МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І.І. МЕЧНИКОВА
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЕКОНОМІКИ ТА МЕХАНІКИ

Н.О. Роженко

МОДЕЛЬ ІНДИВІДУАЛЬНИХ РИЗИКІВ

МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

*Методичний посібник для студентів IV курсу
факультету математики
спеціалізації «математична економіка»*

**О д е с а
«ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ»
2012**

Н.О. Роженко. «Модель індивідуальних ризиків».

Методичний посібник складено для студентів IV курсу факультету математики спеціалізації «математична економіка» Одеського національного університету імені І.І.Мечникова. Він містить основний теоретичний матеріал та задачі з теми «Модель індивідуальних ризиків», що є одним з найважливіших розділів дисципліни «Математичні основи економічного ризику». Мета посібника – забезпечити засвоєння цього розділу при самостійному вивченні матеріалу курсу.

Автор:

Н.О. Роженко,

кандидат фізико-математичних наук,

старший викладач

Рецензенти:

В.О. Андрієнко,

доктор фізико-математичних наук, професор

З.М. Лисенко,

кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рекомендовано до друку

Вченою радою ІМЕМ

ОНУ імені І.І. Мечникова.

Протокол № 1 від 11.10.2011 р.

ЗМІСТ

1. Вступ

Важливу роль в керуванні роботою страхової компанії відіграють математичні моделі, що ставлять своєю метою опис різноманітних видів діяльності страхової компанії. Вивчення таких моделей та проведення на їх основі розрахунків важливих характеристик роботи страхової компанії (таких як тарифна ставка, ймовірність банкрутства, величина страхового резерву у вибрані моменти часу та ін.), дозволяє пропонувати приклади управлінських рішень, згідно з якими керівники компанією можуть здійснювати свій вибір.

Фундаментом, на якому будується теорія діяльності страхової компанії, є індивідуальна вимога, що дорівнює підсумковій сумі коштів, виплачених страховиком (страховою компанією). Вимога розглядається як випадкова величина, що набуває нульового значення, якщо за даним страховим договором не сталося страхового випадку і страховик не виплачував страхових виплат клієнтам. Вимога не дорівнює нулю, якщо страхова компанія виплатила клієнтові по цій вимозі деякі суми. В цьому випадку величина вимоги дорівнює цим виплатам. Умовну величину індивідуальної вимоги при її ненульовому значенні називають збитком.

У класичній літературі надається наступна класифікація моделей ризиків:

I) *модель індивідуальних ризиків*, в якій розглядається сукупність об'єктів страхування (страховий портфель), що сформувалися за дуже короткий термін, значно менший терміну дії договору. Термін дії цих договорів однаковий. Протягом цього терміну можуть відбуватися страхові події, що призводять до необхідності робити виплати по вимогах, що поступають;

II) *модель колективних ризиків* (динамічна модель), в рамках якої розглядається можливість укладення страхових договорів в моменти часу та створюється деякий випадковий процес, кожен договір має свою тривалість дії, і протягом періоду дії договору можуть наставати страхові випадки, по яких страхова компанія повинна робити виплати по вимогах.

Є багато робіт, в яких розглядаються результати діяльності страхової компанії на кінцевому інтервалі часу, а також роботи, в яких інтервал часу функціонування страхової компанії нескінчений. У таких моделях передбачається наявність початкового резерву (капіталу), роль якого полягає в пом'якшенні наслідків необхідності робити виплати по великим страховим вимогам (або через велику кількість страхових подій, що сталися, або через великі збитки по вимогах, що поступили).

Типовими проблемами в рамках цих моделей є:

1) обчислення розподілу сумарної вимоги, тобто суми всіх виплат (збитків) страхової компанії по всіх страхових договорах, що формують портфель (у ситуації індивідуальної моделі) або за підсумками діяльності протягом деякого інтервалу часу (в рамках колективної моделі);

2) обчислення або оцінка страхових премій, достатніх для (так званого технічного) уникнення банкрутства, при якому у компанії вистачає засобів для погашення всіх вимог, що поступили. Зазвичай вимагають уникнення банкрутства з ймовірністю, близькою до одиниці. При обчисленні ймовірності банкрутства в умовах моделі індивідуальних ризиків, розв'язок проблеми зводиться до обчислення ймовірності перевищення рівня сумою всіх виплат по всіх вимогах страхового портфеля. В цьому випадку розв'язок задачі вимагає застосування різних варіантів центральної граничної теореми.

При обчисленні ймовірності банкрутства в умовах колективної моделі виникають додаткові проблеми обліку того, щоб сумарні виплати по вимогах, що поступають, не перевершували в кожен момент часу резервів, що є на цей момент. Методи, які використовуються при розв'язанні цих проблем, базуються на глибоких результатах і методах теорії випадкових процесів.

Для аналізу завдань страхування важливим питанням є виділення різних видів (класів) так званих страхових ризиків. Страхові ризики полягають у наявності можливості різного рівня фінансових втрат у випадках настання (рідких) неприємних подій для (фізичних і юридичних) осіб потенційних клієнтів страхових компаній. При аналізі ризиків й побудові математичних моделей ризиків важливими проблемами є:

– встановлення причин, наслідків та взаємозв'язків різних ризиків,

– встановлення і побудова моделі ймовірнісних розподілів та ймовірнісних характеристик ризиків,

– встановлення розміру матеріальних втрат при настанні страхового випадку, що становить істотний інтерес для страхових компаній з точки зору оцінки необхідності додаткового залучення до страхування цього ризику інших страхових компаній.

Особа, що приймає рішення, може використовувати страхування для зменшення несприятливої фінансової дії деяких типів випадкових подій. Але це розгляд є узагальненим, оскільки під особою, що приймає рішення, може матися на увазі як окрема людина, яка шукає захист від збитку, що заподіюється власності, заощадженням або доходам, так і організація, яка шукає захист від того ж роду збитку. Насправді такою організацією може виявитися страхова компанія, яка шукає способи захистити себе від фінансових втрат завдяки дуже великій кількості страхових випадків та подій з окремим її клієнтом або з її страховим портфелем. Такий захист називається перестрахуванням. При використанні процедури перестрахування декілька страхових компаній беруть на себе зобов'язання по відшкодуванню різних частин збитку, який може бути наслідком страхового випадку, прикладом якого є збиток в декілька млрд. доларів у наслідок землетрусу в Каліфорнії, що стався в 1994 році, або урагану 1992 року у Флориді.

Далі буде розглянуто модель індивідуальних ризиків, яка широко використовується у визначенні страхових тарифів та резервів, а також у перестрахуванні.

