

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова

Методичні вказівки до розв'язання задач по темі
«Кінематика, поступальний рух»

ОДЕСА – 2007

Розглянуто на засіданні кафедри загальної і хімічної фізики (протокол № 4 від 11.12.2006 р.)

Рекомендовано до друку Вченою радою фізичного факультету ОНУ ім. І. І. Мечникова

Укладачі:

доцент кафедри загальної і хімічної фізики ОНУ
Гоцульский В.Я.,

доцент кафедри загальної і хімічної фізики ОНУ
Кондратьев Е.М.

доцент кафедри загальної і хімічної фізики ОНУ
Поліщук Д. Д.,

Рецензенти:

доцент кафедри теоретичної фізики ОНУ
Олейник В.П.

доцент кафедри теоретичної та експериментальної
ядерної фізики ОНПУ
Вожжов В.Ф.

ВСТУП

Вміння розв'язувати задачі дозволяє ясніше розуміти суть фізичних явищ, більш свідомо інтерпретувати прикладні питання теорії і впевненіше моделювати реальні події. Сам процес рішення задачі, в першому наближенні, методично повторює шлях науково-дослідної роботи і містить, нехай у спрощеній формі, всі етапи наукового дослідження:

- а) аналіз умови поставленої задачі;
- б) формування фізичної моделі;
- в) складання алгоритму рішення задачі і його реалізація (включаючи математичну модель та послідовність відповідних перетворень),
- г) вибір системи одиниць вимірювання та розрахунки;
- д) аналіз результатів та перевірка непротиворічності отриманої формули і числових значень відомим, поведінки розв'язку в умовах на межах визначеності параметрів задачі та відповідність результатів уявленню здорового глузду.

Кожен з цих етапів супроводжується контролем ходу рішення: знаходженням альтернативних способів, оптимізацією, перевіркою справедливості виконання окремих операцій, узгодженням розмірностей фізичних величин і т.п., що сприяє розвитку навичок критичного мислення й вмінню грамотно репрезентувати отримані результати.

Починати рішення можна рекомендувати співвідносно до наступного алгоритму:

1. Уважне вичитування умови задачі і **скорочений запис умови**.
2. Формування блоку вихідних даних, **фізичних і математичних законів**, принципів, необхідних математичних співвідношень. Введення усіх фізичних величин, констант і змінних, які повинні

фігурувати при описі обговорюваного фізичного явища.

3. Введення необхідної **графічної інформації**. Це можуть бути якісні залежності фізичних величин, спрощена схема системи, тобто просторовий ескіз, або(та) ланцюги логічних зв'язків між подіями у фізичній ситуації, що розкривається.
4. Далі необхідно зосередитися на виділенні головних, ключових моментів умови задачі і **ФОРМАЛІЗУВАТИ УМОВУ**. Перевірити коректність поставленої задачі, і границі можливого використання запропонованої моделі явища.
5. Ще раз переглянути відповідний теоретичний розділ курсу і спробувати відтворити логічний зв'язок між різними фізичними величинами і факторами, визначити послідовність дій у наступних математичних перетвореннях.
6. Якщо задача здається складною, то спробувати вирішити більш прості задачі на задану тему або переглянути приклади з лекційного матеріалу.
7. У будь-якому випадку намагатися на рівні словесного алгоритму сконструювати ідею рішення задачі (Надалі, після деякого тренування і придбаних навичок, цей етап буде реалізовуватись автоматично).
8. Сам алгоритм розв'язання задачі може до самого останнього моменту залишатися в стадії розробки. Власне, складання і реалізація алгоритму і є технічною частиною рішення задачі.
9. Завершальним етапом є аналіз отриманого результату. Ця типово ігрова ситуація вкрай важлива для закріплення придбаної навички і для більш детального і заглибленого засвоєння положень теорії.

Необхідно зазначити, що у первинному аналізі задачі (п.1-3) є декілька важливих елементів, скоріше,

пояснень – “для чого це”:

а). Дуже важливо, наприклад, уміти скорочено записувати умову задачі. У самому записі іноді міститься алгоритм розрахунків: наприклад, якщо в задачі потрібно порівняти які-небудь величини, то математично це виражається або результатом ділення порівнюваних величин або різницею. Запис же, найчастіше, підказує, що деякі величини, невідомі з умови, можуть скоротитися.

Це ж досить важливо при формуванні яких-небудь *n-x* елементів за індукцією (Як приклад: перший рік народження відзначається по його завершенню, тобто 50-й відповідає 50 повним прожитим рокам - звідси 50-літній ювілей відповідає 51 днів народження).

У самому записі іноді підкреслюється відмінність початкових і кінцевих умов, що загострює увагу не стільки на умовах на межі, а на процесі, що приводить до переходу, а це може спрямувати рішення зовсім в інше русло. Так, навіть, запис розмірності параметрів, які використовуються, може служити підказкою, містком до відомої формули.

б). Не менш важливим елементом аналізу може служити вивчення запропонованих одиниць вимірювання і, якщо цього вимагають які-небудь додаткові умови, зведення їх до єдиної системи.

Зауважимо, що це не завжди доцільно. Шкільна вимога використання системи СІ робить, іноді, погану послугу. Так, аналіз рішення або зіставлення його з, відомими з життєвого досвіду або якихось інших джерел, фактами зручніше проводити, використовуючи одиниці виміру СГС, а, найчастіше, і позасистемні (наприклад, *торр*, більш відомий як *мм рт. ст.*).

При вивченні одиниць вимірювання варто звертати увагу на повноту інформації, що представлена самою одиницею – так, слова «за першу секунду руху» можуть доповнювати зазначене значення швидкості уявленням про час процесу, початкову і кінцеву швидкості, прискорення.

Визначення ємності відокремленої кулі в см, нагадує відому залежність ємності від об'єму кулі і т.п.

В цій методичній роботі розглядаються основні прийоми розв'язання задач за темою “кінематика поступального руху”. Щоб спростити роботу з конспектом приводяться досить докладні відомості з теоретичної частини відповідного розділу фізики. У додатку винесені довідкові зведення з векторної алгебри, математичного аналізу, аналітичної геометрії в обсязі, необхідному для рішення задач.

Кінематика займається описом руху, відволікаючись від його причин. Для опису руху можна вибирати різні системи відліку. У різних системах відліку рух тіла сприймається по-різному. У кінематиці при виборі системи відліку керуються лише розуміннями доцільності та зручності, що визначається конкретними умовами. Так, при розгляді руху тіл на Землі природно зв'язати систему відліку з Землею, що ми і будемо робити. При розгляді руху самої Землі систему відліку зручніше зв'язувати із Сонцем і т.п. Ніяких принципових переваг однієї системи відліку в порівнянні з іншими в кінематиці вказати не можна, оскільки рух відносний.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ КІНЕМАТИКИ ТА ЇХ МАТЕМАТИЧНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ

1.1. Базові визначення

Матеріальною точкою зветься фізичне тіло, розмірами якого можна нехтувати в умовах конкретної задачі.

Траєкторією точки зветься лінія, що описується точкою, яка рухається у просторі. Траєкторія може бути

плоскою або просторовою кривою. Закон (рівняння) руху точки встановлює залежність положення точки в просторі від часу. Рух точки в нерухомій системі координат

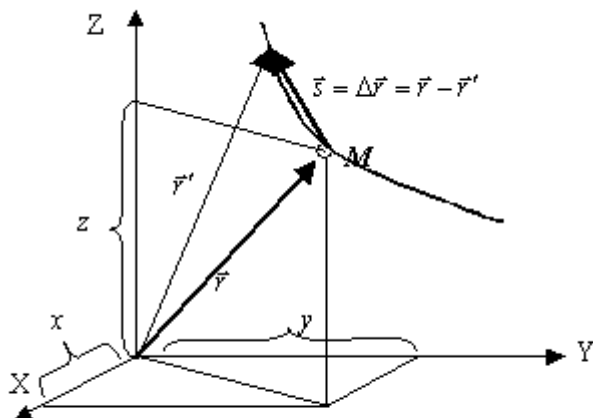


Рис. 1.1

(наприклад, в декартовій) **хуz** визначається завданням трьох функцій (рис.1.1):

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t), \quad (1.1)$$

які звуться рівняннями руху точки. Підставивши в рівняння (1.1) значення часу $t=t_i$, можна визначити координати, отже, положення точки в просторі на цей момент часу. Рівняння (1.1) представляють **параметричні** рівняння траєкторії точки, при цьому роль параметру відіграє сам час. Для одержання рівнянь траєкторії точки в **явній формі** необхідно з рівнянь (1.1) виключити час і одержати залежність у вигляді

$$\varphi(x, y, z)=0, \quad (1.2)$$

яке визначає криву, за якою рухається точка.

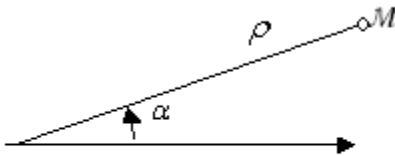
Існують і інші способи завдання руху точки. При векторному способі завдання закону руху, це може бути радіус-вектор точки $\vec{r}$. У друкованих виданнях найчастіше позначення векторних величин реалізується виділенням їх жирним шрифтом $\mathbf{r}$. Для точки M , що рухається, (рис 1.1) радіус-вектор дається як функція часу $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$. Зв'язок між радіусом-вектором і декартовими координатами точки задається рівнянням

$$\mathbf{r}=xi+yj+zk. \quad (1.3)$$

Тут i, j, k — орти (одиничні вектори) осей координат. Якщо в (1.3) прийняти за x, y, z поточні координати точки M , обумовлені рівняннями (1.1), то (1.3) дає закон руху точки у векторній формі.

Переміщення точки визначається як $\mathbf{s}=\Delta\mathbf{r}$.

Якщо траєкторія лежить у площині, то положення точки може бути задане в полярних координатах (ρ, α) . Зв'язок полярних та декартових координат



$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos \alpha ; \\ y &= \rho \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\alpha = \arctg \frac{y}{x}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Рис.1.2

Третій спосіб
завдання руху точки

називається природним. У цьому випадку рух точки визначається рівнянням

$$l=f(t), \quad (1.4)$$

де l — криволінійна координата, уздовж дуги від деякої початкової точки O на траєкторії (Рис.1.3). При цьому способі передбачається, що траєкторія точки, яка рухається, відома. Криволінійна координата — це



Рис.1.3

довжина дуги, яку відраховують в один бік від початкової точки додатною, а в іншу — від'ємною (напрямок позитивного відліку повинний бути заданий).

