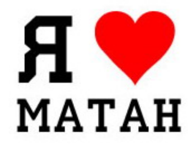
Математический анализ

Лекции по математическому анализу



Анатолий КОРЕНОВСКИЙ

Кафедра математического анализа
Институт математики, экономики и механики

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

22 января 2013 г.

Текст лекций

Данные лекции составлены на основе учебника

- В. И. Коляда, А. А. Кореновский. *Курс лекций по математическому анализу, ч.1,2. Одесса, Астропринт, 2010.*

Список литературы

Учебники

- 1. Г. М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1,2,3. М., Наука, 1970.*
- 2. Э. Ландау. *Основы анализа. М., ИЛ, 1947.*
- 3. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа, ч. 1,2. М., Наука, 1982.
- 4. А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа, М., Наука, 1988.
- 5. С. М. Никольский. Курс математического анализа, т. 1,2. М., Наука, 1990.
- 6. Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. 1,2. М., Наука, 1964.
- 7. Л. Д. Кудрявцев. Математический анализ, т. 1,2. М., Высшая школа, 1973.

Список литературы

Сборники задач

- 8. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., Наука, 1977.
- 9. Л. Д. Кудрявцев и др. Сборник задач по математическому анализу, М., Наука, 1984.
- 10. И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. Математический анализ в задачах и упражнениях, М., Изд-во МГУ, 1991.
- 11. И. И. Ляшко и др. Математический анализ в примерах и задачах, Киев, Вища школа, 1974.

Тема 4. Непрерывные функции

§1. Определение и примеры

§1. Определение и примеры

Определение. Пусть функция f определена на интервале (a, b) и точка $x_0 \in (a, b)$. Говорят, что функция f **непрерывна** в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Замечание. В отличие от определения предела функции f в точке x_0, здесь мы требуем, чтобы функция f была определена не только в проколотой окрестности точки x_0, а в целой окрестности точки x_0. Кроме того, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не просто существует, а равен определенному значению, а именно, $f(x_0)$.

§1. Определение и примеры

Определение. Пусть функция f определена на интервале (a, b) и точка $x_0 \in (a, b)$. Говорят, что функция f непрерывна в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Замечание. В отличие от определения предела функции f в точке x_0, здесь мы требуем, чтобы функция f была определена не только в проколотой окрестности точки x_0, а в целой окрестности точки x_0. Кроме того, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не просто существует, а равен определенному значению, а именно, $f(x_0)$.

§1. Определение и примеры

Используя определение предела функции в смысле Коши, определение непрерывности функции f в точке x_0 в кванторах можно записать следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in (a, b) :$$
$$|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

В этом определении можно не требовать выполнения условия $|x - x_0| > 0$, т. к. при $|x - x_0| = 0$ неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, очевидно, выполнено.

Так как величина $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ зависит лишь от тех значений, которые функция f принимает в сколь угодно малой окрестности точки x_0, то непрерывность – это локальное свойство функции.

§1. Определение и примеры

Используя определение предела функции в смысле Коши, определение непрерывности функции f в точке x_0 в кванторах можно записать следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in (a, b) :$$
$$|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

В этом определении можно не требовать выполнения условия $|x - x_0| > 0$, т. к. при $|x - x_0| = 0$ неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, очевидно, выполнено.

Так как величина $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ зависит лишь от тех значений, которые функция f принимает в сколь угодно малой окрестности точки x_0, то непрерывность – это локальное свойство функции.

§1. Определение и примеры

Используя определение предела функции в смысле Коши, определение непрерывности функции f в точке x_0 в кванторах можно записать следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in (a, b) :$$
$$|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

В этом определении можно не требовать выполнения условия $|x - x_0| > 0$, т. к. при $|x - x_0| = 0$ неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, очевидно, выполнено.

Так как величина $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ зависит лишь от тех значений, которые функция f принимает в сколь угодно малой окрестности точки x_0, то непрерывность – это локальное свойство функции.

§1. Определение и примеры

В терминах окрестностей определение непрерывности выглядит следующим образом.

Определение. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если для любой окрестности V точки $f(x_0)$ найдется такая окрестность U точки x_0, что для всех $x \in U$ значение $f(x) \in V$, т. е. $f(U \cap (a, b)) \subset V$.

Применяя определение предела функции в смысле Гейне, определение непрерывности можно сформулировать так.

Определение. Функция f, определенная на интервале (a, b), называется непрерывной в точке $x_0 \in (a, b)$, если любая последовательность аргументов $\{x_n\}$ $(x_n \in (a, b),\ x_n \to x_0)$ порождает последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, стремящуюся к $f(x_0)$.

§1. Определение и примеры

В терминах окрестностей определение непрерывности выглядит следующим образом.

Определение. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если для любой окрестности V точки $f(x_0)$ найдется такая окрестность U точки x_0, что для всех $x \in U$ значение $f(x) \in V$, т. е. $f(U \cap (a,b)) \subset V$.

Применяя определение предела функции в смысле Гейне, определение непрерывности можно сформулировать так.

Определение. Функция f, определенная на интервале (a,b), называется непрерывной в точке $x_0 \in (a,b)$, если любая последовательность аргументов $\{x_n\}$ $(x_n \in (a,b),\ x_n \to x_0)$ порождает последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, стремящуюся к $f(x_0)$.

§1. Определение и примеры

Применяя понятие одностороннего предела (т. е. предела слева и справа) в точке x_0, можно дать определения непрерывности слева (справа) в точке x_0.

Именно, функция f называется непрерывной слева (справа) в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)\right)$.

При этом в определении непрерывности слева достаточно считать, что функция f определена лишь в левой полуокрестности точки x_0, т. е. на $(a, x_0]$, а для непрерывности справа – на $[x_0, b)$.

§1. Определение и примеры

Применяя понятие одностороннего предела (т. е. предела слева и справа) в точке x_0, можно дать определения непрерывности слева (справа) в точке x_0.

Именно, функция f называется непрерывной слева (справа) в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0) \qquad \left(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)\right)$.

При этом в определении непрерывности слева достаточно считать, что функция f определена лишь в левой полуокрестности точки x_0, т. е. на $(a, x_0]$, а для непрерывности справа – на $[x_0, b)$.

§1. Определение и примеры

Применяя понятие одностороннего предела (т. е. предела слева и справа) в точке x_0, можно дать определения непрерывности слева (справа) в точке x_0.

Именно, функция f называется непрерывной слева (справа) в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)\right)$.

При этом в определении непрерывности слева достаточно считать, что функция f определена лишь в левой полуокрестности точки x_0, т. е. на $(a, x_0]$, а для непрерывности справа – на $[x_0, b)$.

§1. Определение и примеры

Легко видеть, что справедливо следующее

Утверждение.

Для того чтобы функция f была непрерывной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы f была непрерывной слева и справа в точке x_0.

§1. Определение и примеры

Определение. Функция f, определенная на интервале (a, b), называется разрывной в точке $x_0 \in (a, b)$, если f не является непрерывной в этой точке.

Итак, функция f является разрывной в точке x_0, если выполнено одно из двух следующих условий.

1. Либо не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
2. Либо предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует, но он не равен $f(x_0)$.

§1. Определение и примеры

Определение. Функция f, определенная на интервале (a, b), называется разрывной в точке $x_0 \in (a, b)$, если f не является непрерывной в этой точке.

Итак, функция f является разрывной в точке x_0, если выполнено одно из двух следующих условий.

1. Либо не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
2. Либо предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует, но он не равен $f(x_0)$.

§1. Определение и примеры

Определение. Функция f, определенная на интервале (a, b), называется разрывной в точке $x_0 \in (a, b)$, если f не является непрерывной в этой точке.

Итак, функция f является разрывной в точке x_0, если выполнено одно из двух следующих условий.

1. Либо не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
2. Либо предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует, но он не равен $f(x_0)$.

§1. Определение и примеры

Определение. Функция f, определенная на интервале (a, b), называется разрывной в точке $x_0 \in (a, b)$, если f не является непрерывной в этой точке.

Итак, функция f является разрывной в точке x_0, если выполнено одно из двух следующих условий.

1. Либо не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
2. Либо предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует, но он не равен $f(x_0)$.

§1. Определение и примеры

Пример 1.

$f(x) \equiv C = Const$. Эта функция непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, т. к. для любого $x \in \mathbb{R}$ $\quad |f(x) - f(x_0)| = 0$.

§1. Определение и примеры

Пример 2.

$f(x) = x^2, \ -\infty < x < +\infty, \ x_0 \in \mathbb{R}.$

Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда из неравенства

$$\left|x^2 - x_0^2\right| \le (|x| + |x_0|)\,|x - x_0|$$

следует, что при

$$|x - x_0| < \delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2\,|x_0| + 1}\right)$$

справедливо неравенство $\left|x^2 - x_0^2\right| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$, а значит, функция $f(x) = x^2$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

§1. Определение и примеры

Пример 2.

$f(x) = x^2$, $-\infty < x < +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда из неравенства

$$\left|x^2 - x_0^2\right| \le (|x| + |x_0|)\,|x - x_0|$$

следует, что при

$$|x - x_0| < \delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2\,|x_0| + 1}\right)$$

справедливо неравенство $\left|x^2 - x_0^2\right| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$, а значит, функция $f(x) = x^2$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

§1. Определение и примеры

Пример 3.

$f(x) = \sqrt{x}$, $0 \le x < +\infty$.

Если $x_0 \in (0, +\infty)$, то

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \le \frac{1}{\sqrt{x_0}}|x - x_0| < \varepsilon,$$

если только $|x - x_0| < \delta \equiv \sqrt{x_0} \cdot \varepsilon$.

Таким образом, функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 > 0$.

В точке $x_0 = 0$ можно ставить вопрос о непрерывности справа.

Имеем $\left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{x} < \varepsilon$, если только $0 \le x < \delta \equiv \varepsilon^2$.

Итак, $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$, т. е. функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке 0.

§1. Определение и примеры

Пример 3.

$f(x) = \sqrt{x},\ 0 \le x < +\infty.$
Если $x_0 \in (0, +\infty)$, то

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \le \frac{1}{\sqrt{x_0}}\,|x - x_0| < \varepsilon,$$

если только $|x - x_0| < \delta \equiv \sqrt{x_0} \cdot \varepsilon$.
Таким образом, функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 > 0$.
В точке $x_0 = 0$ можно ставить вопрос о непрерывности справа. Имеем $\left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{x} < \varepsilon$, если только $0 \le x < \delta \equiv \varepsilon^2$.
Итак, $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$, т. е. функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке 0.

§1. Определение и примеры

Пример 3.

$f(x) = \sqrt{x},\ 0 \le x < +\infty.$
Если $x_0 \in (0, +\infty)$, то

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \le \frac{1}{\sqrt{x_0}}\,|x - x_0| < \varepsilon,$$

если только $|x - x_0| < \delta \equiv \sqrt{x_0} \cdot \varepsilon$.
Таким образом, функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 > 0$.
В точке $x_0 = 0$ можно ставить вопрос о непрерывности справа.
Имеем $\left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{x} < \varepsilon$, если только $0 \le x < \delta \equiv \varepsilon^2$.
Итак, $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$, т. е. функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке 0.

§1. Определение и примеры

Пример 3.

$f(x) = \sqrt{x},\ 0 \le x < +\infty.$
Если $x_0 \in (0, +\infty)$, то

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \le \frac{1}{\sqrt{x_0}} |x - x_0| < \varepsilon,$$

если только $|x - x_0| < \delta \equiv \sqrt{x_0} \cdot \varepsilon$.
Таким образом, функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 > 0$.
В точке $x_0 = 0$ можно ставить вопрос о непрерывности справа.
Имеем $\left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{x} < \varepsilon$, если только $0 \le x < \delta \equiv \varepsilon^2$.
Итак, $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$, т. е. функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке 0.

§1. Определение и примеры

Пример 3.

$f(x) = \sqrt{x},\ 0 \le x < +\infty.$
Если $x_0 \in (0, +\infty)$, то

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \le \frac{1}{\sqrt{x_0}}\,|x - x_0| < \varepsilon,$$

если только $|x - x_0| < \delta \equiv \sqrt{x_0} \cdot \varepsilon$.
Таким образом, функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 > 0$.
В точке $x_0 = 0$ можно ставить вопрос о непрерывности справа.
Имеем $\left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{x} < \varepsilon$, если только $0 \le x < \delta \equiv \varepsilon^2$.
Итак, $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$, т. е. функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке 0.

§1. Определение и примеры

Пример 4.

$f(x) = \sin x, \; -\infty < x < +\infty.$

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq |x-x_0|,$$

где последнее неравенство в этой цепочке следует из доказанного выше неравенства $|\sin t| \leq |t| \;\; (0 < |t| < \pi/2)$. Можем считать, что $|x - x_0| < \pi$. Тогда при $|x - x_0| < \delta \equiv \min(\pi, \varepsilon)$ справедливо $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$, т. е. функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Аналогично доказываем, что функция $f(x) = \cos x$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

§1. Определение и примеры

Пример 4.

$f(x) = \sin x,\ -\infty < x < +\infty.$

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le |x-x_0|,$$

где последнее неравенство в этой цепочке следует из доказанного выше неравенства $|\sin t| \le |t|$ $(0 < |t| < \pi/2)$.

Можем считать, что $|x - x_0| < \pi$. Тогда при $|x - x_0| < \delta \equiv \min(\pi, \varepsilon)$ справедливо $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$, т. е. функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Аналогично доказываем, что функция $f(x) = \cos x$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

§1. Определение и примеры

Пример 4.

$f(x) = \sin x, \ -\infty < x < +\infty.$
Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq |x - x_0|,$$

где последнее неравенство в этой цепочке следует из доказанного выше неравенства $|\sin t| \leq |t| \ \ (0 < |t| < \pi/2)$. Можем считать, что $|x - x_0| < \pi$. Тогда при $|x - x_0| < \delta \equiv \min(\pi, \varepsilon)$ справедливо $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$, т. е. функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Аналогично доказываем, что функция $f(x) = \cos x$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

§1. Определение и примеры

Пример 4.

$f(x) = \sin x, \ -\infty < x < +\infty.$
Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le |x-x_0|,$$

где последнее неравенство в этой цепочке следует из доказанного выше неравенства $|\sin t| \le |t| \ (0 < |t| < \pi/2)$. Можем считать, что $|x - x_0| < \pi$. Тогда при $|x - x_0| < \delta \equiv \min(\pi, \varepsilon)$ справедливо $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$, т. е. функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Аналогично доказываем, что функция $f(x) = \cos x$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

§1. Определение и примеры

Пример 5.

$f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Покажем, что функция f непрерывна в точке $x_0 = 0$.

Имеем $f(0) = 0$ и

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(т. к. $|f(x) - 0| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x| < \varepsilon$, если только $|x - 0| = |x| < \delta \equiv \varepsilon$).

Итак, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, так что f непрерывна в точке 0.

§1. Определение и примеры

Пример 5.

$f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.
Покажем, что функция f непрерывна в точке $x_0 = 0$.
Имеем $f(0) = 0$ и

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

(т. к. $|f(x) - 0| = \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| < \varepsilon$, если только $|x - 0| = |x| < \delta \equiv \varepsilon$).
Итак, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, так что f непрерывна в точке 0.

§1. Определение и примеры

Пример 5.

$f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.
Покажем, что функция f непрерывна в точке $x_0 = 0$.
Имеем $f(0) = 0$ и

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(т. к. $|f(x) - 0| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon$, если только $|x - 0| = |x| < \delta \equiv \varepsilon$).
Итак, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, так что f непрерывна в точке 0.

§1. Определение и примеры

Пример 5.

$f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.
Покажем, что функция f непрерывна в точке $x_0 = 0$.
Имеем $f(0) = 0$ и

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(т. к. $|f(x) - 0| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon$, если только $|x - 0| = |x| < \delta \equiv \varepsilon$).
Итак, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, так что f непрерывна в точке 0.

§1. Определение и примеры

Пример 6.

$f(x) = \operatorname{sign} x, \;\; x \in \mathbb{R}.$

Если $x_0 \neq 0$, то функция f постоянна в некоторой окрестности точки x_0 и, следовательно, непрерывна в этой точке.

Если же $x_0 = 0$, то не существует предела функции f при $x \to 0$. Значит, функция f разрывна в точке 0.

Более того,

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sign} x = 1, \qquad \lim_{x\to 0-} \operatorname{sign} x = -1, \qquad \operatorname{sign} 0 = 0,$$

так что функция $\operatorname{sign} x$ разрывна в точке 0 как слева, так и справа.

§1. Определение и примеры

Пример 6.

$f(x) = \operatorname{sign} x, \ x \in \mathbb{R}.$

Если $x_0 \neq 0$, то функция f постоянна в некоторой окрестности точки x_0 и, следовательно, непрерывна в этой точке.

Если же $x_0 = 0$, то не существует предела функции f при $x \to 0$. Значит, функция f разрывна в точке 0.

Более того,

$$\lim_{x \to 0+} \operatorname{sign} x = 1, \qquad \lim_{x \to 0-} \operatorname{sign} x = -1, \qquad \operatorname{sign} 0 = 0,$$

так что функция $\operatorname{sign} x$ разрывна в точке 0 как слева, так и справа.

§1. Определение и примеры

Пример 6.

$f(x) = \operatorname{sign} x, \ x \in \mathbb{R}$.

Если $x_0 \neq 0$, то функция f постоянна в некоторой окрестности точки x_0 и, следовательно, непрерывна в этой точке.

Если же $x_0 = 0$, то не существует предела функции f при $x \to 0$. Значит, функция f разрывна в точке 0.

Более того,

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sign} x = 1, \quad \lim_{x\to 0-} \operatorname{sign} x = -1, \quad \operatorname{sign} 0 = 0,$$

так что функция $\operatorname{sign} x$ разрывна в точке 0 как слева, так и справа.

§1. Определение и примеры

Пример 6.

$f(x) = \operatorname{sign} x, \ x \in \mathbb{R}$.

Если $x_0 \neq 0$, то функция f постоянна в некоторой окрестности точки x_0 и, следовательно, непрерывна в этой точке.

Если же $x_0 = 0$, то не существует предела функции f при $x \to 0$. Значит, функция f разрывна в точке 0.

Более того,

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sign} x = 1, \quad \lim_{x\to 0-} \operatorname{sign} x = -1, \quad \operatorname{sign} 0 = 0,$$

так что функция $\operatorname{sign} x$ разрывна в точке 0 как слева, так и справа.

§1. Определение и примеры

Пример 7.

Рассмотрим функцию Дирихле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Покажем, что не существует предела функции $\mathcal{D}$ при $x \to x_0$.

Для этого выберем последовательность $\{x_n'\}$ отличных от x_0 рациональных чисел, стремящуюся к x_0. Тогда $\mathcal{D}(x_n') = 1$ и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{D}(x_n') = 1$. Если же взять последовательность $\{x_n''\}$ отличных от x_0 иррациональных чисел, стремящуюся к x_0, то получим, что $\mathcal{D}(x_n'') = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{D}(x_n'') = 0$.

§1. Определение и примеры

Пример 7.

Рассмотрим функцию Дирихле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Покажем, что не существует предела функции $\mathcal{D}$ при $x \to x_0$.

Для этого выберем последовательность $\{x_n'\}$ отличных от x_0 рациональных чисел, стремящуюся к x_0. Тогда $\mathcal{D}(x_n') = 1$ и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{D}(x_n') = 1$. Если же взять последовательность $\{x_n''\}$ отличных от x_0 иррациональных чисел, стремящуюся к x_0, то получим, что $\mathcal{D}(x_n'') = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{D}(x_n'') = 0$.

§1. Определение и примеры

Пример 7.

Рассмотрим функцию Дирихле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Покажем, что не существует предела функции $\mathcal{D}$ при $x \to x_0$.

Для этого выберем последовательность $\{x_n'\}$ отличных от x_0 рациональных чисел, стремящуюся к x_0. Тогда $\mathcal{D}(x_n') = 1$ и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{D}(x_n') = 1$. Если же взять последовательность $\{x_n''\}$ отличных от x_0 иррациональных чисел, стремящуюся к x_0, то получим, что $\mathcal{D}(x_n'') = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{D}(x_n'') = 0$.

§1. Определение и примеры

Пример 7.

Рассмотрим функцию Дирихле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Покажем, что не существует предела функции $\mathcal{D}$ при $x \to x_0$.
Для этого выберем последовательность $\{x'_n\}$ отличных от x_0 рациональных чисел, стремящуюся к x_0. Тогда $\mathcal{D}(x'_n) = 1$ и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{D}(x'_n) = 1$. Если же взять последовательность $\{x''_n\}$ отличных от x_0 иррациональных чисел, стремящуюся к x_0, то получим, что $\mathcal{D}(x''_n) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{D}(x''_n) = 0$.

§1. Определение и примеры

Окончание примера 7.

В силу определения предела функции по Гейне получаем, что функция $\mathcal{D}$ не имеет предела в точке x_0. Так как $x_0 \in \mathbb{R}$ – произвольная точка, то это означает, что функция Дирихле разрывна в каждой точке.

§1. Определение и примеры

Пример 8.

$f(x) = x \cdot \mathcal{D}(x), \ x \in \mathbb{R}.$

Функция f разрывна в каждой точке $x_0 \neq 0$. В самом деле, если $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ соответственно последовательности рациональных и иррациональных отличных от x_0 чисел, стремящиеся к x_0, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'') = 0$, так что, в силу определения предела функции по Гейне, функция f не имеет предела в точке x_0.

Если же $x_0 = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Действительно, $|f(x)| = |x \cdot \mathcal{D}(x)| \leq |x| < \varepsilon$, если только $|x - 0| = |x| < \delta \equiv \varepsilon$. Это означает, что данная функция непрерывна в единственной точке $x_0 = 0$.

§1. Определение и примеры

Пример 8.

$f(x) = x \cdot \mathcal{D}(x),\ x \in \mathbb{R}.$

Функция f разрывна в каждой точке $x_0 \neq 0$. В самом деле, если $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ соответственно последовательности рациональных и иррациональных отличных от x_0 чисел, стремящиеся к x_0, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'') = 0$, так что, в силу определения предела функции по Гейне, функция f не имеет предела в точке x_0.

Если же $x_0 = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Действительно, $|f(x)| = |x \cdot \mathcal{D}(x)| \leq |x| < \varepsilon$, если только $|x - 0| = |x| < \delta \equiv \varepsilon$. Это означает, что данная функция непрерывна в единственной точке $x_0 = 0$.

§1. Определение и примеры

Пример 8.

$f(x) = x \cdot \mathcal{D}(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Функция f разрывна в каждой точке $x_0 \neq 0$. В самом деле, если $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ соответственно последовательности рациональных и иррациональных отличных от x_0 чисел, стремящиеся к x_0, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'') = 0$, так что, в силу определения предела функции по Гейне, функция f не имеет предела в точке x_0.

Если же $x_0 = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Действительно,

$|f(x)| = |x \cdot \mathcal{D}(x)| \leq |x| < \varepsilon$, если только $|x - 0| = |x| < \delta \equiv \varepsilon$.

Это означает, что данная функция непрерывна в единственной точке $x_0 = 0$.

§1. Определение и примеры

Пример 8.

$f(x) = x \cdot \mathcal{D}(x), \; x \in \mathbb{R}$.
Функция f разрывна в каждой точке $x_0 \neq 0$. В самом деле, если $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ соответственно последовательности рациональных и иррациональных отличных от x_0 чисел, стремящиеся к x_0, то $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n'\right) = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n''\right) = 0$, так что, в силу определения предела функции по Гейне, функция f не имеет предела в точке x_0.
Если же $x_0 = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Действительно, $|f(x)| = |x \cdot \mathcal{D}(x)| \leq |x| < \varepsilon$, если только $|x - 0| = |x| < \delta \equiv \varepsilon$.
Это означает, что данная функция непрерывна в единственной точке $x_0 = 0$.

§2. Классификация точек разрыва

§2. Классификация точек разрыва

§2. Классификация точек разрыва

Согласно данному определению, непрерывность функции f в точке x_0 означает, что существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и он равен $f(x_0)$.

Если мы изменим значение функции f лишь в одной точке x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ будет существовать, как и раньше (он не зависит от значения $f(x_0)$), но при этом равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

уже будет нарушено.

В этом случае говорят, что вновь полученная функция имеет устранимый разрыв.

Определение. Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва функции f, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но он не равен $f(x_0)$.

§2. Классификация точек разрыва

Согласно данному определению, непрерывность функции f в точке x_0 означает, что существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и он равен $f(x_0)$.
Если мы изменим значение функции f лишь в одной точке x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ будет существовать, как и раньше (он не зависит от значения $f(x_0)$), но при этом равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

уже будет нарушено.
В этом случае говорят, что вновь полученная функция имеет устранимый разрыв.
Определение. Точка x_0 называется точкой *устранимого разрыва* функции f, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но он не равен $f(x_0)$.

§2. Классификация точек разрыва

Согласно данному определению, непрерывность функции f в точке x_0 означает, что существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и он равен $f(x_0)$.
Если мы изменим значение функции f лишь в одной точке x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ будет существовать, как и раньше (он не зависит от значения $f(x_0)$), но при этом равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

уже будет нарушено.
В этом случае говорят, что вновь полученная функция имеет устранимый разрыв.
Определение. Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва функции f, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но он не равен $f(x_0)$.

§2. Классификация точек разрыва

Для определенной в некоторой окрестности точки x_0 функции f будем обозначать

$$f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} f(x),$$

$$f(x_0-) = \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

(если указанные односторонние пределы существуют).

В этих терминах критерий существования предела функции f в точке x_0 состоит в том, что

$$f(x_0-0) = f(x_0+0),$$

а необходимым и достаточным условием непрерывности функции f в точке x_0 является следующее равенство:

$$f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0).$$

§2. Классификация точек разрыва

Для определенной в некоторой окрестности точки x_0 функции f будем обозначать

$$f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

$$f(x_0-) = \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

(если указанные односторонние пределы существуют).
В этих терминах критерий существования предела функции f в точке x_0 состоит в том, что

$$f(x_0-0) = f(x_0+0),$$

а необходимым и достаточным условием непрерывности функции f в точке x_0 является следующее равенство:

$$f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0).$$

§2. Классификация точек разрыва

Для определенной в некоторой окрестности точки x_0 функции f будем обозначать

$$f\left(x_0+0\right)=\lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

$$f\left(x_0-\right)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

(если указанные односторонние пределы существуют).
В этих терминах критерий существования предела функции f в точке x_0 состоит в том, что

$$f\left(x_0-0\right)=f\left(x_0+0\right),$$

а необходимым и достаточным условием непрерывности функции f в точке x_0 является следующее равенство:

$$f\left(x_0-0\right)=f\left(x_0\right)=f\left(x_0+0\right).$$

§2. Классификация точек разрыва

Если же функция f не является непрерывной в точке x_0, то это означает, что
a) либо все значения, входящие в равенство существуют, но нарушено хотя бы одно из двух равенств:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0);$$

b) либо не существует (конечного) хотя бы одного из двух значений $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$.

В случае a) точку x_0 назовем точкой разрыва первого рода, а в случае b) – точкой разрыва второго рода.

Таким образом, приходим к следующим определениям.

§2. Классификация точек разрыва

Если же функция f не является непрерывной в точке x_0, то это означает, что
a) либо все значения, входящие в равенство существуют, но нарушено хотя бы одно из двух равенств:

$$f\left(x_0-0\right)=f\left(x_0\right)=f\left(x_0+0\right);$$

b) либо не существует (конечного) хотя бы одного из двух значений $f\left(x_0-0\right)$ или $f\left(x_0+0\right)$.

В случае a) точку x_0 назовем точкой разрыва первого рода, а в случае b) – точкой разрыва второго рода.

Таким образом, приходим к следующим определениям.

§2. Классификация точек разрыва

Если же функция f не является непрерывной в точке x_0, то это означает, что
a) либо все значения, входящие в равенство существуют, но нарушено хотя бы одно из двух равенств:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0);$$

b) либо не существует (конечного) хотя бы одного из двух значений $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$.

В случае a) точку x_0 назовем точкой разрыва первого рода, а в случае b) – точкой разрыва второго рода.

Таким образом, приходим к следующим определениям.

§2. Классификация точек разрыва

Если же функция f не является непрерывной в точке x_0, то это означает, что
a) либо все значения, входящие в равенство существуют, но нарушено хотя бы одно из двух равенств:

$$f\left(x_0 - 0\right) = f\left(x_0\right) = f\left(x_0 + 0\right);$$

b) либо не существует (конечного) хотя бы одного из двух значений $f\left(x_0 - 0\right)$ или $f\left(x_0 + 0\right)$.

В случае a) точку x_0 назовем точкой разрыва первого рода, а в случае b) – точкой разрыва второго рода.

Таким образом, приходим к следующим определениям.

§2. Классификация точек разрыва

Определение 1. Точка x_0 называется **точкой разрыва I рода**, если существуют конечные пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, но хотя бы один из них не равен $f(x_0)$.

В частности, точка устранимого разрыва является точкой разрыва I рода, ибо если x_0 – точка устранимого разрыва, то существует

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0+0),$$

но он не равен $f(x_0)$. Если же $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$ (оба предела существуют), то каково бы ни было значение $f(x_0)$, точка x_0 будет точкой разрыва I рода.
В этом случае говорят, что функция f терпит скачок в точке x_0, а величину $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называют скачком функции f в точке x_0.

§2. Классификация точек разрыва

Определение 1. Точка x_0 называется точкой разрыва I рода, если существуют конечные пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, но хотя бы один из них не равен $f(x_0)$.

В частности, точка устранимого разрыва является точкой разрыва I рода, ибо если x_0 – точка устранимого разрыва, то существует

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0+0),$$

но он не равен $f(x_0)$. Если же $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$ (оба предела существуют), то каково бы ни было значение $f(x_0)$, точка x_0 будет точкой разрыва I рода.

В этом случае говорят, что функция f терпит скачок в точке x_0, а величину $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называют скачком функции f в точке x_0.

