

Министерство образования Украины

Одесский государственный университет им. И.И.Мечникова

Институт математики, экономики и механики

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ
ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

(курс лекций)

Составитель: *А.А.Кореновский*
доцент кафедры
математического анализа

Одесса - 1997

Данные лекции предназначены для студентов старших курсов математических факультетов университетов. По существу они представляют собой продолжение традиционного в университетской программе курса "Мера и интеграл Лебега", являющегося составной частью теории функций действительного переменного.

В первых трех разделах пособия изучаются дифференциальные свойства монотонных функций, функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций. Приводится достаточно большое количество примеров, помогающих лучше освоить материал. В четвертом разделе строится пример непрерывной, нигде недифференцируемой функции и рассматриваются свойства производных чисел произвольной функции.

В конце пособия приведена подробная программа и набор экзаменационных билетов по данному курсу. Это может облегчить работу преподавателя и студентов при подготовке к экзамену.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Раздел 1. Монотонные функции	7
Раздел 2. Функции ограниченной вариации	26
Раздел 3. Абсолютно непрерывные функции	41
Раздел 4. Недифференцируемые функции	62
Литература	71
Программа курса	72
Экзаменационные билеты	75

ВВЕДЕНИЕ

В этом курсе затрагиваются некоторые вопросы, связанные с дифференцируемостью функции, заданной на отрезке. В частности, изучаются задачи восстановления функции по известной ее производной, дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом, приводятся ряд примеров функций, обладающих "экзотическими" дифференциальными свойствами. Главной отличительной чертой, по сравнению с подобными вопросами, изучаемыми в курсе классического математического анализа, является использование теории меры и интеграла Лебега. Это позволяет во многих случаях более полно и точно описывать рассматриваемые свойства.

Начнем с классической задачи нахождения функции, если известна ее производная в каждой точке. Именно, пусть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f в каждой точке $x \in [a, b]$ имеет производную $f'(x)$ (в точках $x = a$ и $x = b$ имеются в виду односторонние производные). Спрашивается, как, зная $f'(x)$, восстановить саму функцию f ?

Методами классического анализа совсем просто показать, что в случае *непрерывной* производной f' единственное решение поставленной задачи дается следующим равенством

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (1)$$

Более того, равенство (1) остается в силе, когда производная f' *интегрируема в смысле Римана* на $[a, b]$.

Однако, возможны случаи, когда даже ограниченная производная *неинтегрируема в смысле Римана*. Приведем такой пример.

Пример функции с ограниченной производной, неинтегрируемой в смысле Римана.

Для построения этого примера нам понадобится понятие нигде не плотного множества. *Нигде не плотным* на отрезке $[a, b]$ называется такое множество $E \subset [a, b]$, что любой интервал $I \subset [a, b]$ содержит в себе интервал $J \subset I$, не пересекающийся с E , т.е. $J \cap E = \emptyset$. Такое множество легко может быть построено следующим образом. Расположим все рациональные точки интервала (a, b) в последовательность $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда множество $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k - \frac{b-a}{2^{k+2}}, r_k + \frac{b-a}{2^{k+2}})$ открыто и его мера Лебега

$$mG \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{b-a}{2^{k+2}} = \frac{b-a}{2}.$$

Множество $F = [a, b] \setminus G$, очевидно, нигде не плотно и имеет положительную меру, ибо $mF \geq (b - a) - mG \geq \frac{b-a}{2}$. Ясно также, что множество F замкнуто.

Итак, пусть F - ограниченное, замкнутое, нигде не плотное множество положительной меры, $a = \inf F$, $b = \sup F$. Тогда, очевидно, $a, b \in F$, и, значит, множество $G = [a, b] \setminus F$ открыто. По теореме о структуре открытого множества на действительной прямой, множество G представляет собой объединение не более, чем счетного набора попарно непересекающихся интервалов (a_n, b_n) , концы которых не принадлежат G . Такие интервалы называют *составляющими интервалами* для множества G .

Зададим на $[a, b]$ функцию f следующим равенством

$$f(x) = \begin{cases} (x - a_n)^2(x - b_n)^2 \sin \frac{1}{(b_n - a_n)(x - a_n)(x - b_n)}, & a_n < x < b_n, \\ & n = 1, 2, \dots, \\ 0, & x \in F. \end{cases}$$

Покажем, что в каждой точке $x \in [a, b]$ существует производная $f'(x)$ и она ограниченная на $[a, b]$ функция.

Покажем сначала, что в точке $x_0 \in F$ производная $f'(x_0) = 0$. Пусть $x \in [a, b]$, $x > x_0$. Если $x \in F$, то $f(x) = f(x_0) = 0$. Если же $x \in (a_n, b_n)$, то $x_0 \leq a_n < x$, так что $x - x_0 \geq x - a_n$. Тогда

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq (x - a_n)(x - b_n)^2 \leq (x - x_0)(b - a)^2.$$

Отсюда следует, что производная справа $f'_+(x_0) = 0$. Аналогично получаем, что и $f'_-(x_0) = 0$, так что существует $f'(x_0) = 0$.

Для $x \in (a_n, b_n)$ имеем

$$f'(x) = 2(x - a_n)(x - b_n)(2x - a_n - b_n) \sin \frac{1}{(b_n - a_n)(x - a_n)(x - b_n)} - \frac{2x - a_n - b_n}{b_n - a_n} \cos \frac{1}{(b_n - a_n)(x - a_n)(x - b_n)}.$$

Очевидно,

$$|f'(x)| \leq 2(b - a)(b - a)2(b - a) + 2 = 2[1 + 2(b - a)^3].$$

Итак, мы показали, что всюду на $[a, b]$ существует и ограничена производная $f'(x)$. Покажем, что она неинтегрируема по Риману на $[a, b]$. Для этого воспользуемся критерием Лебега интегрируемости функции в смысле Римана. Согласно этому критерию, функция интегрируема по

Риману на $[a, b]$ тогда, и только тогда, когда множество ее точек разрыва имеет лебегову меру нуль. Мы же покажем, что в каждой точке множества F производная разрывна. Поскольку $mF > 0$, то отсюда следует, что f' неинтегрируема по Риману на $[a, b]$.

Из выражения $f'(x)$ видно, что при $x \rightarrow a_n + 0$ производная $f'(x)$ не имеет предела, а колеблется между -1 и $+1$. Аналогичная ситуация имеет место и при $x \rightarrow b_n - 0$. Пусть точка $x_0 \in F$. Поскольку множество F нигде не плотно, то в любой окрестности точки x_0 найдется интервал (a_n, b_n) . Но в этом интервале имеются значения $f'(x)$, сколь угодно близкие как к $+1$, так и к -1 . Следовательно, $f'(x)$ не имеет предела при $x \rightarrow x_0$.

Итак, приведенный пример показывает, что что интеграл Римана не в полной мере решает задачу восстановления функции по известной ее производной. Более сильным средством для решения этой задачи является интеграл Лебега. Именно, имеет место следующая

Теорема. Пусть функция f в каждой точке отрезка $[a, b]$ имеет производную f' . Если эта производная ограничена, то она интегрируема по Лебегу на $[a, b]$ и

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (2)$$

Доказательство. Заметим, что из дифференцируемости f на $[a, b]$ следует ее непрерывность. Доопределим функцию f для $x \in (b, b + 1]$ равенством $f(x) = f(b) + (x - b)f'(b)$. Тогда получим непрерывную на $[a, b + 1]$ функцию, имеющую ограниченную производную. Для $x \in [a, b]$ и $n = 1, 2, \dots$, положим

$$\varphi_n(x) = n \left[f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right].$$

В каждой точке $x \in [a, b]$ справедливо равенство

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x).$$

Далее, каждая из функций φ_n непрерывна и, стало быть, измерима. Значит, измерима и функция f' как предел всюду сходящейся последовательности измеримых функций φ_n . Поскольку f' еще и ограничена на $[a, b]$, то она интегрируема по Лебегу на $[a, b]$.

