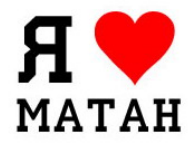
Математический анализ

Лекции по математическому анализу



Анатолий КОРЕНОВСКИЙ

Кафедра математического анализа
Институт математики, экономики и механики

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

25 января 2013 г.

Текст лекций

Данные лекции составлены на основе учебника

В. И. Коляда, А. А. Кореновский. *Курс лекций по математическому анализу, ч.1,2. Одесса, Астропринт, 2010.*

Список литературы

Учебники

- 1. Г. М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1,2,3. М., Наука, 1970.*
- 2. Э. Ландау. *Основы анализа. М., ИЛ, 1947.*
- 3. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа, ч. 1,2. М., Наука, 1982.
- 4. А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа, М., Наука, 1988.
- 5. С. М. Никольский. Курс математического анализа, т. 1,2. М., Наука, 1990.
- 6. Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. 1,2. М., Наука, 1964.
- 7. Л. Д. Кудрявцев. Математический анализ, т. 1,2. М., Высшая школа, 1973.

Список литературы

Сборники задач

- 8. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., Наука, 1977.
- 9. Л. Д. Кудрявцев и др. Сборник задач по математическому анализу, М., Наука, 1984.
- 10. И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. Математический анализ в задачах и упражнениях, М., Изд-во МГУ, 1991.
- 11. И. И. Ляшко и др. Математический анализ в примерах и задачах, Киев, Вища школа, 1974.

Тема 6. Неопределенный интеграл.

§1. Определение и простейшие свойства

§1. Определение и простейшие свойства

§1. Определение и простейшие свойства

Пусть функция f дифференцируема в некоторой точке x. Тогда, согласно определению дифференцируемости и свойствам производной, справедливо равенство

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\,\Delta x+\overline{o}(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0).$$

Левая часть этого равенства называется приращением функции f в точке x, соответствующим приращению Δx независимой переменной в точке x, и обозначается

$$\Delta f\equiv\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x).$$

§1. Определение и простейшие свойства

Пусть функция f дифференцируема в некоторой точке x. Тогда, согласно определению дифференцируемости и свойствам производной, справедливо равенство

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + \overline{o}(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0).$$

Левая часть этого равенства называется приращением функции f в точке x, соответствующим приращению Δx независимой переменной в точке x, и обозначается

$$\Delta f \equiv \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x).$$

§1. Определение и простейшие свойства

Таким образом, приращение $\Delta f(x)$ дифференцируемой в точке x функции f состоит из двух слагаемых: $f'(x)\Delta x$ и $\overline{o}(\Delta x)$. При этом главную часть этого приращения составляет первое слагаемое (за исключением случая, когда $f'(x)=0$). Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение. Пусть функция f дифференцируема в точке x. Линейная функция $dy = f'(x)\,dx$ переменной dx называется **дифференциалом** функции f в точке x и обозначается

$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

§1. Определение и простейшие свойства

Таким образом, приращение $\Delta f(x)$ дифференцируемой в точке x функции f состоит из двух слагаемых: $f'(x)\,\Delta x$ и $\overline{o}\,(\Delta x)$. При этом главную часть этого приращения составляет первое слагаемое (за исключением случая, когда $f'(x) = 0$). Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение. Пусть функция f дифференцируема в точке x. Линейная функция $dy = f'(x)\;dx$ переменной dx называется **дифференциалом** функции f в точке x и обозначается

$$df(x) = f'(x)\;dx.$$

§1. Определение и простейшие свойства

Таким образом, приращение $\Delta f(x)$ дифференцируемой в точке x функции f состоит из двух слагаемых: $f'(x)\Delta x$ и $\overline{o}(\Delta x)$. При этом главную часть этого приращения составляет первое слагаемое (за исключением случая, когда $f'(x) = 0$). Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение. Пусть функция f дифференцируема в точке x. Линейная функция $dy = f'(x)\,dx$ переменной dx называется дифференциалом функции f в точке x и обозначается

$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

§1. Определение и простейшие свойства

Если в определении дифференциала переменную x считать зависимой от другой переменной $x = x(t)$, то для функции $g(t) = f(x(t))$ будем иметь

$$df(x) = df(x(t)) = dg(t) = g'(t)dt = f'(x(t))x'(t)dt = f'(x)dx.$$

Получили, что форма дифференциала функции не зависит от того, является ли переменная x зависимой, или независимой. Это свойство называется инвариантностью формы дифференциала.

§1. Определение и простейшие свойства

Если в определении дифференциала переменную x считать зависимой от другой переменной $x = x(t)$, то для функции $g(t) = f(x(t))$ будем иметь

$$df(x) = df(x(t)) = dg(t) = g'(t)dt = f'(x(t))x'(t)dt = f'(x)dx.$$

Получили, что форма дифференциала функции не зависит от того, является ли переменная x зависимой, или независимой. Это свойство называется инвариантностью формы дифференциала.

§1. Определение и простейшие свойства

Свойства дифференциала определяются свойствами производных и правилами дифференцирования.

Например,

$$d(uv)(x) = \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)\,dx = u(x)\,dv(x)+v(x)\,du(x),$$

или, короче,

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Аналогично имеем

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

В дальнейшем при изучении функций многих переменных мы остановимся на понятии дифференциала более подробно.

§1. Определение и простейшие свойства

Свойства дифференциала определяются свойствами производных и правилами дифференцирования.

Например,

$$d(uv)(x) = \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)\, dx = u(x)\, dv(x) + v(x)\, du(x),$$

или, короче,

$$d(uv) = u\, dv + v\, du.$$

Аналогично имеем

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}.$$

В дальнейшем при изучении функций многих переменных мы остановимся на понятии дифференциала более подробно.

§1. Определение и простейшие свойства

Свойства дифференциала определяются свойствами производных и правилами дифференцирования.

Например,

$$d(uv)(x) = \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)\,dx = u(x)\,dv(x) + v(x)\,du(x),$$

или, короче,

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Аналогично имеем

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

В дальнейшем при изучении функций многих переменных мы остановимся на понятии дифференциала более подробно.

§1. Определение и простейшие свойства

Напомним, что функция f называется дифференцируемой на интервале, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

Определение. Пусть функция f определена на интервале I. Если существует функция F, дифференцируемая на интервале I и такая, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$, то функция F называется первообразной (или примитивной) для функции f на этом интервале.

Например, $f(x) = 2xe^{x^2}$, $F(x) = e^{x^2}$ $(-\infty < x < +\infty)$.

§1. Определение и простейшие свойства

Напомним, что функция f называется дифференцируемой на интервале, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

Определение. Пусть функция f определена на интервале I. Если существует функция F, дифференцируемая на интервале I и такая, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$, то функция F называется первообразной (или примитивной) для функции f на этом интервале.

Например, $f(x) = 2xe^{x^2}$, $F(x) = e^{x^2}$ $(-\infty < x < +\infty)$.

§1. Определение и простейшие свойства

Напомним, что функция f называется дифференцируемой на интервале, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

Определение. Пусть функция f определена на интервале I. Если существует функция F, дифференцируемая на интервале I и такая, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$, то функция F называется первообразной (или примитивной) для функции f на этом интервале.

Например, $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$, $F(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ $(-\infty < x < +\infty)$.

§1. Определение и простейшие свойства

Если для функции f существует одна первообразная, то существует бесконечно много первообразных.

Действительно, каждая функция вида $F(x) + C$, где C – постоянная, также является первообразной, поскольку $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Ниже будет доказана следующая

Теорема (о существовании первообразной у непрерывной функции).

Каждая непрерывная на интервале функция имеет первообразную на этом интервале.

§1. Определение и простейшие свойства

Если для функции f существует одна первообразная, то существует бесконечно много первообразных.
Действительно, каждая функция вида $F(x) + C$, где C – постоянная, также является первообразной, поскольку $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.
Ниже будет доказана следующая

Теорема (о существовании первообразной у непрерывной функции).

Каждая непрерывная на интервале функция имеет первообразную на этом интервале.

§1. Определение и простейшие свойства

Если для функции f существует одна первообразная, то существует бесконечно много первообразных.
Действительно, каждая функция вида $F(x) + C$, где C – постоянная, также является первообразной, поскольку $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.
Ниже будет доказана следующая

Теорема (о существовании первообразной у непрерывной функции).

Каждая непрерывная на интервале функция имеет первообразную на этом интервале.

§1. Определение и простейшие свойства

Пример.

Пусть $f(x) = |x|,\ x \in (-\infty, +\infty)$.

Тогда $F(x) = \frac{x^2}{2}$ при $x > 0$ и $F(x) = -\frac{x^2}{2}$ при $x < 0$.

Легко проверить, что для функции

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \operatorname{sign} x \ (-\infty < x < +\infty)$$

справедливо также равенство

$$F'(0) = 0 = |0| = f(0),$$

так что F – первообразная для f.

§1. Определение и простейшие свойства

Пример.

Пусть $f(x) = |x|,\ x \in (-\infty, +\infty)$.
Тогда $F(x) = \frac{x^2}{2}$ при $x > 0$ и $F(x) = -\frac{x^2}{2}$ при $x < 0$.
Легко проверить, что для функции

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \operatorname{sign} x \ (-\infty < x < +\infty)$$

справедливо также равенство

$$F'(0) = 0 = |0| = f(0),$$

так что F – первообразная для f.

§1. Определение и простейшие свойства

Пример.