Шлях (L) може бути визначений як сумарна довжина всіх ділянок траєкторії, які проходить точка під час руху (дивись формули (1.13, 1.14) і більш детальні пояснення в розділі 2).

Однак для формулювання основних законів механіки, за допомогою яких теоретично можуть бути знайдені розглянуті функції, істотні два суттєвих поняття—*швидкості* та *прискорення*.

Розглянемо спочатку окремий випадок, коли матеріальна точка рухається вздовж прямої лінії. Прийнемо цю пряму за координатну вісь X , розташувавши початок координат O в якійсь довільній її точці. Положення матеріальної точки в випадку, що розглядається, визначається однією координатою: $x=x(t)$.

Нехай у якийсь фіксований момент часу t матеріальна точка знаходиться в положенні A . У цей момент її координата дорівнює $x_1=x(t)$. У наступний момент часу матеріальна точка переміститься в положення B з координатою $x_2=x(t+\Delta t)$. За час Δt переміщення матеріальної точки $\Delta x=x_2-x_1=x(t+\Delta t)-x(t)$. Воно

вважається додатним, якщо відбувається за напрямом вісі. Відношення переміщення Δx до Δt зветься *середньою швидкістю матеріальної точки за час Δt* або, точніше, *за час між t і $t + \Delta t$* . Таким чином, за визначенням, середня швидкість дорівнює

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Точніше для будь-якого довільного випадку:

$$\vec{v}_{\text{сер}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} - \text{векторна середня швидкість, або} \quad (1.5)$$

$$v_{\text{сер}} = \frac{|\Delta L|}{\Delta t} - \text{середня швидкість на шляху.}$$

Таке визначення середньої швидкості має сенс для будь-яких значень Δt . Треба виключити тільки значення $\Delta t = 0$, тому що в цьому випадку для середньої швидкості ми одержали би вираз $\frac{0}{0}$, що саме по собі не має ніякого

сенсу. Однак, ніщо не заважає брати проміжок часу Δt як завгодно малим, але відмінним від нуля. Взагалі кажучи, середня швидкість залежить не тільки від t , але і від Δt . Будемо тепер, залишаючи момент часу t незмінним, брати проміжок часу Δt все меншим і меншим, спрямовуючи його до нуля. Тоді буде зменшуватися до нуля і переміщення Δx . Їх відношення, при цьому, як показує досвід, буде наближатися до цілком визначеної границі, що може залежати тільки від t , але вже не буде залежати від Δt . Ця границя зветься *миттєвою (ще кажуть - в точці) швидкістю матеріальної точки в момент часу t* :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (1.6)$$

У математиці ця межа зветься *похідною* від функції $\mathbf{r}(t)$ за аргументом t . Похідна за часом позначається символами

$$\dot{\mathbf{r}}'_t = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.7)$$

Використовуючи це поняття, можна сказати, що *справжня (дійсна) або миттєва швидкість* V_x є похідною координати x за часом, або похідною переміщення за часом.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt} \vec{i} + \frac{dr_y}{dt} \vec{j} + \frac{dr_z}{dt} \vec{k} = \\ &= \dot{r}_x \vec{i} + \dot{r}_y \vec{j} + \dot{r}_z \vec{k} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Швидкість матеріальної точки, взагалі кажучи, є функцією часу: $\mathbf{v}=\mathbf{v}(t)$. Похідна швидкості за часом зветься ***прискоренням матеріальної точки***. Прискорення ми позначаємо через ***a***. Таким чином, за визначенням, прискорення

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} = \\ &= \dot{v}_x \vec{i} + \dot{v}_y \vec{j} + \dot{v}_z \vec{k} \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.2. Про зміст похідної та інтеграла в додатках до фізичних питань

Процес граничного переходу, за допомогою якого визначається похідна, зветься *диференціюванням*. Саме задача про визначення швидкості довільного руху привела

до цього поняття Ньютона (1643-1727), що, поряд з Лейбницем (1646—1716), є засновником диференціального та інтегрального обчислення. Позначення — $\frac{dx}{dt}$ для

похідної належить Лейбницю. На символ $\frac{dx}{dt}$ в математиці

варто дивитися як на єдине ціле, а не як на відношення двох «нескінченно малих». У математиці первинним є поняття похідної, а не диференціала.

Однак, у додатках математики до фізики треба враховувати те, що фізичні величини отримуються, з рештою, в результаті конкретних вимірів, а всі виміри супроводжуються помилками і вносять зміни в природний хід явищ. Ця обставина, таким чином, **робить неможливим граничний перехід**, що вводиться в математиці при визначенні похідної. Припустимо, наприклад, що вимірюється швидкість кулі, що рухається у повітрі. Задача зводиться до виміру відстані і проміжку часу, за який куля проходить цю відстань. Якщо час Δt взяти дуже великим, то за цей час швидкість кулі може помітно зменшитися через опір повітря. Відношення $\frac{dx}{dt}$, у

цьому випадку може виявитися помітно меншим швидкості кулі в розглянутий момент часу. Зменшуючи час Δt , ми помітимо, що, починаючи з визначеного моменту, відношення $\frac{dx}{dt}$ у межах доступної точності

виміру перестає змінюватися, якщо не зважати на випадкові помилки, що супроводжують кожен вимір.

Подальше зменшення Δt безглузде. Воно може тільки погіршити справу. Це обумовлено тим, що відносна точність будь-якого виміру тим менша, чим менша вимірювана величина. Не представляє, наприклад, особливо великих зусиль знайти довжину в один метр із

точністю до одного міліметра, тобто з відносною точністю 1/1000. Але вимірити з такою ж відносною точністю довжину в один міліметр значно складніше. Чим менше Δt , тим менше точність, з якою ми обчислюємо відношення $\frac{dx}{dt}$. Це показує, що в розглянутому прикладі через

помилки вимірів граничний перехід до $\Delta t \rightarrow 0$ фізично не може бути здійснений. Обчислити дійсну швидкість, або

похідну $v = \frac{dx}{dt}$ з фізичних вимірів можна лише

наближено. Оптимальна величина часу Δt , при якій точність обчислення дійсної швидкості максимальна, визначається конкретними умовами.

Таким чином, у фізиці похідна виступає як відношення кінцевих, але досить малих змін функції та аргументу, а не як межа цього відношення.

Величини, що задовольняють зазначеним вимогам, у фізиці розглядаються як *фізично нескінченно малі*, і з ними у фізиці працюють як з математичними диференціалами.

Такі ж справи з поняттям інтеграла. У математиці інтеграл визначається граничним переходом

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=1}^n f(x_i)\Delta x_i \quad (1.10)$$

Числовий проміжок (a,b) розбивається на n проміжків $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n$. Довжина кожного з них, помножується на значення функції $f(x_i)$ у довільній точці, яка лежить посередині проміжку, що розглядається. Потім складається сума $\sum f(x_i)\Delta x_i$, і виконується перехід до межі $n \rightarrow \infty$ в припущенні, що довжина кожного з часткових проміжків прямує до нуля. У фізиці, однак, через помилки вимірів або із принципів міркувань (наприклад, через

атомістичну структуру речовини) розподіл проміжку (a, b) на часткові проміжки менше визначеної довжини (величина якої залежить від конкретних умов) втрачає зміст. Через це граничний перехід до $n \rightarrow \infty$ не може бути виконаний до кінця, а повинний бути обірваний на якомусь місці. Це означає, що в фізиці інтеграл виступає не як межа суми, а як сума великого числа досить малих доданків $\sum f(x_i)\Delta x_i$. В цьому фізичному розумінні ми і будемо визначати інтеграл. При цьому для розрахунків і інтеграла і похідної це міркування несуттєве. Просто треба мати на увазі, що вони виконуються з обмеженою точністю.

Ще простіше під інтегралом розуміти вираз:

$$\int_a^b dx = (b - a), \quad (1.11)$$

або в загальному випадку

$$\int_{x_0}^x dx = (x - x_0) = \Delta x, \quad (1.12)$$

якщо $x = x(t)$, то $dx = x'_t(t)dt$ і тоді

$$\int_{t_0}^t x'_t(t)dt = (x - x_0) = \Delta x,$$

тобто, переміщення можна знаходити знаходимо як

$$\Delta \vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v}(t)dt. \quad (1.13)$$

Шлях, тоді, буде розраховуватись як

$$\Delta L = \int_{t_0}^t |\vec{v}(t)| dt. \quad (1.14)$$

Якщо рух непрямолінійний, а траєкторія являє собою плоску криву, то за допомогою похідної можна знайти її **кривину** в будь-якій точці:

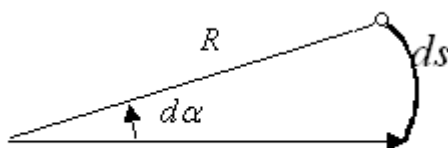


Рис.4

$$K = \frac{d\alpha}{ds};$$

а радіус кривини

$$R = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Якщо траєкторія задана у явному вигляді $y=f(x)$, або $\rho=f(\alpha)$, то

$$K = \frac{y''_x}{[1 + y'^2_x]^{3/2}}; \quad K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2_\alpha - \rho\rho''_\alpha}{(\rho^2 + \rho'^2_\alpha)^{3/2}}, \quad (1.15)$$

а елементарна довжина дуги виходячи з умови

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx, \quad (1.16)$$

тому довжину, що подолала точка, рухаючись вздовж траєкторії (шлях)

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx. \quad (1.17)$$

В залежності від вибору координат явна форма запису рівняння траєкторії може приймати більш простий вираз. Проілюструємо це наступним простим прикладом:

Задача 1.1.

Матеріальна точка обертається на шатуні довжиною R з постійною швидкістю навколо нерухомої точки O . Знайти траєкторію точки в явному вигляді і шлях, пройдений за час, що пройшов між моментами t_1 і t_2 .

Рішення.

а). Декартові координати. У цьому випадку, оскільки кут α між шатуном і віссю X змінюється рівномірно

($\alpha = \omega \cdot t = \frac{v}{R}t$), а координати залежать від часу так:

$$x = R \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad y = R \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Піднесемо до квадрату і знайдемо суму обох виразів. Тоді одержимо

$$x^2 + y^2 = R^2 \cdot (\cos^2(\omega \cdot t) + \sin^2(\omega \cdot t)), \text{ тобто}$$

$x^2 + y^2 = R^2$ - про що з аналітичної геометрії відомо, що це рівняння кола.

б). Полярні координати. Необхідно в явному вигляді знайти $\rho = f(\alpha)$.

Але при будь-яких кутах у даній задачі довжина шатуна не змінюється і рівняння траєкторії набуває простого вигляду

$\rho = R = \text{const}$ - в аналітичній геометрії - це рівняння кола.