Для доказательства равенства (2) заметим, что по формуле Лагранжа (конечных приращений) имеем

$$\varphi_n(x) = n \left[f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right] = f' \left(x + \frac{\theta}{n} \right), \quad 0 < \theta < 1,$$

так что все функции φ_n ограничены на $[a, b]$ одним и тем же числом при всех $n = 1, 2, \dots$. Применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости, получим

$$\int_a^b f'(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx. \quad (3)$$

Воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_n(x) dx &= n \int_a^b f \left(x + \frac{1}{n} \right) dx - n \int_a^b f(x) dx = \\ &= n \int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x) dx - n \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Отметим, что замена переменной, которую мы произвели, законна, ибо подынтегральная функция непрерывна и интеграл можно понимать в смысле Римана. Далее, имеем

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx = n \int_b^{b+1/n} f(x) dx - n \int_a^{a+1/n} f(x) dx.$$

Применяя к каждому из двух слагаемых справа теорему о среднем, получим

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx = f \left(b + \frac{\theta'_n}{n} \right) - f \left(a + \frac{\theta''_n}{n} \right), \quad 0 < \theta'_n, \theta''_n < 1.$$

Отсюда, используя непрерывность функции f , находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = f(b) - f(a).$$

Поэтому, в силу (3),

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

Если в доказательстве этого равенства заменить b на произвольное $x \in [a, b]$, то получим (2). \square

МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ

В этом разделе мы будем рассматривать монотонные функции, заданные на конечном отрезке. Такие функции, ясно, ограничены. Кроме того, достаточно рассматривать только неубывающие функции. Мы будем говорить в этом случае, что функция возрастает. Если возникает необходимость говорить о строго возрастающей функции, то будем это специально оговаривать.

Итак, пусть функция f возрастает на отрезке $[a, b]$. В курсе анализа доказывается, что для любого $x_0 \in (a, b]$ существует левый предел

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \sup_{a \leq x < x_0} f(x),$$

и в каждой точке $x_0 \in [a, b)$ существует предел справа

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \inf_{x_0 < x \leq b} f(x).$$

Кроме того, для $x_0 \in (a, b)$ справедливо неравенство $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$ и $f(a) \leq f(a + 0)$, $f(b) \geq f(b - 0)$. Далее, непрерывность функции f в точке x_0 эквивалентна условию $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$. Числа $f(x_0) - f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0) - f(x_0)$ называются *левым и правым скачком* функции f в точке x_0 соответственно, а их сумма $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ – *скачком* функции f в точке x_0 . В точках a и b рассматриваются только односторонние скачки.

Лемма. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана возрастающая функция f . Тогда для любых точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} [f(a + 0) - f(a)] + \sum_{k=1}^n [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] + [f(b) - f(b - 0)] &\leq \\ &\leq f(b) - f(a). \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Можем предположить, что $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$. Обозначим $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$ и зафиксируем точки y_k так, что $x_k < y_k < x_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда, в силу монотонности f , получим

$$f(x_k + 0) - f(x_k - 0) \leq f(y_k) - f(y_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$f(a + 0) - f(a) \leq f(y_0) - f(a), \quad f(b) - f(b - 0) \leq f(b) - f(y_n).$$

Складывая все эти неравенства, получаем утверждение леммы. \square

Следствие. Возрастающая на $[a, b]$ функция f может иметь лишь конечное число точек разрыва, в которых ее скачок больше заданного положительного числа σ .

Действительно, если в точках разрыва $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$ скачок функции f больше, чем σ , то, в силу леммы, $n\sigma \leq f(b) - f(a)$. Отсюда следует, что $n \leq \frac{1}{\sigma}(f(b) - f(a))$.

Теорема 1. Множество точек разрыва возрастающей на отрезке $[a, b]$ функции f не более, чем счетно. Если x_1, x_2, \dots – внутренние точки разрыва, то

$$\begin{aligned} [f(a+0) - f(a)] + \sum_k [f(x_k+0) - f(x_k-0)] + [f(b) - f(b-0)] \leq \\ \leq f(b) - f(a). \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство. Множество E_i точек разрыва, в которых скачок больше, чем $1/i$, согласно следствию, может содержать лишь конечное число элементов. Но множество E всех точек разрыва, очевидно, равно $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, так что E не более, чем счетно.

Неравенство (5), ясно, следует из (4) предельным переходом. \square

Пусть функция f возрастает на отрезке $[a, b]$ и x_1, x_2, \dots – ее точки разрыва. Введем функцию $s(x)$, полагая $s(a) = 0$,

$$s(x) = [f(a+0) - f(a)] + \sum_{x_k < x} [f(x_k+0) - f(x_k-0)] + [f(x) - f(x-0)],$$

при $a < x \leq b$. Эта функция называется *функцией скачков* функции f . Функция скачков, очевидно, возрастающая.

Теорема 2. Разность $\varphi = f - s$ между возрастающей функцией f и ее функцией скачков s есть возрастающая непрерывная функция.

Доказательство. Для $a \leq x < y \leq b$ применим неравенство (5) к отрезку $[x, y]$. Тогда получим

$$s(y) - s(x) \leq f(y) - f(x). \quad (6)$$

Отсюда следует, что $\varphi(x) \leq \varphi(y)$, так что φ возрастает.

Устремив в (6) y к x , получаем

$$s(x+0) - s(x) \leq f(x+0) - f(x). \quad (7)$$

С другой стороны, из самого определения функции s следует, что при $x < y$ будет $f(x+0) - f(x) \leq s(y) - s(x)$. Отсюда, устремляя y к x , получаем $f(x+0) - f(x) \leq s(x+0) - s(x)$. Это неравенство вместе с (7) дает $f(x+0) - f(x) = s(x+0) - s(x)$, или, что то же самое, $\varphi(x+0) = \varphi(x)$. Аналогично получим, что $\varphi(x-0) = \varphi(x)$, так что функция φ непрерывна. \square

В дальнейшем, как обычно, для заданной на множестве A функции f и множества $E \subset A$ через $f(E)$ обозначается образ множества E . Далее, *прообразом* множества $B \subset f(A)$ называется совокупность всех таких $x \in A$, что $f(x) \in B$; обозначается $f^{-1}(B)$. Очевидно, что из условия $E_1 \subset E_2$ следует, что $f(E_1) \subset f(E_2)$. Если $E = \bigcup_k E_k$, то $f(E) = \bigcup_k f(E_k)$. Если же функция f устанавливает *взаимно однозначное* отображение множества A на $f(A)$, то $f(\bigcap_k E_k) = \bigcap_k f(E_k)$. В частности, если $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то и $f(E_1) \cap f(E_2) = \emptyset$.

Определение. Число λ , равное, быть может, $+\infty$ или $-\infty$, называется *производным числом* функции f в точке x_0 , если существует такая последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$, $h_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, $h_k \neq 0$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_k) - f(x_0)}{h_k} = \lambda.$$

Будем обозначать это так $\lambda = Df(x_0)$.

Если у функции f существует производная в точке x_0 (быть может и бесконечная), то все производные числа $Df(x_0) = f'(x_0)$. Обратно, используя определение предела в смысле Гейне, убеждаемся, что если все производные числа функции f в точке x_0 равны λ (быть может и бесконечному), то существует и $f'(x_0) = \lambda$.

Итак, мы доказали, что необходимым и достаточным условием того, чтобы функция f имела производную в точке x_0 , является совпадение всех ее производных чисел $Df(x_0)$.

Хорошо известно, что даже непрерывная функция f может не иметь производной в некоторых точках. Однако, у *каждой* функции f , определенной на множестве E , существуют производные числа в каждой точке $x_0 \in E$, предельной для E .

Действительно, если сходящаяся к нулю последовательность чисел $h_k \neq 0$ такова, что $x_0 + h_k \in E$, $k = 1, 2, \dots$, то последовательность

$\{h_k^{-1}[f(x_0 + h_k) - f(x_0)]\}_{k=1}^{\infty}$ имеет по крайней мере один частичный предел (равный, быть может, $+\infty$ или $-\infty$), который и будет производным числом функции f в точке x_0 .

Например, легко проверить, что у функции Дирихле $D(x)$ в каждой точке x_0 существуют три, и только три, производных числа: $-\infty$, 0 , $+\infty$.