2. Опис моделі індивідуальних ризиків

Модель індивідуальних ризиків є найпростішою моделлю функціювання страхової компанії, що призначається для обчислення ймовірностей банкрутства. Вона базується на наступних спрощених припущеннях:

1. *аналізується відносно короткий (так, що можна знехтувати інфляцією й не враховувати прибуток від інвестування) проміжок часу – зазвичай це один рік;*
2. *кількість страхових полісів (тобто документів, в яких викладені умови страхування)* ***n*** *фіксоване та невипадкове;*
3. *плата за страховку зараховується повністю на початку періоду дії договору страхування, ніяких надходжень протягом цього періоду немає;*
4. *спостерігається кожен окремий поліс та відомі статистичні властивості пов'язаної з ним індивідуальної вимоги* ***X*** *(оскільки не всі поліси спричиняють виплати, деякі з випадкових величин* $X_1, X_2, ..., X_n$*, де* X_i *– вимога від i-го полісу, дорівнюють нулю).*

У рамках цієї моделі банкрутство визначається сумарною вимогою

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n \tag{1}$$

до страхової компанії. Якщо ця сумарна вимога перевищує резерви компанії *u*, то страхова компанія не зможе виконати всі свої обов'язки та збанкротує. Тому ймовірність банкрутства компанії дорівнює

$$R = P(S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n > u). \qquad (2)$$

Інакше кажучи, ймовірність банкрутства – це додаткова функція розподілу величини сумарної вимоги до компанії за проміжок часу, що розглядається. Зазвичай передбачається, що $X_1, X_2, \ldots, X_n$ є незалежними випадковими величинами, оскільки в цьому випадку використовуються значно простіші математичні розрахунки і не вимагається відомостей про характер залежності між ними. Таким чином виключаються катастрофічні нещасні випадки, що спричиняють вимоги одразу по багатьом полісам.

Дана модель індивідуальних ризиків не відображає зміни цінності грошей з часом. Це також робиться для спрощення моделі.

Розглядатимемо лише замкнуті моделі, тобто ті, в яких число об'єктів страхування n у формулі (1) відоме і зафіксоване на самому початку даного інтервалу часу. Якщо ми вводимо припущення про наявність міграції з страхової системи або в неї, то отримуємо відкриту модель.

3. Випадкові величини, що описують індивідуальні вимоги

Спочатку нагадаємо основні положення, що стосуються страхування життя. При страхуванні на випадок смерті на термін один рік страховик зобов'язався виплатити величину b, якщо страхувальник помре протягом року з моменту укладення договору страхування, і не виплачує нічого, якщо страхувальник проживе цей рік. Ймовірність того, що страховий випадок настане протягом вказаного року позначається через q. Випадкова величина X, що описує страхові виплати, має розподіл, який може задаватися або функцією ймовірності

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1 - q, x = 0 \\ q, x = b \\ 0, x \neq 0, b \end{cases} \qquad (3)$$

або відповідною функцією розподілу

$$p_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - q, 0 \le x < b \\ 1, x \ge b \end{cases} \qquad (4)$$

З формули (3) та з означення моментів випадкових величин отримаємо

$$E[X] = bq, \qquad E[X^2] = b^2 q, \qquad (5)$$

$$D[X] = b^2 q(1-q) \ .$$

(6)

Ці формули можна також одержати, якщо записати X у вигляді

$$X = Ib$$

(7)

де b — стала величина, що виплачується у випадку смерті, а I — випадкова величина, що приймає значення 1 у випадку настання смерті та 0 у протилежному випадку.

Таким чином, $P(I=0) = 1-q$ и $P(I=1) = q$, та середнє значення й дисперсія випадкової величини I дорівнюють q і $q(1 - q)$ відповідно, а середнє значення й дисперсія випадкової величини X дорівнюють bq и $b^2 q(1-q)$, що співпадає з вказаними вище формулами.

Випадкова величина I з областю значень $\{0,1\}$ широко застосовується в актуарних моделях. У підручниках з теорії ймовірностей вона називається індикатором, бернуллієвськой випадковою величиною або біноміальною випадковою величиною в схемі єдиного випробування. Ми називатимемо її індикатором з міркувань стислості, а також тому, що вона вказує настання, $I = 1$, або ненастання, $I = 0$, даної події.

Перейдемо до пошуку більш загальних моделей, в яких величина страхової виплати також є випадковою величиною і в даному інтервалі часу може статися декілька страхових випадків. Страхування на випадок хвороби, страхування автомобілів і інших видів власності, а також страхування цивільної відповідальності відразу ж надають безліч прикладів для застосування подібних моделей. Узагальнюючи формулу (7), покладемо

$$X=IB \tag{8}$$

де X - випадкова величина, що описує страхові виплати в даному інтервалі часу, випадкова величина B позначає загальну величину виплат в цьому інтервалі та випадкова величина I є індикатором для події, що полягає в тому, що стався щонайменше один страховий випадок. Будучи індикатором такої події, величина I фіксує наявність ($I = 1$) або відсутність ($I = 0$) страхових випадків в цьому інтервалі часу, але не кількість страхових випадків у ньому. Ймовірність $P(I = 1)$ як і раніше позначатиметься через q.

Розглянемо декілька прикладів і визначимо розподіл випадкових величин I і B в деякій моделі. Розглянемо спочатку страхування на випадок смерті на термін один рік з додатковою виплатою, якщо смерть настала в результаті нещасного випадку. Для визначеності передбачимо, що якщо смерть сталася в результаті нещасного випадку, то величина виплати складе 50000. Якщо смерть настане за іншими причинами величина виплати складе 25000. Припустимо, що для особи даного віку, стану здоров'я і професії ймовірність смерті в результаті нещасного випадку протягом року дорівнює 0,0005, а ймовірність смерті за іншими причинами дорівнює 0,0020. У вигляді формули це можна записати так:

$$P(I=1, B=50000) = 0{,}0005 \quad \text{та} \quad P(I=1, B=25000) = 0{,}0020$$

Сумуванням по всім можливим значенням B, отримаємо

$$P(I=1) = 0{,}0025,$$

так що

$$P(I=0) = 1 - P(I=1) = 0{,}9975.$$

Умовний розподіл випадкової величини B за умови $I = 1$ має вигляд

$$P(B = 25000 \mid I = 1) = \frac{P(B = 25000, I = 1)}{P(I = 1)} = \frac{0{,}0020}{0{,}0025} = 0{,}8$$

$$P(B = 50000 \mid I = 1) = \frac{P(B = 50000, I = 1)}{P(I = 1)} = \frac{0{,}0005}{0{,}0025} = 0{,}2$$

Розглянемо тепер страхування автомобілів від зіткнень (відшкодування виплачується власникові автомобіля за збиток, нанесений його автомобілю) з величиною безумовної франшизи 250 і з максимальним розміром виплати 2000. Для наочності передбачимо, що ймовірність настання одного страхового випадку в даний період часу для окремої особи складає 0,15, а ймовірність настання більш ніж одного зіткнення дорівнює нулю:

$$P(I=0) = 0{,}85, \qquad P(I=1) = 0{,}15.$$

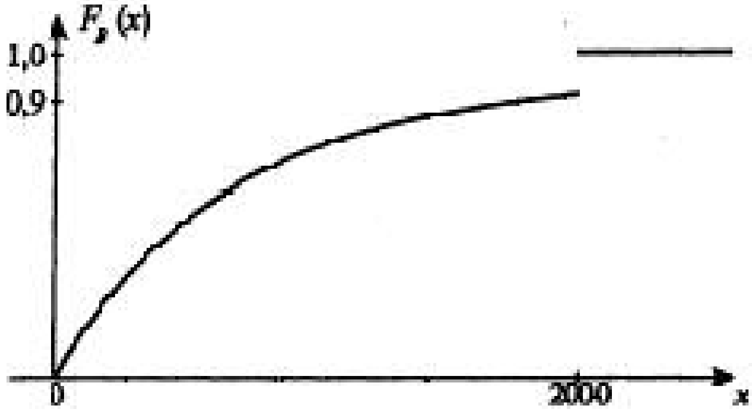
Нереалістичне припущення про те, що протягом одного періоду може статися не більш за один страховий випадок, робиться для того, щоб спростити розподіл випадкової величини B. Ми відмовимося від цього припущення в наступному розділі після того, як розглянемо розподіл суми декількох страхових випадків.