§2. Классификация точек разрыва

Определение 1. Точка x_0 называется точкой разрыва I рода, если существуют конечные пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, но хотя бы один из них не равен $f(x_0)$.

В частности, точка устранимого разрыва является точкой разрыва I рода, ибо если x_0 – точка устранимого разрыва, то существует

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0+0),$$

но он не равен $f(x_0)$. Если же $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$ (оба предела существуют), то каково бы ни было значение $f(x_0)$, точка x_0 будет точкой разрыва I рода.

В этом случае говорят, что функция f терпит скачок в точке x_0, а величину $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называют скачком функции f в точке x_0.

§2. Классификация точек разрыва

Определение 1. Точка x_0 называется точкой разрыва I рода, если существуют конечные пределы $f\left(x_0-0\right)$ и $f\left(x_0+0\right)$, но хотя бы один из них не равен $f\left(x_0\right)$.

В частности, точка устранимого разрыва является точкой разрыва I рода, ибо если x_0 – точка устранимого разрыва, то существует

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(x_0-0\right)=f\left(x_0+0\right),$$

но он не равен $f\left(x_0\right)$. Если же $f\left(x_0-0\right)\neq f\left(x_0+0\right)$ (оба предела существуют), то каково бы ни было значение $f\left(x_0\right)$, точка x_0 будет точкой разрыва I рода.
В этом случае говорят, что функция f терпит скачок в точке x_0, а величину $f\left(x_0+0\right)-f\left(x_0-0\right)$ называют скачком функции f в точке x_0.

§2. Классификация точек разрыва

Определение 2. Точка x_0 называется точкой разрыва *II* рода функции f, если не существует конечного хотя бы одного из двух пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$.

§2. Классификация точек разрыва

Пример 1.

$f(x) = |\operatorname{sign} x|$. В точке $x_0 = 0$ у функции f устранимый разрыв, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sign} x| = 1 \neq 0 = |\operatorname{sign} 0|$.

Пример 2.

$f(x) = \operatorname{sign} x$. У функции f в точке $x_0 = 0$ разрыв I рода, т. к. $f(x_0 - 0) = -1$ и $f(x_0 + 0) = 1$ существуют, но оба они не равны $\operatorname{sign} 0 = 0$. Кроме того, в точке 0 функция f имеет скачок $f(x_0 + 0) - f(x_0 + 0) = 1 - (-1) = 2$.

Пример 3.

$f(x) = \sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Так как оба односторонних предела функции f в точке $x_0 = 0$ не существуют, то 0 – точка разрыва II рода.

§2. Классификация точек разрыва

Пример 1.

$f(x) = |\operatorname{sign} x|$. В точке $x_0 = 0$ у функции f устранимый разрыв, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sign} x| = 1 \neq 0 = |\operatorname{sign} 0|$.

Пример 2.

$f(x) = \operatorname{sign} x$. У функции f в точке $x_0 = 0$ разрыв *I* рода, т. к. $f(x_0 - 0) = -1$ и $f(x_0 + 0) = 1$ существуют, но оба они не равны $\operatorname{sign} 0 = 0$. Кроме того, в точке 0 функция f имеет скачок $f(x_0 + 0) - f(x_0 + 0) = 1 - (-1) = 2$.

Пример 3.

$f(x) = \sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Так как оба односторонних предела функции f в точке $x_0 = 0$ не существуют, то 0 – точка разрыва *II* рода.

§2. Классификация точек разрыва

Пример 1.

$f(x) = |\operatorname{sign} x|$. В точке $x_0 = 0$ у функции f устранимый разрыв, поскольку $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sign} x| = 1 \neq 0 = |\operatorname{sign} 0|$.

Пример 2.

$f(x) = \operatorname{sign} x$. У функции f в точке $x_0 = 0$ разрыв *I* рода, т. к. $f(x_0 - 0) = -1$ и $f(x_0 + 0) = 1$ существуют, но оба они не равны $\operatorname{sign} 0 = 0$. Кроме того, в точке 0 функция f имеет скачок $f(x_0 + 0) - f(x_0 + 0) = 1 - (-1) = 2$.

Пример 3.

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Так как оба односторонних предела функции f в точке $x_0 = 0$ не существуют, то 0 – точка разрыва *II* рода.

§2. Классификация точек разрыва

Пример 4.

Рассмотрим функцию Римана

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \text{ несократимая дробь } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Покажем, что в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ существует $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{R}(x) = 0$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда неравенство $\mathcal{R}(x) \geq \varepsilon$ выполнено лишь в тех точках, для которых $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$. На интервале $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ таких точек конечное число. Пусть это – точки $y_1, y_2, \ldots, y_s$. Если при некотором k $x_0 = y_k$, то обозначим $\delta = \min_{i \neq k} |y_i - x_0| > 0$.

§2. Классификация точек разрыва

Пример 4.

Рассмотрим функцию Римана

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \text{ несократимая дробь } m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Покажем, что в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ существует $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{R}(x) = 0$.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда неравенство $\mathcal{R}(x) \geq \varepsilon$ выполнено лишь в тех точках, для которых $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$. На интервале $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ таких точек конечное число. Пусть это – точки $y_1, y_2, \ldots, y_s$. Если при некотором k $x_0 = y_k$, то обозначим $\delta = \min_{i \neq k} |y_i - x_0| > 0$.

§2. Классификация точек разрыва

Пример 4.

Рассмотрим функцию Римана

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \text{ несократимая дробь } m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Покажем, что в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ существует $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{R}(x) = 0$.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда неравенство $\mathcal{R}(x) \geq \varepsilon$ выполнено лишь в тех точках, для которых $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$. На интервале $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ таких точек конечное число. Пусть это – точки $y_1, y_2, \ldots, y_s$. Если при некотором k $x_0 = y_k$, то обозначим $\delta = \min_{i \neq k} |y_i - x_0| > 0$.

§2. Классификация точек разрыва

Окончание Примера 4.

В противном случае (т. е. если x_0 не совпадает ни с одной из точек y_k), обозначим $\delta = \min_i |y_i - x_0| > 0$. Тогда для всех x, таких, что $0 < |x - x_0| < \delta$, будет выполнено неравенство $|\mathcal{R}(x)| = \mathcal{R}(x) < \varepsilon$, а это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{R}(x) = 0$.

Итак, если $x_0 \in \mathbb{Q}$, то в точке x_0 функция $\mathcal{R}$ имеет устранимый разрыв. Если же $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то точка x_0 является точкой непрерывности функции $\mathcal{R}$.

§2. Классификация точек разрыва

Окончание Примера 4.

В противном случае (т. е. если x_0 не совпадает ни с одной из точек y_k), обозначим $\delta = \min_i |y_i - x_0| > 0$. Тогда для всех x, таких, что $0 < |x - x_0| < \delta$, будет выполнено неравенство $|\mathcal{R}(x)| = \mathcal{R}(x) < \varepsilon$, а это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{R}(x) = 0$.

Итак, если $x_0 \in \mathbb{Q}$, то в точке x_0 функция $\mathcal{R}$ имеет устранимый разрыв. Если же $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то точка x_0 является точкой непрерывности функции $\mathcal{R}$.

§2. Классификация точек разрыва

Пример 5.

$f(x) = [x]$ – функция целой части – наибольшее целое число, не превосходящее x.

Легко видеть, что эта функция непрерывна в каждой точке $x_0 \notin \mathbb{Z}$, а в каждой точке $x_0 \in \mathbb{Z}$ имеет разрыв первого рода. Скачок в каждой целочисленной точке равен 1.

§2. Классификация точек разрыва

Пример 5.

$f(x) = [x]$ – функция целой части – наибольшее целое число, не превосходящее x.

Легко видеть, что эта функция непрерывна в каждой точке $x_0 \notin \mathbb{Z}$, а в каждой точке $x_0 \in \mathbb{Z}$ имеет разрыв первого рода. Скачок в каждой целочисленной точке равен 1.

§3. Непрерывность и арифметические операции

§3. Непрерывность и арифметические операции

§3. Непрерывность и арифметические операции

Теорема. *Пусть функции f и g определены на интервале (a, b) и непрерывны в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда*
a) функция $f + g$ непрерывна в точке x_0;
b) функция $f \cdot g$ непрерывна в точке x_0;
c) если $g(x) \neq 0$ на (a, b), то функция $\frac{f}{g}$ непрерывна в точке x_0.

Эта теорема является следствием соответствующей теоремы для пределов функций.

§3. Непрерывность и арифметические операции

Теорема. *Пусть функции f и g определены на интервале (a, b) и непрерывны в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда*
a) функция $f + g$ непрерывна в точке x_0;
b) функция $f \cdot g$ непрерывна в точке x_0;
c) если $g(x) \neq 0$ на (a, b), то функция $\frac{f}{g}$ непрерывна в точке x_0.

Эта теорема является следствием соответствующей теоремы для пределов функций.

§3. Непрерывность и арифметические операции

Из этой теоремы и из непрерывности функции $f(x) = x$ в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ сразу следует, что функция $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что и многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

непрерывен в каждой точке,
а также и любая рациональная функция

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

непрерывна в каждой точке своей области определения.

§3. Непрерывность и арифметические операции

Из этой теоремы и из непрерывности функции $f(x) = x$ в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ сразу следует, что функция $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что и многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

непрерывен в каждой точке,

а также и любая рациональная функция

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

непрерывна в каждой точке своей области определения.

§3. Непрерывность и арифметические операции

Из этой теоремы и из непрерывности функции $f(x) = x$ в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ сразу следует, что функция $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что и многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

непрерывен в каждой точке,
а также и любая рациональная функция

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$$

непрерывна в каждой точке своей области определения.

§3. Непрерывность и арифметические операции

Из этой теоремы и из непрерывности функции $f(x) = x$ в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ сразу следует, что функция $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что и многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

непрерывен в каждой точке,
а также и любая рациональная функция

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

непрерывна в каждой точке своей области определения.

§3. Непрерывность и арифметические операции

В самом деле, пусть $x_0 \in D(R)$. Тогда $Q_m(x_0) \neq 0$. Поскольку количество действительных корней многочлена $Q_m(x)$ конечно (не превосходит m), то можно найти такой интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta = \min_{i \geq 1} |x_0 - x_i|$, где x_i $(i \geq 1)$ – корни $Q_m(x)$), в котором $Q_m(x) \neq 0$, и применить теорему о непрерывности частного.

§3. Непрерывность и арифметические операции

Далее, функция

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$$

и функция

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq \pi n)$$

непрерывны в каждой точке своей области определения. Это следует из непрерывности функций $\sin x$ и $\cos x$.

§3. Непрерывность и арифметические операции

Далее, функция

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$$

и функция

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq \pi n)$$

непрерывны в каждой точке своей области определения. Это следует из непрерывности функций $\sin x$ и $\cos x$.

§3. Непрерывность и арифметические операции

Теорема (о сохранении знака). *Пусть функция f определена на интервале (a, b) и непрерывна в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$. Если $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$), то найдется такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Доказательство.

§3. Непрерывность и арифметические операции

Теорема (о сохранении знака). *Пусть функция f определена на интервале (a, b) и непрерывна в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$. Если $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$, то найдется такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Доказательство.

§4. Непрерывность сложной функции (композиции)

§4. Непрерывность сложной функции (композиции)

§4. Непрерывность сложной функции (композиции)

Теорема. *Пусть функция* g*, определенная на интервале* (a, b)*, непрерывна в точке* $x_0 \in (a, b)$ *и такова, что* $c < g(x) < d$ *для всех* $x \in (a, b)$*. Далее, пусть функция* f *определена на интервале* (c, d) *и непрерывна в точке* $y_0 = g(x_0) \in (c, d)$*. Тогда композиция (сложная функция)* $\varphi(x) = f(g(x))$ *непрерывна в точке* $x_0 \in (a, b)$*.*

Доказательство.

§4. Непрерывность сложной функции (композиции)

Теорема. *Пусть функция g, определенная на интервале (a, b), непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$ и такова, что $c < g(x) < d$ для всех $x \in (a, b)$. Далее, пусть функция f определена на интервале (c, d) и непрерывна в точке $y_0 = g(x_0) \in (c, d)$. Тогда композиция (сложная функция) $\varphi(x) = f(g(x))$ непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$.*

Доказательство.

§4. Непрерывность сложной функции (композиции)

Пример.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.
Так как функция $\sin y$ непрерывна в каждой точке $y_0 \in \mathbb{R}$, а функция $\frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 \neq 0$, то сложная функция (композиция) $\sin\frac{1}{x}$, в силу доказанной теоремы, непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

§4. Непрерывность сложной функции (композиции)

Пример.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.
Так как функция $\sin y$ непрерывна в каждой точке $y_0 \in \mathbb{R}$, а функция $\frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 \neq 0$, то сложная функция (композиция) $\sin\frac{1}{x}$, в силу доказанной теоремы, непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Определение. Функция f, определенная на интервале (a, b), называется непрерывной на этом интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция f называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на (a, b), а в точках a и b непрерывна справа и слева, соответственно.

В этом параграфе мы исследуем характер возможных разрывов у монотонной функции.

Именно, следующая теорема показывает, что у монотонной функции не может быть разрывов *II* рода, а во внутренних точках не может быть устранимых разрывов. Напротив, в концевых точках отрезка если и есть разрыв, то он устранимый.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Определение. Функция f, определенная на интервале (a, b), называется непрерывной на этом интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.
Функция f называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на (a, b), а в точках a и b непрерывна справа и слева, соответственно.

В этом параграфе мы исследуем характер возможных разрывов у монотонной функции.

Именно, следующая теорема показывает, что у монотонной функции не может быть разрывов *II* рода, а во внутренних точках не может быть устранимых разрывов. Напротив, в концевых точках отрезка если и есть разрыв, то он устранимый.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Определение. Функция f, определенная на интервале (a, b), называется непрерывной на этом интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.
Функция f называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на (a, b), а в точках a и b непрерывна справа и слева, соответственно.

В этом параграфе мы исследуем характер возможных разрывов у монотонной функции.

Именно, следующая теорема показывает, что у монотонной функции не может быть разрывов *II* рода, а во внутренних точках не может быть устранимых разрывов. Напротив, в концевых точках отрезка если и есть разрыв, то он устранимый.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Определение. Функция f, определенная на интервале (a, b), называется непрерывной на этом интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.
Функция f называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на (a, b), а в точках a и b непрерывна справа и слева, соответственно.

В этом параграфе мы исследуем характер возможных разрывов у монотонной функции.

Именно, следующая теорема показывает, что у монотонной функции не может быть разрывов *II* рода, а во внутренних точках не может быть устранимых разрывов. Напротив, в концевых точках отрезка если и есть разрыв, то он устранимый.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Теорема 1 (о характере точек разрыва монотонной функции).

Пусть функция f монотонна на $[a, b]$. Тогда

1. *Если $x_0 \in (a, b)$, то имеет место одна и только одна из следующих двух ситуаций:*
   a) *f непрерывна в точке x_0;*
   b) *в точке x_0 функция f имеет неустранимый разрыв I рода.*

2. *Если $x_0 = a$ $(x_0 = b)$, то*
   a) *либо f непрерывна справа (слева) в точке x_0;*
   b) *либо f имеет в точке x_0 устранимый разрыв.*

Доказательство.

К доказательству теоремы 2.

К доказательству теоремы 3.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Теорема 1 (о характере точек разрыва монотонной функции).

Пусть функция f монотонна на $[a, b]$. Тогда

1. *Если $x_0 \in (a, b)$, то имеет место одна и только одна из следующих двух ситуаций:*
   a) *f непрерывна в точке x_0;*
   b) *в точке x_0 функция f имеет неустранимый разрыв I рода.*
2. *Если $x_0 = a$ $(x_0 = b)$, то*
   a) *либо f непрерывна справа (слева) в точке x_0;*
   b) *либо f имеет в точке x_0 устранимый разрыв.*

Доказательство.

К доказательству теоремы 2.

К доказательству теоремы 3.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Теорема 1 (о характере точек разрыва монотонной функции).

Пусть функция f монотонна на $[a, b]$. Тогда

1. *Если $x_0 \in (a, b)$, то имеет место одна и только одна из следующих двух ситуаций:*
   a) *f непрерывна в точке x_0;*
   b) *в точке x_0 функция f имеет неустранимый разрыв I рода.*
2. *Если $x_0 = a$ $(x_0 = b)$, то*
   a) *либо f непрерывна справа (слева) в точке x_0;*
   b) *либо f имеет в точке x_0 устранимый разрыв.*

Доказательство.

К доказательству теоремы 2.

К доказательству теоремы 3.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Теперь изучим вопрос о количестве точек разрыва монотонной функции, заданной на $[a, b]$.

Может оказаться, что точек разрыва у функции f нет (например, $f(x) = x$).

Легко построить пример монотонной функции, у которой любой наперед заданный конечный набор точек из $[a, b]$ будет точками разрыва, а все остальные точки будут точками непрерывности.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Теперь изучим вопрос о количестве точек разрыва монотонной функции, заданной на $[a, b]$.

Может оказаться, что точек разрыва у функции f нет (например, $f(x) = x$).

Легко построить пример монотонной функции, у которой любой наперед заданный конечный набор точек из $[a, b]$ будет точками разрыва, а все остальные точки будут точками непрерывности.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Теперь изучим вопрос о количестве точек разрыва монотонной функции, заданной на $[a, b]$.

Может оказаться, что точек разрыва у функции f нет (например, $f(x) = x$).
Легко построить пример монотонной функции, у которой любой наперед заданный конечный набор точек из $[a, b]$ будет точками разрыва, а все остальные точки будут точками непрерывности.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Монотонная функция может иметь и бесконечно много точек разрыва.

Например, у невозрастающей функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

каждая точка вида $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ является точкой разрыва.

В этом примере множество точек разрыва счетное.

Если же отказаться от условия монотонности, то можно привести пример функции, у которой множество точек разрыва несчетно (функция Дирихле).

Естественный вопрос: может ли монотонная функция иметь несчетное множество точек разрыва?

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Монотонная функция может иметь и бесконечно много точек разрыва.

Например, у невозрастающей функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}, \ n = 1, 2, \dots, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

каждая точка вида $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ является точкой разрыва.

В этом примере множество точек разрыва счетное.

Если же отказаться от условия монотонности, то можно привести пример функции, у которой множество точек разрыва несчетно (функция Дирихле).

Естественный вопрос: может ли монотонная функция иметь несчетное множество точек разрыва?

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Монотонная функция может иметь и бесконечно много точек разрыва.

Например, у невозрастающей функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

каждая точка вида $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ является точкой разрыва.

В этом примере множество точек разрыва счетное.

Если же отказаться от условия монотонности, то можно привести пример функции, у которой множество точек разрыва несчетно (функция Дирихле).

Естественный вопрос: может ли монотонная функция иметь несчетное множество точек разрыва?

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Определение. Множество называется не более чем счетным, если оно пусто, конечно или счетно.

Теорема 2 (о множестве точек разрыва монотонной функции).

Пусть функция f монотонна на (a, b). Тогда множество ее точек разрыва не более чем счетно.

Доказательство.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Определение. Множество называется **не более чем счетным**, если оно пусто, конечно или счетно.

Теорема 2 (о множестве точек разрыва монотонной функции).

Пусть функция f монотонна на (a, b). Тогда множество ее точек разрыва не более чем счетно.

Доказательство.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Определение. Множество называется не более чем счетным, если оно пусто, конечно или счетно.

Теорема 2 (о множестве точек разрыва монотонной функции).

Пусть функция f монотонна на (a, b). Тогда множество ее точек разрыва не более чем счетно.

Доказательство.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Пусть функция f монотонна на $[a, b]$. Тогда множество ее значений $E(f)$ содержится в отрезке I с концами $f(a)$ и $f(b)$, т. е. $E(f) \subset I$.

Следующая теорема показывает, что в случае $E(f) = I$ функция f непрерывна на $[a, b]$. Другими словами, если в области значений монотонной функции нет пустот (промежутков), то такая функция непрерывна.

Теорема 3 (о непрерывности монотонной функции).

Пусть функция f монотонна на $[a, b]$ и область ее значений представляет собой отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$. Тогда функция f непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство.

К замечанию

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Пусть функция f монотонна на $[a, b]$. Тогда множество ее значений $E(f)$ содержится в отрезке I с концами $f(a)$ и $f(b)$, т. е. $E(f) \subset I$.

Следующая теорема показывает, что в случае $E(f) = I$ функция f непрерывна на $[a, b]$. Другими словами, если в области значений монотонной функции нет пустот (промежутков), то такая функция непрерывна.

Теорема 3 (о непрерывности монотонной функции).

Пусть функция f монотонна на $[a, b]$ и область ее значений представляет собой отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$. Тогда функция f непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство.

К замечанию

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Пусть функция f монотонна на $[a, b]$. Тогда множество ее значений $E(f)$ содержится в отрезке I с концами $f(a)$ и $f(b)$, т. е. $E(f) \subset I$.

Следующая теорема показывает, что в случае $E(f) = I$ функция f непрерывна на $[a, b]$. Другими словами, если в области значений монотонной функции нет пустот (промежутков), то такая функция непрерывна.

Теорема 3 (о непрерывности монотонной функции).

Пусть функция f монотонна на $[a, b]$ и область ее значений представляет собой отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$. Тогда функция f непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство.

К замечанию

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Пусть функция f монотонна на $[a, b]$. Тогда множество ее значений $E(f)$ содержится в отрезке I с концами $f(a)$ и $f(b)$, т. е. $E(f) \subset I$.

Следующая теорема показывает, что в случае $E(f) = I$ функция f непрерывна на $[a, b]$. Другими словами, если в области значений монотонной функции нет пустот (промежутков), то такая функция непрерывна.

Теорема 3 (о непрерывности монотонной функции).

Пусть функция f монотонна на $[a, b]$ и область ее значений представляет собой отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$. Тогда функция f непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство.

К замечанию

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Замечание. Теорема 3 теряет силу, если отбросить условие монотонности функции f. Например, множество значений функции

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x < 0, \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

определенной на отрезке $[-1, 1]$, представляет собой отрезок $[-1, 1]$, но в то же время эта функция разрывна в точке $x_0 = 0$.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Эквивалентная формулировка теоремы 3 (о непрерывности монотонной функции) имеет следующий вид.

Теорема.

Если монотонная функция f принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, то f непрерывна на $[a, b]$.

Ниже мы покажем, что обратное утверждение справедливо для любой непрерывной функции, даже без предположения монотонности.

§5. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Эквивалентная формулировка теоремы 3 (о непрерывности монотонной функции) имеет следующий вид.

Теорема.

Если монотонная функция f принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, то f непрерывна на $[a, b]$.

Ниже мы покажем, что обратное утверждение справедливо для любой непрерывной функции, даже без предположения монотонности.

§6. Свойство промежуточных значений

§6. Свойство промежуточных значений

§6. Свойство промежуточных значений

Теорема Больцано – Коши (о корне).

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, такая, что $f(c) = 0$.

Доказательство.

§6. Свойство промежуточных значений

Теорема Больцано – Коши (о корне).

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, такая, что $f(c) = 0$.

Доказательство.

§6. Свойство промежуточных значений

Следствие (свойство промежуточных значений).

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда функция f принимает все значения, заключенные между $f(a)$ и $f(b)$. Именно, для любого числа A, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдется такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = A$.

Для доказательства этого следствия достаточно применить теорему Больцано – Коши к функции $g(x) = f(x) - A$.

§6. Свойство промежуточных значений

Следствие (свойство промежуточных значений).

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда функция f принимает все значения, заключенные между $f(a)$ и $f(b)$. Именно, для любого числа A, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдется такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = A$.

Для доказательства этого следствия достаточно применить теорему Больцано – Коши к функции $g(x) = f(x) - A$.

§6. Свойство промежуточных значений

Утверждение, обратное данному следствию, неверно. В этом легко убедиться на примере функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 1-x, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Если же функция f монотонна на $[a, b]$, то, как показывает теорема 3 (о непрерывности монотонной функции), данное следствие можно обратить.

§6. Свойство промежуточных значений

Утверждение, обратное данному следствию, неверно. В этом легко убедиться на примере функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 1 - x, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Если же функция f монотонна на $[a,b]$, то, как показывает теорема 3 (о непрерывности монотонной функции), данное следствие можно обратить.

§6. Свойство промежуточных значений

Таким образом, из теоремы 3 (о непрерывности монотонной функции) и свойства промежуточных значений мы получаем следующий критерий непрерывности монотонной функции.

Теорема (критерий непрерывности монотонной функции).

Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция f непрерывна на этом отрезке тогда и только тогда, когда она принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.

§6. Свойство промежуточных значений

Таким образом, из теоремы 3 (о непрерывности монотонной функции) и свойства промежуточных значений мы получаем следующий критерий непрерывности монотонной функции.

Теорема (критерий непрерывности монотонной функции).

Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция f непрерывна на этом отрезке тогда и только тогда, когда она принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.

§6. Свойство промежуточных значений

Пример.

Покажем, что каждый многочлен нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень.

Пусть $P_{2k+1}(x) = a_0x^{2k+1} + a_1x^{2k} + \cdots + a_{2k+1}$, причем можем считать, что $a_0 > 0$. Тогда, очевидно, $\lim\limits_{x\to-\infty} P_{2k+1}(x) = -\infty$, а значит, существует такое a, что $P_{2k+1}(a) < 0$. Далее, поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} P_{2k+1}(x) = +\infty$, то найдется такое $b > a$, что $P_{2k+1}(x) > 0$.

Поскольку многочлен P_{2k+1} непрерывен на $[a, b]$, то, в силу теоремы Больцано – Коши, найдется такое $c \in (a, b)$, что $P_{2k+1}(c) = 0$.

§6. Свойство промежуточных значений

Пример.

Покажем, что каждый многочлен нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень.

Пусть $P_{2k+1}(x) = a_0x^{2k+1} + a_1x^{2k} + \dots + a_{2k+1}$, причем можем считать, что $a_0 > 0$. Тогда, очевидно, $\lim\limits_{x\to-\infty} P_{2k+1}(x) = -\infty$, а значит, существует такое a, что $P_{2k+1}(a) < 0$. Далее, поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} P_{2k+1}(x) = +\infty$, то найдется такое $b > a$, что $P_{2k+1}(x) > 0$.

Поскольку многочлен P_{2k+1} непрерывен на $[a, b]$, то, в силу теоремы Больцано – Коши, найдется такое $c \in (a, b)$, что $P_{2k+1}(c) = 0$.

§6. Свойство промежуточных значений

Пример.

Покажем, что каждый многочлен нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень.

Пусть $P_{2k+1}(x) = a_0 x^{2k+1} + a_1 x^{2k} + \dots + a_{2k+1}$, причем можем считать, что $a_0 > 0$. Тогда, очевидно, $\lim\limits_{x\to-\infty} P_{2k+1}(x) = -\infty$, а значит, существует такое a, что $P_{2k+1}(a) < 0$. Далее, поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} P_{2k+1}(x) = +\infty$, то найдется такое $b > a$, что $P_{2k+1}(x) > 0$.

Поскольку многочлен P_{2k+1} непрерывен на $[a, b]$, то, в силу теоремы Больцано – Коши, найдется такое $c \in (a, b)$, что $P_{2k+1}(c) = 0$.

§7. Теоремы Вейерштрасса

§7. Теоремы Вейерштрасса

§7. Теоремы Вейерштрасса

Ранее мы показывали, что непрерывная в точке функция локально ограничена в некоторой окрестности этой точки.
Однако из локальной ограниченности в каждой точке некоторого множества не следует ограниченность функции на всем множестве.

Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ $(0 < x < 1)$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in (0, 1)$ и, следовательно, локально ограничена в каждой точке (т. е. для каждой точки $x_0 \in (0, 1)$ существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в которой функция f ограничена).
Вместе с тем функция f неограничена на всем множестве $(0, 1)$.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Ранее мы показывали, что непрерывная в точке функция локально ограничена в некоторой окрестности этой точки. Однако из локальной ограниченности в каждой точке некоторого множества не следует ограниченность функции на всем множестве.

Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ $(0 < x < 1)$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in (0, 1)$ и, следовательно, локально ограничена в каждой точке (т. е. для каждой точки $x_0 \in (0, 1)$ существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в которой функция f ограничена).
Вместе с тем функция f неограничена на всем множестве $(0, 1)$.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Ранее мы показывали, что непрерывная в точке функция локально ограничена в некоторой окрестности этой точки. Однако из локальной ограниченности в каждой точке некоторого множества не следует ограниченность функции на всем множестве.

Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ $(0 < x < 1)$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in (0, 1)$ и, следовательно, локально ограничена в каждой точке (т. е. для каждой точки $x_0 \in (0, 1)$ существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в которой функция f ограничена).
Вместе с тем функция f неограничена на всем множестве $(0, 1)$.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Ранее мы показывали, что непрерывная в точке функция локально ограничена в некоторой окрестности этой точки. Однако из локальной ограниченности в каждой точке некоторого множества не следует ограниченность функции на всем множестве.

Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ $(0 < x < 1)$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in (0, 1)$ и, следовательно, локально ограничена в каждой точке (т. е. для каждой точки $x_0 \in (0, 1)$ существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в которой функция f ограничена).
Вместе с тем функция f неограничена на всем множестве $(0, 1)$.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Первая теорема Вейерштрасса.

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство.

Приведем еще одно доказательство первой теоремы Вейерштрасса, основанное на применении метода деления отрезка пополам.

Альтернативное доказательство.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Первая теорема Вейерштрасса.

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство.

Приведем еще одно доказательство первой теоремы Вейерштрасса, основанное на применении метода деления отрезка пополам.

Альтернативное доказательство.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Первая теорема Вейерштрасса.

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство.

Приведем еще одно доказательство первой теоремы Вейерштрасса, основанное на применении метода деления отрезка пополам.