Очевидно также, что у возрастающей на отрезке $[a, b]$ функции f все производные числа неотрицательны в каждой точке.

Для дальнейшего нам понадобится одна из так называемых лемм о покрытии. Леммы такого сорта имеют многочисленные приложения в различных вопросах теории функций. Сперва дадим следующее

Определение. Пусть дано множество E и набор $M = \{I\}$ невырожденных отрезков. Если для каждой точки $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой отрезок $I \in M$, что $x \in I$ и $mI < \varepsilon$, то говорят, что множество E *покрыто* системой M в смысле Витали.

Первая лемма Витали о покрытии. Пусть ограниченное множество E покрыто в смысле Витали системой отрезков M . Тогда из системы M можно извлечь не более, чем счетный набор отрезков I_k таких, что $I_k \cap I_i = \emptyset$ ($k \neq i$) и

$$m^* \left(E \setminus \left(\bigcup_k I_k \right) \right) = 0, \quad (8)$$

где символом m^* обозначается, как обычно, внешняя мера Лебега.

Доказательство. Пусть Δ - интервал, содержащий E (он существует, так как E ограничено). Если из системы M выбросить все отрезки, не содержащиеся целиком в Δ , то набор оставшихся отрезков, очевидно, также будет осуществлять покрытие множества E в смысле Витали. Поэтому, не ограничивая общности, сразу можем считать, что каждый отрезок из M содержится в Δ .

Возьмем какой-нибудь отрезок $I_1 \in M$. Если $E \subset I_1$, то лемма доказана. В противном случае будем по индукции выделять из M отрезки следующим образом. Если построены попарно непересекающиеся отрезки I_1, \dots, I_n , такие, что $E \setminus (\bigcup_{k=1}^n I_k) \neq \emptyset$, то положим $F_n = \bigcup_{k=1}^n I_k$, $G_n = \Delta \setminus F_n$. Рассмотрим все те отрезки из M , которые целиком содержатся в G_n . Поскольку $E \setminus (\bigcup_{k=1}^n I_k) \neq \emptyset$, то такие отрезки существуют и, очевидно, их длины ограничены. Пусть d_n - верхняя грань длин этих отрезков ($d_n > 0$ так как все отрезки в M невырожденные). Выберем в

качестве I_{n+1} тот из них, для которого

$$mI_{n+1} > \frac{1}{2}d_n.$$

Ясно, что он не пересекается ни с одним из отрезков I_1, \dots, I_n .

Такой процесс приводит нас к конечному или счетному набору $\{I_k\}_k$ непересекающихся отрезков. Докажем (8).

Для произвольного отрезка I и числа $\alpha > 0$ через αI будем обозначать отрезок с тем же центром, что и у I , а длина которого в α раз больше, чем у I . Обозначим $J_k = 5I_k$, $k = 1, 2, \dots$. Поскольку I_k не пересекаются и все содержатся в Δ , то $\sum_k mI_k \leq m\Delta$. Отсюда следует, что ряд $\sum_k mJ_k$ сходится. Поэтому для доказательства (8) достаточно показать, что при любом n имеет место включение

$$E \setminus \left(\bigcup_k I_k \right) \subset \bigcup_{k \geq n} J_k. \quad (9)$$

Пусть $x \in E \setminus (\bigcup_k I_k)$. Тогда при каждом $n = 1, 2, \dots$ будет $x \in G_n$ и, так как G_n открыто, найдется отрезок $I \in M$ такой, что $x \in I$ и $I \subset G_n$. Однако, один и тот же отрезок I не может содержаться сразу во всех множествах G_n , $n = 1, 2, \dots$, потому что иначе мы бы получили, что $mI \leq d_n < 2mI_{n+1}$. Но это невозможно, поскольку из сходимости ряда $\sum_k mI_k$ следует, что $mI_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Значит, при некоторых k справедливо $I \not\subset G_k$, т.е. $I \cap F_k \neq \emptyset$. Будем считать, что k - наименьшее из чисел, таких, что $I \cap F_k \neq \emptyset$. Поскольку $I \cap F_n = \emptyset$ и $F_1 \subset F_2 \subset \dots$, то $k > n$.

Из определения k следует, что $I \cap F_{k-1} = \emptyset$. Поэтому $I \subset G_{k-1}$, так что $mI \leq d_{k-1} < 2mI_k$, а если еще учтем, что $I \cap F_k \neq \emptyset$, то получим, что $I \cap I_k \neq \emptyset$. Теперь из полученных свойств $I \cap I_k \neq \emptyset$ и $mI < 2mI_k$ следует, что $I \subset J_k \equiv 5I_k$, и, тем более, $I \subset \bigcup_{k \geq n} J_k$. Значит, $x \in \bigcup_{k \geq n} J_k$, откуда следует (9) и лемма доказана. \square

Другой вариант леммы Витали может быть сформулирован следующим образом.

Вторая лемма Витали о покрытии. Пусть ограниченное множество E покрыто в смысле Витали системой отрезков M . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ из системы M можно извлечь конечный набор отрезков $\{I_k\}_{k=1}^s$, таких, что $I_k \cap I_i = \emptyset$ ($k \neq i$) и

$$m^* \left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^s I_k \right) \right) < \varepsilon.$$

Доказательство. Выберем произвольный интервал $\Delta \supset E$ и выбро- сим из M все отрезки, не лежащие целиком в Δ . Система M_0 оставшихся отрезков, очевидно, также образует покрытие множества E в смысле Ви- тали. Применим к системе M_0 предыдущую лемму Витали о покрытии. В результате получим не более, чем счетный набор попарно непересека- ющихся отрезков $\{I_k\}_{k=1,2,\dots}$, таких, что $m^*(E \setminus (\bigcup_k I_k)) = 0$. Если этот набор состоит из конечного числа отрезков I_k , то наша лемма доказана. Если же множество всех этих отрезков счетно, то, учитывая, что они по- парно не пересекаются и все содержатся в Δ , получим $\sum_{k=1}^{\infty} mI_k \leq m\Delta$. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь сходимостью ряда $\sum_{k=1}^{\infty} mI_k$, найдем такое s , что $\sum_{k=s+1}^{\infty} mI_k < \varepsilon$. Тогда из очевидного включения

$$E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^s I_k \right) \subset \left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right) \right) \cup \left(\bigcup_{k=s+1}^{\infty} I_k \right)$$

получаем

$$m^* \left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^s I_k \right) \right) \leq m^* \left(\bigcup_{k=s+1}^{\infty} I_k \right) \leq \sum_{k=s+1}^{\infty} mI_k < \varepsilon,$$

что и доказывает нашу лемму. \square

Теперь мы докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть функция f строго возрастает на отрезке $[a, b]$ и число $p \in [0, +\infty)$. Если в каждой точке $x \in E \subset [a, b]$ существует хотя бы одно производное число $Df(x) \leq p$, то

$$m^* f(E) \leq p m^* E.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и построим открытое множе- ство $G \supset E$ такое, что $mG < m^*E + \varepsilon$. Далее, пусть $p_0 > p$. Для точ- ки $x_0 \in E$ существует стремящаяся к нулю последовательность чисел $h_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$, таких, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_0+h_k)-f(x_0)}{h_k} = Df(x_0) \leq p$. Тогда при достаточно больших k отрезок $I_k(x_0)$ с концами x_0 и $x_0 + h_k$ целиком содержится в G и, кроме того, $\frac{f(x_0+h_k)-f(x_0)}{h_k} < p_0$. Поэтому сразу можем считать, что эти два свойства выполнены при всех k . Через $J_k(x_0)$ обозначим отрезок с концами $f(x_0)$ и $f(x_0 + h_k)$. Поскольку f возрастает, то, очевидно, $f(I_k(x_0)) = J_k(x_0)$. Поскольку длины отрезков $mI_k(x_0) = |h_k|$ и $mJ_k(x_0) = |f(x_0 + h_k) - f(x_0)|$, то $mJ_k(x_0) < p_0 mI_k(x_0)$. Но из условия $h_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) вытекает, что среди отрезков $J_k(x_0)$ име- ются отрезки сколь угодно малой длины.