Оскільки B є величиною виплат страхової компанії, а не збитком, нанесеним автомобілю, ми можемо розглядати дві характеристики, I і B. По-перше, подія $I = 0$ включає ті зіткнення, в яких збиток менший, ніж безумовна франшиза, яка дорівнює 250. По-друге, розподіл випадкової величини B матиме "згусток" імовірнісної маси в точці максимального розміру страхових виплат, який дорівнює 2000. Припустимо, що величина ймовірності, зосереджена в цій точці, дорівнює 0,1. Далі, припустимо, що величину страхових виплат в інтервалі від 0 до 2000 можна моделювати неперервним розподілом з функцією щільності, що пропорційна $1 — x/2000$

для $0<x<2000$ (На практиці неперервна крива, яка вибирається для представлення розподілу страхових виплат, є результатом досліджень розмірів виплат в попередньому періоді.)

Підсумовуючи ці припущення про умовний розподіл випадкової величини B за умови $I = 1$, ми приходимо до розподілу змішаного типа, що має позитивну щільність в інтервалі від 0 до 2000 і деякий «згусток» або стрибок імовірнісної маси в точці 2000. Це ілюструється графіком на мал.1. Функція розподілу цього умовного розподілу виглядає так:

$$P(B \le x \mid I = 1) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 0{,}9[1 - (1 - \frac{x}{2000})^2], 0 < x < 2000 \\ 1, x \ge 2000 \end{cases}$$



Мал. 1. Функція розподілу випадкової величини B за умови $I = 1$

Обчислимо математичне сподівання та дисперсію в даному прикладі з автомобільним страхуванням двома способами. По-перше, випишемо розподіл випадкової величини X і скористаємося ним для розрахунку $E[X]$ і $D[X]$. Позначаючи через $F_X(x)$ функцію розподілу випадкової величини X, маємо

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(IB \le x) = P(IB \le x \mid I = 0)P(I = 0) + P(IB \le x \mid I = 1)P(I = 1) \qquad (9)$$

Для $x<0$

$$F_X(x) = 0 \cdot 0{,}85 + 0 \cdot 0{,}15 = 0$$

Для $0 \le x < 2000$

$$F_X(x) = 1 \cdot 0{,}85 + 0{,}9 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{x}{2000}\right)^2\right] \cdot 0{,}15$$

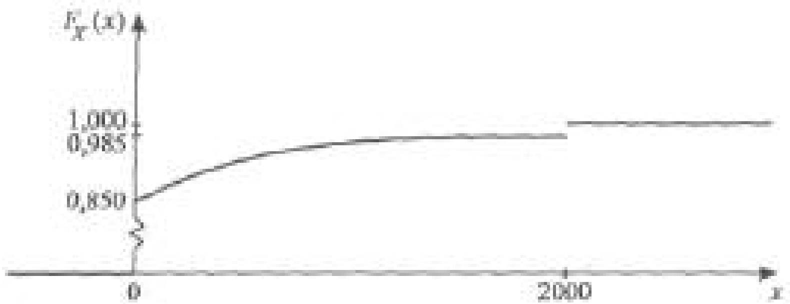
Для $x \ge 2000$

$$F_X(x) = 1 \cdot 0{,}85 + 1 \cdot 0{,}15 = 1$$

Ця функція є розподілом змішаного типа. Як показано на мал. 2, вона має як дискретну («згусток» або стрибок ймовірнісної маси в точці 2000), так і неперервну частину. Такій функції розподілу відповідає комбінація функції ймовірності

$P(X=0) = 0{,}85$, $\qquad P(X=1) = 0{,}015$,

(10)



Мал. 2. Функція розподілу випадкової величини $X = IB$

та щільності

$$f_X(x) = \begin{cases} F_X'(x) = 0{,}000135\left(1 - \dfrac{x}{2000}\right), 0 < x < 2000 \\ 0, x \le 0, x \ge 2000 \end{cases}$$

Моменти випадкової величини X можна підрахувати наступним чином:

$$E\left[X^k\right] = 0 \cdot P(X = 0) + 2000^k \cdot P(X = 2000) + \int_0^{2000} x^k f_X(x)dx \qquad (11)$$

Зокрема, $E[X] = 120$ і $E[X^2] = 150000$. Тому $D[X] = 135600$.

Існує ряд формул, що зв'язують моменти випадкових величин з умовними математичними сподіваннями. Для математичного сподівання і для дисперсії ці формули мають вигляд

$$E[W] = E[E[W \mid V]],$$

(12)

$$D[W] = D[E[W \mid V]] + E[D[W \mid V]],$$

(13)

Мається на увазі, що вирази в лівих частинах цієї рівності обчислюються безпосередньо за допомогою розподілу випадкової величини W. При обчисленні виразів в правих частинах, а саме $E[W|V]$ і $D[W|V]$, використовується умовний розподіл величини W при фіксованому значенні V. Таким чином, ці вирази є функціями від випадкової величини V, і ми можемо обчислити їх моменти, використовуючи розподіл V.