Альтернативное доказательство.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Следствие из теоремы Больцано – Коши (свойство промежуточных значений) утверждает, что областью значений непрерывной на отрезке функции является промежуток.
Но это может быть либо интервал, либо полуинтервал, либо отрезок.
Мы уточним это следствие. Именно, покажем, что областью значений непрерывной на отрезке функции является отрезок.

Определение. Говорят, что функция f ограничена сверху (снизу) на множестве E, если ограничено сверху (снизу) множество ее значений

$$f(E) \equiv \{f(x) : \ x \in E\}.$$

Верхней (нижней) гранью функции f на множестве E называют верхнюю (нижнюю) грань множества $f(E)$ и обозначают

$\sup\limits_{x\in E} f(x)$ $\left(\inf\limits_{x\in E} f(x)\right)$.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Следствие из теоремы Больцано – Коши (свойство промежуточных значений) утверждает, что областью значений непрерывной на отрезке функции является промежуток.
Но это может быть либо интервал, либо полуинтервал, либо отрезок.
Мы уточним это следствие. Именно, покажем, что областью значений непрерывной на отрезке функции является отрезок.

Определение. Говорят, что функция f ограничена сверху (снизу) на множестве E, если ограничено сверху (снизу) множество ее значений

$$f(E) \equiv \{f(x) : \ x \in E\}.$$

Верхней (нижней) гранью функции f на множестве E называют верхнюю (нижнюю) грань множества $f(E)$ и обозначают

$$\sup_{x\in E} f(x) \quad \left(\inf_{x\in E} f(x)\right).$$

§7. Теоремы Вейерштрасса

Следствие из теоремы Больцано – Коши (свойство промежуточных значений) утверждает, что областью значений непрерывной на отрезке функции является промежуток.
Но это может быть либо интервал, либо полуинтервал, либо отрезок.
Мы уточним это следствие. Именно, покажем, что областью значений непрерывной на отрезке функции является отрезок.

Определение. Говорят, что функция f ограничена сверху (снизу) на множестве E, если ограничено сверху (снизу) множество ее значений

$$f(E) \equiv \{f(x): \; x \in E\}.$$

Верхней (нижней) гранью функции f на множестве E называют верхнюю (нижнюю) грань множества $f(E)$ и обозначают

$\sup\limits_{x\in E} f(x)$ $\left(\inf\limits_{x\in E} f(x)\right)$.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Если $A = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, то это означает, что

1. для любого $x \in E$ справедливо неравенство $f(x) \leq A$;
2. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x' \in E$, что $f(x') > A - \varepsilon$.

Ясно, что эти два свойства равносильны определению верхней грани функции f.

Ранее отмечалось, что не каждое ограниченное сверху множество имеет наибольший элемент.

Пусть ограниченное множество $f(E)$ является множеством значений некоторой функции f, заданной на множестве E.

Если во множестве $f(E)$ существует наибольший элемент, т. е. если существует такое $x_0 \in E$, что $f(x_0) = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, то говорят, что функция f достигает своей верхней грани.

В противном случае говорят, что верхняя грань функции f не достигается.

Аналогичные понятия формулируются и для нижней грани.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Если $A = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, то это означает, что

1. для любого $x \in E$ справедливо неравенство $f(x) \leq A$;
2. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x' \in E$, что $f(x') > A - \varepsilon$.

Ясно, что эти два свойства равносильны определению верхней грани функции f.

Ранее отмечалось, что не каждое ограниченное сверху множество имеет наибольший элемент.

Пусть ограниченное множество $f(E)$ является множеством значений некоторой функции f, заданной на множестве E.

Если во множестве $f(E)$ существует наибольший элемент, т. е. если существует такое $x_0 \in E$, что $f(x_0) = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, то говорят, что функция f достигает своей верхней грани.

В противном случае говорят, что верхняя грань функции f не достигается.

Аналогичные понятия формулируются и для нижней грани.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Если $A = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, то это означает, что

1. для любого $x \in E$ справедливо неравенство $f(x) \leq A$;
2. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x' \in E$, что $f(x') > A - \varepsilon$.

Ясно, что эти два свойства равносильны определению верхней грани функции f.

Ранее отмечалось, что не каждое ограниченное сверху множество имеет наибольший элемент.

Пусть ограниченное множество $f(E)$ является множеством значений некоторой функции f, заданной на множестве E.

Если во множестве $f(E)$ существует наибольший элемент, т. е. если существует такое $x_0 \in E$, что $f(x_0) = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, то говорят, что функция f достигает своей верхней грани.

В противном случае говорят, что верхняя грань функции f не достигается.

Аналогичные понятия формулируются и для нижней грани.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Если $A = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, то это означает, что

1. для любого $x \in E$ справедливо неравенство $f(x) \le A$;
2. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x' \in E$, что $f(x') > A - \varepsilon$.

Ясно, что эти два свойства равносильны определению верхней грани функции f.

Ранее отмечалось, что не каждое ограниченное сверху множество имеет наибольший элемент.
Пусть ограниченное множество $f(E)$ является множеством значений некоторой функции f, заданной на множестве E.
Если во множестве $f(E)$ существует наибольший элемент, т. е. если существует такое $x_0 \in E$, что $f(x_0) = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, то говорят, что функция f достигает своей верхней грани.
В противном случае говорят, что верхняя грань функции f не достигается.

Аналогичные понятия формулируются и для нижней грани.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Если $A = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, то это означает, что

1. для любого $x \in E$ справедливо неравенство $f(x) \leq A$;
2. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x' \in E$, что $f(x') > A - \varepsilon$.

Ясно, что эти два свойства равносильны определению верхней грани функции f.

Ранее отмечалось, что не каждое ограниченное сверху множество имеет наибольший элемент.
Пусть ограниченное множество $f(E)$ является множеством значений некоторой функции f, заданной на множестве E.
Если во множестве $f(E)$ существует наибольший элемент, т. е. если существует такое $x_0 \in E$, что $f(x_0) = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, то говорят, что функция f достигает своей верхней грани.
В противном случае говорят, что верхняя грань функции f не достигается.

Аналогичные понятия формулируются и для нижней грани.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Если $A = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, то это означает, что

1. для любого $x \in E$ справедливо неравенство $f(x) \leq A$;
2. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x' \in E$, что $f(x') > A - \varepsilon$.

Ясно, что эти два свойства равносильны определению верхней грани функции f.

Ранее отмечалось, что не каждое ограниченное сверху множество имеет наибольший элемент.
Пусть ограниченное множество $f(E)$ является множеством значений некоторой функции f, заданной на множестве E.
Если во множестве $f(E)$ существует наибольший элемент, т. е. если существует такое $x_0 \in E$, что $f(x_0) = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, то говорят, что функция f достигает своей верхней грани.
В противном случае говорят, что верхняя грань функции f не достигается.

Аналогичные понятия формулируются и для нижней грани.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Зададимся вопросом: каждая ли ограниченная сверху функция достигает своей верхней грани?

Ответ, очевидно, отрицательный.

Например, для функции $f(x) = x$, заданной на $(0, 1)$, $\sup\limits_{x \in (0,1)} f(x) = 1$, но для любого $x \in (0, 1)$ справедливо неравенство $f(x) < 1$, т. е. верхняя грань не достигается.
Другим примером может служить функция дробной части $f(x) = \{x\}$ на отрезке $[0, 1]$.

В первом примере функция непрерывна, но задана на интервале.
Во втором примере функция задана на отрезке, но не является непрерывной на этом отрезке.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Зададимся вопросом: каждая ли ограниченная сверху функция достигает своей верхней грани?

Ответ, очевидно, отрицательный.

Например, для функции $f(x) = x$, заданной на $(0, 1)$, $\sup\limits_{x\in(0,1)} f(x) = 1$, но для любого $x \in (0, 1)$ справедливо неравенство $f(x) < 1$, т. е. верхняя грань не достигается.
Другим примером может служить функция дробной части $f(x) = \{x\}$ на отрезке $[0, 1]$.

В первом примере функция непрерывна, но задана на интервале.
Во втором примере функция задана на отрезке, но не является непрерывной на этом отрезке.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Зададимся вопросом: каждая ли ограниченная сверху функция достигает своей верхней грани?

Ответ, очевидно, отрицательный.

Например, для функции $f(x) = x$, заданной на $(0, 1)$, $\sup\limits_{x\in(0,1)} f(x) = 1$, но для любого $x \in (0, 1)$ справедливо неравенство $f(x) < 1$, т. е. верхняя грань не достигается.
Другим примером может служить функция дробной части $f(x) = \{x\}$ на отрезке $[0, 1]$.

В первом примере функция непрерывна, но задана на интервале.
Во втором примере функция задана на отрезке, но не является непрерывной на этом отрезке.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Зададимся вопросом: каждая ли ограниченная сверху функция достигает своей верхней грани?

Ответ, очевидно, отрицательный.

Например, для функции $f(x) = x$, заданной на $(0,1)$, $\sup\limits_{x\in(0,1)} f(x) = 1$, но для любого $x \in (0,1)$ справедливо неравенство $f(x) < 1$, т. е. верхняя грань не достигается.
Другим примером может служить функция дробной части $f(x) = \{x\}$ на отрезке $[0,1]$.

В первом примере функция непрерывна, но задана на интервале.
Во втором примере функция задана на отрезке, но не является непрерывной на этом отрезке.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Зададимся вопросом: каждая ли ограниченная сверху функция достигает своей верхней грани?

Ответ, очевидно, отрицательный.

Например, для функции $f(x) = x$, заданной на $(0,1)$, $\sup\limits_{x\in(0,1)} f(x) = 1$, но для любого $x \in (0,1)$ справедливо неравенство $f(x) < 1$, т. е. верхняя грань не достигается.
Другим примером может служить функция дробной части $f(x) = \{x\}$ на отрезке $[0,1]$.

В первом примере функция непрерывна, но задана на интервале.
Во втором примере функция задана на отрезке, но не является непрерывной на этом отрезке.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Если же функция непрерывна на отрезке, то она достигает своей верхней грани. В этом и состоит

Вторая теорема Вейерштрасса.

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда f достигает своих верхней и нижней граней, т. е. существуют такие $\alpha, \beta \in [a, b]$, что

$$f(\alpha) = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(\beta) = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Доказательство.

Приведем еще одно доказательство второй теоремы Вейерштрасса, основанное на применении первой теоремы Вейерштрасса. Альтернативное доказательство.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Если же функция непрерывна на отрезке, то она достигает своей верхней грани. В этом и состоит

Вторая теорема Вейерштрасса.

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда f достигает своих верхней и нижней граней, т. е. существуют такие $\alpha, \beta \in [a, b]$, что

$$f(\alpha) = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(\beta) = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Доказательство.

Приведем еще одно доказательство второй теоремы Вейерштрасса, основанное на применении первой теоремы Вейерштрасса. Альтернативное доказательство.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Если же функция непрерывна на отрезке, то она достигает своей верхней грани. В этом и состоит

Вторая теорема Вейерштрасса.

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда f достигает своих верхней и нижней граней, т. е. существуют такие $\alpha, \beta \in [a, b]$, что

$$f(\alpha) = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(\beta) = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Доказательство.

Приведем еще одно доказательство второй теоремы Вейерштрасса, основанное на применении первой теоремы Вейерштрасса. Альтернативное доказательство.

§7. Теоремы Вейерштрасса

Свойство промежуточных значений и обе теоремы Вейерштрасса можно объединить в виде одной следующей теоремы.

Теорема.

Областью значений непрерывной на отрезке функции является отрезок.

§8. Обратная функция

§8. Обратная функция

§8. Обратная функция

Функция f, действующая из X в Y, называется биективной, если она взаимно однозначна и ее область значений совпадает с множеством Y. Это означает, что для каждого $y \in Y$ существует единственный $x \in X$, такой, что $y = f(x)$.

Пусть функция $f: X \to Y$ биективна. Тогда каждому $y \in Y$ можно поставить в соответствие единственный $x \in X$, такой, что $y = f(x)$. Тем самым мы получим новую функцию, действующую из Y в X. Такая функция называется обратной к функции f и обозначается f^{-1}.

§8. Обратная функция

Функция f, действующая из X в Y, называется биективной, если она взаимно однозначна и ее область значений совпадает с множеством Y. Это означает, что для каждого $y \in Y$ существует единственный $x \in X$, такой, что $y = f(x)$.

Пусть функция $f: X \to Y$ биективна. Тогда каждому $y \in Y$ можно поставить в соответствие единственный $x \in X$, такой, что $y = f(x)$. Тем самым мы получим новую функцию, действующую из Y в X. Такая функция называется обратной к функции f и обозначается f^{-1}.

§8. Обратная функция

Например, $f(x) = x^3$ действует из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ и биективна. Тогда $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

Другая функция $f(x) = x^2$, действующая из $\mathbb{R}$ в $[0, +\infty)$, не является биективной, и поэтому нельзя говорить об обратной функции.

Если же мы рассмотрим функцию $f_1 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, действующую по правилу $f_1(x) = x^2$, то такая функция биективна, и поэтому у нее есть обратная $f_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

В последнем примере мы пользуемся понятием сужения, т. е. функцию мы рассматриваем не на всей возможной области определения, где определяющая функцию формула имеет смысл, а лишь на части этой области. Дадим определение.

§8. Обратная функция

Например, $f(x) = x^3$ действует из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ и биективна. Тогда $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

Другая функция $f(x) = x^2$, действующая из $\mathbb{R}$ в $[0, +\infty)$, не является биективной, и поэтому нельзя говорить об обратной функции.

Если же мы рассмотрим функцию $f_1 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, действующую по правилу $f_1(x) = x^2$, то такая функция биективна, и поэтому у нее есть обратная $f_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

В последнем примере мы пользуемся понятием сужения, т. е. функцию мы рассматриваем не на всей возможной области определения, где определяющая функцию формула имеет смысл, а лишь на части этой области. Дадим определение.

§8. Обратная функция

Например, $f(x) = x^3$ действует из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ и биективна. Тогда $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.
Другая функция $f(x) = x^2$, действующая из $\mathbb{R}$ в $[0, +\infty)$, не является биективной, и поэтому нельзя говорить об обратной функции.
Если же мы рассмотрим функцию $f_1 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, действующую по правилу $f_1(x) = x^2$, то такая функция биективна, и поэтому у нее есть обратная $f_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

В последнем примере мы пользуемся понятием сужения, т. е. функцию мы рассматриваем не на всей возможной области определения, где определяющая функцию формула имеет смысл, а лишь на части этой области. Дадим определение.

§8. Обратная функция

Например, $f(x) = x^3$ действует из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ и биективна. Тогда $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.
Другая функция $f(x) = x^2$, действующая из $\mathbb{R}$ в $[0, +\infty)$, не является биективной, и поэтому нельзя говорить об обратной функции.
Если же мы рассмотрим функцию $f_1 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, действующую по правилу $f_1(x) = x^2$, то такая функция биективна, и поэтому у нее есть обратная $f_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

В последнем примере мы пользуемся понятием сужения, т. е. функцию мы рассматриваем не на всей возможной области определения, где определяющая функцию формула имеет смысл, а лишь на части этой области. Дадим определение.

§8. Обратная функция

Определение. Пусть функция $f: X \to Y$, и множество $A \subset X$. Каждой точке $x \in A$ поставим в соответствие $y = f(x) \in Y$. Тогда получим функцию, заданную на множестве A, которую будем называть сужением функции f на множество A, и будем обозначать это сужение $f|A$.

В рассмотренном выше примере $f(x) = x^2$ функция не была взаимно однозначной на $\mathbb{R}$. В то же время сужение $f_1 = f|[0, +\infty)$ – взаимно однозначная функция, и поэтому существует обратная функция.

§8. Обратная функция

Определение. Пусть функция $f: X \to Y$, и множество $A \subset X$. Каждой точке $x \in A$ поставим в соответствие $y = f(x) \in Y$. Тогда получим функцию, заданную на множестве A, которую будем называть сужением функции f на множество A, и будем обозначать это сужение $f|A$.

В рассмотренном выше примере $f(x) = x^2$ функция не была взаимно однозначной на $\mathbb{R}$. В то же время сужение $f_1 = f|[0, +\infty)$ – взаимно однозначная функция, и поэтому существует обратная функция.

§8. Обратная функция

В этом параграфе мы будем заниматься вопросом существования и свойствами обратной функции.

Если обратную функцию удается явно выразить (как в рассмотренных выше примерах), то свойства обратной функции могут быть изучены непосредственно. Однако это не всегда можно сделать.

Например, функция $f(x) = x + \frac{1}{2}\sin x$ взаимно однозначна, но выражение обратной функции весьма затруднительно.

Мы хотим исследовать свойства обратной функции f^{-1}, не зная ее явного выражения.

§8. Обратная функция

В этом параграфе мы будем заниматься вопросом существования и свойствами обратной функции.
Если обратную функцию удается явно выразить (как в рассмотренных выше примерах), то свойства обратной функции могут быть изучены непосредственно. Однако это не всегда можно сделать.

Например, функция $f(x) = x + \frac{1}{2}\sin x$ взаимно однозначна, но выражение обратной функции весьма затруднительно.

Мы хотим исследовать свойства обратной функции f^{-1}, не зная ее явного выражения.

§8. Обратная функция

В этом параграфе мы будем заниматься вопросом существования и свойствами обратной функции.
Если обратную функцию удается явно выразить (как в рассмотренных выше примерах), то свойства обратной функции могут быть изучены непосредственно. Однако это не всегда можно сделать.

Например, функция $f(x) = x + \frac{1}{2}\sin x$ взаимно однозначна, но выражение обратной функции весьма затруднительно.

Мы хотим исследовать свойства обратной функции f^{-1}, не зная ее явного выражения.

§8. Обратная функция

В этом параграфе мы будем заниматься вопросом существования и свойствами обратной функции.
Если обратную функцию удается явно выразить (как в рассмотренных выше примерах), то свойства обратной функции могут быть изучены непосредственно. Однако это не всегда можно сделать.

Например, функция $f(x) = x + \frac{1}{2}\sin x$ взаимно однозначна, но выражение обратной функции весьма затруднительно.

Мы хотим исследовать свойства обратной функции f^{-1}, не зная ее явного выражения.

§8. Обратная функция

Пусть функция f определена на $[a, b]$. Очевидно, что если f строго монотонна на $[a, b]$, то она взаимно однозначна.

Обратное утверждение не имеет места.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \le x < 0, \\ x - 1, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

очевидно, взаимно однозначна, но не является монотонной на $[-1, 1]$.

Можно, однако, доказать, что если функция f взаимно однозначна и непрерывна, то она строго монотонна. Мы этого не будем делать.

§8. Обратная функция

Пусть функция f определена на $[a, b]$. Очевидно, что если f строго монотонна на $[a, b]$, то она взаимно однозначна. Обратное утверждение не имеет места.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \le x < 0, \\ x - 1, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

очевидно, взаимно однозначна, но не является монотонной на $[-1, 1]$.

Можно, однако, доказать, что если функция f взаимно однозначна и непрерывна, то она строго монотонна. Мы этого не будем делать.

§8. Обратная функция

Пусть функция f определена на $[a, b]$. Очевидно, что если f строго монотонна на $[a, b]$, то она взаимно однозначна. Обратное утверждение не имеет места.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x < 0, \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

очевидно, взаимно однозначна, но не является монотонной на $[-1, 1]$.

Можно, однако, доказать, что если функция f взаимно однозначна и непрерывна, то она строго монотонна. Мы этого не будем делать.

§8. Обратная функция

В дальнейшем через $\langle \alpha, \beta \rangle$ будем обозначать отрезок с концами α и β (при этом неравенство $\alpha < \beta$ не обязательно).

Теорема (об обратной функции).

Пусть функция f строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда обратная функция f^{-1} строго монотонна и непрерывна на отрезке $\langle f(a), f(b) \rangle$.

Доказательство.

§8. Обратная функция

В дальнейшем через $\langle \alpha, \beta \rangle$ будем обозначать отрезок с концами α и β (при этом неравенство $\alpha < \beta$ не обязательно).

Теорема (об обратной функции).

Пусть функция f строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда обратная функция f^{-1} строго монотонна и непрерывна на отрезке $\langle f(a), f(b) \rangle$.

Доказательство.

§8. Обратная функция

В дальнейшем через $\langle \alpha, \beta \rangle$ будем обозначать отрезок с концами α и β (при этом неравенство $\alpha < \beta$ не обязательно).

Теорема (об обратной функции).

Пусть функция f строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда обратная функция f^{-1} строго монотонна и непрерывна на отрезке $\langle f(a), f(b) \rangle$.

Доказательство.

§8. Обратная функция

Пример 1. Арксинус.

Функция $f(x) = \sin x$ $(-\infty < x < +\infty)$ не является взаимно однозначной. Рассмотрим сужение этой функции на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Это сужение – непрерывная и строго возрастающая функция. Следовательно, существует обратная функция, непрерывная и строго возрастающая.

Арксинусом называется функция, обратная к сужению функции $\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, и обозначается $\arcsin x$.
Она определена на $[-1, 1]$, имеет областью значений отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, строго возрастает и непрерывна на $[-1, 1]$.

§8. Обратная функция

Пример 1. Арксинус.

Функция $f(x) = \sin x$ $(-\infty < x < +\infty)$ не является взаимно однозначной. Рассмотрим сужение этой функции на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Это сужение – непрерывная и строго возрастающая функция. Следовательно, существует обратная функция, непрерывная и строго возрастающая.

Арксинусом называется функция, обратная к сужению функции $\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, и обозначается $\arcsin x$. Она определена на $[-1, 1]$, имеет областью значений отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, строго возрастает и непрерывна на $[-1, 1]$.

§8. Обратная функция

Пример 1. Арксинус.

Функция $f(x) = \sin x$ $(-\infty < x < +\infty)$ не является взаимно однозначной. Рассмотрим сужение этой функции на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Это сужение – непрерывная и строго возрастающая функция. Следовательно, существует обратная функция, непрерывная и строго возрастающая.

Арксинусом называется функция, обратная к сужению функции $\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, и обозначается $\arcsin x$.
Она определена на $[-1, 1]$, имеет областью значений отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, строго возрастает и непрерывна на $[-1, 1]$.

§8. Обратная функция

Пример 2. Арккосинус.

Функция $f(x) = \cos x$ $(-\infty < x < +\infty)$ не является взаимно однозначной. Рассмотрим сужение этой функции на $[0, \pi]$. Это сужение – непрерывная и строго убывающая функция.
Следовательно, существует обратная функция, непрерывная и строго убывающая.

Арккосинусом называется функция, обратная к сужению функции $\cos x$ на $[0, \pi]$, и обозначается $\arccos x$.
Она определена на $[-1, 1]$, имеет областью значений отрезок $[0, \pi]$, строго убывает и непрерывна на $[-1, 1]$.

§8. Обратная функция

Пример 2. Арккосинус.

Функция $f(x) = \cos x$ $(-\infty < x < +\infty)$ не является взаимно однозначной. Рассмотрим сужение этой функции на $[0, \pi]$. Это сужение – непрерывная и строго убывающая функция. Следовательно, существует обратная функция, непрерывная и строго убывающая.

Арккосинусом называется функция, обратная к сужению функции $\cos x$ на $[0, \pi]$, и обозначается $\arccos x$. Она определена на $[-1, 1]$, имеет областью значений отрезок $[0, \pi]$, строго убывает и непрерывна на $[-1, 1]$.

§8. Обратная функция

Пример 2. Арккосинус.

Функция $f(x) = \cos x$ $(-\infty < x < +\infty)$ не является взаимно однозначной. Рассмотрим сужение этой функции на $[0, \pi]$. Это сужение – непрерывная и строго убывающая функция. Следовательно, существует обратная функция, непрерывная и строго убывающая.

Арккосинусом называется функция, обратная к сужению функции $\cos x$ на $[0, \pi]$, и обозначается $\arccos x$.
Она определена на $[-1, 1]$, имеет областью значений отрезок $[0, \pi]$, строго убывает и непрерывна на $[-1, 1]$.

§8. Обратная функция

Пример 3. Арктангенс и арккотангенс.

Арктангенсом называется функция, обратная к сужению функции $\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, и обозначается $\operatorname{arctg} x$. Функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна и строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$, область ее значений – интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Арккотангенсом называется функция, обратная к сужению функции $\operatorname{ctg} x$ на $(0, \pi)$, и обозначается $\operatorname{arcctg} x$. Функция $\operatorname{arcctg} x$ непрерывна и строго убывает на $(-\infty, +\infty)$, область ее значений – интервал $(0, \pi)$.

Упражнение. Постройте графики определенных выше обратных тригонометрических функций
$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$.

§8. Обратная функция

Пример 3. Арктангенс и арккотангенс.

Арктангенсом называется функция, обратная к сужению функции $\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, и обозначается $\operatorname{arctg} x$. Функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна и строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$, область ее значений – интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Арккотангенсом называется функция, обратная к сужению функции $\operatorname{ctg} x$ на $(0, \pi)$, и обозначается $\operatorname{arcctg} x$. Функция $\operatorname{arcctg} x$ непрерывна и строго убывает на $(-\infty, +\infty)$, область ее значений – интервал $(0, \pi)$.

Упражнение. Постройте графики определенных выше обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$.

§8. Обратная функция

Пример 3. Арктангенс и арккотангенс.

Арктангенсом называется функция, обратная к сужению функции $\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, и обозначается $\operatorname{arctg} x$. Функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна и строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$, область ее значений – интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Арккотангенсом называется функция, обратная к сужению функции $\operatorname{ctg} x$ на $(0, \pi)$, и обозначается $\operatorname{arcctg} x$. Функция $\operatorname{arcctg} x$ непрерывна и строго убывает на $(-\infty, +\infty)$, область ее значений – интервал $(0, \pi)$.

Упражнение. Постройте графики определенных выше обратных тригонометрических функций
$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

§9. Показательная и логарифмическая функции

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Полагаем $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n}$.

Ранее было показано, что для любого $a > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существует единственное $b > 0$, такое, что $b^n = a$. Обозначается это число $b = \sqrt[n]{a}$. Положим по определению $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Пусть, далее, $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Тогда $r = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Полагаем по определению $a^r = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Полагаем $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n}$.

Ранее было показано, что для любого $a > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существует единственное $b > 0$, такое, что $b^n = a$. Обозначается это число $b = \sqrt[n]{a}$. Положим по определению $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Пусть, далее, $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Тогда $r = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$.
Полагаем по определению $a^r = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Полагаем $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n}$.

Ранее было показано, что для любого $a > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существует единственное $b > 0$, такое, что $b^n = a$. Обозначается это число $b = \sqrt[n]{a}$. Положим по определению $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Пусть, далее, $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Тогда $r = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$.
Полагаем по определению $a^r = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Для доказательства корректности последнего определения нужно показать, что для $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{mk} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}.$$

Доказательство.

Далее, положим по определению $a^0 = 1$ и $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$ при $r < 0$, $r \in \mathbb{Q}$. Таким образом, мы получили определение рациональной степени действительного числа $a > 0$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Для доказательства корректности последнего определения нужно показать, что для $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{mk} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}.$$

Доказательство.

Далее, положим по определению $a^0 = 1$ и $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$ при $r < 0$, $r \in \mathbb{Q}$. Таким образом, мы получили определение рациональной степени действительного числа $a > 0$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Для доказательства корректности последнего определения нужно показать, что для $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{mk} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}.$$

Доказательство.

Далее, положим по определению $a^0 = 1$ и $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$ при $r < 0$, $r \in \mathbb{Q}$. Таким образом, мы получили определение рациональной степени действительного числа $a > 0$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Исходя из свойств степенной функции с натуральным показателем и учитывая, что при $a, b > 0$, $n \in \mathbb{N}$ равенства $a^n = b^n$ и $a = b$ равносильны, легко доказать, что степени с рациональными показателями обладают следующими свойствами:

1. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ $(m, n \in \mathbb{N},\ a > 0)$;
2. $a^r > 1$ $(r \in \mathbb{Q},\ r > 0,\ a > 1)$;
3. $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 0)$;
4. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 0)$;
5. $a^{r_1} > a^{r_2} > 0$ $(r_1 > r_2,\ r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 1)$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Исходя из свойств степенной функции с натуральным показателем и учитывая, что при $a, b > 0,\ n \in \mathbb{N}$ равенства $a^n = b^n$ и $a = b$ равносильны, легко доказать, что степени с рациональными показателями обладают следующими свойствами:

1. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ $(m, n \in \mathbb{N},\ a > 0)$;
2. $a^r > 1$ $(r \in \mathbb{Q},\ r > 0,\ a > 1)$;
3. $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 0)$;
4. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 0)$;
5. $a^{r_1} > a^{r_2} > 0$ $(r_1 > r_2,\ r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 1)$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Исходя из свойств степенной функции с натуральным показателем и учитывая, что при $a, b > 0$, $n \in \mathbb{N}$ равенства $a^n = b^n$ и $a = b$ равносильны, легко доказать, что степени с рациональными показателями обладают следующими свойствами:

1. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ $(m, n \in \mathbb{N},\ a > 0)$;
2. $a^r > 1$ $(r \in \mathbb{Q},\ r > 0,\ a > 1)$;
3. $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 0)$;
4. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 0)$;
5. $a^{r_1} > a^{r_2} > 0$ $(r_1 > r_2,\ r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 1)$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Исходя из свойств степенной функции с натуральным показателем и учитывая, что при $a, b > 0$, $n \in \mathbb{N}$ равенства $a^n = b^n$ и $a = b$ равносильны, легко доказать, что степени с рациональными показателями обладают следующими свойствами:

1. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ $(m, n \in \mathbb{N},\ a > 0)$;
2. $a^r > 1$ $(r \in \mathbb{Q},\ r > 0,\ a > 1)$;
3. $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 0)$;
4. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 0)$;
5. $a^{r_1} > a^{r_2} > 0$ $(r_1 > r_2,\ r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 1)$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Исходя из свойств степенной функции с натуральным показателем и учитывая, что при $a, b > 0,\ n \in \mathbb{N}$ равенства $a^n = b^n$ и $a = b$ равносильны, легко доказать, что степени с рациональными показателями обладают следующими свойствами:

1. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}\ (m, n \in \mathbb{N},\ a > 0)$;
2. $a^r > 1\ (r \in \mathbb{Q},\ r > 0,\ a > 1)$;
3. $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}\ (r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 0)$;
4. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}\ (r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 0)$;
5. $a^{r_1} > a^{r_2} > 0\ (r_1 > r_2,\ r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 1)$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Исходя из свойств степенной функции с натуральным показателем и учитывая, что при $a, b > 0,\ n \in \mathbb{N}$ равенства $a^n = b^n$ и $a = b$ равносильны, легко доказать, что степени с рациональными показателями обладают следующими свойствами:

1. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ $(m, n \in \mathbb{N},\ a > 0)$;
2. $a^r > 1$ $(r \in \mathbb{Q},\ r > 0,\ a > 1)$;
3. $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 0)$;
4. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 0)$;
5. $a^{r_1} > a^{r_2} > 0$ $(r_1 > r_2,\ r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ a > 1)$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Следующие свойства рациональных степеней сформулируем в виде двух лемм.