Очевидно, що і шлях простіше шукати в полярних координатах:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \rho(\alpha) d\alpha = R \int_{t_1}^{t_2} d\alpha = R \int_{t_1}^{t_2} d(\omega \cdot t) = R\omega \int_{t_1}^{t_2} dt = R\omega \cdot (t_2 - t_1).$$

Задача 1.2.

Знайти рівняння траєкторії тіла, яке кинули під кутом до горизонту, найбільшу висоту h його підйому над рівнем початкового положення, відстань s по горизонталі, при якому точка досягне найвищого положення, а також дальність польоту тіла по горизонталі l .

Рішення. Тіло M , кинуте під кутом α до горизонту, якщо нехтувати опором повітря, рухається відповідно до рівнянь:

$$x = v_0 \cos(\alpha t), \quad y = v_0 \sin(\alpha t) - \frac{gt^2}{2} \quad (1.18)$$

У цих рівняннях v_0, α, g - *постійні* величини.

Для визначення рівняння траєкторії точки в явній формі треба виключити з рівнянь руху час. Одержавши з першого рівняння

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

і підставивши цей вираз в рівняння (1.18), знайдемо рівняння траєкторії $y = f(x)$:

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (1.19)$$

З аналітичної геометрії відомо, що воно є рівнянням параболи з віссю симетрії, яка паралельна осі Оу, гілками зверненої донизу (рис.1.5). Дійсно, кожному значенню y

відповідають два значення x . Ця парабола проходить через початок координат, тому що значення координат $x=0$, $y=0$ задовольняють її рівнянню.

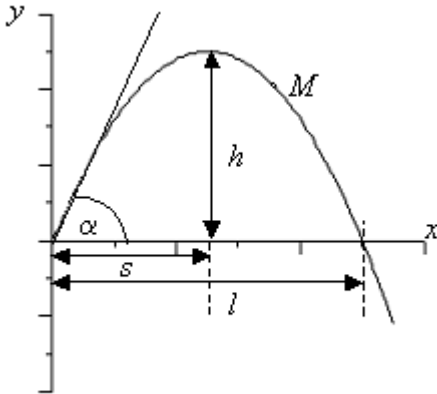


Рис. 1.5

Щоб визначити найбільшу висоту підйому точки h , треба знайти за правилами диференціального обчислення екстремальні значення функції. Для цього обчислимо похідну від y по координаті x і прирівняємо її нулю.

$$\text{Оскільки } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx},$$

$$\text{а } \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \neq 0, \text{ то}$$

можна обмежитися прирівнюванням до нуля похідної $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0$. Отже, y досягає екстремального

значення в момент часу $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$. Підставляючи це

значення часу в рівняння (1.19), знаходимо найбільшу висоту підйому.

$$h = y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{gv_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}. \quad (1.20)$$

Це дійсно максимум тому що друга похідна y від'ємна при будь-яких t : $\ddot{y} = -g$.

Абсциса, при якій тіло досягає найвищого положення, відповідає часу t_1 . Підставляємо t_1 у рівняння (1.18) і одержуємо

$$s_x = x(t_1) = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Дальність польоту визначаємо з рівняння траєкторії (1.19), якщо покласти в ньому $y=0$:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0,$$

звідки знаходяться два значення для x :

$$x_0 = 0, \quad x_2 = l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (1.21).$$

Звернемо увагу на те, що розв'язати задачу можна і без диференціювання, з огляду на те, що траєкторія – парабола, причому така, що проходить через початок координат. Відразу поклавши в рівнянні траєкторії (1.19) y рівним нулю знайдемо корені, перший з яких дорівнює нулю, а другий визначає дальність польоту. Вносячи в рівняння (1.19) замість x половину дальності польоту $\frac{x_2}{2}$,

знаходимо максимальну висоту польоту h .

Задача 1.3.

Знайти у скільки разів відрізняється радіус кривизни траєкторії в задачі 2 у початковий момент часу і в найвищій точці траєкторії.

Рішення. У явному виді траєкторія тіла кинутого під кутом до горизонту:

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (\text{формула (1.18) задача 2}).$$

В декартових координатах радіус кривизни траєкторії визначається як

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{[1 + y_x'^2]^{3/2}}{y_x''}.$$

Нас цікавлять абсциси зі значеннями

$$x_0 = 0, \text{ та } x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

$$y_x'(0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$y_x'(x_2) = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

З огляду на те, що друга похідна $y_x'' = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} - \text{const}$,

відношення радіусів кривизни в заданих умовою точках траєкторії буде:

$$\frac{R(x_1)}{R(x_2)} = \frac{[1 + (\operatorname{tg} \alpha)^2]^{3/2}}{[1 + 0^2]^{3/2}} = [1 + (\operatorname{tg} \alpha)^2]^{3/2} = (\cos \alpha)^{-3}.$$

Таке розв'язання інколи називають “за визначенням”, або кажуть – “в лоба”.

Фізичне моделювання ситуації дозволяє значно спростити розв'язок. Справді, в найвищій точці траєкторії швидкість горизонтальна, оскільки завжди напрямлена по дотичній до траєкторії. Її величина $v = v_{x0} = v_0 \cdot \cos \alpha$ - горизонтальна компонента швидкості не змінюється (силою опору нехтуємо і єдина сила, що діє – сила тяжіння). В цій точці доцентрове прискорення дорівнює $\vec{g}$, оскільки $\vec{g} \perp \vec{v}$. Доцентрове прискорення знаходиться як

$$a_{\text{дц}} = \frac{v^2}{R}; \Rightarrow R(x_2) = \frac{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}{g}.$$

В початковій точці швидкість $v = v_0$, а доцентрове прискорення дорівнює проекції $\vec{g}$ на напрямок, перпендикулярний до $\vec{v}$. Тут $a_{\text{дц}} = g \cdot \cos \alpha$, тоді

$$a_{\text{дц}} = \frac{v^2}{R}; \Rightarrow R(x_1) = \frac{v_0^2}{g \cdot \cos \alpha}.$$

Тоді маємо як і у попередньому випадку: $\frac{R(x_1)}{R(x_2)} = (\cos \alpha)^{-3}$.

Але іноді розв'язок “за визначенням” може виявитись значно зручнішим. Розглянемо приклад такої ситуації:

Задача 1.4.

Граната, кинута вертикально вгору, розривається у верхній точці траєкторії на два осколки так, що в початковий момент часу швидкості осколків спрямовані горизонтально. У який момент часу вектори швидкостей будуть перпендикулярні один одному, якщо опором повітря можна знехтувати?

Формалізуємо умову. У вихідному формулюванні можуть фігурувати замість осколків акробати, що відштовхуються друг від друга, сталеві кулі, з'єднані пружиною і т.п. Замість цього умову одержуємо у виді:

Два тіла у полі тяжіння в початковий момент часу мають швидкості V_1 і V_2 спрямовані горизонтально в протилежні сторони. У який момент часу вектори швидкостей будуть перпендикулярні?

Рішення. У шкільному курсі ця задача розв'язувалась би традиційно: по горизонталі сили не діють, тому горизонтальні складові швидкостей не

змінюються, по вертикалі діє сила тяжіння, тому $\mathbf{g}$ – прискорення тіл і $V_y = gt$. Потім для моменту часу, коли вектори перпендикулярні, будуються прямокутні трикутники. Для кожного застосовується теорема Піфагора та записується система рівнянь, з якої знаходять час.

Наскільки спрощується розв'язок якщо скористуватись тим, що скалярний добуток перпендикулярних векторів дорівнює нулю! Справді:

Залежності швидкостей від часу:

$$\mathbf{V}_1(t) = V_1 \mathbf{i} + g \mathbf{j}; \quad \mathbf{V}_2(t) = -V_2 \mathbf{i} + g \mathbf{j}.$$

Скалярний добуток векторів за визначенням:

$$\mathbf{V}_1(t) \cdot \mathbf{V}_2(t) = (V_{x1} V_{x2} + V_{y1} V_{y2} + V_{z1} V_{z2}) = 0;$$

Робимо підстановку і одержуємо:

$$V_1(-V_{x2}) + g \cdot g t = 0;$$

$$t = \frac{\sqrt{V_1 V_2}}{g} \text{ - Відповідь.}$$

Як бачимо, розв'язки можуть бути різноманітними і доцільність вибору тієї чи іншої методичної схеми залишається за тим, хто розв'язує задачу. Із свого боку можемо тільки відмітити, що формалізовані розв'язки “за визначенням” значно цікавіші для аналізу. Вони дозволяють “покрутити”, “помацати” кінцеву формулу з метою з'ясування поведінки параметрів задачі в межах умов, дозволяють поширити розв'язок на інші випадки та відчувати вплив лімітуючи факторів.

2. Графічне представлення кінематичних характеристик

Графік поведінки кінематичних параметрів із часом здебільшого суттєво розширює уявлення про події, які описані в умовах задач із розділу «кінематика». Інформація, яку можна отримати по графікам, інколи дозволяє:

- а) визначити кількісні характеристики руху по геометричним параметрам, яким надають певний фізичний зміст;
- б) не звертаючись до аналітичного рішення, відповісти, бодай якісно, на поставлені запитання;
- в) розбити, а, інколи навпаки, згрупувати події, що або розрізняють, або вимагають аналогічного опису співвідносно до режимів руху;
- г) при збігу або перехрещуванні в одних координатах графіків різних рухів з'ясувати зміст понять “зустрічі”, “повернення до місця старту”, “тіло почало рухатись”, “одночасність подій” і т.і., а також їх аналітичні аналоги.

Умовно всі задачі на означену тему можна розбити на дві категорії:

- задачі в яких розв'язання спирається на заданий графік,
- задачі в яких графік може зіграти допоміжну роль, більш наочно представляючи поведінку об'єктів, які рухаються.

Ми будемо розбиратись із першим типом, а що до другого, то можемо тільки порадити завжди, при розв'язанні задач, пробувати представити собі зміну кінематичних характеристик із часом нарівні зі схематичним просторовим зображенням, малюнками. Це, щонайменше, означає ще одну додаткову спробу із ряду напрямків рішення, які вже були використані.

Перед тим, як перейти до безпосереднього розв'язання графічних задач, для того, щоб уникнути

неоднозначності трактування, представляється необхідним дати означення найбільш відомим кінематичним характеристикам, які визначають зміну положення в просторі¹. А похідні характеристики (швидкість, прискорення) можна тоді співвідносити з цим параметром: наприклад, швидкість руху вздовж заданої траєкторії, прискорення на шляху до....Нагадаємо, що фізики, тоді коли в умові спеціально не обговорено про який параметр йдеться, вважають, що положення в просторі (точніше його зміна) задається переміщенням.