Умовні розподіли використовуються в багатьох актуарних моделях, і це дозволяє безпосередньо застосовувати виписані вище формули. У нашій моделі X=IB. Розглядаючи випадкову величину X як W і випадкову величину I як V, отримуємо

$$E[X] = E[E[X \mid I]], \quad (14)$$

$$D[X] = D[E[X \mid I]] + E[D[X]]. \quad (15)$$

Запишемо

$$\mu = E[B \mid I = 1] \ ,$$

(16)

$$\sigma^2 = D[B \mid I = 1] \ ,$$

(17)

та розглянемо умовні математичні сподівання

$$E[X \mid I = 0] = 0 \quad (18)$$

$$E[X \mid I = 1] = E[B \mid I = 1] = \mu. \quad (19)$$

Формули (18) і (19) визначають $E[X \mid I]$ як функцію від випадкової величини I, що може бути записано у вигляді наступної формули:

$$E[X \mid I] = \mu I \quad (20)$$

Це означає, що

$$E[E[X\mid I]]=\mu E[I]=\mu q\ , \tag{21}$$

$$D[E[X|I]]=\mu^2 E[I]=\mu^2 q(1-q)$$
(22)

Оскільки $X = 0$ при $I = 0$, то

$$D[X\mid I=0]=0 \tag{23}$$

Для $I = 1$ маємо $X = B$ та

$$D[X\mid I{=}1]{=}D[B|\mathrm{I}{=}1]{=}\mu^2 E[I]{=}\sigma^2 \tag{24}$$

Формули (23) та (24) можна об'єднати :

$$D[X \mid I]=\sigma^2 I$$
(25)

Таким чином,

$$E[D[X\mid I]]=\sigma^2 E[I]=\sigma^2 q\ . \tag{26}$$

Підставимо (23), (22) і (26) в (14) та (15) й отримаємо

$$E[X]=\mu q\ , \tag{27}$$

$$D[X]=\mu^2 q(1-q)+\sigma^2 q\ . \tag{28}$$

Застосуємо отримані формули для обчислення $E[X]$ і $D[X]$ в прикладі автомобільного страхування (мал. 2). Оскільки функція щільності випадкової величини B за умови $I = 1$ виражається формулою

$$f_{B|I}(x\,|\,1)=\begin{cases}0{,}0009\left(1-\dfrac{x}{2000}\right), 0<x<2000,\\ 0,\ x\le 0,\ x\ge 2000,\end{cases}$$

та $P(B{=}2000|I{=}1) = 0{,}1$. Маємо

$$\mu=\int_0^{2000} 0{,}0009x\left(1-\frac{x}{2000}\right)dx+0{,}1\cdot 2000=800,$$

$$E\left[B^2\mid I=1\right]=\int_0^{2000} 0{,}0009x^2\left(1-\frac{x}{2000}\right)dx+0{,}1\cdot 2000^2=1000000,$$

$$c^2 = 1000000 - 800^2 = 360000.$$

Нарешті, при q = 0,15, з формул (27) і (28) ми отримаємо наступні рівності :

$$E[X]=800(0{,}15)=120,$$

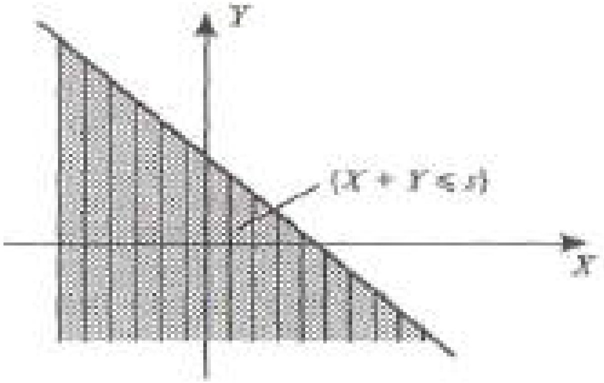
$$D[X]=(800)^2(0{,}15)(0{,}85)+(360000)(0{,}15)=135600.$$

Для опису іншої страхової ситуації можна запропонувати інші моделі для випадкової величини B. Як приклад розглянемо модель для числа смертей, які трапляються в результаті авіаційних катастроф за річний період діяльності авіакомпанії. Ми можемо почати з випадкової величини X, що описує число смертей для одного рейса, а потім підсумувати такі випадкові величини по всіх рейсах за рік. Для одного рейсу подія I = 1 позначатиме настання авіакатастрофи. Кількість B смертей, що спричинила ця катастрофа, представлятиметься добутком двох випадкових величин L і Q, де L — коефіцієнт завантаженості літака, тобто число осіб, що знаходилися на борту у момент авіакатастрофи, і Q — доля смертельних результатів серед осіб, що знаходилися на борту. Число смертей B представляється саме таким чином, оскільки окрема статистика для величин L і Q буває доступнішою, ніж статистика для випадкової величини B. Отже, $X = ILQ$. Хоча доля смертельних результатів серед осіб, що знаходилися на борту, і число осіб, що знаходилися на борту, ймовірно, пов'язані між собою, та як перше наближення можна передбачити, що випадкові величини L і Q незалежні.

4. Суми незалежних випадкових величин

У моделі індивідуальних ризиків страхові виплати, що виконує страхова компанія, представляються як сума виплат (вимог) багатьом окремим особам.

Нагадаємо два методи визначення розподілу суми незалежних випадкових величин. Розглянемо спочатку суму двох випадкових величин, $S = X + Y$, вибірковий простір яких змальований на мал. 3.



Мал. 3. Подія $\{X + Y \le s\}$.

Пряма $X + Y = s$ та область, що знаходиться пої цією прямою, є подією $\{S = X + Y \le s\}$. Тому функція розподілу випадкової величини S має вигляд

$$F_S(s) = P(S \le s) = P\{X + Y \le s\} \tag{29}$$

Для двох дискретних невід'ємних випадкових величин ми можемо скористатися формулою повної ймовірності і записати (29) у вигляді

$$F_S(s) = \sum_{y \le s} P\{X + Y \le s \mid Y = y\} P(Y = y) = \sum_{y \le s} P\{X \le s - y \mid Y = y\} P(Y = y)\,. \tag{30}$$

Якщо X та Y незалежні, остання сума може бути переписана у вигляді

$$F_S(s) = \sum_{y \le s} F_X(s - y) f_Y(y). \tag{31}$$

Функція ймовірності, відповідна до цієї функції розподілу, може бути знайдена за формулою

$$f_S(s) = \sum_{y \le s} f_X(s - y) f_Y(y). \tag{32}$$

Для неперервних невід'ємних випадкових величин формули, відповідні до формул (30), (31) і (32), мають вигляд

$$F_S(s) = \int_0^s P(X \le s - y \mid Y = y) f_Y(y) dy, \tag{33}$$

$$F_S(s) = \int_0^s F_X(s-y) f_Y(y)dy, \tag{34}$$

$$f_S(s) = \int_0^s f_X(s-y) f_Y(y)dy.$$

(35)

Коли або одна, або обидві випадкові величини X і Y мають розподіл змішаного типа (що характерний для моделей індивідуальних ризиків), формули аналогічні, але більш громіздкі. Для випадкових величин, які можуть набувати також вд'ємних значень, суми і інтеграли в приведених формулах беруться по всіх значеннях у від $-\infty$ до $+\infty$.

В теорії ймовірностей операція у формулах (31) і (34) називається згорткою двох функцій розподілу $F_x(x)$ і $F_y(y)$ і позначається через $F_x(x)*F_y(y)$. Операція згортки може також бути визначена для пари функцій ймовірності або функцій щільності за допомогою формул (32) і (35).
Для визначення розподілу суми більш ніж двох випадкових величин ми можемо використовувати ітерації процесу взяття згортки. Для $S=X_1+X_2+\ldots+X_n$, де X_i є незалежними випадковими величинами, F позначає функцію розподілу випадкової величини X_i, а F^k є функцією розподілу випадкової величини $X_1+X_2+\ldots+X_k$, ми отримаємо

$$F^{(2)} = F_2 * F^{(1)} = F_2 * F_1,$$

$$F^{(3)} = F_3 * F^{(2)},$$

$$F^{(4)} = F_4 * F^{(3)},$$

………………………

$$F^{(n)} = F_n * F^{(n-1)}.$$

Наступний приклад ілюструє цю процедуру для трьох дискретних випадкових величин.