Лемма 1.

Пусть $a > 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом $r \in \mathbb{Q}$, таком, что $|r| < \delta$, справедливо неравенство $|a^r - 1| < \varepsilon$.

Доказательство.

Лемма 2.

Пусть $a > 1$. Если последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится, то последовательность $\{a^{r_n}\}$ также сходится.

Доказательство.

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналоги лемм 1 и 2 для случая $0 < a < 1$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Следующие свойства рациональных степеней сформулируем в виде двух лемм.

Лемма 1.

Пусть $a > 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом $r \in \mathbb{Q}$, таком, что $|r| < \delta$, справедливо неравенство $|a^r - 1| < \varepsilon$.

Доказательство.

Лемма 2.

Пусть $a > 1$. Если последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится, то последовательность $\{a^{r_n}\}$ также сходится.

Доказательство.

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналоги лемм 1 и 2 для случая $0 < a < 1$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Следующие свойства рациональных степеней сформулируем в виде двух лемм.

Лемма 1.

Пусть $a > 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом $r \in \mathbb{Q}$, таком, что $|r| < \delta$, справедливо неравенство $|a^r - 1| < \varepsilon$.

Доказательство.

Лемма 2.

Пусть $a > 1$. Если последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится, то последовательность $\{a^{r_n}\}$ также сходится.

Доказательство.

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналоги лемм 1 и 2 для случая $0 < a < 1$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Следующие свойства рациональных степеней сформулируем в виде двух лемм.

Лемма 1.

Пусть $a > 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом $r \in \mathbb{Q}$, таком, что $|r| < \delta$, справедливо неравенство $|a^r - 1| < \varepsilon$.

Доказательство.

Лемма 2.

Пусть $a > 1$. Если последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится, то последовательность $\{a^{r_n}\}$ также сходится.

Доказательство.

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналоги лемм 1 и 2 для случая $0 < a < 1$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степень с рациональным показателем

Следующие свойства рациональных степеней сформулируем в виде двух лемм.

Лемма 1.

Пусть $a > 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом $r \in \mathbb{Q}$, таком, что $|r| < \delta$, справедливо неравенство $|a^r - 1| < \varepsilon$.

Доказательство.

Лемма 2.

Пусть $a > 1$. Если последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится, то последовательность $\{a^{r_n}\}$ также сходится.

Доказательство.

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналоги лемм 1 и 2 для случая $0 < a < 1$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

Пусть $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$. Выберем последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$, сходящуюся к x. Тогда, в силу леммы 2, последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится. Положим по определению $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$.

Для доказательства корректности данного определения нужно показать, что a^x не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$, сходящейся к x.

Доказательство корректности.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

Пусть $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$. Выберем последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$, сходящуюся к x. Тогда, в силу леммы 2, последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится. Положим по определению $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$.

Для доказательства корректности данного определения нужно показать, что a^x не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$, сходящейся к x.

Доказательство корректности.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

Пусть $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$. Выберем последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$, сходящуюся к x. Тогда, в силу леммы 2, последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится. Положим по определению $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$.

Для доказательства корректности данного определения нужно показать, что a^x не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$, сходящейся к x.

Доказательство корректности.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

Итак, для определения a^x можно выбрать любую последовательность рациональных чисел, сходящуюся к x. Значение a^x не зависит от выбора этой последовательности.

Таким образом, для $a > 1$ каждому $x \in \mathbb{R}$ поставлено в соответствие число a^x, т. е. мы получаем функцию $f(x) = a^x$, определенную на $\mathbb{R}$.

Далее, полагаем $1^x = 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Если же $0 < a < 1$, то $b = \frac{1}{a} > 1$, и значение b^x для $x \in \mathbb{R}$ уже определено. Полагаем $a^x = \frac{1}{b^x}$.

Полученное значение a^x можно было определить и как предел последовательности $\{a^{r_n}\}$, где последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится к числу x. В самом деле,

$$a^x = \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

Итак, для определения a^x можно выбрать любую последовательность рациональных чисел, сходящуюся к x. Значение a^x не зависит от выбора этой последовательности. Таким образом, для $a > 1$ каждому $x \in \mathbb{R}$ поставлено в соответствие число a^x, т. е. мы получаем функцию $f(x) = a^x$, определенную на $\mathbb{R}$.

Далее, полагаем $1^x = 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Если же $0 < a < 1$, то $b = \frac{1}{a} > 1$, и значение b^x для $x \in \mathbb{R}$ уже определено. Полагаем $a^x = \frac{1}{b^x}$.

Полученное значение a^x можно было определить и как предел последовательности $\{a^{r_n}\}$, где последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится к числу x. В самом деле,

$$a^x = \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

Итак, для определения a^x можно выбрать любую последовательность рациональных чисел, сходящуюся к x. Значение a^x не зависит от выбора этой последовательности. Таким образом, для $a > 1$ каждому $x \in \mathbb{R}$ поставлено в соответствие число a^x, т. е. мы получаем функцию $f(x) = a^x$, определенную на $\mathbb{R}$.

Далее, полагаем $1^x = 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Если же $0 < a < 1$, то $b = \frac{1}{a} > 1$, и значение b^x для $x \in \mathbb{R}$ уже определено. Полагаем $a^x = \frac{1}{b^x}$.

Полученное значение a^x можно было определить и как предел последовательности $\{a^{r_n}\}$, где последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится к числу x. В самом деле,

$$a^x = \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

Итак, для определения a^x можно выбрать любую последовательность рациональных чисел, сходящуюся к x. Значение a^x не зависит от выбора этой последовательности. Таким образом, для $a > 1$ каждому $x \in \mathbb{R}$ поставлено в соответствие число a^x, т. е. мы получаем функцию $f(x) = a^x$, определенную на $\mathbb{R}$.

Далее, полагаем $1^x = 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Если же $0 < a < 1$, то $b = \frac{1}{a} > 1$, и значение b^x для $x \in \mathbb{R}$ уже определено. Полагаем $a^x = \frac{1}{b^x}$.

Полученное значение a^x можно было определить и как предел последовательности $\{a^{r_n}\}$, где последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится к числу x. В самом деле,

$$a^x = \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

Таким образом, мы получили показательную функцию
$y = a^x$ $(x \in \mathbb{R})$, где $a > 0$.
Изучим свойства этой функции.

Случай $a = 1$ тривиален, и мы его опускаем.
Поскольку при $0 < a < 1$ имеем $b = \frac{1}{a} > 1$ и $a^x = \frac{1}{b^x}$, то достаточно изучить лишь свойства функции a^x при $a > 1$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

Таким образом, мы получили показательную функцию $y = a^x$ $(x \in \mathbb{R})$, где $a > 0$.
Изучим свойства этой функции.

Случай $a = 1$ тривиален, и мы его опускаем.
Поскольку при $0 < a < 1$ имеем $b = \frac{1}{a} > 1$ и $a^x = \frac{1}{b^x}$, то достаточно изучить лишь свойства функции a^x при $a > 1$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

Таким образом, мы получили показательную функцию
$y = a^x$ $(x \in \mathbb{R})$, где $a > 0$.
Изучим свойства этой функции.

Случай $a = 1$ тривиален, и мы его опускаем.
Поскольку при $0 < a < 1$ имеем $b = \frac{1}{a} > 1$ и $a^x = \frac{1}{b^x}$, то достаточно изучить лишь свойства функции a^x при $a > 1$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

1. **Свойство 1.** *Для любого $a > 1$ и любых $x', x'' \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $a^{x'} \cdot a^{x''} = a^{x'+x''}$.* Доказательство.

   Из этого свойства, в частности, вытекает, что $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(x \in \mathbb{R})$.
2. **Свойство 2.** *Функция $y = a^x$ $(a > 1)$ строго возрастает на $\mathbb{R}$.* Доказательство.
3. **Свойство 3.** *Функция $y = a^x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.* Доказательство.
4. **Свойство 4.** *Для любого $a > 1$ и любых $x', x'' \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\left(a^{x'}\right)^{x''} = a^{x' \cdot x''}$.* Доказательство.
5. **Свойство 5.** *Если $a > 1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.* Доказательство.

Упражнение. На основании полученных свойств показательной функции постройте графики показательной функции при различных значениях $a > 0$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

1. **Свойство 1.** *Для любого $a > 1$ и любых $x', x'' \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $a^{x'} \cdot a^{x''} = a^{x'+x''}$.* Доказательство.
   Из этого свойства, в частности, вытекает, что $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(x \in \mathbb{R})$.
2. **Свойство 2.** *Функция $y = a^x$ $(a > 1)$ строго возрастает на $\mathbb{R}$.* Доказательство.
3. **Свойство 3.** *Функция $y = a^x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.* Доказательство.
4. **Свойство 4.** *Для любого $a > 1$ и любых $x', x'' \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\left(a^{x'}\right)^{x''} = a^{x' \cdot x''}$.* Доказательство.
5. **Свойство 5.** *Если $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.* Доказательство.

Упражнение. На основании полученных свойств показательной функции постройте графики показательной функции при различных значениях $a > 0$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

1. **Свойство 1.** *Для любого* $a > 1$ *и любых* $x', x'' \in \mathbb{R}$ *справедливо равенство* $a^{x'} \cdot a^{x''} = a^{x'+x''}$. Доказательство.
   Из этого свойства, в частности, вытекает, что $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(x \in \mathbb{R})$.
2. **Свойство 2.** *Функция* $y = a^x$ $(a > 1)$ *строго возрастает на* $\mathbb{R}$. Доказательство.
3. **Свойство 3.** *Функция* $y = a^x$ *непрерывна на* $\mathbb{R}$. Доказательство.
4. **Свойство 4.** *Для любого* $a > 1$ *и любых* $x', x'' \in \mathbb{R}$ *справедливо равенство* $\left(a^{x'}\right)^{x''} = a^{x' \cdot x''}$. Доказательство.
5. **Свойство 5.** *Если* $a > 1$, *то* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$. Доказательство.

 **Упражнение.** На основании полученных свойств показательной функции постройте графики показательной функции при различных значениях $a > 0$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

1. **Свойство 1.** *Для любого $a > 1$ и любых $x', x'' \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $a^{x'} \cdot a^{x''} = a^{x'+x''}$.* Доказательство.
   Из этого свойства, в частности, вытекает, что
   $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(x \in \mathbb{R})$.
2. **Свойство 2.** *Функция $y = a^x$ $(a > 1)$ строго возрастает на $\mathbb{R}$.* Доказательство.
3. **Свойство 3.** *Функция $y = a^x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.* Доказательство.
4. **Свойство 4.** *Для любого $a > 1$ и любых $x', x'' \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\left(a^{x'}\right)^{x''} = a^{x' \cdot x''}$.* Доказательство.
5. **Свойство 5.** *Если $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.* Доказательство.

Упражнение. На основании полученных свойств показательной функции постройте графики показательной функции при различных значениях $a > 0$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

1. **Свойство 1.** *Для любого $a > 1$ и любых $x', x'' \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $a^{x'} \cdot a^{x''} = a^{x'+x''}$.* Доказательство.
   Из этого свойства, в частности, вытекает, что $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(x \in \mathbb{R})$.
2. **Свойство 2.** *Функция $y = a^x$ $(a > 1)$ строго возрастает на $\mathbb{R}$.* Доказательство.
3. **Свойство 3.** *Функция $y = a^x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.* Доказательство.
4. **Свойство 4.** *Для любого $a > 1$ и любых $x', x'' \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\left(a^{x'}\right)^{x''} = a^{x' \cdot x''}$.* Доказательство.
5. **Свойство 5.** *Если $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.* Доказательство.

Упражнение. На основании полученных свойств показательной функции постройте графики показательной функции при различных значениях $a > 0$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

1. **Свойство 1.** *Для любого $a > 1$ и любых $x', x'' \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $a^{x'} \cdot a^{x''} = a^{x'+x''}$.* Доказательство.
   Из этого свойства, в частности, вытекает, что $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(x \in \mathbb{R})$.
2. **Свойство 2.** *Функция $y = a^x$ $(a > 1)$ строго возрастает на $\mathbb{R}$.* Доказательство.
3. **Свойство 3.** *Функция $y = a^x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.* Доказательство.
4. **Свойство 4.** *Для любого $a > 1$ и любых $x', x'' \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\left(a^{x'}\right)^{x''} = a^{x' \cdot x''}$.* Доказательство.
5. **Свойство 5.** *Если $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.* Доказательство.

Упражнение. На основании полученных свойств показательной функции постройте графики показательной функции при различных значениях $a > 0$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

1. **Свойство 1.** *Для любого $a > 1$ и любых $x', x'' \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $a^{x'} \cdot a^{x''} = a^{x'+x''}$.* Доказательство.
   Из этого свойства, в частности, вытекает, что $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(x \in \mathbb{R})$.
2. **Свойство 2.** *Функция $y = a^x$ $(a > 1)$ строго возрастает на $\mathbb{R}$.* Доказательство.
3. **Свойство 3.** *Функция $y = a^x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.* Доказательство.
4. **Свойство 4.** *Для любого $a > 1$ и любых $x', x'' \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\left(a^{x'}\right)^{x''} = a^{x' \cdot x''}$.* Доказательство.
5. **Свойство 5.** *Если $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.* Доказательство.

Упражнение. На основании полученных свойств показательной функции постройте графики показательной функции при различных значениях $a > 0$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Логарифмическая функция

Пусть $a > 1$. Тогда функция $f(x) = a^x$ строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$ и непрерывна.

По теореме об обратной функции у f существует непрерывная, строго возрастающая обратная функция f^{-1}, определенная на множестве положительных чисел, областью значений которой является все множество $\mathbb{R}$. Эта функция называется логарифмической.

При $0 < a < 1$ логарифмическая функция определяется аналогично. Она обладает такими же свойствами, за исключением того, что она строго убывающая.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Логарифмическая функция

Пусть $a > 1$. Тогда функция $f(x) = a^x$ строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$ и непрерывна.
По теореме об обратной функции у f существует непрерывная, строго возрастающая обратная функция f^{-1}, определенная на множестве положительных чисел, областью значений которой является все множество $\mathbb{R}$. Эта функция называется логарифмической.

При $0 < a < 1$ логарифмическая функция определяется аналогично. Она обладает такими же свойствами, за исключением того, что она строго убывающая.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Логарифмическая функция

Пусть $a > 1$. Тогда функция $f(x) = a^x$ строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$ и непрерывна.
По теореме об обратной функции у f существует непрерывная, строго возрастающая обратная функция f^{-1}, определенная на множестве положительных чисел, областью значений которой является все множество $\mathbb{R}$. Эта функция называется логарифмической.

При $0 < a < 1$ логарифмическая функция определяется аналогично. Она обладает такими же свойствами, за исключением того, что она строго убывающая.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Логарифмическая функция

Так как функции a^x и $\log_a x$ взаимно обратные, то имеют место следующие равенства:

$$a^{\log_a x} = x \ (x > 0) \quad \text{и} \quad \log_a a^x = x \ (x \in \mathbb{R}).$$

Отсюда и из свойств показательной функции вытекают следующие свойства логарифмов, в формулировке которых $a, b > 0, \ a, b \neq 1, \ x', x'', x > 0, \ \alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\log_a (x' \cdot x'') = \log_a x' + \log_a x''$;
2. $\log_a \frac{x'}{x''} = \log_a x' - \log_a x''$;
3. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Логарифмическая функция

Так как функции a^x и $\log_a x$ взаимно обратные, то имеют место следующие равенства:

$$a^{\log_a x} = x \ (x > 0) \quad \text{и} \quad \log_a a^x = x \ (x \in \mathbb{R}).$$

Отсюда и из свойств показательной функции вытекают следующие свойства логарифмов, в формулировке которых $a, b > 0, \ a, b \neq 1, \ x', x'', x > 0, \ \alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\log_a (x' \cdot x'') = \log_a x' + \log_a x''$;
2. $\log_a \frac{x'}{x''} = \log_a x' - \log_a x''$;
3. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Логарифмическая функция

Так как функции a^x и $\log_a x$ взаимно обратные, то имеют место следующие равенства:

$$a^{\log_a x} = x \ (x > 0) \quad \text{и} \quad \log_a a^x = x \ (x \in \mathbb{R}).$$

Отсюда и из свойств показательной функции вытекают следующие свойства логарифмов, в формулировке которых $a, b > 0,\ a, b \neq 1,\ x', x'', x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\log_a (x' \cdot x'') = \log_a x' + \log_a x''$;
2. $\log_a \frac{x'}{x''} = \log_a x' - \log_a x''$;
3. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Логарифмическая функция

Так как функции a^x и $\log_a x$ взаимно обратные, то имеют место следующие равенства:

$$a^{\log_a x} = x \ (x > 0) \quad \text{и} \quad \log_a a^x = x \ (x \in \mathbb{R}).$$

Отсюда и из свойств показательной функции вытекают следующие свойства логарифмов, в формулировке которых $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x', x'', x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\log_a (x' \cdot x'') = \log_a x' + \log_a x''$;
2. $\log_a \frac{x'}{x''} = \log_a x' - \log_a x''$;
3. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Логарифмическая функция

Так как функции a^x и $\log_a x$ взаимно обратные, то имеют место следующие равенства:

$$a^{\log_a x} = x \ (x > 0) \quad \text{и} \quad \log_a a^x = x \ (x \in \mathbb{R}).$$

Отсюда и из свойств показательной функции вытекают следующие свойства логарифмов, в формулировке которых $a, b > 0, \ a, b \neq 1, \ x', x'', x > 0, \ \alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\log_a (x' \cdot x'') = \log_a x' + \log_a x''$;
2. $\log_a \frac{x'}{x''} = \log_a x' - \log_a x''$;
3. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Логарифмическая функция

Так как функции a^x и $\log_a x$ взаимно обратные, то имеют место следующие равенства:

$$a^{\log_a x} = x \ (x > 0) \quad \text{и} \quad \log_a a^x = x \ (x \in \mathbb{R}).$$

Отсюда и из свойств показательной функции вытекают следующие свойства логарифмов, в формулировке которых $a, b > 0,\ a, b \neq 1,\ x', x'', x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\log_a (x' \cdot x'') = \log_a x' + \log_a x''$;
2. $\log_a \frac{x'}{x''} = \log_a x' - \log_a x''$;
3. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Логарифмическая функция

Часто в основании показательной функции берут число e. Функцию $y = \mathrm{e}^x$ называют экспоненциальной.

Обратную к ней функцию, т. е. логарифм по основанию e, называют натуральным логарифмом и обозначают $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.

Упражнение. На основании определения и свойств постройте графики логарифмической функции $y = \log_a x$ при различных значениях $a > 0,\ a \neq 1$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Логарифмическая функция

Часто в основании показательной функции берут число e. Функцию $y = \mathrm{e}^x$ называют экспоненциальной.

Обратную к ней функцию, т. е. логарифм по основанию e, называют натуральным логарифмом и обозначают $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.

Упражнение. На основании определения и свойств постройте графики логарифмической функции $y = \log_a x$ при различных значениях $a > 0,\ a \neq 1$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Логарифмическая функция

Часто в основании показательной функции берут число e. Функцию $y = \mathrm{e}^x$ называют экспоненциальной.

Обратную к ней функцию, т. е. логарифм по основанию e, называют натуральным логарифмом и обозначают $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.

Упражнение. На основании определения и свойств постройте графики логарифмической функции $y = \log_a x$ при различных значениях $a > 0, \ a \neq 1$.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степенная функция с действительным показателем

Ранее рассматривалась степенная функция $y = x^z$ с целым показателем z, а также функция $y = \sqrt[n]{x}$ для натуральных n.

Степенной функцией с действительным показателем $\alpha \in \mathbb{R}$ называется функция $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, определенная для $x > 0$.

Степенная функция непрерывна. Ее непрерывность вытекает из непрерывности показательной и логарифмической функций и из теоремы о непрерывности сложной функции.
При $\alpha > 0$ функция x^α строго возрастает от 0 до $+\infty$, а при $\alpha < 0$ – строго убывает от $+\infty$ до 0.

Упражнение. На основании определения и свойств постройте графики степенной функции $y = x^\alpha$ при различных значениях α.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степенная функция с действительным показателем

Ранее рассматривалась степенная функция $y = x^z$ с целым показателем z, а также функция $y = \sqrt[n]{x}$ для натуральных n.

Степенной функцией с действительным показателем $\alpha \in \mathbb{R}$ называется функция $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, определенная для $x > 0$.

Степенная функция непрерывна. Ее непрерывность вытекает из непрерывности показательной и логарифмической функций и из теоремы о непрерывности сложной функции.

При $\alpha > 0$ функция x^α строго возрастает от 0 до $+\infty$, а при $\alpha < 0$ – строго убывает от $+\infty$ до 0.

 **Упражнение.** На основании определения и свойств постройте графики степенной функции $y = x^\alpha$ при различных значениях α.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степенная функция с действительным показателем

Ранее рассматривалась степенная функция $y = x^z$ с целым показателем z, а также функция $y = \sqrt[n]{x}$ для натуральных n.

Степенной функцией с действительным показателем $\alpha \in \mathbb{R}$ называется функция $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$, определенная для $x > 0$.

Степенная функция непрерывна. Ее непрерывность вытекает из непрерывности показательной и логарифмической функций и из теоремы о непрерывности сложной функции.

При $\alpha > 0$ функция x^α строго возрастает от 0 до $+\infty$, а при $\alpha < 0$ – строго убывает от $+\infty$ до 0.

Упражнение. На основании определения и свойств постройте графики степенной функции $y = x^\alpha$ при различных значениях α.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степенная функция с действительным показателем

Ранее рассматривалась степенная функция $y = x^z$ с целым показателем z, а также функция $y = \sqrt[n]{x}$ для натуральных n.

Степенной функцией с действительным показателем $\alpha \in \mathbb{R}$ называется функция $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$, определенная для $x > 0$.

Степенная функция непрерывна. Ее непрерывность вытекает из непрерывности показательной и логарифмической функций и из теоремы о непрерывности сложной функции.
При $\alpha > 0$ функция x^α строго возрастает от 0 до $+\infty$, а при $\alpha < 0$ – строго убывает от $+\infty$ до 0.

Упражнение. На основании определения и свойств постройте графики степенной функции $y = x^\alpha$ при различных значениях α.

§9. Показательная и логарифмическая функции

Степенная функция с действительным показателем

Ранее рассматривалась степенная функция $y = x^z$ с целым показателем z, а также функция $y = \sqrt[n]{x}$ для натуральных n.

Степенной функцией с действительным показателем $\alpha \in \mathbb{R}$ называется функция $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$, определенная для $x > 0$.

Степенная функция непрерывна. Ее непрерывность вытекает из непрерывности показательной и логарифмической функций и из теоремы о непрерывности сложной функции.
При $\alpha > 0$ функция x^α строго возрастает от 0 до $+\infty$, а при $\alpha < 0$ – строго убывает от $+\infty$ до 0.

Упражнение. На основании определения и свойств постройте графики степенной функции $y = x^\alpha$ при различных значениях α.

§10. Второй замечательный предел

§10. Второй замечательный предел

§10. Второй замечательный предел

Вторым замечательным пределом принято называть следующий предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

или, что то же самое,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.$$

Докажем, что этот предел равен e.

Доказательство.

§10. Второй замечательный предел

Вторым замечательным пределом принято называть следующий предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

или, что то же самое,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.$$

Докажем, что этот предел равен e.

Доказательство.

§10. Второй замечательный предел

Следствие 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Доказательство.

Следствие 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0).$$

Доказательство.

Используя следствия 1 и 2, для $\alpha\in\mathbb{R}$ получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha,$$

т. е.

Следствие 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha\quad(\alpha\in\mathbb{R}).$$

§10. Второй замечательный предел

Следствие 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Доказательство.

Следствие 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0).$$

Доказательство.

Используя следствия 1 и 2, для $\alpha\in\mathbb{R}$ получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha,$$

т. е.

Следствие 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha\quad(\alpha\in\mathbb{R}).$$

§10. Второй замечательный предел

Следствие 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Доказательство.

Следствие 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0).$$

Доказательство.

Используя следствия 1 и 2, для $\alpha\in\mathbb{R}$ получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha,$$

т. е.

Следствие 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha\quad(\alpha\in\mathbb{R}).$$

§10. Второй замечательный предел

Сравнение логарифмической, степенной и показательной функций.

Покажем, что справедливы следующие равенства:

1) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \quad (\alpha > 0,\ a > 1);$$ Доказательство.

2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0 \quad (a > 1,\ \alpha > 0).$$ Доказательство.

§10. Второй замечательный предел

Сравнение логарифмической, степенной и показательной функций.

Покажем, что справедливы следующие равенства:

1) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=0 \quad (\alpha>0,\ a>1);$$ Доказательство.

2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^{\alpha}}=0 \quad (a>1,\ \alpha>0).$$ Доказательство.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Пусть функция f непрерывна на некотором множестве E. Это означает, что f непрерывна в каждой точке $x_0 \in E$, т. е. для каждой $x_0 \in E$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее, вообще говоря, от x_0 и от ε, что для всех $x \in E$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Иначе говоря, если x близко к x_0, то и $f(x)$ мало отличается от $f(x_0)$. Степень близости x к x_0 определяется числом δ, которое зависит от точки x_0, т. е. в каждой точке x_0 имеется своя мера близости x к x_0.

В ряде задач требуется, чтобы степень близости аргументов, обеспечивающая близость значений функции, не зависела от того, где находятся эти аргументы. Это свойство выражает равномерную непрерывность функции.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Пусть функция f непрерывна на некотором множестве E. Это означает, что f непрерывна в каждой точке $x_0 \in E$, т. е. для каждой $x_0 \in E$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее, вообще говоря, от x_0 и от ε, что для всех $x \in E$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Иначе говоря, если x близко к x_0, то и $f(x)$ мало отличается от $f(x_0)$. Степень близости x к x_0 определяется числом δ, которое зависит от точки x_0, т. е. в каждой точке x_0 имеется своя мера близости x к x_0.

В ряде задач требуется, чтобы степень близости аргументов, обеспечивающая близость значений функции, не зависела от того, где находятся эти аргументы. Это свойство выражает равномерную непрерывность функции.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Пусть функция f непрерывна на некотором множестве E. Это означает, что f непрерывна в каждой точке $x_0 \in E$, т. е. для каждой $x_0 \in E$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее, вообще говоря, от x_0 и от ε, что для всех $x \in E$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Иначе говоря, если x близко к x_0, то и $f(x)$ мало отличается от $f(x_0)$. Степень близости x к x_0 определяется числом δ, которое зависит от точки x_0, т. е. в каждой точке x_0 имеется своя мера близости x к x_0.

В ряде задач требуется, чтобы степень близости аргументов, обеспечивающая близость значений функции, не зависела от того, где находятся эти аргументы. Это свойство выражает равномерную непрерывность функции.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Определение. Функция f, определенная на промежутке I, называется равномерно непрерывной на этом промежутке, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, что для всех $x', x'' \in I$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Это определение означает, что для любой пары близких точек соответствующие значения функции мало отличаются друг от друга.

Отметим, что понятие равномерной непрерывности имеет смысл только на некотором множестве, в то время как свойство непрерывности может рассматриваться в отдельно взятой точке области определения функции.

Полезно сравнить определения непрерывности функции f на множестве E и равномерной непрерывности на этом же множестве, записанные в кванторах.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Определение. Функция f, определенная на промежутке I, называется равномерно непрерывной на этом промежутке, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, что для всех $x', x'' \in I$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Это определение означает, что для любой пары близких точек соответствующие значения функции мало отличаются друг от друга.

Отметим, что понятие равномерной непрерывности имеет смысл только на некотором множестве, в то время как свойство непрерывности может рассматриваться в отдельно взятой точке области определения функции.

Полезно сравнить определения непрерывности функции f на множестве E и равномерной непрерывности на этом же множестве, записанные в кванторах.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Определение. Функция f, определенная на промежутке I, называется равномерно непрерывной на этом промежутке, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, что для всех $x', x'' \in I$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Это определение означает, что для любой пары близких точек соответствующие значения функции мало отличаются друг от друга.
Отметим, что понятие равномерной непрерывности имеет смысл только на некотором множестве, в то время как свойство непрерывности может рассматриваться в отдельно взятой точке области определения функции.

Полезно сравнить определения непрерывности функции f на множестве E и равномерной непрерывности на этом же множестве, записанные в кванторах.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Определение. Функция f, определенная на промежутке I, называется равномерно непрерывной на этом промежутке, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, что для всех $x', x'' \in I$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Это определение означает, что для любой пары близких точек соответствующие значения функции мало отличаются друг от друга.
Отметим, что понятие равномерной непрерывности имеет смысл только на некотором множестве, в то время как свойство непрерывности может рассматриваться в отдельно взятой точке области определения функции.