Пусть $f(x) = |x|,\ x \in (-\infty, +\infty)$.
Тогда $F(x) = \frac{x^2}{2}$ при $x > 0$ и $F(x) = -\frac{x^2}{2}$ при $x < 0$.
Легко проверить, что для функции

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \operatorname{sign} x \ (-\infty < x < +\infty)$$

справедливо также равенство

$$F'(0) = 0 = |0| = f(0),$$

так что F – первообразная для f.

§1. Определение и простейшие свойства

Теорема.

Если функция f имеет первообразную на интервале I, то разность двух любых ее первообразных тождественно постоянна на этом интервале.

Доказательство.

Из этой теоремы следует, что все первообразные можно описать равенством $F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных.

Определение. Совокупность всех первообразных функции f называется **неопределенным интегралом** от функции f и обозначается $\int f(x)dx$. При этом сама функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, а $f(x)dx$ называется **подынтегральным выражением**.

§1. Определение и простейшие свойства

Теорема.

Если функция f имеет первообразную на интервале I, то разность двух любых ее первообразных тождественно постоянна на этом интервале.

Доказательство.

Из этой теоремы следует, что все первообразные можно описать равенством $F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных.

Определение. Совокупность всех первообразных функции f называется **неопределенным интегралом** от функции f и обозначается $\int f(x)dx$. При этом сама функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, а $f(x)dx$ называется **подынтегральным выражением**.

§1. Определение и простейшие свойства

Теорема.

Если функция f имеет первообразную на интервале I, то разность двух любых ее первообразных тождественно постоянна на этом интервале.

Доказательство.

Из этой теоремы следует, что все первообразные можно описать равенством $F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных.

Определение. Совокупность всех первообразных функции f называется **неопределенным интегралом** от функции f и обозначается $\int f(x)dx$. При этом сама функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, а $f(x)dx$ называется **подынтегральным выражением**.

§1. Определение и простейшие свойства

Теорема.

Если функция f имеет первообразную на интервале I, то разность двух любых ее первообразных тождественно постоянна на этом интервале.

Доказательство.

Из этой теоремы следует, что все первообразные можно описать равенством $F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных.

Определение. Совокупность всех первообразных функции f называется неопределенным интегралом от функции f и обозначается $\int f(x)dx$. При этом сама функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением.

§1. Определение и простейшие свойства

Как было сказано выше, если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, то справедливо следующее равенство:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – постоянная.

Операция нахождения первообразных называется интегрированием.

Отметим, что определение первообразной не является конструктивным, как, например, определение производной. Действительно, в определении производной дается правило ее вычисления, а в определении первообразной – только свойство, которым она должна обладать.

Такое определение называется дескриптивным.

§1. Определение и простейшие свойства

Как было сказано выше, если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, то справедливо следующее равенство:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – постоянная.

Операция нахождения первообразных называется интегрированием.

Отметим, что определение первообразной не является конструктивным, как, например, определение производной. Действительно, в определении производной дается правило ее вычисления, а в определении первообразной – только свойство, которым она должна обладать.

Такое определение называется дескриптивным.

§1. Определение и простейшие свойства

Как было сказано выше, если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, то справедливо следующее равенство:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – постоянная.

Операция нахождения первообразных называется интегрированием.

Отметим, что определение первообразной не является конструктивным, как, например, определение производной. Действительно, в определении производной дается правило ее вычисления, а в определении первообразной – только свойство, которым она должна обладать.

Такое определение называется дескриптивным.

§1. Определение и простейшие свойства

Как было сказано выше, если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, то справедливо следующее равенство:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – постоянная.

Операция нахождения первообразных называется интегрированием.

Отметим, что определение первообразной не является конструктивным, как, например, определение производной. Действительно, в определении производной дается правило ее вычисления, а в определении первообразной – только свойство, которым она должна обладать.

Такое определение называется дескриптивным.

§1. Определение и простейшие свойства

Простейшие свойства неопределенного интеграла.

Свойство 1.

Если функция F дифференцируема на интервале I, то

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Это сразу следует из определения первообразной.

§1. Определение и простейшие свойства

Простейшие свойства неопределенного интеграла.

Свойство 1.

Если функция F дифференцируема на интервале I, то

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Это сразу следует из определения первообразной.

§1. Определение и простейшие свойства

Свойство 2.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ *и* $\int g(x)dx = G(x) + C$, *то* $\int [f(x) + g(x)]dx = F(x) + G(x) + C$, *или, что то же самое,*

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Действительно, при наших предположениях имеет место равенство

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

§1. Определение и простейшие свойства

Свойство 3.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, *то для любого действительного числа* $\alpha \neq 0$

$$\int [\alpha f(x)]dx = \alpha F(x) + C,$$

или, что то же самое,

$$\int [\alpha f(x)]dx = \alpha \int f(x)dx.$$

Это равенство очевидно следует из определения. Заметим, что при $\alpha = 0$ оно неверно по той причине, что в левой его части совокупность всех постоянных, а в правой – тождественный нуль.

§1. Определение и простейшие свойства

Свойство 3.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, *то для любого действительного числа* $\alpha \neq 0$

$$\int [\alpha f(x)]dx = \alpha F(x) + C,$$

или, что то же самое,

$$\int [\alpha f(x)]dx = \alpha \int f(x)dx.$$

Это равенство очевидно следует из определения. Заметим, что при $\alpha = 0$ оно неверно по той причине, что в левой его части совокупность всех постоянных, а в правой – тождественный нуль.

§1. Определение и простейшие свойства

Свойство 4.

Если $\int f(t)dt = F(t) + C$, то для любого $a \neq 0$ и для любого b

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Действительно,

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b) \cdot a = f(ax+b).$$

Например,

$$\int \cos(2x+3)dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C.$$

§1. Определение и простейшие свойства

Свойство 4.

Если $\int f(t)dt = F(t) + C$, *то для любого* $a \neq 0$ *и для любого* b

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Действительно,

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b).$$

Например,

$$\int \cos(2x+3)dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C.$$

§1. Определение и простейшие свойства

Свойство 4.

Если $\int f(t)dt = F(t) + C$*, то для любого* $a \neq 0$ *и для любого* b

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Действительно,

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b).$$

Например,

$$\int \cos(2x+3)dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C.$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Теорема (формула интегрирования по частям).

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на интервале I. Если одна из функций $u(x)v'(x)$ или $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на интервале I, то на этом интервале имеет первообразную и другая функция, причем справедливо равенство

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Доказательство.

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Теорема (формула интегрирования по частям).

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на интервале I. Если одна из функций $u(x)v'(x)$ или $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на интервале I, то на этом интервале имеет первообразную и другая функция, причем справедливо равенство

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Доказательство.

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Замечание 1. Коротко правило интегрирования по частям может быть записано так:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Действительно, в этой записи используется формула для вычисления дифференциала функции $du(x) = u'(x)dx$.

Замечание 2. Если одна из функций дифференцируема, а другая имеет первообразную, то их произведение (производной на функцию, имеющую первообразную) не обязано иметь первообразную.

Такой пример приводится сразу после этого замечания. Поэтому в формулировке теоремы нужно предполагать наличие первообразной у одной из функций $u'(x)v(x)$ или $u(x)v'(x)$.

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Замечание 1. Коротко правило интегрирования по частям может быть записано так:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Действительно, в этой записи используется формула для вычисления дифференциала функции $du(x) = u'(x)dx$.

Замечание 2. Если одна из функций дифференцируема, а другая имеет первообразную, то их произведение (производной на функцию, имеющую первообразную) не обязано иметь первообразную.

Такой пример приводится сразу после этого замечания. Поэтому в формулировке теоремы нужно предполагать наличие первообразной у одной из функций $u'(x)v(x)$ или $u(x)v'(x)$.

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Замечание 1. Коротко правило интегрирования по частям может быть записано так:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Действительно, в этой записи используется формула для вычисления дифференциала функции $du(x) = u'(x)dx$.

Замечание 2. Если одна из функций дифференцируема, а другая имеет первообразную, то их произведение (производной на функцию, имеющую первообразную) не обязано иметь первообразную.

Такой пример приводится сразу после этого замечания. Поэтому в формулировке теоремы нужно предполагать наличие первообразной у одной из функций $u'(x)v(x)$ или $u(x)v'(x)$.

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Замечание 1. Коротко правило интегрирования по частям может быть записано так:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Действительно, в этой записи используется формула для вычисления дифференциала функции $du(x) = u'(x)dx$.

Замечание 2. Если одна из функций дифференцируема, а другая имеет первообразную, то их произведение (производной на функцию, имеющую первообразную) не обязано иметь первообразную.

Такой пример приводится сразу после этого замечания. Поэтому в формулировке теоремы нужно предполагать наличие первообразной у одной из функций $u'(x)v(x)$ или $u(x)v'(x)$.

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Утверждение.

Существуют дифференцируемая функция u и имеющая первообразную функция v, такие, что $u'v$ не имеет первообразной.

Доказательство.

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Утверждение.

Существуют дифференцируемая функция u и имеющая первообразную функция v, такие, что $u'v$ не имеет первообразной.

Доказательство.

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Примеры.

1. $\int xe^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = e^x \end{array} \right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

2. $\int x \cos x \; dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = \cos x \; dx \\ du = dx, & v = \sin x \end{array} \right] =$

$$= x \sin x - \int \sin x \; dx = x \sin x + \cos x + C.$$

3. $\int x \ln x \; dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x, & dv = x \; dx \\ du = \frac{dx}{x}, & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \; dx =$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Примеры.