Приклад 1. Випадкові величини X_1, X_2 та X_3 незалежні і мають розподіли, які визначаються стовпцями (1), (2) і (3) приведеної нижче таблиці. Виписати функцію ймовірностей і функцію розподілу випадкової величини $S=X_1+X_2+X_3$.

Розв'язок. У таблиці використовуються позначення, введені перед прикладом:

- У стовбцях (1)–(3) міститься наявна інформація.
- Стовбець (4) отриманий з стовбців (1) і (2) застосуванням формули (32).
- Стовбець (5) отриманий з стовбців (3) і (4) застосуванням формули (32).

x	(1) $f_1(x)$	(2) $f_2(x)$	(3) $f_3(x)$	(4) $f^{(2)}(x)$	(5) $f^{(3)}(x)$	(6) $F_1(x)$	(7) $F^{(2)}(x)$	(8) $F^{(3)}(x)$
0	0,4	0,5	0,6	0,20	0,120	0,4	0,20	0,120
1	0,3	0,2	0,0	0,23	0,138	0,7	0,43	0,258
2	0,2	0,1	0,1	0,20	0,140	0,9	0,63	0,398
3	0,1	0,1	0,1	0,16	0,139	1,0	0,79	0,537
4	0,0	0,1	0,1	0,11	0,129	1,0	0,90	0,666
5	0,0	0,0	0,1	0,06	0,115	1,0	0,96	0,781
6	0,0	0,0	0,0	0,03	0,088	1,0	0,99	0,869
7	0,0	0,0	0,0	0,01	0,059	1,0	1,00	0,928
8	0,0	0,0	0,0	0,00	0,036	1,0	1,00	0,964
9	0,0	0,0	0,0	0,00	0,021	1,0	1,00	0,985
10	0,0	0,0	0,0	0,00	0,010	1,0	1,00	0,995
11	0,0	0,0	0,0	0,00	0,004	1,0	1,00	0,999
12	0,0	0,0	0,0	0,00	0,001	1,0	1,00	1,000

Визначення стовпця (5) завершує знаходження функції ймовірності для випадкової величини S. Її функція розподілу в стовбці (8) є набором часткових сум стовбця (5), починаючи зверху. Для наочності ми включили стовбець (6), функцію розподілу для стовбця (1), стовбець (7), який можна отримати безпосередньо із стовбців (1) і (6), застосовуючи формулу (31), і стовбець (8), що визначається аналогічно за допомогою стовбців (3) і (7). Стовбець (5) можна визначити із стовбця (8) послідовним відніманням.

Перейдемо до розгляду двох прикладів з неперервними випадковими величинами.

Приклад 2. Нехай випадкова величина X має рівномірний розподіл на інтервалі (0,2), і нехай випадкова величина Y не залежить від X і має рівномірний розподіл на інтервалі (0,3). Визначимо функцію розподілу випадкової величини $S = X + Y$.

Розв'язок. Оскільки розподіли випадкових величин X і Y неперервні, скористаємося формулою (34):

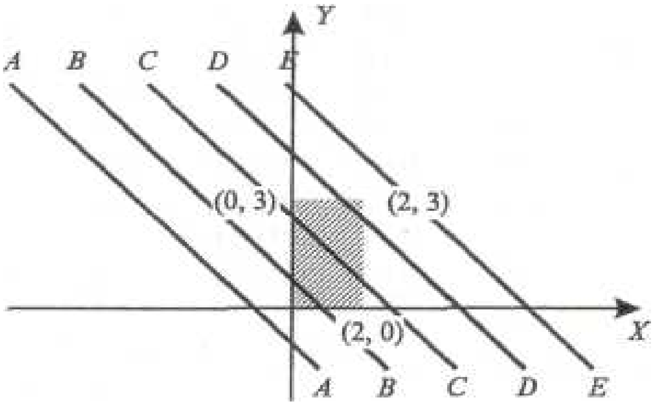
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \dfrac{x}{2}, 0 \le x < 2, \\ 1, x \ge 2, \end{cases} \qquad \text{та} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, 0 < y < 3, \\ 0, y \le 0, y \ge 3. \end{cases}$$

Тоді маємо

$$F_S(s) = \int_0^s F_X(s-y) f_Y(y) dy .$$

Вибірковий простір випадкових величин X і Y ілюструється малюнком 4. Прямокутна область містить всі можливі значення пари X і Y. Подія, що цікавить нас, $X + Y \le s$, зображається на малюнку для п'яти значень s. Для кожного значення пряма перетинає вісь Y в точці s і пряму $X = 2$ в точці $s - 2$. Значення функції F_s для цих п'яти випадків описуються наступною формулою:

$$F_S(s) = \begin{cases} 0, s < 0, (\textit{прямаA}) \\ \int_0^s \frac{\mathrm{s-y}}{2}\frac{1}{3} dy = \frac{s^2}{12}, 0 \le s < 2, (\textit{прямаB}) \\ \int_0^{s-2} 1\frac{1}{3} dy + \int_{s-2}^{s} \frac{\mathrm{s-y}}{2}\frac{1}{3} dy = \frac{s-1}{3}, 2 \le s < 3, (\textit{прямаC}) \\ \int\limits_0^{s-2} 1\frac{1}{3} dy + \int\limits_{s-2}^{3} \frac{\mathrm{s-y}}{2}\frac{1}{3} dy = 1 - \frac{(5-s)^2}{12}, 3 \le s < 5, (\textit{пряма}\mathrm{D}) \\ 1, \mathrm{s} \ge 5, (\textit{пряма}\mathrm{E}) \end{cases}$$



Мал. 4. Згортка двох рівномірних розподілів

Приклад 3. Розглянемо три незалежні випадкові величини X_1, X_2, X_3. Для i = 1,2,3 випадкова величина X_i має показників розподіл та $E[X_i]=1/i$. Знайдемо функцію щільності випадкової величини $S=X_1+X_2+X_3$ за допомогою операції згортки.