Множество $f(E)$ состоит из точек $f(x_0)$, где x_0 пробегает все множество E . Значит, совокупность всех отрезков $J_k(x)$, где x пробегает все множество E , образует покрытие множества $f(E)$ в смысле Витали. Пользуясь леммой Витали, выберем из этих отрезков счетный набор попарно непересекающихся отрезков $J_{k_i}(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$, такой, что

$$m \left(f(E) \setminus \left(\bigcup_i J_{k_i}(x_i) \right) \right) = 0.$$

Тогда получим, что

$$m^* f(E) \leq \sum_i m J_{k_i}(x_i) < p_0 \sum_i m I_{k_i}(x_i).$$

Покажем, что отрезки $I_{k_i}(x_i)$ тоже попарно не пересекаются. Действительно, если $x \in I_{k_i}(x_i) \cap I_{k_j}(x_j)$, то $f(x) \in J_{k_i}(x_i) \cap J_{k_j}(x_j)$, а это противоречит тому, что $J_{k_i}(x_i)$ не пересекаются.

Итак, поскольку отрезки $I_{k_i}(x_i)$ попарно не пересекаются, то

$$\sum_i m I_{k_i}(x_i) = m \left(\bigcup_i I_{k_i}(x_i) \right).$$

А так как $\bigcup_i I_{k_i}(x_i) \subset G$, то

$$m^* f(E) < p_0 m \left(\bigcup_i I_{k_i}(x_i) \right) \leq p_0 m G < p_0 (m^* E + \varepsilon).$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно и $p_0 > p$ произвольно, то отсюда утверждение леммы следует очевидным образом. \square

Замечание. В условии леммы мы потребовали, чтобы функция f строго возрастала на $[a, b]$. Это необходимо для того, чтобы отрезки $J_k(x)$ не вырождались в точки, как требуется в лемме Витали.

Лемма 2. Пусть функция f строго возрастает на отрезке $[a, b]$ и число $q \in [0, \infty)$. Если в каждой точке $x \in E \subset [a, b]$ существует хотя бы одно производное число $Df(x) \geq q$, то

$$m^* f(E) \geq q m^* E.$$

Доказательство. Если $q = 0$, то лемма тривиальна. Пусть $q > 0$. Выберем q_0 , $0 < q_0 < q$ и $\varepsilon > 0$. Далее, построим открытое множество $G \supset f(E)$ такое, что $mG < m^* f(E) + \varepsilon$.

Как и при доказательстве предыдущей леммы, для $x_0 \in E$ построим последовательность чисел $h_k \neq 0$, таких, что

$$\frac{f(x_0 + h_k) - f(x_0)}{h_k} > q_0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и отрезки $I_k(x_0)$, $J_k(x_0)$, для которых $mJ_k(x_0) > q_0 mI_k(x_0)$, $k = 1, 2, \dots$.

Пусть S - множество тех точек $x \in E$, в которых функция f непрерывна. Тогда множество $E \setminus S$ не более, чем счетно, и, стало быть, имеет меру нуль. Если $x_0 \in S$, то, в силу непрерывности f в точке x_0 , все отрезки $J_k(x_0)$ содержатся в G , начиная с некоторого номера. Поэтому можем считать, что $J_k(x_0) \subset G$ для всех $k = 1, 2, \dots$.

Итак, множество S покрыто отрезками $I_k(x)$ в смысле Витали. Пользуясь леммой Витали, выберем из всех этих отрезков не более, чем счетный набор попарно непересекающихся отрезков $I_{k_i}(x_i)$ такой, что $m(S \setminus (\bigcup_i I_{k_i}(x_i))) = 0$. Но тогда

$$m^* S \leq \sum_i mI_{k_i}(x_i) < \frac{1}{q_0} \sum_i mJ_{k_i}(x_i).$$

Отрезки $J_{k_i}(x_i)$, также, как и $I_{k_i}(x_i)$, попарно не пересекаются в силу строгой монотонности функции f . Значит

$$\sum_i mJ_{k_i}(x_i) = m \left(\bigcup_i J_{k_i}(x_i) \right) \leq mG < m^* f(E) + \varepsilon.$$

Итак, мы получили, что

$$m^* S < \frac{1}{q_0} (m^* f(E) + \varepsilon).$$

Отсюда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и $q_0 < q$ следует, что

$$m^* f(E) \geq q m^* S,$$

а поскольку S отличается от E разве что на множество меры нуль, то тем самым лемма доказана. \square

Следствие. Пусть функция f возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда множество точек $x \in [a, b]$, в которых хотя бы одно производное число $Df(x) = +\infty$, имеет меру нуль.

Доказательство. Пусть f строго возрастает на $[a, b]$. Тогда, согласно предыдущей лемме, для множества $E = \{x \in [a, b] : \exists Df(x) = +\infty\}$

при $m^*E > 0$ его образ $f(E)$ должен иметь сколь угодно большую внешнюю меру, а это невозможно, ибо $f(E) \subset [f(a), f(b)]$.

Если же f возрастает не строго, то рассмотрим строго возрастающую функцию $g(x) = x + f(x)$. Ясно, что у функций f и g множества точек, в которых существуют бесконечные производные числа, совпадают, так что следствие справедливо и в этом случае. \square

Лемма 3. Пусть функция f возрастает на отрезке $[a, b]$ и числа $p < q$. Если в каждой точке множества $E_{p,q} \subset [a, b]$ существуют два таких производных числа $D_1f(x)$ и $D_2f(x)$, что

$$D_1f(x) < p < q < D_2f(x),$$

то $mE_{p,q} = 0$.

Доказательство. Сначала предположим, что f строго возрастает. Тогда, в силу лемм 1 и 2, $m^*f(E_{p,q}) \leq p m^*E_{p,q}$ и $m^*f(E_{p,q}) \geq q m^*E_{p,q}$, т.е. $q m^*E_{p,q} \leq p m^*E_{p,q}$. Отсюда следует, что $m^*E_{p,q} = 0$.

Если f возрастает не строго, то к строго возрастающей функции $g(x) = f(x) + x$ применим уже доказанную часть леммы с заменой p и q на $p + 1$ и $q + 1$ соответственно. \square

С помощью этой леммы мы легко сможем доказать следующую основную в этом разделе замечательную теорему о производной монотонной функции.

Теорема Лебега. Пусть функция f возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда для почти всех $x \in [a, b]$ существует конечная производная $f'(x)$.

Доказательство. Пусть множество $E \subset [a, b]$ состоит из тех точек x , в которых не существует даже бесконечной производной $f'(x)$. Тогда в каждой точке $x_0 \in E$ существуют два различных производных числа $D_1f(x_0) < D_2f(x_0)$. Найдем такие рациональные p и q , что $D_1f(x_0) < p < q < D_2f(x_0)$. Если обозначим через $E_{p,q}$ множество всех $x \in [a, b]$ таких, что в точке x существуют два различных производных числа, удовлетворяющих неравенству $D_1f(x) < p < q < D_2f(x)$, то, очевидно, получим $E = \bigcup_{p,q} E_{p,q}$, где объединение берется по всем парам рациональных чисел p, q таким, что $p < q$. Согласно лемме 3, каждое множество $E_{p,q}$ имеет меру нуль, а множество E представлено в виде счетного объединения таких множеств $E_{p,q}$. Следовательно, множество E также имеет меру нуль.

Итак, почти всюду на $[a, b]$ существует производная $f'(x)$. Согласно следствию из леммы 2, обращаться в $+\infty$ эта производная также может

лишь на множестве меры нуль. Поэтому конечная производная $f'(x)$ также существует для почти всех $x \in [a, b]$. \square

В связи с доказанной теоремой естественным образом возникает следующий вопрос. Можно ли гарантировать, что множество точек, в которых монотонная функция не имеет конечной производной, еще беднее, чем множество меры нуль, например, счетное? Следующий пример дает отрицательный ответ на этот вопрос даже для непрерывной функции.