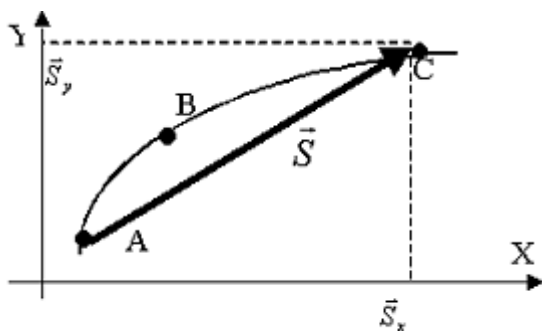


Рис.2.1

Отже, розглянемо рух матеріальної точки на площині, в координатах XOY ². Будемо вважати, що в початковий момент вона знаходилась в точці А. Далі вздовж позначеної траєкторії матеріальна точка послідовно змінювала своє положення, в тому рахунку проходячи через точки В та С. Під траєкторією будемо розуміти лінію, яка описує при своєму русі матеріальна точка, а за довжину траєкторії (L_{AB}) – відстань, яку вона долає

¹ Визначення, які тут запропоновані, не ставлять за мету підмінити добре відомі, можна сказати, стандартні визначення, що приводяться в підручниках з фізики, а, скоріше, лише трактуються і, таким чином, дозволяють уникнути невизначеності при рішенні задач.

² Можна це ж робити в об'ємі, але, загубивши в наочності, ми не виграємо в спільності, тому таке ускладнення можна вважати недоречним.

проходячи послідовно всі точки траєкторії АВС. Для прикладу, їдучи по магістралі Одеса-Київ, ми послідовно проходимо точку А(Одеса), В (Криве Озеро) і С (Київ). Скільки б разів ми не їхали по цьому маршруту, довжина траєкторії не зміниться. Інша справа, коли йдеться про шлях. Під шляхом (l) треба розуміти суму всіх довжин траєкторій, які послідовно проходить матеріальна точка вздовж траєкторії. Наприклад, виїхавши із Одеси(А) ми аж в Кривому Озері (В) згадали про залишені вдома папери і повернули назад. Забравши папери, знову рушили до Києва і далі ніде маршрут не змінювали. В останньому випадку, рухаючись вздовж однієї і тієї ж траєкторії, ми пройшли значно більшу відстань, що і відмітив лічильник на спідометрі нашого авто($l = L_{AB} + L_{BA} + L_{AB} + L_{BC}$). Отже, завжди $l \geq L$. Гаслом, під яким визначається зміст терміну шлях, є “амортизація”. Насправді, витрачене паливо, стерті шини і т.п. однозначно зв'язують шлях із фактично здоланою вздовж траєкторії відстанню.

Наступна, найбільш важлива для фізиків характеристика, це переміщення ($\vec{S}$). Під переміщенням ми будемо розуміти вектор, який з'єднує початкове та кінцеве положення матеріальної точки. Завдання цього вектора, однозначно визначає певний напрямок в обраній системі координат, відповідно, і проекції цього вектора на осі – X та Y. Що стосовно модуля вектора $\vec{S}$, величини $|\vec{S}|$, то вона визначає довжину модуля переміщення і, тому, характеризує лише “віддаленість” від початкового положення. Очевидно, що ця остання величина не може бути від'ємною. В залежності від конкретики задачі, доцільним буває звернення до всіх згаданих характеристик. Розглянемо приклад.

Після звільнення обох берегів вздовж течії річки, командувач ставить задачу перед капітаном тральника звільнити фарватер від мін для проходження кораблів.

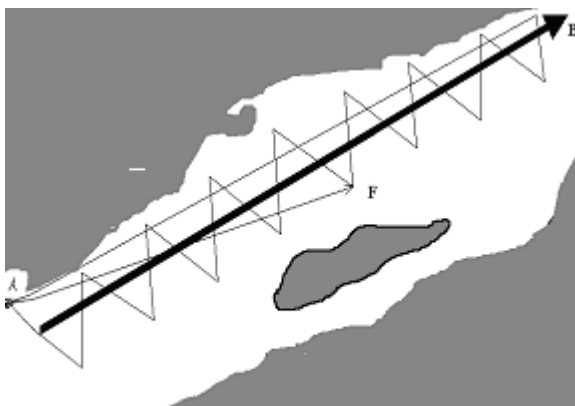


Рис.2.2.

Фарватер задається переміщенням $\vec{S}$. В свою чергу, капітан віддає наказ штурману прокласти курс (на малюнку це зигзагоподібна лінія вздовж фарватеру – саме так рухаються тральники), а це означає, що і траєкторію і її довжину L . Штурман також визначає і шлях(l), враховуючи, що за один світловий день їм не впоратись, більш того - просто не вистачить пального. Саме тому він враховує необхідність повернення на базу від точки F. Начальник рації повинен врахувати, що його радіоапарат зможе забезпечити зв'язок на відстані, яка визначається величиною $|\vec{S}|$. Знайдеться робота і судовому лікарю(або тому, хто виконує його обов'язки) – він повинен понепокійтись про забезпечення команди накомарниками для нейтралізації малярійних комарів, що можуть з'явитись починаючи з і-паралелі, яку пересікає Y-складова вектора переміщення. Як бачимо, всі визначені вище характеристики можуть бути корисними при використанні їх за цільовим призначенням. При цьому одна одну вони не замінюють.

Звернемось тепер безпосередньо до графічних побудов в кінематиці. Одразу визначимось, що відкладання будь-якої векторної величини на графіках

принципово неможливе – йдеться про алгебраїчну величину, що представляє вектор. Що стосовно кількісної міри, то відкладаємо значення відповідають величині (або довжині, модулю) вектора, а напрямок вважається співпадаючим із напрямком осі ординат, причому додатні і від’ємні значення ординати відповідають співвідносно прямому та оберненому напрямку руху.

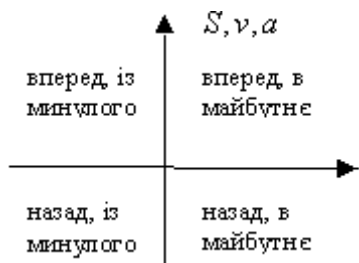


Рис.2.3

Далі, крізь, будемо вважати, що ми маємо справу з прямолінійним рухом матеріальної точки, кінематичні характеристики якої визначаються так, як це показано на Рис.2.3, де знаходження в якомусь квадранті відповідає певному положенню в

просторі відносно точки відліку і обраному початку спостереження – нульовому значенні часу. Здається, що природно було б завжди починати розгляд з нульової відмітки за часом, але інколи якась визначна подія, наприклад, початок руху одного із розглядаємих тіл, або зміна напрямку вектора переміщення вимагають “занулити” час. Тому в нашому розгляді, для більшої спільноти ми не відкидаємо і умовно “від’ємних” (насправді напрямок від минулого до майбутнього залишається і в другому та третьому квадрантах) значень часу, тим більш, що з боку математики ніяких обмежень не передбачається.

Розглянемо графіки переміщення (Рис.2.4), шляху (Рис.2.5) та модуля переміщення (Рис.2.6) в найбільш простій ситуації, в випадку прямолінійного рівномірного руху матеріальної точки (Як вже згадувалось вище, переміщення, як вектор, може бути на графіку представлений лише алгебраїчною величиною. Надалі, для уникнення плутанини, доцільно вважати, що йдеться про

проекцію величини відступу від початку відліку в прямому та оберненому напрямку).

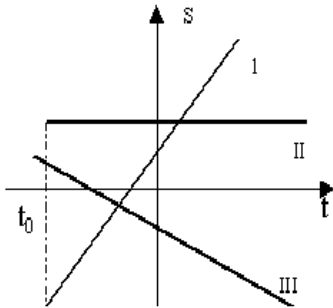


Рис.2. 4

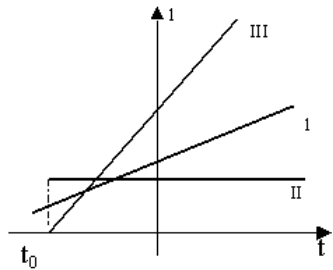


Рис.2.5

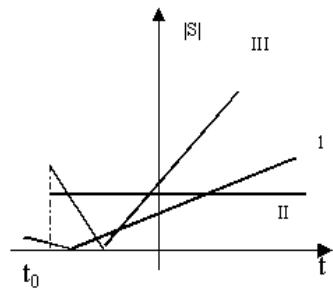


Рис.2.6

Як відомо з математики, графік цієї прямо пропорційної залежності переміщення від часу представляється в аналітичному вигляді, так званім, лінійним законом:

$$S = kt + b, \quad (2.1),$$

причому фізичний зміст коефіцієнта k визначається при відшуванні тангенсу кута нахилу (φ) прямої до осі абсцис:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (2.2),$$

що, очевидно, співпадає із визначенням швидкості:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} \quad (2.3)$$

На Рис.2.4 представлені три різних графіка, які відрізняються значенням швидкості – I – відповідає випадку додатної швидкості, II – нерухомому

стану, а III – від'ємної швидкості. Очевидно, що чим більше значення швидкості, тим більше кут нахилу графіка до осі абсцис. І, таким чином, по цьому графіку можна відшукати не тільки положення точки в будь-який момент

часу, а і знайти важливий кінематичний параметр – швидкість. Звернемось до рис.2.7.

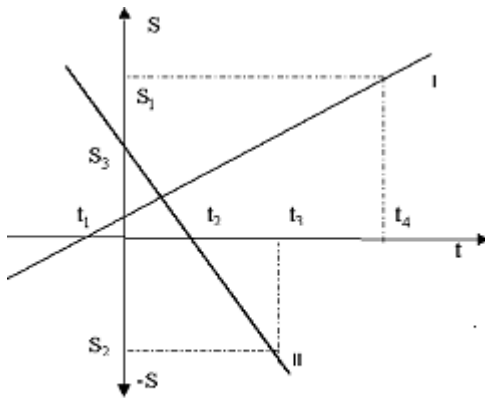


Рис.2. 7

Для прямої I швидкість визначається за формулою:

$$v = \frac{S_2}{t_4 - t_1}$$

причому, так як $S_2 > 0$ і $t_4 - (-t_1) > 0$, то і $v > 0$. Що стосовно другої прямої (II), то

$$v = \frac{-S_2 - S_3}{t_3 - 0} = \frac{-S_2}{t_3 - t_2} = \frac{0 - S_3}{t_2 - 0} < 0.$$

Як бачимо, визначення швидкості не залежить від того, які саме значення прирощень переміщення та часу використовуються. Тут слід відмітити правило, яким часто нехтують при подібних розрахунках. Зміст правила можна відобразити псевдоматематичною формулою, мнемонічним законом:

$$\Delta = T - 0 \quad (2.4),$$

яка означає, що при відшуканні зміни (Δ) треба від кінцевого значення (Т) віднімати початкове (0) і, в ніякому випадку, не навпаки.