1. $\int xe^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = e^x \end{array}\right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

2. $\int x \cos x \; dx = \left[\begin{array}{lr} u = x, & dv = \cos x \; dx \\ du = dx, & v = \sin x \end{array}\right] =$

$$= x \sin x - \int \sin x \; dx = x \sin x + \cos x + C.$$

3. $\int x \ln x \; dx = \left[\begin{array}{lr} u = \ln x, & dv = x \; dx \\ du = \frac{dx}{x}, & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right] = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \; dx =$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Примеры.

1. $\int x e^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = e^x \end{array}\right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

2. $\int x \cos x \ dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = \cos x \ dx \\ du = dx, & v = \sin x \end{array}\right] =$

$$= x \sin x - \int \sin x \ dx = x \sin x + \cos x + C.$$

3. $\int x \ln x \ dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x, & dv = x \ dx \\ du = \frac{dx}{x}, & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right] = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \ dx =$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Следующий пример показывает такой способ применения формулы интегрирования по частям, когда в правой части появляется такой же интеграл, как и в левой части. Тогда искомый интеграл может быть найден из полученного равенства.

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

4. $\int \mathrm{e}^x \cos x\ dx = \left[\begin{array}{ll} u = \mathrm{e}^x, & dv = \cos x\ dx \\ du = \mathrm{e}^x dx, & v = \sin x \end{array}\right] =$

$$= \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \sin x\ dx = \mathrm{e}^x \sin x - \left[\begin{array}{ll} u = \mathrm{e}^x, & dv = \sin x\ dx \\ du = \mathrm{e}^x dx, & v = -\cos x \end{array}\right] =$$

$$= \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \cos x\ dx.$$

Из этого равенства находим

$$\int \mathrm{e}^x \cos x\ dx = \frac{\mathrm{e}^x}{2}[\sin x + \cos x] + C.$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

4. $\int e^x \cos x\ dx = \left[\begin{array}{ll} u = e^x, & dv = \cos x\ dx \\ du = e^x dx, & v = \sin x \end{array}\right] =$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x\ dx = e^x \sin x - \left[\begin{array}{ll} u = e^x, & dv = \sin x\ dx \\ du = e^x dx, & v = -\cos x \end{array}\right] =$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\ dx.$$

Из этого равенства находим

$$\int e^x \cos x\ dx = \frac{e^x}{2}[\sin x + \cos x] + C.$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Теорема (о замене переменной в интеграле).

Пусть функция f имеет первообразную на интервале I, т. е.

$$\int f(t)dt = F(t) + C.$$

Пусть, далее, функция φ дифференцируема на интервале Δ и $\varphi(\Delta) \subset I$. Тогда справедливо равенство

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Доказательство. Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Теорема (о замене переменной в интеграле).

Пусть функция f имеет первообразную на интервале I, т. е.

$$\int f(t)dt = F(t) + C.$$

Пусть, далее, функция φ дифференцируема на интервале Δ и $\varphi(\Delta) \subset I$. Тогда справедливо равенство

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Доказательство. Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Примеры.

1. $\int \sin^3 x \; dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)dx = \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ dt = -\sin x \; dx \end{array} \right] =$

$$= \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

2. $\int \frac{dx}{1+e^x} = \left[\begin{array}{ll} \text{преобразуем} & \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \\ \text{положим} & 1+e^{-x} = t, \quad dt = -e^{-x}dx \end{array} \right] =$

$$= -\int \frac{dt}{t} == -\ln|t| + C = -\ln(1+e^{-x}) + C =$$

$$= -\ln\frac{1+e^x}{e^x} + C = x - \ln(1+e^x) + C.$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Примеры.

1. $\int \sin^3 x\ dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)dx = \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ dt = -\sin x\ dx \end{array}\right] =$

$$= \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

2. $\int \frac{dx}{1+e^x} = \left[\begin{array}{ll} \text{преобразуем} & \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \\ \text{положим} & 1+e^{-x} = t, \quad dt = -e^{-x}dx \end{array}\right] =$

$$= -\int \frac{dt}{t} == -\ln|t| + C = -\ln(1+e^{-x}) + C =$$

$$= -\ln\frac{1+e^x}{e^x} + C = x - \ln(1+e^x) + C.$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Замечание. Мы использовали равенство

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Это равенство следует применять отдельно для промежутков $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$.

При $x > 0$ оно справедливо по той причине, что $|x| = x$, $(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$.

Если же $x < 0$, то $|x| = -x$, $(\ln(-x) + C)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$, так что и в этом случае равенство верно.

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Замечание. Мы использовали равенство

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Это равенство следует применять отдельно для промежутков $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$.

При $x > 0$ оно справедливо по той причине, что $|x| = x$, $(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$.

Если же $x < 0$, то $|x| = -x$, $(\ln(-x) + C)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$, так что и в этом случае равенство верно.

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Замечание. Мы использовали равенство

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Это равенство следует применять отдельно для промежутков $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$.
При $x > 0$ оно справедливо по той причине, что
$|x| = x, \ (\ln x + C)' = \frac{1}{x}$.
Если же $x < 0$, то $|x| = -x, \ (\ln(-x) + C)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$,
так что и в этом случае равенство верно.

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Замечание. Мы использовали равенство

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Это равенство следует применять отдельно для промежутков $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$.
При $x > 0$ оно справедливо по той причине, что $|x| = x,\ (\ln x + C)' = \frac{1}{x}$.
Если же $x < 0$, то $|x| = -x,\ (\ln(-x) + C)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$, так что и в этом случае равенство верно.

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Итак, если исходный интеграл представлен в виде $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, то, выполняя замену переменной $t = \varphi(x)$, мы приходим к интегралу $\int f(t)dt$.

Часто замену переменной в интеграле $\int g(x)dx$ применяют в виде $x = \psi(t)$, затем вычисляют интеграл по t, а чтобы вернуться к старой переменной x, нужно выразить новую переменную t через x.

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Итак, если исходный интеграл представлен в виде $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, то, выполняя замену переменной $t = \varphi(x)$, мы приходим к интегралу $\int f(t)dt$.

Часто замену переменной в интеграле $\int g(x)dx$ применяют в виде $x = \psi(t)$, затем вычисляют интеграл по t, а чтобы вернуться к старой переменной x, нужно выразить новую переменную t через x.

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Пример.

Пусть $I = \int \sqrt{1-x^2}dx$.

Для вычисления этого интеграла положим $x = \sin t$. Тогда

$$dx = \cos t \; dt, \;\; \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t.$$

Подставляя это в исходный интеграл, получаем

$$I = \int \cos^2 t \; dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C.$$

Из равенства $x = \sin t$ имеем $t = \arcsin x$, так что

$$I = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Пример.

Пусть $I = \int \sqrt{1-x^2}dx$.
Для вычисления этого интеграла положим $x = \sin t$. Тогда

$$dx = \cos t\ dt,\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t.$$

Подставляя это в исходный интеграл, получаем

$$I = \int \cos^2 t\ dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C.$$

Из равенства $x = \sin t$ имеем $t = \arcsin x$, так что

$$I = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Вычислим этот интеграл еще одним способом, основанным на применении формулы интегрирования по частям.

$$I=\int\sqrt{1-x^2}dx=\left[\begin{array}{ll} u=\sqrt{1-x^2}, & dv=dx \\ du=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx, & v=x \end{array}\right]=$$

$$=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sqrt{1-x^2}-I+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Вычислим этот интеграл еще одним способом, основанным на применении формулы интегрирования по частям.

$$I=\int\sqrt{1-x^2}dx=\left[\begin{array}{ll} u=\sqrt{1-x^2}, & dv=dx \\ du=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx, & v=x \end{array}\right]=$$

$$=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sqrt{1-x^2}-I+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Вычислим этот интеграл еще одним способом, основанным на применении формулы интегрирования по частям.

$$I=\int\sqrt{1-x^2}dx=\left[\begin{array}{ll} u=\sqrt{1-x^2}, & dv=dx \\ du=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx, & v=x \end{array}\right]=$$

$$=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sqrt{1-x^2}-I+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Вычислим этот интеграл еще одним способом, основанным на применении формулы интегрирования по частям.

$$I = \int \sqrt{1-x^2}dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2}, & dv = dx \\ du = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx, & v = x \end{array} \right] =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} - I + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Воспользовавшись теперь равенством $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, вытекающим из того, что $(\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, получим

$$I = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x.$$

Отсюда следует

$$I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right] + C.$$

§2. Интегрирование по частям и замена переменной

Воспользовавшись теперь равенством $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, вытекающим из того, что $(\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, получим

$$I = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x.$$

Отсюда следует

$$I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right] + C.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

§3. Интегрирование рациональных функций

§3. Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией (или **дробью**) называется функция вида

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.

Если степень числителя меньше степени знаменателя, то рациональная дробь называется **правильной**.

Ясно, что каждая рациональная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $R(x)$ – многочлен, а дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильная.

§3. Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией (или дробью) называется функция вида

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.
Если степень числителя меньше степени знаменателя, то рациональная дробь называется правильной.

Ясно, что каждая рациональная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $R(x)$ – многочлен, а дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильная.

§3. Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией (или дробью) называется функция вида

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.
Если степень числителя меньше степени знаменателя, то рациональная дробь называется правильной.

Ясно, что каждая рациональная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $R(x)$ – многочлен, а дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильная.

§3. Интегрирование рациональных функций

Поскольку интегралы от многочленов вычисляются совсем просто, то мы будем рассматривать методы интегрирования правильных дробей.

Будем различать следующие четыре вида дробей.