Полезно сравнить определения непрерывности функции f на множестве E и равномерной непрерывности на этом же множестве, записанные в кванторах.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Определение непрерывности выглядит так:

$$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall y \in E\ |x - y| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

а определение равномерной непрерывности – так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in E\ \forall y \in E\ |x - y| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Различие в этих двух определениях состоит в том, что квантор $\forall x \in E$ изменяет свое положение. Это означает, что в определении непрерывности δ зависит как от ε, так и от x, в то время, как в определении равномерной непрерывности δ зависит только лишь от ε.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Определение непрерывности выглядит так:

$$\forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall y \in E \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

а определение равномерной непрерывности – так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in E \ \forall y \in E \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Различие в этих двух определениях состоит в том, что квантор $\forall x \in E$ изменяет свое положение. Это означает, что в определении непрерывности δ зависит как от ε, так и от x, в то время, как в определении равномерной непрерывности δ зависит только лишь от ε.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Определение непрерывности выглядит так:

$$\forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall y \in E \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

а определение равномерной непрерывности – так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in E \ \forall y \in E \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Различие в этих двух определениях состоит в том, что квантор $\forall x \in E$ изменяет свое положение. Это означает, что в определении непрерывности δ зависит как от ε, так и от x, в то время, как в определении равномерной непрерывности δ зависит только лишь от ε.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Определение непрерывности выглядит так:

$$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall y \in E\ |x - y| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

а определение равномерной непрерывности – так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in E\ \forall y \in E\ |x - y| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Различие в этих двух определениях состоит в том, что квантор $\forall x \in E$ изменяет свое положение. Это означает, что в определении непрерывности δ зависит как от ε, так и от x, в то время, как в определении равномерной непрерывности δ зависит только лишь от ε.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Пример 1.

Пусть $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Эта функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

В самом деле,

$$\left|\sin x' - \sin x''\right| = \left|2\sin\frac{x'-x''}{2}\cos\frac{x'+x''}{2}\right| \leq |x'-x''| < \varepsilon,$$

если только $|x'-x''| < \delta \equiv \varepsilon$.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Пример 1.

Пусть $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Эта функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

В самом деле,

$$\left|\sin x' - \sin x''\right| = \left|2 \sin \frac{x' - x''}{2} \cos \frac{x' + x''}{2}\right| \leq \left|x' - x''\right| < \varepsilon,$$

если только $|x' - x''| < \delta \equiv \varepsilon$.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Пример 2.

Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на множестве $(0, +\infty)$ (т. е. в каждой точке $x_0 \in (0, +\infty)$), но не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$.

В самом деле, $f\left(\frac{1}{n+1}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = n + 1 - n = 1$, хотя точки $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ могут быть сколь угодно близкими.

Точнее, мы показали, что существует $\varepsilon_0 = 1$, такое, что для любого $\delta > 0$ существуют $x' = \frac{1}{n+1}$ и $x'' = \frac{1}{n}$, такие, что $|x' - x''| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} < \delta$ (для этого достаточно выбрать n таким, что $n > \frac{1}{\delta}$) и $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0 = 1$.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Пример 2.

Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на множестве $(0, +\infty)$ (т. е. в каждой точке $x_0 \in (0, +\infty)$), но не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$.

В самом деле, $f\left(\frac{1}{n+1}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = n + 1 - n = 1$, хотя точки $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ могут быть сколь угодно близкими.

Точнее, мы показали, что существует $\varepsilon_0 = 1$, такое, что для любого $\delta > 0$ существуют $x' = \frac{1}{n+1}$ и $x'' = \frac{1}{n}$, такие, что $|x' - x''| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} < \delta$ (для этого достаточно выбрать n таким, что $n > \frac{1}{\delta}$) и $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0 = 1$.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Пример 2.

Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на множестве $(0, +\infty)$ (т. е. в каждой точке $x_0 \in (0, +\infty)$), но не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$.

В самом деле, $f\left(\frac{1}{n+1}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = n + 1 - n = 1$, хотя точки $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ могут быть сколь угодно близкими.

Точнее, мы показали, что существует $\varepsilon_0 = 1$, такое, что для любого $\delta > 0$ существуют $x' = \frac{1}{n+1}$ и $x'' = \frac{1}{n}$, такие, что $|x' - x''| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} < \delta$ (для этого достаточно выбрать n таким, что $n > \frac{1}{\delta}$) и $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0 = 1$.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

В этом примере функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$, т. к. двум близким точкам вблизи нуля могут соответствовать далекие значения функции.

Если же рассмотреть сужение функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на множество $[\delta_0, +\infty)$, где фиксированное $\delta_0 > 0$, то полученная функция будет равномерно непрерывной на $[\delta_0, +\infty)$.

В самом деле, поскольку $x', x'' \geq \delta_0$, то

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{x' \cdot x''} \leq \frac{1}{\delta_0^2}\,|x' - x''| < \varepsilon,$$

если только $|x' - x''| < \delta \equiv \varepsilon \cdot \delta_0^2$.

Может показаться, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$ лишь потому, что она неограничена на этом множестве. На самом деле это не так, что показывает следующий пример.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

В этом примере функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$, т. к. двум близким точкам вблизи нуля могут соответствовать далекие значения функции.
Если же рассмотреть сужение функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на множество $[\delta_0, +\infty)$, где фиксированное $\delta_0 > 0$, то полученная функция будет равномерно непрерывной на $[\delta_0, +\infty)$.
В самом деле, поскольку $x', x'' \geq \delta_0$, то

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{x' \cdot x''} \leq \frac{1}{\delta_0^2}\,|x' - x''| < \varepsilon,$$

если только $|x' - x''| < \delta \equiv \varepsilon \cdot \delta_0^2$.

Может показаться, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$ лишь потому, что она неограничена на этом множестве. На самом деле это не так, что показывает следующий пример.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

В этом примере функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$, т. к. двум близким точкам вблизи нуля могут соответствовать далекие значения функции.
Если же рассмотреть сужение функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на множество $[\delta_0, +\infty)$, где фиксированное $\delta_0 > 0$, то полученная функция будет равномерно непрерывной на $[\delta_0, +\infty)$.
В самом деле, поскольку $x', x'' \geq \delta_0$, то

$$\left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| = \frac{|x' - x''|}{x' \cdot x''} \leq \frac{1}{\delta_0^2} \left| x' - x'' \right| < \varepsilon,$$

если только $|x' - x''| < \delta \equiv \varepsilon \cdot \delta_0^2$.

Может показаться, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$ лишь потому, что она неограничена на этом множестве. На самом деле это не так, что показывает следующий пример.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

В этом примере функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$, т. к. двум близким точкам вблизи нуля могут соответствовать далекие значения функции.
Если же рассмотреть сужение функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на множество $[\delta_0, +\infty)$, где фиксированное $\delta_0 > 0$, то полученная функция будет равномерно непрерывной на $[\delta_0, +\infty)$.
В самом деле, поскольку $x', x'' \geq \delta_0$, то

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{x' \cdot x''} \leq \frac{1}{\delta_0^2}\left|x' - x''\right| < \varepsilon,$$

если только $|x' - x''| < \delta \equiv \varepsilon \cdot \delta_0^2$.

Может показаться, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$ лишь потому, что она неограничена на этом множестве. На самом деле это не так, что показывает следующий пример.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Пример 3.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(0 < x < +\infty)$.

Эта функция ограничена, непрерывна на $(0, +\infty)$, но не является равномерно непрерывной на этом множестве.

В самом деле, легко можно подобрать значения $x' > 0$ и $x'' > 0$ так, чтобы $|x' - x''|$ было меньшим любого наперед заданного $\delta > 0$ и, вместе с тем, $\sin\frac{1}{x'} = 1$, $\sin\frac{1}{x''} = -1$.

Тогда $\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''} = 2$, т. е. существует $\varepsilon_0 = 2$, такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся $x', x'' > 0$, такие, что $|x' - x''| < \delta$ и $\left|\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''}\right| \geq \varepsilon_0 = 2$.

Это и означает, что функция $\sin\frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Пример 3.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(0 < x < +\infty)$.
Эта функция ограничена, непрерывна на $(0, +\infty)$, но не является равномерно непрерывной на этом множестве.
В самом деле, легко можно подобрать значения $x' > 0$ и $x'' > 0$ так, чтобы $|x' - x''|$ было меньшим любого наперед заданного $\delta > 0$ и, вместе с тем, $\sin\frac{1}{x'} = 1$, $\sin\frac{1}{x''} = -1$.
Тогда $\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''} = 2$, т. е. существует $\varepsilon_0 = 2$, такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся $x', x'' > 0$, такие, что $|x' - x''| < \delta$ и $\left|\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''}\right| \geq \varepsilon_0 = 2$.
Это и означает, что функция $\sin\frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Пример 3.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(0 < x < +\infty)$.
Эта функция ограничена, непрерывна на $(0, +\infty)$, но не является равномерно непрерывной на этом множестве.
В самом деле, легко можно подобрать значения $x' > 0$ и $x'' > 0$ так, чтобы $|x' - x''|$ было меньшим любого наперед заданного $\delta > 0$ и, вместе с тем, $\sin\frac{1}{x'} = 1$, $\sin\frac{1}{x''} = -1$.
Тогда $\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''} = 2$, т. е. существует $\varepsilon_0 = 2$, такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся $x', x'' > 0$, такие, что $|x' - x''| < \delta$ и $\left|\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''}\right| \geq \varepsilon_0 = 2$.
Это и означает, что функция $\sin\frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Пример 3.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(0 < x < +\infty)$.
Эта функция ограничена, непрерывна на $(0, +\infty)$, но не является равномерно непрерывной на этом множестве.
В самом деле, легко можно подобрать значения $x' > 0$ и $x'' > 0$ так, чтобы $|x' - x''|$ было меньшим любого наперед заданного $\delta > 0$ и, вместе с тем, $\sin\frac{1}{x'} = 1$, $\sin\frac{1}{x''} = -1$.
Тогда $\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''} = 2$, т. е. существует $\varepsilon_0 = 2$, такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся $x', x'' > 0$, такие, что $|x' - x''| < \delta$ и $\left|\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''}\right| \geq \varepsilon_0 = 2$.
Это и означает, что функция $\sin\frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Пример 3.

Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(0 < x < +\infty)$.
Эта функция ограничена, непрерывна на $(0, +\infty)$, но не является равномерно непрерывной на этом множестве.
В самом деле, легко можно подобрать значения $x' > 0$ и $x'' > 0$ так, чтобы $|x' - x''|$ было меньшим любого наперед заданного $\delta > 0$ и, вместе с тем, $\sin\frac{1}{x'} = 1$, $\sin\frac{1}{x''} = -1$.
Тогда $\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''} = 2$, т. е. существует $\varepsilon_0 = 2$, такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся $x', x'' > 0$, такие, что $|x' - x''| < \delta$ и $\left|\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''}\right| \geq \varepsilon_0 = 2$.
Это и означает, что функция $\sin\frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Итак, рассмотренные примеры показывают, что не каждая непрерывная на некотором множестве функция является равномерно непрерывной на этом множестве.

Обратное же, очевидно, всегда имеет место, т. е. из равномерной непрерывности функции на некотором множестве вытекает непрерывность функции в каждой точке этого множества (т. е. непрерывность на множестве).
Другими словами, равномерная непрерывность – более сильное требование, нежели непрерывность.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Итак, рассмотренные примеры показывают, что не каждая непрерывная на некотором множестве функция является равномерно непрерывной на этом множестве.

Обратное же, очевидно, всегда имеет место, т. е. из равномерной непрерывности функции на некотором множестве вытекает непрерывность функции в каждой точке этого множества (т. е. непрерывность на множестве).
Другими словами, равномерная непрерывность – более сильное требование, нежели непрерывность.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Итак, рассмотренные примеры показывают, что не каждая непрерывная на некотором множестве функция является равномерно непрерывной на этом множестве.

Обратное же, очевидно, всегда имеет место, т. е. из равномерной непрерывности функции на некотором множестве вытекает непрерывность функции в каждой точке этого множества (т. е. непрерывность на множестве).
Другими словами, равномерная непрерывность – более сильное требование, нежели непрерывность.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Следующая теорема дает условие на область определения функции, при котором из непрерывности функции на этом множестве следует ее равномерная непрерывность.

Теорема Кантора.

Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Следующая теорема дает условие на область определения функции, при котором из непрерывности функции на этом множестве следует ее равномерная непрерывность.

Теорема Кантора.

Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство.

§11. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Следующая теорема дает условие на область определения функции, при котором из непрерывности функции на этом множестве следует ее равномерная непрерывность.

Теорема Кантора.

Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Определение. Пусть функции f и g отличны от нуля в проколотой окрестности точки x_0 (равной, быть может, $+\infty$, $-\infty$ или ∞). Говорят, что функции f и g эквивалентны при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Обозначают это так: $f(x) \sim g(x) \ \ (x \to x_0)$.

В терминах этого определения найденные ранее пределы можно переписать следующим образом (все соотношения формулируются для случая $x \to 0$):

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Определение. Пусть функции f и g отличны от нуля в проколотой окрестности точки x_0 (равной, быть может, $+\infty$, $-\infty$ или ∞). Говорят, что функции f и g эквивалентны при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Обозначают это так:
$f(x) \sim g(x) \;\; (x \to x_0)$.

В терминах этого определения найденные ранее пределы можно переписать следующим образом (все соотношения формулируются для случая $x \to 0$):

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

$$\sin x \sim x, \qquad \operatorname{tg} x \sim x,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \qquad \arcsin x \sim x,$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x, \qquad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a,$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}, \qquad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x.$$

Эти соотношения останутся в силе, если в них вместо переменной x записать отличную от нуля функцию $\varphi(x)$, стремящуюся к нулю при $x \to x_0$.

Например, $\sin x^2 \sim x^2$ $(x \to 0)$, $\operatorname{tg} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ $(x \to \infty)$,
$\operatorname{tg} \sin(x-1)^2 \sim \sin(x-1)^2 \sim (x-1)^2$ $(x \to 1)$.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

$$\sin x \sim x, \qquad \operatorname{tg} x \sim x,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \qquad \arcsin x \sim x,$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x, \qquad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a,$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}, \qquad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x.$$

Эти соотношения останутся в силе, если в них вместо переменной x записать отличную от нуля функцию $\varphi(x)$, стремящуюся к нулю при $x \to x_0$.

Например, $\sin x^2 \sim x^2$ $(x \to 0)$, $\operatorname{tg} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ $(x \to \infty)$, $\operatorname{tg} \sin(x-1)^2 \sim \sin(x-1)^2 \sim (x-1)^2$ $(x \to 1)$.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Теорема (применение эквивалентных функций для нахождения пределов).

Пусть $f(x) \sim f_1(x)$ *и* $g(x) \sim g_1(x)$ *при* $x \to x_0$ *и пусть существует* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$. *Тогда существует* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

Доказанная теорема означает, что при вычислении пределов в произведении и в частном функции можно заменять эквивалентными. При этом существование предела и его величина не изменяются.

Пример.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x \cdot (e^x - 1)}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{\frac{x^2}{2}} = 2.$$

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Теорема (применение эквивалентных функций для нахождения пределов).

Пусть $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to x_0$ и пусть существует $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

Доказанная теорема означает, что при вычислении пределов в произведении и в частном функции можно заменять эквивалентными. При этом существование предела и его величина не изменяются.

Пример.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x \cdot (e^x - 1)}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{\frac{x^2}{2}} = 2.$$

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Теорема (применение эквивалентных функций для нахождения пределов).

Пусть $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to x_0$ и пусть существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

Доказанная теорема означает, что при вычислении пределов в произведении и в частном функции можно заменять эквивалентными. При этом существование предела и его величина не изменяются.

Пример.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x \cdot (e^x - 1)}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{\frac{x^2}{2}} = 2.$$

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Теорема (применение эквивалентных функций для нахождения пределов).

Пусть $f(x) \sim f_1(x)$ *и* $g(x) \sim g_1(x)$ *при* $x \to x_0$ *и пусть существует* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$. *Тогда существует* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

Доказанная теорема означает, что при вычислении пределов в произведении и в частном функции можно заменять эквивалентными. При этом существование предела и его величина не изменяются.

Пример.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x \cdot (e^x - 1)}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{\frac{x^2}{2}} = 2.$$

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых.

Символами Ландау называются символы $\overline{o}$ и $\underline{O}$.

Определение. Пусть функции f и g определены в проколотой окрестности точки x_0 (конечного или бесконечного) и $g(x) \neq 0$. Говорят, что $f(x)$ является $\overline{o}$-малой относительно $g(x)$ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Обозначают это так: $f(x) = \overline{o}(g(x))\ \ (x \to x_0)$.

Если $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ и $f(x) = \overline{o}(g(x))$ при $x \to x_0$, то говорят, что $f(x)$ является **бесконечно малой более высокого порядка**, чем $g(x)$, при $x \to x_0$.

Если же $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ и $f(x) = \overline{o}(g(x))$ при $x \to x_0$, то говорят, что $g(x)$ **стремится к бесконечности быстрее**, чем $f(x)$, при $x \to x_0$.

Например, $\sin x^2 = \overline{o}(x)\ (x \to 0)$, $\operatorname{tg}^3 x \cdot \sin \frac{1}{x} = \overline{o}\left(x^2\right)\ \ (x \to 0)$.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых.

Символами Ландау называются символы $\overline{o}$ и $\underline{O}$.

Определение. Пусть функции f и g определены в проколотой окрестности точки x_0 (конечного или бесконечного) и $g(x) \neq 0$. Говорят, что $f(x)$ является $\overline{o}$-малой относительно $g(x)$ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Обозначают это так: $f(x) = \overline{o}(g(x))$ $(x \to x_0)$.

Если $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ и $f(x) = \overline{o}(g(x))$ при $x \to x_0$, то говорят, что $f(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $g(x)$, при $x \to x_0$.

Если же $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ и $f(x) = \overline{o}(g(x))$ при $x \to x_0$, то говорят, что $g(x)$ стремится к бесконечности быстрее, чем $f(x)$, при $x \to x_0$.

Например, $\sin x^2 = \overline{o}(x)$ $(x \to 0)$, $\operatorname{tg}^3 x \cdot \sin \frac{1}{x} = \overline{o}\left(x^2\right)$ $(x \to 0)$.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых.

Символами Ландау называются символы $\overline{o}$ и $\underline{O}$.

Определение. Пусть функции f и g определены в проколотой окрестности точки x_0 (конечного или бесконечного) и $g(x) \neq 0$. Говорят, что $f(x)$ является $\overline{o}$-малой относительно $g(x)$ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
Обозначают это так: $f(x) = \overline{o}(g(x))$ $(x \to x_0)$.

Если $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ и $f(x) = \overline{o}(g(x))$ при $x \to x_0$, то говорят, что $f(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $g(x)$, при $x \to x_0$.

Если же $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ и $f(x) = \overline{o}(g(x))$ при $x \to x_0$, то говорят, что $g(x)$ стремится к бесконечности быстрее, чем $f(x)$, при $x \to x_0$.

Например, $\sin x^2 = \overline{o}(x)$ $(x \to 0)$, $\operatorname{tg}^3 x \cdot \sin \frac{1}{x} = \overline{o}\left(x^2\right)$ $(x \to 0)$.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых.

Символами Ландау называются символы $\overline{o}$ и $\underline{O}$.

Определение. Пусть функции f и g определены в проколотой окрестности точки x_0 (конечного или бесконечного) и $g(x) \neq 0$. Говорят, что $f(x)$ является $\overline{o}$-малой относительно $g(x)$ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
Обозначают это так: $f(x) = \overline{o}(g(x))$ $(x \to x_0)$.

Если $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ и $f(x) = \overline{o}(g(x))$ при $x \to x_0$, то говорят, что $f(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $g(x)$, при $x \to x_0$.
Если же $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ и $f(x) = \overline{o}(g(x))$ при $x \to x_0$, то говорят, что $g(x)$ стремится к бесконечности быстрее, чем $f(x)$, при $x \to x_0$.

Например, $\sin x^2 = \overline{o}(x)$ $(x \to 0)$, $\operatorname{tg}^3 x \cdot \sin \frac{1}{x} = \overline{o}\left(x^2\right)$ $(x \to 0)$.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Определение. Пусть функции f и g определены в проколотой окрестности x_0 (конечного или бесконечного) и $g(x) \neq 0$. Говорят, что $f(x)$ является $\underline{O}$-большим относительно $g(x)$ при $x \to x_0$, если существует такая проколотая окрестность U_δ точки x_0, что для всех $x \in U_\delta$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$, где постоянная c не зависит от x (но может зависеть от окрестности U_δ).
Обозначают это так: $f(x) = \underline{O}(g(x))$ $(x \to x_0)$.

Например, $x^2 + 2x^3 = \underline{O}\left(x^2\right)$ $(x \to 0)$,
$x^2 + 2x^3 = \underline{O}\left(x^3\right)$ $(x \to \infty)$.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Определение. Пусть функции f и g определены в проколотой окрестности x_0 (конечного или бесконечного) и $g(x) \neq 0$.
Говорят, что $f(x)$ является $\underline{O}$-большим относительно $g(x)$ при $x \to x_0$, если существует такая проколотая окрестность U_δ точки x_0, что для всех $x \in U_\delta$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$, где постоянная c не зависит от x (но может зависеть от окрестности U_δ).
Обозначают это так: $f(x) = \underline{O}(g(x))\ \ (x \to x_0)$.

Например, $x^2 + 2x^3 = \underline{O}\left(x^2\right)\ \ (x \to 0)$,
$x^2 + 2x^3 = \underline{O}\left(x^3\right)\ \ (x \to \infty)$.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Теорема.

Пусть существует $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = K$, *где* $0 \le K < +\infty$. *Тогда* $f(x) = \underline{O}(g(x))$.

Доказательство.

Теорема (критерий эквивалентности функций).

Для того чтобы отличные от нуля функции f *и* g *были эквивалентными при* $x \to x_0$, *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство* $f(x) = g(x) + \overline{o}(g(x))$ $(x \to x_0)$.

Доказательство.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Теорема.

Пусть существует $\lim\limits_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = K$, *где* $0 \le K < +\infty$. *Тогда* $f(x) = \underline{O}(g(x))$.

Доказательство.

Теорема (критерий эквивалентности функций).

Для того чтобы отличные от нуля функции f *и* g *были эквивалентными при* $x \to x_0$, *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство* $f(x) = g(x) + \overline{o}(g(x))$ $(x \to x_0)$.

Доказательство.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Теорема.

Пусть существует $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = K$*, где* $0 \le K < +\infty$*. Тогда* $f(x) = \underline{O}(g(x))$.

Доказательство.

Теорема (критерий эквивалентности функций).

Для того чтобы отличные от нуля функции f *и* g *были эквивалентными при* $x \to x_0$*, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство* $f(x) = g(x) + \overline{o}(g(x))$ $(x \to x_0)$.

Доказательство.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Теорема.

Пусть существует $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = K$, *где* $0 \le K < +\infty$. *Тогда* $f(x) = \underline{O}(g(x))$.

Доказательство.

Теорема (критерий эквивалентности функций).

Для того чтобы отличные от нуля функции f *и* g *были эквивалентными при* $x \to x_0$, *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство* $f(x) = g(x) + \overline{o}(g(x))$ $(x \to x_0)$.

Доказательство.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Используя доказанный критерий эквивалентности, набор эквивалентных функций, выписанный нами ранее, можно переписать в следующем виде (всюду $x \to 0$):

$$\sin x = x + \overline{o}(x), \qquad \operatorname{tg} x = x + \overline{o}(x),$$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + \overline{o}(x^2), \qquad \arcsin x = x + \overline{o}(x),$$

$$\operatorname{arctg} x = x + \overline{o}(x), \qquad a^x - 1 = x \ln a + \overline{o}(x),$$

$$\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + \overline{o}(x), \qquad (1+x)^\alpha - 1 = \alpha \cdot x + \overline{o}(x).$$

С помощью этой таблицы можно вычислять пределы. Покажем это на примерах.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Используя доказанный критерий эквивалентности, набор эквивалентных функций, выписанный нами ранее, можно переписать в следующем виде (всюду $x \to 0$):

$$\sin x = x + \overline{o}(x), \qquad \operatorname{tg} x = x + \overline{o}(x),$$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + \overline{o}(x^2), \qquad \arcsin x = x + \overline{o}(x),$$

$$\operatorname{arctg} x = x + \overline{o}(x), \qquad a^x - 1 = x \ln a + \overline{o}(x),$$

$$\log_a(1 + x) = \frac{x}{\ln a} + \overline{o}(x), \qquad (1 + x)^\alpha - 1 = \alpha \cdot x + \overline{o}(x).$$

С помощью этой таблицы можно вычислять пределы. Покажем это на примерах.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\sqrt[3]{1+x}}{2\,\mathrm{arctg}\,x-\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)}{2\,\mathrm{arctg}\,x-\arcsin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\overline{o}(x)-\left(\frac{1}{3}x+\overline{o}(x)\right)}{2\left(x+\overline{o}(x)\right)-\left(x+\overline{o}(x)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x+\overline{o}(x)}{x+\overline{o}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}+\frac{\overline{o}(x)}{x}}{1+\frac{\overline{o}(x)}{x}}=\frac{2}{3}.$$

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Пример 2. Раскрытие неопределенности $[1^\infty]$.

Пусть $\alpha(x) \to 0$ $(\alpha(x) \neq 0)$, $\beta(x) \to \infty$ $(x \to x_0)$. Тогда, в силу непрерывности показательной функции,

$$\lim_{x \to x_0} (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \mathrm{e}^{\beta(x) \ln(1+\alpha(x))} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x)(\alpha(x) + \overline{o}(\alpha(x)))}.$$

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Продолжение примера 2. Раскрытие неопределенности $[1^\infty]$.

Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)\cdot\beta(x) = A$, то

$$\lim_{x\to x_0} \beta(x)\left(\alpha(x) + \overline{o}(\alpha(x))\right) = \lim_{x\to x_0} \beta(x)\cdot\alpha(x)\cdot\frac{\alpha(x)+\overline{o}(\alpha(x))}{\alpha(x)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \beta(x)\cdot\alpha(x)\left(1+\frac{\overline{o}(\alpha(x))}{\alpha(x)}\right) = A.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to x_0} (1+\alpha(x))^{\beta(x)} = \mathrm{e}^A.$$

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Упражнение. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = \infty$.

Доказать, что
$\lim\limits_{x\to x_0} (1+\alpha(x))^{\beta(x)} = 0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)\cdot\beta(x) = -\infty$.

Если же $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)\cdot\beta(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} (1+\alpha(x))^{\beta(x)} = +\infty$.

§12. Эквивалентные функции. Символы Ландау

Упражнение. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = \infty$.

Доказать, что
$\lim\limits_{x\to x_0} (1+\alpha(x))^{\beta(x)} = 0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)\cdot\beta(x) = -\infty$.

Если же $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)\cdot\beta(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} (1+\alpha(x))^{\beta(x)} = +\infty$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Далее содержатся

вспомогательные материалы

Доказательство теоремы о сохранении знака.

Пусть $f(x_0) > 0$. Положим $\varepsilon = f(x_0)/2$ и найдем такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Но тогда для указанных x будет справедливо неравенство

$$0 < \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

и тем самым теорема доказана.

Доказательство теоремы о сохранении знака.

Пусть $f(x_0) > 0$. Положим $\varepsilon = f(x_0)/2$ и найдем такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Но тогда для указанных x будет справедливо неравенство

$$0 < \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

и тем самым теорема доказана.

Доказательство теоремы о непрерывности композиции.

Доказательство этой теоремы очень похоже на доказательство теоремы о замене переменной в пределах.

Запишем в кванторах условия теоремы:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta > 0 :\ \forall y \in (c, d)\ \ |y - y_0| < \eta\ \Rightarrow\ |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon,$$

$$\forall\eta > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in (a, b)\ \ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |g(x) - g(x_0)| < \eta.$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь первым условием, найдем η, а для найденного η из второго условия находим δ.

Пусть $x \in (a, b)$ такое, что $|x - x_0| < \delta$. Тогда $|g(x) - g(x_0)| < \eta$, а отсюда следует, что

$$|\varphi(x) = \varphi(x_0)| = |f(g(x)) - f(g(x_0))| = |f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$.

Это означает, что функция φ непрерывна в точке x_0.

Доказательство теоремы о непрерывности композиции.

Доказательство этой теоремы очень похоже на доказательство теоремы о замене переменной в пределах.
Запишем в кванторах условия теоремы:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0:\ \forall y \in (c, d)\ |y - y_0| < \eta\ \Rightarrow\ |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon,$$

$$\forall \eta > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall x \in (a, b)\ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |g(x) - g(x_0)| < \eta.$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь первым условием, найдем η, а для найденного η из второго условия находим δ.
Пусть $x \in (a, b)$ такое, что $|x - x_0| < \delta$. Тогда $|g(x) - g(x_0)| < \eta$, а отсюда следует, что

$$|\varphi(x) = \varphi(x_0)| = |f(g(x)) - f(g(x_0))| = |f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$.
Это означает, что функция φ непрерывна в точке x_0. ∎

Доказательство теоремы о непрерывности композиции.

Доказательство этой теоремы очень похоже на доказательство теоремы о замене переменной в пределах.
Запишем в кванторах условия теоремы:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 : \ \forall y \in (c, d)\ \ |y - y_0| < \eta \ \Rightarrow \ |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon,$$

$$\forall \eta > 0\ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in (a, b)\ \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |g(x) - g(x_0)| < \eta.$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь первым условием, найдем η, а для найденного η из второго условия находим δ.
Пусть $x \in (a, b)$ такое, что $|x - x_0| < \delta$. Тогда $|g(x) - g(x_0)| < \eta$, а отсюда следует, что

$$|\varphi(x) = \varphi(x_0)| = |f(g(x)) - f(g(x_0))| = |f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$.
Это означает, что функция φ непрерывна в точке x_0.

Доказательство теоремы о непрерывности композиции.

