Математический анализ

Лекции по математическому анализу

Анатолий КОРЕНОВСКИЙ

Кафедра математического анализа
Институт математики, экономики и механики

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

27 января 2013 г.

Текст лекций

Данные лекции составлены на основе учебника

В. И. Коляда, А. А. Кореновский. *Курс лекций по математическому анализу, ч.1,2. Одесса, Астропринт, 2010.*

Список литературы

Учебники

- 1. Г. М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1,2,3. М., Наука, 1970.*
- 2. Э. Ландау. *Основы анализа. М., ИЛ, 1947.*
- 3. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа, ч. 1,2. М., Наука, 1982.
- 4. А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа, М., Наука, 1988.
- 5. С. М. Никольский. Курс математического анализа, т. 1,2. М., Наука, 1990.
- 6. Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. 1,2. М., Наука, 1964.
- 7. Л. Д. Кудрявцев. Математический анализ, т. 1,2. М., Высшая школа, 1973.

Список литературы

Сборники задач

- 8. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., Наука, 1977.
- 9. Л. Д. Кудрявцев и др. Сборник задач по математическому анализу, М., Наука, 1984.
- 10. И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. Математический анализ в задачах и упражнениях, М., Изд-во МГУ, 1991.
- 11. И. И. Ляшко и др. Математический анализ в примерах и задачах, Киев, Вища школа, 1974.

Тема 7. Интеграл Римана.

§1. Определение и элементарные свойства

§1. Определение и элементарные свойства

Определение. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f.
Рассмотрим произвольную систему точек

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Каждую такую систему назовем разбиением отрезка $[a, b]$, а само разбиение будем обозначать через Π.
Отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ называются частичными отрезками разбиения.
Наибольшую из длин $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ частичных отрезков называют диаметром этого разбиения и обозначают

$$d(\Pi) = \max_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i.$$

§1. Определение и элементарные свойства

Определение. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f.
Рассмотрим произвольную систему точек

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Каждую такую систему назовем разбиением отрезка $[a, b]$, а само разбиение будем обозначать через Π.
Отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ называются частичными отрезками разбиения.
Наибольшую из длин $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ частичных отрезков называют диаметром этого разбиения и обозначают

$$d(\Pi) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i.$$

§1. Определение и элементарные свойства

Определение. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f. Рассмотрим произвольную систему точек

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Каждую такую систему назовем разбиением отрезка $[a, b]$, а само разбиение будем обозначать через Π.
Отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ называются частичными отрезками разбиения.
Наибольшую из длин $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ частичных отрезков называют диаметром этого разбиения и обозначают

$$d(\Pi) = \max_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i.$$

§1. Определение и элементарные свойства

Определение. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f. Рассмотрим произвольную систему точек

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Каждую такую систему назовем разбиением отрезка $[a, b]$, а само разбиение будем обозначать через Π.

Отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ называются частичными отрезками разбиения.

Наибольшую из длин $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ частичных отрезков называют диаметром этого разбиения и обозначают

$$d(\Pi) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i.$$

§1. Определение и элементарные свойства

В каждом из частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ выберем произвольным образом точку ξ_i и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Сумма σ называется интегральной суммой для функции f, соответствующей заданному разбиению П и заданному выбору точек ξ_i.

Для каждого заданного разбиения множество всевозможных интегральных сумм бесконечно, поскольку каждая интегральная сумма зависит от способа выбора точек ξ_i.

§1. Определение и элементарные свойства

В каждом из частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ выберем произвольным образом точку ξ_i и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Сумма σ называется **интегральной суммой** для функции f, соответствующей заданному разбиению Π и заданному выбору точек ξ_i.

Для каждого заданного разбиения множество всевозможных интегральных сумм бесконечно, поскольку каждая интегральная сумма зависит от способа выбора точек ξ_i.

§1. Определение и элементарные свойства

В каждом из частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ выберем произвольным образом точку ξ_i и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Сумма σ называется интегральной суммой для функции f, соответствующей заданному разбиению Π и заданному выбору точек ξ_i.

Для каждого заданного разбиения множество всевозможных интегральных сумм бесконечно, поскольку каждая интегральная сумма зависит от способа выбора точек ξ_i.

§1. Определение и элементарные свойства

Определение. Число I называется пределом интегральных сумм σ при стремлении к нулю диаметра разбиения $d(\Pi)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее, вообще говоря, от ε, что для любого разбиения Π отрезка $[a, b]$ диаметра $d(\Pi) < \delta$ при любом выборе промежуточных точек ξ_i из частичных отрезков этого разбиения соответствующая интегральная сумма σ удовлетворяет неравенству $|\sigma - I| < \varepsilon$, т. е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall\Pi,\ \ d(\Pi) < \delta\ \forall\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]\ (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

$$|\sigma - I| < \varepsilon.$$

§1. Определение и элементарные свойства

Определение. Число I называется **пределом интегральных сумм** σ при стремлении к нулю диаметра разбиения $d(\Pi)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее, вообще говоря, от ε, что для любого разбиения Π отрезка $[a, b]$ диаметра $d(\Pi) < \delta$ при любом выборе промежуточных точек ξ_i из частичных отрезков этого разбиения соответствующая интегральная сумма σ удовлетворяет неравенству $|\sigma - I| < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \Pi, \ d(\Pi) < \delta \ \forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \ (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

$$|\sigma - I| < \varepsilon.$$

§1. Определение и элементарные свойства

Определение. Число I называется пределом интегральных сумм σ при стремлении к нулю диаметра разбиения $d(\Pi)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее, вообще говоря, от ε, что для любого разбиения Π отрезка $[a, b]$ диаметра $d(\Pi) < \delta$ при любом выборе промежуточных точек ξ_i из частичных отрезков этого разбиения соответствующая интегральная сумма σ удовлетворяет неравенству $|\sigma - I| < \varepsilon$, т. е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall\Pi,\ d(\Pi) < \delta\ \forall\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]\ (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$|\sigma - I| < \varepsilon.$$

§1. Определение и элементарные свойства

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения, то этот предел называется интегралом от функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. В этом случае функция f называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$. В противном случае говорят, что функция f неинтегрируема на $[a, b]$.

Итак,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma.$$

§1. Определение и элементарные свойства

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения, то этот предел называется интегралом от функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. В этом случае функция f называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$. В противном случае говорят, что функция f неинтегрируема на $[a, b]$.

Итак,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma.$$

§1. Определение и элементарные свойства

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения, то этот предел называется интегралом от функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. В этом случае функция f называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$. В противном случае говорят, что функция f неинтегрируема на $[a, b]$.

Итак,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma.$$

§1. Определение и элементарные свойства

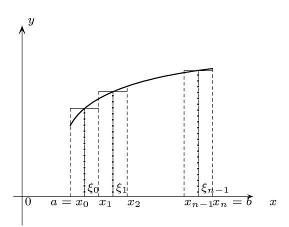
Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения, то этот предел называется интегралом от функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. В этом случае функция f называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$. В противном случае говорят, что функция f неинтегрируема на $[a, b]$.

Итак,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma.$$

§1. Определение и элементарные свойства

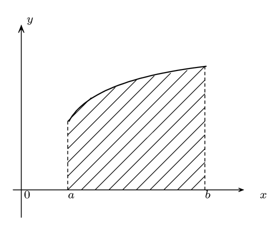
Геометрический смысл определенного интеграла.



$\longleftarrow$ Так строится интегральная сумма σ.

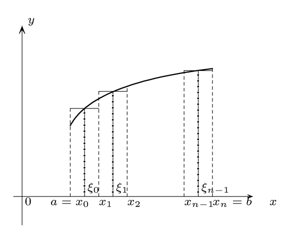
С геометрической точки зрения интегральная сумма σ представляет собой сумму площадей прямоугольников высотой $f(\xi_i)$ и шириной $x_{i+1} - x_i$.

Поэтому определенный интеграл – предел интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения – можно интерпретировать как площадь (с учетом знака) криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$.



§1. Определение и элементарные свойства

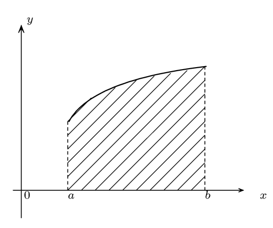
Геометрический смысл определенного интеграла.



$\longleftarrow$ Так строится интегральная сумма σ.

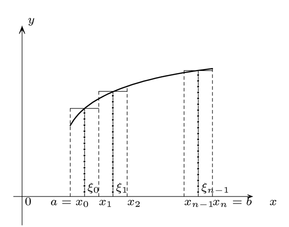
С геометрической точки зрения интегральная сумма σ представляет собой сумму площадей прямоугольников высотой $f(\xi_i)$ и шириной $x_{i+1} - x_i$.

Поэтому определенный интеграл – предел интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения – можно интерпретировать как площадь (с учетом знака) криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$.



§1. Определение и элементарные свойства

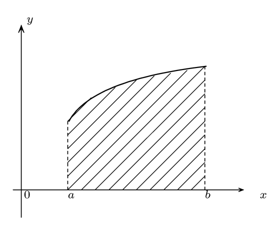
Геометрический смысл определенного интеграла.



$\longleftarrow$ Так строится интегральная сумма σ.

С геометрической точки зрения интегральная сумма σ представляет собой сумму площадей прямоугольников высотой $f(\xi_i)$ и шириной $x_{i+1} - x_i$.

Поэтому определенный интеграл – предел интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения – можно интерпретировать как площадь (с учетом знака) криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$.



§1. Определение и элементарные свойства

По аналогии с определением предела функции в смысле Гейне, определение предела интегральных сумм можно выразить в терминах последовательностей следующим образом.

Определение. Число I называется **пределом интегральных сумм** при стремлении к нулю диаметра разбиения, если для любой последовательности $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$ разбиений отрезка $[a, b]$, такой, что $d(\Pi_n) \to 0$ при $n \to \infty$, и при любом выборе промежуточных точек из частичных отрезков этих разбиений соответствующая последовательность интегральных сумм $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ сходится к числу I.

Упражнение. Докажите равносильность этих двух определений предела интегральных сумм.

§1. Определение и элементарные свойства

По аналогии с определением предела функции в смысле Гейне, определение предела интегральных сумм можно выразить в терминах последовательностей следующим образом.

Определение. Число I называется пределом интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения, если для любой последовательности $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$ разбиений отрезка $[a, b]$, такой, что $d(\Pi_n) \to 0$ при $n \to \infty$, и при любом выборе промежуточных точек из частичных отрезков этих разбиений соответствующая последовательность интегральных сумм $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ сходится к числу I.

Упражнение. Докажите равносильность этих двух определений предела интегральных сумм.

§1. Определение и элементарные свойства

По аналогии с определением предела функции в смысле Гейне, определение предела интегральных сумм можно выразить в терминах последовательностей следующим образом.

Определение. Число I называется **пределом интегральных сумм** при стремлении к нулю диаметра разбиения, если для любой последовательности $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$ разбиений отрезка $[a, b]$, такой, что $d(\Pi_n) \to 0$ при $n \to \infty$, и при любом выборе промежуточных точек из частичных отрезков этих разбиений соответствующая последовательность интегральных сумм $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ сходится к числу I.

Упражнение. Докажите равносильность этих двух определений предела интегральных сумм.

§1. Определение и элементарные свойства

Теорема (необходимое условие интегрируемости).

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство.

§1. Определение и элементарные свойства

Теорема (необходимое условие интегрируемости).

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство.

§1. Определение и элементарные свойства

Замечание. В доказательстве теоремы мы воспользовались тем, что для интегрируемой функции при достаточно мелком разбиении интегральные суммы ограничены.

На самом деле у интегрируемой функции ограничено множество всех интегральных сумм, соответствующих всевозможным разбиениям, а не только достаточно мелким.

Действительно, мы доказали, что интегрируемая на $[a, b]$ функция f ограничена, т. е. существует такое число A, что $|f(x)| < A$ для всех $x \in [a, b]$.

Поэтому для любого разбиения Π при любом способе выбора точек ξ_i получим

$$|\sigma| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \Delta x_i \leq A \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = A(b-a).$$

§1. Определение и элементарные свойства

Замечание. В доказательстве теоремы мы воспользовались тем, что для интегрируемой функции при достаточно мелком разбиении интегральные суммы ограничены.
На самом деле у интегрируемой функции ограничено множество всех интегральных сумм, соответствующих всевозможным разбиениям, а не только достаточно мелким.
Действительно, мы доказали, что интегрируемая на $[a, b]$ функция f ограничена, т. е. существует такое число A, что $|f(x)| < A$ для всех $x \in [a, b]$.
Поэтому для любого разбиения Π при любом способе выбора точек ξ_i получим

$$|\sigma| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \Delta x_i \leq A \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = A(b-a).$$

§1. Определение и элементарные свойства

Замечание. В доказательстве теоремы мы воспользовались тем, что для интегрируемой функции при достаточно мелком разбиении интегральные суммы ограничены.
На самом деле у интегрируемой функции ограничено множество всех интегральных сумм, соответствующих всевозможным разбиениям, а не только достаточно мелким.
Действительно, мы доказали, что интегрируемая на $[a, b]$ функция f ограничена, т. е. существует такое число A, что $|f(x)| < A$ для всех $x \in [a, b]$.
Поэтому для любого разбиения Π при любом способе выбора точек ξ_i получим

$$|\sigma| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\Delta x_i \leq A \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = A(b-a).$$

§1. Определение и элементарные свойства

Замечание. В доказательстве теоремы мы воспользовались тем, что для интегрируемой функции при достаточно мелком разбиении интегральные суммы ограничены.
На самом деле у интегрируемой функции ограничено множество всех интегральных сумм, соответствующих всевозможным разбиениям, а не только достаточно мелким.
Действительно, мы доказали, что интегрируемая на $[a, b]$ функция f ограничена, т. е. существует такое число A, что $|f(x)| < A$ для всех $x \in [a, b]$.
Поэтому для любого разбиения Π при любом способе выбора точек ξ_i получим

$$|\sigma| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \Delta x_i \leq A \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = A(b-a).$$

§1. Определение и элементарные свойства

Итак, каждая интегрируемая функция ограничена. Однако не каждая ограниченная функция интегрируема.

Пример ограниченной неинтегрируемой функции.

Рассмотрим функцию Дирихле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ – рационально}, \\ 0, & x \text{ – иррационально}. \end{cases}$$

Эта функция ограничена. Покажем, что она неинтегрируема на любом невырожденном отрезке $[a, b]$.

§1. Определение и элементарные свойства

Итак, каждая интегрируемая функция ограничена. Однако не каждая ограниченная функция интегрируема.

Пример ограниченной неинтегрируемой функции.

Рассмотрим функцию Дирихле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рационально}, \\ 0, & x \text{ — иррационально}. \end{cases}$$

Эта функция ограничена. Покажем, что она неинтегрируема на любом невырожденном отрезке $[a, b]$.

§1. Определение и элементарные свойства

Окончание примера ограниченной неинтегрируемой функции.

Действительно, если для произвольного разбиения П все точки ξ_i выбрать рациональными, то получим

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = b - a.$$

Если же все точки ξ_i взять иррациональными, то

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}(\xi_i)\Delta x_i = 0.$$

Отсюда следует, что интегральные суммы не имеют предела при стремлении к нулю диаметра разбиения.

§1. Определение и элементарные свойства

Окончание примера ограниченной неинтегрируемой функции.

Действительно, если для произвольного разбиения П все точки ξ_i выбрать рациональными, то получим

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = b - a.$$

Если же все точки ξ_i взять иррациональными, то

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}(\xi_i)\Delta x_i = 0.$$

Отсюда следует, что интегральные суммы не имеют предела при стремлении к нулю диаметра разбиения.

§1. Определение и элементарные свойства

Окончание примера ограниченной неинтегрируемой функции.

Действительно, если для произвольного разбиения П все точки ξ_i выбрать рациональными, то получим

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = b - a.$$

Если же все точки ξ_i взять иррациональными, то

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}(\xi_i)\Delta x_i = 0.$$

Отсюда следует, что интегральные суммы не имеют предела при стремлении к нулю диаметра разбиения.

§1. Определение и элементарные свойства

Пример 1.

Пусть $f(x) = c, \;\; a \le x \le b$. Тогда для любого разбиения П при любом выборе точек ξ_i будет $f(\xi_i) = c$ и поэтому

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = c(b-a).$$

Таким образом, $\int\limits_a^b c \; dx = c(b-a)$.

§1. Определение и элементарные свойства

Пример 1.

Пусть $f(x) = c$, $a \le x \le b$. Тогда для любого разбиения П при любом выборе точек ξ_i будет $f(\xi_i) = c$ и поэтому

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = c(b-a).$$

Таким образом, $\int\limits_a^b c\,dx = c(b-a)$.

§1. Определение и элементарные свойства

Пример 1.

Пусть $f(x) = c,\ a \le x \le b$. Тогда для любого разбиения П при любом выборе точек ξ_i будет $f(\xi_i) = c$ и поэтому

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = c(b-a).$$

Таким образом, $\int\limits_a^b c\ dx = c(b-a)$.

§1. Определение и элементарные свойства

Пример 2.

Пусть $f(x) = x,\ 0 \le x \le 1.$

Выберем произвольное разбиение

$\Pi:\ 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ и точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Тогда соответствующая интегральная сумма будет иметь вид

$\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta x_i$. Наибольшая из всех интегральных сумм, соответствующая выбранному разбиению, равна

$\overline{\sigma} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \Delta x_i$, а наименьшая $\underline{\sigma} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i \Delta x_i$.

§1. Определение и элементарные свойства

Пример 2.

Пусть $f(x) = x,\ 0 \le x \le 1$.
Выберем произвольное разбиение
$\Pi:\ 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ и точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Тогда соответствующая интегральная сумма будет иметь вид $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta x_i$. Наибольшая из всех интегральных сумм, соответствующая выбранному разбиению, равна $\overline{\sigma} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \Delta x_i$, а наименьшая $\underline{\sigma} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i \Delta x_i$.

§1. Определение и элементарные свойства

Пример 2.

Пусть $f(x) = x,\ 0 \le x \le 1$.
Выберем произвольное разбиение
$\Pi:\ 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ и точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Тогда соответствующая интегральная сумма будет иметь вид
$\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta x_i$. Наибольшая из всех интегральных сумм, соответствующая выбранному разбиению, равна
$\overline{\sigma} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \Delta x_i$, а наименьшая $\underline{\sigma} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i \Delta x_i$.

§1. Определение и элементарные свойства

Пример 2.

Пусть $f(x) = x, \; 0 \le x \le 1$.
Выберем произвольное разбиение
$\Pi: \; 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ и точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Тогда соответствующая интегральная сумма будет иметь вид
$\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta x_i$. Наибольшая из всех интегральных сумм, соответствующая выбранному разбиению, равна
$\overline{\sigma} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \Delta x_i$, а наименьшая $\underline{\sigma} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i \Delta x_i$.

§1. Определение и элементарные свойства

Окончание примера 2.

Тогда имеем

$$\overline{\sigma}+\underline{\sigma}=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}+x_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}^2-x_i^2)=x_n^2-x_0^2=1,$$

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\Delta x_i\le d(\Pi)\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i=d(\Pi).$$

Таким образом, $\overline{\sigma}-\underline{\sigma}\to 0$ при $d(\Pi)\to 0$, а поскольку $\overline{\sigma}+\underline{\sigma}=1$, то обе эти суммы стремятся к $\frac{1}{2}$.
Отсюда и из неравенства $\underline{\sigma}\le\sigma\le\overline{\sigma}$ сразу следует, что $\sigma\to\frac{1}{2}$ при $d(\Pi)\to 0$.

Итак, функция интегрируема и $\int\limits_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$.

§1. Определение и элементарные свойства

Окончание примера 2.

Тогда имеем

$$\overline{\sigma}+\underline{\sigma}=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}+x_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}^2-x_i^2)=x_n^2-x_0^2=1,$$

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\Delta x_i\leq d(\Pi)\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i=d(\Pi).$$

Таким образом, $\overline{\sigma}-\underline{\sigma}\to 0$ при $d(\Pi)\to 0$, а поскольку $\overline{\sigma}+\underline{\sigma}=1$, то обе эти суммы стремятся к $\frac{1}{2}$.
Отсюда и из неравенства $\underline{\sigma}\leq\sigma\leq\overline{\sigma}$ сразу следует, что $\sigma\to\frac{1}{2}$ при $d(\Pi)\to 0$.

Итак, функция интегрируема и $\int\limits_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$.

§1. Определение и элементарные свойства

Окончание примера 2.

Тогда имеем

$$\overline{\sigma} + \underline{\sigma} = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} + x_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}^2 - x_i^2) = x_n^2 - x_0^2 = 1,$$

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\Delta x_i \leq d(\Pi)\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = d(\Pi).$$

Таким образом, $\overline{\sigma} - \underline{\sigma} \to 0$ при $d(\Pi) \to 0$, а поскольку $\overline{\sigma} + \underline{\sigma} = 1$, то обе эти суммы стремятся к $\frac{1}{2}$.

Отсюда и из неравенства $\underline{\sigma} \leq \sigma \leq \overline{\sigma}$ сразу следует, что $\sigma \to \frac{1}{2}$ при $d(\Pi) \to 0$.

Итак, функция интегрируема и $\int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

§1. Определение и элементарные свойства

Окончание примера 2.

Тогда имеем

$$\overline{\sigma} + \underline{\sigma} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} + x_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}^2 - x_i^2) = x_n^2 - x_0^2 = 1,$$

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\Delta x_i \leq d(\Pi) \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = d(\Pi).$$

Таким образом, $\overline{\sigma} - \underline{\sigma} \to 0$ при $d(\Pi) \to 0$, а поскольку $\overline{\sigma} + \underline{\sigma} = 1$, то обе эти суммы стремятся к $\frac{1}{2}$.
Отсюда и из неравенства $\underline{\sigma} \leq \sigma \leq \overline{\sigma}$ сразу следует, что $\sigma \to \frac{1}{2}$ при $d(\Pi) \to 0$.

Итак, функция интегрируема и $\int\limits_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$.

§1. Определение и элементарные свойства

Окончание примера 2.

Тогда имеем

$$\overline{\sigma} + \underline{\sigma} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} + x_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}^2 - x_i^2) = x_n^2 - x_0^2 = 1,$$

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\Delta x_i \le d(\Pi) \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = d(\Pi).$$

Таким образом, $\overline{\sigma} - \underline{\sigma} \to 0$ при $d(\Pi) \to 0$, а поскольку $\overline{\sigma} + \underline{\sigma} = 1$, то обе эти суммы стремятся к $\frac{1}{2}$.
Отсюда и из неравенства $\underline{\sigma} \le \sigma \le \overline{\sigma}$ сразу следует, что $\sigma \to \frac{1}{2}$ при $d(\Pi) \to 0$.

Итак, функция интегрируема и $\int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

§1. Определение и элементарные свойства

Пример 3. Ступенчатые функции.

Функция f называется ступенчатой на отрезке $[a, b]$, если $[a, b]$ можно разбить на отрезки $[a_0, a_1], \ldots, [a_{s-1}, a_s]$, где $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_s = b$, такие, что функция f постоянна на каждом интервале (a_j, a_{j+1}), т. е.

$$f(x) = c_j, \; x \in (a_j, a_{j+1}), \; j = 0, 1, \ldots, s-1.$$

При достаточно малых δ для разбиения $\Pi: \; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, диаметр которого меньше, чем δ, все частичные отрезки разбиения, за исключением, быть может, не более чем $2s$ штук, расположены целиком в соответствующих интервалах постоянства функции f.

§1. Определение и элементарные свойства

Пример 3. Ступенчатые функции.

Функция f называется ступенчатой на отрезке $[a, b]$, если $[a, b]$ можно разбить на отрезки $[a_0, a_1], \ldots, [a_{s-1}, a_s]$, где $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_s = b$, такие, что функция f постоянна на каждом интервале (a_j, a_{j+1}), т. е.

$$f(x) = c_j, \ x \in (a_j, a_{j+1}), \ j = 0, 1, \ldots, s-1.$$

При достаточно малых δ для разбиения $\Pi: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, диаметр которого меньше, чем δ, все частичные отрезки разбиения, за исключением, быть может, не более чем $2s$ штук, расположены целиком в соответствующих интервалах постоянства функции f.

§1. Определение и элементарные свойства

Окончание примера 3.

Пусть разбиению П при каком-либо выборе промежуточных точек ξ_j соответствует интегральная сумма σ. Имеем

$$\left|\sigma - \sum_{j=0}^{s-1} c_j(a_{j+1} - a_j)\right| \le 2s \cdot \delta \cdot \left[\max_{a\le x\le b} f(x) - \min_{a\le x\le b} f(x)\right].$$

Отсюда ясно, что при стремлении к нулю диаметра разбиения интегральные суммы стремятся к $\sum\limits_{j=0}^{s-1} c_j(a_{j+1} - a_j)$, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{s-1} c_j(a_{j+1} - a_j).$$

§1. Определение и элементарные свойства

Окончание примера 3.

Пусть разбиению П при каком-либо выборе промежуточных точек ξ_j соответствует интегральная сумма σ. Имеем

$$\left| \sigma - \sum_{j=0}^{s-1} c_j (a_{j+1} - a_j) \right| \le 2s \cdot \delta \cdot \left[\max_{a \le x \le b} f(x) - \min_{a \le x \le b} f(x) \right].$$

Отсюда ясно, что при стремлении к нулю диаметра разбиения интегральные суммы стремятся к $\sum\limits_{j=0}^{s-1} c_j (a_{j+1} - a_j)$, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{s-1} c_j (a_{j+1} - a_j).$$

§1. Определение и элементарные свойства

Пример 4. Функция Римана.

Напомним, что функция Римана определяется равенством

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{ иррационально}, \\ \frac{1}{q}, & \text{где } x = \frac{p}{q} - \text{ несократимая дробь}. \end{cases}$$

Покажем, что эта функция интегрируема на $[0, 1]$ и ее интеграл равен нулю.

Для этого заметим, что для любого $x \in [0, 1]$ имеем $\lim_{y \to x} \mathcal{R}(y) = 0$.

Действительно, это сразу следует из того, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ на отрезке $[0, 1]$ существует лишь конечное число таких точек, в которых функция Римана принимает значения большие, чем ε.

Обозначим число таких точек через N_ε.

§1. Определение и элементарные свойства

Пример 4. Функция Римана.

Напомним, что функция Римана определяется равенством

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{ иррационально}, \\ \frac{1}{q}, & \text{где } x = \frac{p}{q} - \text{ несократимая дробь}. \end{cases}$$

Покажем, что эта функция интегрируема на $[0,1]$ и ее интеграл равен нулю.

Для этого заметим, что для любого $x \in [0,1]$ имеем $\lim_{y\to x} \mathcal{R}(y) = 0$.

Действительно, это сразу следует из того, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ на отрезке $[0,1]$ существует лишь конечное число таких точек, в которых функция Римана принимает значения большие, чем ε.

Обозначим число таких точек через N_ε.

§1. Определение и элементарные свойства

Пример 4. Функция Римана.

Напомним, что функция Римана определяется равенством

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{ иррационально}, \\ \frac{1}{q}, & \text{где } x = \frac{p}{q} - \text{ несократимая дробь}. \end{cases}$$

Покажем, что эта функция интегрируема на $[0, 1]$ и ее интеграл равен нулю.
Для этого заметим, что для любого $x \in [0, 1]$ имеем $\lim_{y \to x} \mathcal{R}(y) = 0$.
Действительно, это сразу следует из того, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ на отрезке $[0, 1]$ существует лишь конечное число таких точек, в которых функция Римана принимает значения большие, чем ε.
Обозначим число таких точек через N_ε.

§1. Определение и элементарные свойства

Окончание примера 4.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, $\delta = \frac{\varepsilon'}{2N_{\varepsilon'}}$. Тогда при любом разбиении Π, диаметр которого меньше, чем δ, и при любом способе выбора промежуточных точек количество слагаемых в интегральной сумме, для которых значение функции больше, чем ε', не превосходит $2N_{\varepsilon'}$.