1. $\frac{A}{x-a}$, где A, a – постоянные.
2. $\frac{A}{(x-a)^k}$, где A, a – постоянные, $k = 2, 3 \ldots$
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где M, N, p, q – постоянные, квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней.
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, где M, N, p, q – постоянные, $k = 2, 3, \ldots$, квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней.

§3. Интегрирование рациональных функций

Поскольку интегралы от многочленов вычисляются совсем просто, то мы будем рассматривать методы интегрирования правильных дробей.

Будем различать следующие четыре вида дробей.

1. $\frac{A}{x-a}$, где A, a – постоянные.
2. $\frac{A}{(x-a)^k}$, где A, a – постоянные, $k = 2, 3\dots$
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где M, N, p, q – постоянные, квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней.
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, где M, N, p, q – постоянные, $k = 2, 3, \dots$, квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней.

§3. Интегрирование рациональных функций

Поскольку интегралы от многочленов вычисляются совсем просто, то мы будем рассматривать методы интегрирования правильных дробей.

Будем различать следующие четыре вида дробей.

1. $\frac{A}{x-a}$, где A, a – постоянные.
2. $\frac{A}{(x-a)^k}$, где A, a – постоянные, $k = 2, 3 \ldots$
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где M, N, p, q – постоянные, квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней.
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, где M, N, p, q – постоянные, $k = 2, 3, \ldots$, квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней.

§3. Интегрирование рациональных функций

Поскольку интегралы от многочленов вычисляются совсем просто, то мы будем рассматривать методы интегрирования правильных дробей.

Будем различать следующие четыре вида дробей.

1. $\frac{A}{x-a}$, где A, a – постоянные.
2. $\frac{A}{(x-a)^k}$, где A, a – постоянные, $k = 2, 3 \dots$
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где M, N, p, q – постоянные, квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней.
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, где M, N, p, q – постоянные, $k = 2, 3, \dots$, квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней.

§3. Интегрирование рациональных функций

Поскольку интегралы от многочленов вычисляются совсем просто, то мы будем рассматривать методы интегрирования правильных дробей.

Будем различать следующие четыре вида дробей.

1. $\frac{A}{x-a}$, где A, a – постоянные.
2. $\frac{A}{(x-a)^k}$, где A, a – постоянные, $k = 2, 3\ldots$
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где M, N, p, q – постоянные, квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней.
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, где M, N, p, q – постоянные, $k = 2, 3, \ldots$, квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней.

§3. Интегрирование рациональных функций

Поскольку интегралы от многочленов вычисляются совсем просто, то мы будем рассматривать методы интегрирования правильных дробей.

Будем различать следующие четыре вида дробей.

1. $\frac{A}{x-a}$, где A, a – постоянные.
2. $\frac{A}{(x-a)^k}$, где A, a – постоянные, $k = 2, 3\ldots$
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где M, N, p, q – постоянные, квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней.
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, где M, N, p, q – постоянные, $k = 2, 3, \ldots$, квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней.

§3. Интегрирование рациональных функций

Покажем как вычисляются интегралы от каждой из этих дробей.

$$\mathbf{1}.\ \int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$$

$$\mathbf{2}.\ \int \frac{A}{(x-a)^k}dx = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

Покажем как вычисляются интегралы от каждой из этих дробей.

$$\mathbf{1}.\ \int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C.$$

$$\mathbf{2}.\ \int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

$$\mathbf{3}.\ \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$$

Для вычисления этого интеграла представим подынтегральное выражение в виде

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} = \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-p\frac{M}{2}}{x^2+px+q} = \frac{M}{2}\cdot\frac{2x+p}{x^2+px+q}+\frac{N-p\frac{M}{2}}{x^2+px+q}.$$

Для вычисления интеграла от первого слагаемого справа, очевидно, достаточно выполнить замену $t = x^2+px+q$. Тогда получим

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \ln(x^2+px+q)+C.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

$$\mathbf{3}.\ \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$$

Для вычисления этого интеграла представим подынтегральное выражение в виде

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} = \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-p\frac{M}{2}}{x^2+px+q} = \frac{M}{2}\cdot\frac{2x+p}{x^2+px+q}+\frac{N-p\frac{M}{2}}{x^2+px+q}.$$

Для вычисления интеграла от первого слагаемого справа, очевидно, достаточно выполнить замену $t = x^2+px+q$. Тогда получим

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \ln(x^2+px+q)+C.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

Для вычисления интеграла от второго слагаемого справа выделим полный квадрат в знаменателе, т. е. представим знаменатель в виде $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$.

Поскольку квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней, то его дискриминант $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Обозначим $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$. Выполняя замену $x + \frac{p}{2} = t$, получим

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{1}{(x + \frac{p}{2})^2 + a^2} dx = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\frac{t^2}{a^2} + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Возвращаясь теперь к старой переменной, получим исходный интеграл.

§3. Интегрирование рациональных функций

Для вычисления интеграла от второго слагаемого справа выделим полный квадрат в знаменателе, т. е. представим знаменатель в виде $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$.

Поскольку квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней, то его дискриминант $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Обозначим $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$. Выполняя замену $x + \frac{p}{2} = t$, получим

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{1}{(x + \frac{p}{2})^2 + a^2} dx = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\frac{t^2}{a^2} + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Возвращаясь теперь к старой переменной, получим исходный интеграл.

§3. Интегрирование рациональных функций

Для вычисления интеграла от второго слагаемого справа выделим полный квадрат в знаменателе, т. е. представим знаменатель в виде $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$.

Поскольку квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней, то его дискриминант $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Обозначим $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$. Выполняя замену $x + \frac{p}{2} = t$, получим

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q}\,dx = \int \frac{1}{(x + \frac{p}{2})^2 + a^2}\,dx = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\frac{t^2}{a^2} + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C.$$

Возвращаясь теперь к старой переменной, получим исходный интеграл.

§3. Интегрирование рациональных функций

$$\mathbf{4}.\ \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx.$$

Для вычисления этого интеграла, как и в предыдущем случае, представим подынтегральное выражение в виде

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} = \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-p\frac{M}{2}}{(x^2+px+q)^k} =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} + \frac{N-p\frac{M}{2}}{(x^2+px+q)^k}.$$

Для вычисления интеграла от первого слагаемого справа, очевидно, достаточно выполнить замену $t = x^2+px+q$. Тогда

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{1}{-k+1}(x^2+px+q)^{-k+1}+C.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

$$\textbf{4}.\ \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx.$$

Для вычисления этого интеграла, как и в предыдущем случае, представим подынтегральное выражение в виде

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} = \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-p\frac{M}{2}}{(x^2+px+q)^k} =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} + \frac{N-p\frac{M}{2}}{(x^2+px+q)^k}.$$

Для вычисления интеграла от первого слагаемого справа, очевидно, достаточно выполнить замену $t = x^2+px+q$. Тогда

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{1}{-k+1}(x^2+px+q)^{-k+1}+C.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

$$\textbf{4}.\quad \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx.$$

Для вычисления этого интеграла, как и в предыдущем случае, представим подынтегральное выражение в виде

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} = \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-p\frac{M}{2}}{(x^2+px+q)^k} =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} + \frac{N-p\frac{M}{2}}{(x^2+px+q)^k}.$$

Для вычисления интеграла от первого слагаемого справа, очевидно, достаточно выполнить замену $t = x^2+px+q$. Тогда

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{1}{-k+1}(x^2+px+q)^{-k+1} + C.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

Для вычисления интеграла от второго слагаемого, как и в предыдущем случае, выделим полный квадрат из квадратного трехчлена в знаменателе. Тогда после замены переменной $t = x + \frac{p}{2}$ он сведется к интегралу вида

$$\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}.$$

Обозначим этот интеграл через I_k и выведем рекуррентную формулу для вычисления этого интеграла.

§3. Интегрирование рациональных функций

Для вычисления интеграла от второго слагаемого, как и в предыдущем случае, выделим полный квадрат из квадратного трехчлена в знаменателе. Тогда после замены переменной $t = x + \frac{p}{2}$ он сведется к интегралу вида

$$\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}.$$

Обозначим этот интеграл через I_k и выведем рекуррентную формулу для вычисления этого интеграла.

§3. Интегрирование рациональных функций

Будем применять формулу интегрирования по частям. Имеем

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \left[\begin{array}{ll} u = \frac{1}{(t^2+a^2)^k}, & dv = dt \\ du = -\frac{2kt}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt, & v = t \end{array} \right] =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}dt - 2ka^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

Будем применять формулу интегрирования по частям. Имеем

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \left[\begin{array}{ll} u = \frac{1}{(t^2+a^2)^k}, & dv = dt \\ du = -\frac{2kt}{(t^2+a^2)^{k+1}}\,dt, & v = t \end{array}\right] =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}\,dt - 2ka^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

Будем применять формулу интегрирования по частям. Имеем

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \left[\begin{array}{ll} u = \frac{1}{(t^2+a^2)^k}, & dv = dt \\ du = -\frac{2kt}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt, & v = t \end{array}\right] =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}dt - 2ka^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

Будем применять формулу интегрирования по частям. Имеем

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{(t^2+a^2)^k}, & dv = dt \\ du = -\frac{2kt}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt, & v = t \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}dt - 2ka^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

Будем применять формулу интегрирования по частям. Имеем

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \left[\begin{matrix} u = \frac{1}{(t^2+a^2)^k}, & dv = dt \\ du = -\frac{2kt}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt, & v = t \end{matrix} \right] =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}dt - 2ka^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

Отсюда находим

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + (2k-1)I_k\right] \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

При этом, как мы уже вычислили ранее,

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C.$$

Итак, и в этом случае мы получили правило вычисления интеграла от дроби четвертого вида.