Пример возрастающей непрерывной функции, у которой производная равна $+\infty$ в каждой точке заданного множества меры нуль. Пусть множество $E \subset [a, b]$ имеет меру нуль. Для каждого $k = 1, 2, \dots$ построим открытое ограниченное множество $G_k \supset E$ такое, что $mG_k < 2^{-k}$. Положим $f_k(x) = m(G_k \cap [a, x])$. Тогда при каждом k функция f_k возрастает, непрерывна и $f_k(x) < 2^{-k}$, $a \leq x \leq b$. Значит, функция $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ неотрицательна, возрастает на $[a, b]$ и, в силу равномерной сходимости ряда, f непрерывна на $[a, b]$.

Пусть $x_0 \in E$. Для зафиксированного k при достаточно малых $|h|$ отрезок с концами x_0 и $x_0 + h$ целиком содержится в G_k . Если $h > 0$, то

$$f_k(x_0 + h) = m\left(\left(G_k \cap [a, x_0]\right) \cup \left(G_k \cap (x_0, x_0 + h]\right)\right) = f_k(x_0) + h.$$

Аналогично, для $h < 0$ имеем

$$f_k(x_0 + h) = m\left(\left(G_k \cap [a, x_0]\right) \setminus \left(G_k \cap [x_0 + h, x_0]\right)\right) = f_k(x_0) + h.$$

В любом случае получаем, что

$$\frac{f_k(x_0 + h) - f_k(x_0)}{h} = 1.$$

Отсюда следует, что для любого натурального N существует такое $h_N > 0$, что для всех h таких, что $|h| < h_N$, справедливо

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq \sum_{k=1}^N \frac{f_k(x_0 + h) - f_k(x_0)}{h} = N.$$

Поскольку N произвольно, то это означает, что $f'(x_0) = +\infty$.

Итак, функция f удовлетворяет всем требованиям.

Вернемся к теореме Лебега. Согласно этой теореме, для монотонной на $[a, b]$ функции f почти в каждой точке $x \in [a, b]$ существует конечная производная $f'(x)$. Таким образом, почти всюду на $[a, b]$ определена функция f' и мы можем ставить вопрос о свойствах этой функции.

Теорема 2. Пусть функция f возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда ее производная f' измерима на $[a, b]$, суммируема и

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a). \quad (10)$$

Доказательство. Доопределим функцию f на $(b, b + 1]$ равенством $f(x) = f(b)$ при $b < x \leq b + 1$. Тогда в каждой точке $x \in [a, b]$, кроме, быть может, точки b , где существует $f'(x)$, справедливо равенство

$$f'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(f \left(x + \frac{1}{k} \right) - f(x) \right).$$

Функции $f(x + \frac{1}{k})$ и $f(x)$ возрастающие и поэтому измеримы. Значит, измерима и f' как предел почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций. Поскольку f' неотрицательна, то можем говорить об ее интеграле Лебега $\int_a^b f'(x) dx$. По теореме Фату

$$\int_a^b f'(x) dx \leq \sup_k \int_a^b k \left(f \left(x + \frac{1}{k} \right) - f(x) \right) dx.$$

Но

$$\int_a^b f \left(x + \frac{1}{k} \right) dx = \int_{a+\frac{1}{k}}^{b+\frac{1}{k}} f(x) dx,$$

причем это равенство может быть получено путем применения метода замены переменной в интеграле Римана, поскольку функция f монотонна и, стало быть, интегрируема по Риману. Значит

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(f \left(x + \frac{1}{k} \right) - f(x) \right) dx &= \int_b^{b+\frac{1}{k}} f(x) dx - \int_a^{a+\frac{1}{k}} f(x) dx = \\ &= \frac{1}{k} f(b) - \int_a^{a+\frac{1}{k}} f(x) dx \leq \frac{1}{k} [f(b) - f(a)]. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство (10). \square

Во введении мы доказали теорему о том, что в случае *ограниченной* производной f' , существующей в *каждой* точке $x \in [a, b]$, неравенство (10) обращается в равенство, даже без предположения монотонности. Следующий пример показывает, что в общем случае неравенство (10) нельзя заменить равенством, даже если функцию f предполагать непрерывной.

Пример возрастающей непрерывной функции, у которой производная почти всюду равна нулю.

Напомним сначала схему построения *канторова множества*. Обозначим $G_1^{(1)} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $G_1^{(2)} = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $G_2^{(2)} = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, $G_1^{(3)} = (\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$, $G_2^{(3)} = (\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $G_3^{(3)} = (\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$, $G_4^{(3)} = (\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$ и т.д. В k -й группе будет 2^{k-1} интервалов.

Введем функцию $K(x)$, полагая $K(x) = \frac{1}{2}$, $x \in G_1^{(1)}$, $K(x) = \frac{1}{4}$, $x \in G_1^{(2)}$, $K(x) = \frac{3}{4}$, $x \in G_2^{(2)}$. В четырех интервалах третьей группы функция $K(x)$ равна последовательно $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$. На 2^{k-1} интервалах k -й группы полагаем $K(x)$ последовательно равной $\frac{1}{2^k}$, $\frac{3}{2^k}$, \dots , $\frac{2^k-1}{2^k}$. Функция K задана на канторовом открытом множестве $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} G_i^{(k)}$, причем $mG = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} mG_i^{(k)} = 1$. Определим функцию K на множестве $F = [0, 1] \setminus G$. Положим $K(0) = 0$, $K(1) = 1$. Если же $x_0 \in F$ и $0 < x_0 < 1$, то положим $K(x_0) = \sup\{K(x) : x \in G, x < x_0\}$.

Получили функцию K , определенную на $[0, 1]$. Эта функция, очевидно, возрастающая, если рассматривать ее только на множестве G . Далее, принятое нами доопределение функции K на канторовом множестве F не нарушает монотонности, так что K возрастает на $[0, 1]$. Легко также доказать, что функция K непрерывна. В самом деле, если бы это было не так, то в точке разрыва x_0 , в силу монотонности, хотя бы один из интервалов $(f(x_0 - 0), f(x_0))$ или $(f(x_0), f(x_0 + 0))$ был бы свободен от значений функции. Но функция K принимает все значения вида $\{\frac{2i-1}{2^k}\}_{i=1,2,\dots,2^{k-1}, k=1,2,\dots}$, а множество этих значений всюду плотно на $[0, 1]$, так что в любом интервале $(\alpha, \beta) \subset [0, 1]$ существуют значения, принимаемые функцией на множестве G .

Итак, $K(x)$ – непрерывная, возрастающая на $[0, 1]$ функция. Ее иногда называют ”канторовой лестницей”.

Вместе с тем, если $x_0 \in G$, то, поскольку G есть объединение попарно непересекающихся интервалов, на каждом из которых функция K постоянна, то функция K постоянна в некоторой окрестности точки x_0 . Поэтому $K'(x_0) = 0$. Так как $mG = 1$, то почти всюду на $[0, 1]$

производная функции Кантора $K'(x) = 0$. Значит и

$$\int_0^1 K'(x) dx = 0 < 1 = K(1) - K(0),$$

так что в (10) нельзя гарантировать равенство.

Может показаться, что существование монотонной, непрерывной, отличной от тождественной постоянной функции Кантора $K(x)$ с почти всюду равной нулю производной $K'(x)$ оказалось возможным только лишь потому, что мы не потребовали строгой монотонности. На самом деле это не так, что подтверждается следующим примером.

Пример строго монотонной непрерывной функции, производная у которой почти всюду равна нулю.

Зададим число $t \in (0, 1)$. Положим $f_0(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$. Пусть определена функция $f_k(x)$, непрерывная и линейная на каждом отрезке вида $[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}]$, $i = 0, 1, \dots, 2^k - 1$. Функцию $f_{k+1}(x)$ мы зададим так, чтобы она равнялась $f_k(x)$ в точках $i \cdot 2^{-k}$, $i = 0, 1, \dots, 2^k$, в средних точках отрезков линейности функции f_k положим

$$f_{k+1}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{i}{2^k} + \frac{i+1}{2^k}\right)\right) = \frac{1-t}{2}f_k\left(\frac{i}{2^k}\right) + \frac{1+t}{2}f_k\left(\frac{i+1}{2^k}\right),$$

а на отрезках $[\frac{i}{2^k}, \frac{1}{2}(\frac{i}{2^k} + \frac{i+1}{2^k})]$ и $[\frac{1}{2}(\frac{i}{2^k} + \frac{i+1}{2^k}), \frac{i+1}{2^k}]$ будем считать функцию f_{k+1} линейной.