Доказательство этой теоремы очень похоже на доказательство теоремы о замене переменной в пределах.
Запишем в кванторах условия теоремы:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta > 0 :\ \forall y \in (c, d)\ \ |y - y_0| < \eta\ \Rightarrow\ |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon,$$

$$\forall\eta > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in (a, b)\ \ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |g(x) - g(x_0)| < \eta.$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь первым условием, найдем η, а для найденного η из второго условия находим δ.
Пусть $x \in (a, b)$ такое, что $|x - x_0| < \delta$. Тогда $|g(x) - g(x_0)| < \eta$, а отсюда следует, что

$$|\varphi(x) = \varphi(x_0)| = |f(g(x)) - f(g(x_0))| = |f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$.

Это означает, что функция φ непрерывна в точке x_0.

Доказательство теоремы о непрерывности композиции.

Доказательство этой теоремы очень похоже на доказательство теоремы о замене переменной в пределах.
Запишем в кванторах условия теоремы:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta > 0 :\ \forall y \in (c, d)\ \ |y - y_0| < \eta\ \Rightarrow\ |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon,$$

$$\forall\eta > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in (a, b)\ \ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |g(x) - g(x_0)| < \eta.$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь первым условием, найдем η, а для найденного η из второго условия находим δ.
Пусть $x \in (a, b)$ такое, что $|x - x_0| < \delta$. Тогда
$|g(x) - g(x_0)| < \eta$, а отсюда следует, что

$$|\varphi(x) = \varphi(x_0)| = |f(g(x)) - f(g(x_0))| = |f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$.
Это означает, что функция φ непрерывна в точке x_0. ■

Доказательство теоремы о характере точек разрыва.

Рассмотрим случай, когда f возрастает на $[a, b]$.

Пусть $x_0 \in (a, b)$. Тогда из неравенства $f(x) \leq f(x_0)$ $(x < x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$.

Аналогично, из неравенства $f(x) \geq f(x_0)$ $(x > x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 + 0) \geq f(x_0)$.

Итак,

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0).$$

Если в здесь два знака равенства, то f непрерывна в точке x_0.

Если же хотя бы одно из неравенств строгое, то в точке x_0 функция f имеет скачок. Из последнего двойного неравенства также следует, что в точке x_0 устранимый разрыв невозможен.

Пусть теперь $x_0 = b$. Тогда $f(x) \leq f(b)$ и существует $f(b - 0) \leq f(b)$. Если $f(b - 0) = f(b)$, то f непрерывна слева в точке b. Если же $f(b - 0) < f(b)$, то в точке b у функции f устранимый разрыв (левосторонний).

Случай $x_0 = a$ рассматривается аналогично.

Доказательство теоремы о характере точек разрыва.

Рассмотрим случай, когда f возрастает на $[a, b]$.
Пусть $x_0 \in (a, b)$. Тогда из неравенства $f(x) \leq f(x_0)$ $(x < x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$.
Аналогично, из неравенства $f(x) \geq f(x_0)$ $(x > x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 + 0) \geq f(x_0)$.
Итак,

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0).$$

Если в здесь два знака равенства, то f непрерывна в точке x_0.
Если же хотя бы одно из неравенств строгое, то в точке x_0 функция f имеет скачок. Из последнего двойного неравенства также следует, что в точке x_0 устранимый разрыв невозможен.
Пусть теперь $x_0 = b$. Тогда $f(x) \leq f(b)$ и существует $f(b - 0) \leq f(b)$. Если $f(b - 0) = f(b)$, то f непрерывна слева в точке b. Если же $f(b - 0) < f(b)$, то в точке b у функции f устранимый разрыв (левосторонний).
Случай $x_0 = a$ рассматривается аналогично.

Доказательство теоремы о характере точек разрыва.

Рассмотрим случай, когда f возрастает на $[a, b]$.
Пусть $x_0 \in (a, b)$. Тогда из неравенства $f(x) \le f(x_0)$ $(x < x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 - 0) \le f(x_0)$.
Аналогично, из неравенства $f(x) \ge f(x_0)$ $(x > x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 + 0) \ge f(x_0)$.
Итак,

$$f(x_0 - 0) \le f(x_0) \le f(x_0 + 0).$$

Если в здесь два знака равенства, то f непрерывна в точке x_0. Если же хотя бы одно из неравенств строгое, то в точке x_0 функция f имеет скачок. Из последнего двойного неравенства также следует, что в точке x_0 устранимый разрыв невозможен.
Пусть теперь $x_0 = b$. Тогда $f(x) \le f(b)$ и существует $f(b - 0) \le f(b)$. Если $f(b - 0) = f(b)$, то f непрерывна слева в точке b. Если же $f(b - 0) < f(b)$, то в точке b у функции f устранимый разрыв (левосторонний).
Случай $x_0 = a$ рассматривается аналогично.

Доказательство теоремы о характере точек разрыва.

Рассмотрим случай, когда f возрастает на $[a, b]$.
Пусть $x_0 \in (a, b)$. Тогда из неравенства $f(x) \le f(x_0)$ $(x < x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 - 0) \le f(x_0)$.
Аналогично, из неравенства $f(x) \ge f(x_0)$ $(x > x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 + 0) \ge f(x_0)$.
Итак,

$$f(x_0 - 0) \le f(x_0) \le f(x_0 + 0).$$

Если в здесь два знака равенства, то f непрерывна в точке x_0. Если же хотя бы одно из неравенств строгое, то в точке x_0 функция f имеет скачок. Из последнего двойного неравенства также следует, что в точке x_0 устранимый разрыв невозможен.
Пусть теперь $x_0 = b$. Тогда $f(x) \le f(b)$ и существует $f(b - 0) \le f(b)$. Если $f(b - 0) = f(b)$, то f непрерывна слева в точке b. Если же $f(b - 0) < f(b)$, то в точке b у функции f устранимый разрыв (левосторонний).
Случай $x_0 = a$ рассматривается аналогично.

Доказательство теоремы о характере точек разрыва.

Рассмотрим случай, когда f возрастает на $[a, b]$.
Пусть $x_0 \in (a, b)$. Тогда из неравенства $f(x) \leq f(x_0)$ $(x < x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$.
Аналогично, из неравенства $f(x) \geq f(x_0)$ $(x > x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 + 0) \geq f(x_0)$.
Итак,

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0).$$

Если в здесь два знака равенства, то f непрерывна в точке x_0.
Если же хотя бы одно из неравенств строгое, то в точке x_0 функция f имеет скачок. Из последнего двойного неравенства также следует, что в точке x_0 устранимый разрыв невозможен.
Пусть теперь $x_0 = b$. Тогда $f(x) \leq f(b)$ и существует $f(b - 0) \leq f(b)$. Если $f(b - 0) = f(b)$, то f непрерывна слева в точке b. Если же $f(b - 0) < f(b)$, то в точке b у функции f устранимый разрыв (левосторонний).
Случай $x_0 = a$ рассматривается аналогично.

Доказательство теоремы о характере точек разрыва.

Рассмотрим случай, когда f возрастает на $[a, b]$.
Пусть $x_0 \in (a, b)$. Тогда из неравенства $f(x) \leq f(x_0)$ $(x < x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$.
Аналогично, из неравенства $f(x) \geq f(x_0)$ $(x > x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 + 0) \geq f(x_0)$.
Итак,

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0).$$

Если в здесь два знака равенства, то f непрерывна в точке x_0. Если же хотя бы одно из неравенств строгое, то в точке x_0 функция f имеет скачок. Из последнего двойного неравенства также следует, что в точке x_0 устранимый разрыв невозможен.
Пусть теперь $x_0 = b$. Тогда $f(x) \leq f(b)$ и существует $f(b - 0) \leq f(b)$. Если $f(b - 0) = f(b)$, то f непрерывна слева в точке b. Если же $f(b - 0) < f(b)$, то в точке b у функции f устранимый разрыв (левосторонний).
Случай $x_0 = a$ рассматривается аналогично.

Доказательство теоремы о характере точек разрыва.

Рассмотрим случай, когда f возрастает на $[a, b]$.
Пусть $x_0 \in (a, b)$. Тогда из неравенства $f(x) \le f(x_0)$ $(x < x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 - 0) \le f(x_0)$.
Аналогично, из неравенства $f(x) \ge f(x_0)$ $(x > x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 + 0) \ge f(x_0)$.
Итак,

$$f(x_0 - 0) \le f(x_0) \le f(x_0 + 0).$$

Если в здесь два знака равенства, то f непрерывна в точке x_0.
Если же хотя бы одно из неравенств строгое, то в точке x_0 функция f имеет скачок. Из последнего двойного неравенства также следует, что в точке x_0 устранимый разрыв невозможен.
Пусть теперь $x_0 = b$. Тогда $f(x) \le f(b)$ и существует $f(b - 0) \le f(b)$. Если $f(b - 0) = f(b)$, то f непрерывна слева в точке b. Если же $f(b - 0) < f(b)$, то в точке b у функции f устранимый разрыв (левосторонний).
Случай $x_0 = a$ рассматривается аналогично.

Доказательство теоремы о характере точек разрыва.

Рассмотрим случай, когда f возрастает на $[a, b]$.
Пусть $x_0 \in (a, b)$. Тогда из неравенства $f(x) \leq f(x_0)$ $(x < x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$.
Аналогично, из неравенства $f(x) \geq f(x_0)$ $(x > x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 + 0) \geq f(x_0)$.
Итак,

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0).$$

Если в здесь два знака равенства, то f непрерывна в точке x_0. Если же хотя бы одно из неравенств строгое, то в точке x_0 функция f имеет скачок. Из последнего двойного неравенства также следует, что в точке x_0 устранимый разрыв невозможен.
Пусть теперь $x_0 = b$. Тогда $f(x) \leq f(b)$ и существует $f(b - 0) \leq f(b)$. Если $f(b - 0) = f(b)$, то f непрерывна слева в точке b. Если же $f(b - 0) < f(b)$, то в точке b у функции f устранимый разрыв (левосторонний).
Случай $x_0 = a$ рассматривается аналогично.

Доказательство теоремы о характере точек разрыва.

Рассмотрим случай, когда f возрастает на $[a, b]$.
Пусть $x_0 \in (a, b)$. Тогда из неравенства $f(x) \le f(x_0)$ $(x < x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 - 0) \le f(x_0)$.
Аналогично, из неравенства $f(x) \ge f(x_0)$ $(x > x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 + 0) \ge f(x_0)$.
Итак,

$$f(x_0 - 0) \le f(x_0) \le f(x_0 + 0).$$

Если в здесь два знака равенства, то f непрерывна в точке x_0. Если же хотя бы одно из неравенств строгое, то в точке x_0 функция f имеет скачок. Из последнего двойного неравенства также следует, что в точке x_0 устранимый разрыв невозможен.
Пусть теперь $x_0 = b$. Тогда $f(x) \le f(b)$ и существует $f(b - 0) \le f(b)$. Если $f(b - 0) = f(b)$, то f непрерывна слева в точке b. Если же $f(b - 0) < f(b)$, то в точке b у функции f устранимый разрыв (левосторонний).
Случай $x_0 = a$ рассматривается аналогично.

Доказательство теоремы о характере точек разрыва.

Рассмотрим случай, когда f возрастает на $[a, b]$.
Пусть $x_0 \in (a, b)$. Тогда из неравенства $f(x) \leq f(x_0)$ $(x < x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$.
Аналогично, из неравенства $f(x) \geq f(x_0)$ $(x > x_0)$ и монотонности f следует, что существует $f(x_0 + 0) \geq f(x_0)$.
Итак,

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0).$$

Если в здесь два знака равенства, то f непрерывна в точке x_0.
Если же хотя бы одно из неравенств строгое, то в точке x_0 функция f имеет скачок. Из последнего двойного неравенства также следует, что в точке x_0 устранимый разрыв невозможен.
Пусть теперь $x_0 = b$. Тогда $f(x) \leq f(b)$ и существует $f(b - 0) \leq f(b)$. Если $f(b - 0) = f(b)$, то f непрерывна слева в точке b. Если же $f(b - 0) < f(b)$, то в точке b у функции f устранимый разрыв (левосторонний).
Случай $x_0 = a$ рассматривается аналогично.

Доказательство теоремы о множестве точек разрыва.

Пусть функция f не убывает на (a, b). Согласно предыдущей теореме 1 (о характере точек разрыва монотонной функции), если в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ функция f имеет разрыв, то это – скачок, т. е. $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$.

Поэтому каждой точке разрыва x можно поставить в соответствие интервал $I_x = (f(x-0), f(x+0))$.

Пусть x' и x'' – две различные точки разрыва функции f.

Покажем, что интервалы $I_{x'}$ и $I_{x''}$ не пересекаются.

Пусть $x' < x''$. Выберем точку ξ, такую, что $x' < \xi < x''$. Тогда, в силу монотонности f, $f(x'+0) \leq f(\xi)$ и $f(x''-0) \geq f(\xi)$, т. е. $f(x'+0) \leq f(x''-0)$. Это означает, что интервалы $(f(x'-0), f(x'+0))$ и $(f(x''-0), f(x''+0))$ не имеют общих точек.

Итак, каждой точке разрыва x поставлен в соответствие интервал I_x.

Доказательство теоремы о множестве точек разрыва.

Пусть функция f не убывает на (a, b). Согласно предыдущей теореме 1 (о характере точек разрыва монотонной функции), если в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ функция f имеет разрыв, то это – скачок, т. е. $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$.

Поэтому каждой точке разрыва x можно поставить в соответствие интервал $I_x = (f(x - 0), f(x + 0))$.

Пусть x' и x'' – две различные точки разрыва функции f.

Покажем, что интервалы $I_{x'}$ и $I_{x''}$ не пересекаются.

Пусть $x' < x''$. Выберем точку ξ, такую, что $x' < \xi < x''$. Тогда, в силу монотонности f, $f(x' + 0) \leq f(\xi)$ и $f(x'' - 0) \geq f(\xi)$, т. е. $f(x' + 0) \leq f(x'' - 0)$. Это означает, что интервалы $(f(x' - 0), f(x' + 0))$ и $(f(x'' - 0), f(x'' + 0))$ не имеют общих точек.

Итак, каждой точке разрыва x поставлен в соответствие интервал I_x.

Доказательство теоремы о множестве точек разрыва.

Пусть функция f не убывает на (a, b). Согласно предыдущей теореме 1 (о характере точек разрыва монотонной функции), если в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ функция f имеет разрыв, то это – скачок, т. е. $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$.

Поэтому каждой точке разрыва x можно поставить в соответствие интервал $I_x = (f(x-0), f(x+0))$.

Пусть x' и x'' – две различные точки разрыва функции f.

Покажем, что интервалы $I_{x'}$ и $I_{x''}$ не пересекаются.

Пусть $x' < x''$. Выберем точку ξ, такую, что $x' < \xi < x''$. Тогда, в силу монотонности f, $f(x'+0) \leq f(\xi)$ и $f(x''-0) \geq f(\xi)$, т. е. $f(x'+0) \leq f(x''-0)$. Это означает, что интервалы $(f(x'-0), f(x'+0))$ и $(f(x''-0), f(x''+0))$ не имеют общих точек.

Итак, каждой точке разрыва x поставлен в соответствие интервал I_x.

Доказательство теоремы о множестве точек разрыва.

Пусть функция f не убывает на (a, b). Согласно предыдущей теореме 1 (о характере точек разрыва монотонной функции), если в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ функция f имеет разрыв, то это – скачок, т. е. $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$.
Поэтому каждой точке разрыва x можно поставить в соответствие интервал $I_x = (f(x-0), f(x+0))$.
Пусть x' и x'' – две различные точки разрыва функции f.
Покажем, что интервалы $I_{x'}$ и $I_{x''}$ не пересекаются.
Пусть $x' < x''$. Выберем точку ξ, такую, что $x' < \xi < x''$. Тогда, в силу монотонности f, $f(x'+0) \leq f(\xi)$ и $f(x''-0) \geq f(\xi)$, т. е. $f(x'+0) \leq f(x''-0)$. Это означает, что интервалы $(f(x'-0), f(x'+0))$ и $(f(x''-0), f(x''+0))$ не имеют общих точек.
Итак, каждой точке разрыва x поставлен в соответствие интервал I_x.

Доказательство теоремы о множестве точек разрыва.

Пусть функция f не убывает на (a, b). Согласно предыдущей теореме 1 (о характере точек разрыва монотонной функции), если в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ функция f имеет разрыв, то это – скачок, т. е. $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$.
Поэтому каждой точке разрыва x можно поставить в соответствие интервал $I_x = (f(x-0), f(x+0))$.
Пусть x' и x'' – две различные точки разрыва функции f.
Покажем, что интервалы $I_{x'}$ и $I_{x''}$ не пересекаются.
Пусть $x' < x''$. Выберем точку ξ, такую, что $x' < \xi < x''$. Тогда, в силу монотонности f, $f(x'+0) \le f(\xi)$ и $f(x''-0) \ge f(\xi)$, т. е. $f(x'+0) \le f(x''-0)$. Это означает, что интервалы $(f(x'-0), f(x'+0))$ и $(f(x''-0), f(x''+0))$ не имеют общих точек.
Итак, каждой точке разрыва x поставлен в соответствие интервал I_x.

Доказательство теоремы о множестве точек разрыва.

Пусть функция f не убывает на (a, b). Согласно предыдущей теореме 1 (о характере точек разрыва монотонной функции), если в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ функция f имеет разрыв, то это – скачок, т. е. $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$.
Поэтому каждой точке разрыва x можно поставить в соответствие интервал $I_x = (f(x-0), f(x+0))$.
Пусть x' и x'' – две различные точки разрыва функции f.
Покажем, что интервалы $I_{x'}$ и $I_{x''}$ не пересекаются.
Пусть $x' < x''$. Выберем точку ξ, такую, что $x' < \xi < x''$. Тогда, в силу монотонности f, $f(x'+0) \leq f(\xi)$ и $f(x''-0) \geq f(\xi)$, т. е. $f(x'+0) \leq f(x''-0)$. Это означает, что интервалы $(f(x'-0), f(x'+0))$ и $(f(x''-0), f(x''+0))$ не имеют общих точек.
Итак, каждой точке разрыва x поставлен в соответствие интервал I_x.

Окончание доказательства теоремы о множестве точек разрыва.

В каждом таком интервале I_x выберем рациональное число r_x. При этом различным точкам разрыва x' и x'' будут соответствовать различные числа $r_{x'}$ и $r_{x''}$, т. к. интервалы $I_{x'}$ и $I_{x''}$ не пересекаются.

Пусть $E \subset (a, b)$ – множество всех точек разрыва функции f. Если $E \neq \emptyset$, то каждому $x \in E$ поставлено в соответствие рациональное число r_x.

Мы получили взаимно однозначное соответствие между элементами множества E и некоторым подмножеством $E_1 \subset \mathbb{Q}$ множества $\mathbb{Q}$.

Но множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно, поэтому и множество E_1 не более чем счетно, а значит не более чем счетно и само множество E. ◻

Окончание доказательства теоремы о множестве точек разрыва.

В каждом таком интервале I_x выберем рациональное число r_x. При этом различным точкам разрыва x' и x'' будут соответствовать различные числа $r_{x'}$ и $r_{x''}$, т. к. интервалы $I_{x'}$ и $I_{x''}$ не пересекаются.

Пусть $E \subset (a, b)$ – множество всех точек разрыва функции f. Если $E \neq \emptyset$, то каждому $x \in E$ поставлено в соответствие рациональное число r_x.

Мы получили взаимно однозначное соответствие между элементами множества E и некоторым подмножеством $E_1 \subset \mathbb{Q}$ множества $\mathbb{Q}$.

Но множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно, поэтому и множество E_1 не более чем счетно, а значит не более чем счетно и само множество E.

Окончание доказательства теоремы о множестве точек разрыва.

В каждом таком интервале I_x выберем рациональное число r_x. При этом различным точкам разрыва x' и x'' будут соответствовать различные числа $r_{x'}$ и $r_{x''}$, т. к. интервалы $I_{x'}$ и $I_{x''}$ не пересекаются.
Пусть $E \subset (a, b)$ – множество всех точек разрыва функции f.
Если $E \neq \emptyset$, то каждому $x \in E$ поставлено в соответствие рациональное число r_x.
Мы получили взаимно однозначное соответствие между элементами множества E и некоторым подмножеством $E_1 \subset \mathbb{Q}$ множества $\mathbb{Q}$.
Но множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно, поэтому и множество E_1 не более чем счетно, а значит не более чем счетно и само множество E.

Окончание доказательства теоремы о множестве точек разрыва.

В каждом таком интервале I_x выберем рациональное число r_x. При этом различным точкам разрыва x' и x'' будут соответствовать различные числа $r_{x'}$ и $r_{x''}$, т. к. интервалы $I_{x'}$ и $I_{x''}$ не пересекаются.
Пусть $E \subset (a, b)$ – множество всех точек разрыва функции f.
Если $E \neq \emptyset$, то каждому $x \in E$ поставлено в соответствие рациональное число r_x.
Мы получили взаимно однозначное соответствие между элементами множества E и некоторым подмножеством $E_1 \subset \mathbb{Q}$ множества $\mathbb{Q}$.
Но множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно, поэтому и множество E_1 не более чем счетно, а значит не более чем счетно и само множество E. $\blacksquare$

Доказательство теоремы о непрерывности монотонной функции.

Рассмотрим случай неубывающей f. Предположим, что f разрывна в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$.

Тогда, согласно теореме 1 (о характере точек разрыва монотонной функции), в точке x_0 функция f имеет скачок, а из условия монотонности следует, что $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$.

Итак, если $x < x_0$, то $f(x) \le f(x_0 - 0)$, а при $x > x_0$ имеем $f(x) \ge f(x_0 + 0)$, т. е. на интервале $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ содержится разве что единственная точка $f(x_0)$ из области значений функции $E(f)$, что противоречит условию.

Случаи $x_0 = a$ и $x_0 = b$ исчерпываются аналогичным образом и тем самым завершается доказательство теоремы. ■

Доказательство теоремы о непрерывности монотонной функции.

Рассмотрим случай неубывающей f. Предположим, что f разрывна в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$.
Тогда, согласно теореме 1 (о характере точек разрыва монотонной функции), в точке x_0 функция f имеет скачок, а из условия монотонности следует, что $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$.
Итак, если $x < x_0$, то $f(x) \leq f(x_0 - 0)$, а при $x > x_0$ имеем $f(x) \geq f(x_0 + 0)$, т. е. на интервале $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ содержится разве что единственная точка $f(x_0)$ из области значений функции $E(f)$, что противоречит условию.
Случаи $x_0 = a$ и $x_0 = b$ исчерпываются аналогичным образом и тем самым завершается доказательство теоремы.

Доказательство теоремы о непрерывности монотонной функции.

Рассмотрим случай неубывающей f. Предположим, что f разрывна в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$.
Тогда, согласно теореме 1 (о характере точек разрыва монотонной функции), в точке x_0 функция f имеет скачок, а из условия монотонности следует, что $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$.
Итак, если $x < x_0$, то $f(x) \leq f(x_0 - 0)$, а при $x > x_0$ имеем $f(x) \geq f(x_0 + 0)$, т. е. на интервале $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ содержится разве что единственная точка $f(x_0)$ из области значений функции $E(f)$, что противоречит условию.
Случаи $x_0 = a$ и $x_0 = b$ исчерпываются аналогичным образом и тем самым завершается доказательство теоремы.

Доказательство теоремы о непрерывности монотонной функции.

Рассмотрим случай неубывающей f. Предположим, что f разрывна в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$.
Тогда, согласно теореме 1 (о характере точек разрыва монотонной функции), в точке x_0 функция f имеет скачок, а из условия монотонности следует, что $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$.
Итак, если $x < x_0$, то $f(x) \leq f(x_0 - 0)$, а при $x > x_0$ имеем $f(x) \geq f(x_0 + 0)$, т. е. на интервале $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ содержится разве что единственная точка $f(x_0)$ из области значений функции $E(f)$, что противоречит условию.
Случаи $x_0 = a$ и $x_0 = b$ исчерпываются аналогичным образом и тем самым завершается доказательство теоремы. ■

Доказательство теоремы Больцано – Коши.

Применяем метод деления отрезка пополам и лемму Кантора о вложенных отрезках.

Пусть, например, $f(a) < 0 < f(b)$. Обозначим $[a_0, b_0] \equiv [a, b]$ и разделим $[a_0, b_0]$ пополам точкой $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Если $f(c_0) = 0$, то теорема доказана.

В противном случае из двух полученных отрезков $[a_0, c_0]$ и $[c_0, b_0]$ выберем такой, что на его концах функция f принимает значения разных знаков. Это будет отрезок $[a_1, b_1] \equiv [a_0, c_0]$, если $f(c_0) > 0$, и $[a_1, b_1] \equiv [c_0, b_0]$, если $f(c_0) < 0$.

Заметим, что длина отрезка $[a_1, b_1]$ равна $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.

На следующем шаге разделим $[a_1, b_1]$ пополам и продолжим описанную процедуру.

Доказательство теоремы Больцано – Коши.

Применяем метод деления отрезка пополам и лемму Кантора о вложенных отрезках.
Пусть, например, $f(a) < 0 < f(b)$. Обозначим $[a_0, b_0] \equiv [a, b]$ и разделим $[a_0, b_0]$ пополам точкой $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Если $f(c_0) = 0$, то теорема доказана.
В противном случае из двух полученных отрезков $[a_0, c_0]$ и $[c_0, b_0]$ выберем такой, что на его концах функция f принимает значения разных знаков. Это будет отрезок $[a_1, b_1] \equiv [a_0, c_0]$, если $f(c_0) > 0$, и $[a_1, b_1] \equiv [c_0, b_0]$, если $f(c_0) < 0$.
Заметим, что длина отрезка $[a_1, b_1]$ равна $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.
На следующем шаге разделим $[a_1, b_1]$ пополам и продолжим описанную процедуру.

Доказательство теоремы Больцано – Коши.

Применяем метод деления отрезка пополам и лемму Кантора о вложенных отрезках.
Пусть, например, $f(a) < 0 < f(b)$. Обозначим $[a_0, b_0] \equiv [a, b]$ и разделим $[a_0, b_0]$ пополам точкой $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Если $f(c_0) = 0$, то теорема доказана.
В противном случае из двух полученных отрезков $[a_0, c_0]$ и $[c_0, b_0]$ выберем такой, что на его концах функция f принимает значения разных знаков. Это будет отрезок $[a_1, b_1] \equiv [a_0, c_0]$, если $f(c_0) > 0$, и $[a_1, b_1] \equiv [c_0, b_0]$, если $f(c_0) < 0$.
Заметим, что длина отрезка $[a_1, b_1]$ равна $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.
На следующем шаге разделим $[a_1, b_1]$ пополам и продолжим описанную процедуру.

Доказательство теоремы Больцано – Коши.

Применяем метод деления отрезка пополам и лемму Кантора о вложенных отрезках.
Пусть, например, $f(a) < 0 < f(b)$. Обозначим $[a_0, b_0] \equiv [a, b]$ и разделим $[a_0, b_0]$ пополам точкой $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Если $f(c_0) = 0$, то теорема доказана.
В противном случае из двух полученных отрезков $[a_0, c_0]$ и $[c_0, b_0]$ выберем такой, что на его концах функция f принимает значения разных знаков. Это будет отрезок $[a_1, b_1] \equiv [a_0, c_0]$, если $f(c_0) > 0$, и $[a_1, b_1] \equiv [c_0, b_0]$, если $f(c_0) < 0$.
Заметим, что длина отрезка $[a_1, b_1]$ равна $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.
На следующем шаге разделим $[a_1, b_1]$ пополам и продолжим описанную процедуру.

Продолжение доказательства теоремы Больцано – Коши.

Если на каком-либо шаге встретится точка деления, в которой функция f обращается в нуль, то теорема доказана. В противном случае получим последовательность вложенных друг в друга отрезков $[a_n, b_n]$, таких, что их длины $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$.

По лемме Кантора, существует точка c, принадлежащая всем $[a_n, b_n]$.

Покажем, что $f(c) = 0$. Отсюда, в частности, будет следовать, что c не совпадает ни с a, ни с b, т. к. $f(a) \neq 0$ и $f(b) \neq 0$.

Для доказательства равенства $f(c) = 0$ покажем, что для всех n справедливо неравенство

$$f(a_n) < 0 < f(b_n).$$

Применим индукцию по n.

Продолжение доказательства теоремы Больцано – Коши.

Если на каком-либо шаге встретится точка деления, в которой функция f обращается в нуль, то теорема доказана. В противном случае получим последовательность вложенных друг в друга отрезков $[a_n, b_n]$, таких, что их длины $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$.
По лемме Кантора, существует точка c, принадлежащая всем $[a_n, b_n]$.
Покажем, что $f(c) = 0$. Отсюда, в частности, будет следовать, что c не совпадает ни с a, ни с b, т. к. $f(a) \neq 0$ и $f(b) \neq 0$.
Для доказательства равенства $f(c) = 0$ покажем, что для всех n справедливо неравенство

$$f(a_n) < 0 < f(b_n).$$

Применим индукцию по n.

Продолжение доказательства теоремы Больцано – Коши.

Если на каком-либо шаге встретится точка деления, в которой функция f обращается в нуль, то теорема доказана. В противном случае получим последовательность вложенных друг в друга отрезков $[a_n, b_n]$, таких, что их длины $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$.
По лемме Кантора, существует точка c, принадлежащая всем $[a_n, b_n]$.
Покажем, что $f(c) = 0$. Отсюда, в частности, будет следовать, что c не совпадает ни с a, ни с b, т. к. $f(a) \neq 0$ и $f(b) \neq 0$.
Для доказательства равенства $f(c) = 0$ покажем, что для всех n справедливо неравенство

$$f(a_n) < 0 < f(b_n).$$

Применим индукцию по n.

Продолжение доказательства теоремы Больцано – Коши.