§3. Интегрирование рациональных функций

Отсюда находим

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + (2k-1)I_k\right] \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

При этом, как мы уже вычислили ранее,

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C.$$

Итак, и в этом случае мы получили правило вычисления интеграла от дроби четвертого вида.

§3. Интегрирование рациональных функций

Отсюда находим

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + (2k-1)I_k\right] \quad (k = 1, 2, \dots).$$

При этом, как мы уже вычислили ранее,

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Итак, и в этом случае мы получили правило вычисления интеграла от дроби четвертого вида.

§3. Интегрирование рациональных функций

Из основной теоремы алгебры следует, что
каждый многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в виде произведения конечного числа линейных сомножителей вида $x - a$ и квадратичных сомножителей вида $x^2 + px + q$, где $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Именно, справедливо равенство

$$Q(x) = A(x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

где k_i и m_i – целые неотрицательные числа.

§3. Интегрирование рациональных функций

Из основной теоремы алгебры следует, что *каждый многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в виде произведения конечного числа линейных сомножителей вида* $x - a$ *и квадратичных сомножителей вида* $x^2 + px + q$, *где* $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Именно, справедливо равенство

$$Q(x) = A(x-a_1)^{k_1} \ldots (x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \ldots (x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

где k_i и m_i – целые неотрицательные числа.

§3. Интегрирование рациональных функций

С использованием этого представления можно показать, что справедлива следующая

Теорема (о разложении рациональной функции на простые дроби).

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная дробь, знаменатель которой допускает разложение* (6.3)*. Тогда эта дробь единственным образом может быть представлена в виде суммы простых дробей, т. е.*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{M_{ij}x + N_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

Выше уже показано, что интеграл от каждой простой дроби выражается через элементарные функции.

Таким образом, справедлива

Теорема (об интегрировании рациональной функции).

Каждая рациональная дробь имеет первообразную, которая выражается через элементарные функции, а именно, с помощью рациональных функций, логарифмической функции и арктангенса.

§3. Интегрирование рациональных функций

Выше уже показано, что интеграл от каждой простой дроби выражается через элементарные функции.
Таким образом, справедлива

Теорема (об интегрировании рациональной функции).

Каждая рациональная дробь имеет первообразную, которая выражается через элементарные функции, а именно, с помощью рациональных функций, логарифмической функции и арктангенса.

§3. Интегрирование рациональных функций

Пример 1.

$$I = \int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

Разложим знаменатель на множители: $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$.
Тогда подынтегральная функция представима в виде

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2},$$

где A, B, C – постоянные коэффициенты.
Для их нахождения приведем выражение справа к общему знаменателю и, приравнивая числители полученных дробей, найдем

§3. Интегрирование рациональных функций

Пример 1.

$$I = \int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

Разложим знаменатель на множители: $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$. Тогда подынтегральная функция представима в виде

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2},$$

где A, B, C – постоянные коэффициенты.

Для их нахождения приведем выражение справа к общему знаменателю и, приравнивая числители полученных дробей, найдем

§3. Интегрирование рациональных функций

Пример 1.

$$I = \int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

Разложим знаменатель на множители: $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$.
Тогда подынтегральная функция представима в виде

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2},$$

где A, B, C – постоянные коэффициенты.
Для их нахождения приведем выражение справа к общему знаменателю и, приравнивая числители полученных дробей, найдем

§3. Интегрирование рациональных функций

Продолжение примера 1.

$$2x^2 - 3x + 3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx.$$

Поскольку это тождество имеет место при всех x, кроме $x = 0,\ x = 1$, то коэффициенты этих многочленов при одинаковых степенях x равны.

Приравнивая их, получаем линейную систему уравнений

$$\left.\begin{array}{lll} x^2: & 2 = A + B, \\ x\ : & -3 = -2A - B + C, \\ x^0: & 3 = A. \end{array}\right\}$$

Решая эту систему, находим $A = 3,\ B = -1,\ C = 2.$

§3. Интегрирование рациональных функций

Продолжение примера 1.

$$2x^2 - 3x + 3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx.$$

Поскольку это тождество имеет место при всех x, кроме $x = 0, \ x = 1$, то коэффициенты этих многочленов при одинаковых степенях x равны.

Приравнивая их, получаем линейную систему уравнений

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & 2 = A + B, \\ x \ : & -3 = -2A - B + C, \\ x^0: & 3 = A. \end{array}\right\}$$

Решая эту систему, находим $A = 3, \ B = -1, \ C = 2.$

§3. Интегрирование рациональных функций

Продолжение примера 1.

$$2x^2 - 3x + 3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx.$$

Поскольку это тождество имеет место при всех x, кроме $x = 0$, $x = 1$, то коэффициенты этих многочленов при одинаковых степенях x равны.

Приравнивая их, получаем линейную систему уравнений

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & 2 = A + B, \\ x\ : & -3 = -2A - B + C, \\ x^0: & 3 = A. \end{array}\right\}$$

Решая эту систему, находим $A = 3$, $B = -1$, $C = 2$.

§3. Интегрирование рациональных функций

Окончание примера 1.

Подставляя эти значения $A = 3,\ B = -1,\ C = 2$ в разложение подынтегральной функции

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2},$$

и вычисляя соответствующие интегралы, получаем

$$I = 3\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C = \ln\frac{|x|^3}{|x-1|} - \frac{2}{x-1} + C.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

Пример 2.

$$I = \int \frac{x\ dx}{x^3+1}.$$

Как и в предыдущем примере, разложим на множители знаменатель:

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1).$$

Раскладываем подынтегральное выражение с неопределнными коэффициентами

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1},$$

откуда $x = A(x^2-x+1) + (Mx+N)(x+1)$.

§3. Интегрирование рациональных функций

Пример 2.

$$I = \int \frac{x\,dx}{x^3+1}.$$

Как и в предыдущем примере, разложим на множители знаменатель:

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1).$$

Раскладываем подынтегральное выражение с неопределнными коэффициентами

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1},$$

откуда $x = A(x^2-x+1) + (Mx+N)(x+1)$.

§3. Интегрирование рациональных функций

Продолжение примера 2.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, составляем линейную систему для нахождения чисел A, M, N:

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & 0 = A + M, \\ x\ : & 1 = -A + M + N, \\ x^0: & 0 = A + N. \end{array}\right\}$$

Решая эту систему, находим $A = -\frac{1}{3}$, $M = N = \frac{1}{3}$.

§3. Интегрирование рациональных функций

Окончание примера 2.

Поэтому

$$I = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}) + C.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

Метод Остроградского.

Этот метод интегрирования рациональных дробей предназначен для выделения рациональной части из интеграла от рациональной функции. Именно, используя представление правильной дроби в виде суммы элементарных дробей, интеграл от правильной дроби представляется в виде

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx =$$

$$= \int \frac{P(x)}{A(x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}}\,dx =$$

§3. Интегрирование рациональных функций

Метод Остроградского.

Этот метод интегрирования рациональных дробей предназначен для выделения рациональной части из интеграла от рациональной функции. Именно, используя представление правильной дроби в виде суммы элементарных дробей, интеграл от правильной дроби представляется в виде

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx =$$

$$= \int \frac{P(x)}{A(x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}}dx =$$

§3. Интегрирование рациональных функций

$$= \frac{R_{k_1+\ldots+k_r+2(m_1+\ldots+m_s)-r-2s-1}(x)}{A(x-a_1)^{k_1-1}\ldots(x-a_r)^{k_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s-1}}+$$

$$+\int \frac{S_{r+2s-1}(x)}{A(x-a_1)\ldots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_sx+q_s)}\,dx,$$

где многочлены $R_{k_1+\ldots+k_r+2(m_1+\ldots+m_s)-r-2s-1}(x)$ и $S_{r+2s-1}(x)$ степени $k_1+\ldots+k_r+2(m_1+\ldots+m_s)-r-2s-1$ и $r+2s-1$, соответственно, имеют неопределенные коэффициенты. Эти коэффициенты находятся затем из условия равенства производных левой и правой частей записанного равенства.

§3. Интегрирование рациональных функций

$$= \frac{R_{k_1+\ldots+k_r+2(m_1+\ldots+m_s)-r-2s-1}(x)}{A(x-a_1)^{k_1-1}\ldots(x-a_r)^{k_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s-1}}+$$

$$+\int \frac{S_{r+2s-1}(x)}{A(x-a_1)\ldots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_sx+q_s)}\,dx,$$

где многочлены $R_{k_1+\ldots+k_r+2(m_1+\ldots+m_s)-r-2s-1}(x)$ и $S_{r+2s-1}(x)$ степени $k_1+\ldots+k_r+2(m_1+\ldots+m_s)-r-2s-1$ и $r+2s-1$, соответственно, имеют неопределенные коэффициенты. Эти коэффициенты находятся затем из условия равенства производных левой и правой частей записанного равенства.

§3. Интегрирование рациональных функций

$$= \frac{R_{k_1+\ldots+k_r+2(m_1+\ldots+m_s)-r-2s-1}(x)}{A(x-a_1)^{k_1-1}\ldots(x-a_r)^{k_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s-1}}+$$

$$+\int\frac{S_{r+2s-1}(x)}{A(x-a_1)\ldots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_sx+q_s)}dx,$$

где многочлены $R_{k_1+\ldots+k_r+2(m_1+\ldots+m_s)-r-2s-1}(x)$ и $S_{r+2s-1}(x)$ степени $k_1+\ldots+k_r+2(m_1+\ldots+m_s)-r-2s-1$ и $r+2s-1$, соответственно, имеют неопределенные коэффициенты.