Повертаючись до руху, який відображується рисунками 4-6, треба відмітити, що зображення модуля переміщення та шляху може відрізнятися від зображення їх аналога-переміщення. Так, на Рис.2.5 приведені графіки того ж руху, але для шляху. Відмітимо, що розташовані вони можуть бути тільки в I-II квадрантах. Очевидно, що шлях із початку руху може залишатись сталим так, як це є для випадку II або збільшуватись, як це буде у всіх інших випадках (нагадаємо (див. визначення шляху), що стати йому від'ємним настільки ж важко, наскільки важко повернути витрачене автомобілем пальне до карбюратора, або стерту гуму на шину). При цьому, очевидно, що кут нахилу прямих (а, значить, і швидкість) залишаться незмінними за величиною. Отже графік шляху буде симетричним відносно лінії, що проходить через найвищу точку графіка, і паралельній осі абсцис для від'ємного значення швидкості та зсунутим паралельним переносом в I-II квадранти для графіків з додатною швидкістю. Для визначеності і зручності краще вважати, що в початковий момент часу шлях дорівнює нулю.

Що стосовно графіків модуля переміщення (див. рис.2.6), то вони також не знають від'ємних значень і також реалізуються лише в I-II квадрантах, але, на відміну від попередніх, ці графіки можуть мати ділянки з від'ємною швидкістю. Дійсно, ключовим словом для модуля переміщення є "віддаленість"- це означає, що наша матеріальна точка може або наблизитись до початку відліку, або віддалятися від нього (за виключенням (II), що відповідає стану нерухомості). Як видно, обидва графіки, і (I) і (III) спочатку показують наближення до нульового значення переміщення, тобто і модуля переміщення, а потім зміну напрямку. Очевидно, що все, що знаходиться в III та IV квадрантах графіків переміщення, симетрично

відносно осі абсцис переноситься відповідно в II та I квадранти графіків модуля переміщення.

4. Розглянемо рівнозмінний³ прямолінійний рух матеріальної точки. Із визначення прискорення :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_t - v_0}{t - 0} \quad (2.5)$$

Звідки

$$v_t = a \cdot t + v_0. \quad (2.6)$$

З другого боку, за визначенням швидкості:

$$v = \frac{dS}{dt}, \text{ або } dS = v \cdot dt \quad (2.7)$$

Підставляючи (1.6) в (1.7), отримаємо:

$$dS = (a \cdot t + v_0) \cdot dt \quad (2.8)$$

Інтегрування останнього виразу в межах від 0 до текучого значення часу t , дозволяє отримати добре відомий параболічний закон зміни величини переміщення:

$$S = \frac{a \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot t, \quad (2.9)$$

або з урахуванням зв'язку між переміщенням та радіус-вектором ($\vec{S} = \vec{r} - \vec{r}_0$), дає⁴:

$$r = \frac{at^2}{2} + v_0 t + r_0 \quad (2.10)$$

³ Випадок можливої зміни величини **a** принципово не змінить подальший аналіз, але суттєво ускладнить його, тому до розгляду і не приймається.

⁴ Треба відмітити, що коли ідеться про зміну, то $\Delta \vec{r} \equiv \Delta \vec{S}$, тому далі скрізь ми будемо писати $\Delta \vec{r}$ маючи на увазі переміщення за час Δt .

Дві останні складові цього рівняння визначають прив'язку до поля графіка. Справді, при $t=0$ $S=S_0$, що, фактично, означає пересування цього графіка по вертикалі для збігу з означеним S_0 . Зміст же складової $v_0 t$ легко сприймається, коли $S_0=0$ (або коли $S=S_0$). Тоді час, який відповідає стану нерухомості ($v=0$), приймає значення із (2.9) :

$$t = \frac{2v_0}{a} \quad (2.11),$$

що ілюструє зсув вздовж осі $0-t$ в залежності від величини і знаку v_0 .

Що стосовно величини і знаку параметра **a** (прискорення), то вона визначає ступінь розкриття “чаши” графіку (при $a<1$ -широка “чаша”, при $a>1$ – вузька). Звернемося до Рис.2.8. Графік(I) представляє велике додатне значення прискорення (a), тобто, з вузькою “чашою”, а графік (II) – від'ємне і менше за величиною.

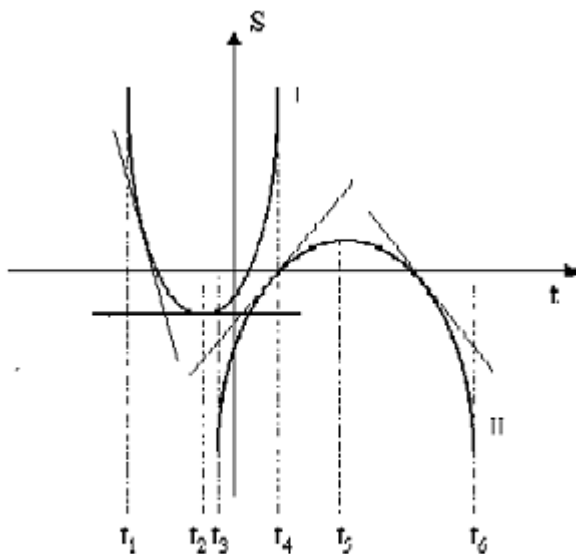


Рис.2.8

Інколи виникає непорозуміння із терміном “гальмування”. Часто-густо мають на увазі випадок, коли $a < 0$. Але, якщо уважно роздивлятись рисунок, то можна помітити, що зменшення модуля швидкості для графіка (II) реалізується лише на ділянці t_3 - t_5 . Спробуємо розібратись більш докладно. Відомо, що похідна від закону графіка функції відображується дотичною до графіка в вибраній точці. В нашому випадку похідна є нічим іншим, як швидкістю. Тобто, наприклад, на графіку (I) швидкість, яку визначають приведені на рисунку дотичні, від від’ємного значення в точці t_1 змінюється до нульового значення в момент t_2 , а потім, в точці t_4 відповідає вже додатному значенню. Так само для графіка (II): додатна швидкість з часом змінюється на від’ємну. Фактично, ситуації “гальмування”, як зменшення величини швидкості, відповідають тільки ліві гілки обох графіків.

Як бачимо, графіки переміщення дають можливість визначити не тільки положення точки на будь-який момент

часу, але і значення швидкості, прискорення та напрямку руху.

Як і в випадку рівномірного руху, графіки шляху та модуля переміщення в випадку нерівномірного руху можуть суттєво змінитись. Побудуємо один із цих графіків(а саме – П(Рис.2.8)) в тому ж масштабі часу, але із зменшенням масштабу ординат, в зв'язку з неможливістю в протилежному випадку розташуватись на сторінці.

Графік модуля переміщення фактично утворюється при незмінній частині, що знаходилась в I-II квадрантах графіків переміщення, з додаванням дзеркального відображення вмісту III-IV квадрантів – так як нас цікавить тільки відстань від початку відліку. Що стосовно графіка шляху, то він будується при відображенні ділянок, на яких ордината зростає (в математичному розумінні) з додаванням інших ділянок віддзеркалених відносно ліній, які проходять через початки цих ділянок паралельно осі абсцис.

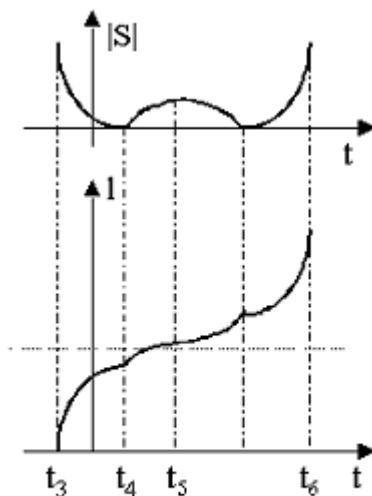


Рис.2.9

Треба відмітити загальну нефізичність поведінки представлених графіків в точках, які відповідають зміні режимів руху. Очевидно, що ці переходи взагалі повинні бути більш плавними і по суті є дуже складними. Але, на змісті поведінки графіків на дільницях між цими точками процеси переходу не впливають, і, тому, вони до розгляду не приймаються.

4. Як ми бачили, графіки дозволяють отримати всю інформацію, що надає аналітичне представлення, більш того, ця інформація наочна та дозволяє уявити весь рух в цілому. Ще більше інформації дає графік швидкості. Розглянемо, як і раніше, прямолінійний рух матеріальної точки. Випадок нерівнозмінного руху опустимо і залишимо на власноручний аналіз, як не дуже цікавий та й не особливо складний. В такому випадку основні рухи, які взагалі можуть бути реалізовані, представляються трьома типовими видами прямих (Рис.2.10): рівномірний або в один, або в другий бік – пряма (II), рівноприскорені, які співвідносні з $a < 0$ - пряма (III) та з $a > 0$ – пряма (I).

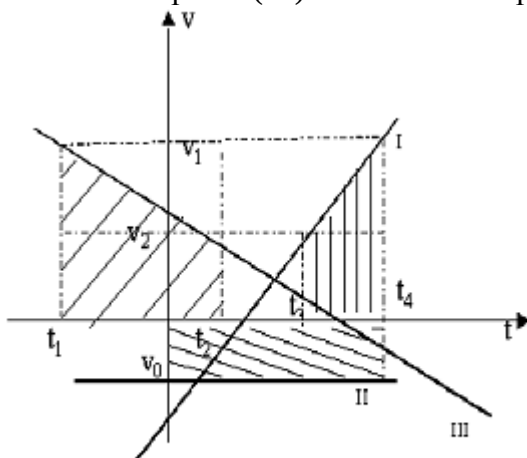


Рис.2.10

Так як похідна від закону, який представляє графіки на рисунку 2.6, за фізичним змістом є не що інше як прискорення, кут нахилу цих прямих дозволяє визначити, так же як в попередніх розділах швидкість, величину та напрямок прискорення. Але ці графіки можуть надати ще інформацію про положення точки, яка рухається, в просторі. Справді, за фізичним змістом добуток $(t_4 - 0) \times (v_0 - 0)$, або площа, що обмежена графіком (II) та віссю абсцис, дорівнює переміщенню, причому, так як $v_0 < 0$, то і переміщення буде “від’ємним”⁵. Аналогічно можна відшукати переміщення і в випадку рівноприскорених⁶ рухів. Розглянемо рух (I) за час $(t_4 - t_3)$. Площа відповідної трапеції можна представити наступним чином:

$$\begin{aligned} S &= v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot (v_t - v_0) \cdot \Delta t = \\ &= (v_2 - v_0) \cdot (t_4 - t_3) + \frac{1}{2} \cdot (v_2 - v_0) \cdot (t_4 - t_3). \end{aligned} \quad (2.12)$$

З останнього виразу, якщо другу складову помножити і розділити на $(t_4 - t_3)$, можна отримати відому формулу для величини переміщення:

$$S = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} \frac{v_t - v_0}{\Delta t} \Delta t \Delta t = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2. \quad (2.13)$$

Подібним чином визначиться величина переміщення і в випадку від’ємного прискорення: $S = (v_1 - 0) \times (t_2 - t_1) - \frac{1}{2} (v_1 - v_2) (t_2 - t_1)$, що, як і в попередньому випадку, перетвориться на формулу для величини переміщення.