Если на каком-либо шаге встретится точка деления, в которой функция f обращается в нуль, то теорема доказана. В противном случае получим последовательность вложенных друг в друга отрезков $[a_n, b_n]$, таких, что их длины $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$.
По лемме Кантора, существует точка c, принадлежащая всем $[a_n, b_n]$.
Покажем, что $f(c) = 0$. Отсюда, в частности, будет следовать, что c не совпадает ни с a, ни с b, т. к. $f(a) \neq 0$ и $f(b) \neq 0$.
Для доказательства равенства $f(c) = 0$ покажем, что для всех n справедливо неравенство

$$f\left(a_n\right) < 0 < f\left(b_n\right).$$

Применим индукцию по n.

Продолжение доказательства теоремы Больцано – Коши.

При $n = 0$ требуемое неравенство $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ совпадает с принятым условием $f(a) < 0 < f(b)$.

Предположим, что неравенство $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. справедливо при некотором n, и покажем, что оно имеет место и для $n + 1$.

Обозначим $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Тогда, согласно описанной процедуре отбора сегментов, мы полагаем $[a_{n+1}, b_{n+1}] \equiv [a_n, c_n]$, если $f(c_n) > 0$, и $[a_{n+1}, b_{n+1}] \equiv [c_n, b_n]$, если $f(c_n) < 0$.

Отсюда легко видеть, что $f(a_{n+1}) < 0 < f(b_{n+1})$, и тем самым требуемое неравенство доказано для всех $n = 0, 1, \ldots$.

Далее, поскольку $a_n \le c \le b_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то $a_n \to c$ $(n \to \infty)$ и $b_n \to c$ $(n \to \infty)$.

Продолжение доказательства теоремы Больцано – Коши.

При $n = 0$ требуемое неравенство $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ совпадает с принятым условием $f(a) < 0 < f(b)$.
Предположим, что неравенство $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.
справедливо при некотором n, и покажем, что оно имеет место и для $n + 1$.
Обозначим $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Тогда, согласно описанной процедуре отбора сегментов, мы полагаем $[a_{n+1}, b_{n+1}] \equiv [a_n, c_n]$, если $f(c_n) > 0$, и $[a_{n+1}, b_{n+1}] \equiv [c_n, b_n]$, если $f(c_n) < 0$.
Отсюда легко видеть, что $f(a_{n+1}) < 0 < f(b_{n+1})$, и тем самым требуемое неравенство доказано для всех $n = 0, 1, \ldots$.
Далее, поскольку $a_n \leq c \leq b_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то $a_n \to c$ $(n \to \infty)$ и $b_n \to c$ $(n \to \infty)$.

Продолжение доказательства теоремы Больцано – Коши.

При $n = 0$ требуемое неравенство $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ совпадает с принятым условием $f(a) < 0 < f(b)$.
Предположим, что неравенство $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.
справедливо при некотором n, и покажем, что оно имеет место и для $n+1$.
Обозначим $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Тогда, согласно описанной процедуре отбора сегментов, мы полагаем $[a_{n+1}, b_{n+1}] \equiv [a_n, c_n]$, если $f(c_n) > 0$, и $[a_{n+1}, b_{n+1}] \equiv [c_n, b_n]$, если $f(c_n) < 0$.
Отсюда легко видеть, что $f(a_{n+1}) < 0 < f(b_{n+1})$, и тем самым требуемое неравенство доказано для всех $n = 0, 1, \ldots$.
Далее, поскольку $a_n \leq c \leq b_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то $a_n \to c$ $(n \to \infty)$ и $b_n \to c$ $(n \to \infty)$.

Продолжение доказательства теоремы Больцано – Коши.

При $n = 0$ требуемое неравенство $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ совпадает с принятым условием $f(a) < 0 < f(b)$.
Предположим, что неравенство $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.
справедливо при некотором n, и покажем, что оно имеет место и для $n + 1$.
Обозначим $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Тогда, согласно описанной процедуре отбора сегментов, мы полагаем $[a_{n+1}, b_{n+1}] \equiv [a_n, c_n]$, если $f(c_n) > 0$, и $[a_{n+1}, b_{n+1}] \equiv [c_n, b_n]$, если $f(c_n) < 0$.
Отсюда легко видеть, что $f(a_{n+1}) < 0 < f(b_{n+1})$, и тем самым требуемое неравенство доказано для всех $n = 0, 1, \ldots$.
Далее, поскольку $a_n \leq c \leq b_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то $a_n \to c$ $(n \to \infty)$ и $b_n \to c$ $(n \to \infty)$.

Продолжение доказательства теоремы Больцано – Коши.

При $n = 0$ требуемое неравенство $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ совпадает с принятым условием $f(a) < 0 < f(b)$.
Предположим, что неравенство $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.
справедливо при некотором n, и покажем, что оно имеет место и для $n+1$.
Обозначим $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Тогда, согласно описанной процедуре отбора сегментов, мы полагаем $[a_{n+1}, b_{n+1}] \equiv [a_n, c_n]$, если $f(c_n) > 0$, и $[a_{n+1}, b_{n+1}] \equiv [c_n, b_n]$, если $f(c_n) < 0$.
Отсюда легко видеть, что $f(a_{n+1}) < 0 < f(b_{n+1})$, и тем самым требуемое неравенство доказано для всех $n = 0, 1, \ldots$.
Далее, поскольку $a_n \leq c \leq b_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то $a_n \to c$ $(n \to \infty)$ и $b_n \to c$ $(n \to \infty)$.

Окончание доказательства теоремы Больцано – Коши.

В силу непрерывности функции f в точке c, из неравенств $f\left(a_n\right) < 0$ следует, что и $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(a_n\right) \leq 0$.

С другой стороны, поскольку $f\left(b_n\right) > 0$, то и $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(b_n\right) \geq 0$.

Итак, получили, что $f(c) \leq 0$ и $f(c) \geq 0$. Отсюда следует, что $f(c) = 0$. ■

Окончание доказательства теоремы Больцано – Коши.

В силу непрерывности функции f в точке c, из неравенств $f\left(a_n\right) < 0$ следует, что и $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(a_n\right) \leq 0$.

С другой стороны, поскольку $f\left(b_n\right) > 0$, то и $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(b_n\right) \geq 0$.

Итак, получили, что $f(c) \leq 0$ и $f(c) \geq 0$. Отсюда следует, что $f(c) = 0$. ■

Окончание доказательства теоремы Больцано – Коши.

В силу непрерывности функции f в точке c, из неравенств $f(a_n) < 0$ следует, что и $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$.
С другой стороны, поскольку $f(b_n) > 0$, то и $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$.
Итак, получили, что $f(c) \leq 0$ и $f(c) \geq 0$. Отсюда следует, что $f(c) = 0$. ■

Доказательство первой теоремы Вейерштрасса.

Предположим, что f неограничена на $[a, b]$. Это означает, что для любого M найдется такое $x \in [a, b]$, что $|f(x)| > M$.
Полагая $M = 1, 2, \dots,$ построим последовательность точек $x_n \in [a, b]$, таких, что $|f(x_n)| > n$.
Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то, в силу леммы Больцано – Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $x_{n_k} \to c$ $(k \to \infty)$. Тогда $c \in [a, b]$ (здесь существенно используется тот факт, что $[a, b]$ – отрезок).
В силу непрерывности функции f в точке c, имеем $f(x_{n_k}) \to f(c)$, т. е. $\{f(x_{n_k})\}$ сходящаяся и, следовательно, ограниченная последовательность.
С другой стороны, так как $|f(x_{n_k})| > n_k$, то последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ неограничена. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство первой теоремы Вейерштрасса.

Предположим, что f неограничена на $[a, b]$. Это означает, что для любого M найдется такое $x \in [a, b]$, что $|f(x)| > M$. Полагая $M = 1, 2, \ldots,$ построим последовательность точек $x_n \in [a, b]$, таких, что $|f(x_n)| > n$.

Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то, в силу леммы Больцано – Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $x_{n_k} \to c$ $(k \to \infty)$. Тогда $c \in [a, b]$ (здесь существенно используется тот факт, что $[a, b]$ – отрезок).

В силу непрерывности функции f в точке c, имеем $f(x_{n_k}) \to f(c)$, т. е. $\{f(x_{n_k})\}$ сходящаяся и, следовательно, ограниченная последовательность.

С другой стороны, так как $|f(x_{n_k})| > n_k$, то последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ неограничена. Полученное противоречие доказывает теорему. ∎

Доказательство первой теоремы Вейерштрасса.

Предположим, что f неограничена на $[a, b]$. Это означает, что для любого M найдется такое $x \in [a, b]$, что $|f(x)| > M$.
Полагая $M = 1, 2, \ldots,$ построим последовательность точек $x_n \in [a, b]$, таких, что $|f(x_n)| > n$.
Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то, в силу леммы Больцано – Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $x_{n_k} \to c$ $(k \to \infty)$. Тогда $c \in [a, b]$ (здесь существенно используется тот факт, что $[a, b]$ – отрезок).
В силу непрерывности функции f в точке c, имеем $f(x_{n_k}) \to f(c)$, т. е. $\{f(x_{n_k})\}$ сходящаяся и, следовательно, ограниченная последовательность.
С другой стороны, так как $|f(x_{n_k})| > n_k$, то последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ неограничена. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Доказательство первой теоремы Вейерштрасса.

Предположим, что f неограничена на $[a, b]$. Это означает, что для любого M найдется такое $x \in [a, b]$, что $|f(x)| > M$.
Полагая $M = 1, 2, \ldots,$ построим последовательность точек $x_n \in [a, b]$, таких, что $|f(x_n)| > n$.
Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то, в силу леммы Больцано – Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $x_{n_k} \to c$ $(k \to \infty)$. Тогда $c \in [a, b]$ (здесь существенно используется тот факт, что $[a, b]$ – отрезок).
В силу непрерывности функции f в точке c, имеем $f(x_{n_k}) \to f(c)$, т. е. $\{f(x_{n_k})\}$ сходящаяся и, следовательно, ограниченная последовательность.
С другой стороны, так как $|f(x_{n_k})| > n_k$, то последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ неограничена. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство первой теоремы Вейерштрасса.

Предположим, что f неограничена на $[a, b]$. Это означает, что для любого M найдется такое $x \in [a, b]$, что $|f(x)| > M$. Полагая $M = 1, 2, \dots$, построим последовательность точек $x_n \in [a, b]$, таких, что $|f(x_n)| > n$.
Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то, в силу леммы Больцано – Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $x_{n_k} \to c$ $(k \to \infty)$. Тогда $c \in [a, b]$ (здесь существенно используется тот факт, что $[a, b]$ – отрезок).
В силу непрерывности функции f в точке c, имеем $f(x_{n_k}) \to f(c)$, т. е. $\{f(x_{n_k})\}$ сходящаяся и, следовательно, ограниченная последовательность.
С другой стороны, так как $|f(x_{n_k})| > n_k$, то последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ неограничена. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Другое доказательство первой теоремы Вейерштрасса.

Предположим, что f неограничена на $[a, b]$. Разделим $[a, b]$ пополам. Тогда хотя бы на одном из двух полученных отрезков функция f неограничена. Обозначим такой отрезок через I_1 (если f неограничена на обоих отрезках, то выберем любой из них).

Разделим I_1 пополам и обозначим через I_2 тот из полученных отрезков, на котором функция f неограничена.

Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных друг в друга отрезков I_n, длины которых $|I_n| = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ $(n \to \infty)$. По лемме Кантора о вложенных отрезках, существует единственная точка $c \in [a, b]$, принадлежащая всем отрезкам I_n.

Другое доказательство первой теоремы Вейерштрасса.

Предположим, что f неограничена на $[a, b]$. Разделим $[a, b]$ пополам. Тогда хотя бы на одном из двух полученных отрезков функция f неограничена. Обозначим такой отрезок через I_1 (если f неограничена на обоих отрезках, то выберем любой из них).

Разделим I_1 пополам и обозначим через I_2 тот из полученных отрезков, на котором функция f неограничена.

Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных друг в друга отрезков I_n, длины которых $|I_n| = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ $(n \to \infty)$. По лемме Кантора о вложенных отрезках, существует единственная точка $c \in [a, b]$, принадлежащая всем отрезкам I_n.

Другое доказательство первой теоремы Вейерштрасса.

Предположим, что f неограничена на $[a, b]$. Разделим $[a, b]$ пополам. Тогда хотя бы на одном из двух полученных отрезков функция f неограничена. Обозначим такой отрезок через I_1 (если f неограничена на обоих отрезках, то выберем любой из них).

Разделим I_1 пополам и обозначим через I_2 тот из полученных отрезков, на котором функция f неограничена.

Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных друг в друга отрезков I_n, длины которых $|I_n| = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ $(n \to \infty)$. По лемме Кантора о вложенных отрезках, существует единственная точка $c \in [a, b]$, принадлежащая всем отрезкам I_n.

Другое доказательство первой теоремы Вейерштрасса (окончание).

Так как f непрерывна в точке c, то f локально ограничена в точке c, т. е. найдется такое $\delta > 0$, что f ограничена на множестве $(c-\delta, c+\delta) \cap [a, b]$.
Выберем номер n настолько большим, что $\frac{b-a}{2^n} < \delta$. Тогда $I_n \subset (c-\delta, c+\delta)$. Но из ограниченности f на множестве $(c-\delta, c+\delta) \cap [a, b]$ следует, что f ограничена также и на подмножестве I_n этого множества, что противоречит выбору отрезков I_n.

Другое доказательство первой теоремы Вейерштрасса (окончание).

Так как f непрерывна в точке c, то f локально ограничена в точке c, т. е. найдется такое $\delta > 0$, что f ограничена на множестве $(c-\delta, c+\delta) \cap [a, b]$.
Выберем номер n настолько большим, что $\frac{b-a}{2^n} < \delta$. Тогда $I_n \subset (c-\delta, c+\delta)$. Но из ограниченности f на множестве $(c-\delta, c+\delta) \cap [a, b]$ следует, что f ограничена также и на подмножестве I_n этого множества, что противоречит выбору отрезков I_n. $\blacksquare$

Доказательство второй теоремы Вейерштрасса.

Согласно первой теореме Вейерштрасса, непрерывная на $[a, b]$ функция f ограничена. Значит, существует конечное $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. По определению верхней грани, $f(x) \leq M$ при каждом $x \in [a, b]$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x' \in [a, b]$, что $f(x') > M - \varepsilon$.

Полагая $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2 \dots)$, построим последовательность точек $x_n \in [a, b]$, такую, что $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то, по лемме Больцано – Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Доказательство второй теоремы Вейерштрасса.

Согласно первой теореме Вейерштрасса, непрерывная на $[a, b]$ функция f ограничена. Значит, существует конечное $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. По определению верхней грани, $f(x) \leq M$ при каждом $x \in [a, b]$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x' \in [a, b]$, что $f(x') > M - \varepsilon$.

Полагая $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2 \ldots)$, построим последовательность точек $x_n \in [a, b]$, такую, что $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то, по лемме Больцано – Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Доказательство второй теоремы Вейерштрасса.

Согласно первой теореме Вейерштрасса, непрерывная на $[a, b]$ функция f ограничена. Значит, существует конечное $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. По определению верхней грани, $f(x) \leq M$ при каждом $x \in [a, b]$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x' \in [a, b]$, что $f(x') > M - \varepsilon$.
Полагая $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2 \ldots)$, построим последовательность точек $x_n \in [a, b]$, такую, что $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то, по лемме Больцано – Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Окончание доказательства второй теоремы Вейерштрасса.

Обозначим $\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Тогда $\alpha \in [a, b]$. В силу непрерывности функции f в точке α, имеем $f(\alpha) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})$.

Но, поскольку

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \le M < M + \frac{1}{n_k},$$

то отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$. В силу единственности предела получаем, что $f(\alpha) = M$.

Аналогично показываем, что в некоторой точке $\beta \in [a, b]$ функция f достигает своей нижней грани. ∎

Окончание доказательства второй теоремы Вейерштрасса.

Обозначим $\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Тогда $\alpha \in [a,b]$. В силу непрерывности функции f в точке α, имеем $f(\alpha) = \lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)$. Но, поскольку

$$M - \frac{1}{n_k} < f\left(x_{n_k}\right) \leq M < M + \frac{1}{n_k},$$

то отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = M$. В силу единственности предела получаем, что $f(\alpha) = M$.

Аналогично показываем, что в некоторой точке $\beta \in [a,b]$ функция f достигает своей нижней грани.

Окончание доказательства второй теоремы Вейерштрасса.

Обозначим $\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Тогда $\alpha \in [a, b]$. В силу непрерывности функции f в точке α, имеем $f(\alpha) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})$. Но, поскольку

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M < M + \frac{1}{n_k},$$

то отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$. В силу единственности предела получаем, что $f(\alpha) = M$.
Аналогично показываем, что в некоторой точке $\beta \in [a, b]$ функция f достигает своей нижней грани.

Другое доказательство второй теоремы Вейерштрасса.

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда, в силу первой теоремы Вейерштрасса, существует $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Предположим, что функция f не достигает своей верхней грани, т. е. пусть для каждого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $f(x) < M$.

Тогда функция $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на $[a, b]$ (по теореме об арифметических свойствах непрерывных функций).

Применяя к функции φ первую теорему Вейерштрасса, получаем, что φ ограничена на $[a, b]$, т. е. существует такое $M_1 > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $\varphi(x) \leq M_1$.

Но из этого неравенства вытекает, что $f(x) \leq M - \frac{1}{M_1}$ $(x \in [a, b])$, а это противоречит тому, что число M является верхней гранью, т. е. наименьшей из всех верхних границ функции f.

Другое доказательство второй теоремы Вейерштрасса.

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда, в силу первой теоремы Вейерштрасса, существует $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Предположим, что функция f не достигает своей верхней грани, т. е. пусть для каждого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $f(x) < M$.

Тогда функция $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на $[a, b]$ (по теореме об арифметических свойствах непрерывных функций).

Применяя к функции φ первую теорему Вейерштрасса, получаем, что φ ограничена на $[a, b]$, т. е. существует такое $M_1 > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $\varphi(x) \leq M_1$.

Но из этого неравенства вытекает, что $f(x) \leq M - \frac{1}{M_1}$ $(x \in [a, b])$, а это противоречит тому, что число M является верхней гранью, т. е. наименьшей из всех верхних границ функции f. ∎

Другое доказательство второй теоремы Вейерштрасса.

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда, в силу первой теоремы Вейерштрасса, существует $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Предположим, что функция f не достигает своей верхней грани, т. е. пусть для каждого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $f(x) < M$.

Тогда функция $\varphi(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ непрерывна на $[a, b]$ (по теореме об арифметических свойствах непрерывных функций).

Применяя к функции φ первую теорему Вейерштрасса, получаем, что φ ограничена на $[a, b]$, т. е. существует такое $M_1 > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $\varphi(x) \leq M_1$.

Но из этого неравенства вытекает, что $f(x) \leq M - \frac{1}{M_1}$ $(x \in [a, b])$, а это противоречит тому, что число M является верхней гранью, т. е. наименьшей из всех верхних границ функции f.

Другое доказательство второй теоремы Вейерштрасса.

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда, в силу первой теоремы Вейерштрасса, существует $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Предположим, что функция f не достигает своей верхней грани, т. е. пусть для каждого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $f(x) < M$.
Тогда функция $\varphi(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ непрерывна на $[a, b]$ (по теореме об арифметических свойствах непрерывных функций).
Применяя к функции φ первую теорему Вейерштрасса, получаем, что φ ограничена на $[a, b]$, т. е. существует такое $M_1 > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $\varphi(x) \leq M_1$.
Но из этого неравенства вытекает, что $f(x) \leq M - \frac{1}{M_1}$ $(x \in [a, b])$, а это противоречит тому, что число M является верхней гранью, т. е. наименьшей из всех верхних границ функции f. ■

Доказательство теоремы о непрерывности обратной функции.

Рассматриваем случай возрастающей f. В силу теоремы Больцано – Коши, областью значений функции f является отрезок $[f(a), f(b)]$. Так как f взаимно однозначна на $[a, b]$, то существует функция f^{-1}, отображающая $[f(a), f(b)]$ на $[a, b]$. Обозначим $g(y) = f^{-1}(y)$. Покажем, что g строго возрастает. Пусть $y' < y''$, $x' = g(y')$, $x'' = g(y'')$. Если $x' \geq x''$, то $f(x') \geq f(x'')$ (в силу возрастания f), т. е. $y' \geq y''$, что противоречит условию. Итак, получаем, что $x' < x''$, т. е. условие $y' < y''$ влечет $x' < x''$. Это и означает, что обратная функция $x = g(y)$ строго возрастает на $[f(a), f(b)]$.

Доказательство теоремы о непрерывности обратной функции.

Рассматриваем случай возрастающей f. В силу теоремы Больцано – Коши, областью значений функции f является отрезок $[f(a), f(b)]$. Так как f взаимно однозначна на $[a, b]$, то существует функция f^{-1}, отображающая $[f(a), f(b)]$ на $[a, b]$. Обозначим $g(y) = f^{-1}(y)$. Покажем, что g строго возрастает. Пусть $y' < y''$, $x' = g(y')$, $x'' = g(y'')$. Если $x' \geq x''$, то $f(x') \geq f(x'')$ (в силу возрастания f), т. е. $y' \geq y''$, что противоречит условию. Итак, получаем, что $x' < x''$, т. е. условие $y' < y''$ влечет $x' < x''$. Это и означает, что обратная функция $x = g(y)$ строго возрастает на $[f(a), f(b)]$.

Окончание доказательства теоремы о непрерывности обратной функции.

Остается доказать непрерывность обратной функции g.

Областью значений обратной функции g является отрезок $[a, b]$. В самом деле, каждое $x \in [a, b]$ является значением функции $g(y)$, где $y = f(x)$.

Так как g монотонна на $[f(a), f(b)]$ и ее областью значений является отрезок $[a, b]$, то, по теореме о непрерывности монотонной функции, функция g непрерывна на отрезке $[f(a), f(b)]$. ■

Окончание доказательства теоремы о непрерывности обратной функции.

Остается доказать непрерывность обратной функции g. Областью значений обратной функции g является отрезок $[a, b]$. В самом деле, каждое $x \in [a, b]$ является значением функции $g(y)$, где $y = f(x)$.

Так как g монотонна на $[f(a), f(b)]$ и ее областью значений является отрезок $[a, b]$, то, по теореме о непрерывности монотонной функции, функция g непрерывна на отрезке $[f(a), f(b)]$.

Окончание доказательства теоремы о непрерывности обратной функции.

Остается доказать непрерывность обратной функции g.
Областью значений обратной функции g является отрезок $[a, b]$. В самом деле, каждое $x \in [a, b]$ является значением функции $g(y)$, где $y = f(x)$.
Так как g монотонна на $[f(a), f(b)]$ и ее областью значений является отрезок $[a, b]$, то, по теореме о непрерывности монотонной функции, функция g непрерывна на отрезке $[f(a), f(b)]$. ■

Доказательство корректности определения степени с рациональным показателем.

Доказываем равенство

$$\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{mk} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}.$$

Для доказательства представим левую часть в виде $\left(\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{k}\right)^{m}$. Тогда искомое равенство принимает вид $\left(\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{k}\right)^{m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}$.

Если докажем, что $\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{k} = a^{\frac{1}{n}}$, то получим требуемое.

Обозначим $a^{\frac{1}{nk}} = b$. Нужно показать, что $b^k = a^{\frac{1}{n}}$.
Но $a = b^{nk} = \left(b^k\right)^n$, откуда следует $b^k = a^{\frac{1}{n}}$, что и требовалось показать.

Доказательство корректности определения степени с рациональным показателем.

Доказываем равенство

$$\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{mk} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}.$$

Для доказательства представим левую часть в виде $\left(\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{k}\right)^{m}$. Тогда искомое равенство принимает вид $\left(\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{k}\right)^{m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}$.

Если докажем, что $\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{k} = a^{\frac{1}{n}}$, то получим требуемое.

Обозначим $a^{\frac{1}{nk}} = b$. Нужно показать, что $b^k = a^{\frac{1}{n}}$.
Но $a = b^{nk} = \left(b^k\right)^n$, откуда следует $b^k = a^{\frac{1}{n}}$, что и требовалось показать.

Доказательство корректности определения степени с рациональным показателем.

Доказываем равенство

$$\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{mk} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}.$$

Для доказательства представим левую часть в виде $\left(\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{k}\right)^{m}$. Тогда искомое равенство принимает вид $\left(\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{k}\right)^{m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}$.

Если докажем, что $\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{k} = a^{\frac{1}{n}}$, то получим требуемое.

Обозначим $a^{\frac{1}{nk}} = b$. Нужно показать, что $b^k = a^{\frac{1}{n}}$.

Но $a = b^{nk} = \left(b^k\right)^n$, откуда следует $b^k = a^{\frac{1}{n}}$, что и требовалось показать.

Доказательство корректности определения степени с рациональным показателем.

Доказываем равенство

$$\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{mk} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}.$$

Для доказательства представим левую часть в виде $\left(\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{k}\right)^{m}$. Тогда искомое равенство принимает вид $\left(\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{k}\right)^{m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}$.

Если докажем, что $\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{k} = a^{\frac{1}{n}}$, то получим требуемое.

Обозначим $a^{\frac{1}{nk}} = b$. Нужно показать, что $b^k = a^{\frac{1}{n}}$.

Но $a = b^{nk} = \left(b^k\right)^n$, откуда следует $b^k = a^{\frac{1}{n}}$, что и требовалось показать.

Доказательство леммы 1.

Ранее мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. Отсюда, в силу определения степени с отрицательным рациональным показателем, также следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 :\ \forall n \geq N_1\ \left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon\ \Leftrightarrow\ 1 - \varepsilon < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 :\ \forall n \geq N_2\ \left|a^{-\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon\ \Leftrightarrow\ 1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon.$$

Зададим $\varepsilon > 0$, найдем номера N_1 и N_2 и обозначим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда получим $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon$.
Положим $\delta = \frac{1}{N}$.
Тогда если $r \in \mathbb{Q}$ и $|r| < \delta$, то $-\frac{1}{N} = -\delta < r < \delta = \frac{1}{N}$ и, так как $a > 1$, то $a^{-\frac{1}{N}} < a^r < a^{\frac{1}{N}}$, т. е. $1 - \varepsilon < a^r < 1 + \varepsilon$. Отсюда получаем, что $|a^r - 1| < \varepsilon$ и лемма доказана.

Доказательство леммы 1.

Ранее мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. Отсюда, в силу определения степени с отрицательным рациональным показателем, также следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 :\ \forall n \geq N_1\ \left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ 1 - \varepsilon < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 :\ \forall n \geq N_2\ \left|a^{-\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ 1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon.$$

Зададим $\varepsilon > 0$, найдем номера N_1 и N_2 и обозначим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда получим $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon$. Положим $\delta = \frac{1}{N}$.

Тогда если $r \in \mathbb{Q}$ и $|r| < \delta$, то $-\frac{1}{N} = -\delta < r < \delta = \frac{1}{N}$ и, так как $a > 1$, то $a^{-\frac{1}{N}} < a^r < a^{\frac{1}{N}}$, т. е. $1 - \varepsilon < a^r < 1 + \varepsilon$. Отсюда получаем, что $|a^r - 1| < \varepsilon$ и лемма доказана.

Доказательство леммы 1.

Ранее мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. Отсюда, в силу определения степени с отрицательным рациональным показателем, также следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$. Поэтому

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 :\ \forall n \geq N_1\ \left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon\ \Leftrightarrow\ 1-\varepsilon < a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2 :\ \forall n \geq N_2\ \left|a^{-\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon\ \Leftrightarrow\ 1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon.$$

Зададим $\varepsilon > 0$, найдем номера N_1 и N_2 и обозначим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда получим $1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon$.
Положим $\delta = \frac{1}{N}$.
Тогда если $r \in \mathbb{Q}$ и $|r| < \delta$, то $-\frac{1}{N} = -\delta < r < \delta = \frac{1}{N}$ и, так как $a > 1$, то $a^{-\frac{1}{N}} < a^r < a^{\frac{1}{N}}$, т. е. $1-\varepsilon < a^r < 1+\varepsilon$. Отсюда получаем, что $|a^r - 1| < \varepsilon$ и лемма доказана. ■

Доказательство леммы 2.

Докажем фундаментальность $\{a^{r_n}\}$. Прежде всего, из сходимости $\{r_n\}$ следует ограниченность сверху этой последовательности, т. е. существует $M \in \mathbb{Q}$, такое, что $r_n \le M$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Далее, так как $\{r_n\}$ – фундаментальна, то для любого $\delta > 0$ найдется такое N, что для всех $n, m \ge N$ справедливо неравенство $|r_n - r_m| < \delta$.

Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь леммой 1, найдем такое δ, что из неравенства $|r| < \delta$ следует $|a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{a^M}$. Для найденного δ, пользуясь фундаментальностью $\{r_n\}$, найдем N.

Пусть $m, n \ge N$. Тогда

$$|a^{r_m} - a^{r_n}| = a^{r_n} \left|a^{r_m - r_n} - 1\right| < a^M \cdot \frac{\varepsilon}{a^M} = \varepsilon.$$

Доказательство леммы 2.

Докажем фундаментальность $\{a^{r_n}\}$. Прежде всего, из сходимости $\{r_n\}$ следует ограниченность сверху этой последовательности, т. е. существует $M \in \mathbb{Q}$, такое, что $r_n \le M$ $(n = 1, 2, \dots)$.
Далее, так как $\{r_n\}$ – фундаментальна, то для любого $\delta > 0$ найдется такое N, что для всех $n, m \ge N$ справедливо неравенство $|r_n - r_m| < \delta$.
Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь леммой 1, найдем такое δ, что из неравенства $|r| < \delta$ следует $|a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{a^M}$. Для найденного δ, пользуясь фундаментальностью $\{r_n\}$, найдем N.
Пусть $m, n \ge N$. Тогда

$$\left|a^{r_m} - a^{r_n}\right| = a^{r_n}\left|a^{r_m - r_n} - 1\right| < a^M \cdot \frac{\varepsilon}{a^M} = \varepsilon.$$

Доказательство леммы 2.