Поэтому для интегральной суммы σ справедлива оценка:

$$\sigma \leq N_{\varepsilon'}\delta + \varepsilon' \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \leq N_{\varepsilon'} \frac{\varepsilon'}{2N_{\varepsilon'}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, получили, что $\sigma \to 0$ при $d(\Pi) \to 0$, т. е.

$$\int_0^1 \mathcal{R}(x)\, dx = 0.$$

§1. Определение и элементарные свойства

Окончание примера 4.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, $\delta = \frac{\varepsilon'}{2N_{\varepsilon'}}$. Тогда при любом разбиении Π, диаметр которого меньше, чем δ, и при любом способе выбора промежуточных точек количество слагаемых в интегральной сумме, для которых значение функции больше, чем ε', не превосходит $2N_{\varepsilon'}$.

Поэтому для интегральной суммы σ справедлива оценка:

$$\sigma \le N_{\varepsilon'}\delta + \varepsilon' \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \le N_{\varepsilon'} \frac{\varepsilon'}{2N_{\varepsilon'}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, получили, что $\sigma \to 0$ при $d(\Pi) \to 0$, т. е.

$$\int_0^1 \mathcal{R}(x)\, dx = 0.$$

§1. Определение и элементарные свойства

Окончание примера 4.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, $\delta = \frac{\varepsilon'}{2N_{\varepsilon'}}$. Тогда при любом разбиении П, диаметр которого меньше, чем δ, и при любом способе выбора промежуточных точек количество слагаемых в интегральной сумме, для которых значение функции больше, чем ε', не превосходит $2N_{\varepsilon'}$.

Поэтому для интегральной суммы σ справедлива оценка:

$$\sigma \leq N_{\varepsilon'}\delta + \varepsilon' \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \leq N_{\varepsilon'} \frac{\varepsilon'}{2N_{\varepsilon'}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, получили, что $\sigma \to 0$ при $d(\Pi) \to 0$, т. е.

$$\int_0^1 \mathcal{R}(x)\,dx = 0.$$

§1. Определение и элементарные свойства

Окончание примера 4.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, $\delta = \frac{\varepsilon'}{2N_{\varepsilon'}}$. Тогда при любом разбиении Π, диаметр которого меньше, чем δ, и при любом способе выбора промежуточных точек количество слагаемых в интегральной сумме, для которых значение функции больше, чем ε', не превосходит $2N_{\varepsilon'}$.

Поэтому для интегральной суммы σ справедлива оценка:

$$\sigma \leq N_{\varepsilon'}\delta + \varepsilon' \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \leq N_{\varepsilon'} \frac{\varepsilon'}{2N_{\varepsilon'}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, получили, что $\sigma \to 0$ при $d(\Pi) \to 0$, т. е.

$$\int\limits_0^1 \mathcal{R}(x)\, dx = 0.$$

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Пусть f – ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция. Выберем произвольное разбиение $\Pi: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ этого отрезка и обозначим

$$M_i = \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x), \quad m_i = \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x) \ (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Определение. Сумма

$$\overline{S}_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

называется **верхней суммой Дарбу** для функции f, соответствующей разбиению Π, а сумма

$$\underline{S}_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

– **нижней суммой Дарбу**, соответствующей разбиению Π.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Пусть f – ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция. Выберем произвольное разбиение $\Pi: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ этого отрезка и обозначим

$$M_i = \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x), \quad m_i = \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x) \ (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Определение. Сумма

$$\overline{S}_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

называется верхней суммой Дарбу для функции f, соответствующей разбиению Π, а сумма

$$\underline{S}_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

– нижней суммой Дарбу, соответствующей разбиению Π.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Пусть f – ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция. Выберем произвольное разбиение $\Pi: \; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ этого отрезка и обозначим

$$M_i = \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x), \quad m_i = \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x) \; (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Определение. Сумма

$$\overline{S}_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

называется верхней суммой Дарбу для функции f, соответствующей разбиению Π, а сумма

$$\underline{S}_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

– нижней суммой Дарбу, соответствующей разбиению Π.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Очевидно, что $\underline{S}_\Pi \le \overline{S}_\Pi$, и любая интегральная сумма σ, соответствующая разбиению Π, удовлетворяет неравенству

$$\underline{S}_\Pi \le \sigma \le \overline{S}_\Pi.$$

Действительно, при любом выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ из определения m_i и M_i получаем $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$. Умножив это неравенство на Δx_i и сложив по i, получаем требуемое неравенство.

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то на каждом из частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ она достигает своего наибольшего и наименьшего значений, т. е. точки ξ_i и η_i можно выбрать так, чтобы были выполнеы равенства $f(\xi_i) = m_i$ и $f(\eta_i) = M_i$. Поэтому в этом случае суммы Дарбу сами являются интегральными суммами.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Очевидно, что $\underline{S}_\Pi \le \overline{S}_\Pi$, и любая интегральная сумма σ, соответствующая разбиению Π, удовлетворяет неравенству

$$\underline{S}_\Pi \le \sigma \le \overline{S}_\Pi.$$

Действительно, при любом выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ из определения m_i и M_i получаем $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$. Умножив это неравенство на Δx_i и сложив по i, получаем требуемое неравенство.

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то на каждом из частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ она достигает своего наибольшего и наименьшего значений, т. е. точки ξ_i и η_i можно выбрать так, чтобы были выполнеы равенства $f(\xi_i) = m_i$ и $f(\eta_i) = M_i$. Поэтому в этом случае суммы Дарбу сами являются интегральными суммами.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Очевидно, что $\underline{S}_\Pi \le \overline{S}_\Pi$, и любая интегральная сумма σ, соответствующая разбиению Π, удовлетворяет неравенству

$$\underline{S}_\Pi \le \sigma \le \overline{S}_\Pi.$$

Действительно, при любом выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ из определения m_i и M_i получаем $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$. Умножив это неравенство на Δx_i и сложив по i, получаем требуемое неравенство.

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то на каждом из частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ она достигает своего наибольшего и наименьшего значений, т. е. точки ξ_i и η_i можно выбрать так, чтобы были выполнеы равенства $f(\xi_i) = m_i$ и $f(\eta_i) = M_i$.

Поэтому в этом случае суммы Дарбу сами являются интегральными суммами.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Очевидно, что $\underline{S}_\Pi \le \overline{S}_\Pi$, и любая интегральная сумма σ, соответствующая разбиению П, удовлетворяет неравенству

$$\underline{S}_\Pi \le \sigma \le \overline{S}_\Pi.$$

Действительно, при любом выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ из определения m_i и M_i получаем $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$. Умножив это неравенство на Δx_i и сложив по i, получаем требуемое неравенство.

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то на каждом из частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ она достигает своего наибольшего и наименьшего значений, т. е. точки ξ_i и η_i можно выбрать так, чтобы были выполнеы равенства $f(\xi_i) = m_i$ и $f(\eta_i) = M_i$. Поэтому в этом случае суммы Дарбу сами являются интегральными суммами.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Если же f разрывна, то суммы Дарбу не обязаны быть интегральными суммами. Однако справедливо следующее

Утверждение.

Для произвольной ограниченной функции f и заданного разбиения Π верхняя и нижняя суммы Дарбу сами являются соответственно верхней и нижней гранями множества всех интегральных сумм, соответствующих заданному разбиению Π.

Доказательство.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Если же f разрывна, то суммы Дарбу не обязаны быть интегральными суммами. Однако справедливо следующее

Утверждение.

Для произвольной ограниченной функции f и заданного разбиения Π верхняя и нижняя суммы Дарбу сами являются соответственно верхней и нижней гранями множества всех интегральных сумм, соответствующих заданному разбиению Π.

Доказательство.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Если же f разрывна, то суммы Дарбу не обязаны быть интегральными суммами. Однако справедливо следующее

Утверждение.

Для произвольной ограниченной функции f и заданного разбиения Π верхняя и нижняя суммы Дарбу сами являются соответственно верхней и нижней гранями множества всех интегральных сумм, соответствующих заданному разбиению Π.

Доказательство.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Свойства сумм Дарбу.

Свойство 1.

Если к имеющимся точкам разбиения добавить новые точки, то от этого верхняя сумма Дарбу не увеличится, а нижняя сумма Дарбу не уменьшится.

Доказательство.

Свойство 2.

Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу, даже если они соответствуют разным разбиениям.

Доказательство.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Свойства сумм Дарбу.

Свойство 1.

Если к имеющимся точкам разбиения добавить новые точки, то от этого верхняя сумма Дарбу не увеличится, а нижняя сумма Дарбу не уменьшится.

Доказательство.

Свойство 2.

Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу, даже если они соответствуют разным разбиениям.

Доказательство.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Свойства сумм Дарбу.

Свойство 1.

Если к имеющимся точкам разбиения добавить новые точки, то от этого верхняя сумма Дарбу не увеличится, а нижняя сумма Дарбу не уменьшится.

Доказательство.

Свойство 2.

Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу, даже если они соответствуют разным разбиениям.

Доказательство.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Свойства сумм Дарбу.

Свойство 1.

Если к имеющимся точкам разбиения добавить новые точки, то от этого верхняя сумма Дарбу не увеличится, а нижняя сумма Дарбу не уменьшится.

Доказательство.

Свойство 2.

Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу, даже если они соответствуют разным разбиениям.

Доказательство.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Интегралы Дарбу.

Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, т. е. $|f(x)| \leq M, \;\; a \leq x \leq b$.

Тогда для любого разбиения Π справедливы неравенства

$$|\overline{S}_\Pi| \leq M(b-a), \quad |\underline{S}_\Pi| \leq M(b-a).$$

Это означает, что множества всевозможных верхних и нижних сумм Дарбу являются ограниченными.

Определение. Верхняя грань множества всевозможных нижних сумм Дарбу называется **нижним интегралом** функции f и обозначается

$$\underline{I} = \sup_\Pi \{\underline{S}_\Pi\}.$$

Нижняя грань множества всевозможных верхних сумм Дарбу называется **верхним интегралом** и обозначается

$$\overline{I} = \inf_\Pi \{\overline{S}_\Pi\}.$$

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Интегралы Дарбу.

Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, т. е.
$|f(x)| \leq M, \; a \leq x \leq b.$
Тогда для любого разбиения Π справедливы неравенства

$$|\overline{S}_\Pi| \leq M(b-a), \quad |\underline{S}_\Pi| \leq M(b-a).$$

Это означает, что множества всевозможных верхних и нижних сумм Дарбу являются ограниченными.

Определение. Верхняя грань множества всевозможных нижних сумм Дарбу называется **нижним интегралом** функции f и обозначается

$$\underline{I} = \sup_\Pi \{\underline{S}_\Pi\}.$$

Нижняя грань множества всевозможных верхних сумм Дарбу называется **верхним интегралом** и обозначается

$$\overline{I} = \inf_\Pi \{\overline{S}_\Pi\}.$$

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Интегралы Дарбу.

Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, т. е.
$|f(x)| \leq M, \ a \leq x \leq b.$
Тогда для любого разбиения Π справедливы неравенства

$$|\overline{S}_\Pi| \leq M(b-a), \quad |\underline{S}_\Pi| \leq M(b-a).$$

Это означает, что множества всевозможных верхних и нижних сумм Дарбу являются ограниченными.

Определение. Верхняя грань множества всевозможных нижних сумм Дарбу называется нижним интегралом функции f и обозначается

$$\underline{I} = \sup_\Pi \{\underline{S}_\Pi\}.$$

Нижняя грань множества всевозможных верхних сумм Дарбу называется верхним интегралом и обозначается

$$\overline{I} = \inf_\Pi \{\overline{S}_\Pi\}.$$

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Интегралы Дарбу.

Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, т. е.
$|f(x)| \leq M, \ a \leq x \leq b.$
Тогда для любого разбиения Π справедливы неравенства

$$|\overline{S}_{\Pi}| \leq M(b-a), \quad |\underline{S}_{\Pi}| \leq M(b-a).$$

Это означает, что множества всевозможных верхних и нижних сумм Дарбу являются ограниченными.

Определение. Верхняя грань множества всевозможных нижних сумм Дарбу называется нижним интегралом функции f и обозначается

$$\underline{I} = \sup_{\Pi}\{\underline{S}_{\Pi}\}.$$

Нижняя грань множества всевозможных верхних сумм Дарбу называется верхним интегралом и обозначается

$$\overline{I} = \inf_{\Pi}\{\overline{S}_{\Pi}\}.$$

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Связь между верхним и нижним интегралами устанавливает

Утверждение.

Для любой ограниченной функции f справедливо неравенство

$$\underline{I} \leq \overline{I}.$$

Доказательство.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Связь между верхним и нижним интегралами устанавливает

Утверждение.

Для любой ограниченной функции f справедливо неравенство

$$\underline{I} \leq \overline{I}.$$

Доказательство.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Пример.

Рассмотрим функцию Дирихле на отрезке $[0, 1]$.
Для нее, очевидно, при любом разбиении Π будет $\underline{S}_\Pi = 0$, так что и $\underline{I} = 0$.
С другой стороны, $\overline{S}_\Pi = 1$, так что $\overline{I} = 1$.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Пример.

Рассмотрим функцию Дирихле на отрезке $[0, 1]$.
Для нее, очевидно, при любом разбиении Π будет $\underline{S}_\Pi = 0$, так что и $\underline{I} = 0$.
С другой стороны, $\overline{S}_\Pi = 1$, так что $\overline{I} = 1$.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Пример.

Рассмотрим функцию Дирихле на отрезке $[0,1]$.
Для нее, очевидно, при любом разбиении П будет $\underline{S}_\Pi = 0$, так что и $\underline{I} = 0$.
С другой стороны, $\overline{S}_\Pi = 1$, так что $\overline{I} = 1$.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Теорема (критерий интегрируемости по Риману).

Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Для того чтобы f была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \left(\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi\right) = 0.$$

Это равенство означает, что для любого положительного ε найдется такое положительное δ, что для каждого разбиения Π, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, справедливо неравенство $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi < \varepsilon$.

Доказательство.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Теорема (критерий интегрируемости по Риману).

Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Для того чтобы f была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \left(\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi\right) = 0.$$

Это равенство означает, что для любого положительного ε найдется такое положительное δ, что для каждого разбиения Π, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, справедливо неравенство $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi < \varepsilon$.

Доказательство.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Теорема (критерий интегрируемости по Риману).

Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Для того чтобы f была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \left(\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi\right) = 0.$$

Это равенство означает, что для любого положительного ε найдется такое положительное δ, что для каждого разбиения Π, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, справедливо неравенство $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi < \varepsilon$.

Доказательство.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Замечание. Из доказательства необходимости видно, что для интегрируемой функции ее верхняя и нижняя суммы Дарбу стремятся к интегралу от функции при стремлении к нулю диаметра разбиения.

Определение. Для ограниченной на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции φ число

$$\omega = \sup_{x',\, x'' \in [\alpha,\beta]} \left|\varphi(x') - \varphi(x'')\right|,$$

называется *колебанием* функции φ на $[\alpha, \beta]$.

Обозначим

$$M = \sup_{\alpha \le x \le \beta} \varphi(x), \quad m = \inf_{\alpha \le x \le \beta} \varphi(x).$$

Тогда, как легко видеть, $\omega = M - m$.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Замечание. Из доказательства необходимости видно, что для интегрируемой функции ее верхняя и нижняя суммы Дарбу стремятся к интегралу от функции при стремлении к нулю диаметра разбиения.

Определение. Для ограниченной на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции φ число

$$\omega = \sup_{x',\ x'' \in [\alpha,\beta]} \left|\varphi(x') - \varphi(x'')\right|,$$

называется *колебанием* функции φ на $[\alpha, \beta]$.

Обозначим

$$M = \sup_{\alpha \le x \le \beta} \varphi(x), \qquad m = \inf_{\alpha \le x \le \beta} \varphi(x).$$

Тогда, как легко видеть, $\omega = M - m$.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Замечание. Из доказательства необходимости видно, что для интегрируемой функции ее верхняя и нижняя суммы Дарбу стремятся к интегралу от функции при стремлении к нулю диаметра разбиения.

Определение. Для ограниченной на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции φ число

$$\omega = \sup_{x',\ x'' \in [\alpha,\beta]} \left| \varphi(x') - \varphi(x'') \right|,$$

называется колебанием функции φ на $[\alpha, \beta]$.

Обозначим

$$M = \sup_{\alpha \le x \le \beta} \varphi(x), \quad m = \inf_{\alpha \le x \le \beta} \varphi(x).$$

Тогда, как легко видеть, $\omega = M - m$.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Пусть теперь ограниченная функция f задана на отрезке $[a, b]$. Тогда для произвольного разбиения П колебание f на $[x_i, x_{i+1}]$ равно $\omega_i = M_i - m_i$.

Поэтому

$$\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i .$$

Таким образом, равносильная формулировка критерия интегрируемости примет следующий вид.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Пусть теперь ограниченная функция f задана на отрезке $[a, b]$. Тогда для произвольного разбиения Π колебание f на $[x_i, x_{i+1}]$ равно $\omega_i = M_i - m_i$.

Поэтому

$$\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

Таким образом, равносильная формулировка критерия интегрируемости примет следующий вид.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Пусть теперь ограниченная функция f задана на отрезке $[a, b]$. Тогда для произвольного разбиения П колебание f на $[x_i, x_{i+1}]$ равно $\omega_i = M_i - m_i$.
Поэтому

$$\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

Таким образом, равносильная формулировка критерия интегрируемости примет следующий вид.

§2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Теорема (критерий интегрируемости в терминах колебаний).

Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

где ω_i – колебание функции f на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

§3. Классы интегрируемых функций

§3. Классы интегрируемых функций

§3. Классы интегрируемых функций

Теорема 1 (об интегрируемости непрерывной функции).

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

Теорема 2 (об интегрируемости монотонной функции).

Если функция f монотонна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

§3. Классы интегрируемых функций

Теорема 1 (об интегрируемости непрерывной функции).

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

Теорема 2 (об интегрируемости монотонной функции).

Если функция f монотонна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

§3. Классы интегрируемых функций

Теорема 1 (об интегрируемости непрерывной функции).

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

Теорема 2 (об интегрируемости монотонной функции).

Если функция f монотонна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

§3. Классы интегрируемых функций

Теорема 1 (об интегрируемости непрерывной функции).

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

Теорема 2 (об интегрируемости монотонной функции).

Если функция f монотонна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

§3. Классы интегрируемых функций

Замечание. Из теоремы 2 видно, что существуют разрывные интегрируемые функции. В частности, монотонная функция может иметь разрывы в счетном множестве точек. Поэтому интегрируемая функция может иметь счетное множество точек разрыва.

Пример.

Положим $f(0) = 0,\ f(x) = \frac{1}{n}\ \left(x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right],\ n = 1, 2, \ldots\right)$.

Ясно, что каждая точка вида $\frac{1}{n}$ является точкой разрыва функции, так что множество точек разрыва функции f счетно. С другой стороны, поскольку f возрастает на $[0, 1]$, то, по теореме 2, она интегрируема на $[0, 1]$.

§3. Классы интегрируемых функций

Замечание. Из теоремы 2 видно, что существуют разрывные интегрируемые функции. В частности, монотонная функция может иметь разрывы в счетном множестве точек. Поэтому интегрируемая функция может иметь счетное множество точек разрыва.

Пример.

Положим $f(0) = 0$, $f(x) = \frac{1}{n}$ $\left(x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right],\ n = 1, 2, \ldots\right)$.

Ясно, что каждая точка вида $\frac{1}{n}$ является точкой разрыва функции, так что множество точек разрыва функции f счетно. С другой стороны, поскольку f возрастает на $[0, 1]$, то, по теореме 2, она интегрируема на $[0, 1]$.

§3. Классы интегрируемых функций

Замечание. Из теоремы 2 видно, что существуют разрывные интегрируемые функции. В частности, монотонная функция может иметь разрывы в счетном множестве точек. Поэтому интегрируемая функция может иметь счетное множество точек разрыва.

Пример.

Положим $f(0) = 0$, $f(x) = \frac{1}{n}\ \left(x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right],\ n = 1, 2, \ldots\right)$.
Ясно, что каждая точка вида $\frac{1}{n}$ является точкой разрыва функции, так что множество точек разрыва функции f счетно.
С другой стороны, поскольку f возрастает на $[0, 1]$, то, по теореме 2, она интегрируема на $[0, 1]$.

§3. Классы интегрируемых функций

Замечание. Из теоремы 2 видно, что существуют разрывные интегрируемые функции. В частности, монотонная функция может иметь разрывы в счетном множестве точек. Поэтому интегрируемая функция может иметь счетное множество точек разрыва.

Пример.

Положим $f(0)=0,\ f(x)=\frac{1}{n}\ \left(x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right],\ n=1,2,\ldots\right)$.
Ясно, что каждая точка вида $\frac{1}{n}$ является точкой разрыва функции, так что множество точек разрыва функции f счетно. С другой стороны, поскольку f возрастает на $[0,1]$, то, по теореме 2, она интегрируема на $[0,1]$.

§3. Классы интегрируемых функций

Теорема 3 (об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва).

Если функция f ограничена на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство.

§3. Классы интегрируемых функций

Теорема 3 (об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва).

Если функция f ограничена на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство.

§3. Классы интегрируемых функций

Пример 1.

Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ограничена и непрерывна всюду, за исключением одной точки.
Следовательно, она интегрируема на отрезке $[0,1]$.

§3. Классы интегрируемых функций

Пример 1.

Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ограничена и непрерывна всюду, за исключением одной точки. Следовательно, она интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

§3. Классы интегрируемых функций

Пример 2.

Рассмотрим

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

У этой функции множество точек разрыва счетно и она не является монотонной. Тем не менее она ограничена, и ее интегрируемость легко доказать, используя критерий Римана и теорему 3.

§3. Классы интегрируемых функций

Пример 2.

Рассмотрим

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

У этой функции множество точек разрыва счетно и она не является монотонной. Тем не менее она ограничена, и ее интегрируемость легко доказать, используя критерий Римана и теорему 3.

§3. Классы интегрируемых функций

Продолжение примера 2.

Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функцию на отрезке $[\varepsilon, 1]$. На этом отрезке функция ограничена и имеет конечное число точек разрыва. В силу теоремы 3, функция интегрируема на $[\varepsilon, 1]$, так что, по критерию Римана, найдется такое $\delta > 0$, что если только отрезок $[\varepsilon, 1]$ будет разбит на части, длины которых меньше, чем δ, то

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Можем считать, что $\delta < \varepsilon$.

§3. Классы интегрируемых функций

Продолжение примера 2.

Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функцию на отрезке $[\varepsilon, 1]$. На этом отрезке функция ограничена и имеет конечное число точек разрыва. В силу теоремы 3, функция интегрируема на $[\varepsilon, 1]$, так что, по критерию Римана, найдется такое $\delta > 0$, что если только отрезок $[\varepsilon, 1]$ будет разбит на части, длины которых меньше, чем δ, то

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Можем считать, что $\delta < \varepsilon$.

§3. Классы интегрируемых функций

Продолжение примера 2.

Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функцию на отрезке $[\varepsilon, 1]$. На этом отрезке функция ограничена и имеет конечное число точек разрыва. В силу теоремы 3, функция интегрируема на $[\varepsilon, 1]$, так что, по критерию Римана, найдется такое $\delta > 0$, что если только отрезок $[\varepsilon, 1]$ будет разбит на части, длины которых меньше, чем δ, то

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Можем считать, что $\delta < \varepsilon$.

§3. Классы интегрируемых функций

Окончание примера 2.

Если теперь весь отрезок $[0,1]$ разбить на части, длины которых меньше, чем δ, то $\sum' \omega_i \Delta x_i$, слагаемых, отвечающих тем отрезкам, которые содержатся целиком в $[\varepsilon, 1]$, меньше, чем ε. Далее, сумма длин отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, имеющих общие точки с $[0,\varepsilon)$, не превосходит $\varepsilon + \delta \leq 2\varepsilon$. Учитывая, что колебание функции на каждом из отрезков не превосходит 2, получим

$$\sum\nolimits'' \omega_i \Delta x_i \leq 2 \sum\nolimits'' \Delta x_i \leq 4\varepsilon.$$

Окончательно,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leq 5\varepsilon,$$

так что, в силу критерия Римана, функция интегрируема на отрезке $[0,1]$.

§3. Классы интегрируемых функций

Окончание примера 2.

Если теперь весь отрезок $[0,1]$ разбить на части, длины которых меньше, чем δ, то $\sum' \omega_i \Delta x_i$, слагаемых, отвечающих тем отрезкам, которые содержатся целиком в $[\varepsilon, 1]$, меньше, чем ε. Далее, сумма длин отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, имеющих общие точки с $[0, \varepsilon)$, не превосходит $\varepsilon + \delta \le 2\varepsilon$. Учитывая, что колебание функции на каждом из отрезков не превосходит 2, получим

$$\sum{}'' \omega_i \Delta x_i \le 2 \sum{}'' \Delta x_i \le 4\varepsilon.$$

Окончательно,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \le 5\varepsilon,$$

так что, в силу критерия Римана, функция интегрируема на отрезке $[0,1]$.

§3. Классы интегрируемых функций

Окончание примера 2.

Если теперь весь отрезок $[0,1]$ разбить на части, длины которых меньше, чем δ, то $\sum' \omega_i \Delta x_i$, слагаемых, отвечающих тем отрезкам, которые содержатся целиком в $[\varepsilon, 1]$, меньше, чем ε. Далее, сумма длин отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, имеющих общие точки с $[0, \varepsilon)$, не превосходит $\varepsilon + \delta \leq 2\varepsilon$. Учитывая, что колебание функции на каждом из отрезков не превосходит 2, получим

$$\sum\nolimits'' \omega_i \Delta x_i \leq 2 \sum\nolimits'' \Delta x_i \leq 4\varepsilon.$$

Окончательно,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leq 5\varepsilon,$$

так что, в силу критерия Римана, функция интегрируема на отрезке $[0,1]$.

§3. Классы интегрируемых функций

Сформулируем еще два критерия интегрируемости ограниченной функции. Их мы примем без доказательства.

Критерий Дарбу.

Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы были равны ее верхний и нижний интегралы.

§3. Классы интегрируемых функций

Сформулируем еще два критерия интегрируемости ограниченной функции. Их мы примем без доказательства.

Критерий Дарбу.

Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы были равны ее верхний и нижний интегралы.

§3. Классы интегрируемых функций

Для формулировки следующего критерия нам понадобится понятие множества лебеговой меры нуль.

Говорят, что множество E имеет лебегову меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечным или счетным набором интервалов Δ_n (т. е. $E \subset \cup_n \Delta_n$), любая конечная сумма длин которых меньше, чем ε.

Каждое счетное множество имеет лебегову меру нуль, поскольку каждую его точку x_n можно покрыть интервалом длины $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Существуют, однако, несчетные множества, имеющие лебегову меру нуль.

§3. Классы интегрируемых функций

Для формулировки следующего критерия нам понадобится понятие множества лебеговой меры нуль.

Говорят, что множество E имеет лебегову меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечным или счетным набором интервалов Δ_n (т. е. $E \subset \cup_n \Delta_n$), любая конечная сумма длин которых меньше, чем ε.

Каждое счетное множество имеет лебегову меру нуль, поскольку каждую его точку x_n можно покрыть интервалом длины $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Существуют, однако, несчетные множества, имеющие лебегову меру нуль.

§3. Классы интегрируемых функций

Для формулировки следующего критерия нам понадобится понятие множества лебеговой меры нуль.

Говорят, что множество E имеет лебегову меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечным или счетным набором интервалов Δ_n (т. е. $E \subset \cup_n \Delta_n$), любая конечная сумма длин которых меньше, чем ε.

Каждое счетное множество имеет лебегову меру нуль, поскольку каждую его точку x_n можно покрыть интервалом длины $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Существуют, однако, несчетные множества, имеющие лебегову меру нуль.

§3. Классы интегрируемых функций

Критерий Лебега.

Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы множество ее точек разрыва было множеством лебеговой меры нуль.

§4. Свойства интегрируемых функций

§4. Свойства интегрируемых функций

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 1. Интегрируемость модуля.

Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то функция $|f|$ также интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

Замечание. Из интегрируемости модуля не следует интегрируемость самой функции. Например, функция $f(x) = \mathcal{D}(x) - \frac{1}{2}$, где $\mathcal{D}(x)$ – функция Дирихле, неинтегрируема на $[0, 1]$. В этом легко убедиться, используя критерий Лебега, поскольку функция f разрывна в каждой точке отрезка $[0, 1]$, так что множество ее точек разрыва не является множеством лебеговой меры нуль. В то же время $|f(x)| \equiv \frac{1}{2}$, так что $|f|$ интегрируема на $[0, 1]$.

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 1. Интегрируемость модуля.

Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то функция $|f|$ также интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

Замечание. Из интегрируемости модуля не следует интегрируемость самой функции. Например, функция $f(x) = \mathcal{D}(x) - \frac{1}{2}$, где $\mathcal{D}(x)$ – функция Дирихле, неинтегрируема на $[0, 1]$. В этом легко убедиться, используя критерий Лебега, поскольку функция f разрывна в каждой точке отрезка $[0, 1]$, так что множество ее точек разрыва не является множеством лебеговой меры нуль. В то же время $|f(x)| \equiv \frac{1}{2}$, так что $|f|$ интегрируема на $[0, 1]$.

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 1. Интегрируемость модуля.

Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то функция $|f|$ также интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

Замечание. Из интегрируемости модуля не следует интегрируемость самой функции. Например, функция $f(x) = \mathcal{D}(x) - \frac{1}{2}$, где $\mathcal{D}(x)$ – функция Дирихле, неинтегрируема на $[0, 1]$. В этом легко убедиться, используя критерий Лебега, поскольку функция f разрывна в каждой точке отрезка $[0, 1]$, так что множество ее точек разрыва не является множеством лебеговой меры нуль. В то же время $|f(x)| \equiv \frac{1}{2}$, так что $|f|$ интегрируема на $[0, 1]$.

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 1. Интегрируемость модуля.

Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то функция $|f|$ также интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

Замечание. Из интегрируемости модуля не следует интегрируемость самой функции. Например, функция $f(x) = \mathcal{D}(x) - \frac{1}{2}$, где $\mathcal{D}(x)$ – функция Дирихле, неинтегрируема на $[0, 1]$. В этом легко убедиться, используя критерий Лебега, поскольку функция f разрывна в каждой точке отрезка $[0, 1]$, так что множество ее точек разрыва не является множеством лебеговой меры нуль. В то же время $|f(x)| \equiv \frac{1}{2}$, так что $|f|$ интегрируема на $[0, 1]$.

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 1. Интегрируемость модуля.

Если функция f интегрируема на $[a,b]$, то функция $|f|$ также интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

Замечание. Из интегрируемости модуля не следует интегрируемость самой функции. Например, функция $f(x) = \mathcal{D}(x) - \frac{1}{2}$, где $\mathcal{D}(x)$ – функция Дирихле, неинтегрируема на $[0,1]$. В этом легко убедиться, используя критерий Лебега, поскольку функция f разрывна в каждой точке отрезка $[0,1]$, так что множество ее точек разрыва не является множеством лебеговой меры нуль. В то же время $|f(x)| \equiv \frac{1}{2}$, так что $|f|$ интегрируема на $[0,1]$.

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 1. Интегрируемость модуля.

Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то функция $|f|$ также интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

Замечание. Из интегрируемости модуля не следует интегрируемость самой функции. Например, функция $f(x) = \mathcal{D}(x) - \frac{1}{2}$, где $\mathcal{D}(x)$ – функция Дирихле, неинтегрируема на $[0, 1]$. В этом легко убедиться, используя критерий Лебега, поскольку функция f разрывна в каждой точке отрезка $[0, 1]$, так что множество ее точек разрыва не является множеством лебеговой меры нуль. В то же время $|f(x)| \equiv \frac{1}{2}$, так что $|f|$ интегрируема на $[0, 1]$.

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 2. Интегрируемость линейной комбинации.

Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, а числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство.

Замечание. В процессе доказательства нами получено равенство

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

К этому равенству мы вернемся в следующем параграфе.

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 2. Интегрируемость линейной комбинации.

Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, а числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство.

Замечание. В процессе доказательства нами получено равенство

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

К этому равенству мы вернемся в следующем параграфе.

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 2. Интегрируемость линейной комбинации.

Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, а числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство.

Замечание. В процессе доказательства нами получено равенство

$$\int\limits_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx.$$

К этому равенству мы вернемся в следующем параграфе.

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 3. Интегрируемость произведения.

Если функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, то их произведение также интегрируемо на этом отрезке.

Доказательство.

Свойство 4. Интегрируемость на подынтервалах.

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Обратно, если отрезок $[a, b]$ разбит на два отрезка $[a, c]$ и $[c, b]$, на каждом из которых функция интегрируема, то она интегрируема и на всем отрезке $[a, b]$.

Доказательство.

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 3. Интегрируемость произведения.

Если функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, то их произведение также интегрируемо на этом отрезке.

Доказательство.

Свойство 4. Интегрируемость на подынтервалах.

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Обратно, если отрезок $[a, b]$ разбит на два отрезка $[a, c]$ и $[c, b]$, на каждом из которых функция интегрируема, то она интегрируема и на всем отрезке $[a, b]$.

Доказательство.

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 3. Интегрируемость произведения.

Если функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, то их произведение также интегрируемо на этом отрезке.

Доказательство.

Свойство 4. Интегрируемость на подынтервалах.

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Обратно, если отрезок $[a, b]$ разбит на два отрезка $[a, c]$ и $[c, b]$, на каждом из которых функция интегрируема, то она интегрируема и на всем отрезке $[a, b]$.

Доказательство.

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 3. Интегрируемость произведения.

Если функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, то их произведение также интегрируемо на этом отрезке.

Доказательство.

Свойство 4. Интегрируемость на подынтервалах.

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Обратно, если отрезок $[a, b]$ разбит на два отрезка $[a, c]$ и $[c, b]$, на каждом из которых функция интегрируема, то она интегрируема и на всем отрезке $[a, b]$.

Доказательство.

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 5. Изменение значений функции.

Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$. Если произвольным образом изменить ее значения в конечном числе точек, то измененная функция также будет интегрируемой и при этом величина интеграла не изменится.

Доказательство.

Пример.

Пусть функция $f(x) = 0$ при $x \in [0, 1] \setminus \{1/2\}$ и $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Тогда функция f интегрируема и $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$. Действительно, изменив функцию в одной точке, положив $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, получим, что новая функция тождественно равна нулю на $[0, 1]$, а значит, и интеграл от нее по данному отрезку равен нулю.

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 5. Изменение значений функции.

Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$. Если произвольным образом изменить ее значения в конечном числе точек, то измененная функция также будет интегрируемой и при этом величина интеграла не изменится.

Доказательство.

Пример.

Пусть функция $f(x) = 0$ при $x \in [0, 1] \setminus \{1/2\}$ и $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Тогда функция f интегрируема и $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$. Действительно, изменив функцию в одной точке, положив $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, получим, что новая функция тождественно равна нулю на $[0, 1]$, а значит, и интеграл от нее по данному отрезку равен нулю.

§4. Свойства интегрируемых функций

Свойство 5. Изменение значений функции.

Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$. Если произвольным образом изменить ее значения в конечном числе точек, то измененная функция также будет интегрируемой и при этом величина интеграла не изменится.

Доказательство.

Пример.

Пусть функция $f(x) = 0$ при $x \in [0, 1] \setminus \{1/2\}$ и $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Тогда функция f интегрируема и $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$. Действительно, изменив функцию в одной точке, положив $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, получим, что новая функция тождественно равна нулю на $[0, 1]$, а значит, и интеграл от нее по данному отрезку равен нулю.

§4. Свойства интегрируемых функций

Следствие.

Если две функции совпадают всюду на отрезке, за исключением конечного числа точек, то они обе одновременно интегрируемы или неинтегрируемы на этом отрезке. Если они интегрируемы, то их интегралы равны.

Замечание. Изменение интегрируемой функции на счетном множестве точек может привести к неинтегрируемой функции. Например, выше было показано, что функция Дирихле $\mathcal{D}(x)$ неинтегрируема на отрезке $[0,1]$. В то же время она отличается от тождественного нуля на счетном множестве рациональных точек из отрезка $[0,1]$.

§4. Свойства интегрируемых функций

Следствие.

Если две функции совпадают всюду на отрезке, за исключением конечного числа точек, то они обе одновременно интегрируемы или неинтегрируемы на этом отрезке. Если они интегрируемы, то их интегралы равны.

Замечание. Изменение интегрируемой функции на счетном множестве точек может привести к неинтегрируемой функции. Например, выше было показано, что функция Дирихле $\mathcal{D}(x)$ неинтегрируема на отрезке $[0, 1]$. В то же время она отличается от тождественного нуля на счетном множестве рациональных точек из отрезка $[0, 1]$.

§5. Свойства интеграла

§5. Свойства интеграла

Свойство 1. Линейность интеграла.

Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, а числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Это свойство получено нами выше при доказательстве интегрируемости линейной комбинации.

§5. Свойства интеграла

Свойство 1. Линейность интеграла.

Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, а числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Это свойство получено нами выше при доказательстве интегрируемости линейной комбинации.

§5. Свойства интеграла

Свойство 2. Аддитивность интеграла.

Пусть числа $b < a$. Зададим точки $a = x_0 > x_1 > \ldots > x_n = b$, выберем точки $\xi_i \in [x_{i+1}, x_i]$ и составим сумму

$\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Заметим, что в этой сумме все $\Delta x_i < 0$.

Ясно, что эту сумму можно получить как интегральную сумму на $[b, a]$, только с противоположным знаком. Это приводит к следующему определению.

§5. Свойства интеграла

Свойство 2. Аддитивность интеграла.

Пусть числа $b < a$. Зададим точки $a = x_0 > x_1 > \ldots > x_n = b$, выберем точки $\xi_i \in [x_{i+1}, x_i]$ и составим сумму $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Заметим, что в этой сумме все $\Delta x_i < 0$.

Ясно, что эту сумму можно получить как интегральную сумму на $[b, a]$, только с противоположным знаком. Это приводит к следующему определению.

§5. Свойства интеграла

Свойство 2. Аддитивность интеграла.

Пусть числа $b < a$. Зададим точки $a = x_0 > x_1 > \ldots > x_n = b$, выберем точки $\xi_i \in [x_{i+1}, x_i]$ и составим сумму $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Заметим, что в этой сумме все $\Delta x_i < 0$. Ясно, что эту сумму можно получить как интегральную сумму на $[b, a]$, только с противоположным знаком. Это приводит к следующему определению.

§5. Свойства интеграла

Определение. Пусть $b < a$ и функция f интегрируема на $[b, a]$. Тогда по определению полагаем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

Далее, для каждой функции f, определенной в точке a, полагаем по определению

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

§5. Свойства интеграла

Теорема.

Пусть a, b, c *– произвольные точки на действительной прямой. Если функция* f *интегрируема на наибольшем из отрезков с концами в двух из этих точек, то она интегрируема также и на двух других отрезках, и справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Доказательство.

§5. Свойства интеграла

Теорема.

Пусть a, b, c – *произвольные точки на действительной прямой. Если функция* f *интегрируема на наибольшем из отрезков с концами в двух из этих точек, то она интегрируема также и на двух других отрезках, и справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство.

§5. Свойства интеграла

Свойство 3. Интеграл от модуля.

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$. Тогда

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Доказательство.

§5. Свойства интеграла

Свойство 3. Интеграл от модуля.

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$. Тогда

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Доказательство.

§5. Свойства интеграла

Свойство 4. Монотонность интеграла.

Пусть функции f *и* g *интегрируемы на* $[a, b]$ $(a < b)$ *и* $f(x) \leq g(x)$ *для всех* $x \in [a, b]$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство.

§5. Свойства интеграла

Свойство 4. Монотонность интеграла.

Пусть функции f *и* g *интегрируемы на* $[a, b]$ $(a < b)$ *и* $f(x) \leq g(x)$ *для всех* $x \in [a, b]$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство.

§5. Свойства интеграла

Следствие 1.

Пусть f – неотрицательная интегрируемая функция на $[a, b]$ $(a < b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

§5. Свойства интеграла

Следствие 2.

Если интегрируемая функция f строго положительна на $[a, b]$ $(a < b)$, то и

$$\int\limits_a^b f(x)dx > 0.$$

Доказательство.

§5. Свойства интеграла

Следствие 2.

Если интегрируемая функция f строго положительна на $[a, b]$ $(a < b)$, то и

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Доказательство.

§5. Свойства интеграла

Следствие 3.

Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Это следствие сразу вытекает из свойства монотонности интеграла.

§5. Свойства интеграла

Следствие 3.

Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Это следствие сразу вытекает из свойства монотонности интеграла.

§5. Свойства интеграла

Замечание. В условиях следствия 3 найдется такое число $\mu \in [m, M]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

Действительно, положим $\mu = \int_a^b f(x)dx/(b-a)$. Тогда, по следствию 3, $m \leq \mu \leq M$.

Отметим, что при $a > b$ в такой формулировке это замечание остается в силе, в то время как знаки неравенств в следствии 3 меняются на противоположные.

§5. Свойства интеграла

Замечание. В условиях следствия 3 найдется такое число $\mu \in [m, M]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

Действительно, положим $\mu = \int_a^b f(x)dx/(b-a)$. Тогда, по следствию 3, $m \le \mu \le M$.

Отметим, что при $a > b$ в такой формулировке это замечание остается в силе, в то время как знаки неравенств в следствии 3 меняются на противоположные.

§5. Свойства интеграла

Замечание. В условиях следствия 3 найдется такое число $\mu \in [m, M]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

Действительно, положим $\mu = \int_a^b f(x)dx/(b-a)$. Тогда, по следствию 3, $m \le \mu \le M$.

Отметим, что при $a > b$ в такой формулировке это замечание остается в силе, в то время как знаки неравенств в следствии 3 меняются на противоположные.

§5. Свойства интеграла

Следствие 4.

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

Доказательство.

Замечание. Следствие 4 иногда называют теоремой о среднем значении. Оно тесно связано с теоремой Лагранжа, которую также называют теоремой о среднем значении в дифференциальном исчислении.

§5. Свойства интеграла

Следствие 4.

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Доказательство.

Замечание. Следствие 4 иногда называют теоремой о среднем значении. Оно тесно связано с теоремой Лагранжа, которую также называют теоремой о среднем значении в дифференциальном исчислении.

§5. Свойства интеграла

Следствие 4.

Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то найдется такая точка $\xi \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Доказательство.

Замечание. Следствие 4 иногда называют теоремой о среднем значении. Оно тесно связано с теоремой Лагранжа, которую также называют теоремой о среднем значении в дифференциальном исчислении.

§6. Теоремы о среднем

§6. Теоремы о среднем

Теорема 1 (первая теорема о среднем значении).

Пусть функции f и g интегрируемы на $[a,b]$, причем функция g не меняет знак на $[a,b]$. Пусть $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда найдется такое число $\mu \in [m, M]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство.

§6. Теоремы о среднем

Теорема 1 (первая теорема о среднем значении).

Пусть функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, причем функция g не меняет знак на $[a, b]$. Пусть $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда найдется такое число $\mu \in [m, M]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство.

§6. Теоремы о среднем

Следствие.

Если в условиях теоремы 1 функция f непрерывна на $[a, b]$, то найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Действительно, в этом случае, по теореме Больцано – Коши о промежуточном значении, число μ является значением функции f в некоторой точке $\xi \in [a, b]$.

§6. Теоремы о среднем

Следствие.

Если в условиях теоремы 1 функция f непрерывна на $[a, b]$, то найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Действительно, в этом случае, по теореме Больцано – Коши о промежуточном значении, число μ является значением функции f в некоторой точке $\xi \in [a, b]$.

§6. Теоремы о среднем

Лемма.

Пусть функция g интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда функция $G(x) \equiv \int\limits_a^x g(t)dt$ $(a \le x \le b)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство.

§6. Теоремы о среднем

Лемма.

Пусть функция g интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $G(x) \equiv \int\limits_a^x g(t)dt$ $(a \leq x \leq b)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство.

§6. Теоремы о среднем

Теорема 2 (вторая теорема о среднем значении).

Пусть функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, причем функция f монотонна на $[a, b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a, b]$, такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx + f(b)\int_{\xi}^b g(x)dx. \qquad (1)$$

Доказательство.

§6. Теоремы о среднем

Теорема 2 (вторая теорема о среднем значении).

Пусть функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, причем функция f монотонна на $[a, b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a, b]$, такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int\limits_a^{\xi} g(x)dx + f(b)\int\limits_{\xi}^b g(x)dx. \qquad (1)$$

Доказательство.

§6. Теоремы о среднем

Замечание. Формулы (1) – (3) называются формулами Бонне. В этих равенствах точки ξ, вообще говоря, разные.

В самом деле, мы можем изменить функцию f в точках a и b, сохранив при этом монотонность функции f. При этом левая часть (1) не изменится, а изменение множителей $f(a)$ и $f(b)$ перед интегралами справа в (1), очевидно, повлечет изменение значения ξ справа в (1).

Вторую теорему о среднем иногда записывают в следующем виде:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a+0)\int\limits_a^{\xi'} g(x)dx + f(b-0)\int\limits_{\xi'}^b g(x)dx.$$

В этом равенстве точка ξ', вообще говоря, не совпадает со значением ξ в равенстве (1).

§6. Теоремы о среднем

Замечание. Формулы (1) – (3) называются формулами Бонне. В этих равенствах точки ξ, вообще говоря, разные.
В самом деле, мы можем изменить функцию f в точках a и b, сохранив при этом монотонность функции f. При этом левая часть (1) не изменится, а изменение множителей $f(a)$ и $f(b)$ перед интегралами справа в (1), очевидно, повлечет изменение значения ξ справа в (1).

Вторую теорему о среднем иногда записывают в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a+0)\int_a^{\xi'} g(x)dx + f(b-0)\int_{\xi'}^b g(x)dx.$$

В этом равенстве точка ξ', вообще говоря, не совпадает со значением ξ в равенстве (1).

§6. Теоремы о среднем

Замечание. Формулы (1) – (3) называются формулами Бонне. В этих равенствах точки ξ, вообще говоря, разные.
В самом деле, мы можем изменить функцию f в точках a и b, сохранив при этом монотонность функции f. При этом левая часть (1) не изменится, а изменение множителей $f(a)$ и $f(b)$ перед интегралами справа в (1), очевидно, повлечет изменение значения ξ справа в (1).

Вторую теорему о среднем иногда записывают в следующем виде:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a+0)\int\limits_a^{\xi'} g(x)dx + f(b-0)\int\limits_{\xi'}^b g(x)dx.$$

В этом равенстве точка ξ', вообще говоря, не совпадает со значением ξ в равенстве (1).

§6. Теоремы о среднем

Замечание. Формулы (1) – (3) называются формулами Бонне. В этих равенствах точки ξ, вообще говоря, разные.
В самом деле, мы можем изменить функцию f в точках a и b, сохранив при этом монотонность функции f. При этом левая часть (1) не изменится, а изменение множителей $f(a)$ и $f(b)$ перед интегралами справа в (1), очевидно, повлечет изменение значения ξ справа в (1).

Вторую теорему о среднем иногда записывают в следующем виде:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a+0)\int\limits_a^{\xi'} g(x)dx + f(b-0)\int\limits_{\xi'}^b g(x)dx.$$

В этом равенстве точка ξ', вообще говоря, не совпадает со значением ξ в равенстве (1).

§6. Теоремы о среднем

Примеры применения теорем о среднем.

Пример 1.

Найти

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx.$$

Оценим

$$0 \le \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \le \int\limits_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0.$$

§6. Теоремы о среднем

Примеры применения теорем о среднем.

Пример 1.

Найти

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx.$$

Оценим

$$0 \le \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \le \int\limits_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0.$$

§6. Теоремы о среднем

Пример 2.

Найти

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда получим

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \le \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^n \frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$, то первое слагаемое справа стремится к нулю при $n \to \infty$.

§6. Теоремы о среднем

Пример 2.

Найти

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда получим

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \le \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^n \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$, то первое слагаемое справа стремится к нулю при $n \to \infty$.

§6. Теоремы о среднем

Окончание примера 2.

Поэтому найдется такое N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство

$$\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^n \frac{\pi}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ мы нашли номер N, начиная с которого

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = 0.$$

§6. Теоремы о среднем

Окончание примера 2.

Поэтому найдется такое N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство

$$\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^n \frac{\pi}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ мы нашли номер N, начиная с которого

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = 0.$$

§6. Теоремы о среднем

Пример 3.

Оценить сверху
$$I \equiv \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx.$$

Первый способ. Применяя первую теорему о среднем, получаем
$$I = \frac{1}{1+\xi^2}\int_0^1 \sin x dx = \frac{1}{1+\xi^2}(-\cos x)\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{1}{1+\xi^2}(1-\cos 1) \le 1-\cos 1.$$

§6. Теоремы о среднем

Пример 3.

Оценить сверху

$$I \equiv \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx.$$

Первый способ. Применяя первую теорему о среднем, получаем

$$I = \frac{1}{1+\xi^2}\int_0^1 \sin x dx = \frac{1}{1+\xi^2}(-\cos x)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{1+\xi^2}(1-\cos 1) \le 1-\cos 1.$$

§6. Теоремы о среднем

Окончание примера 3.

Оценить сверху

$$I \equiv \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx.$$

Второй способ. В силу первой теоремы о среднем имеем

$$I = \sin\eta \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \sin\eta \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\sin\eta \leq \frac{\pi}{4}\sin 1.$$

§6. Теоремы о среднем

Пример 4.

Оценить интеграл

$$I \equiv \int\limits_A^B \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad 0 < A < B < +\infty.$$

Первый способ. Применим вторую теорему о среднем. Для этого обозначим $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = \sin x$. Функция f монотонна на $[A, B]$, так что по второй формуле Бонне (2) получаем

$$I = \frac{1}{A}\int\limits_A^\xi \sin x dx = \frac{1}{A}(-\cos x)\Big|_A^\xi = \frac{1}{A}(\cos A - \cos \xi).$$

Отсюда следует, что $|I| \le \frac{2}{A}$.

§6. Теоремы о среднем

Пример 4.

Оценить интеграл

$$I \equiv \int\limits_A^B \frac{\sin x}{x} dx, \quad 0 < A < B < +\infty.$$

Первый способ. Применим вторую теорему о среднем. Для этого обозначим $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = \sin x$. Функция f монотонна на $[A, B]$, так что по второй формуле Бонне (2) получаем

$$I = \frac{1}{A} \int\limits_A^\xi \sin x dx = \frac{1}{A}(-\cos x)\Big|_A^\xi = \frac{1}{A}(\cos A - \cos \xi).$$

Отсюда следует, что $|I| \leq \frac{2}{A}$.

§6. Теоремы о среднем

Пример 4.

Оценить интеграл

$$I \equiv \int\limits_A^B \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad 0 < A < B < +\infty.$$

Первый способ. Применим вторую теорему о среднем. Для этого обозначим $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = \sin x$. Функция f монотонна на $[A, B]$, так что по второй формуле Бонне (2) получаем

$$I = \frac{1}{A}\int\limits_A^\xi \sin x dx = \frac{1}{A}(-\cos x)\Big|_A^\xi = \frac{1}{A}(\cos A - \cos\xi).$$

Отсюда следует, что $|I| \le \frac{2}{A}$.

§6. Теоремы о среднем

Окончание примера 4.

Оценить интеграл

$$I \equiv \int\limits_A^B \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad 0 < A < B < +\infty.$$

Второй способ. Применяя первую теорему о среднем, получим

$$I = \sin\xi \int\limits_A^B \frac{dx}{x} = \sin\xi \ln\frac{B}{A}.$$

Отсюда следует, что $|I| \leq \ln\frac{B}{A}$.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Обозначим

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a, b]).$$

По свойству интегрируемых функций, f интегрируема на $[a, x]$ для любого $x \in [a, b]$. Поэтому функция F определена на $[a, b]$. Заметим, что $F(a) = 0$.

Функцию F называют интегралом с переменным верхним пределом, или неопределенным интегралом Римана.

Выше мы уже доказали, что для любой интегрируемой на $[a, b]$ функции f интеграл с переменным верхним пределом – непрерывная на $[a, b]$ функция (лемма перед формулировкой второй теоремы о среднем значении).

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Обозначим

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a, b]).$$

По свойству интегрируемых функций, f интегрируема на $[a, x]$ для любого $x \in [a, b]$. Поэтому функция F определена на $[a, b]$. Заметим, что $F(a) = 0$.

Функцию F называют интегралом с переменным верхним пределом, или неопределенным интегралом Римана.

Выше мы уже доказали, что для любой интегрируемой на $[a, b]$ функции f интеграл с переменным верхним пределом – непрерывная на $[a, b]$ функция (лемма перед формулировкой второй теоремы о среднем значении).

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Обозначим

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \quad (x \in [a, b]).$$

По свойству интегрируемых функций, f интегрируема на $[a, x]$ для любого $x \in [a, b]$. Поэтому функция F определена на $[a, b]$. Заметим, что $F(a) = 0$.

Функцию F называют интегралом с переменным верхним пределом, или неопределенным интегралом Римана.

Выше мы уже доказали, что для любой интегрируемой на $[a, b]$ функции f интеграл с переменным верхним пределом – непрерывная на $[a, b]$ функция (лемма перед формулировкой второй теоремы о среднем значении).

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Обозначим

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \quad (x \in [a, b]).$$

По свойству интегрируемых функций, f интегрируема на $[a, x]$ для любого $x \in [a, b]$. Поэтому функция F определена на $[a, b]$. Заметим, что $F(a) = 0$.

Функцию F называют интегралом с переменным верхним пределом, или неопределенным интегралом Римана.

Выше мы уже доказали, что для любой интегрируемой на $[a, b]$ функции f интеграл с переменным верхним пределом – непрерывная на $[a, b]$ функция (лемма перед формулировкой второй теоремы о среднем значении).

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Теорема (о производной интеграла с переменным верхним пределом).

Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда функция F дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Теорема (о производной интеграла с переменным верхним пределом).

Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда функция F дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Замечание. Условие непрерывности функции f в точке x_0 не является необходимым для дифференцируемости F в точке x_0.
Например, если взять непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию f, то, по доказанной теореме, функция F будет дифференцируемой в каждой точке отрезка $[a, b]$.
Изменим теперь значение функции f в одной точке. В результате получим разрывную функцию $\overline{f}$. В то же время, как легко видеть, функция F останется прежней, т. е.
$\overline{F}(x) \equiv \int\limits_a^x \overline{f}(t)dt = F(x) \ (x \in [a, b])$
(поскольку изменение функции в конечном числе точек не влияет на величину ее интеграла).
Таким образом, получим, что интеграл с переменным верхним пределом от разрывной функции может оказаться дифференцируемым.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Замечание. Условие непрерывности функции f в точке x_0 не является необходимым для дифференцируемости F в точке x_0. Например, если взять непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию f, то, по доказанной теореме, функция F будет дифференцируемой в каждой точке отрезка $[a, b]$.

Изменим теперь значение функции f в одной точке. В результате получим разрывную функцию $\overline{f}$. В то же время, как легко видеть, функция F останется прежней, т. е.

$$\overline{F}(x) \equiv \int_a^x \overline{f}(t)dt = F(x) \ (x \in [a, b])$$

(поскольку изменение функции в конечном числе точек не влияет на величину ее интеграла).

Таким образом, получим, что интеграл с переменным верхним пределом от разрывной функции может оказаться дифференцируемым.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Замечание. Условие непрерывности функции f в точке x_0 не является необходимым для дифференцируемости F в точке x_0. Например, если взять непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию f, то, по доказанной теореме, функция F будет дифференцireумой в каждой точке отрезка $[a, b]$.
Изменим теперь значение функции f в одной точке. В результате получим разрывную функцию $\overline{f}$. В то же время, как легко видеть, функция F останется прежней, т. е.

$$\overline{F}(x) \equiv \int\limits_a^x \overline{f}(t)dt = F(x) \ (x \in [a, b])$$

(поскольку изменение функции в конечном числе точек не влияет на величину ее интеграла).
Таким образом, получим, что интеграл с переменным верхним пределом от разрывной функции может оказаться дифференцируемым.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Замечание. Условие непрерывности функции f в точке x_0 не является необходимым для дифференцируемости F в точке x_0. Например, если взять непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию f, то, по доказанной теореме, функция F будет дифференцireумой в каждой точке отрезка $[a, b]$.
Изменим теперь значение функции f в одной точке. В результате получим разрывную функцию $\overline{f}$. В то же время, как легко видеть, функция F останется прежней, т. е.

$$\overline{F}(x) \equiv \int\limits_a^x \overline{f}(t)dt = F(x) \ (x \in [a, b])$$

(поскольку изменение функции в конечном числе точек не влияет на величину ее интеграла).
Таким образом, получим, что интеграл с переменным верхним пределом от разрывной функции может оказаться дифференцируемым.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Замечание. Условие непрерывности функции f в точке x_0 не является необходимым для дифференцируемости F в точке x_0. Например, если взять непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию f, то, по доказанной теореме, функция F будет дифференцireумой в каждой точке отрезка $[a, b]$.