⁵ Як вже відмічалось вище, йдеться про протилежний напрямок руху

Слід відзначити, що знак між складовими в отриманій таким чином формулі визначається знаком прискорення:

$$S = v_0 \cdot t \pm \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad (2.14)$$

І останнє. Не важко переконатись, орієнтуючись на останні викладки, що площа, яка визначена в I та II квадрантах, відповідає додатному переміщенню, а в III та IV – від'ємному. Розглянемо декілька задач.

Задача 2.1.

На Рис.2.11 представлені три графіки (I, II та III) залежності швидкості прямолінійного руху матеріальної точки від часу. Треба порівняти за величиною переміщення за проміжок часу $(t_2 - t_1)$ для цих трьох випадків і знайти для першого (I) момент часу, коли миттєве прискорення буде рівним середньому в області $t > 0$.

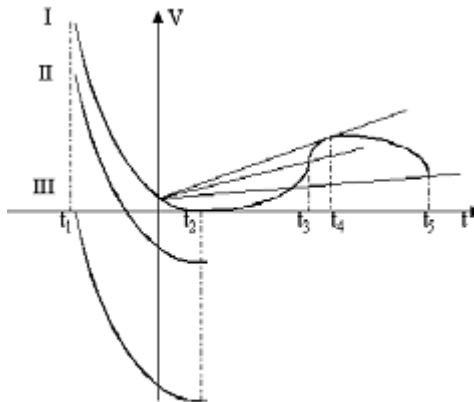


Рис.2.11

⁶ Для нерівноприскорених рухів площа(переміщення) визначається інтегралом

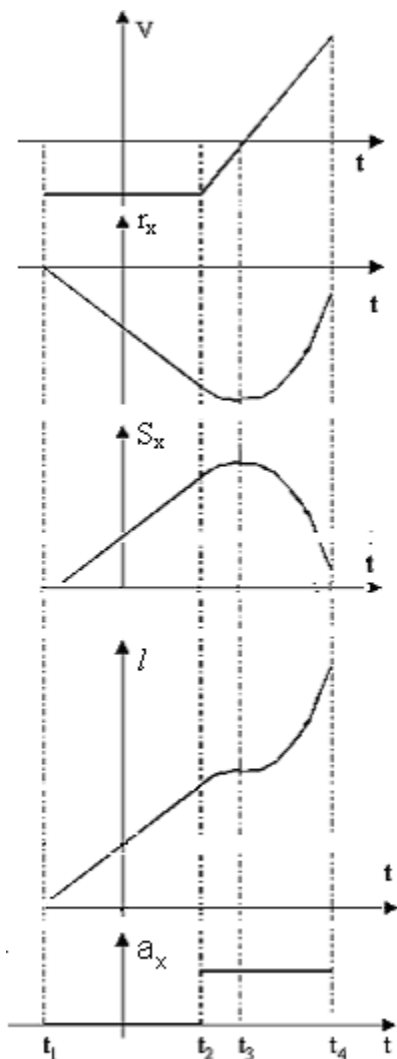


Рис. 2.12

а) Оскільки величина переміщення визначається, фактично, площею під кривою відповідного графіка, то одразу можна визначити випадок найменшого переміщення – це, очевидно, буде випадок (II), який має і від’ємну і наближено дорівнюючу їй додатну ділянку. Графік (I) відповідає більшому переміщенню за той же час, а найбільше реалізується в останньому випадку. Незважаючи на те, що переміщення для такого руху формально від’ємне, його величина, як це легко побачити на рисунку, буде найбільшою.

б) Обидва прискорення визначаються тангенсом кута нахилу відповідної прямої до осі абсцис: в першому випадку, коли йдеться про миттєве прискорення, згадана

пряма є нічим іншим, як дотичною, а в другому – лінією, яка з’єднує відповідну точку графіку із значенням швидкості в початковий момент часу. Об’єднання обох типів прямих в одній лінії реалізується, як видно, тільки для моменту часу t_4 .

Задача 2.2.

По графіку швидкості ($\vec{v}$) прямолінійного руху матеріальної точки побудувати якісно графіки переміщення ($\vec{S}$), модуля переміщення ($|\vec{S}|$), шляху (l) та прискорення (a)

Побудову графіків треба починати з аналізу ситуації: який саме рух відбувається і в якому напрямку. Далеке минуле нас не цікавить – як саме наша точка розігналась до початкового значення швидкості несуттєво. Для нас рух починається на момент часу t_1 . На цей час точка рухається в напрямку від’ємних значень ординати і її швидкість залишається незмінною до моменту t_2 .

Переміщення рівномірно (за лінійним законом) зростає в тому ж напрямку. Так само ведуть себе модуль переміщення і шлях, але їх значення зростають в додатному напрямку: шлях не може зменшуватись взагалі, а модуль переміщення зростає, демонструючи збільшення відстані від початку відліку.

Починаючи з t_2 процес руху принципово змінюється (можна припустити, що на точку почала діяти якась сила в напрямку додатних значень ординати). Швидкість починає зменшуватись за величиною і лінійний закон її зміни свідчить про те, що рух рівноприскорений, а переміщення змінюється за параболічним законом. Нахил цієї ділянки графіку швидкості визначає, що прискорення додатне, а, значить, гілки параболи орієнтовані вгору($\cup$). Зменшення величини швидкості до нульового значення свідчить про те, що графік переміщення повинен в цей час відповідати лівій гілці цієї параболи. Графіки модуля переміщення і шляху віддзеркалюють цю поведінку.

Принципово на ділянці (t_3-t_4) нічого не змінюється, але починаючи з цього моменту напрямок руху стає протилежним. Тому графік переміщення відповідає правій гілці тієї ж параболи (швидкість зростає), а графік модуля

переміщення віддзеркалює його. Що стосовно графіку шляху, то він співпадає з графіком переміщення.

Графік прискорення в даному випадку дуже простий: спочатку, до t_2 , прискорення дорівнює нулю, а далі має якесь незмінне додатне значення, про що свідчить відповідна дільниця графіку швидкості.

3. Відносність руху та “задачі переслідування”

Фіксація взаємного розташування та взаємного руху тіл є основою опису будь-якого природного явища або технічної події. Для їх фізичного моделювання можуть бути важливими і відстань між тілами і їх наближення або віддалення, а також швидкість та прискорення взаємного руху. При цьому основу для розрахунку можна вибрати в будь-якій системі відліку, керуючись міркуваннями доцільності чи зручності з оглядом на суть задачі.

Відносність руху – це основна його властивість, що визначається мірою переміщення і швидкості. Рухаючись на ескалаторі, ми разом з ним переміщуємося щодо предметів, які знаходяться на пероні. З іншого боку, щодо нас, ці об'єкти також переміщуються. Питання, що виникають в цій фізичній ситуації, в основному, зводяться до визначення швидкості відносного наближення або віддалення об'єктів, до визначення часу і місця їхньої зустрічі.

Прийнято у фізиці *час і місце зустрічі об'єктів називати подією*. Можна підібрати так швидкість руху, що в цілому ніякого переміщення не знайдемо – тоді взаємне розташування предметів у просторі не зміниться за час спостереження. Під *подією*, яку ми називаємо *зустріччю*

тіл, будемо твердо розуміти збіг усіх їх координат⁷ в один момент часу. У широкому розумінні під зустріччю будемо мати на увазі збіг будь-якої пари змінних між собою в той самий момент часу.

Найбільш простим варіантом задач взаємного (відносного) руху є розгляд ситуації двох тіл. Такі задачі передбачають пошук відносних кінематичних величин – відносної швидкості чи прискорення, найменшу, найбільшу чи якимось інакше зв'язану відстань між тілами (наприклад, заданий кут між напрямками руху) та т.і. Клас таких задач будемо умовно називати **задачами переслідування**.

Окремо можна виділити категорію задач, в яких тіла рухаються одне за одним, причому наздоганяюче завжди (весь час руху) спрямоване на те, що переслідує. Так полюють кішки (На відміну від них, собаки, наприклад, орієнтовані на перехоплення курсу і завжди рухаються по гіпотетичній хорді дуги, за якою рухається жертва. Таким же чином рухається інтелектуальна ракета-винищувач).

У практиці задачі переслідування зустрічаються досить часто. Ось лише декілька прикладів, що ілюструють поширеність подібних задач: бігуни, що приймають участь в естафетному забігу при передачі естафетної палички; Ахілл, що наздоганяє черепаху; краплі води, що капають із крана; ракета з інфрачервоною системою наведення, яка переслідує літак-порушник кордону; ситуація в грі «хижак - жертва»; стикування космічних апаратів; дозаправлення паливом літака в польоті.

⁷

Відшукання умов найменшої відстані між тілами також умовно підпадає під цю категорію. У військовій практиці торпеда чи ракета-винищувач не обов'язково повинна торкнутись об'єкта атаки, навіть, навпаки, - пошкодження, які завдасть вибухова хвиля від заряду, що вибухнув на деякій відстані можуть бути значно більш руйнівними. Тобто, або треба шукати координати точки зустрічі з якоюсь певною точністю, або, взагалі, орієнтуватись на певне взаємне розташування.

Ясно, що тіло, яке наздоганяє, у всіх цих ситуаціях повинне, як необхідну для зустрічі тіл умову, мати більшу за величиною швидкість руху. Предметом рішення задачі є відповідь на основне питання – де і коли зустрінуться тіла, якщо зустріч принципова можлива?