Определенные таким образом функции f_k , очевидно, возрастают и $0 \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq 1$. Следовательно, последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ имеет предел $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ в каждой точке $x \in [0, 1]$. Докажем, что f строго возрастает, непрерывна и $f'(x) = 0$ для почти всех $x \in [0, 1]$.

Зададим произвольное $x \in [0, 1]$, отличное от точек вида $\frac{i}{2^k}$ (множество таких точек счетное и поэтому имеет меру нуль). Построим последовательность вложенных интервалов (α_k, β_k) , где $\alpha_k = \frac{i}{2^k}$, $\beta_k = \frac{i+1}{2^k}$, содержащих точку x . Тогда будем иметь одну из двух ситуаций

$$1. \alpha_{k+1} = \alpha_k, \beta_{k+1} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = f_k(\alpha_k),$$

$$f_{k+1}(\beta_{k+1}) = \frac{1-t}{2}f_k(\alpha_k) + \frac{1+t}{2}f_k(\beta_k), \text{ т.е.}$$

$$f_{k+1}(\beta_{k+1}) - f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = \frac{1+t}{2}[f_k(\beta_k) - f_k(\alpha_k)],$$

ИЛИ

$$2. \alpha_{k+1} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), \beta_{k+1} = \beta_k, f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = \frac{1-t}{2}f_k(\alpha_k) + \frac{1+t}{2}f_k(\beta_k),$$

$$f_{k+1}(\beta_{k+1}) = f_k(\beta_k), \text{ т.е.}$$

$$f_{k+1}(\beta_{k+1}) - f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = \frac{1-t}{2} [f_k(\beta_k) - f_k(\alpha_k)].$$

Поскольку во всех точках вида $x = \frac{i}{2^k}$, $i = 0, 1, \dots, 2^k$, $k = 0, 1, \dots$ все значения $f_n(x)$ постоянны, начиная с номера k , то и их предел

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_k(x), \quad x = \frac{i}{2^k}.$$

Таким образом, объединяя рассмотренные выше две ситуации, будем иметь

$$f(\beta_{k+1}) - f(\alpha_{k+1}) = \frac{1 + \varepsilon_k t}{2} [f(\beta_k) - f(\alpha_k)],$$

где ε_k принимает значения 1 или -1. Учитывая, что $f(\beta_0) = 1$, $f(\alpha_0) = 0$, отсюда получаем

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1 + \varepsilon_i t}{2}, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Отсюда следует, что $f(\beta_k) - f(\alpha_k) > 0$ и $f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq (\frac{1+t}{2})^k$, так что функция f непрерывна и строго возрастает. Далее, в тех точках x , где существует производная $f'(x)$, она равна пределу выражения

$$\frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = \prod_{i=0}^{k-1} (1 + \varepsilon_i t)$$

при $k \rightarrow \infty$. Но если бесконечное произведение сходится к отличному от нуля числу, то предел общего множителя равен единице, что в нашем случае не выполнено. Стало быть, разностное отношение $\frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k}$ при $k \rightarrow \infty$ либо не имеет предела, либо стремится к $+\infty$, либо стремится к нулю. Поскольку, в силу теоремы Лебега, у функции f почти всюду на $[0, 1]$ существует конечная производная f' , то $f'(x) = 0$ для почти всех $x \in [0, 1]$.

Замечание. При доказательстве равенства $f'(x) = 0$ для почти всех $x \in [0, 1]$ мы использовали следующее утверждение.

Утверждение 1. Если функция f в точке x_0 имеет производную $f'(x_0)$, то существует

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0+, h_2 \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h_1) - f(x_0 - h_2)}{h_1 + h_2} = f'(x_0).$$

Доказательство. В самом деле, имеем

$$f(x_0 + h_1) - f(x_0) = f'(x_0)h_1 + \alpha(h_1), \quad f(x_0 - h_2) - f(x_0) = -f'(x_0)h_2 + \beta(h_2),$$

где $\alpha(h_1) = \bar{o}(h_1)$ ($h_1 \rightarrow 0$), $\beta(h_2) = \bar{o}(h_2)$ ($h_2 \rightarrow 0$). Тогда

$$\frac{f(x_0 + h_1) - f(x_0 - h_2)}{h_1 + h_2} = f'(x_0) + \frac{\alpha(h_1) + \beta(h_2)}{h_1 + h_2}.$$

Покажем, что второе слагаемое справа стремится к нулю при $h_1 \rightarrow 0+$, $h_2 \rightarrow 0+$. Действительно, т.к. $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, то

$$\left| \frac{\alpha(h_1)}{h_1 + h_2} \right| \leq \frac{|\alpha(h_1)|}{h_1} \rightarrow 0, \quad h_1 \rightarrow 0+.$$

Аналогично получаем, что $\frac{\beta(h_2)}{h_1 + h_2} \rightarrow 0$ при $h_1 \rightarrow 0+$, $h_2 \rightarrow 0+$. Отсюда следует наше утверждение. \square

Заметим, что в данном утверждении условия $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ нельзя отбросить. Покажем это на следующем примере.

Пример дифференцируемой в каждой точке функции f , для которой выражение $\frac{f(x_0 + h_1) - f(x_0 + h_2)}{h_1 - h_2}$ не имеет предела при $h_1 \rightarrow 0$, $h_2 \rightarrow 0$ ($h_1 \neq h_2$).

Положим $f(0) = 0$, $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Тогда, очевидно, существует $f'(x)$ для всех $x \in [0, 1]$. С другой стороны, для последовательности чисел $h_k = \frac{1}{\pi k}$, $k = 1, 2, \dots$, имеем $h_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ и

$$\frac{f(h_{k+1}) - f(h_k)}{h_{k+1} - h_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

В то же время, для последовательностей $h_k^{(1)} = \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}$ и $h_k^{(2)} = \frac{1}{2\pi k + \frac{3\pi}{2}}$, $k = 1, 2, \dots$, имеем

$$\frac{f(h_k^{(1)}) - f(h_k^{(2)})}{h_k^{(1)} - h_k^{(2)}} = \frac{(h_k^{(1)})^2 + (h_k^{(2)})^2}{h_k^{(1)} - h_k^{(2)}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{(2\pi k + \frac{\pi}{2})^2} + \frac{1}{(2\pi k + \frac{3\pi}{2})^2}}{\frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi k + \frac{3\pi}{2}}} = \\
&= \frac{(2\pi k + \frac{\pi}{2})(2\pi k + \frac{3\pi}{2}) \left[(2\pi k + \frac{3\pi}{2})^2 + (2\pi k + \frac{\pi}{2})^2 \right]}{\pi (2\pi k + \frac{\pi}{2})^2 (2\pi k + \frac{3\pi}{2})^2} = \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{(2\pi k + \frac{3\pi}{2})^2 + (2\pi k + \frac{\pi}{2})^2}{(2\pi k + \frac{\pi}{2})(2\pi k + \frac{3\pi}{2})}.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\frac{f(h_k^{(1)}) - f(h_k^{(2)})}{h_k^{(1)} - h_k^{(2)}} \rightarrow \frac{2}{\pi}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Сравнивая это с предыдущим, получаем, что выражение

$$\frac{f(h_1) - f(h_2)}{h_1 - h_2}$$

не имеет предела, когда h_1 и h_2 независимо стремятся к нулю и $h_1 \neq h_2$.

Рассмотрим теперь некоторые следствия, вытекающие из теоремы Лебега о дифференцировании монотонной функции.

Теорема Фубини (о почленном дифференцировании ряда с монотонными слагаемыми). Пусть задана последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ возрастающих на отрезке $[a, b]$ функций, такая, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$$

сходится для всех $x \in [a, b]$. Тогда для почти всех $x \in [a, b]$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x) = f'(x), \tag{11}$$

т.е. ряд с монотонными слагаемыми почти всюду допускает почленное дифференцирование.