Эти коэффициенты находятся затем из условия равенства производных левой и правой частей записанного равенства.

§3. Интегрирование рациональных функций

$$= \frac{R_{k_1+\ldots+k_r+2(m_1+\ldots+m_s)-r-2s-1}(x)}{A(x-a_1)^{k_1-1}\ldots(x-a_r)^{k_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s-1}}+$$

$$+\int\frac{S_{r+2s-1}(x)}{A(x-a_1)\ldots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_sx+q_s)}dx,$$

где многочлены $R_{k_1+\ldots+k_r+2(m_1+\ldots+m_s)-r-2s-1}(x)$ и $S_{r+2s-1}(x)$ степени $k_1+\ldots+k_r+2(m_1+\ldots+m_s)-r-2s-1$ и $r+2s-1$, соответственно, имеют неопределенные коэффициенты. Эти коэффициенты находятся затем из условия равенства производных левой и правой частей записанного равенства.

§3. Интегрирование рациональных функций

Таким образом, вычисление интеграла от правильной дроби сводится к вычислению интеграла от другой правильной дроби, у которой в знаменателе все множители в первой степени.

Такой интеграл вычисляется, как указано выше, путем разложения подынтегрального выражения на простые дроби.

Тем самым отпадает необходимость в использовании полученной выше рекуррентной формулы для вычисления интегралов от простой дроби четвертого типа.

§3. Интегрирование рациональных функций

Таким образом, вычисление интеграла от правильной дроби сводится к вычислению интеграла от другой правильной дроби, у которой в знаменателе все множители в первой степени.

Такой интеграл вычисляется, как указано выше, путем разложения подынтегрального выражения на простые дроби.

Тем самым отпадает необходимость в использовании полученной выше рекуррентной формулы для вычисления интегралов от простой дроби четвертого типа.

§3. Интегрирование рациональных функций

Таким образом, вычисление интеграла от правильной дроби сводится к вычислению интеграла от другой правильной дроби, у которой в знаменателе все множители в первой степени.

Такой интеграл вычисляется, как указано выше, путем разложения подынтегрального выражения на простые дроби.

Тем самым отпадает необходимость в использовании полученной выше рекуррентной формулы для вычисления интегралов от простой дроби четвертого типа.

§4. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

§4. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

§4. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Интегралы указанного вида, где $R(u, v)$ – рациональная функция переменных u и v, также могут быть выражены через элементарные функции.

Задача вычисления этих интегралов с помощью подходящей замены переменной может быть сведена к нахождению интеграла от рациональной функции.

§4. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Интегралы указанного вида, где $R(u, v)$ – рациональная функция переменных u и v, также могут быть выражены через элементарные функции.

Задача вычисления этих интегралов с помощью подходящей замены переменной может быть сведена к нахождению интеграла от рациональной функции.

§4. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Действительно, если положим $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, то получим

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Если все эти представления подставить в исходный интеграл, то, очевидно, получим интеграл от рациональной относительно переменной t функции.

§4. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Действительно, если положим $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, то получим

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Если все эти представления подставить в исходный интеграл, то, очевидно, получим интеграл от рациональной относительно переменной t функции.

§4. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Заметим, что в некоторых случаях интегралы указанного вида могут быть вычислены и более простым способом.

Например, интеграл вида $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$, где $R(u, v)$ – рациональная функция двух переменных, сводится к интегралу $\int Q(t)dt$, где Q – рациональная функция одного переменного.

Действительно, достаточно использовать следующие равенства

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

Тогда замена переменной $t = \operatorname{tg} x$ приводит к интегралу

$\int Q_1(t)\frac{dt}{1+t^2}$, где Q_1 – рациональная функция,

а значит и $Q(t) = \frac{Q_1(t)}{1+t^2}$ – рациональная функция.

§4. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Заметим, что в некоторых случаях интегралы указанного вида могут быть вычислены и более простым способом.

Например, интеграл вида $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$, где $R(u, v)$ – рациональная функция двух переменных, сводится к интегралу $\int Q(t)dt$, где Q – рациональная функция одного переменного.

Действительно, достаточно использовать следующие равенства

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Тогда замена переменной $t = \operatorname{tg} x$ приводит к интегралу

$\int Q_1(t)\frac{dt}{1+t^2}$, где Q_1 – рациональная функция,

а значит и $Q(t) = \frac{Q_1(t)}{1+t^2}$ – рациональная функция.

§4. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Заметим, что в некоторых случаях интегралы указанного вида могут быть вычислены и более простым способом.

Например, интеграл вида $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$, где $R(u, v)$ – рациональная функция двух переменных, сводится к интегралу $\int Q(t)dt$, где Q – рациональная функция одного переменного.

Действительно, достаточно использовать следующие равенства

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

Тогда замена переменной $t = \mathrm{tg}\, x$ приводит к интегралу

$\int Q_1(t)\frac{dt}{1+t^2}$, где Q_1 – рациональная функция,

а значит и $Q(t) = \frac{Q_1(t)}{1+t^2}$ – рациональная функция.

§4. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Примеры.

1.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - 2 \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C.$$

§4. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

2.

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x, \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{t^3}{1+t^2} dt = \int \frac{(t^3+t)-t}{1+t^2} dt =$$

$$= \int t\ dt - \int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{t^2}{2} - \left[\begin{array}{l} 1+t^2 = z, \\ dz = 2t\ dt \end{array} \right] = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

§4. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

3.

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\sin x\ dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x, \\ dt = -\sin x\ dx \end{array}\right] =$$

$$= -\int \frac{t^4}{(1-t^2)^2}dt = -\left[\begin{array}{ll} u = t^3, & dv = \frac{t\ dt}{(1-t^2)^2} \\ du = 3t^2\ dt, & v = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t^2} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{1-t^2} + \frac{3}{2}\int \frac{t^2}{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{1-t^2} - \frac{3}{2}\int \frac{(1-t^2)-1}{1-t^2}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{1-t^2} - \frac{3}{2}\int dt + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{t^2-1} - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} - \frac{3}{2}\cos x + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C.$$

§4. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

При вычислении интегралов от тригонометрических функций часто оказываются полезными следующие формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Покажем их применение на примере.

4.

$$\int \sin^2 x \ \cos^4 x \ dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \ \cos^2 x \ dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\sin^2 2x + \sin^2 2x \ \cos 2x\right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{16}(1-\cos 4x) + \frac{1}{8}\sin^2 2x \ \cos 2x\right) dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

§4. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

При вычислении интегралов от тригонометрических функций часто оказываются полезными следующие формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Покажем их применение на примере.

4.

$$\int \sin^2 x \ \cos^4 x \ dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \ \cos^2 x \ dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\sin^2 2x + \sin^2 2x \ \cos 2x\right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{16}(1-\cos 4x) + \frac{1}{8}\sin^2 2x \ \cos 2x\right) dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

§5. Интегралы вида $\int R\left(x^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$

§5. Интегралы вида
$$\int R\left(x^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$$

§5. Интегралы вида $\int R\left(x^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$

Интегралы указанного вида, где R – рациональная функция своих аргументов, а числа p_i и q_i – натуральные, могут быть приведены к интегралу от рациональной функции. Для этого достаточно найти число N – наименьшее общее кратное всех знаменателей q_i и сделать замену переменной $x = t^N$.

Пример.

$$\int \frac{1+\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{2+\sqrt[6]{x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5\,dt \end{array}\right] = \int \frac{1+t^3-2t^2}{2+t}\cdot 6t^5\,dt.$$

§5. Интегралы вида $\int R\left(x^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$

Интегралы указанного вида, где R – рациональная функция своих аргументов, а числа p_i и q_i – натуральные, могут быть приведены к интегралу от рациональной функции. Для этого достаточно найти число N – наименьшее общее кратное всех знаменателей q_i и сделать замену переменной $x = t^N$.

Пример.

$$\int \frac{1+\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{2+\sqrt[6]{x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5\,dt \end{array}\right] = \int \frac{1+t^3-2t^2}{2+t}\cdot 6t^5\,dt.$$

§6. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/m}\right) dx$

§6. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/m}\right) dx$$

§6. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/m}\right) dx$

Для вычисления таких интегралов положим $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$.

Тогда получим

$$t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \Longrightarrow \gamma t^m x + \delta t^m = \alpha x + \beta \Longrightarrow x = \frac{\beta - \delta t^m}{\gamma t^m - \alpha} \equiv \varphi(t).$$

Поскольку φ – рациональная функция, композиция рациональных функций является рациональной функцией и производная φ' также рациональна, то в результате такой замены получаем интеграл от рациональной функции

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt.$$

§6. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/m}\right) dx$

Для вычисления таких интегралов положим $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$. Тогда получим

$$t^m = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \implies \gamma t^m x+\delta t^m = \alpha x+\beta \implies x = \frac{\beta-\delta t^m}{\gamma t^m-\alpha} \equiv \varphi(t).$$

Поскольку φ – рациональная функция, композиция рациональных функций является рациональной функцией и производная φ' также рациональна, то в результате такой замены получаем интеграл от рациональной функции

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt.$$

§6. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/m}\right) dx$

Для вычисления таких интегралов положим $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$. Тогда получим

$$t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \Longrightarrow \gamma t^m x + \delta t^m = \alpha x + \beta \Longrightarrow x = \frac{\beta - \delta t^m}{\gamma t^m - \alpha} \equiv \varphi(t).$$

Поскольку φ – рациональная функция, композиция рациональных функций является рациональной функцией и производная φ' также рациональна, то в результате такой замены получаем интеграл от рациональной функции

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt.$$

§6. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/m}\right) dx$

Пример 1.

$$1. \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, & \frac{x+1}{x-1} = t^3 \\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, & dx = -\frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2} \end{array} \right] = \int t \cdot \frac{t^3-1}{2t^3} \cdot \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2} =$$

$$= -3 \int \frac{dt}{t^3-1} = \ldots$$

§6. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/m}\right) dx$

Пример 2.