У загальному випадку рішення задач переслідування представляє складну проблему в механіці (фізиці) і вимагає застосування складних обчислювальних процедур. Цікаві методи, що розвиваються в даний час у рамках штучного інтелекту. Однак, для введення в позначену проблематику досить обмежитися розглядом простих випадків.

Методика розв'язання.

Для розв'язання задач цього класу зручніше всього формалізувати опис і спробувати рішення проводити “за визначенням”, тобто за допомогою математичного моделювання із використанням визначень кінематики, як основи, правил дії над векторами та методів просторового опису із аналітичної геометрії. В подальшому рішенню суттєву роль можуть відігравати математичні прийоми, наприклад, математичного аналізу, які мають допомогти в аналізі та отриманні кінцевого результату.

Наприклад, для випадків, коли основне питання пов'язане із спостереженнями за зміною відстані між тілами (особливо для одновимірного руху), після формального запису законів руху для обох тіл, залишається відшукати різницю

$$\Delta \vec{S}(x, y, z, t)_{12} = \vec{S}(x, y, z, t)_1 - \vec{S}(x, y, z, t)_2 \quad (3.1)$$

Задача 3.1.

Вздовж однієї прямої зі сталими швидкостями починають рухатися два тіла. Початкова відстань між ними L .

Швидкість руху тіла, що наздоганяє, V_1 , а переслідуваного V_2 . Де і коли зустрінуться тіла?

Для виконання необхідної умови зустрічі покладемо $V_1 > V_2$. Рух одновимірний і прямолінійний. Тому досить за систему відліку вибрати вісь OX декартової системи координат і початковий час руху вважати рівним 0.

Стартова ситуація відображена на Рис.3.1. На ньому початок координат сполучений для визначеності з положенням тіла, що доганяє.

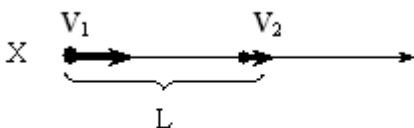


Рис.3.1

Розв'язати цю задачу можна легко двома способами – у лабораторній і у відносній системах відліку. Ключем до рішення задачі є умова збігу координат і часу для обох тіл. Тобто, як сказано вище, необхідно зажадати виконання математичних умов –

$$\begin{aligned} X_1(t_1) - X_2(t_2) &= 0; \\ t_1 &= t_2 \end{aligned}$$

Безпосередньо в лабораторній системі відліку закони руху для тіл, що рухаються з постійною швидкістю, мають вигляд –

$$\begin{aligned} X_1(t_1) &= V_1 t_1 \\ X_2(t_2) &= L + V_2 t_2 \end{aligned}$$

Увівши позначення $X = X_1 = X_2$ и $t = t_1 = t_2$, одержимо систему двох лінійних рівнянь із двома невідомими X і t .

$$\begin{cases} X = L + V_2 t; \\ X = V_1 t. \end{cases} \quad (3.2)$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо –

$$t = \frac{L}{(V_1 - V_2)}; \quad X = \frac{LV_1}{(V_1 - V_2)} \quad (3.3)$$

Проаналізуємо отримані рішення. Видно, що чим більше різниця в значеннях швидкостей, тим швидше досягається момент зустрічі. Навпаки, при рівних швидкостях руху і час зустрічі і координата стають невизначеними.

Також просто дана задача вирішується у відносній (штрихованій) системі відліку.

$$\begin{cases} \vec{V}'_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}_0 \\ \vec{V}'_2 = \vec{V}_2 - \vec{V}_0 \end{cases}$$

Вибравши в якості швидкості зсуву $\mathbf{V}_0$ швидкість руху другого тіла, знаходимо:

$$\begin{cases} \vec{V}'_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2; \\ \vec{V}'_2 = 0. \end{cases}$$

Тут відносна швидкість руху $\mathbf{V}'_1$. Очевидно тепер, що час проходження дистанції t є просто L/V'_1 .

Відмітимо, що цей результат збігається з раніше отриманим (3.3).

Треба відмітити, що закони руху містять всі кінематичні характеристики і тому вираз (3.1) може служити для відшукування відповідних зв'язків, наприклад, для часу або швидкостей. Аналогічні рівняння можна записувати для зв'язків швидкостей, фактично, отримуючи закон зміни відносних швидкостей наближення або віддалення.

Задача 3.2.

В естафетному забігу один спортсмен повинен передати естафетну паличку іншому в межах «дозволеної зони передачі» довжиною L . Другий бігун знаходиться на початку дозволеної зони; він може почати свій рух, коли перший ще не ввійшов у дозволену зону. З результатів попередніх забігів (тренувань) відомо, що перший спортсмен (той, що передає) біжить зі швидкістю V_1 , а другий спортсмен (приймаючий) може розігнатися з прискоренням a . Треба описати найбільш ефективний режим передачі естафетної палички, знайти оптимальну відстань випередження – H , визначити час t , що пройде з моменту старту другого бігуна до його зустрічі з першим, описати рух другого спортсмена, знайти характеристики його руху, знайти швидкість наближення обох бігунів.

Рішення:

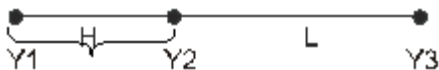


Рис. 3.2.

Графіки переміщень спортсменів:

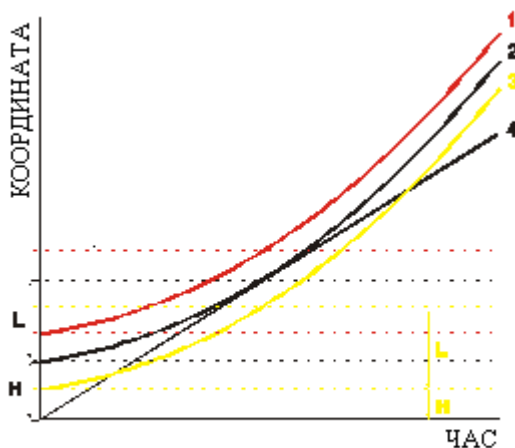


Рис. 3.3

Для найбільш ефективного режиму передачі естафетної палички зустріч спортсменів повинна відбутися наприкінці «дозволеної зони».

Як видно з рис.3.3. Криві 1-3 описують можливі режими переміщення бігуна, що наздоганяється; пряма 4 - графік зміни координати наздоганяючого. Коли випередження H обране правильно, перетинання графіків 2 і 4, тоді другий бігун зможе набрати максимальну швидкість. Якщо випередження велике, то перший бігун взагалі не зможе наздогнати другого в межах «дозволеної зони» (крива 1 і пряма 2). У випадку передчасного старту, передача естафетної палички відбудеться, але другий спортсмен буде рухатися з невеликою швидкістю (криві 3 і 4).

Рух першого спортсмена рівномірний та прямолінійний, рух другого прямолінійний та рівноприскорений. Початок координат вибирається в точці, де знаходиться перший бігун, під час старту другого.

Рівняння руху бігунів:

$$Y_1 = V_1 t \quad - \text{ для першого,} \quad (3.4)$$

$$Y_2 = H + V_{02} t + at^2/2 \quad - \text{ для другого.} \quad (3.5)$$

З моменту старту другого бігуна до його зустрічі з першим, для обох спортсменів повинне пройти однаковий час, інакше передача палички неможлива. Виходячи з ефективного режиму передачі, за цей час перший бігун пройде відстань $L + H$, а другий – L , див. Рис.3.2. Зустріч спортсменів означає, що їхні координати рівні, тобто:

$$Y_1 = Y_2.$$

З огляду на те, що в (3.5) $V_0 = 0$, записуємо систему (3.4, 3.5) у вигляді

$$Y_1 = V_1 t = H + L,$$

$$Y_2 = H + at^2/2 = H + L.$$

Зробивши необхідні обчислення остаточно одержимо:

$$t = \sqrt{2L/a}$$

$$H = V_1 t - L = V_1 \sqrt{2L/a} - L$$

Швидкість наближення бігунів знаходиться як різниця швидкостей руху:

$$V_{\text{сближ}} = V_1 - V_2 = V_1 - at^2/2.$$

Для розглянутих задач, як це добре видно на прикладі останньої, може, як для ніяких других, найсуттєвішу роль відіграють графіки та просторові зображення - рисунки та схеми, тим більш, що більшість величин, які використовуються, є векторами. Саме при побудові відповідних ілюстрацій стає зрозумілим що ж саме треба відшукати. Звернемось до наступного прикладу.

Задача 3.3.

Розглянемо задачу переслідування на прикладі літака і ракети. Нехай для простоти величини швидкостей цих об'єктів не змінюються. Для визначеності початкових умов, покладемо, що в початковий момент часу літак знаходився на висоті H в точності над початковою позицією ракети. У цей момент ракета стартує з метою наздогнати літак.

Будемо вважати значення швидкостей літака і ракети заданими величинами. Де і коли ракета наздожене літак?

Цікавими є дві ситуації. У першій з них ракета вміє визначати швидкість і напрямок літака і летить до нього з випередженням (як раніше згадувалось, щось подібне в живій природі притаманне вовкам, собакам та деяким іншим звірам). В другій ситуації ракета цього робити не вміє, але має інфрачервону систему наведення і тому вектор її швидкості завжди спрямований на літак. Не обговорюючи технічні і тактичні відмінності цих варіантів ракети, на підставі знайдених рішень з'ясуємо, у якому випадку ціль буде досягнута швидше.

А). Перехоплення цілі.

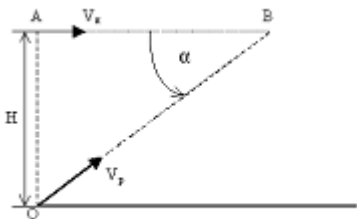


Рис.3.4

Дано: Висота польоту літака - H , швидкість ракети - $V_{\text{р}}$, швидкість літака - $V_{\text{л}}$.

Треба знайти: 1). час досягнення цілі,
2). координати літака в момент перехоплення,
3). кут прицілювання.

На рис.3.4 зображена графічна ілюстрація. Тут точка О-початкове положення ракети. В точці А положення літака в даний момент. Точка В - це місце зустрічі об'єктів. Видно з рисунка, що

величина швидкості ракети більше швидкості літака. Це забезпечує необхідну умову для рішення задачі. Кут альфа – кут прицілювання.