Доказательство. Можем предположить, что $f_k(a) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Обозначим $F_s(x) = \sum_{k=1}^s f_k(x)$. Тогда $F_s(x) \rightarrow f(x)$, $s \rightarrow \infty$. Поскольку каждая функция f_k , будучи возрастающей, имеет производную почти всюду на $[a, b]$, то множество $E_0 \subset [a, b]$ точек, в которых не существует конечной производной хотя бы у одной из функций f_k или у функции f , имеет меру нуль, так как оно является объединением счетного набора множеств меры нуль. Для $x \notin E_0$ имеем

$$F'_s(x) \leq F'_{s+1}(x) \leq f'(x),$$

т.е. ряд в левой части (11) сходится для почти всех $x \in [a, b]$. Далее, поскольку $F'_s(x)$ стремится к своему пределу возрастая, то для доказательства (11), т.е. $F'_s(x) - f'(x) \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, достаточно проверить его для какой-нибудь подпоследовательности номеров $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$. Эту подпоследовательность мы подберем так, чтобы было выполнено неравенство $f(b) - F_{s_i}(b) < 2^{-i}$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда из неравенства

$$f(x) - F_{s_i}(x) \leq f(b) - F_{s_i}(b), \quad i = 1, 2, \dots, \quad a \leq x \leq b,$$

следует, что сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} [f(x) - F_{s_i}(x)]$ для всех $x \in [a, b]$. Но слагаемые этого ряда $R_i(x) = \sum_{k=s_{i+1}}^{\infty} f_k(x)$ - возрастающие функции, так что, применяя рассуждения, приведенные в начале доказательства нашей теоремы, получаем, что для почти всех $x \in [a, b]$ сходится ряд из производных $\sum_{i=1}^{\infty} [f'(x) - F'_{s_i}(x)]$. Из сходимости этого ряда следует, что его слагаемые стремятся к нулю, а это означает, что $F'_{s_i}(x) \rightarrow f'(x)$ для почти всех $x \in [a, b]$. \square

Одним из очень важных следствий теоремы Фубини является следующая теорема Лебега о точках плотности линейных множеств. Сначала сформулируем определение точки плотности.

Определение. Пусть дано множество $E \subset \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *точкой плотности* множества E , если

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0, h_1, h_2 > 0} \frac{m^*(E \cap (x - h_1, x + h_2))}{h_1 + h_2} = 1,$$

где, как и выше, символом m^* обозначена внешняя мера Лебега.

Теорема Лебега (о точках плотности). Почти все точки произвольного множества $E \subset \mathbb{R}$ являются его точками плотности.

Доказательство. Пусть $E \subset [a, b]$. Определим функцию

$$f(x) = m^*(E \cap [a, x]), \quad a \leq x \leq b.$$

Если мы покажем, что для почти всех $x \in E$ справедливо $f'(x) = 1$, то, с учетом утверждения 1, получим доказательство нашей теоремы. Можем считать, что $E \subset (a, b)$. Пользуясь определением внешней меры, построим последовательность открытых множеств $G_k \supset E$, $k = 1, 2, \dots$, таких, что $(a, b) \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots$ и $mG_k - m^*E < 2^{-k}$. Определим функцию $f_k(x) = m(G_k \cap [a, x])$. Функции f_k возрастают на $[a, b]$ и, очевидно, $f'_k(x) = 1$ для всех $x \in G_k$. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} [f_k(x) - f(x)]$, $a \leq x \leq b$. Для $a \leq x < y \leq b$ имеем $[f_k(y) - f(y)] - [f_k(x) - f(x)] = [f_k(y) - f_k(x)] - [f(y) - f(x)] = m(G_k \cap (x, y)) - m^*(E \cap (x, y)) \geq 0$, $f_k(x) - f(x) \leq f_k(b) - f(b) = mG_k - m^*E < 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому наш ряд $\sum_{k=1}^{\infty} [f_k(x) - f(x)]$ сходится на $[a, b]$. По теореме Фубини, для почти всех $x \in [a, b]$ сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} [f'_k(x) - f'(x)]$, а это означает, что почти всюду на $[a, b]$ имеем $f'_k(x) \rightarrow f'(x)$. Но для каждого $x \in E$ справедливо $x \in G_k$, $k = 1, 2, \dots$. Как уже отмечалось, для $x \in G_k$ справедливо $f'_k(x) = 1$. Значит для $x \in E$ имеем $f'_k(x) = 1$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому и $f'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k(x) = 1$ для почти всех $x \in E$. \square

С понятием точки плотности тесно связано одно обобщение понятия непрерывности функции.

Определение. Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$ и точка $x_0 \in [a, b]$. Если существует такое измеримое множество $E \subset [a, b]$, имеющее x_0 своей точкой плотности, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0 вдоль множества E , то говорят, что функция f *аппроксимативно непрерывна* в точке x_0 . В точке $x_0 = a$, говоря о плотности, мы имеем ввиду правую плотность множества E , т.е. равенство $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{m^*(E \cap [a, a+h])}{h} = 1$. Аналогично, говоря о точке $x_0 = b$, мы имеем ввиду левую плотность.

Напомним, что функция f называется непрерывной в точке x_0 *вдоль* множества E , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ , что для всех $x \in E$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Понятно, что каждая точка непрерывности функции является также точкой ее аппроксимативной непрерывности. Обратное неверно. Например, функция Дирихле, как известно, не имеет точек непрерывности. Однако, каждая иррациональная точка x_0 является точкой ее аппрокси-

мативной непрерывности, ибо в качестве множества E можно выбрать множество всех иррациональных точек. Ясно, что x_0 - точка плотности множества E и функция Дирихле непрерывна в точке x_0 вдоль E .

Итак, функция Дирихле аппроксимативно непрерывна почти в каждой точке. Этот факт представляет собой проявление следующего общего результата.

Теорема Данжуа. Если функция f измерима и почти всюду конечна на отрезке $[a, b]$, то она аппроксимативно непрерывна почти во всех точках этого отрезка.

Доказательство. Зададим положительное ε и, пользуясь теоремой Лузина о C -свойстве, найдем такую непрерывную на $[a, b]$ функцию φ , что $mE(f \neq \varphi) < \varepsilon$.

Пусть A - множество тех точек плотности множества $E(f = \varphi)$, которые принадлежат этому множеству $E(f = \varphi)$. В силу теоремы Лебега, $mA = mE(f = \varphi) > b - a - \varepsilon$.

Если $x_0 \in A$, то $f(x)$, очевидно, аппроксимативно непрерывна в этой точке x_0 , ибо в качестве множества E , фигурирующего в определении аппроксимативной непрерывности, можно взять $E(f = \varphi)$. Поэтому множество H всех точек аппроксимативной непрерывности функции f имеет внутреннюю меру $m_*H \geq mA > b - a - \varepsilon$. В силу произвольности ε , отсюда следует, что $m_*H \geq b - a$. Но $H \subset [a, b]$, а значит $m^*H \leq b - a$.

Итак, $b - a \leq m_*H \leq m^*H \leq b - a$, так что множество H измеримо и $mH = b - a$. \square

ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

В этом разделе мы ознакомимся с классом функций, тесно связанных с монотонными функциями.

Определение. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана конечная функция f . Зададим на $[a, b]$ конечный набор точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{s-1} < x_s = b$ и рассмотрим сумму $V = \sum_{k=1}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})|$. Верхнюю грань множества всевозможных таких сумм V называют *полной вариацией* или просто *вариацией* функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначают $V_a^b(f)$. Если полная вариация функции f конечна на отрезке $[a, b]$, то говорят, что функция f имеет *ограниченную вариацию* на $[a, b]$.

Если функция f монотонна на $[a, b]$ то она имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$. Действительно, для возрастающей на $[a, b]$ функции f и любого набора точек $\{x_k\}_{k=0}^s$ имеем

$$V = \sum_{k=1}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^s (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a).$$

Отсюда следует, что $V_a^b(f) = f(b) - f(a)$. Для убывающей функции f аналогично получаем $V_a^b(f) = f(a) - f(b)$.