Изменим теперь значение функции f в одной точке. В результате получим разрывную функцию $\overline{f}$. В то же время, как легко видеть, функция F останется прежней, т. е.

$$\overline{F}(x) \equiv \int\limits_a^x \overline{f}(t)dt = F(x) \ (x \in [a, b])$$

(поскольку изменение функции в конечном числе точек не влияет на величину ее интеграла).

Таким образом, получим, что интеграл с переменным верхним пределом от разрывной функции может оказаться дифференцируемым.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пример 1.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта функция ограничена на отрезке $[0,1]$ и имеет единственную точку разрыва $x_0 = 0$. Значит, она интегрируема на $[0,1]$. Обозначим $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. Поскольку f непрерывна в каждой точке $x \neq 0$, то, по предыдущей теореме, функция F дифференцируема в каждой точке $x \in (0,1]$ и $F'(x) = \sin\frac{1}{x}$. В точке $x_0 = 0$ функция f разрывна и поэтому предыдущая теорема неприменима.

Однако можно показать, что существует $F'_+(0) = 0$.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пример 1.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта функция ограничена на отрезке $[0,1]$ и имеет единственную точку разрыва $x_0 = 0$. Значит, она интегрируема на $[0,1]$. Обозначим $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. Поскольку f непрерывна в каждой точке $x \ne 0$, то, по предыдущей теореме, функция F дифференцируема в каждой точке $x \in (0,1]$ и $F'(x) = \sin\frac{1}{x}$. В точке $x_0 = 0$ функция f разрывна и поэтому предыдущая теорема неприменима.

Однако можно показать, что существует $F'_+(0) = 0$.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пример 1.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта функция ограничена на отрезке $[0,1]$ и имеет единственную точку разрыва $x_0 = 0$. Значит, она интегрируема на $[0,1]$. Обозначим $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. Поскольку f непрерывна в каждой точке $x \neq 0$, то, по предыдущей теореме, функция F дифференцируема в каждой точке $x \in (0,1]$ и $F'(x) = \sin\frac{1}{x}$. В точке $x_0 = 0$ функция f разрывна и поэтому предыдущая теорема неприменима.

Однако можно показать, что существует $F'_+(0) = 0$.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пример 1.

Рассмотрим функцию
$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Эта функция ограничена на отрезке $[0,1]$ и имеет единственную точку разрыва $x_0 = 0$. Значит, она интегрируема на $[0,1]$. Обозначим $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. Поскольку f непрерывна в каждой точке $x \neq 0$, то, по предыдущей теореме, функция F дифференцируема в каждой точке $x \in (0,1]$ и $F'(x) = \sin\frac{1}{x}$.
В точке $x_0 = 0$ функция f разрывна и поэтому предыдущая теорема неприменима.
Однако можно показать, что существует $F'_+(0) = 0$.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пример 1.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта функция ограничена на отрезке $[0, 1]$ и имеет единственную точку разрыва $x_0 = 0$. Значит, она интегрируема на $[0, 1]$. Обозначим $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. Поскольку f непрерывна в каждой точке $x \neq 0$, то, по предыдущей теореме, функция F дифференцируема в каждой точке $x \in (0, 1]$ и $F'(x) = \sin \frac{1}{x}$. В точке $x_0 = 0$ функция f разрывна и поэтому предыдущая теорема неприменима.

Однако можно показать, что существует $F'_+(0) = 0$.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пример 1.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта функция ограничена на отрезке $[0, 1]$ и имеет единственную точку разрыва $x_0 = 0$. Значит, она интегрируема на $[0, 1]$. Обозначим $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. Поскольку f непрерывна в каждой точке $x \neq 0$, то, по предыдущей теореме, функция F дифференцируема в каждой точке $x \in (0, 1]$ и $F'(x) = \sin\frac{1}{x}$. В точке $x_0 = 0$ функция f разрывна и поэтому предыдущая теорема неприменима.

Однако можно показать, что существует $F'_+(0) = 0$.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пример 2.

Пусть $f(x) = \operatorname{sign} x,\ -1 \le x \le 1.$

Если $-1 \le x < 0$, то $f(t) = -1,\ -1 \le t \le x$ и $\int\limits_{-1}^{x} f(t)dt = -(x - (-1)) = -(x+1)$. Если же $0 \le x \le 1$, то

$$\int\limits_{-1}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-1}^{0} f(t)dt + \int\limits_{0}^{x} f(t)dt = -1 + x.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} -(x+1), & -1 \le x < 0, \\ x - 1, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что F недифференцируема в точке $x_0 = 0$.

Упражнение. Покажите, что если в некоторой точке функция f имеет скачок, то интеграл с переменным верхним пределом от этой функции недифференцируем в этой точке.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пример 2.

Пусть $f(x) = \operatorname{sign} x,\ -1 \le x \le 1.$
Если $-1 \le x < 0$, то $f(t) = -1,\ -1 \le t \le x$ и
$\int\limits_{-1}^{x} f(t)dt = -(x - (-1)) = -(x+1).$ Если же $0 \le x \le 1$, то

$$\int\limits_{-1}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-1}^{0} f(t)dt + \int\limits_{0}^{x} f(t)dt = -1 + x.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} -(x+1), & -1 \le x < 0, \\ x - 1, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что F недифференцируема в точке $x_0 = 0$.

Упражнение. Покажите, что если в некоторой точке функция f имеет скачок, то интеграл с переменным верхним пределом от этой функции недифференцируем в этой точке.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пример 2.

Пусть $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-1 \le x \le 1$.

Если $-1 \le x < 0$, то $f(t) = -1$, $-1 \le t \le x$ и

$\int\limits_{-1}^{x} f(t)dt = -(x - (-1)) = -(x+1)$. Если же $0 \le x \le 1$, то

$\int\limits_{-1}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-1}^{0} f(t)dt + \int\limits_{0}^{x} f(t)dt = -1 + x.$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} -(x+1), & -1 \le x < 0, \\ x - 1, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что F недифференцируема в точке $x_0 = 0$.

Упражнение. Покажите, что если в некоторой точке функция f имеет скачок, то интеграл с переменным верхним пределом от этой функции недифференцируем в этой точке.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пример 2.

Пусть $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-1 \leq x \leq 1$.
Если $-1 \leq x < 0$, то $f(t) = -1$, $-1 \leq t \leq x$ и
$\int\limits_{-1}^{x} f(t)dt = -(x - (-1)) = -(x+1)$. Если же $0 \leq x \leq 1$, то
$\int\limits_{-1}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-1}^{0} f(t)dt + \int\limits_{0}^{x} f(t)dt = -1 + x$.
Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} -(x+1), & -1 \leq x < 0, \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что F недифференцируема в точке $x_0 = 0$.

Упражнение. Покажите, что если в некоторой точке функция f имеет скачок, то интеграл с переменным верхним пределом от этой функции недифференцируем в этой точке.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пример 2.

Пусть $f(x) = \operatorname{sign} x, \ -1 \leq x \leq 1$.
Если $-1 \leq x < 0$, то $f(t) = -1, \ -1 \leq t \leq x$ и
$\int\limits_{-1}^{x} f(t)dt = -(x - (-1)) = -(x+1)$. Если же $0 \leq x \leq 1$, то
$\int\limits_{-1}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-1}^{0} f(t)dt + \int\limits_{0}^{x} f(t)dt = -1 + x.$
Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} -(x+1), & -1 \leq x < 0, \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что F недифференцируема в точке $x_0 = 0$.

Упражнение. Покажите, что если в некоторой точке функция f имеет скачок, то интеграл с переменным верхним пределом от этой функции недифференцируем в этой точке.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Теорема (основная теорема интегрального исчисления).

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она имеет первообразную на этом отрезке. Одной из ее первообразных является интеграл с переменным пределом от этой функции.

Эта теорема сразу следует из предыдущей.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Теорема (основная теорема интегрального исчисления).

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она имеет первообразную на этом отрезке. Одной из ее первообразных является интеграл с переменным пределом от этой функции.

Эта теорема сразу следует из предыдущей.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Покажем, что и у разрывной функции может существовать первообразная.

Действительно, в примере 1 функция f разрывна в точке $x_0 = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$. Легко видеть, что существует $\varphi'(0) = 0$, а при $0 < x \leq 1$ имеем $\varphi'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$.

Положим $g(x) = 2x \cos \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $g(0) = 0$. Тогда функция g непрерывна на $[0, 1]$ и, в силу основной теоремы интегрального исчисления, имеет первообразную на $[0, 1]$.

Поэтому и функция $f(x) = \varphi'(x) - g(x)$ имеет первообразную на $[0, 1]$ как разность двух функций, имеющих первообразные.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Покажем, что и у разрывной функции может существовать первообразная.

Действительно, в примере 1 функция f разрывна в точке $x_0 = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$.

Легко видеть, что существует $\varphi'(0) = 0$, а при $0 < x \leq 1$ имеем $\varphi'(x) = 2x \cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$.

Положим $g(x) = 2x \cos\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $g(0) = 0$. Тогда функция g непрерывна на $[0, 1]$ и, в силу основной теоремы интегрального исчисления, имеет первообразную на $[0, 1]$.

Поэтому и функция $f(x) = \varphi'(x) - g(x)$ имеет первообразную на $[0, 1]$ как разность двух функций, имеющих первообразные.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Покажем, что и у разрывной функции может существовать первообразная.

Действительно, в примере 1 функция f разрывна в точке $x_0 = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$. Легко видеть, что существует $\varphi'(0) = 0$, а при $0 < x \leq 1$ имеем $\varphi'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$.

Положим $g(x) = 2x\cos\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $g(0) = 0$. Тогда функция g непрерывна на $[0,1]$ и, в силу основной теоремы интегрального исчисления, имеет первообразную на $[0,1]$.

Поэтому и функция $f(x) = \varphi'(x) - g(x)$ имеет первообразную на $[0,1]$ как разность двух функций, имеющих первообразные.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Покажем, что и у разрывной функции может существовать первообразная.
Действительно, в примере 1 функция f разрывна в точке $x_0 = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$.
Легко видеть, что существует $\varphi'(0) = 0$, а при $0 < x \leq 1$ имеем $\varphi'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$.
Положим $g(x) = 2x\cos\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $g(0) = 0$. Тогда функция g непрерывна на $[0,1]$ и, в силу основной теоремы интегрального исчисления, имеет первообразную на $[0,1]$.
Поэтому и функция $f(x) = \varphi'(x) - g(x)$ имеет первообразную на $[0,1]$ как разность двух функций, имеющих первообразные.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Покажем, что и у разрывной функции может существовать первообразная.

Действительно, в примере 1 функция f разрывна в точке $x_0 = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$. Легко видеть, что существует $\varphi'(0) = 0$, а при $0 < x \leq 1$ имеем $\varphi'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$.

Положим $g(x) = 2x \cos \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $g(0) = 0$. Тогда функция g непрерывна на $[0, 1]$ и, в силу основной теоремы интегрального исчисления, имеет первообразную на $[0, 1]$.

Поэтому и функция $f(x) = \varphi'(x) - g(x)$ имеет первообразную на $[0, 1]$ как разность двух функций, имеющих первообразные.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Покажем, что и у разрывной функции может существовать первообразная.

Действительно, в примере 1 функция f разрывна в точке $x_0 = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$.

Легко видеть, что существует $\varphi'(0) = 0$, а при $0 < x \leq 1$ имеем $\varphi'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$.

Положим $g(x) = 2x\cos\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $g(0) = 0$. Тогда функция g непрерывна на $[0, 1]$ и, в силу основной теоремы интегрального исчисления, имеет первообразную на $[0, 1]$.

Поэтому и функция $f(x) = \varphi'(x) - g(x)$ имеет первообразную на $[0, 1]$ как разность двух функций, имеющих первообразные.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Теорема Ньютона – Лейбница (основная формула интегрального исчисления).

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и Φ – ее первообразная на этом отрезке. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) \equiv \Phi(x)\Big|_a^b .$$

Доказательство.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Теорема Ньютона – Лейбница (основная формула интегрального исчисления).

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и Φ – ее первообразная на этом отрезке. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) \equiv \Phi(x)\Big|_a^b .$$

Доказательство.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Теорема (обобщенная теорема Ньютона – Лейбница).

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, а Φ непрерывна на этом отрезке и $\Phi'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Теорема (обобщенная теорема Ньютона – Лейбница).

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, а Φ непрерывна на этом отрезке и $\Phi'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Следствие.

Если функция $\Phi(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и ее производная $f(x) \equiv \Phi'(x)$ интегрируема по Риману на этом отрезке, то

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \int\limits_a^x f(t)dt.$$

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Определение. Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Функцию Φ будем называть обобщенной первообразной функции f на этом отрезке, если Φ непрерывна на $[a, b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$ всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек.

Заметим, что обобщенная первообразная определяется однозначно с точностью до постоянного слагаемого, а именно, если Φ_1 и Φ_2 – две обобщенные первообразные для функции f, то $\Phi_1 - \Phi_2 \equiv C$.
Это легко доказывается с помощью теоремы Лагранжа.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Определение. Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Функцию Φ будем называть обобщенной первообразной функции f на этом отрезке, если Φ непрерывна на $[a, b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$ всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек.

Заметим, что обобщенная первообразная определяется однозначно с точностью до постоянного слагаемого, а именно, если Φ_1 и Φ_2 – две обобщенные первообразные для функции f, то $\Phi_1 - \Phi_2 \equiv C$.
Это легко доказывается с помощью теоремы Лагранжа.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Определение. Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Функцию Φ будем называть обобщенной первообразной функции f на этом отрезке, если Φ непрерывна на $[a, b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$ всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек.

Заметим, что обобщенная первообразная определяется однозначно с точностью до постоянного слагаемого, а именно, если Φ_1 и Φ_2 – две обобщенные первообразные для функции f, то $\Phi_1 - \Phi_2 \equiv C$.
Это легко доказывается с помощью теоремы Лагранжа.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Теорема (о существовании обобщенной первообразной).

Если функция f ограничена на отрезке $[a,b]$ и непрерывна всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек, то на этом отрезке она имеет обобщенную первообразную. Одной из обобщенных первообразных является $\int\limits_a^x f(t)dt$.

Доказательство этой теоремы легко получается из основной теоремы интегрального исчисления.

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Теорема (о существовании обобщенной первообразной).

Если функция f ограничена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек, то на этом отрезке она имеет обобщенную первообразную. Одной из обобщенных первообразных является $\int\limits_a^x f(t)dt$.

Доказательство этой теоремы легко получается из основной теоремы интегрального исчисления.

§8. Дифференцирование интегралов

§8. Дифференцирование интегралов

§8. Дифференцирование интегралов

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$.
Тогда, в силу основной теоремы интегрального исчисления, для любого $x \in [a,b]$ справедливо равенство

$$\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

Обозначим $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.

§8. Дифференцирование интегралов

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$.
Тогда, в силу основной теоремы интегрального исчисления, для любого $x \in [a, b]$ справедливо равенство

$$\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

Обозначим $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.

§8. Дифференцирование интегралов

Предположим, что функция u задана на отрезке $[\alpha, \beta]$, дифференцируема на этом отрезке и такова, что $u(\tau) \in [a, b]$ $(\tau \in [\alpha, \beta])$. Рассмотрим сложную функцию $\Phi(\tau) = F(u(\tau))$.

Применяя теорему о дифференцировании сложной функции, получаем, что функция Φ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и ее производная равна $\Phi'(\tau) = F'(u(\tau))u'(\tau)$.

§8. Дифференцирование интегралов

Предположим, что функция u задана на отрезке $[\alpha, \beta]$, дифференцируема на этом отрезке и такова, что $u(\tau) \in [a, b]$ $(\tau \in [\alpha, \beta])$. Рассмотрим сложную функцию $\Phi(\tau) = F(u(\tau))$.

Применяя теорему о дифференцировании сложной функции, получаем, что функция Φ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и ее производная равна $\Phi'(\tau) = F'(u(\tau))u'(\tau)$.

§8. Дифференцирование интегралов

Таким образом, мы доказали следующее равенство:

$$\left(\int\limits_a^{u(\tau)} f(t)dt\right)' = f(u(\tau))u'(\tau).$$

Аналогично получаем

$$\left(\int\limits_x^{b} f(t)dt\right)' = -\left(\int_b^x f(t)dt\right)' = -f(x).$$

Отсюда для дифференцируемой на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции v, такой, что $v(\tau) \in [a, b]$ $(\tau \in [\alpha, \beta])$, имеем

$$\left(\int\limits_{v(\tau)}^{b} f(t)dt\right)' = -\left(\int\limits_b^{v(\tau)} f(t)dt\right)' = -f(v(\tau))v'(\tau).$$

§8. Дифференцирование интегралов

Таким образом, мы доказали следующее равенство:

$$\left(\int\limits_a^{u(\tau)} f(t)dt\right)' = f(u(\tau))u'(\tau).$$

Аналогично получаем

$$\left(\int\limits_x^{b} f(t)dt\right)' = -\left(\int_b^x f(t)dt\right)' = -f(x).$$

Отсюда для дифференцируемой на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции v, такой, что $v(\tau) \in [a, b]$ $(\tau \in [\alpha, \beta])$, имеем

$$\left(\int\limits_{v(\tau)}^{b} f(t)dt\right)' = -\left(\int\limits_b^{v(\tau)} f(t)dt\right)' = -f(v(\tau))v'(\tau).$$

§8. Дифференцирование интегралов

Таким образом, мы доказали следующее равенство:

$$\left(\int\limits_a^{u(\tau)} f(t)dt\right)' = f(u(\tau))u'(\tau).$$

Аналогично получаем

$$\left(\int\limits_x^{b} f(t)dt\right)' = -\left(\int_b^x f(t)dt\right)' = -f(x).$$

Отсюда для дифференцируемой на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции v, такой, что $v(\tau) \in [a, b]$ $(\tau \in [\alpha, \beta])$, имеем

$$\left(\int\limits_{v(\tau)}^{b} f(t)dt\right)' = -\left(\int\limits_b^{v(\tau)} f(t)dt\right)' = -f(v(\tau))v'(\tau).$$

§8. Дифференцирование интегралов

Обе полученные формулы можем записать в таком виде

$$\left(\int\limits_{u(\tau)}^{v(\tau)} f(t)\,dt\right)' = f(u(\tau))u'(\tau) - f(v(\tau))v'(\tau).$$

§8. Дифференцирование интегралов

Пример 1.

Найти производную функции

$$F(x) = \int\limits_{x^2}^{x^3} \ln t dt.$$

Имеем

$$F'(x) = 3x^2 \ln(x^3) - 2x \ln(x^2) = x \ln x (9x - 4).$$

§8. Дифференцирование интегралов

Пример 1.

Найти производную функции

$$F(x) = \int\limits_{x^2}^{x^3} \ln t dt.$$

Имеем

$$F'(x) = 3x^2 \ln(x^3) - 2x \ln(x^2) = x \ln x(9x - 4).$$

§8. Дифференцирование интегралов

Пример 2.

Найти точки экстремума функции

$$F(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \;\; x > 0.$$

Имеем $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$.
Производная обращается в нуль при $x = \pi k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и при переходе через эти точки она меняет свой знак.
Поэтому во всех точках вида $x = \pi k$ функция F имеет экстремумы.

§8. Дифференцирование интегралов

Пример 2.

Найти точки экстремума функции

$$F(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt, \;\; x > 0.$$

Имеем $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Производная обращается в нуль при $x = \pi k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и при переходе через эти точки она меняет свой знак.

Поэтому во всех точках вида $x = \pi k$ функция F имеет экстремумы.

§8. Дифференцирование интегралов

Пример 2.

Найти точки экстремума функции

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt, \;\; x > 0.$$

Имеем $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$.
Производная обращается в нуль при $x = \pi k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и при переходе через эти точки она меняет свой знак.
Поэтому во всех точках вида $x = \pi k$ функция F имеет экстремумы.

§8. Дифференцирование интегралов

Пример 2.

Найти точки экстремума функции

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt, \;\; x > 0.$$

Имеем $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$.
Производная обращается в нуль при $x = \pi k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и при переходе через эти точки она меняет свой знак.
Поэтому во всех точках вида $x = \pi k$ функция F имеет экстремумы.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Определение. Функция называется **непрерывно дифференцируемой** на отрезке, если ее производная является непрерывной на этом отрезке. При этом на концах отрезка производная понимается как односторонняя.

Теорема (формула интегрирования по частям).

Пусть функции u и v непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Доказательство.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Определение. Функция называется непрерывно дифференцируемой на отрезке, если ее производная является непрерывной на этом отрезке. При этом на концах отрезка производная понимается как односторонняя.

Теорема (формула интегрирования по частям).

Пусть функции u и v непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Доказательство.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Определение. Функция называется непрерывно дифференцируемой на отрезке, если ее производная является непрерывной на этом отрезке. При этом на концах отрезка производная понимается как односторонняя.

Теорема (формула интегрирования по частям). *Пусть функции u и v непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Доказательство.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Теорема 1 (о замене переменной в определенном интеграле).

Пусть функция φ непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция f непрерывна на некотором отрезке, содержащем область значений функции φ. Пусть $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Теорема 1 (о замене переменной в определенном интеграле).

Пусть функция φ непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция f непрерывна на некотором отрезке, содержащем область значений функции φ. Пусть $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Пример 1.

$$\int\limits_0^{\pi} x \sin x \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = \sin x \, dx \\ du = dx, & v = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$= \; -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \; \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Пример 2.

$$I_n \equiv \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x, & dv = \sin x dx \\ du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx, & v = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= 0 + (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx =$$

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Пример 2.

$$I_n \equiv \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x, & dv = \sin x dx \\ du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx, & v = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= 0 + (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx =$$

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Пример 2.

$$I_n \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x, & dv = \sin x dx \\ du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx, & v = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx =$$

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Пример 2.

$$I_n \equiv \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x, & dv = \sin x dx \\ du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx, & v = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$= \ -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= 0 + (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx =$$

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Пример 2.

$$I_n \equiv \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x, & dv = \sin x dx \\ du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx, & v = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$= \; -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= 0 + (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx =$$

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Продолжение примера 2.

$$= (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Отсюда получаем $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, или

$$I_n = \frac{(n-1)I_{n-2}}{n}.$$

Вычислим

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Продолжение примера 2.

$$= (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Отсюда получаем $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, или

$$I_n = \frac{(n-1)I_{n-2}}{n}.$$

Вычислим

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Продолжение примера 2.

$$= (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Отсюда получаем $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, или

$$I_n = \frac{(n-1)I_{n-2}}{n}.$$

Вычислим

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Продолжение примера 2.

Если $n = 2k$, то

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 1}{2k(2k-2)\dots 2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2},$$

а при $n = 2k+1$ имеем

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Продолжение примера 2.

Если $n = 2k$, то

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 1}{2k(2k-2)\ldots 2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2},$$

а при $n = 2k+1$ имеем

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Продолжение примера 2.

Заметим, что $\sin^{2k+1} x \le \sin^{2k} x \le \sin^{2k-1} x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, откуда следует $I_{2k+1} \le I_{2k} \le I_{2k-1}$, так что

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \le \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2} \le \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$x_k \equiv \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k+1} \le \frac{\pi}{2} \le \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k} \equiv y_k.$$

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Продолжение примера 2.

Заметим, что $\sin^{2k+1} x \le \sin^{2k} x \le \sin^{2k-1} x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, откуда следует $I_{2k+1} \le I_{2k} \le I_{2k-1}$, так что

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \le \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2} \le \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$x_k \equiv \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k+1} \le \frac{\pi}{2} \le \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k} \equiv y_k.$$

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Продолжение примера 2.

Оценим

$$y_k - x_k = \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k(2k+1)} = \frac{2k+1}{2k}\left(\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\right)^2$$

$$= \frac{2k+1}{2k} I_{2k+1}^2 = \frac{2k+1}{2k}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x dx\right)^2.$$

Отсюда и из доказанного выше равенства

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$$

следует, что обе последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходятся к $\frac{\pi}{2}$.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Окончание примера 2.

Таким образом, мы доказали, что

$$\pi = 2 \lim_{k \to \infty} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k+1}.$$

Это равенство называется формулой Валлиса.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Окончание примера 2.

Таким образом, мы доказали, что

$$\pi = 2 \lim_{k\to\infty} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k+1}.$$

Это равенство называется формулой Валлиса.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Пример 3.

Вычислить

$$I \equiv \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Полагаем $x = \sin t$, где $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Тогда получим

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Пример 3.

Вычислить

$$I \equiv \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Полагаем $x = \sin t$, где $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Тогда получим

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Пример 4.

Вычислить

$$I \equiv \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Полагаем $\pi - x = t,\ x = \pi - t,\ dx = -dt$. Тогда получим

$$I = -\int_\pi^0 \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \int_0^\pi \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = -\pi\ \operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_0^\pi - I = \frac{\pi^2}{2} - I.$$

Отсюда следует, что $I = \frac{\pi^2}{4}$.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Пример 4.

Вычислить

$$I \equiv \int\limits_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Полагаем $\pi - x = t,\ x = \pi - t,\ dx = -dt$. Тогда получим

$$I = -\int\limits_\pi^0 \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \int\limits_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \pi \int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int\limits_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = -\pi\ \operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_0^\pi - I = \frac{\pi^2}{2} - I.$$

Отсюда следует, что $I = \frac{\pi^2}{4}$.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Пример 4.

Вычислить
$$I \equiv \int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$
Полагаем $\pi - x = t,\ x = \pi - t,\ dx = -dt$. Тогда получим
$$I = -\int\limits_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt =$$
$$= \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int\limits_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = -\pi\ \mathrm{arctg}(\cos t)\Big|_0^{\pi} - I = \frac{\pi^2}{2} - I.$$
Отсюда следует, что $I = \frac{\pi^2}{4}$.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Пример 4.

Вычислить

$$I \equiv \int\limits_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Полагаем $\pi - x = t,\ x = \pi - t,\ dx = -dt$. Тогда получим

$$I = -\int\limits_\pi^0 \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \int\limits_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt =$$

$$= \pi\int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - \int\limits_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt = -\pi\ \operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_0^\pi - I = \frac{\pi^2}{2} - I.$$

Отсюда следует, что $I = \frac{\pi^2}{4}$.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Пример 4.

Вычислить

$$I \equiv \int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Полагаем $\pi - x = t,\ x = \pi - t,\ dx = -dt$. Тогда получим

$$I = -\int\limits_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt =$$

$$= \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int\limits_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = -\pi \operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_0^{\pi} - I = \frac{\pi^2}{2} - I.$$

Отсюда следует, что $I = \frac{\pi^2}{4}$.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Пример 4.

Вычислить

$$I \equiv \int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Полагаем $\pi - x = t,\ x = \pi - t,\ dx = -dt$. Тогда получим

$$I = -\int\limits_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int\limits_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = -\pi\ \mathrm{arctg}(\cos t)\Big|_0^{\pi} - I = \frac{\pi^2}{2} - I.$$

Отсюда следует, что $I = \frac{\pi^2}{4}$.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Пример 4.

Вычислить

$$I \equiv \int\limits_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Полагаем $\pi - x = t,\ x = \pi - t,\ dx = -dt$. Тогда получим

$$I = -\int\limits_\pi^0 \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \int\limits_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt =$$

$$= \pi\int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - \int\limits_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt = -\pi\ \mathrm{arctg}(\cos t)\Big|_0^\pi - I = \frac{\pi^2}{2} - I.$$

Отсюда следует, что $I = \frac{\pi^2}{4}$.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Теорема 2 (о замене переменной в определенном интеграле).

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, а функция φ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, монотонна на этом отрезке и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Теорема 2 (о замене переменной в определенном интеграле).

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, а функция φ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, монотонна на этом отрезке и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Теорема (формула Тейлора с остатком в интегральной форме).

Пусть функция f имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные до порядка $(n+1)$ включительно. Тогда справедливо равенство

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n +$$

$$+\frac{1}{n!}\int\limits_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx.$$

Доказательство.

§9. Дальнейшие свойства интеграла Римана

Теорема (формула Тейлора с остатком в интегральной форме).