Розв'язок. За умовою маємо

$$f_1(x)=e^{-x},\qquad f_2(x)=2e^{-2x},\qquad f_3(x)=3e^{-3x},\qquad x>0.$$

Користуючись формулою (35) тричі, отримаємо

$$f^{(2)}(x)=\int_0^x f_1(x-y)f_2(y)dy=\int_0^x e^{-(x-y)}2e^{-2y}dy=2e^{-x}\int_0^x e^{-y}dy=2e^{-x}-2e^{-2x},\quad x>0,$$

$$f_S(x)=f^{(3)}(x)=\int_0^x f^{(2)}(x-y)f_3(y)dy=\int_0^x\left(2e^{-(x-y)}-2e^{-2(x-y)}\right)3e^{-3y}dy=$$

$$=6e^{-x}\int_0^x e^{-2y}dy-6e^{-2x}\int_0^x e^{-y}dy=\left(3e^{-x}-3e^{-3x}\right)-\left(6e^{-2x}-6e^{-3x}\right)=3e^{-x}-6e^{-2x}+3e^{-3x},\qquad x>0.$$

Інший метод визначення розподілу суми незалежних випадкових величин заснований на єдинності породжуючої функції моментів, яка для випадкової величини X визначається співвідношенням $M_x(t)=E[e^{tX}]$. Якщо це математичне сподівання є скінченим для всіх t з деякого відкритого інтервалу, що містить початок координат, то $M_X(t)$ є єдиною породжуючою функцією моментів розподілу випадкової величини *X* в тому сенсі, що не існує іншої функції, відмінної від $M_X(t)$, яка теж була б породжуючою функцією моментів розподілу величини *X*. Цю єдинність можна використовувати наступним чином: для суми $S = X_1 + X_2 + ... +X_n$

$$M_S(t) = E[e^{tS}] = E[e^{t(X_1+X_2+...+X_n)}] = E[e^{tX_1}e^{tX_2}...e^{tX_n}].$$

(36)

Якщо $X_1, X_2, ..., X_n$ незалежні, то математичне сподівання добутку у формулі (36) дорівнює добутку математичних сподівань $E[e^{tX_1}]E[e^{tX_2}]...E[e^{tX_n}]$, так що

$$M_S(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)...M_{X_n}(t). \qquad (37)$$

Знаходження явного вираження для того єдиного розподілу, який відповідає породжуючій функції моментів (37), завершило б знаходження розподілу випадкової величини *S*. Якщо вказати його в явному вигляді не вдається, то можна проводити його пошук за допомогою чисельних методів.

Приклад 4. Розглянемо випадкові величини з прикладу 3. Визначимо функцію щільності випадкової величини $S=X_1+X_2+X_3$, користуючись породжуючою функцією моментів величини S.

Розв’язок. Згідно з рівністю (37), $M_S(t) = \frac{1}{1-t}\frac{2}{2-t}\frac{3}{3-t}$, що можна записати у вигляді $M_S(t) = \frac{A}{1-t} + \frac{2B}{2-t} + \frac{3C}{3-t}$ за допомогою метода розкладу на найпростіші дробові доданки. Розв’язком є $A = 3$, $B = —3$, $C = 1$. Але $\beta/(\beta\text{-}t)$ є породжуючою функцією моментів показникового розподілу з параметром β, так що функція щільності випадкової величини *S* має вигляд

$$f_S(t) = 3e^{-x} - 3\left(2e^{-2x}\right) + 3e^{-3x}.$$

Приклад 5. При дослідженні випадкових процесів був введений до розгляду *зворотній розподіл Гауса.* Він використовується як розподіл випадкової величини B страхових виплат. Функція щільності і породжуюча функція моментів зворотнього розподілу Гауса задаються формулами

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\beta}} x^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{(\beta x - \alpha)^2}{2\beta x} \right], \qquad x>0,$$

$$M_X(t) = \exp\left[\alpha \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2t}{\beta}} \right) \right].$$

Знайдемо розподіл випадкової величини $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$, де випадкові величини X_1, X_2,...,X_n незалежні й мають однакові зворотні розподіли Гауса.

Розв’язок. Скориставшись формулою (37), отримаємо наступний вираз для породжуючої функції моментів випадкової величини S:

$$M_S(t) = [M_X(t)]^n = \exp\left[n\alpha \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2t}{\beta}} \right) \right].$$

Породжуючій функції моментів $M_s(t)$ відповідає єдиний розподіл, і можна переконатися, що S має зворотній розподіл Гауса з параметрами $n\alpha$ і β..

5. Наближення для розподілу суми

Центральна гранична теорема дає метод знаходження чисельних значень для розподілу суми незалежних випадкових величин. Зазвичай ця теорема формулюється для суми незалежних і однаково розподілених випадкових величин X_1, X_2, ..., де $E[X_i]=\mu$, $D[X_i]=\sigma^2$.

Для будь-якого n нормована випадкова величина $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{c}$, де $\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$, має математичне сподівання 0 та дисперсію 1. Як відомо, послідовність таких розподілів (при n=1,2...) прямує до стандартного нормального розподілу. Коли n достатньо велике, ця теорема застосовується для того, щоб наблизити розподіл випадкової величини X_n нормальним розподілом з середнім μ і дисперсією σ^2/n. Аналогічно, розподіл суми n випадкових величин наближається нормальним розподілом з середнім значенням $n\mu$ і дисперсією $n\sigma^2$. Ефективність такої апроксимації залежить не лише від числа доданків, але й від близькості розподілу доданків до нормального. У багатьох елементарних курсах статистики вказується, що n має бути не менше за 30 для того, щоб апроксимація була розумною. Проте одна з програм для генерації нормально розподілених випадкових величин, що використовуються в імітаційному моделюванні, реалізує нормальну випадкову величину у вигляді середнього 12 незалежних рівномірно розподілених на інтервалі (0,1) випадкових величин.

У багатьох моделях індивідуальних ризиків випадкові величини, що входять в суми, не є однаково розподіленими. Це буде проілюстровано прикладами в наступному розділі. Центральна гранична теорема поширюється і на послідовності неоднаково розподілених випадкових величин.

Для ілюстрації деяких застосувань моделі індивідуальних ризиків ми скористаємося нормальною апроксимацією розподілу суми незалежних випадкових величин, щоб отримати чисельні рішення. Якщо $S = X_1 + X_2 + ... +X_n$, то

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k],$$

та якщо випадкові величини $X_1, X_2,...,X_n$ незалежні, то

$$D[X] = \sum_{k=1}^{n} D[X_k].$$

Для розгляду застосування нам потрібно лише:

• знайти середні значення та дисперсії випадкових величин, що моделюють індивідуальні втрати (вимоги);

• скласти їх для того, щоб отримати середнє і дисперсію втрат страхової компанії в цілому;

• скористатися нормальним розподілом.

Продемонструємо цю послідовність дій у наступному розділі.

6. Застосування у страховій справі

У цьому розділі на чотирьох прикладах ілюструються результати другого розділу і використання нормального наближення.