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, & x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = -\frac{4t\ dt}{(1+t^2)^2} & \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2\right) \cdot t} \cdot \frac{-4t\ dt}{(1+t^2)^2} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

Биномиальным дифференциалом называется выражение $x^m(a+bx^n)^p dx$, где действительные числа $a \neq 0$, $b \neq 0$, а числа p, m и n – рациональные.

Для вычисления интеграла от биномиального дифференциала рассмотрим следующие три случая.

Случай 1. p – целое. В этом случае полагаем $x = t^N$, где N – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n. Ясно, что в этом случае получаем интеграл от рациональной относительно t функции.

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

Биномиальным дифференциалом называется выражение $x^m(a+bx^n)^p dx$, где действительные числа $a \neq 0$, $b \neq 0$, а числа p, m и n – рациональные.

Для вычисления интеграла от биномиального дифференциала рассмотрим следующие три случая.

Случай 1. p – целое. В этом случае полагаем $x = t^N$, где N – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n. Ясно, что в этом случае получаем интеграл от рациональной относительно t функции.

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

Биномиальным дифференциалом называется выражение $x^m(a+bx^n)^p dx$, где действительные числа $a \neq 0$, $b \neq 0$, а числа p, m и n – рациональные.

Для вычисления интеграла от биномиального дифференциала рассмотрим следующие три случая.

Случай 1. p – целое. В этом случае полагаем $x = t^N$, где N – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n. Ясно, что в этом случае получаем интеграл от рациональной относительно t функции.

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

Если же p не целое, то выполним подстановку $x = z^{\frac{1}{n}}$. Тогда $dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$, а биномиальный дифференциал преобразовывается к виду

$$\frac{1}{n} z^{\frac{m}{n}} (a + bz)^p z^{\frac{1}{n}-1} dz = \frac{1}{n} (a + bz)^p z^q dz,$$

где $q = \frac{m+1}{n} - 1$.

Случай 2. Если $q = \frac{m+1}{n} - 1$ – целое, то подстановка $t = (a + bz)^{1/s} = (a + bx^n)^{1/s}$, где s – знаменатель дроби p, приводит к интегралу от рациональной относительно t функции.

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

Если же p не целое, то выполним подстановку $x = z^{\frac{1}{n}}$. Тогда $dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$, а биномиальный дифференциал преобразовывается к виду

$$\frac{1}{n} z^{\frac{m}{n}} (a + bz)^p z^{\frac{1}{n}-1} dz = \frac{1}{n} (a + bz)^p z^q dz,$$

где $q = \frac{m+1}{n} - 1$.

Случай 2. Если $q = \frac{m+1}{n} - 1$ – целое, то подстановка $t = (a + bz)^{1/s} = (a + bx^n)^{1/s}$, где s – знаменатель дроби p, приводит к интегралу от рациональной относительно t функции.

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

Если же q не целое, то преобразуем дифференциал к виду

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q}dz.$$

Случай 3. $p+q$ – целое. В этом случае подстановка $t=\sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}}=\sqrt[s]{ax^{-n}+b}$, где s – знаменатель дроби p, приводит к интегралу от рациональной относительно t функции.

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

Если же q не целое, то преобразуем дифференциал к виду

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^{p} z^{p+q}dz.$$

Случай 3. $p+q$ – целое. В этом случае подстановка $t=\sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}}=\sqrt[s]{ax^{-n}+b}$, где s – знаменатель дроби p, приводит к интегралу от рациональной относительно t функции.

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

Итак, в трех рассмотренных случаях

1. p – целое,
2. $\frac{m+1}{n}$ – целое,
3. $\frac{m+1}{n} + p$ – целое

интеграл от биномиального дифференциала с помощью соответствующей замены переменной сводится к интегралу от рациональной функции, а значит, интегрируется в конечном виде.

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

Итак, в трех рассмотренных случаях

1. p – целое,
2. $\frac{m+1}{n}$ – целое,
3. $\frac{m+1}{n} + p$ – целое

интеграл от биномиального дифференциала с помощью соответствующей замены переменной сводится к интегралу от рациональной функции, а значит, интегрируется в конечном виде.

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

Итак, в трех рассмотренных случаях

1. p – целое,
2. $\frac{m+1}{n}$ – целое,
3. $\frac{m+1}{n} + p$ – целое

интеграл от биномиального дифференциала с помощью соответствующей замены переменной сводится к интегралу от рациональной функции, а значит, интегрируется в конечном виде.

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

Итак, в трех рассмотренных случаях

1. p – целое,
2. $\frac{m+1}{n}$ – целое,
3. $\frac{m+1}{n}+p$ – целое

интеграл от биномиального дифференциала с помощью соответствующей замены переменной сводится к интегралу от рациональной функции, а значит, интегрируется в конечном виде.

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

Итак, в трех рассмотренных случаях

1. p – целое,
2. $\frac{m+1}{n}$ – целое,
3. $\frac{m+1}{n} + p$ – целое

интеграл от биномиального дифференциала с помощью соответствующей замены переменной сводится к интегралу от рациональной функции, а значит, интегрируется в конечном виде.

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

С другой стороны, справедлива следующая

Теорема Чебышева.

Если не выполнено ни одно из условий перечисленных выше трех случаев, то интеграл от биномиального дифференциала не является элементарной функцией.

Доказательство этой теоремы основано на применении методов теории функций комплексного переменного. Здесь мы его приводить не будем.

§7. Интегрирование биномиального дифференциала

С другой стороны, справедлива следующая

Теорема Чебышева.

Если не выполнено ни одно из условий перечисленных выше трех случаев, то интеграл от биномиального дифференциала не является элементарной функцией.

Доказательство этой теоремы основано на применении методов теории функций комплексного переменного. Здесь мы его приводить не будем.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Далее содержатся вспомогательные материалы

Доказательство теоремы о разности первообразных.

Пусть F_1, F_2 – две первообразные для функции f. Тогда $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$.

Отсюда следует, что для всех $x \in I$ справедливо равенство $(F_1 - F_2)'(x) = 0$.

Поэтому, в силу следствия из теоремы Лагранжа, разность $F_1 - F_2$ – тождественно постоянная функция, что и требовалось доказать. ■

Доказательство теоремы о разности первообразных.

Пусть $F_1,\ F_2$ – две первообразные для функции f. Тогда $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$.
Отсюда следует, что для всех $x \in I$ справедливо равенство $(F_1 - F_2)'(x) = 0$.
Поэтому, в силу следствия из теоремы Лагранжа, разность $F_1 - F_2$ – тождественно постоянная функция, что и требовалось доказать. ■

Доказательство теоремы об интегрировании по частям.

Доказательство сразу следует из правила дифференцирования произведения.

Действительно, пусть $u(x)v'(x)$ имеет первообразную. Тогда, по правилу дифференцирования произведения, имеем

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Отсюда получаем, что $u'(x)v(x)$ является разностью двух производных функций, т. е. разностью двух функций, имеющих первообразные.

Поэтому она сама также является производной, т. е. имеет первообразную, и справедливо требуемое равенство.

Доказательство теоремы об интегрировании по частям.

Доказательство сразу следует из правила дифференцирования произведения.

Действительно, пусть $u(x)v'(x)$ имеет первообразную. Тогда, по правилу дифференцирования произведения, имеем

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Отсюда получаем, что $u'(x)v(x)$ является разностью двух производных функций, т. е. разностью двух функций, имеющих первообразные.

Поэтому она сама также является производной, т. е. имеет первообразную, и справедливо требуемое равенство.

Доказательство теоремы об интегрировании по частям.

Доказательство сразу следует из правила дифференцирования произведения.

Действительно, пусть $u(x)v'(x)$ имеет первообразную. Тогда, по правилу дифференцирования произведения, имеем

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Отсюда получаем, что $u'(x)v(x)$ является разностью двух производных функций, т. е. разностью двух функций, имеющих первообразные.

Поэтому она сама также является производной, т. е. имеет первообразную, и справедливо требуемое равенство.

Доказательство теоремы об интегрировании по частям.

Доказательство сразу следует из правила дифференцирования произведения.
Действительно, пусть $u(x)v'(x)$ имеет первообразную. Тогда, по правилу дифференцирования произведения, имеем

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Отсюда получаем, что $u'(x)v(x)$ является разностью двух производных функций, т. е. разностью двух функций, имеющих первообразные.
Поэтому она сама также является производной, т. е. имеет первообразную, и справедливо требуемое равенство. $\square$

Доказательство утверждения.

Достаточно показать, что квадрат функции, имеющей первообразную, может не иметь первообразной.
Положим $f(x) = |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$. При $\alpha > 1$ функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$ и ее производная равна

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha |x|^{\alpha-1} \sin \frac{1}{|x|} - |x|^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Доказательство утверждения.

Достаточно показать, что квадрат функции, имеющей первообразную, может не иметь первообразной.
Положим $f(x) = |x|^{\alpha} \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$. При $\alpha > 1$ функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$ и ее производная равна

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha |x|^{\alpha-1} \sin \frac{1}{|x|} - |x|^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Продолжение доказательства утверждения.