Пусть функция f имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные до порядка $(n+1)$ включительно. Тогда справедливо равенство

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n +$$

$$+\frac{1}{n!}\int\limits_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx.$$

Доказательство.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Далее содержатся вспомогательные материалы

Доказательство необходимого условия интегрируемости.

Предположим, что функция f неограничена на $[a, b]$, и покажем, что в этом случае для любого разбиения Π промежуточные точки ξ_i можно выбрать так, чтобы модуль соответствующей интегральной суммы оказался большим любого наперед заданного числа.

Рассмотрим произвольное разбиение

$$\Pi: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Если f неограничена на $[a, b]$, то найдется такой частичный отрезок $[x_j, x_{j+1}]$, на котором f также неограничена. Действительно, если бы f оказалась ограниченной на каждом из частичных отрезков, то она была бы ограниченной и на всем отрезке $[a, b]$.

Доказательство необходимого условия интегрируемости.

Предположим, что функция f неограничена на $[a, b]$, и покажем, что в этом случае для любого разбиения Π промежуточные точки ξ_i можно выбрать так, чтобы модуль соответствующей интегральной суммы оказался большим любого наперед заданного числа.
Рассмотрим произвольное разбиение

$$\Pi: \; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Если f неограничена на $[a, b]$, то найдется такой частичный отрезок $[x_j, x_{j+1}]$, на котором f также неограничена. Действительно, если бы f оказалась ограниченной на каждом из частичных отрезков, то она была бы ограниченной и на всем отрезке $[a, b]$.

Доказательство необходимого условия интегрируемости.

Предположим, что функция f неограничена на $[a, b]$, и покажем, что в этом случае для любого разбиения П промежуточные точки ξ_i можно выбрать так, чтобы модуль соответствующей интегральной суммы оказался большим любого наперед заданного числа.

Рассмотрим произвольное разбиение

$$\Pi: \;\; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Если f неограничена на $[a, b]$, то найдется такой частичный отрезок $[x_j, x_{j+1}]$, на котором f также неограничена. Действительно, если бы f оказалась ограниченной на каждом из частичных отрезков, то она была бы ограниченной и на всем отрезке $[a, b]$.

Продолжение доказательства необходимого условия интегрируемости.

Итак, предположим, что f неограничена сверху на $[x_j, x_{j+1}]$.
Зададим произвольное число M и покажем, что точки ξ_i можно выбрать так, чтобы соответствующая интегральная сумма σ стала большей, чем M.
Действительно, сначала выберем точки ξ_i во всех отрезках, кроме $[x_j, x_{j+1}]$, и составим сумму $\sigma' = \sum\limits_{\{i:i\neq j\}} f(\xi_i)\Delta x_i$. Затем точку ξ_j выберем так, чтобы выполнялось неравенство $f(\xi_j)\Delta x_j + \sigma' > M$. Это возможно в силу того, что функция f неограничена сверху на $[a, b]$.
Тогда получим, что для интегральной суммы $\sigma = \sigma' + f(\xi_j)\Delta x_j$ выполнено неравенство $\sigma > M$.

Продолжение доказательства необходимого условия интегрируемости.

Итак, предположим, что f неограничена сверху на $[x_j, x_{j+1}]$. Зададим произвольное число M и покажем, что точки ξ_i можно выбрать так, чтобы соответствующая интегральная сумма σ стала большей, чем M.

Действительно, сначала выберем точки ξ_i во всех отрезках, кроме $[x_j, x_{j+1}]$, и составим сумму $\sigma' = \sum\limits_{\{i:i \neq j\}} f(\xi_i)\Delta x_i$. Затем точку ξ_j выберем так, чтобы выполнялось неравенство $f(\xi_j)\Delta x_j + \sigma' > M$. Это возможно в силу того, что функция f неограничена сверху на $[a, b]$.

Тогда получим, что для интегральной суммы $\sigma = \sigma' + f(\xi_j)\Delta x_j$ выполнено неравенство $\sigma > M$.

Продолжение доказательства необходимого условия интегрируемости.

Итак, предположим, что f неограничена сверху на $[x_j, x_{j+1}]$. Зададим произвольное число M и покажем, что точки ξ_i можно выбрать так, чтобы соответствующая интегральная сумма σ стала большей, чем M.

Действительно, сначала выберем точки ξ_i во всех отрезках, кроме $[x_j, x_{j+1}]$, и составим сумму $\sigma' = \sum\limits_{\{i:i\neq j\}} f(\xi_i)\Delta x_i$. Затем точку ξ_j выберем так, чтобы выполнялось неравенство $f(\xi_j)\Delta x_j + \sigma' > M$. Это возможно в силу того, что функция f неограничена сверху на $[a, b]$.

Тогда получим, что для интегральной суммы $\sigma = \sigma' + f(\xi_j)\Delta x_j$ выполнено неравенство $\sigma > M$.

Продолжение доказательства необходимого условия интегрируемости.

Итак, предположим, что f неограничена сверху на $[x_j, x_{j+1}]$. Зададим произвольное число M и покажем, что точки ξ_i можно выбрать так, чтобы соответствующая интегральная сумма σ стала большей, чем M.
Действительно, сначала выберем точки ξ_i во всех отрезках, кроме $[x_j, x_{j+1}]$, и составим сумму $\sigma' = \sum\limits_{\{i:i\neq j\}} f(\xi_i)\Delta x_i$. Затем точку ξ_j выберем так, чтобы выполнялось неравенство $f(\xi_j)\Delta x_j + \sigma' > M$. Это возможно в силу того, что функция f неограничена сверху на $[a, b]$.
Тогда получим, что для интегральной суммы $\sigma = \sigma' + f(\xi_j)\Delta x_j$ выполнено неравенство $\sigma > M$.

Окончание доказательства необходимого условия интегрируемости.

Случай неограниченной снизу f исчерпывается аналогичным образом.

Наконец заметим, что из определения предела интегральных сумм вытекает, что при достаточно мелком разбиении интегральные суммы ограничены независимо от способа выбора промежуточных точек.

Действительно, в определении предела условие $d(\Pi) < \delta$ влечет выполнение неравенства $|\sigma - I| < \varepsilon$, откуда следует, что $|\sigma| < |I| + \varepsilon$. Мы же, предположив, что функция f неограничена на $[a, b]$, получаем противоречие с ограниченностью интегральных сумм. ∎

Окончание доказательства необходимого условия интегрируемости.

Случай неограниченной снизу f исчерпывается аналогичным образом.
Наконец заметим, что из определения предела интегральных сумм вытекает, что при достаточно мелком разбиении интегральные суммы ограничены независимо от способа выбора промежуточных точек.
Действительно, в определении предела условие $d(\Pi) < \delta$ влечет выполнение неравенства $|\sigma - I| < \varepsilon$, откуда следует, что $|\sigma| < |I| + \varepsilon$. Мы же, предположив, что функция f неограничена на $[a, b]$, получаем противоречие с ограниченностью интегральных сумм. ■

Окончание доказательства необходимого условия интегрируемости.

Случай неограниченной снизу f исчерпывается аналогичным образом.
Наконец заметим, что из определения предела интегральных сумм вытекает, что при достаточно мелком разбиении интегральные суммы ограничены независимо от способа выбора промежуточных точек.
Действительно, в определении предела условие $d(\Pi) < \delta$ влечет выполнение неравенства $|\sigma - I| < \varepsilon$, откуда следует, что $|\sigma| < |I| + \varepsilon$. Мы же, предположив, что функция f неограничена на $[a, b]$, получаем противоречие с ограниченностью интегральных сумм.

Окончание доказательства необходимого условия интегрируемости.

Случай неограниченной снизу f исчерпывается аналогичным образом.
Наконец заметим, что из определения предела интегральных сумм вытекает, что при достаточно мелком разбиении интегральные суммы ограничены независимо от способа выбора промежуточных точек.
Действительно, в определении предела условие $d(\Pi) < \delta$ влечет выполнение неравенства $|\sigma - I| < \varepsilon$, откуда следует, что $|\sigma| < |I| + \varepsilon$. Мы же, предположив, что функция f неограничена на $[a, b]$, получаем противоречие с ограниченностью интегральных сумм. ∎

Доказательство утверждения.

Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь определением верхней грани, для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ найдем такие $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$, что $f(\eta_i) > M_i - \varepsilon$.

Тогда получим

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_i)\Delta x_i > \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i - \varepsilon(b-a) = \overline{S}_\Pi - \varepsilon(b-a).$$

Отсюда следует, что $\overline{S}_\Pi = \sup\{\sigma\}$, где верхняя грань берется по множеству всевозможных интегральных сумм, соответствующих заданному разбиению Π.

Доказательство для нижней суммы Дарбу аналогично.

Доказательство утверждения.

Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь определением верхней грани, для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ найдем такие $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$, что $f(\eta_i) > M_i - \varepsilon$.
Тогда получим

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_i)\Delta x_i > \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i - \varepsilon(b-a) = \overline{S}_\Pi - \varepsilon(b-a).$$

Отсюда следует, что $\overline{S}_\Pi = \sup\{\sigma\}$, где верхняя грань берется по множеству всевозможных интегральных сумм, соответствующих заданному разбиению Π.

Доказательство для нижней суммы Дарбу аналогично.

Доказательство утверждения.

Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь определением верхней грани, для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ найдем такие $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$, что $f(\eta_i) > M_i - \varepsilon$.
Тогда получим

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_i)\Delta x_i > \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i - \varepsilon(b-a) = \overline{S}_\Pi - \varepsilon(b-a).$$

Отсюда следует, что $\overline{S}_\Pi = \sup\{\sigma\}$, где верхняя грань берется по множеству всевозможных интегральных сумм, соответствующих заданному разбиению П.

Доказательство для нижней суммы Дарбу аналогично.

Доказательство утверждения.

Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь определением верхней грани, для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ найдем такие $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$, что $f(\eta_i) > M_i - \varepsilon$.
Тогда получим

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_i)\Delta x_i > \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i - \varepsilon(b-a) = \overline{S}_\Pi - \varepsilon(b-a).$$

Отсюда следует, что $\overline{S}_\Pi = \sup\{\sigma\}$, где верхняя грань берется по множеству всевозможных интегральных сумм, соответствующих заданному разбиению П.

Доказательство для нижней суммы Дарбу аналогично. ■

Доказательство свойства 1.

Пусть имеется изначально разбиение П.

Достаточно рассмотреть случай, когда к имеющимся точкам добавляется одна точка $x' \in [x_i, x_{i+1}]$, в результате чего получаем новое разбиение Π'.

Тогда суммы $\overline{S}_\Pi$ и $\overline{S}_{\Pi'}$ содержат одни и те же слагаемые, за исключением слагаемых, отвечающих отрезку $[x_i, x_{i+1}]$.

В сумме $\overline{S}_\Pi$ этому отрезку отвечает слагаемое $M_i(x_{i+1} - x_i)$, а в сумме $\overline{S}_{\Pi'}$ ему соответствуют два слагаемых $M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x')$, где $M_i' = \sup_{x_i \le x \le x'} f(x)$, $M_i'' = \sup_{x' \le x \le x_{i+1}} f(x)$.

Ясно, что $M_i' \le M_i$ и $M_i'' \le M_i$. Поэтому $M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x') \le M_i(x_{i+1} - x_i)$, так что и $\overline{S}_{\Pi'} \le \overline{S}_\Pi$.

Для нижних сумм доказательство аналогичное. ■

Доказательство свойства 1.

Пусть имеется изначально разбиение Π.
Достаточно рассмотреть случай, когда к имеющимся точкам добавляется одна точка $x' \in [x_i, x_{i+1}]$, в результате чего получаем новое разбиение Π'.
Тогда суммы $\overline{S}_\Pi$ и $\overline{S}_{\Pi'}$ содержат одни и те же слагаемые, за исключением слагаемых, отвечающих отрезку $[x_i, x_{i+1}]$.
В сумме $\overline{S}_\Pi$ этому отрезку отвечает слагаемое $M_i(x_{i+1} - x_i)$, а в сумме $\overline{S}_{\Pi'}$ ему соответствуют два слагаемых $M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x')$, где $M_i' = \sup_{x_i \le x \le x'} f(x)$, $M_i'' = \sup_{x' \le x \le x_{i+1}} f(x)$.
Ясно, что $M_i' \le M_i$ и $M_i'' \le M_i$. Поэтому $M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x') \le M_i(x_{i+1} - x_i)$, так что и $\overline{S}_{\Pi'} \le \overline{S}_\Pi$.

Для нижних сумм доказательство аналогичное.

Доказательство свойства 1.

Пусть имеется изначально разбиение П.
Достаточно рассмотреть случай, когда к имеющимся точкам добавляется одна точка $x' \in [x_i, x_{i+1}]$, в результате чего получаем новое разбиение П$'$.
Тогда суммы $\overline{S}_\Pi$ и $\overline{S}_{\Pi'}$ содержат одни и те же слагаемые, за исключением слагаемых, отвечающих отрезку $[x_i, x_{i+1}]$.
В сумме $\overline{S}_\Pi$ этому отрезку отвечает слагаемое $M_i(x_{i+1} - x_i)$, а в сумме $\overline{S}_{\Pi'}$ ему соответствуют два слагаемых
$M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x')$, где
$M_i' = \sup_{x_i \le x \le x'} f(x)$, $M_i'' = \sup_{x' \le x \le x_{i+1}} f(x)$.
Ясно, что $M_i' \le M_i$ и $M_i'' \le M_i$. Поэтому
$M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x') \le M_i(x_{i+1} - x_i)$, так что и $\overline{S}_{\Pi'} \le \overline{S}_\Pi$.

Для нижних сумм доказательство аналогичное. ■

Доказательство свойства 1.

Пусть имеется изначально разбиение П.
Достаточно рассмотреть случай, когда к имеющимся точкам добавляется одна точка $x' \in [x_i, x_{i+1}]$, в результате чего получаем новое разбиение Π'.
Тогда суммы $\overline{S}_\Pi$ и $\overline{S}_{\Pi'}$ содержат одни и те же слагаемые, за исключением слагаемых, отвечающих отрезку $[x_i, x_{i+1}]$.
В сумме $\overline{S}_\Pi$ этому отрезку отвечает слагаемое $M_i(x_{i+1} - x_i)$, а в сумме $\overline{S}_{\Pi'}$ ему соответствуют два слагаемых
$M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x')$, где
$M_i' = \sup_{x_i \le x \le x'} f(x)$, $M_i'' = \sup_{x' \le x \le x_{i+1}} f(x)$.
Ясно, что $M_i' \le M_i$ и $M_i'' \le M_i$. Поэтому
$M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x') \le M_i(x_{i+1} - x_i)$, так что и $\overline{S}_{\Pi'} \le \overline{S}_\Pi$.

Для нижних сумм доказательство аналогичное.

Доказательство свойства 1.

Пусть имеется изначально разбиение Π.
Достаточно рассмотреть случай, когда к имеющимся точкам добавляется одна точка $x' \in [x_i, x_{i+1}]$, в результате чего получаем новое разбиение Π'.
Тогда суммы $\overline{S}_{\Pi}$ и $\overline{S}_{\Pi'}$ содержат одни и те же слагаемые, за исключением слагаемых, отвечающих отрезку $[x_i, x_{i+1}]$.
В сумме $\overline{S}_{\Pi}$ этому отрезку отвечает слагаемое $M_i(x_{i+1} - x_i)$, а в сумме $\overline{S}_{\Pi'}$ ему соответствуют два слагаемых
$M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x')$, где
$M_i' = \sup_{x_i \le x \le x'} f(x)$, $M_i'' = \sup_{x' \le x \le x_{i+1}} f(x)$.
Ясно, что $M_i' \le M_i$ и $M_i'' \le M_i$. Поэтому
$M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x') \le M_i(x_{i+1} - x_i)$, так что и $\overline{S}_{\Pi'} \le \overline{S}_{\Pi}$.

Для нижних сумм доказательство аналогичное.

Доказательство свойства 1.

Пусть имеется изначально разбиение Π.
Достаточно рассмотреть случай, когда к имеющимся точкам добавляется одна точка $x' \in [x_i, x_{i+1}]$, в результате чего получаем новое разбиение Π'.
Тогда суммы $\overline{S}_{\Pi}$ и $\overline{S}_{\Pi'}$ содержат одни и те же слагаемые, за исключением слагаемых, отвечающих отрезку $[x_i, x_{i+1}]$.
В сумме $\overline{S}_{\Pi}$ этому отрезку отвечает слагаемое $M_i(x_{i+1} - x_i)$, а в сумме $\overline{S}_{\Pi'}$ ему соответствуют два слагаемых
$M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x')$, где
$M_i' = \sup_{x_i \le x \le x'} f(x)$, $M_i'' = \sup_{x' \le x \le x_{i+1}} f(x)$.
Ясно, что $M_i' \le M_i$ и $M_i'' \le M_i$. Поэтому
$M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x') \le M_i(x_{i+1} - x_i)$, так что и $\overline{S}_{\Pi'} \le \overline{S}_{\Pi}$.

Для нижних сумм доказательство аналогичное. ■

Доказательство свойства 2.

Пусть Π_1, Π_2 – произвольные разбиения отрезка $[a, b]$.
Докажем, что $\underline{S}_{\Pi_1} \leq \overline{S}_{\Pi_2}$.
Объединяя точки разбиений Π_1 и Π_2, получим новое разбиение Π, причем, поскольку Π может быть получено из Π_1 путем добавления к Π_1 новых точек деления, то, в силу предыдущего свойства, имеем $\underline{S}_{\Pi_1} \leq \underline{S}_{\Pi}$.
С другой стороны, разбиение Π может быть получено из Π_2 путем добавления к Π_2 новых точек деления, так что, в силу предыдущего свойства, $\overline{S}_{\Pi} \leq \overline{S}_{\Pi_2}$.
Объединяя эти два неравенства и учитывая, что $\underline{S}_{\Pi} \leq \overline{S}_{\Pi}$, получаем $\underline{S}_{\Pi_1} \leq \overline{S}_{\Pi_2}$. ■

Доказательство свойства 2.

Пусть Π_1, Π_2 – произвольные разбиения отрезка $[a, b]$.
Докажем, что $\underline{S}_{\Pi_1} \le \overline{S}_{\Pi_2}$.
Объединяя точки разбиений Π_1 и Π_2, получим новое разбиение Π, причем, поскольку Π может быть получено из Π_1 путем добавления к Π_1 новых точек деления, то, в силу предыдущего свойства, имеем $\underline{S}_{\Pi_1} \le \underline{S}_{\Pi}$.
С другой стороны, разбиение Π может быть получено из Π_2 путем добавления к Π_2 новых точек деления, так что, в силу предыдущего свойства, $\overline{S}_{\Pi} \le \overline{S}_{\Pi_2}$.
Объединяя эти два неравенства и учитывая, что $\underline{S}_{\Pi} \le \overline{S}_{\Pi}$, получаем $\underline{S}_{\Pi_1} \le \overline{S}_{\Pi_2}$.

Доказательство свойства 2.

Пусть Π_1, Π_2 – произвольные разбиения отрезка $[a, b]$.
Докажем, что $\underline{S}_{\Pi_1} \leq \overline{S}_{\Pi_2}$.
Объединяя точки разбиений Π_1 и Π_2, получим новое разбиение Π, причем, поскольку Π может быть получено из Π_1 путем добавления к Π_1 новых точек деления, то, в силу предыдущего свойства, имеем $\underline{S}_{\Pi_1} \leq \underline{S}_{\Pi}$.
С другой стороны, разбиение Π может быть получено из Π_2 путем добавления к Π_2 новых точек деления, так что, в силу предыдущего свойства, $\overline{S}_{\Pi} \leq \overline{S}_{\Pi_2}$.
Объединяя эти два неравенства и учитывая, что $\underline{S}_{\Pi} \leq \overline{S}_{\Pi}$, получаем $\underline{S}_{\Pi_1} \leq \overline{S}_{\Pi_2}$.

Доказательство свойства 2.

Пусть Π_1, Π_2 – произвольные разбиения отрезка $[a, b]$.
Докажем, что $\underline{S}_{\Pi_1} \leq \overline{S}_{\Pi_2}$.
Объединяя точки разбиений Π_1 и Π_2, получим новое разбиение Π, причем, поскольку Π может быть получено из Π_1 путем добавления к Π_1 новых точек деления, то, в силу предыдущего свойства, имеем $\underline{S}_{\Pi_1} \leq \underline{S}_{\Pi}$.
С другой стороны, разбиение Π может быть получено из Π_2 путем добавления к Π_2 новых точек деления, так что, в силу предыдущего свойства, $\overline{S}_{\Pi} \leq \overline{S}_{\Pi_2}$.
Объединяя эти два неравенства и учитывая, что $\underline{S}_{\Pi} \leq \overline{S}_{\Pi}$, получаем $\underline{S}_{\Pi_1} \leq \overline{S}_{\Pi_2}$. ■

Доказательство утверждения.

Как было показано выше, каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу, т. е. для любых двух разбиений П и П′ справедливо неравенство $\underline{S}_{\Pi} \leq \overline{S}_{\Pi'}$.
Переходя к верхней грани по всевозможным разбиениям П, получаем

$$\underline{I} \leq \overline{S}_{\Pi'}.$$

Поскольку в полученном неравенстве разбиение П′ произвольное, то переходя к нижней грани по всевозможным разбиениям, получим

$$\underline{I} \leq \overline{I}.$$

Доказательство утверждения.

Как было показано выше, каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу, т. е. для любых двух разбиений П и П′ справедливо неравенство $\underline{S}_{\Pi} \leq \overline{S}_{\Pi'}$. Переходя к верхней грани по всевозможным разбиениям П, получаем

$$\underline{I} \leq \overline{S}_{\Pi'}.$$

Поскольку в полученном неравенстве разбиение П′ произвольное, то переходя к нижней грани по всевозможным разбиениям, получим

$$\underline{I} \leq \overline{I}.$$

Доказательство утверждения.

Как было показано выше, каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу, т. е. для любых двух разбиений Π и Π' справедливо неравенство $\underline{S}_{\Pi} \leq \overline{S}_{\Pi'}$. Переходя к верхней грани по всевозможным разбиениям Π, получаем

$$\underline{I} \leq \overline{S}_{\Pi'}.$$

Поскольку в полученном неравенстве разбиение Π' произвольное, то переходя к нижней грани по всевозможным разбиениям, получим

$$\underline{I} \leq \overline{I}.$$

Доказательство необходимости критерия интегрируемости.

Необходимость. Пусть функция f интегрируема, т. е. существует конечный

$$I \equiv \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π с $d(\Pi) < \delta$ и при любом выборе промежуточных точек ξ_i выполнено неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.
Это неравенство можно переписать так: $I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$.
Зафиксируем произвольное разбиение Π с $d(\Pi) < \delta$. Поскольку $\overline{S}_\Pi$ – верхняя грань множества всех интегральных сумм σ, соответствующих разбиению Π, и $\sigma < I + \varepsilon$, то $\overline{S}_\Pi \leq I + \varepsilon$.
Аналогично получаем $\underline{S}_\Pi \geq I - \varepsilon$.
Таким образом, $I - \varepsilon \leq \underline{S}_\Pi \leq \overline{S}_\Pi \leq I + \varepsilon$.
Отсюда следует, что $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi \leq 2\varepsilon$, если только $d(\Pi) < \delta$.

Доказательство необходимости критерия интегрируемости.

Необходимость. Пусть функция f интегрируема, т. е. существует конечный

$$I \equiv \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π с $d(\Pi) < \delta$ и при любом выборе промежуточных точек ξ_i выполнено неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.
Это неравенство можно переписать так: $I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$.
Зафиксируем произвольное разбиение Π с $d(\Pi) < \delta$. Поскольку $\overline{S}_\Pi$ – верхняя грань множества всех интегральных сумм σ, соответствующих разбиению Π, и $\sigma < I + \varepsilon$, то $\overline{S}_\Pi \le I + \varepsilon$.
Аналогично получаем $\underline{S}_\Pi \ge I - \varepsilon$.
Таким образом, $I - \varepsilon \le \underline{S}_\Pi \le \overline{S}_\Pi \le I + \varepsilon$.
Отсюда следует, что $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi \le 2\varepsilon$, если только $d(\Pi) < \delta$.

Доказательство необходимости критерия интегрируемости.

Необходимость. Пусть функция f интегрируема, т. е. существует конечный

$$I \equiv \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π с $d(\Pi) < \delta$ и при любом выборе промежуточных точек ξ_i выполнено неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.
Это неравенство можно переписать так: $I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$.
Зафиксируем произвольное разбиение Π с $d(\Pi) < \delta$. Поскольку $\overline{S}_\Pi$ – верхняя грань множества всех интегральных сумм σ, соответствующих разбиению Π, и $\sigma < I + \varepsilon$, то $\overline{S}_\Pi \leq I + \varepsilon$.
Аналогично получаем $\underline{S}_\Pi \geq I - \varepsilon$.
Таким образом, $I - \varepsilon \leq \underline{S}_\Pi \leq \overline{S}_\Pi \leq I + \varepsilon$.
Отсюда следует, что $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi \leq 2\varepsilon$, если только $d(\Pi) < \delta$.

Доказательство необходимости критерия интегрируемости.

Необходимость. Пусть функция f интегрируема, т. е. существует конечный

$$I \equiv \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π с $d(\Pi) < \delta$ и при любом выборе промежуточных точек ξ_i выполнено неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$. Это неравенство можно переписать так: $I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$. Зафиксируем произвольное разбиение Π с $d(\Pi) < \delta$. Поскольку $\overline{S}_\Pi$ – верхняя грань множества всех интегральных сумм σ, соответствующих разбиению Π, и $\sigma < I + \varepsilon$, то $\overline{S}_\Pi \le I + \varepsilon$. Аналогично получаем $\underline{S}_\Pi \ge I - \varepsilon$.

Таким образом, $I - \varepsilon \le \underline{S}_\Pi \le \overline{S}_\Pi \le I + \varepsilon$.

Отсюда следует, что $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi \le 2\varepsilon$, если только $d(\Pi) < \delta$.

Доказательство необходимости критерия интегрируемости.

Необходимость. Пусть функция f интегрируема, т. е. существует конечный

$$I \equiv \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π с $d(\Pi) < \delta$ и при любом выборе промежуточных точек ξ_i выполнено неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.
Это неравенство можно переписать так: $I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$.
Зафиксируем произвольное разбиение Π с $d(\Pi) < \delta$. Поскольку $\overline{S}_\Pi$ – верхняя грань множества всех интегральных сумм σ, соответствующих разбиению Π, и $\sigma < I + \varepsilon$, то $\overline{S}_\Pi \le I + \varepsilon$.
Аналогично получаем $\underline{S}_\Pi \ge I - \varepsilon$.
Таким образом, $I - \varepsilon \le \underline{S}_\Pi \le \overline{S}_\Pi \le I + \varepsilon$.
Отсюда следует, что $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi \le 2\varepsilon$, если только $d(\Pi) < \delta$.

Доказательство необходимости критерия интегрируемости.

Необходимость. Пусть функция f интегрируема, т. е. существует конечный

$$I \equiv \lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π с $d(\Pi) < \delta$ и при любом выборе промежуточных точек ξ_i выполнено неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.
Это неравенство можно переписать так: $I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$.
Зафиксируем произвольное разбиение Π с $d(\Pi) < \delta$. Поскольку $\overline{S}_\Pi$ – верхняя грань множества всех интегральных сумм σ, соответствующих разбиению Π, и $\sigma < I + \varepsilon$, то $\overline{S}_\Pi \leq I + \varepsilon$.
Аналогично получаем $\underline{S}_\Pi \geq I - \varepsilon$.
Таким образом, $I - \varepsilon \leq \underline{S}_\Pi \leq \overline{S}_\Pi \leq I + \varepsilon$.
Отсюда следует, что $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi \leq 2\varepsilon$, если только $d(\Pi) < \delta$.

Доказательство достаточности критерия интегрируемости.

Достаточность. Заметим, что для любого разбиения П справедливо неравенство $\underline{S}_\Pi \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S}_\Pi$.

Поскольку, по условию, $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi \to 0$ при $d(\Pi) \to 0$, то $\overline{I} = \underline{I}$.

Обозначим их общее значение через I. Тогда получим, что для любого разбиения П имеет место неравенство $\underline{S}_\Pi \le I \le \overline{S}_\Pi$.

Но и каждая интегральная сумма σ, отвечающая разбиению П, также удовлетворяет неравенству $\underline{S}_\Pi \le \sigma \le \overline{S}_\Pi$.

Отсюда следует, что $|\sigma - I| \le \overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi$.