Приклад 6. Компанія, що займається страхуванням життя, пропонує договір страхування на випадок смерті на термін один рік з виплатами розміру 1 і 2 одиниць особам, вірогідність смерті яких складає 0,02 або 0,01. Таблиця, що приводиться нижче, показує число осіб n_k в кожному з чотирьох класів, утворених відповідно до виплати b_k та ймовірністю настання страхового випадку q_k:

k	q_k	b_k	n_k
1	0,02	1	500
2	0,02	2	500
3	0,10	1	300
4	0,10	2	500

Страхова компанія має намір зібрати з цієї групи з 1800 осіб суму, що дорівнює 95-й процентілі розподілу загальної величини страхових виплат по цій групі. Крім того, вона хоче, щоб доля кожної особи в цій сумі була пропорційна очікуваному розміру страхової виплати для даної особи. Доля особи з номером j, середня виплата котрій дорівнює $E[X_j]$, повинна скласти $(1-\theta)E[X_j]$. З вимоги 95-ої процентілі випливає, що $\theta>0$. Величина перевищення $\theta E[X_j]$ є *ризиковою надбавкою*, а θ називається *відносною ризиковою надбавкою*. Знайдемо θ.

<u>Розв’язок.</u> Величина θ визначається співвідношенням $P\left(S \le (1+\theta)E[S]\right) = 0{,}95$, де $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{1800}$. Це твердження про ймовірність є еквівалентним до наступного співвідношення:

$$P\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{D[S]}} \le \frac{\theta E[S]}{\sqrt{D[S]}}\right) = 0{,}95.$$

Відповідно до того, що було нагадане про центральну граничну теорему в попередньому розділі, ми апроксимуємо розподіл випадкової величини $\frac{S - E[S]}{\sqrt{D[S]}}$ стандартним нормальним розподілом і скористаємося його 95-й процентілью, звідки отримуємо:

$$\frac{\theta E[S]}{\sqrt{D[S]}} = 1{,}645.$$

Нам залишається лише підрахувати математичне сподівання та дисперсію випадкової величини S і знайти θ з цього рівняння. Для чотирьох класів, на які розбиті застраховані особи, ми отримуємо приведені нижче результати:

k	q_k	b_k	Середнє $\mu_k = b_k\, q_k$	Дисперсія $b_k^2\, q_k\, (1 - q_k)$	n_k
1	0,02	1	0,02	0,0196	500
2	0,02	2	0,04	0,0784	500
3	0,10	1	0,10	0,0900	300
4	0,10	2	0,20	0,3600	500

Таким чином,

$$E[S] = \sum_{j=1}^{1800} E[X_j] = \sum_{k=1}^{4} n_k \mu_k = 160,$$

$$D[S] = \sum_{j=1}^{1800} D[X_j] = \sum_{k=1}^{4} n_k b_k^2 q_k (1 - q_k) = 256.$$

Тому відносна ризикова надбавка дорівнює

$$\theta = 1{,}645\frac{\sqrt{D[S]}}{E[S]} = 1{,}645\frac{16}{160} = 0{,}1645.$$

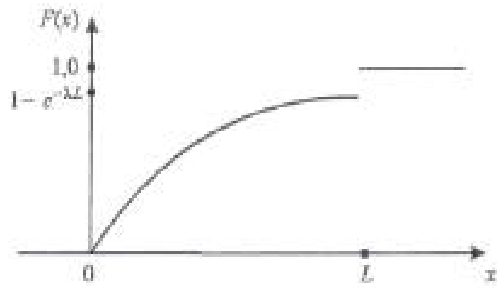
Приклад 7. Клієнти компанії, що займається страхуванням автомобілів, розподілені по двох класах:

Клас	Кількість клієнтів в класі	Ймовірність страхового випадку	Розподіл вимог $B_{k,}$ параметри усіченого показникового розподілу	
k	n_k	q_k	λ	L
1	500	0,10	1	2,5
2	2000	0,05	2	5,0

Усічений показовий розподіл визначається за допомогою функції розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, 0 \le x < L, \\ 1, x \ge L. \end{cases}$$

Це розподіл змішаного типу з функцією щільності $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, 0 < x < L$, і «згустком» імовірнісної маси $e^{-\lambda L}$ в точці L. Графік цієї функції розподілу показаний на малюнку 5.



Мал. 5. Усічений показників розподіл

Як і раніше, ймовірність того, що загальна величина страхових виплат перевершує суму, зібрану із страхувальників, має бути рівною 0,05. Ми будемо вважати, що відносна ризикова надбавка θ має бути однаковою в кожному з двох даних класів. Обчислимо θ.

<u>Розв'язок.</u> Цей приклад дуже схожий на попередній. Відмінність полягає лише в тому, що величини страхових виплат тепер є випадковими величинами. Спочатку ми отримаємо вирази для моментів усіченого показового розподілу. Це буде підготовчий крок для вживання формул (27) та (28):

$$\mu = E[B \mid I=1] = \int_0^L x\lambda e^{-\lambda x}dx + Le^{-\lambda L} = \frac{1-e^{-\lambda L}}{\lambda},$$

$$E[B^2 \mid I=1] = \int_0^L x^2\lambda e^{-\lambda x}dx + L^2e^{-\lambda L} = \frac{2(1-e^{-\lambda L})}{\lambda^2} - \frac{2Le^{-\lambda L}}{\lambda},$$

$$\sigma^2 = E[B^2 \mid I=1] - \left(E[B \mid I=1]\right)^2 = \frac{1-2\lambda Le^{-\lambda L} - e^{-2\lambda L}}{\lambda^2}.$$

Скориставшись значеннями параметрів, даними в умові, і застосовуючи формули (27) і (28), ми отримуємо наступні результати:

k	q_k	μ_k	σ_k^2	Середнє $q_k\,\mu_k$	Дисперсія $\mu_k^2\, q_k(1-q_k)+\sigma_k^2\, q_k$	n_k
1	0,10	0,9179	0,5828	0,09179	0,13411	500
2	0,05	0,5000	0,2498	0,02500	0,02436	2000

Таким чином, загальна сума страхових виплат S має наступні моменти

$$E[S]= 500(0{,}09179)+2000(0{,}02500)=95{,}89,$$

$$D[S]=500(0{,}13411)+2000(0{,}02436)=115{,}78.$$

Умова для визначення θ залишається такою ж, що і в прикладі 6, а саме,

$$P\left(S \le (1+\theta)E[S]\right) = 0{,}95.$$

Скориставшись знову апроксимацією нормальним розподілом, отримуємо

$$\frac{\theta E[S]}{\sqrt{D[S]}} = 1{,}645,$$

$$\theta = \frac{1{,}645 \cdot \sqrt{115{,}78}}{95{,}89} = 0{,}1846 .$$

Приклад 8. У портфелі страхової компанії міститься 16 000 договорів страхування на випадок смерті на термін один рік відповідно до наступної таблиці:

Розмір виплат	Кількість застрахованих осіб
b_k	n_k
10000	8000
20000	3500
30000	2500
50000	1500
100000	500

Ймовірність страхового випадку q для кожного з 16 000 клієнтів (ці події передбачається взаємно незалежними) дорівнює 0,02. Компанія хоче встановити рівень власного утримання. Для кожного страхувальника рівень власного утримання є величиною, виплати нижче за яку ця компанія (компанія-цедент) здійснює самостійно, а виплати, що перевершують цю величину, покриваються за договором перестраховки іншою компанією (перестрахувальником). Наприклад, якщо рівень власного утримання дорівнює 200 000, то компанія залишає за собою покриття суми до 20 000 для кожного страхувальника і купує перестраховку для покриття різниці між страховою виплатою і сумою 20 000 для кожного з 4500 страхувальників, страхові виплати для яких перевершують суму 20 000. Критерієм для ухвалення рішення компанія вибирає мінімізацію ймовірності того, що страхові виплати, залишені на власному утриманні, плюс та сума, яка платиться за перестраховку, перевищить суму 8 250 000. Перестраховка коштує 0,025 на одиницю покриття (тобто 125% від очікуваної величини страхових виплат за одиницю 0,02).