Докажем фундаментальность $\{a^{r_n}\}$. Прежде всего, из сходимости $\{r_n\}$ следует ограниченность сверху этой последовательности, т. е. существует $M \in \mathbb{Q}$, такое, что $r_n \le M$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Далее, так как $\{r_n\}$ – фундаментальна, то для любого $\delta > 0$ найдется такое N, что для всех $n, m \ge N$ справедливо неравенство $|r_n - r_m| < \delta$.

Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь леммой 1, найдем такое δ, что из неравенства $|r| < \delta$ следует $|a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{a^M}$. Для найденного δ, пользуясь фундаментальностью $\{r_n\}$, найдем N.

Пусть $m, n \ge N$. Тогда

$$|a^{r_m} - a^{r_n}| = a^{r_n} \left|a^{r_m - r_n} - 1\right| < a^M \cdot \frac{\varepsilon}{a^M} = \varepsilon.$$

Доказательство леммы 2.

Докажем фундаментальность $\{a^{r_n}\}$. Прежде всего, из сходимости $\{r_n\}$ следует ограниченность сверху этой последовательности, т. е. существует $M \in \mathbb{Q}$, такое, что $r_n \leq M$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Далее, так как $\{r_n\}$ – фундаментальна, то для любого $\delta > 0$ найдется такое N, что для всех $n, m \geq N$ справедливо неравенство $|r_n - r_m| < \delta$.

Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь леммой 1, найдем такое δ, что из неравенства $|r| < \delta$ следует $|a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{a^M}$. Для найденного δ, пользуясь фундаментальностью $\{r_n\}$, найдем N.

Пусть $m, n \geq N$. Тогда

$$|a^{r_m} - a^{r_n}| = a^{r_n} \left|a^{r_m - r_n} - 1\right| < a^M \cdot \frac{\varepsilon}{a^M} = \varepsilon.$$

Доказательство корректности определения показательной функции.

Покажем что a^x не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$, сходящейся к x.

Пусть $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ сходятся к x, а $\left\{a^{r'_n}\right\}$ и $\left\{a^{r''_n}\right\}$ сходятся к разным пределам (сходимость этих последовательностей вытекает из леммы 2).

Но тогда последовательность $\{r'_1, r''_1, r'_2, r''_2, \ldots\}$ сходится, а последовательность $\left\{a^{r'_1}, a^{r''_1}, a^{r'_2}, a^{r''_2}, \ldots\right\}$ имеет два различных частичных предела и, стало быть, расходится, что противоречит лемме 2. ■

Доказательство корректности определения показательной функции.

Покажем что a^x не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$, сходящейся к x.
Пусть $\{r_n'\}$ и $\{r_n''\}$ сходятся к x, а $\left\{a^{r_n'}\right\}$ и $\left\{a^{r_n''}\right\}$ сходятся к разным пределам (сходимость этих последовательностей вытекает из леммы 2).
Но тогда последовательность $\{r_1', r_1'', r_2', r_2'', \dots\}$ сходится, а последовательность $\left\{a^{r_1'}, a^{r_1''}, a^{r_2'}, a^{r_2''}, \dots\right\}$ имеет два различных частичных предела и, стало быть, расходится, что противоречит лемме 2.

Доказательство корректности определения показательной функции.

Покажем что a^x не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$, сходящейся к x.
Пусть $\{r_n'\}$ и $\{r_n''\}$ сходятся к x, а $\left\{a^{r_n'}\right\}$ и $\left\{a^{r_n''}\right\}$ сходятся к разным пределам (сходимость этих последовательностей вытекает из леммы 2).
Но тогда последовательность $\{r_1', r_1'', r_2', r_2'', \dots\}$ сходится, а последовательность $\left\{a^{r_1'}, a^{r_1''}, a^{r_2'}, a^{r_2''}, \dots\right\}$ имеет два различных частичных предела и, стало быть, расходится, что противоречит лемме 2. $\blacksquare$

Доказательство свойства 1.

Пусть $r'_n \to x'$, $r''_n \to x''$. Тогда $r'_n + r''_n \to x' + x''$ и

$$a^{x'} \cdot a^{x''} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{r''_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} \cdot a^{r''_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n + r''_n} = a^{x'+x''}.$$

Доказательство свойства 2.

Пусть $x' < x''$. Нужно доказать, что $a^{x'} < a^{x''}$. Для этого покажем сначала, что $a^x > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Пусть последовательность рациональных чисел $r_n \to x$ $(n \to \infty)$. Тогда существует рациональное число $r < r_n$ $(n \geq N)$, и, значит, $a^r < a^{r_n}$, откуда $a^r \leq \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x$. Но $a^r > 0$, так что и $a^x > 0$.

Умножим требуемое неравенство $a^{x'} < a^{x''}$ на $a^{-x'} > 0$. Получим эквивалентное неравенство $1 < a^{x''-x'}$, где $x'' - x' = z > 0$. Таким образом, нужно показать, что $a^z > 1$ при любом действительном $z > 0$. Выберем рациональное r, такое, что $0 < r < z$, и последовательность рациональных чисел $r_n \geq r$, стремящуюся к z. Тогда $a^z = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} \geq a^r > a^0 = 1$, и тем самым завершается доказательство.

Доказательство свойства 2.

Пусть $x' < x''$. Нужно доказать, что $a^{x'} < a^{x''}$. Для этого покажем сначала, что $a^x > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Пусть последовательность рациональных чисел $r_n \to x$ $(n \to \infty)$. Тогда существует рациональное число $r < r_n$ $(n \geq N)$, и, значит, $a^r < a^{r_n}$, откуда $a^r \leq \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x$. Но $a^r > 0$, так что и $a^x > 0$.

Умножим требуемое неравенство $a^{x'} < a^{x''}$ на $a^{-x'} > 0$. Получим эквивалентное неравенство $1 < a^{x''-x'}$, где $x'' - x' = z > 0$. Таким образом, нужно показать, что $a^z > 1$ при любом действительном $z > 0$. Выберем рациональное r, такое, что $0 < r < z$, и последовательность рациональных чисел $r_n \geq r$, стремящуюся к z. Тогда $a^z = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} \geq a^r > a^0 = 1$, и тем самым завершается доказательство.

Доказательство свойства 3.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $a^x - a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{x-x_0} - 1\right)$. Поэтому достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0} = 1$, или, что то же самое, $\lim\limits_{t\to 0} a^t = 1$. Используем определение предела функции в терминах последовательностей.

Пусть $\{t_n\}$ стремится к нулю. Тогда найдется последовательность положительных рациональных чисел $\{r_n\}$, стремящаяся к нулю и такая, что $-r_n \le t_n \le r_n$. Тогда $a^{-r_n} \le a^{t_n} \le a^{r_n}$, т. е. $a^{-r_n} - 1 \le a^{t_n} - 1 \le a^{r_n} - 1$. Из условия $a^{r_n} \to a^0 = 1$ $(n \to \infty)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_1, что при любом $n \ge N_1$ справедливо неравенство $a^{r_n} - 1 < \varepsilon$.

Доказательство свойства 3.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $a^x - a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{x-x_0} - 1\right)$. Поэтому достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0} = 1$, или, что то же самое, $\lim\limits_{t\to 0} a^t = 1$. Используем определение предела функции в терминах последовательностей.

Пусть $\{t_n\}$ стремится к нулю. Тогда найдется последовательность положительных рациональных чисел $\{r_n\}$, стремящаяся к нулю и такая, что $-r_n \le t_n \le r_n$. Тогда $a^{-r_n} \le a^{t_n} \le a^{r_n}$, т. е. $a^{-r_n} - 1 \le a^{t_n} - 1 \le a^{r_n} - 1$. Из условия $a^{r_n} \to a^0 = 1$ $(n \to \infty)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_1, что при любом $n \ge N_1$ справедливо неравенство $a^{r_n} - 1 < \varepsilon$.

Окончание доказательства свойства 3.

Далее, поскольку $a^{-r_n} \to a^0 = 1$ $(n \to \infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_2, что при всех $n \geq N_2$ справедливо неравенство $a^{-r_n} - 1 > -\varepsilon$. Зададим $\varepsilon > 0$, найдем номера N_1 и N_2 и положим $N = \max(N_1, N_2)$.

Тогда для $n \geq N$ получим $-\varepsilon < a^{t_n} - 1 < \varepsilon$, т. е. $|a^{t_n} - 1| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{t_n} = 1$, а в силу произвольности последовательности $\{t_n\}$ получаем, что $\lim\limits_{t\to 0} a^t = 1$. ■

Окончание доказательства свойства 3.

Далее, поскольку $a^{-r_n} \to a^0 = 1$ $(n \to \infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_2, что при всех $n \geq N_2$ справедливо неравенство $a^{-r_n} - 1 > -\varepsilon$. Зададим $\varepsilon > 0$, найдем номера N_1 и N_2 и положим $N = \max(N_1, N_2)$.

Тогда для $n \geq N$ получим $-\varepsilon < a^{t_n} - 1 < \varepsilon$, т. е. $|a^{t_n} - 1| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{t_n} = 1$, а в силу произвольности последовательности $\{t_n\}$ получаем, что $\lim\limits_{t\to 0} a^t = 1$.

Доказательство свойства 4.

Сначала рассмотрим случай $x'' = r \in \mathbb{Q}$.

Пусть $r'_n \to x'$ $(n \to \infty)$. Тогда $r'_n \cdot r \to x' \cdot r$ $(n \to \infty)$ и $\left(a^{r'_n}\right)^r = a^{r'_n \cdot r} \to a^{x' \cdot r}$ $(n \to \infty)$.

С другой стороны, так как $a^{r'_n} \to a^{x'}$ $(n \to \infty)$, то на основании непрерывности степенной функции с рациональным показателем r получаем, что $\left(a^{r'_n}\right)^r \to \left(a^{x'}\right)^r$ $(n \to \infty)$, откуда, в силу единственности предела, следует, что $\left(a^{x'}\right)^r = a^{x' \cdot r}$.

Пусть теперь произвольные $x', x'' \in \mathbb{R}$. Используя доказанный случай, получим

$$\left(a^{x'}\right)^{x''} = \lim_{n\to\infty} \left(a^{x'}\right)^{r''_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x' \cdot r''_n} = a^{x' \cdot x''}.$$

Доказательство свойства 4.

Сначала рассмотрим случай $x'' = r \in \mathbb{Q}$.
Пусть $r'_n \to x'$ $(n \to \infty)$. Тогда $r'_n \cdot r \to x' \cdot r$ $(n \to \infty)$ и $\left(a^{r'_n}\right)^r = a^{r'_n \cdot r} \to a^{x' \cdot r}$ $(n \to \infty)$.

С другой стороны, так как $a^{r'_n} \to a^{x'}$ $(n \to \infty)$, то на основании непрерывности степенной функции с рациональным показателем r получаем, что $\left(a^{r'_n}\right)^r \to \left(a^{x'}\right)^r$ $(n \to \infty)$, откуда, в силу единственности предела, следует, что $\left(a^{x'}\right)^r = a^{x' \cdot r}$.

Пусть теперь произвольные $x', x'' \in \mathbb{R}$. Используя доказанный случай, получим

$$\left(a^{x'}\right)^{x''} = \lim_{n\to\infty} \left(a^{x'}\right)^{r''_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x' \cdot r''_n} = a^{x' \cdot x''}.$$

Доказательство свойства 4.

Сначала рассмотрим случай $x'' = r \in \mathbb{Q}$.
Пусть $r_n' \to x'$ $(n \to \infty)$. Тогда $r_n' \cdot r \to x' \cdot r$ $(n \to \infty)$ и $\left(a^{r_n'}\right)^r = a^{r_n' \cdot r} \to a^{x' \cdot r}$ $(n \to \infty)$.
С другой стороны, так как $a^{r_n'} \to a^{x'}$ $(n \to \infty)$, то на основании непрерывности степенной функции с рациональным показателем r получаем, что $\left(a^{r_n'}\right)^r \to \left(a^{x'}\right)^r$ $(n \to \infty)$, откуда, в силу единственности предела, следует, что $\left(a^{x'}\right)^r = a^{x' \cdot r}$.
Пусть теперь произвольные $x', x'' \in \mathbb{R}$. Используя доказанный случай, получим

$$\left(a^{x'}\right)^{x''} = \lim_{n\to\infty} \left(a^{x'}\right)^{r_n''} = \lim_{n\to\infty} a^{x' \cdot r_n''} = a^{x' \cdot x''}.$$

Доказательство свойства 4.

Сначала рассмотрим случай $x'' = r \in \mathbb{Q}$.
Пусть $r'_n \to x'$ $(n \to \infty)$. Тогда $r'_n \cdot r \to x' \cdot r$ $(n \to \infty)$ и
$\left(a^{r'_n}\right)^r = a^{r'_n \cdot r} \to a^{x' \cdot r}$ $(n \to \infty)$.

С другой стороны, так как $a^{r'_n} \to a^{x'}$ $(n \to \infty)$, то на основании непрерывности степенной функции с рациональным показателем r получаем, что $\left(a^{r'_n}\right)^r \to \left(a^{x'}\right)^r$ $(n \to \infty)$, откуда, в силу единственности предела, следует, что $\left(a^{x'}\right)^r = a^{x' \cdot r}$.

Пусть теперь произвольные $x', x'' \in \mathbb{R}$. Используя доказанный случай, получим

$$\left(a^{x'}\right)^{x''} = \lim_{n\to\infty} \left(a^{x'}\right)^{r''_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x' \cdot r''_n} = a^{x' \cdot x''}.$$

Доказательство свойства 5.

Используя неравенство Бернулли, получим

$$a^x \geq a^{[x]} = (1+\alpha)^{[x]} \geq \alpha[x] \geq \alpha(x-1),$$

где $\alpha = a - 1 > 0$.
Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. Так как $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, то при $x \to -\infty$ имеем $-x \to +\infty$ и $a^{-x} = \frac{1}{a^x} \to +\infty$, так что $a^x \to 0$ при $x \to -\infty$.

Доказательство свойства 5.

Используя неравенство Бернулли, получим

$$a^x \geq a^{[x]} = (1+\alpha)^{[x]} \geq \alpha[x] \geq \alpha(x-1),$$

где $\alpha = a - 1 > 0$.

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. Так как $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, то при $x \to -\infty$ имеем $-x \to +\infty$ и $a^{-x} = \frac{1}{a^x} \to +\infty$, так что $a^x \to 0$ при $x \to -\infty$.

Доказательство второго замечательного предела.

Ранее число e было определено как предел последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Пусть $\{x_k\}$ – последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю. Тогда выберем последовательность натуральных чисел n_k, такую, что $n_k \leq \frac{1}{x_k} < n_k + 1$, т. е. положим $n_k = \left[\frac{1}{x_k}\right]$. Так как $\{n_k\}$ – подпоследовательность натуральных чисел, то подпоследовательность $\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится к e.

Доказательство второго замечательного предела.

Ранее число e было определено как предел последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Пусть $\{x_k\}$ – последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю. Тогда выберем последовательность натуральных чисел n_k, такую, что $n_k \leq \frac{1}{x_k} < n_k + 1$, т. е. положим $n_k = \left[\frac{1}{x_k}\right]$. Так как $\{n_k\}$ – подпоследовательность натуральных чисел, то подпоследовательность $\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится к e.

Продолжение доказательства второго замечательного предела.

Отсюда и из неравенств

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)} = \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} \le (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} \le$$

$$\le \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right),$$

применяя теорему о трех пределах, получаем

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \mathrm{e}.$$

Так как $\{x_k\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю, то, в силу определения предела по Гейне,

$$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

Продолжение доказательства второго замечательного предела.

Отсюда и из неравенств

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)} = \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} \leq (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} \leq$$

$$\leq \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right),$$

применяя теорему о трех пределах, получаем

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \mathrm{e}.$$

Так как $\{x_k\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю, то, в силу определения предела по Гейне,

$$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

Продолжение доказательства второго замечательного предела.

Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

Пусть $x_k \to 0-$ $(k\to\infty)$. Тогда, начиная с некоторого номера, справедливо неравенство $x_k > -1$. Можем считать, что $x_k > -1$ при всех $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $y_k = -x_k > 0$ и $y_k \to 0+$ $(k\to\infty)$. Имеем

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \lim_{k\to\infty}(1-y_k)^{-\frac{1}{y_k}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} = \lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}}\right]^{\frac{1}{1-y_k}}.$$

Продолжение доказательства второго замечательного предела.

Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

Пусть $x_k \to 0-$ $(k\to\infty)$. Тогда, начиная с некоторого номера, справедливо неравенство $x_k > -1$. Можем считать, что $x_k > -1$ при всех $k = 1, 2, \dots$. Тогда $y_k = -x_k > 0$ и $y_k \to 0+$ $(k\to\infty)$. Имеем

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \lim_{k\to\infty}(1-y_k)^{-\frac{1}{y_k}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} = \lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}}\right]^{\frac{1}{1-y_k}}.$$

Продолжение доказательства второго замечательного предела.

Обозначим $z_k = \frac{y_k}{1-y_k}$. Тогда $z_k \to 0+$, и поэтому получим

$$\lim_{k\to\infty} (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \lim_{k\to\infty} \left[(1+z_k)^{\frac{1}{z_k}}\right]^{z_k+1} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (1+z_k)\,(1+z_k)^{\frac{1}{z_k}} = \mathrm{e}.$$

Так как $\{x_k\}$ – произвольная последовательность отрицательных чисел, стремящаяся к нулю, то, в силу определения предела по Гейне,

$$\lim_{x\to 0-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

Окончание доказательства второго замечательного предела.

Итак, мы доказали, что $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \mathrm{e}$ при $x \to 0+$ и при $x \to 0-$.

Поэтому и

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

Этот предел можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}.$$

Окончание доказательства второго замечательного предела.

Итак, мы доказали, что $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \mathrm{e}$ при $x \to 0+$ и при $x \to 0-$.
Поэтому и
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

Этот предел можно переписать в следующем эквивалентном виде:
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}.$$

Окончание доказательства второго замечательного предела.

Итак, мы доказали, что $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \mathrm{e}$ при $x \to 0+$ и при $x \to 0-$.
Поэтому и

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

Этот предел можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}.$$

Доказательство следствия 1.

Так как $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \mathrm{e}$ $(x \to 0)$ и функция $z = \ln y$ непрерывна, то

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \ln \mathrm{e} = 1 \ (x \to 0).$$

$\blacksquare$

Доказательство следствия 2.

Доказываем равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0).$$

При $a=1$ это равенство очевидно. Пусть $a\neq 1$.
Положим $a^x-1=y$. Тогда $x=\log_a(1+y)=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}$ и $y\to 0$ при $x\to 0$.
Используя следствие 1, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y\cdot\ln a}{\ln(y+1)}=\ln a.$$

Доказательство следствия 2.

Доказываем равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0).$$

При $a=1$ это равенство очевидно. Пусть $a\neq 1$.
Положим $a^x-1=y$. Тогда $x=\log_a(1+y)=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}$ и $y\to 0$ при $x\to 0$.
Используя следствие 1, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y\cdot\ln a}{\ln(y+1)}=\ln a.$$

Доказательство следствия 2.

Доказываем равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0).$$

При $a=1$ это равенство очевидно. Пусть $a\neq 1$.
Положим $a^x-1=y$. Тогда $x=\log_a(1+y)=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}$ и $y\to 0$ при $x\to 0$.
Используя следствие 1, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y\cdot\ln a}{\ln(y+1)}=\ln a.$$

Доказательство равенства 1).

Для доказательства 1) докажем сначала, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{b^x} = 0$ $(b > 1)$. Выберем последовательность $x_k \to +\infty$ $(k \to \infty)$ и положим $n_k = [x_k]$. Тогда

$$0 < \frac{x_k}{b^{x_k}} \leq \frac{n_k + 1}{b^{n_k}} = \frac{n_k}{b^{n_k}} \cdot \frac{n_k + 1}{n_k}.$$

Так как $\{n_k\}$ – подпоследовательность натуральных чисел и, как было показано ранее, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0$ $(b > 1)$, то, в силу произвольности $\{x_k\}$, получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{b^x} = 0$.

Теперь имеем

$$\frac{x^\alpha}{a^x} = \left(\frac{x}{a^{\frac{1}{\alpha}\cdot x}}\right)^\alpha = \left(\frac{x}{b^x}\right)^\alpha,$$

где $b = a^{\frac{1}{\alpha}} > 1$. Так как $\alpha > 0$ и $\frac{x}{b^x} \to 0$ при $x \to +\infty$, то и $\left(\frac{x}{b^x}\right)^\alpha \to 0$ $(x \to +\infty)$. Этим доказано 1).

Доказательство равенства 1).

Для доказательства 1) докажем сначала, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{b^x} = 0$ $(b > 1)$. Выберем последовательность $x_k \to +\infty$ $(k \to \infty)$ и положим $n_k = [x_k]$. Тогда

$$0 < \frac{x_k}{b^{x_k}} \leq \frac{n_k + 1}{b^{n_k}} = \frac{n_k}{b^{n_k}} \cdot \frac{n_k + 1}{n_k}.$$

Так как $\{n_k\}$ – подпоследовательность натуральных чисел и, как было показано ранее, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0$ $(b > 1)$, то, в силу произвольности $\{x_k\}$, получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{b^x} = 0$.

Теперь имеем

$$\frac{x^\alpha}{a^x} = \left(\frac{x}{a^{\frac{1}{\alpha}\cdot x}}\right)^\alpha = \left(\frac{x}{b^x}\right)^\alpha,$$

где $b = a^{\frac{1}{\alpha}} > 1$. Так как $\alpha > 0$ и $\frac{x}{b^x} \to 0$ при $x \to +\infty$, то и $\left(\frac{x}{b^x}\right)^\alpha \to 0$ $(x \to +\infty)$. Этим доказано 1).

Доказательство равенства 2).

Из 1) получим 2), если обозначим $x^{\alpha} = a^{t}$. Действительно, условие $x \to +\infty$ равносильно тому, что $t \to +\infty$ и поэтому

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^{\alpha}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\log_a (a^t)^{\frac{1}{\alpha}}}{a^t} = \frac{1}{\alpha} \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{a^t} = 0.$$

Доказательство теоремы Кантора.

Докажем методом от противного, используя лемму Больцано – Вейерштрасса.

Предположим, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f не является равномерно непрерывной на этом отрезке. Это означает, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $x', x'' \in [a, b]$, такие, что $|x' - x''| < \delta$, и при этом $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$.

Полагая $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$, построим соответствующие точки x'_n, x''_n.

Возьмем последовательность точек x'_n и, пользуясь леммой Больцано – Вейерштрасса, выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = c \in [a, b]$. Из условия $\left|x'_{n_k} - x''_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k}$ следует также, что $x''_{n_k} \to c$ $(k \to \infty)$, поскольку $\left|x''_{n_k} - c\right| \leq \left|x'_{n_k} - x''_{n_k}\right| + \left|x'_{n_k} - c\right|$.

Доказательство теоремы Кантора.

Докажем методом от противного, используя лемму Больцано – Вейерштрасса.

Предположим, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f не является равномерно непрерывной на этом отрезке. Это означает, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $x', x'' \in [a, b]$, такие, что $|x' - x''| < \delta$, и при этом $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$.

Полагая $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$, построим соответствующие точки x'_n, x''_n.

Возьмем последовательность точек x'_n и, пользуясь леммой Больцано – Вейерштрасса, выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $\left\{x'_{n_k}\right\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = c \in [a, b]$. Из условия $\left|x'_{n_k} - x''_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k}$ следует также, что $x''_{n_k} \to c$ $(k \to \infty)$, поскольку $\left|x''_{n_k} - c\right| \leq \left|x'_{n_k} - x''_{n_k}\right| + \left|x'_{n_k} - c\right|$.

Доказательство теоремы Кантора.

Докажем методом от противного, используя лемму Больцано – Вейерштрасса.
Предположим, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f не является равномерно непрерывной на этом отрезке. Это означает, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $x', x'' \in [a, b]$, такие, что $|x' - x''| < \delta$, и при этом $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$.
Полагая $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$, построим соответствующие точки x_n', x_n''.
Возьмем последовательность точек x_n' и, пользуясь леммой Больцано – Вейерштрасса, выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $\left\{x_{n_k}'\right\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}' = c \in [a, b]$. Из условия $\left|x_{n_k}' - x_{n_k}''\right| < \frac{1}{n_k}$ следует также, что $x_{n_k}'' \to c$ $(k \to \infty)$, поскольку $\left|x_{n_k}'' - c\right| \leq \left|x_{n_k}' - x_{n_k}''\right| + \left|x_{n_k}' - c\right|$.

Доказательство теоремы Кантора.

Докажем методом от противного, используя лемму Больцано – Вейерштрасса.

Предположим, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f не является равномерно непрерывной на этом отрезке. Это означает, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $x', x'' \in [a, b]$, такие, что $|x' - x''| < \delta$, и при этом $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$.

Полагая $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$, построим соответствующие точки x'_n, x''_n.

Возьмем последовательность точек x'_n и, пользуясь леммой Больцано – Вейерштрасса, выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $\left\{x'_{n_k}\right\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = c \in [a, b]$. Из условия $\left|x'_{n_k} - x''_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k}$ следует также, что $x''_{n_k} \to c$ $(k \to \infty)$, поскольку $\left|x''_{n_k} - c\right| \leq \left|x'_{n_k} - x''_{n_k}\right| + \left|x'_{n_k} - c\right|$.

Окончание доказательства теоремы Кантора.

Но тогда из непрерывности функции f в точке $c \in [a, b]$ следует, что $f\left(x'_{n_k}\right) \to f(c)$ $(k \to \infty)$ и $f\left(x''_{n_k}\right) \to f(c)$ $(k \to \infty)$.
Отсюда и из неравенства

$$\left|f\left(x'_{n_k}\right) - f\left(x''_{n_k}\right)\right| \leq \left|f\left(x'_{n_k}\right) - f(c)\right| + \left|f\left(x''_{n_k}\right) - f(c)\right|$$

вытекает, что левая часть может быть сделана сколь угодно малой при достаточно большом k, а это противоречит тому, что $\left|f\left(x'_{n_k}\right) - f\left(x''_{n_k}\right)\right| \geq \varepsilon_0 > 0$. ■

Окончание доказательства теоремы Кантора.

Но тогда из непрерывности функции f в точке $c \in [a, b]$ следует, что $f\left(x'_{n_k}\right) \to f(c)$ $(k \to \infty)$ и $f\left(x''_{n_k}\right) \to f(c)$ $(k \to \infty)$. Отсюда и из неравенства

$$\left|f\left(x'_{n_k}\right) - f\left(x''_{n_k}\right)\right| \leq \left|f\left(x'_{n_k}\right) - f(c)\right| + \left|f\left(x''_{n_k}\right) - f(c)\right|$$

вытекает, что левая часть может быть сделана сколь угодно малой при достаточно большом k, а это противоречит тому, что $\left|f\left(x'_{n_k}\right) - f\left(x''_{n_k}\right)\right| \geq \varepsilon_0 > 0$.

Доказательство теоремы об эквивалентных функциях.

По определению эквивалентных функций, используя арифметические свойства пределов, получаем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{f_1(x)}\cdot\frac{g_1(x)}{g(x)}\cdot\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=1\cdot 1\cdot A=A,$$

и теорема доказана. ■

Доказательство теоремы о символах Ландау.

Рассматриваем случай $x_0 \in \mathbb{R}$. Зададим $\varepsilon = 1$ и найдем такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $\left|\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| - K\right| < 1$.

Последнее неравенство равносильно тому, что

$$K - 1 < \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < K + 1.$$

Умножая правое неравенство на $|g(x)|$, получаем утверждение теоремы.

Доказательство теоремы о символах Ландау.

Рассматриваем случай $x_0 \in \mathbb{R}$. Зададим $\varepsilon = 1$ и найдем такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $\left|\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| - K\right| < 1$.
Последнее неравенство равносильно тому, что

$$K - 1 < \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < K + 1.$$

Умножая правое неравенство на $|g(x)|$, получаем утверждение теоремы. $\blacksquare$

Доказательство критерия эквивалентности.

Необходимость. Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$. Тогда $\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \to 0 \ (x \to x_0)$, т. е. $\frac{f(x)}{g(x)} - 1 = h(x)$, где $h(x) \to 0 \ (x \to x_0)$. Отсюда следует, что $f(x) = g(x) + g(x) \cdot h(x)$. Но $\frac{g(x) \cdot h(x)}{g(x)} = h(x)$, т. е. $g(x) \cdot h(x) = \overline{o}(g(x)) \ (x \to x_0)$.

Достаточность. Если $f(x) = g(x) + \overline{o}(g(x)) \ (x \to x_0)$, то $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{\overline{o}(g(x))}{g(x)}$ и поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. ■

Доказательство критерия эквивалентности.

Необходимость. Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$. Тогда $\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \to 0 \ (x \to x_0)$, т. е. $\frac{f(x)}{g(x)} - 1 = h(x)$, где $h(x) \to 0 \ (x \to x_0)$. Отсюда следует, что $f(x) = g(x) + g(x) \cdot h(x)$. Но $\frac{g(x) \cdot h(x)}{g(x)} = h(x)$, т. е. $g(x) \cdot h(x) = \overline{o}(g(x)) \ (x \to x_0)$.

Достаточность. Если $f(x) = g(x) + \overline{o}(g(x)) \ (x \to x_0)$, то $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{\overline{o}(g(x))}{g(x)}$ и поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Доказательство критерия эквивалентности.

Необходимость. Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$. Тогда $\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \to 0 \ (x \to x_0)$, т. е. $\frac{f(x)}{g(x)} - 1 = h(x)$, где $h(x) \to 0 \ (x \to x_0)$. Отсюда следует, что $f(x) = g(x) + g(x) \cdot h(x)$. Но $\frac{g(x) \cdot h(x)}{g(x)} = h(x)$, т. е. $g(x) \cdot h(x) = \overline{o}(g(x)) \ (x \to x_0)$.

Достаточность. Если $f(x) = g(x) + \overline{o}(g(x)) \ (x \to x_0)$, то $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{\overline{o}(g(x))}{g(x)}$ и поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. ■