Рішення задачі:

Для координати X літака в точці B маємо

$$X = V_{\text{л}} \cdot t_1 \quad (3.6)$$

Тут t_1 – час зустрічі літака і ракети. Шлях, що пройшла ракета за цей час є:

$$S = V_{\text{р}} \cdot t_1 \quad (3.7)$$

Кут прицілювання, як це видно з малюнка, визначається з відношення сторін трикутника ABO .

$$\text{tg}\alpha = \frac{H}{X} \quad (3.8)$$

За теоремою Піфагора з урахуванням формул (3.6,3.7) знаходимо:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{V_{\text{р}}^2 - V_{\text{л}}^2}}{V_{\text{л}}}$$

Знаючи кут прицілювання з співвідношення $X = H \text{ctg}(\alpha)$ знаходимо:

$$X = \frac{H \cdot V_{\text{л}}}{\sqrt{V_{\text{р}}^2 - V_{\text{л}}^2}}$$

А з формули (3.6) знаходимо час зустрічі

$$t_1 = \frac{H}{\sqrt{V_{\text{р}}^2 - V_{\text{л}}^2}} \quad (3.9)$$

Знаючи момент зустрічі ракети з літаком за формулою (3.7) визначаємо шлях ракети:

$$S_1 = \frac{H V_{\text{р}}}{\sqrt{V_{\text{р}}^2 - V_{\text{л}}^2}} \quad (3.10)$$

Тепер розв'яжемо задачу для ракети, яка має інфрачервону систему наведення (її поведінка схожа на поведінку кішки в полюванні за мишкою).

В). Переслідування літака

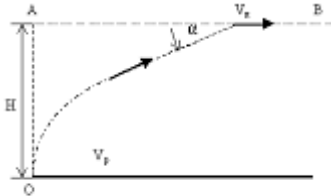


Рис.3.5

Дано: Висота польоту літака – H , швидкість ракети – V_p , швидкість літака – $V_л$.

Треба знайти: 1) час досягнення цілі, 2) координати літака в момент перехоплення, 3) довжину траєкторії ракети чи шлях, пройдений ракетою.

Графічна ілюстрація на рис. 3.5. Тут точка O відмічає початкове положення ракети. Точка B – це місце розташування літака в довільний момент часу. Кут α – кут напрямку швидкості ракети на літак у даний момент часу t .

Рішення задачі:

Якщо спроектувати швидкість літака на напрямок швидкості ракети, то можна одержати відносну швидкість наближення ракети до літака вздовж напрямку руху літака:

$$V_{\text{сбл}} = V_p - V_л \cdot \cos \alpha. \quad (3.11)$$

З іншої сторони з рівності переміщень ракети і літака вздовж горизонтального напрямку за весь час зближення випливає

$$\int V_л dt = \int V_p \cos \alpha dt.$$

Інтегрування за часом у цій формулі потрібно проводити в межах від 0 до моменту зустрічі. Позначимо цей момент, на відміну від розглянутої вище задачі, через t_2 . Тоді через сталість величин швидкостей одержимо:

$$V_{\text{л}} t_2 = V_{\text{п}} \int_0^{t_2} \cos \alpha dt. \quad (3.12)$$

Інтегрування за часом (3.11) у тих же межах приводить до результату –

$$H = V_{\text{п}} t_2 - V_{\text{л}} \int_0^{t_2} \cos \alpha dt \quad (3.13)$$

Формули (3.12), (3.13) утворюють систему рівнянь для невідомої величини t_2 і виразу $\int \cos \alpha dt$. Виключаючи останній вираз з системи рівнянь приходимо до відповіді на одне з основних питань задачі –

$$t_2 = \frac{H V_{\text{п}}}{(V_{\text{п}}^2 - V_{\text{л}}^2)}. \quad (3.14)$$

Координата X літака в момент зустрічі літака з ракетою є:

$$X = \frac{H V_{\text{л}} V_{\text{п}}}{(V_{\text{п}}^2 - V_{\text{л}}^2)}. \quad (3.15)$$

Шлях ракети за весь час польоту (модуль швидкості не змінюється, тому $S_2 = V_{\text{п}} \cdot t_2$):

$$S_2 = \frac{H V_{\text{п}}^2}{(V_{\text{п}}^2 - V_{\text{л}}^2)}. \quad (3.16)$$

Проаналізуємо отримані рішення, акцентуючи увагу на зіставленні часів польоту ракети і відстаней, що вона проходить у розглянутих двох ситуаціях.

З виразів (3.9) і (3.14) знаходимо відношення часів –

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_{\text{л}}^2}{V_{\text{п}}^2}}}.$$

Порівняння по формулам (3.10) і (3.16) пройдених ракетою шляхів приводить до аналогічного результату:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_{\text{л}}^2}{V_{\text{п}}^2}}}.$$

Цікаво, що ці формули аналогічні результатам теорії Лоренца.

Задача 4.

У вершинах квадрата зі стороною a знаходяться частинки. Вони починають рухатися з однаковою за величиною швидкістю V (Рис 3.6). Знайти місце і час їх зустрічі, якщо відомо, що кожна наступна орієнтована на попередню.

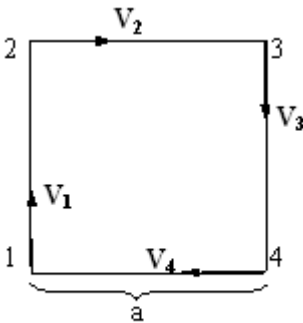


Рис 3.6

На відміну від раніше розглянутої задачі рух частинок тут двохвимірний. Цю обставину варто врахувати при відшукуванні швидкості наближення частинок $V_{\text{с}}$, тобто швидкості вздовж лінії, що з'єднує пари сусідніх частинок.

З умови задачі ясно, що в будь-який момент часу відстань між частинками однакова, оскільки відносні швидкості їхнього руху рівні між собою за величиною. При цьому взаємна конфігурація положень частинок

залишається незмінною – лінії, що з'єднують частинки утворюють квадрат.

На Рис.3.7 приведена послідовність положень частинок для різних моментів часу t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 .

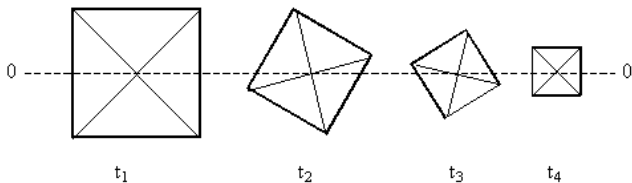


Рис.3.7.

Звернемо увагу на ту обставину, що центри всіх квадратів лежать на одній прямій OO' . Очевидно, що центр квадратів є загальною точкою і до неї сходиться їх послідовність.

Таким чином, геометричне рішення задачі приводить до відповіді на питання задачі про місце зустрічі частинок.

Можна розмірковувати трохи інакше: частинки весь час спрямовані одна на другу і, залишаючись в вершинах квадрату (який весь час зменшується за величиною), фактично, рухаються вздовж його сторони. Так буде продовжуватись до тієї пори, поки сторони квадрату не зійдуться в точку. Із умови симетрії для квадрату, очевидно, що ця точка розташована в центрі початкової фігури.

Тепер знайдемо час зустрічі. Помітивши, що величина відносної швидкості однакова для будь-якої пари частинок, знайдемо її для частинок 1 і 2. Очевидно, що $\vec{V}_{\text{відн}} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ (рис 3.7) і для величини цього вектора одержимо:

$$V_{\text{відн}}^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2(V_1 V_2).$$

З огляду на те, що в даному випадку скалярний добуток векторів дорівнює 0, а також враховуючи рівність величин швидкостей V_1 і V_2 знаходимо –

$$V_{\text{відн}} = V\sqrt{2}.$$

Оскільки швидкість наближення частинок між собою V_c є в нашому випадку проекцією вектора $V_{\text{відн}}$ на напрямок вектора V_1 , то, використовуючи правило відшукування проекції вектора і, з огляду на те, що кут ϕ між векторами $V_{\text{відн}}$ і V_1 дорівнює 45° одержимо:

$$V_c = V_{\text{отн}} \cos \phi = V.$$

Тепер можна знайти час зустрічі тіл t . Кожна частка проходить відстань a з однаковою і постійною швидкістю V_c , тому -

$$t = \frac{a}{V}.$$

Контрольні питання.

1. Яку графічну інтерпретацію (графічний зміст) мають переміщення, швидкість та прискорення і на яких графіках?
2. Назвати різновид траєкторії тіла, яке кинули горизонтально.
3. Чи достатньо для визначення координат кінцевого положення тіла знати шлях, який воно пройшло?
4. Чи можуть співпадати напрямки векторів миттєвої та середньої швидкості з напрямком вектора загального прискорення при криволінійному русі?

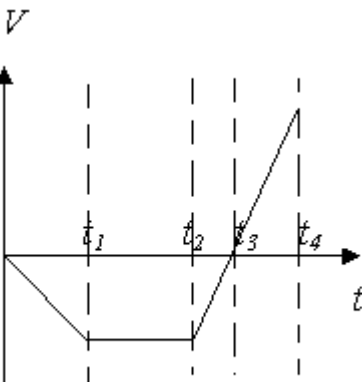
5. Чи завжди рух з від'ємним значенням прискорення можна назвати гальмуванням?

6. Чи можна назвати рух, який описується законом

переміщення: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{A}t + \frac{\vec{B}}{t^2}$ рухом із прискоренням?

Задачі для самостійного розв'язання

1. По графіку залежності $V_x = V_x(t)$ для прямолінійного руху матеріальної точки побудувати графіки закону руху $x(t)$, модуля переміщення $S_x(t)$, шляху $l(t)$ та прискорення. Вважати, що при $t=0$ $x=0$.



2. Дано: $\vec{r} = 2\vec{i} - 6t\vec{j} + 5t^3\vec{k}$. Знайти середню швидкість за перші 2 с руху, та миттєве значення швидкості на 5 с руху.

3. Знайти шлях, за час $t-t_0=\tau$, якщо відома залежність: $a=2t$ за умови $V=0$ при $t=0$.

4. Знайти радіус траєкторії кинутого під кутом α до горизонту каменя в найвищій точці траєкторії та в точці падіння. Розв'язання провести за визначенням кривини.

5. Знайти найменшу відстань між двома тілами, одне з яких падає вільно з висоти h , а друге кинути під кутом α до горизонту із початковою швидкістю V_0 із точки падіння першого. Початок руху обох тіл синхронізовано.
6. Під кутом α до горизонту з початковою швидкістю V_0 кинуто камінь. Нехтуючи опором повітря знайти шлях за весь час руху
- а) по закону $V(t)$; б) по закону $y(x)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. т.1 Механика. М., «Наука», 1979.
2. Матвеев А.Н. Механика. М., «Высшая школа», 1986.
3. Савельев И.В. Курс общей физики т.1. М., «Наука», 1987.