Поскольку функция $\alpha|x|^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} \equiv \varphi(x)$ $(x \neq 0)$, $\varphi(0) = 0$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а значит, имеет первообразную на $\mathbb{R}$, то функция

$$v(x) \equiv |x|^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x} = \varphi(x) - f'(x) \quad (x \neq 0), \quad v(0) = 0,$$

имеет первообразную на $\mathbb{R}$ как разность двух функций – $\varphi(x)$ и $f'(x)$, имеющих первообразные на $\mathbb{R}$.

Продолжение доказательства утверждения.

Покажем, что при надлежащем выборе числа $\alpha > 1$ функция $v^2(x)$ не имеет первообразной на $\mathbb{R}$.
Предположим противное. Пусть существует такая дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция F, что для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$F'(x) = v^2(x) = |x|^{2(\alpha-2)} \cos^2 \frac{1}{x}, \quad (x \neq 0), \quad F'(0) = 0.$$

Продолжение доказательства утверждения.

Покажем, что при надлежащем выборе числа $\alpha > 1$ функция $v^2(x)$ не имеет первообразной на $\mathbb{R}$.
Предположим противное. Пусть существует такая дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция F, что для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$F'(x) = v^2(x) = |x|^{2(\alpha-2)} \cos^2 \frac{1}{x}, \quad (x \neq 0), \quad F'(0) = 0.$$

Продолжение доказательства утверждения.

Для $k = 1, 2, \ldots$ обозначим

$$[a_k, b_k] = \left[\frac{4}{(4k+1)\pi}, \frac{4}{(4k-1)\pi}\right].$$

Если $x \in [a_k, b_k]$, то

$$\frac{1}{x} \in \left[\frac{(4k-1)\pi}{4}, \frac{(4k+1)\pi}{4}\right],$$

$$\frac{2}{x} \in \left[\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right] = \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right].$$

Поэтому для $x \in [a_k, b_k]$ имеем

$$\cos^2\frac{1}{x} = \frac{1+\cos\frac{2}{x}}{2} \geq \frac{1}{2},$$

так что $F'(x) \geq \frac{1}{2}x^{2(\alpha-2)}, \; x \in [a_k, b_k]$.

Продолжение доказательства утверждения.

Для $k = 1, 2, \ldots$ обозначим

$$[a_k, b_k] = \left[\frac{4}{(4k+1)\pi}, \frac{4}{(4k-1)\pi}\right].$$

Если $x \in [a_k, b_k]$, то

$$\frac{1}{x} \in \left[\frac{(4k-1)\pi}{4}, \frac{(4k+1)\pi}{4}\right],$$

$$\frac{2}{x} \in \left[\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right] = \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right].$$

Поэтому для $x \in [a_k, b_k]$ имеем

$$\cos^2 \frac{1}{x} = \frac{1 + \cos \frac{2}{x}}{2} \geq \frac{1}{2},$$

так что $F'(x) \geq \frac{1}{2} x^{2(\alpha-2)}$, $x \in [a_k, b_k]$.

Продолжение доказательства утверждения.

Для $k = 1, 2, \ldots$ обозначим

$$[a_k, b_k] = \left[\frac{4}{(4k+1)\pi}, \frac{4}{(4k-1)\pi}\right].$$

Если $x \in [a_k, b_k]$, то

$$\frac{1}{x} \in \left[\frac{(4k-1)\pi}{4}, \frac{(4k+1)\pi}{4}\right],$$

$$\frac{2}{x} \in \left[\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right] = \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right].$$

Поэтому для $x \in [a_k, b_k]$ имеем

$$\cos^2 \frac{1}{x} = \frac{1 + \cos\frac{2}{x}}{2} \geq \frac{1}{2},$$

так что $F'(x) \geq \frac{1}{2} x^{2(\alpha-2)}$, $x \in [a_k, b_k]$.

Продолжение доказательства утверждения.

Для $k = 1, 2, \ldots$ обозначим

$$[a_k, b_k] = \left[\frac{4}{(4k+1)\pi}, \frac{4}{(4k-1)\pi}\right].$$

Если $x \in [a_k, b_k]$, то

$$\frac{1}{x} \in \left[\frac{(4k-1)\pi}{4}, \frac{(4k+1)\pi}{4}\right],$$

$$\frac{2}{x} \in \left[\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right] = \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right].$$

Поэтому для $x \in [a_k, b_k]$ имеем

$$\cos^2\frac{1}{x} = \frac{1+\cos\frac{2}{x}}{2} \geq \frac{1}{2},$$

так что $F'(x) \geq \frac{1}{2}x^{2(\alpha-2)},\ x \in [a_k, b_k]$.

Продолжение доказательства утверждения.

По теореме Лагранжа получим

$$F(b_k) - F(a_k) = F'(\xi_k)(b_k - a_k) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\xi_k^{2(\alpha-2)}(b_k - a_k) \geq \frac{b_k - a_k}{2} b_k^{2(\alpha-2)},$$

где $\xi_k \in [a_k, b_k]$, а число $\alpha > 1$ будет выбрано так, что $\alpha < 2$.
Отсюда получим

$$F(a_k) \leq F(b_k) - \frac{b_k - a_k}{2} b_k^{2(\alpha-2)}.$$

Заметим, что отрезки $[a_k, b_k]$ попарно не пересекаются и, так как $F'(x) \geq 0$, то функция F не убывает.

Продолжение доказательства утверждения.

По теореме Лагранжа получим

$$F\left(b_k\right) - F\left(a_k\right) = F'\left(\xi_k\right)\left(b_k - a_k\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\xi_k^{2(\alpha-2)}\left(b_k - a_k\right) \geq \frac{b_k - a_k}{2} b_k^{2(\alpha-2)},$$

где $\xi_k \in [a_k, b_k]$, а число $\alpha > 1$ будет выбрано так, что $\alpha < 2$. Отсюда получим

$$F\left(a_k\right) \leq F\left(b_k\right) - \frac{b_k - a_k}{2} b_k^{2(\alpha-2)}.$$

Заметим, что отрезки $[a_k, b_k]$ попарно не пересекаются и, так как $F'(x) \geq 0$, то функция F не убывает.

Продолжение доказательства утверждения.

Значит,

$$F\left(b_{k+1}\right) \leq F\left(a_k\right) \leq F\left(b_k\right) - \frac{b_k - a_k}{2} b_k^{2(\alpha-2)}.$$

Отсюда следует, что

$$F\left(b_{k+1}\right) \leq F\left(b_1\right) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{k} \left(b_s - a_s\right) b_s^{2(\alpha-2)}. \qquad (*)$$

Оценим последнюю сумму справа.

Продолжение доказательства утверждения.

Значит,

$$F(b_{k+1}) \leq F(a_k) \leq F(b_k) - \frac{b_k - a_k}{2} b_k^{2(\alpha-2)}.$$

Отсюда следует, что

$$F(b_{k+1}) \leq F(b_1) - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k}(b_s - a_s)\, b_s^{2(\alpha-2)}. \qquad (*)$$

Оценим последнюю сумму справа.

Продолжение доказательства утверждения.

Имеем

$$b_s - a_s = \frac{8}{\pi}\frac{1}{(4s+1)(4s-1)},$$

так что

$$\sum_{s=1}^{k}(b_s - a_s)\, b_s^{2(\alpha-2)} = c_s \sum_{s=1}^{k}\frac{1}{(4s+1)(4s-1)}\left(\frac{1}{4s-1}\right)^{2(\alpha-2)} \geq$$

$$\geq c_s' \sum_{s=1}^{k}\frac{1}{s^{2\alpha-2}}.$$

Окончание доказательства утверждения.

Если $2\alpha - 2 \leq 1$, т. е. $\alpha \leq \frac{3}{2}$, то $\sum\limits_{s=1}^{k} \frac{1}{s^{2\alpha-2}} \to \infty$ $(k \to \infty)$.

Поэтому из $(*)$ следует, что $F(b_{k+1}) \to -\infty$ при $k \to \infty$. Но поскольку $b_{k+1} \to +0$ $(k \to \infty)$, то это противоречит непрерывности функции F в точке $x_0 = 0$ справа, которая вытекает из дифференцируемости функции F в нуле. ■

Окончание доказательства утверждения.

Если $2\alpha - 2 \leq 1$, т. е. $\alpha \leq \frac{3}{2}$, то $\sum\limits_{s=1}^{k} \frac{1}{s^{2\alpha-2}} \to \infty$ $(k \to \infty)$.

Поэтому из $(*)$ следует, что $F(b_{k+1}) \to -\infty$ при $k \to \infty$.

Но поскольку $b_{k+1} \to +0$ $(k \to \infty)$, то это противоречит непрерывности функции F в точке $x_0 = 0$ справа, которая вытекает из дифференцируемости функции F в нуле. ■

Окончание доказательства утверждения.

Если $2\alpha - 2 \le 1$, т. е. $\alpha \le \frac{3}{2}$, то $\sum\limits_{s=1}^{k} \frac{1}{s^{2\alpha-2}} \to \infty \ (k \to \infty)$.
Поэтому из $(*)$ следует, что $F(b_{k+1}) \to -\infty$ при $k \to \infty$.
Но поскольку $b_{k+1} \to +0 \ (k \to \infty)$, то это противоречит непрерывности функции F в точке $x_0 = 0$ справа, которая вытекает из дифференцируемости функции F в нуле. $\blacksquare$