Поскольку правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $d(\Pi) \to 0$, то получаем

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma = I.$$

Доказательство достаточности критерия интегрируемости.

Достаточность. Заметим, что для любого разбиения П справедливо неравенство $\underline{S}_\Pi \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq \overline{S}_\Pi$.

Поскольку, по условию, $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi \to 0$ при $d(\Pi) \to 0$, то $\overline{I} = \underline{I}$.

Обозначим их общее значение через I. Тогда получим, что для любого разбиения П имеет место неравенство $\underline{S}_\Pi \leq I \leq \overline{S}_\Pi$.

Но и каждая интегральная сумма σ, отвечающая разбиению П, также удовлетворяет неравенству $\underline{S}_\Pi \leq \sigma \leq \overline{S}_\Pi$.

Отсюда следует, что $|\sigma - I| \leq \overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi$.

Поскольку правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $d(\Pi) \to 0$, то получаем

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma = I.$$

Доказательство достаточности критерия интегрируемости.

Достаточность. Заметим, что для любого разбиения Π справедливо неравенство $\underline{S}_\Pi \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S}_\Pi$.
Поскольку, по условию, $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi \to 0$ при $d(\Pi) \to 0$, то $\overline{I} = \underline{I}$.
Обозначим их общее значение через I. Тогда получим, что для любого разбиения Π имеет место неравенство $\underline{S}_\Pi \le I \le \overline{S}_\Pi$.
Но и каждая интегральная сумма σ, отвечающая разбиению Π, также удовлетворяет неравенству $\underline{S}_\Pi \le \sigma \le \overline{S}_\Pi$.
Отсюда следует, что $|\sigma - I| \le \overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi$.
Поскольку правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $d(\Pi) \to 0$, то получаем

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma = I.$$

Доказательство достаточности критерия интегрируемости.

Достаточность. Заметим, что для любого разбиения Π справедливо неравенство $\underline{S}_\Pi \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq \overline{S}_\Pi$.
Поскольку, по условию, $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi \to 0$ при $d(\Pi) \to 0$, то $\overline{I} = \underline{I}$.
Обозначим их общее значение через I. Тогда получим, что для любого разбиения Π имеет место неравенство $\underline{S}_\Pi \leq I \leq \overline{S}_\Pi$.
Но и каждая интегральная сумма σ, отвечающая разбиению Π, также удовлетворяет неравенству $\underline{S}_\Pi \leq \sigma \leq \overline{S}_\Pi$.
Отсюда следует, что $|\sigma - I| \leq \overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi$.
Поскольку правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $d(\Pi) \to 0$, то получаем

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma = I.$$

Доказательство достаточности критерия интегрируемости.

Достаточность. Заметим, что для любого разбиения Π справедливо неравенство $\underline{S}_\Pi \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S}_\Pi$.
Поскольку, по условию, $\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi \to 0$ при $d(\Pi) \to 0$, то $\overline{I} = \underline{I}$.
Обозначим их общее значение через I. Тогда получим, что для любого разбиения Π имеет место неравенство $\underline{S}_\Pi \le I \le \overline{S}_\Pi$.
Но и каждая интегральная сумма σ, отвечающая разбиению Π, также удовлетворяет неравенству $\underline{S}_\Pi \le \sigma \le \overline{S}_\Pi$.
Отсюда следует, что $|\sigma - I| \le \overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi$.
Поскольку правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $d(\Pi) \to 0$, то получаем

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma = I.$$

Доказательство теоремы об интегрируемости непрерывной функции.

По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых точек $x', \ x'' \in [a, b]$, таких, что $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.
Отсюда следует, что для любого разбиения П, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, справедливо неравенство

$$\omega_i = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon \ (i = 0, 1, \dots n - 1).$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b - a),$$

если только $d(\Pi) < \delta$. Таким образом, выполнено условие критерия интегрируемости в терминах колебаний и тем самым теорема доказана.

Доказательство теоремы об интегрируемости непрерывной функции.

По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых точек $x',\ x'' \in [a, b]$, таких, что $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Отсюда следует, что для любого разбиения П, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, справедливо неравенство

$$\omega_i = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon \ (i = 0, 1, \ldots n - 1).$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b - a),$$

если только $d(\Pi) < \delta$. Таким образом, выполнено условие критерия интегрируемости в терминах колебаний и тем самым теорема доказана. ∎

Доказательство теоремы об интегрируемости непрерывной функции.

По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых точек $x',\ x'' \in [a, b]$, таких, что $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.
Отсюда следует, что для любого разбиения П, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, справедливо неравенство

$$\omega_i = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon \ (i = 0, 1, \dots n - 1).$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b - a),$$

если только $d(\Pi) < \delta$. Таким образом, выполнено условие критерия интегрируемости в терминах колебаний и тем самым теорема доказана.

Доказательство теоремы об интегрируемости непрерывной функции.

По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых точек $x',\ x'' \in [a, b]$, таких, что $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.
Отсюда следует, что для любого разбиения Π, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, справедливо неравенство

$$\omega_i = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')| \le \varepsilon \ (i = 0, 1, \dots n-1).$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \le \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b-a),$$

если только $d(\Pi) < \delta$. Таким образом, выполнено условие критерия интегрируемости в терминах колебаний и тем самым теорема доказана.

Доказательство теоремы об интегрируемости монотонной функции.

Пусть, например, f возрастает.

Возьмем произвольное разбиение П. Тогда $\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, поскольку колебание функции является разностью между наибольшим и наименьшим значениями функции.

Получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leq d(\Pi) \sum (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = d(\Pi) \left[f(b) - f(a) \right].$$

Отсюда видно, что выполнены условия критерия интегрируемости в терминах колебаний и теорема доказана.

Доказательство теоремы об интегрируемости монотонной функции.

Пусть, например, f возрастает.
Возьмем произвольное разбиение П. Тогда $\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, поскольку колебание функции является разностью между наибольшим и наименьшим значениями функции.
Получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \le d(\Pi) \sum (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = d(\Pi)\,[f(b) - f(a)]\,.$$

Отсюда видно, что выполнены условия критерия интегрируемости в терминах колебаний и теорема доказана.

Доказательство теоремы об интегрируемости монотонной функции.

Пусть, например, f возрастает.
Возьмем произвольное разбиение П. Тогда $\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, поскольку колебание функции является разностью между наибольшим и наименьшим значениями функции.
Получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leq d(\Pi) \sum (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = d(\Pi)\,[f(b) - f(a)]\,.$$

Отсюда видно, что выполнены условия критерия интегрируемости в терминах колебаний и теорема доказана.

Доказательство теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ – точки разрыва.

Зададим $\varepsilon > 0$ и для каждой точки разрыва выберем некоторую ее окрестность длины, меньшей чем ε. Эти окрестности можно выбрать так, чтобы они попарно не пересекались. Обозначим их $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$.

Выбросив эти окрестности из отрезка $[a, b]$, получим конечный набор отрезков $I_1, \ldots, I_m$ (их количество не обязательно равно k). На каждом из этих отрезков функция непрерывна и, в силу теоремы Кантора, равномерно непрерывна.

Поэтому для каждого отрезка I_j найдется $\delta_j > 0$, такое, что для любой пары точек $x', x'' \in I_j$ условие $|x' - x''| < \delta_j$ влечет выполнение неравенства $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_m, \varepsilon)$.

Доказательство теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Пусть $a_1, \dots, a_k$ – точки разрыва.
Зададим $\varepsilon > 0$ и для каждой точки разрыва выберем некоторую ее окрестность длины, меньшей чем ε. Эти окрестности можно выбрать так, чтобы они попарно не пересекались. Обозначим их $\Delta_1, \dots, \Delta_k$.
Выбросив эти окрестности из отрезка $[a, b]$, получим конечный набор отрезков $I_1, \dots, I_m$ (их количество не обязательно равно k). На каждом из этих отрезков функция непрерывна и, в силу теоремы Кантора, равномерно непрерывна.
Поэтому для каждого отрезка I_j найдется $\delta_j > 0$, такое, что для любой пары точек $x', x'' \in I_j$ условие $|x' - x''| < \delta_j$ влечет выполнение неравенства $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_m, \varepsilon)$.

Доказательство теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ – точки разрыва.
Зададим $\varepsilon > 0$ и для каждой точки разрыва выберем некоторую ее окрестность длины, меньшей чем ε. Эти окрестности можно выбрать так, чтобы они попарно не пересекались. Обозначим их $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$.
Выбросив эти окрестности из отрезка $[a, b]$, получим конечный набор отрезков $I_1, \ldots, I_m$ (их количество не обязательно равно k). На каждом из этих отрезков функция непрерывна и, в силу теоремы Кантора, равномерно непрерывна.
Поэтому для каждого отрезка I_j найдется $\delta_j > 0$, такое, что для любой пары точек $x', x'' \in I_j$ условие $|x' - x''| < \delta_j$ влечет выполнение неравенства $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_m, \varepsilon)$.

Доказательство теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Пусть $a_1, \dots, a_k$ – точки разрыва.
Зададим $\varepsilon > 0$ и для каждой точки разрыва выберем некоторую ее окрестность длины, меньшей чем ε. Эти окрестности можно выбрать так, чтобы они попарно не пересекались. Обозначим их $\Delta_1, \dots, \Delta_k$.
Выбросив эти окрестности из отрезка $[a, b]$, получим конечный набор отрезков $I_1, \dots, I_m$ (их количество не обязательно равно k). На каждом из этих отрезков функция непрерывна и, в силу теоремы Кантора, равномерно непрерывна.
Поэтому для каждого отрезка I_j найдется $\delta_j > 0$, такое, что для любой пары точек $x', x'' \in I_j$ условие $|x' - x''| < \delta_j$ влечет выполнение неравенства $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_m, \varepsilon)$.

Доказательство теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Пусть $a_1, \dots, a_k$ – точки разрыва.
Зададим $\varepsilon > 0$ и для каждой точки разрыва выберем некоторую ее окрестность длины, меньшей чем ε. Эти окрестности можно выбрать так, чтобы они попарно не пересекались. Обозначим их $\Delta_1, \dots, \Delta_k$.
Выбросив эти окрестности из отрезка $[a, b]$, получим конечный набор отрезков $I_1, \dots, I_m$ (их количество не обязательно равно k). На каждом из этих отрезков функция непрерывна и, в силу теоремы Кантора, равномерно непрерывна.
Поэтому для каждого отрезка I_j найдется $\delta_j > 0$, такое, что для любой пары точек $x', x'' \in I_j$ условие $|x' - x''| < \delta_j$ влечет выполнение неравенства $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_m, \varepsilon)$.

Доказательство теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ – точки разрыва.
Зададим $\varepsilon > 0$ и для каждой точки разрыва выберем некоторую ее окрестность длины, меньшей чем ε. Эти окрестности можно выбрать так, чтобы они попарно не пересекались. Обозначим их $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$.
Выбросив эти окрестности из отрезка $[a, b]$, получим конечный набор отрезков $I_1, \ldots, I_m$ (их количество не обязательно равно k). На каждом из этих отрезков функция непрерывна и, в силу теоремы Кантора, равномерно непрерывна.
Поэтому для каждого отрезка I_j найдется $\delta_j > 0$, такое, что для любой пары точек $x', x'' \in I_j$ условие $|x' - x''| < \delta_j$ влечет выполнение неравенства $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_m, \varepsilon)$.

Продолжение доказательства теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Пусть теперь $\Pi: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ с диаметром $d(\Pi) < \delta$. Рассмотрим сумму $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$. Разобьем ее на две суммы. В первую отнесем слагаемые, отвечающие тем отрезкам $[x_i, x_{i+1}]$, каждый из которых содержится в одном из отрезков I_j. Для этих отрезков имеем $\omega_i \leq \varepsilon$, и поэтому для соответствующей суммы справедливо неравенство

$$\sum{}' \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum{}' \Delta x_i \leq \varepsilon(b-a).$$

Продолжение доказательства теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Пусть теперь $\Pi: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ с диаметром $d(\Pi) < \delta$. Рассмотрим сумму $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$. Разобьем ее на две суммы. В первую отнесем слагаемые, отвечающие тем отрезкам $[x_i, x_{i+1}]$, каждый из которых содержится в одном из отрезков I_j. Для этих отрезков имеем $\omega_i \le \varepsilon$, и поэтому для соответствующей суммы справедливо неравенство

$$\sum\nolimits' \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum\nolimits' \Delta x_i \le \varepsilon (b - a).$$

Продолжение доказательства теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Во вторую сумму попадают слагаемые, отвечающие тем отрезкам $[x_i, x_{i+1}]$, каждый из которых имеет общие точки по крайней мере с одним из интервалов Δ_j. Оценим сумму длин этих отрезков.

Среди частичных отрезков, имеющих общие точки с Δ_j, могут быть такие, которые целиком содержатся в Δ_j. Сумма их длин не превосходит длины интервала Δ_j, которая, в свою очередь, не превосходит ε.

Кроме того, могут быть два отрезка, содержащие концы интервала Δ_j, сумма их длин не превосходит $2\delta \leq 2\varepsilon$.

Таким образом, сумма длин всех отрезков, имеющих общие точки с интервалами $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, не превосходит $3k\varepsilon$.

Продолжение доказательства теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Во вторую сумму попадают слагаемые, отвечающие тем отрезкам $[x_i, x_{i+1}]$, каждый из которых имеет общие точки по крайней мере с одним из интервалов Δ_j. Оценим сумму длин этих отрезков.

Среди частичных отрезков, имеющих общие точки с Δ_j, могут быть такие, которые целиком содержатся в Δ_j. Сумма их длин не превосходит длины интервала Δ_j, которая, в свою очередь, не превосходит ε.

Кроме того, могут быть два отрезка, содержащие концы интервала Δ_j, сумма их длин не превосходит $2\delta \leq 2\varepsilon$.

Таким образом, сумма длин всех отрезков, имеющих общие точки с интервалами $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, не превосходит $3k\varepsilon$.

Продолжение доказательства теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Во вторую сумму попадают слагаемые, отвечающие тем отрезкам $[x_i, x_{i+1}]$, каждый из которых имеет общие точки по крайней мере с одним из интервалов Δ_j. Оценим сумму длин этих отрезков.
Среди частичных отрезков, имеющих общие точки с Δ_j, могут быть такие, которые целиком содержатся в Δ_j. Сумма их длин не превосходит длины интервала Δ_j, которая, в свою очередь, не превосходит ε.
Кроме того, могут быть два отрезка, содержащие концы интервала Δ_j, сумма их длин не превосходит $2\delta \leq 2\varepsilon$.
Таким образом, сумма длин всех отрезков, имеющих общие точки с интервалами $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, не превосходит $3k\varepsilon$.

Продолжение доказательства теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Во вторую сумму попадают слагаемые, отвечающие тем отрезкам $[x_i, x_{i+1}]$, каждый из которых имеет общие точки по крайней мере с одним из интервалов Δ_j. Оценим сумму длин этих отрезков.
Среди частичных отрезков, имеющих общие точки с Δ_j, могут быть такие, которые целиком содержатся в Δ_j. Сумма их длин не превосходит длины интервала Δ_j, которая, в свою очередь, не превосходит ε.
Кроме того, могут быть два отрезка, содержащие концы интервала Δ_j, сумма их длин не превосходит $2\delta \leq 2\varepsilon$.
Таким образом, сумма длин всех отрезков, имеющих общие точки с интервалами $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, не превосходит $3k\varepsilon$.

Окончание доказательства теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Обозначим через Ω колебание функции f на отрезке $[a,b]$. Поскольку f ограничена, то $\Omega < \infty$ и $\omega_i \le \Omega$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Поэтому для второй суммы получаем следующую оценку:

$$\sum{}'' \omega_i \Delta x_i \le \Omega \sum{}'' \Delta x_i \le 3k\Omega\varepsilon.$$

Окончательно,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum{}' \omega_i \Delta x_i + \sum{}'' \omega_i \Delta x_i \le \varepsilon(b - a + 3k\Omega).$$

Отсюда, в силу критерия интегрируемости в терминах колебаний, вытекает справедливость теоремы. ∎

Окончание доказательства теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Обозначим через Ω колебание функции f на отрезке $[a, b]$.
Поскольку f ограничена, то $\Omega < \infty$ и
$\omega_i \le \Omega$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.
Поэтому для второй суммы получаем следующую оценку:

$$\sum\nolimits'' \omega_i \Delta x_i \le \Omega \sum\nolimits'' \Delta x_i \le 3k\Omega\varepsilon.$$

Окончательно,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum\nolimits' \omega_i \Delta x_i + \sum\nolimits'' \omega_i \Delta x_i \le \varepsilon(b - a + 3k\Omega).$$

Отсюда, в силу критерия интегрируемости в терминах колебаний, вытекает справедливость теоремы.

Окончание доказательства теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Обозначим через Ω колебание функции f на отрезке $[a, b]$.
Поскольку f ограничена, то $\Omega < \infty$ и
$\omega_i \leq \Omega$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$.
Поэтому для второй суммы получаем следующую оценку:

$$\sum{}'' \omega_i \Delta x_i \leq \Omega \sum{}'' \Delta x_i \leq 3k\Omega\varepsilon.$$

Окончательно,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum{}' \omega_i \Delta x_i + \sum{}'' \omega_i \Delta x_i \leq \varepsilon(b - a + 3k\Omega).$$

Отсюда, в силу критерия интегрируемости в терминах колебаний, вытекает справедливость теоремы.

Окончание доказательства теоремы об интегрируемости функции, имеющей конечное число точек разрыва.

Обозначим через Ω колебание функции f на отрезке $[a, b]$. Поскольку f ограничена, то $\Omega < \infty$ и $\omega_i \le \Omega$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$.
Поэтому для второй суммы получаем следующую оценку:

$$\sum\nolimits'' \omega_i \Delta x_i \le \Omega \sum\nolimits'' \Delta x_i \le 3k\Omega\varepsilon.$$

Окончательно,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum\nolimits' \omega_i \Delta x_i + \sum\nolimits'' \omega_i \Delta x_i \le \varepsilon(b - a + 3k\Omega).$$

Отсюда, в силу критерия интегрируемости в терминах колебаний, вытекает справедливость теоремы.

Доказательство свойства 1.

Действительно, для произвольного разбиения П через ω_i обозначим колебание функции f на $[x_i, x_{i+1}]$, а через $\overline{\omega}_i$ – колебание $|f|$ на этом отрезке.

Тогда из неравенства

$$\big||f(x')| - |f(x'')|\big| \le |f(x") - f(x'')| \ \ (x', x'' \in [x_i, x_{i+1}])$$

следует, что $\overline{\omega}_i \le \omega_i$. Таким образом,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overline{\omega}_i \Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

По условию, в силу критерия интегрируемости Римана, правая часть стремится к нулю при стремлении к нулю диаметра разбиения. Значит, стремится к нулю и левая часть, и поэтому функция $|f|$ интегрируема.

Доказательство свойства 1.

Действительно, для произвольного разбиения П через ω_i обозначим колебание функции f на $[x_i, x_{i+1}]$, а через $\overline{\omega}_i$ – колебание $|f|$ на этом отрезке.
Тогда из неравенства

$$\Big||f(x')| - |f(x'')|\Big| \le |f(x") - f(x'')| \ \ \big(x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]\big)$$

следует, что $\overline{\omega}_i \le \omega_i$. Таким образом,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overline{\omega}_i \Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i .$$

По условию, в силу критерия интегрируемости Римана, правая часть стремится к нулю при стремлении к нулю диаметра разбиения. Значит, стремится к нулю и левая часть, и поэтому функция $|f|$ интегрируема.

Доказательство свойства 1.

Действительно, для произвольного разбиения П через ω_i обозначим колебание функции f на $[x_i, x_{i+1}]$, а через $\overline{\omega}_i$ – колебание $|f|$ на этом отрезке.
Тогда из неравенства

$$\big||f(x')| - |f(x'')|\big| \leq |f(x") - f(x'')| \ \left(x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]\right)$$

следует, что $\overline{\omega}_i \leq \omega_i$. Таким образом,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overline{\omega}_i \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i .$$

По условию, в силу критерия интегрируемости Римана, правая часть стремится к нулю при стремлении к нулю диаметра разбиения. Значит, стремится к нулю и левая часть, и поэтому функция $|f|$ интегрируема.

Доказательство свойства 1.

Действительно, для произвольного разбиения П через ω_i обозначим колебание функции f на $[x_i, x_{i+1}]$, а через $\overline{\omega}_i$ – колебание $|f|$ на этом отрезке.

Тогда из неравенства

$$\big||f(x')| - |f(x'')|\big| \leq |f(x") - f(x'')| \;\; \left(x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]\right)$$

следует, что $\overline{\omega}_i \leq \omega_i$. Таким образом,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overline{\omega}_i \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

По условию, в силу критерия интегрируемости Римана, правая часть стремится к нулю при стремлении к нулю диаметра разбиения. Значит, стремится к нулю и левая часть, и поэтому функция $|f|$ интегрируема. ∎

Доказательство свостава 2.

Действительно, пусть $\varphi = \alpha f + \beta g$. Тогда для соответствующих интегральных сумм справедливо равенство

$$\sigma_\varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i = \alpha\sigma_f + \beta\sigma_g.$$

По условию два слагаемых справа имеют предел при стремлении к нулю диаметра разбиения. Поэтому существует конечный предел интегральных сумм σ_φ, и тем самым доказана интегрируемость функции φ.

Доказательство своства 2.

Действительно, пусть $\varphi = \alpha f + \beta g$. Тогда для соответствующих интегральных сумм справедливо равенство

$$\sigma_\varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i = \alpha\sigma_f + \beta\sigma_g.$$

По условию два слагаемых справа имеют предел при стремлении к нулю диаметра разбиения. Поэтому существует конечный предел интегральных сумм σ_φ, и тем самым доказана интегрируемость функции φ. ◼

Доказательство своства 2.

Действительно, пусть $\varphi = \alpha f + \beta g$. Тогда для соответствующих интегральных сумм справедливо равенство

$$\sigma_\varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i = \alpha\sigma_f + \beta\sigma_g.$$

По условию два слагаемых справа имеют предел при стремлении к нулю диаметра разбиения. Поэтому существует конечный предел интегральных сумм σ_φ, и тем самым доказана интегрируемость функции φ. ∎

Доказательство свойства 3.

Действительно, обозначим $\varphi = f \cdot g$ и оценим колебание функции φ. Для любых точек x', x'' имеем

$$\varphi(x') - \varphi(x'') = f(x')g(x') - f(x'')g(x'') =$$
$$= f(x')[g(x') - g(x'')] + g(x'')[f(x') - f(x'')].$$

По условию функции f и g интегрируемы, а значит, ограничены. Поэтому найдется такая постоянная M, что для всех $x \in [a, b]$ справедливы неравенства $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$. Отсюда получаем

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq M\left[|g(x') - g(x'')| + |f(x') - f(x'')|\right].$$

Из этого неравенства следует, что для любого разбиения Π будет $\omega_i(\varphi) \leq M[\omega_i(f) + \omega_i(g)]$. Дальнейшее завершение доказательства сразу следует из критерия интегрируемости Римана. ∎

Доказательство свойства 3.

Действительно, обозначим $\varphi = f \cdot g$ и оценим колебание функции φ. Для любых точек x', x'' имеем

$$\varphi(x') - \varphi(x'') = f(x')g(x') - f(x'')g(x'') =$$
$$= f(x')[g(x') - g(x'')] + g(x'')[f(x') - f(x'')].$$

По условию функции f и g интегрируемы, а значит, ограничены. Поэтому найдется такая постоянная M, что для всех $x \in [a, b]$ справедливы неравенства $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$. Отсюда получаем

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq M\left[|g(x') - g(x'')| + |f(x') - f(x'')|\right].$$

Из этого неравенства следует, что для любого разбиения Π будет $\omega_i(\varphi) \leq M[\omega_i(f) + \omega_i(g)]$. Дальнейшее завершение доказательства сразу следует из критерия интегрируемости Римана. ■

Доказательство свойства 3.

Действительно, обозначим $\varphi = f \cdot g$ и оценим колебание функции φ. Для любых точек x', x'' имеем

$$\varphi(x') - \varphi(x'') = f(x')g(x') - f(x'')g(x'') =$$
$$= f(x')[g(x') - g(x'')] + g(x'')[f(x') - f(x'')].$$

По условию функции f и g интегрируемы, а значит, ограничены. Поэтому найдется такая постоянная M, что для всех $x \in [a, b]$ справедливы неравенства $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$. Отсюда получаем

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq M\left[|g(x') - g(x'')| + |f(x') - f(x'')|\right].$$

Из этого неравенства следует, что для любого разбиения Π будет $\omega_i(\varphi) \leq M[\omega_i(f) + \omega_i(g)]$. Дальнейшее завершение доказательства сразу следует из критерия интегрируемости Римана.

Доказательство свойства 3.

Действительно, обозначим $\varphi = f \cdot g$ и оценим колебание функции φ. Для любых точек x', x'' имеем

$$\varphi(x') - \varphi(x'') = f(x')g(x') - f(x'')g(x'') =$$
$$= f(x')[g(x') - g(x'')] + g(x'')[f(x') - f(x'')].$$

По условию функции f и g интегрируемы, а значит, ограничены. Поэтому найдется такая постоянная M, что для всех $x \in [a, b]$ справедливы неравенства $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$. Отсюда получаем

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq M\left[|g(x') - g(x'')| + |f(x') - f(x'')|\right].$$

Из этого неравенства следует, что для любого разбиения Π будет $\omega_i(\varphi) \leq M[\omega_i(f) + \omega_i(g)]$. Дальнейшее завершение доказательства сразу следует из критерия интегрируемости Римана. ■

Доказательство свойства 3.

Действительно, обозначим $\varphi = f \cdot g$ и оценим колебание функции φ. Для любых точек x', x'' имеем

$$\varphi(x') - \varphi(x'') = f(x')g(x') - f(x'')g(x'') =$$
$$= f(x')[g(x') - g(x'')] + g(x'')[f(x') - f(x'')].$$

По условию функции f и g интегрируемы, а значит, ограничены. Поэтому найдется такая постоянная M, что для всех $x \in [a, b]$ справедливы неравенства $|f(x)| \le M$, $|g(x)| \le M$. Отсюда получаем

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le M\left[|g(x') - g(x'')| + |f(x') - f(x'')|\right].$$

Из этого неравенства следует, что для любого разбиения Π будет $\omega_i(\varphi) \le M[\omega_i(f) + \omega_i(g)]$. Дальнейшее завершение доказательства сразу следует из критерия интегрируемости Римана. ■

Доказательство свойства 4.

Пусть f интегрируема на $[a, b]$ и $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь критерием интегрируемости Римана, найдем такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π, диаметр которого меньше, чем δ, справедливо неравенство $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. Разобьем теперь отрезок $[\alpha, \beta]$ произвольным образом на части, длины которых меньше, чем δ. Пусть это будут точки $\alpha = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_m = \beta$. Рассмотрим соответствующую сумму $\sum\limits_{j=0}^{m-1} \omega'_j \Delta \xi_j$, где ω'_j – колебание функции на $[\xi_j, \xi_{j+1}]$. Оставшиеся части $[a, \alpha]$ и $[\beta, b]$ разобьем произвольным образом на отрезки так, чтобы их длины также были меньшими, чем δ. Тогда получим разбиение всего отрезка $[a, b]$, диаметр которого меньше, чем δ. Поэтому $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

Доказательство свойства 4.

Пусть f интегрируема на $[a, b]$ и $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь критерием интегрируемости Римана, найдем такое $\delta > 0$, что для любого разбиения П, диаметр которого меньше, чем δ, справедливо неравенство $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. Разобьем теперь отрезок $[\alpha, \beta]$ произвольным образом на части, длины которых меньше, чем δ. Пусть это будут точки $\alpha = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_m = \beta$. Рассмотрим соответствующую сумму $\sum\limits_{j=0}^{m-1} \omega'_j \Delta \xi_j$, где ω'_j – колебание функции на $[\xi_j, \xi_{j+1}]$. Оставшиеся части $[a, \alpha]$ и $[\beta, b]$ разобьем произвольным образом на отрезки так, чтобы их длины также были меньшими, чем δ. Тогда получим разбиение всего отрезка $[a, b]$, диаметр которого меньше, чем δ. Поэтому $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

Доказательство свойства 4.

Пусть f интегрируема на $[a, b]$ и $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь критерием интегрируемости Римана, найдем такое $\delta > 0$, что для любого разбиения П, диаметр которого меньше, чем δ, справедливо неравенство $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. Разобьем теперь отрезок $[\alpha, \beta]$ произвольным образом на части, длины которых меньше, чем δ. Пусть это будут точки $\alpha = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_m = \beta$. Рассмотрим соответствующую сумму $\sum\limits_{j=0}^{m-1} \omega'_j \Delta \xi_j$, где ω'_j – колебание функции на $[\xi_j, \xi_{j+1}]$.

Оставшиеся части $[a, \alpha]$ и $[\beta, b]$ разобьем произвольным образом на отрезки так, чтобы их длины также были меньшими, чем δ. Тогда получим разбиение всего отрезка $[a, b]$, диаметр которого меньше, чем δ. Поэтому $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

Доказательство свойства 4.

Пусть f интегрируема на $[a, b]$ и $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь критерием интегрируемости Римана, найдем такое $\delta > 0$, что для любого разбиения П, диаметр которого меньше, чем δ, справедливо неравенство $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. Разобьем теперь отрезок $[\alpha, \beta]$ произвольным образом на части, длины которых меньше, чем δ. Пусть это будут точки $\alpha = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_m = \beta$. Рассмотрим соответствующую сумму $\sum\limits_{j=0}^{m-1} \omega'_j \Delta \xi_j$, где ω'_j – колебание функции на $[\xi_j, \xi_{j+1}]$. Оставшиеся части $[a, \alpha]$ и $[\beta, b]$ разобьем произвольным образом на отрезки так, чтобы их длины также были меньшими, чем δ. Тогда получим разбиение всего отрезка $[a, b]$, диаметр которого меньше, чем δ. Поэтому $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

Продолжение доказательства свойства 4.

Применяя теперь неравенство $\sum\limits_{j=0}^{m-1} \omega_j' \Delta\xi_j \le \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$, справедливое по той причине, что каждое слагаемое левой суммы входит также и в правую сумму, получаем $\sum\limits_{j=0}^{m-1} \omega_j' \Delta\xi_j < \varepsilon$. Отсюда, в силу критерия интегрируемости Римана, следует интегрируемость f на $[\alpha, \beta]$.

Продолжение доказательства свойства 4.

Пусть теперь $a < c < b$ и функция f интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$. Покажем, что f интегрируема на всем $[a, b]$.
Возьмем произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и рассмотрим соответствующую сумму $J = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$. Пусть $c \in [x_j, x_{j+1}]$.
Тогда сумму J разобьем следующим образом:

$$J = \sum_{i=0}^{j-1} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i=j+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i + \omega_j \Delta x_j \equiv J' + J'' + \omega_j \Delta x_j.$$

Ясно, что при стремлении к нулю диаметра разбиения обе суммы J' и J'' стремятся к нулю (в силу интегрируемости функции на $[a, c]$ и $[c, b]$).

Продолжение доказательства свойства 4.

Пусть теперь $a < c < b$ и функция f интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$. Покажем, что f интегрируема на всем $[a, b]$.
Возьмем произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и рассмотрим соответствующую сумму $J = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$. Пусть $c \in [x_j, x_{j+1}]$.
Тогда сумму J разобьем следующим образом:

$$J = \sum_{i=0}^{j-1} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i=j+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i + \omega_j \Delta x_j \equiv J' + J'' + \omega_j \Delta x_j.$$

Ясно, что при стремлении к нулю диаметра разбиения обе суммы J' и J'' стремятся к нулю (в силу интегрируемости функции на $[a, c]$ и $[c, b]$).

Продолжение доказательства свойства 4.

Пусть теперь $a < c < b$ и функция f интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$. Покажем, что f интегрируема на всем $[a, b]$.
Возьмем произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и рассмотрим соответствующую сумму $J = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$. Пусть $c \in [x_j, x_{j+1}]$.
Тогда сумму J разобьем следующим образом:

$$J = \sum_{i=0}^{j-1} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i=j+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i + \omega_j \Delta x_j \equiv J' + J'' + \omega_j \Delta x_j.$$

Ясно, что при стремлении к нулю диаметра разбиения обе суммы J' и J'' стремятся к нулю (в силу интегрируемости функции на $[a, c]$ и $[c, b]$).

Продолжение доказательства свойства 4.

Пусть теперь $a < c < b$ и функция f интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$. Покажем, что f интегрируема на всем $[a, b]$.
Возьмем произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и рассмотрим соответствующую сумму $J = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$. Пусть $c \in [x_j, x_{j+1}]$.
Тогда сумму J разобьем следующим образом:

$$J = \sum_{i=0}^{j-1} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i=j+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i + \omega_j \Delta x_j \equiv J' + J'' + \omega_j \Delta x_j.$$

Ясно, что при стремлении к нулю диаметра разбиения обе суммы J' и J'' стремятся к нулю (в силу интегрируемости функции на $[a, c]$ и $[c, b]$).

Окончание доказательства свойства 4.

Далее, поскольку f интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то она ограничена на каждом из этих отрезков, а значит, и на всем $[a, b]$.

Пусть $|f(x)| \leq M$ $(x \in [a, b])$. Тогда, очевидно, $\omega_j \leq 2M$, и поэтому $\omega_j \Delta x_j \leq 2M \cdot d(\Pi)$.

Таким образом, для функции f выполнены условия критерия интегрируемости Римана, так что она интегрируема на $[a, b]$.

Окончание доказательства свойства 4.

Далее, поскольку f интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то она ограничена на каждом из этих отрезков, а значит, и на всем $[a, b]$.

Пусть $|f(x)| \leq M$ $(x \in [a, b])$. Тогда, очевидно, $\omega_j \leq 2M$, и поэтому $\omega_j \Delta x_j \leq 2M \cdot d(\Pi)$.

Таким образом, для функции f выполнены условия критерия интегрируемости Римана, так что она интегрируема на $[a, b]$.

Окончание доказательства свойства 4.

Далее, поскольку f интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то она ограничена на каждом из этих отрезков, а значит, и на всем $[a, b]$.

Пусть $|f(x)| \leq M$ $(x \in [a, b])$. Тогда, очевидно, $\omega_j \leq 2M$, и поэтому $\omega_j \Delta x_j \leq 2M \cdot d(\Pi)$.

Таким образом, для функции f выполнены условия критерия интегрируемости Римана, так что она интегрируема на $[a, b]$.

$\blacksquare$

Доказательство свойства 5.

Действительно, если изменить значение функции в m точках, то в сумме $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$ могут измениться не более чем $2m$ слагаемых. Но каждое из этих слагаемых стремится к нулю при стремлении к нулю диаметра разбиения, так что и новая сумма $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i' \Delta x_i$ также будет стремиться к нулю, т. е. функция останется интегрируемой.

Ясно также, что величина интеграла не изменится, поскольку при составлении интегральных сумм σ промежуточные точки ξ_i можно выбирать так, чтобы они не совпадали с теми точками, в которых изменялись значения функции.

Доказательство свойства 5.

Действительно, если изменить значение функции в m точках, то в сумме $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$ могут измениться не более чем $2m$ слагаемых. Но каждое из этих слагаемых стремится к нулю при стремлении к нулю диаметра разбиения, так что и новая сумма $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i' \Delta x_i$ также будет стремиться к нулю, т. е. функция останется интегрируемой.

Ясно также, что величина интеграла не изменится, поскольку при составлении интегральных сумм σ промежуточные точки ξ_i можно выбирать так, чтобы они не совпадали с теми точками, в которых изменялись значения функции.

Доказательство свойства 5.

Действительно, если изменить значение функции в m точках, то в сумме $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$ могут измениться не более чем $2m$ слагаемых. Но каждое из этих слагаемых стремится к нулю при стремлении к нулю диаметра разбиения, так что и новая сумма $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i' \Delta x_i$ также будет стремиться к нулю, т. е. функция останется интегрируемой.

Ясно также, что величина интеграла не изменится, поскольку при составлении интегральных сумм σ промежуточные точки ξ_i можно выбирать так, чтобы они не совпадали с теми точками, в которых изменялись значения функции. ∎

Доказательство теоремы из свойства 2.

Пусть, например, $a < c < b$ и функция f интегрируема на $[a, b]$. Тогда, по доказанному выше свойству 4, она интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$.

Возьмем произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, такое, что c является одной из точек деления. Выберем промежуточные точки ξ_i и рассмотрим интегральную сумму $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Если $c = x_j$, то эту сумму разобьем на две:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{j-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=j}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

При $d(\Pi) \to 0$ первая сумма справа стремится к $\int\limits_a^c f(x)dx$, вторая – к $\int\limits_c^b f(x)dx$, а сумма σ стремится к $\int\limits_a^b f(x)dx$. Переходя к пределу при $d(\Pi) \to 0$, получим требуемое равенство.

Доказательство теоремы из свойства 2.

Пусть, например, $a < c < b$ и функция f интегрируема на $[a, b]$. Тогда, по доказанному выше свойству 4, она интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$.

Возьмем произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, такое, что c является одной из точек деления. Выберем промежуточные точки ξ_i и рассмотрим интегральную сумму $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Если $c = x_j$, то эту сумму разобьем на две:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{j-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=j}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

При $d(\Pi) \to 0$ первая сумма справа стремится к $\int\limits_a^c f(x)dx$, вторая – к $\int\limits_c^b f(x)dx$, а сумма σ стремится к $\int\limits_a^b f(x)dx$. Переходя к пределу при $d(\Pi) \to 0$, получим требуемое равенство.

Доказательство теоремы из свойства 2.

Пусть, например, $a < c < b$ и функция f интегрируема на $[a, b]$. Тогда, по доказанному выше свойству 4, она интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$.

Возьмем произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, такое, что c является одной из точек деления. Выберем промежуточные точки ξ_i и рассмотрим интегральную сумму $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Если $c = x_j$, то эту сумму разобьем на две:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{j-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=j}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

При $d(\Pi) \to 0$ первая сумма справа стремится к $\int\limits_a^c f(x)dx$, вторая – к $\int\limits_c^b f(x)dx$, а сумма σ стремится к $\int\limits_a^b f(x)dx$. Переходя к пределу при $d(\Pi) \to 0$, получим требуемое равенство.

Доказательство теоремы из свойства 2.

Пусть, например, $a < c < b$ и функция f интегрируема на $[a, b]$. Тогда, по доказанному выше свойству 4, она интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$.

Возьмем произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, такое, что c является одной из точек деления. Выберем промежуточные точки ξ_i и рассмотрим интегральную сумму $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Если $c = x_j$, то эту сумму разобьем на две:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{j-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=j}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

При $d(\Pi) \to 0$ первая сумма справа стремится к $\int\limits_a^c f(x)dx$, вторая – к $\int\limits_c^b f(x)dx$, а сумма σ стремится к $\int\limits_a^b f(x)dx$. Переходя к пределу при $d(\Pi) \to 0$, получим требуемое равенство.

Окончание доказательства теоремы из свойства 2.

Пусть теперь $c < a < b$. Тогда, по уже доказанному,

$$\int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_c^a f(x)dx + \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Отсюда следует

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_c^b f(x)dx - \int\limits_c^a f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

и теорема доказана полностью.

Доказательство свойства 3.

Интегрируемость модуля интегрируемой функции доказана выше. Докажем неравенство.

Для этого выберем произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда для интегральных сумм будем иметь следующее неравенство:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\Delta x_i.$$

При стремлении к нулю диаметра разбиения интегральная сумма под знаком модуля в левой части стремится к $\int\limits_a^b f(x)dx$, а сумма справа стремится к $\int\limits_a^b |f(x)|dx$. Переходя к пределу при $d(\Pi) \to 0$, получаем требуемое неравенство для интегралов.

Доказательство свойства 3.

Интегрируемость модуля интегрируемой функции доказана выше. Докажем неравенство.
Для этого выберем произвольное разбиение отрезка $[a, b]$.
Тогда для интегральных сумм будем иметь следующее неравенство:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\Delta x_i.$$

При стремлении к нулю диаметра разбиения интегральная сумма под знаком модуля в левой части стремится к $\int\limits_a^b f(x)dx$, а сумма справа стремится к $\int\limits_a^b |f(x)|dx$. Переходя к пределу при $d(\Pi) \to 0$, получаем требуемое неравенство для интегралов.

Доказательство свойства 3.

Интегрируемость модуля интегрируемой функции доказана выше. Докажем неравенство.

Для этого выберем произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда для интегральных сумм будем иметь следующее неравенство:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\Delta x_i.$$

При стремлении к нулю диаметра разбиения интегральная сумма под знаком модуля в левой части стремится к $\int\limits_a^b f(x)dx$, а сумма справа стремится к $\int\limits_a^b |f(x)|dx$. Переходя к пределу при $d(\Pi) \to 0$, получаем требуемое неравенство для интегралов.

Доказательство свойства 3.

Интегрируемость модуля интегрируемой функции доказана выше. Докажем неравенство.
Для этого выберем произвольное разбиение отрезка $[a, b]$.
Тогда для интегральных сумм будем иметь следующее неравенство:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\Delta x_i.$$

При стремлении к нулю диаметра разбиения интегральная сумма под знаком модуля в левой части стремится к $\int\limits_a^b f(x)dx$, а сумма справа стремится к $\int\limits_a^b |f(x)|dx$. Переходя к пределу при $d(\Pi) \to 0$, получаем требуемое неравенство для интегралов.

Доказательство свойства 4.

Возьмем произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и выберем промежуточные точки ξ_i. Тогда $f(\xi_i) \leq g(\xi_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Умножая эти неравенства на $\Delta x_i > 0$ и складывая, получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Отсюда, устремляя к нулю диаметр разбиения, получаем требуемое неравенство.

Доказательство свойства 4.

Возьмем произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и выберем промежуточные точки ξ_i. Тогда $f(\xi_i) \le g(\xi_i)$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$. Умножая эти неравенства на $\Delta x_i > 0$ и складывая, получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Отсюда, устремляя к нулю диаметр разбиения, получаем требуемое неравенство. ∎

Доказательство следствия 2.

В силу критерия Лебега, найдется точка $x_0 \in [a, b]$, в которой функция непрерывна.

Поскольку $f(x_0) > 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$. Выберем отрезок $[\alpha, \beta] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$, $a \le \alpha < \beta \le b$. Тогда, в силу свойства аддитивности интеграла, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx.$$

Первый и третий интегралы справа неотрицательны в силу следствия, а для второго интеграла, учитывая неравенство $f(x) \ge \frac{1}{2}f(x_0)$, из свойства монотонности интеграла получим

Доказательство следствия 2.

В силу критерия Лебега, найдется точка $x_0 \in [a, b]$, в которой функция непрерывна.
Поскольку $f(x_0) > 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$. Выберем отрезок $[\alpha, \beta] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$, $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Тогда, в силу свойства аддитивности интеграла, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx.$$

Первый и третий интегралы справа неотрицательны в силу следствия, а для второго интеграла, учитывая неравенство $f(x) \geq \frac{1}{2}f(x_0)$, из свойства монотонности интеграла получим

Доказательство следствия 2.

В силу критерия Лебега, найдется точка $x_0 \in [a, b]$, в которой функция непрерывна.
Поскольку $f(x_0) > 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$. Выберем отрезок $[\alpha, \beta] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$, $a \le \alpha < \beta \le b$. Тогда, в силу свойства аддитивности интеграла, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx.$$

Первый и третий интегралы справа неотрицательны в силу следствия, а для второго интеграла, учитывая неравенство $f(x) \ge \frac{1}{2}f(x_0)$, из свойства монотонности интеграла получим

Окончание доказательства следствия 2.

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f(x_0)dx = \frac{1}{2} f(x_0)(\beta - \alpha) > 0.$$

Таким образом, $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx > 0$. ■

Доказательство следствия 4.

Пусть m и M соответственно нижняя и верхняя грани функции f на отрезке $[a, b]$, они достигаются в силу первой теоремы Вейерштрасса. По уже доказанному, найдется точка $\mu \in [m, M]$, такая, что $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. По теореме Больцано – Коши о промежуточном значении, найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = \mu$.

Доказательство следствия 4.

Пусть m и M соответственно нижняя и верхняя грани функции f на отрезке $[a, b]$, они достигаются в силу первой теоремы Вейерштрасса. По уже доказанному, найдется точка $\mu \in [m, M]$, такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. По теореме Больцано – Коши о промежуточном значении, найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = \mu$.

Доказательство следствия 4.

Пусть m и M соответственно нижняя и верхняя грани функции f на отрезке $[a, b]$, они достигаются в силу первой теоремы Вейерштрасса. По уже доказанному, найдется точка $\mu \in [m, M]$, такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. По теореме Больцано – Коши о промежуточном значении, найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = \mu$. ■

Доказательство первой теоремы о среднем.

Можем считать, что $a < b$, т. к. если поменять местами a и b, то знаки обеих частей равенства поменяются на противоположные.

Пусть $g(x) \geq 0$. Неравенство $m \leq f(x) \leq M$ умножим на $g(x)$ и проинтегрируем от a до b. В силу монотонности и линейности интеграла получим

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то из этого неравенства видно, что утверждение теоремы справедливо при любом μ.

Доказательство первой теоремы о среднем.

Можем считать, что $a < b$, т. к. если поменять местами a и b, то знаки обеих частей равенства поменяются на противоположные.

Пусть $g(x) \geq 0$. Неравенство $m \leq f(x) \leq M$ умножим на $g(x)$ и проинтегрируем от a до b. В силу монотонности и линейности интеграла получим

$$m \int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то из этого неравенства видно, что утверждение теоремы справедливо при любом μ.

Доказательство первой теоремы о среднем.

Можем считать, что $a < b$, т. к. если поменять местами a и b, то знаки обеих частей равенства поменяются на противоположные.
Пусть $g(x) \geq 0$. Неравенство $m \leq f(x) \leq M$ умножим на $g(x)$ и проинтегрируем от a до b. В силу монотонности и линейности интеграла получим

$$m \int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то из этого неравенства видно, что утверждение теоремы справедливо при любом μ.

Окончание доказательства первой теоремы о среднем.

Если же $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$, то положим

$$\mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}.$$

Тогда из полученного выше неравенства следует, что $m \leq \mu \leq M$, и теорема доказана.

Случай $g(x) \leq 0$ рассматривается аналогично.

Окончание доказательства первой теоремы о среднем.

Если же $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$, то положим

$$\mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}.$$

Тогда из полученного выше неравенства следует, что $m \le \mu \le M$, и теорема доказана.

Случай $g(x) \le 0$ рассматривается аналогично.

Доказательство леммы.

Пусть $x', x'' \in [a, b]$, $x' < x''$. Тогда

$$G(x'') - G(x') = \int_a^{x''} g(t)dt - \int_a^{x'} g(t)dt =$$

$$= \int_a^{x'} g(t)dt + \int_{x'}^{x''} g(t)dt - \int_a^{x'} g(t)dt = \int_{x'}^{x''} g(t)dt.$$

Поскольку g интегрируема, то она ограничена, т. е. существует такое M, что $|g(t)| \leq M$ для всех $t \in [a, b]$. Поэтому получаем

$$\left|G(x'') - G(x')\right| \leq \int_{x'}^{x''} |g(t)|dt \leq M(x'' - x').$$

Отсюда сразу следует, что функция G равномерно непрерывна на $[a, b]$. ■

Доказательство леммы.

Пусть $x', x'' \in [a, b]$, $x' < x''$. Тогда

$$G(x'') - G(x') = \int_a^{x''} g(t)dt - \int_a^{x'} g(t)dt =$$

$$= \int_a^{x'} g(t)dt + \int_{x'}^{x''} g(t)dt - \int_a^{x'} g(t)dt = \int_{x'}^{x''} g(t)dt.$$

Поскольку g интегрируема, то она ограничена, т. е. существует такое M, что $|g(t)| \leq M$ для всех $t \in [a, b]$. Поэтому получаем

$$|G(x'') - G(x')| \leq \int_{x'}^{x''} |g(t)|dt \leq M(x'' - x').$$

Отсюда сразу следует, что функция G равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство леммы.

Пусть $x', x'' \in [a, b]$, $x' < x''$. Тогда

$$G(x'') - G(x') = \int\limits_a^{x''} g(t)dt - \int\limits_a^{x'} g(t)dt =$$

$$= \int\limits_a^{x'} g(t)dt + \int\limits_{x'}^{x''} g(t)dt - \int\limits_a^{x'} g(t)dt = \int_{x'}^{x''} g(t)dt.$$

Поскольку g интегрируема, то она ограничена, т. е. существует такое M, что $|g(t)| \leq M$ для всех $t \in [a, b]$. Поэтому получаем

$$|G(x'') - G(x')| \leq \int\limits_{x'}^{x''} |g(t)|dt \leq M(x'' - x').$$

Отсюда сразу следует, что функция G равномерно непрерывна на $[a, b]$. ■

Доказательство леммы.

Пусть $x', x'' \in [a, b]$, $x' < x''$. Тогда

$$G(x'') - G(x') = \int\limits_a^{x''} g(t)dt - \int\limits_a^{x'} g(t)dt =$$

$$= \int\limits_a^{x'} g(t)dt + \int\limits_{x'}^{x''} g(t)dt - \int\limits_a^{x'} g(t)dt = \int_{x'}^{x''} g(t)dt.$$

Поскольку g интегрируема, то она ограничена, т. е. существует такое M, что $|g(t)| \le M$ для всех $t \in [a, b]$. Поэтому получаем

$$\left|G(x'') - G(x')\right| \le \int\limits_{x'}^{x''} |g(t)|dt \le M(x'' - x').$$

Отсюда сразу следует, что функция G равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство леммы.

Пусть $x', x'' \in [a, b]$, $x' < x''$. Тогда

$$G(x'') - G(x') = \int_a^{x''} g(t)dt - \int_a^{x'} g(t)dt =$$

$$= \int_a^{x'} g(t)dt + \int_{x'}^{x''} g(t)dt - \int_a^{x'} g(t)dt = \int_{x'}^{x''} g(t)dt.$$

Поскольку g интегрируема, то она ограничена, т. е. существует такое M, что $|g(t)| \le M$ для всех $t \in [a, b]$. Поэтому получаем

$$\left|G(x'') - G(x')\right| \le \int_{x'}^{x''} |g(t)|dt \le M(x'' - x').$$

Отсюда сразу следует, что функция G равномерно непрерывна на $[a, b]$. ■

Доказательство второй теоремы о среднем.

Сначала предположим, что f убывает на $[a, b]$ и неотрицательна. Возьмем произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$. Тогда, по свойству аддитивности интеграла,

$$I \equiv \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)]g(x)dx \equiv I' + \rho.$$

Для оценки суммы ρ воспользуемся тем, что интегрируемая функция g ограничена, т. е. существует такое M, что $|g(x)| \le M, \ x \in [a, b]$.

Доказательство второй теоремы о среднем.

Сначала предположим, что f убывает на $[a,b]$ и неотрицательна. Возьмем произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a,b]$. Тогда, по свойству аддитивности интеграла,

$$I \equiv \int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)]g(x)dx \equiv I' + \rho.$$

Для оценки суммы ρ воспользуемся тем, что интегрируемая функция g ограничена, т. е. существует такое M, что $|g(x)| \leq M, \ x \in [a,b]$.

Доказательство второй теоремы о среднем.

Сначала предположим, что f убывает на $[a,b]$ и неотрицательна. Возьмем произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a,b]$. Тогда, по свойству аддитивности интеграла,

$$I \equiv \int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)]g(x)dx \equiv I' + \rho.$$

Для оценки суммы ρ воспользуемся тем, что интегрируемая функция g ограничена, т. е. существует такое M, что $|g(x)| \le M, \ x \in [a,b]$.

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Тогда получим

$$|\rho| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)||g(x)|dx \leq M \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i,$$

где ω_i – колебания функции f на $[x_i, x_{i+1}]$. Правая часть стремится к нулю при стремлении к нулю диаметра разбиения в силу критерия интегрируемости Римана. Следовательно, сумма I' стремится к интегралу I. Оценим I'.

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Тогда получим

$$|\rho| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)||g(x)|dx \leq M \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i,$$

где ω_i – колебания функции f на $[x_i, x_{i+1}]$. Правая часть стремится к нулю при стремлении к нулю диаметра разбиения в силу критерия интегрируемости Римана. Следовательно, сумма I' стремится к интегралу I. Оценим I'.

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Для этого обозначим $G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$. Получим

$$I' = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left[G(x_{i+1}) - G(x_i)\right] = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})G(x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)G(x_i) =$$

$$= f(x_{n-1})G(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right]G(x_i).$$

Мы воспользовались равенством $G(x_0) = G(a) = 0$.

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Для этого обозначим $G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$. Получим

$$I' = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left[G(x_{i+1}) - G(x_i)\right] = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})G(x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)G(x_i) =$$

$$= f(x_{n-1})G(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right]G(x_i).$$

Мы воспользовались равенством $G(x_0) = G(a) = 0$.

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Для этого обозначим $G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$. Получим

$$I' = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left[G(x_{i+1}) - G(x_i)\right] = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})G(x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)G(x_i) =$$

$$= f(x_{n-1})G(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right] G(x_i).$$

Мы воспользовались равенством $G(x_0) = G(a) = 0$.

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Обозначим через L и U соответственно нижнюю и верхнюю грани функции G на $[a, b]$. Поскольку, в силу леммы, функция G непрерывна на $[a, b]$, то они существуют в силу первой теоремы Вейерштрасса. Учитывая также, что функция f, по предположению, неотрицательна и монотонно убывающая, т. е. $f(x_{i-1}) - f(x_i) \geq 0$, получаем следующее неравенство:

$$L\left[f(x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i-1}) - f(x_i)]\right] \leq$$

$$\leq I' \leq U\left[f(x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i-1}) - f(x_i)]\right].$$

При этом мы использовали неравенство $L \leq G(x_i) \leq U$.

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Обозначим через L и U соответственно нижнюю и верхнюю грани функции G на $[a, b]$. Поскольку, в силу леммы, функция G непрерывна на $[a, b]$, то они существуют в силу первой теоремы Вейерштрасса. Учитывая также, что функция f, по предположению, неотрицательна и монотонно убывающая, т. е. $f(x_{i-1}) - f(x_i) \geq 0$, получаем следующее неравенство:

$$L\left[f(x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i-1}) - f(x_i)]\right] \leq$$

$$\leq I' \leq U\left[f(x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i-1}) - f(x_i)]\right].$$

При этом мы использовали неравенство $L \leq G(x_i) \leq U$.

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Поскольку, как легко видеть, сумма в квадратных скобках равна $f(x_0) = f(a)$, то полученное неравенство принимает вид $Lf(a) \le I' \le Uf(a)$.

Но поскольку $I' \to I$ при $d(\Pi) \to 0$, то отсюда получаем $Lf(a) \le I \le Uf(a)$. Разделив это неравенство на $f(a) > 0$, получим $L \le \frac{I}{f(a)} \le U$. Но поскольку функция G непрерывна на $[a, b]$ в силу леммы, то найдется точка $\xi \in [a, b]$, такая, что $G(\xi) = \frac{I}{f(a)}$. Отсюда следует, что $I = f(a)G(\xi)$, а учитывая определение функции G, получаем равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx \quad (\xi \in [a, b]). \qquad (2)$$

Итак, равенство (2) доказано нами в предположении, что функция f убывает и неотрицательна.

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Поскольку, как легко видеть, сумма в квадратных скобках равна $f(x_0) = f(a)$, то полученное неравенство принимает вид $Lf(a) \leq I' \leq Uf(a)$.
Но поскольку $I' \to I$ при $d(\Pi) \to 0$, то отсюда получаем $Lf(a) \leq I \leq Uf(a)$. Разделив это неравенство на $f(a) > 0$, получим $L \leq \frac{I}{f(a)} \leq U$. Но поскольку функция G непрерывна на $[a, b]$ в силу леммы, то найдется точка $\xi \in [a, b]$, такая, что $G(\xi) = \frac{I}{f(a)}$. Отсюда следует, что $I = f(a)G(\xi)$, а учитывая определение функции G, получаем равенство

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)dx \quad (\xi \in [a, b]). \tag{2}$$

Итак, равенство (2) доказано нами в предположении, что функция f убывает и неотрицательна.