Ми вважаємо, що даний портфель є замкнутим: нові страхові договори, укладені протягом поточного року, не враховуватимуться в описаному процесі ухвалення рішення. Потрібно розрахувати рівень власного утримання, який мінімізує ймовірність того, що залишені на власному утриманні страхові виплати плюс вартість перестраховки перевищать суму у 8 250 000.

Частковий розв'язок. Проведемо спочатку всі обчислення, вибравши за одиницю виплат 10 000. В якості ілюстрації будемо вважати, що випадкова величина S є величиною виплат, залишених на власному утриманні, та задається наступною таблицею:

Виплати на власному утриманні	Кількість застрахованих осіб
b_k	n_k
1	8000
2	8000

Тоді

$$E[S]=\sum_{k=1}^{2} n_k b_k q_k = 8000\cdot 1\cdot 0{,}02 + 8000\cdot 2\cdot 0{,}02 = 480,$$

$$D[S]=\sum_{k=1}^{2} n_k b_k^2 q_k (1-q_k) = 8000\cdot 1\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98 + 8000\cdot 4\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98 = 784.$$

До цих страхових виплат S, залишених на власному утриманні, додається сума перестраховочних премій. Разом, загальна величина покриття за такою схемою складає

$$8000(1)+3500(2)+2500(3)+1500(5)+500(10)=35000.$$

Сума, що залишається на власному утриманні, дорівнює

$$8000(1)+8000(2)=24000.$$

Таким чином, загальна перестрахована величина виплати складає 35000 – 24000=11 000 і вартість перестраховки складає 275. Значить, при рівні власного утримання 2, залишені на власному утриманні страхові виплати плюс вартість перестраховки складають S+275. Критерій для ухвалення рішення заснований на ймовірності того, що ця загальна сума перевищить 825:

$$P(S+275>825)=P(S>550)=P\left(\frac{S-E[S]}{\sqrt{D[S]}}>\frac{550-E[S]}{\sqrt{D[S]}}\right)=P\left(\frac{S-E[S]}{\sqrt{D[S]}}>2{,}5\right).$$

Використовуючи нормальний розподіл, ми отримуємо, що ця величина приблизно дорівнює 0,0062. Середні значення страхових виплат при страхуванні ексцедента збитковості, як одного з видів перестраховки, можна апроксимувати, користуючись нормальним розподілом як розподіл загальних страхових виплат.

Нехай загальні страхові виплати X мають нормальний розподіл з середнім μ і дисперсією σ^2, і нехай d позначає безумовну франшизу в договорі страхування ексцедента збитковості. Тоді середня величина страхових виплат дорівнює

$$E[I_d(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_d^{\infty}(x-d)\exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dx. \tag{38}$$

За допомогою заміни змінних $z=\frac{x-\mu}{c}$ та визначення β із співвідношення $d=\mu+\beta c$, ми отримуємо наступний загальний вираз для середнього значення величини страхових виплат за договором страхування ексцедента збитковості в припущенні, що розподіл є нормальним:

$$E[I_d(x)]=\sigma\left\{\frac{\exp\left(-\beta^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}}-\beta[1-\Phi(\beta)]\right\}. \tag{39}$$

Через $\Phi(x)$ позначена функція розподілу випадкової величини із стандартним нормальним розподілом.

Приклад 9. Розглянемо страховий портфель з попереднього прикладу. Знайдемо математичне сподівання величини страхових виплат при договорі страхування ексцедента збитковості, якщо

(a) індивідуальна перестраховка відсутня і безумовна франшиза встановлена рівною 7 500 000;

(b) встановлено власне утримання у розмірі 20 000 по індивідуальних страхових договорах і величина безумовної франшизи по портфелю складає 5 300 000.

Розв'язок.

(a) За відсутності індивідуальної перестраховки і при переході до 10 000 в якості грошової одиниці

$$E[S]= 0{,}02[8000(1)+3500(2)+2500(3)+1500(5)+500(10)]=700,$$

$$D[S]=(0{,}02)(0{,}98)[8000(1)+3500(4)+2500(9)+1500(25)+500(100)]=2487{,}2,$$

таким чином,

$$\sigma(S) = 50{,}86.$$

Далі, оскільки

$$\beta = \frac{d - \mu}{\sigma} = \frac{750 - 700}{50{,}86} = 0{,}983,$$

використання формули (39) дає

$$P=50{,}86[0{,}24608 - (0{,}983)(0{,}16280)]=4{,}377,$$

що складає суму 43 770 в умовних одиницях.

(b) У прикладі 8 ми отримали середнє значення і дисперсію сумарної величини страхових виплат при індивідуальному рівні власного утримання 20 000, які дорівнюють 480 і 784, відповідно, якщо розглядати 10 000 як умовну одиницю. Таким чином, $\sigma(S) = 28$.

Так як

$$\beta = \frac{d - \mu}{c} = \frac{530 - 480}{28} = 1{,}786,$$

використання формули (39) дає

$$P=28[0{,}08100 – (1{,}786)(0{,}03707)]=0{,}414,$$

що складає суму 4140 умовних одиниць.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Г.И. Фалин. Математический анализ рисков в страховании. М.: Российский юридический издательский дом, 1994.

2. Г.И.Фалин, А.И.Фалин. Введение в актуарную математику (математические модели в страховании). М: Изд-во Моск. ун-та, 1994.

3. Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., and Nesbitt, C.J.: Actuarial Mathematics. 2nd ed., Society of Actuaries. Schaumburg, Illinois, 1997.

4. Эмбрехтс П., Клюппельберг К. Некоторые аспекты страховой математики.//Теория вероятностей и ее применения. 1993. –т.38, вып.2. – с. 375-416.

5. Виноградов О.П., Вероятность разорения страховой компании // Теория вероятностей и ее применения. –1998.–т.43, вып.1. –с. 352-360.

Навчальне видання

Роженко Наталя Олександрівна

Модель індивідуальних ризиків

Методичний посібник для студентів IV курсу
факультету математики спеціалізації «математична економіка»

Видано в авторській редакції

Підп. до друку 20.04.2012. Формат 60x84/8.
Гарн. Таймс. Умов.-друк. арк.1,04.Тираж 25 прим.
Зам. № 451

Видано і віддруковано:
Одеський національний університет
імені І.І. Мечникова
Свідоцтво ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua