$, т. е. $g(t) \neq x_0$). Из последнего неравенства следует, что $|f(g(t)) - A| < \varepsilon$.

Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что условие $0 < |t - t_0| < \delta$ влечет неравенство $|f(g(t)) - A| < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{t \to t_0} f(g(t)) = A$.

Окончание доказательства теоремы о замене переменной в пределах.

Пусть $0 < |t - t_0| < \delta$. Тогда $0 < |g(t) - x_0| < \eta$ (левое неравенство следует из того, что при любом $t \in V$ значение $g(t) \in U$, т. е. $g(t) \neq x_0$). Из последнего неравенства следует, что $|f(g(t)) - A| < \varepsilon$.

Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что условие $0 < |t - t_0| < \delta$ влечет неравенство $|f(g(t)) - A| < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{t \to t_0} f(g(t)) = A$.

$\blacksquare$