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Поскольку, как легко видеть, сумма в квадратных скобках равна $f(x_0) = f(a)$, то полученное неравенство принимает вид $Lf(a) \le I' \le Uf(a)$.
Но поскольку $I' \to I$ при $d(\Pi) \to 0$, то отсюда получаем $Lf(a) \le I \le Uf(a)$. Разделив это неравенство на $f(a) > 0$, получим $L \le \frac{I}{f(a)} \le U$. Но поскольку функция G непрерывна на $[a, b]$ в силу леммы, то найдется точка $\xi \in [a, b]$, такая, что $G(\xi) = \frac{I}{f(a)}$. Отсюда следует, что $I = f(a)G(\xi)$, а учитывая определение функции G, получаем равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx \quad (\xi \in [a, b]). \tag{2}$$

Итак, равенство (2) доказано нами в предположении, что функция f убывает и неотрицательна.

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Поскольку, как легко видеть, сумма в квадратных скобках равна $f(x_0) = f(a)$, то полученное неравенство принимает вид $Lf(a) \leq I' \leq Uf(a)$.
Но поскольку $I' \to I$ при $d(\Pi) \to 0$, то отсюда получаем $Lf(a) \leq I \leq Uf(a)$. Разделив это неравенство на $f(a) > 0$, получим $L \leq \frac{I}{f(a)} \leq U$. Но поскольку функция G непрерывна на $[a, b]$ в силу леммы, то найдется точка $\xi \in [a, b]$, такая, что $G(\xi) = \frac{I}{f(a)}$. Отсюда следует, что $I = f(a)G(\xi)$, а учитывая определение функции G, получаем равенство

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int\limits_a^{\xi} g(x)dx \quad (\xi \in [a, b]). \qquad (2)$$

Итак, равенство (2) доказано нами в предположении, что функция f убывает и неотрицательна.

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Поскольку, как легко видеть, сумма в квадратных скобках равна $f(x_0) = f(a)$, то полученное неравенство принимает вид $Lf(a) \le I' \le Uf(a)$.
Но поскольку $I' \to I$ при $d(\Pi) \to 0$, то отсюда получаем $Lf(a) \le I \le Uf(a)$. Разделив это неравенство на $f(a) > 0$, получим $L \le \frac{I}{f(a)} \le U$. Но поскольку функция G непрерывна на $[a, b]$ в силу леммы, то найдется точка $\xi \in [a, b]$, такая, что $G(\xi) = \frac{I}{f(a)}$. Отсюда следует, что $I = f(a)G(\xi)$, а учитывая определение функции G, получаем равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx \quad (\xi \in [a, b]). \tag{2}$$

Итак, равенство (2) доказано нами в предположении, что функция f убывает и неотрицательна.

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Рассмотрим теперь случай, когда f убывает на $[a, b]$. Положим $\overline{f}(x) = f(x) - f(b)$. Тогда $\overline{f}$ убывает и неотрицательна. По доказанному, найдется точка $\overline{\xi}$, такая, что

$$\int_a^b \overline{f}(x)g(x)dx = \overline{f}(a)\int_a^{\overline{\xi}} g(x)dx \quad (\overline{\xi} \in [a, b]).$$

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Рассмотрим теперь случай, когда f убывает на $[a, b]$. Положим $\overline{f}(x) = f(x) - f(b)$. Тогда $\overline{f}$ убывает и неотрицательна.

По доказанному, найдется точка $\overline{\xi}$, такая, что

$$\int_a^b \overline{f}(x)g(x)dx = \overline{f}(a)\int_a^{\overline{\xi}} g(x)dx \quad (\overline{\xi} \in [a, b]).$$

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Рассмотрим теперь случай, когда f убывает на $[a, b]$. Положим $\overline{f}(x) = f(x) - f(b)$. Тогда $\overline{f}$ убывает и неотрицательна.
По доказанному, найдется точка $\overline{\xi}$, такая, что

$$\int\limits_a^b \overline{f}(x)g(x)dx = \overline{f}(a)\int\limits_a^{\overline{\xi}} g(x)dx \quad (\overline{\xi} \in [a, b]).$$

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Учитывая, что $\overline{f}(x) = f(x) - f(b)$, отсюда получаем

$$\int_a^b [f(x) - f(b)]g(x)dx = [f(a) - f(b)] \int_a^{\overline{\xi}} g(x)dx,$$

или, что то же самое,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\overline{\xi}} g(x)dx + f(b)\int_a^b g(x)dx - f(b)\int_a^{\overline{\xi}} g(x)dx =$$

$$= f(a)\int_a^{\overline{\xi}} g(x)dx + f(b)\int_{\overline{\xi}}^b g(x)dx.$$

Этим доказано равенство (1).

Продолжение доказательства второй теоремы о среднем.

Учитывая, что $\overline{f}(x) = f(x) - f(b)$, отсюда получаем

$$\int\limits_a^b [f(x) - f(b)]g(x)dx = [f(a) - f(b)] \int\limits_a^{\overline{\xi}} g(x)dx,$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int\limits_a^{\overline{\xi}} g(x)dx + f(b) \int\limits_a^b g(x)dx - f(b) \int_a^{\overline{\xi}} g(x)dx =$$

$$= f(a) \int\limits_a^{\overline{\xi}} g(x)dx + f(b) \int\limits_{\overline{\xi}}^b g(x)dx.$$

Этим доказано равенство (1).

Окончание доказательства второй теоремы о среднем.

В случае когда функция f возрастает и неотрицательна на $[a, b]$, аналогично тому, как было доказано равенство (2), можно показать[1], что существует такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_\xi^b g(x)dx. \tag{3}$$

Далее, из (3) легко можно получить (1) точно так же, как и (1) было получено из (2).

1  Покажите самостоятельно.

Окончание доказательства второй теоремы о среднем.

В случае когда функция f возрастает и неотрицательна на $[a, b]$, аналогично тому, как было доказано равенство (2), можно показать[1], что существует такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_\xi^b g(x)dx. \qquad (3)$$

Далее, из (3) легко можно получить (1) точно так же, как и (1) было получено из (2). ■

[1] Покажите самостоятельно.

Доказательство теоремы о производной интеграла с переменным верхним пределом.

Пусть, например, $a < x_0 < b$ (в точках a и b можно рассматривать только односторонние производные). Тогда для любого $h \neq 0$, такого, что что $x_0 + h \in [a, b]$, имеем

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int\limits_a^{x_0+h} f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt.$$

Отсюда следует

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt\right| \leq \frac{1}{|h|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt\right| \equiv \rho(h).$$

Окончание доказательства теоремы о производной интеграла с переменным верхним пределом.

Если мы покажем, что $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$, то тем самым теорема будет доказана. Для оценки $\rho(h)$ предположим для определенности, что $h > 0$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и, пользуясь непрерывностью функции f в точке x_0, найдем такое $\delta > 0$, что для всех t, удовлетворяющих условию $|t - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Если теперь $0 < h < \delta$, то получим

$$\rho(h) = \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Случай $h < 0$ исчерпывается аналогичным образом.

В точках $x_0 = a$ и $x_0 = b$ приведенные выше рассуждения достаточно применить для $h > 0$ и $h < 0$, соответственно.

Окончание доказательства теоремы о производной интеграла с переменным верхним пределом.

Если мы покажем, что $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$, то тем самым теорема будет доказана. Для оценки $\rho(h)$ предположим для определенности, что $h > 0$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и, пользуясь непрерывностью функции f в точке x_0, найдем такое $\delta > 0$, что для всех t, удовлетворяющих условию $|t - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Если теперь $0 < h < \delta$, то получим

$$\rho(h) = \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Случай $h < 0$ исчерпывается аналогичным образом.

В точках $x_0 = a$ и $x_0 = b$ приведенные выше рассуждения достаточно применить для $h > 0$ и $h < 0$, соответственно.

Окончание доказательства теоремы о производной интеграла с переменным верхним пределом.

Если мы покажем, что $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$, то тем самым теорема будет доказана. Для оценки $\rho(h)$ предположим для определенности, что $h > 0$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и, пользуясь непрерывностью функции f в точке x_0, найдем такое $\delta > 0$, что для всех t, удовлетворяющих условию $|t - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Если теперь $0 < h < \delta$, то получим

$$\rho(h) = \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Случай $h < 0$ исчерпывается аналогичным образом.

В точках $x_0 = a$ и $x_0 = b$ приведенные выше рассуждения достаточно применить для $h > 0$ и $h < 0$, соответственно.

Окончание доказательства теоремы о производной интеграла с переменным верхним пределом.

Если мы покажем, что $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$, то тем самым теорема будет доказана. Для оценки $\rho(h)$ предположим для определенности, что $h > 0$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и, пользуясь непрерывностью функции f в точке x_0, найдем такое $\delta > 0$, что для всех t, удовлетворяющих условию $|t - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Если теперь $0 < h < \delta$, то получим

$$\rho(h) = \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Случай $h < 0$ исчерпывается аналогичным образом.

В точках $x_0 = a$ и $x_0 = b$ приведенные выше рассуждения достаточно применить для $h > 0$ и $h < 0$, соответственно.

Окончание доказательства теоремы о производной интеграла с переменным верхним пределом.

Если мы покажем, что $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$, то тем самым теорема будет доказана. Для оценки $\rho(h)$ предположим для определенности, что $h > 0$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и, пользуясь непрерывностью функции f в точке x_0, найдем такое $\delta > 0$, что для всех t, удовлетворяющих условию $|t - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Если теперь $0 < h < \delta$, то получим

$$\rho(h) = \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Случай $h < 0$ исчерпывается аналогичным образом.

В точках $x_0 = a$ и $x_0 = b$ приведенные выше рассуждения достаточно применить для $h > 0$ и $h < 0$, соответственно.

Доказательство теоремы Ньютона – Лейбница.

Существование первообразной следует из предыдущей теоремы.

Кроме того, одной из первообразных является функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Но разность двух любых первообразных постоянна, так что $F(x) - \Phi(x) \equiv C$. Поскольку $F(a) = 0$, то отсюда получаем $-\Phi(a) = C$.

Таким образом, $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$. При $x = b$ имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство теоремы Ньютона – Лейбница.

Существование первообразной следует из предыдущей теоремы.
Кроме того, одной из первообразных является функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Но разность двух любых первообразных постоянна, так что $F(x) - \Phi(x) \equiv C$. Поскольку $F(a) = 0$, то отсюда получаем $-\Phi(a) = C$.
Таким образом, $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$. При $x = b$ имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство теоремы Ньютона – Лейбница.

Существование первообразной следует из предыдущей теоремы.
Кроме того, одной из первообразных является функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Но разность двух любых первообразных постоянна, так что $F(x) - \Phi(x) \equiv C$. Поскольку $F(a) = 0$, то отсюда получаем $-\Phi(a) = C$.
Таким образом, $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$. При $x = b$ имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство обобщенной теоремы Ньютона – Лейбница.

Возьмем произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$, такое, что среди его точек содержатся все те точки, в которых не выполняется равенство $\Phi'(x) = f(x)$. На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ функция Φ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. В силу этой теоремы, имеем

$$\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i) = \Phi'(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где точки $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Складывая эти равенства, получаем

Доказательство обобщенной теоремы Ньютона – Лейбница.

Возьмем произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$, такое, что среди его точек содержатся все те точки, в которых не выполняется равенство $\Phi'(x) = f(x)$. На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ функция Φ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. В силу этой теоремы, имеем

$$\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i) = \Phi'(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где точки $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Складывая эти равенства, получаем

Доказательство обобщенной теоремы Ньютона – Лейбница.

Возьмем произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$, такое, что среди его точек содержатся все те точки, в которых не выполняется равенство $\Phi'(x) = f(x)$. На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ функция Φ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. В силу этой теоремы, имеем

$$\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i) = \Phi'(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где точки $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Складывая эти равенства, получаем

Окончание доказательства обобщенной теоремы Ньютона – Лейбница.

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\Phi(x_{i+1})-\Phi(x_i)]=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Сумма слева, очевидно, равна $\Phi(b)-\Phi(a)$, так что

$$\Phi(b)-\Phi(a)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Справа имеем интегральную сумму для функции f. По условию f – интегрируемая функция, так что при стремлении к нулю диаметра разбиения сумма справа стремится к $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Поэтому получили

$$\Phi(b)-\Phi(a)=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Окончание доказательства обобщенной теоремы Ньютона – Лейбница.

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\Phi(x_{i+1})-\Phi(x_i)]=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Сумма слева, очевидно, равна $\Phi(b)-\Phi(a)$, так что

$$\Phi(b)-\Phi(a)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Справа имеем интегральную сумму для функции f. По условию f – интегрируемая функция, так что при стремлении к нулю диаметра разбиения сумма справа стремится к $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Поэтому получили

$$\Phi(b)-\Phi(a)=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Окончание доказательства обобщенной теоремы Ньютона – Лейбница.

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Сумма слева, очевидно, равна $\Phi(b) - \Phi(a)$, так что

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Справа имеем интегральную сумму для функции f. По условию f – интегрируемая функция, так что при стремлении к нулю диаметра разбиения сумма справа стремится к $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Поэтому получили

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Доказательство формулы интегрирования по частям.

По правилу дифференцирования произведения,

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

Из условий теоремы следует, что справа – непрерывная функция, так что непрерывна и левая часть равенства. Интегрируя это равенство и используя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$\int_a^b \left[u(x)v'(x) + u'(x)v(x)\right] dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Каждое из двух слагаемых под знаком интеграла слева – непрерывные, а значит, интегрируемые функции. Поэтому интеграл от суммы этих функций равен сумме интегралов от каждой из них. Отсюда следует требуемое равенство. ∎

Доказательство формулы интегрирования по частям.

По правилу дифференцирования произведения,

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

Из условий теоремы следует, что справа – непрерывная функция, так что непрерывна и левая часть равенства. Интегрируя это равенство и используя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)]\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Каждое из двух слагаемых под знаком интеграла слева – непрерывные, а значит, интегрируемые функции. Поэтому интеграл от суммы этих функций равен сумме интегралов от каждой из них. Отсюда следует требуемое равенство. ∎

Доказательство формулы интегрирования по частям.

По правилу дифференцирования произведения,

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

Из условий теоремы следует, что справа – непрерывная функция, так что непрерывна и левая часть равенства. Интегрируя это равенство и используя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$\int_a^b \left[u(x)v'(x) + u'(x)v(x)\right] dx = u(x)v(x)\Big|_a^b .$$

Каждое из двух слагаемых под знаком интеграла слева – непрерывные, а значит, интегрируемые функции. Поэтому интеграл от суммы этих функций равен сумме интегралов от каждой из них. Отсюда следует требуемое равенство.

Доказательство формулы интегрирования по частям.

По правилу дифференцирования произведения,

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

Из условий теоремы следует, что справа – непрерывная функция, так что непрерывна и левая часть равенства. Интегрируя это равенство и используя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$\int\limits_a^b \left[u(x)v'(x) + u'(x)v(x)\right] dx = \left. u(x)v(x)\right|_a^b.$$

Каждое из двух слагаемых под знаком интеграла слева – непрерывные, а значит, интегрируемые функции. Поэтому интеграл от суммы этих функций равен сумме интегралов от каждой из них. Отсюда следует требуемое равенство.

Доказательство формулы интегрирования по частям.

По правилу дифференцирования произведения,

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

Из условий теоремы следует, что справа – непрерывная функция, так что непрерывна и левая часть равенства. Интегрируя это равенство и используя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$\int\limits_a^b \left[u(x)v'(x) + u'(x)v(x)\right] dx = u(x)v(x)\Big|_a^b .$$

Каждое из двух слагаемых под знаком интеграла слева – непрерывные, а значит, интегрируемые функции. Поэтому интеграл от суммы этих функций равен сумме интегралов от каждой из них. Отсюда следует требуемое равенство. ∎

Доказательство теоремы 1 (о замене переменной).

Оба интеграла, очевидно, существуют, и нужно доказать их равенство. Для этого применим формулу Ньютона – Лейбница. Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Она существует в силу непрерывности f и основной теоремы интегрального исчисления. Пусть $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тогда $G(t) = F(\varphi(t))$ является первообразной для $g(t)$, поскольку

$$G'(t) = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t).$$

По формуле Ньютона – Лейбница, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

$$\int\limits_\alpha^\beta g(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Из этих двух равенств следует теорема.

Доказательство теоремы 1 (о замене переменной).

Оба интеграла, очевидно, существуют, и нужно доказать их равенство. Для этого применим формулу Ньютона – Лейбница. Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Она существует в силу непрерывности f и основной теоремы интегрального исчисления. Пусть $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тогда $G(t) = F(\varphi(t))$ является первообразной для $g(t)$, поскольку

$$G'(t) = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t).$$

По формуле Ньютона – Лейбница, имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta g(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Из этих двух равенств следует теорема.

Доказательство теоремы 1 (о замене переменной).

Оба интеграла, очевидно, существуют, и нужно доказать их равенство. Для этого применим формулу Ньютона – Лейбница. Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Она существует в силу непрерывности f и основной теоремы интегрального исчисления. Пусть $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тогда $G(t) = F(\varphi(t))$ является первообразной для $g(t)$, поскольку

$$G'(t) = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t).$$

По формуле Ньютона – Лейбница, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

$$\int\limits_\alpha^\beta g(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Из этих двух равенств следует теорема.

Доказательство теоремы 1 (о замене переменной).

Оба интеграла, очевидно, существуют, и нужно доказать их равенство. Для этого применим формулу Ньютона – Лейбница. Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Она существует в силу непрерывности f и основной теоремы интегрального исчисления. Пусть $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тогда $G(t) = F(\varphi(t))$ является первообразной для $g(t)$, поскольку

$$G'(t) = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t).$$

По формуле Ньютона – Лейбница, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

$$\int\limits_\alpha^\beta g(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Из этих двух равенств следует теорема.

Доказательство теоремы 1 (о замене переменной).

Оба интеграла, очевидно, существуют, и нужно доказать их равенство. Для этого применим формулу Ньютона – Лейбница. Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Она существует в силу непрерывности f и основной теоремы интегрального исчисления. Пусть $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тогда $G(t) = F(\varphi(t))$ является первообразной для $g(t)$, поскольку

$$G'(t) = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t).$$

По формуле Ньютона – Лейбница, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

$$\int\limits_\alpha^\beta g(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Из этих двух равенств следует теорема.

Доказательство теоремы 2 (о замене переменной).

Рассмотрим произвольное разбиение $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$. Будем предполагать, что функция φ возрастает. Тогда отрезок $[a, b]$ тоже разобьется точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, где $x_i = \varphi(t_i)$.
Если $\max \Delta t_j \to 0$, то стремится к нулю и $\max \Delta x_j$, так как функция φ равномерно непрерывна на $[\alpha, \beta]$. По формуле Лагранжа имеем

$$x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\overline{\tau}_i)\Delta t_i,$$

где $\overline{\tau}_i$ – некоторые точки из отрезков $[t_i, t_{i+1}]$. Теперь выберем произвольные точки $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ и составим интегральную сумму для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Доказательство теоремы 2 (о замене переменной).

Рассмотрим произвольное разбиение $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$. Будем предполагать, что функция φ возрастает. Тогда отрезок $[a, b]$ тоже разобьется точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, где $x_i = \varphi(t_i)$.

Если $\max \Delta t_j \to 0$, то стремится к нулю и $\max \Delta x_j$, так как функция φ равномерно непрерывна на $[\alpha, \beta]$. По формуле Лагранжа имеем

$$x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\overline{\tau}_i)\Delta t_i,$$

где $\overline{\tau}_i$ – некоторые точки из отрезков $[t_i, t_{i+1}]$. Теперь выберем произвольные точки $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ и составим интегральную сумму для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Доказательство теоремы 2 (о замене переменной).

Рассмотрим произвольное разбиение $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$. Будем предполагать, что функция φ возрастает. Тогда отрезок $[a, b]$ тоже разобьется точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, где $x_i = \varphi(t_i)$.
Если $\max \Delta t_j \to 0$, то стремится к нулю и $\max \Delta x_j$, так как функция φ равномерно непрерывна на $[\alpha, \beta]$. По формуле Лагранжа имеем

$$x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\overline{\tau}_i)\Delta t_i,$$

где $\overline{\tau}_i$ – некоторые точки из отрезков $[t_i, t_{i+1}]$. Теперь выберем произвольные точки $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ и составим интегральную сумму для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Доказательство теоремы 2 (о замене переменной).

Рассмотрим произвольное разбиение $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$. Будем предполагать, что функция φ возрастает. Тогда отрезок $[a, b]$ тоже разобьется точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, где $x_i = \varphi(t_i)$.
Если $\max \Delta t_j \to 0$, то стремится к нулю и $\max \Delta x_j$, так как функция φ равномерно непрерывна на $[\alpha, \beta]$. По формуле Лагранжа имеем

$$x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\overline{\tau}_i)\Delta t_i,$$

где $\overline{\tau}_i$ – некоторые точки из отрезков $[t_i, t_{i+1}]$. Теперь выберем произвольные точки $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ и составим интегральную сумму для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Доказательство теоремы 2 (о замене переменной).

Рассмотрим произвольное разбиение $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$. Будем предполагать, что функция φ возрастает. Тогда отрезок $[a, b]$ тоже разобьется точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, где $x_i = \varphi(t_i)$.
Если $\max \Delta t_j \to 0$, то стремится к нулю и $\max \Delta x_j$, так как функция φ равномерно непрерывна на $[\alpha, \beta]$. По формуле Лагранжа имеем

$$x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\overline{\tau}_i)\Delta t_i,$$

где $\overline{\tau}_i$ – некоторые точки из отрезков $[t_i, t_{i+1}]$. Теперь выберем произвольные точки $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ и составим интегральную сумму для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Продолжение доказательства теоремы 2 (о замене переменной).

Обозначим $\xi_i = \varphi(\tau_i)$ и рассмотрим сумму

$$J = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Заметим, что точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ в силу возрастания функции φ. Поэтому J – интегральная сумма для f. Покажем, что $\sigma - J \to 0$. Действительно,

$$J = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\overline{\tau}_i)\Delta t_i.$$

По условию функция φ' непрерывна, а значит, равномерно непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $t', t'' \in [\alpha, \beta]$, удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \delta$, справедливо неравенство $|\varphi'(t') - \varphi'(t'')| < \varepsilon$.

Продолжение доказательства теоремы 2 (о замене переменной).

Обозначим $\xi_i = \varphi(\tau_i)$ и рассмотрим сумму

$$J = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Заметим, что точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ в силу возрастания функции φ. Поэтому J – интегральная сумма для f. Покажем, что $\sigma - J \to 0$. Действительно,

$$J = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\overline{\tau}_i)\Delta t_i.$$

По условию функция φ' непрерывна, а значит, равномерно непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $t', t'' \in [\alpha, \beta]$, удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \delta$, справедливо неравенство $|\varphi'(t') - \varphi'(t'')| < \varepsilon$.

Продолжение доказательства теоремы 2 (о замене переменной).

Обозначим $\xi_i = \varphi(\tau_i)$ и рассмотрим сумму

$$J = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Заметим, что точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ в силу возрастания функции φ. Поэтому J – интегральная сумма для f. Покажем, что $\sigma - J \to 0$. Действительно,

$$J = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\overline{\tau}_i)\Delta t_i.$$

По условию функция φ' непрерывна, а значит, равномерно непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $t', t'' \in [\alpha, \beta]$, удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \delta$, справедливо неравенство $|\varphi'(t') - \varphi'(t'')| < \varepsilon$.

Продолжение доказательства теоремы 2 (о замене переменной).

Если диаметр разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ будет меньшим, чем δ, то получим

$$|\sigma - J| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\varphi(\tau_i))| \cdot |\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\overline{\tau}_i)| \Delta t_i \leq \varepsilon M(\beta - \alpha),$$

где M – верхняя грань функции $|f(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

Таким образом, при стремлении к нулю диаметра разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ имеем $\sigma - J \to 0$.

Подчеркнем, что при этом диаметр получаемого разбиения отрезка $[a, b]$ также стремится к нулю в силу равномерной непрерывности функции φ. Поэтому, в силу интегрируемости функции f, сумма J стремится к $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Продолжение доказательства теоремы 2 (о замене переменной).

Если диаметр разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ будет меньшим, чем δ, то получим

$$|\sigma - J| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\varphi(\tau_i))| \cdot |\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\overline{\tau}_i)| \Delta t_i \leq \varepsilon M(\beta - \alpha),$$

где M – верхняя грань функции $|f(x)|$ на отрезке $[a, b]$.
Таким образом, при стремлении к нулю диаметра разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ имеем $\sigma - J \to 0$.
Подчеркнем, что при этом диаметр получаемого разбиения отрезка $[a, b]$ также стремится к нулю в силу равномерной непрерывности функции φ. Поэтому, в силу интегрируемости функции f, сумма J стремится к $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Продолжение доказательства теоремы 2 (о замене переменной).

Если диаметр разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ будет меньшим, чем δ, то получим

$$|\sigma - J| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\varphi(\tau_i))| \cdot |\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\overline{\tau}_i)| \Delta t_i \leq \varepsilon M(\beta - \alpha),$$

где M – верхняя грань функции $|f(x)|$ на отрезке $[a, b]$.
Таким образом, при стремлении к нулю диаметра разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ имеем $\sigma - J \to 0$.
Подчеркнем, что при этом диаметр получаемого разбиения отрезка $[a, b]$ также стремится к нулю в силу равномерной непрерывности функции φ. Поэтому, в силу интегрируемости функции f, сумма J стремится к $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Продолжение доказательства теоремы 2 (о замене переменной).

Если диаметр разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ будет меньшим, чем δ, то получим

$$|\sigma - J| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\varphi(\tau_i))| \cdot |\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\overline{\tau}_i)| \Delta t_i \leq \varepsilon M(\beta - \alpha),$$

где M – верхняя грань функции $|f(x)|$ на отрезке $[a, b]$.
Таким образом, при стремлении к нулю диаметра разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ имеем $\sigma - J \to 0$.
Подчеркнем, что при этом диаметр получаемого разбиения отрезка $[a, b]$ также стремится к нулю в силу равномерной непрерывности функции φ. Поэтому, в силу интегрируемости функции f, сумма J стремится к $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Окончание доказательства теоремы 2 (о замене переменной).

Поскольку, как мы показали, $\sigma - J \to 0$, то и сумма σ имеет предел, равный $\int\limits_a^b f(x)dx$.

С другой стороны, поскольку σ – интегральная сумма для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ и она имеет предел при стремлении к нулю диаметра разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$, то функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема на $[\alpha, \beta]$ и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Окончание доказательства теоремы 2 (о замене переменной).

Поскольку, как мы показали, $\sigma - J \to 0$, то и сумма σ имеет предел, равный $\int\limits_a^b f(x)dx$.

С другой стороны, поскольку σ – интегральная сумма для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ и она имеет предел при стремлении к нулю диаметра разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$, то функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема на $[\alpha, \beta]$ и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство формулы Тейлора.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n =$$

$$= f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k.$$

Ясно, что $\varphi(b) = 0$, а $\varphi(a)$ – остаток в формуле Тейлора, который мы ищем. Заметим, что функция φ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную и поэтому, по формуле Ньютона – Лейбница, получаем

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(x)dx.$$

Доказательство формулы Тейлора.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n =$$

$$= f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k.$$

Ясно, что $\varphi(b) = 0$, а $\varphi(a)$ – остаток в формуле Тейлора, который мы ищем. Заметим, что функция φ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную и поэтому, по формуле Ньютона – Лейбница, получаем

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(x)dx.$$

Доказательство формулы Тейлора.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n =$$

$$= f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k.$$

Ясно, что $\varphi(b) = 0$, а $\varphi(a)$ – остаток в формуле Тейлора, который мы ищем. Заметим, что функция φ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную и поэтому, по формуле Ньютона – Лейбница, получаем

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(x)dx.$$

Окончание доказательства формулы Тейлора.

Поскольку $\varphi(b) = 0$, то $\varphi(a) = -\int_a^b \varphi'(x)dx$. Вычислим

$$\varphi'(x) = -f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} \right] =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n,$$

откуда получаем

$$\varphi(a) = \frac{1}{n!} \int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx,$$

и теорема доказана. ■

Окончание доказательства формулы Тейлора.

Поскольку $\varphi(b) = 0$, то $\varphi(a) = -\int_a^b \varphi'(x)dx$. Вычислим

$$\varphi'(x) = -f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} \right] =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n,$$

откуда получаем

$$\varphi(a) = \frac{1}{n!} \int\limits_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx,$$

и теорема доказана. ■