Примером непрерывной функции с неограниченной вариацией может служить функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $0 < x \leq \frac{2}{\pi}$, $f(0) = 0$. Действительно, полагая $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(s-1)}$, \dots , $x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(s-k)}$, \dots , $x_s = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}$, получим

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=1}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \\ &= \sum_{k=1}^s \left| \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(s-k)} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi(s-k) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(s-k+1)} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi(s-k+1) \right) \right| = \\ &= \sum_{k=2}^s \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(s-k)} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(s-k+1)} \right) + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(s-1)} \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k} \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так что $\sup_{\{x_k\}} V = +\infty$.

Легко видеть, что каждая функция f ограниченной вариации ограничена. Действительно, для $a \leq x \leq b$ имеем

$$|f(x) - f(a)| + |f(x) - f(b)| \leq V_a^b(f).$$

Отсюда, используя неравенства

$$|f(x) - f(a)| \geq |f(x)| - |f(a)|, \quad |f(x) - f(b)| \geq |f(x)| - |f(b)|,$$

получим

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} (|f(a)| + |f(b)| + V_a^b(f)), \quad a \leq x \leq b.$$

Теорема (арифметические свойства функций ограниченной вариации). Сумма, разность и произведение двух функций f и g ограниченной вариации являются функциями ограниченной вариации. Если, кроме того, $|g(x)| \geq \sigma > 0$, $x \in [a, b]$, то и частное f/g есть функция ограниченной вариации.

Доказательство. Для чисел $a = x_0 < x_1 < \dots < x_s = b$ и функции $h = f + g$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^s |h(x_k) - h(x_{k-1})| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^s |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq V_a^b(f) + V_a^b(g). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что h имеет ограниченную вариацию. Для разности доказательство аналогичное.

Для функции $\varphi = fg$ обозначим

$$A = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad B = \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} & |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| = |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \leq \\ & \leq |f(x_k)| |g(x_k) - g(x_{k-1})| + |g(x_{k-1})| |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \\ & \leq A |g(x_k) - g(x_{k-1})| + B |f(x_k) - f(x_{k-1})|, \quad k = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

Складывая все эти неравенства, как и выше, находим

$$V_a^b(\varphi) \leq A V_a^b(g) + B V_a^b(f).$$

Для $\psi = f/g$, используя условие $|g(x)| \geq \sigma > 0$, $x \in [a, b]$, имеем

$$\begin{aligned} |\psi(x_k) - \psi(x_{k-1})| &= \left| \frac{f(x_k)}{g(x_k)} - \frac{f(x_{k-1})}{g(x_{k-1})} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sigma^2} |f(x_k)g(x_{k-1}) - f(x_{k-1})g(x_k)| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sigma^2} \{|f(x_k)||g(x_k) - g(x_{k-1})| + |g(x_k)||f(x_k) - f(x_{k-1})|\}. \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует, что

$$V_a^b(\psi) \leq \frac{A}{\sigma^2} V_a^b(g) + \frac{B}{\sigma^2} V_a^b(f). \quad \square$$

Следующая теорема показывает, что полная вариация является аддитивной функцией отрезка.

Теорема (об аддитивности вариации). Пусть на отрезке $[a, b]$ задана конечная функция f и точка $c \in [a, b]$. Тогда

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Доказательство. Рассмотрим точки $a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_{s'} = c$ и $c = x''_0 < x''_1 < \dots < x''_{s''} = b$. Объединение этих наборов $\{x_k\} = \{x'_k\} \cup \{x''_k\}$ осуществляет разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда из равенства

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{s'} |f(x'_k) - f(x'_{k-1})| + \sum_{k=1}^{s''} |f(x''_k) - f(x''_{k-1})| &= \\ = \sum_{k=1}^{s'+s''+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| &\leq V_a^b(f) \end{aligned}$$

сразу следует, что

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f).$$

С другой стороны, разобьем $[a, b]$ точками $a = y_0 < y_1 < \dots < y_s = b$, причем это разбиение выберем так, чтобы точка c входила в число точек деления. Если $y_m = c$, то

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=1}^s |f(y_k) - f(y_{k-1})| = \\ &= \sum_{k=1}^m |f(y_k) - f(y_{k-1})| + \sum_{k=m+1}^s |f(y_k) - f(y_{k-1})| \leq V_a^c(f) + V_c^b(f). \end{aligned}$$

Итак, неравенство $V \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$ доказано нами для сумм V таких, что точка c входит в число точек деления. Но если учесть, что добавление новых точек деления не уменьшает сумму V , то получим, что такое неравенство справедливо для любой суммы V . Поэтому

$$V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Сравнивая это с полученным выше противоположным неравенством, получаем утверждение теоремы. \square

Следствие 1. Если функция f имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, то она имеет ограниченную вариацию на каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$.

Справедливо и обратное утверждение.

Следствие 2. Если отрезок $[a, b]$ разложить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция монотонна, то эта функция имеет ограниченную вариацию на всем отрезке $[a, b]$.

Следующая теорема содержит необходимое и достаточное условие ограниченности вариации.

Теорема (критерий ограниченности вариации). Для того, чтобы функция f имела ограниченную вариацию, необходимо и достаточно, чтобы она могла быть представлена в виде разности двух возрастающих функций.

Доказательство. Достаточность совсем проста. В самом деле, ранее мы уже отмечали, что монотонная на $[a, b]$ функция имеет ограниченную вариацию. Но из теоремы об арифметических свойствах функций

ограниченной вариации сразу получаем, что и разность возрастающих функций имеет ограниченную вариацию.

Докажем необходимость. Рассмотрим *неопределенную вариацию*

$$v(x) = V_a^x(f), \quad a < x \leq b, \quad v(a) = 0.$$

В силу предыдущей теоремы, функция $v(x)$ возрастает. Положим $w(x) = v(x) - f(x)$, $a \leq x \leq b$, и докажем, что функция w также возрастает на $[a, b]$. Пусть $a \leq x < y \leq b$. Тогда, в силу предыдущей теоремы,

$$w(y) = v(y) - f(y) = v(x) + V_x^y(f) - f(y),$$

так что

$$w(y) - w(x) = V_x^y(f) - (f(y) - f(x)).$$

Но из определения вариации ясно, что $V_x^y(f) \geq |f(y) - f(x)|$. Поэтому правая часть в последнем равенстве неотрицательна, а это означает, что $w(y) \geq w(x)$.

Остается переписать равенство $w = v - f$ в виде $f = v - w$ и получим искомое представление. \square

Следствие 1. Если функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, то почти в каждой точке $x \in [a, b]$ существует конечная производная $f'(x)$ и эта производная – суммируемая на $[a, b]$ функция.

Следствие 2. Множество точек разрыва функции ограниченной вариации не более, чем счетно. В каждой точке $x \in (a, b)$ существуют односторонние пределы $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$, а также существуют $f(a + 0)$ и $f(b - 0)$.

Замечание. При доказательстве теоремы нами было отмечено неравенство $v(y) - v(x) = V_x^y(f) \geq |f(y) - f(x)|$, $a \leq x < y \leq b$. Отсюда легко получить еще одно представление функции ограниченной вариации f в виде разности $f = P - N$ двух возрастающих функций $P = (v + f)/2$ и $N = (v - f)/2$. Действительно, монотонность функций P и N сразу следует из неравенств

$$\begin{aligned} P(y) - P(x) &= \frac{1}{2}[v(y) + f(y)] - \frac{1}{2}[v(x) + f(x)] = \\ &= \frac{1}{2}\{[v(y) - v(x)] + [f(y) - f(x)]\} \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(y) - N(x) &= \frac{1}{2}[v(y) - f(y)] - \frac{1}{2}[v(x) - f(x)] = \\
&= \frac{1}{2}\{[v(y) - v(x)] - [f(y) - f(x)]\} \geq 0.
\end{aligned}$$

Функции P и N называются соответственно *положительной* и *отрицательной вариациями* функции f .

Теперь мы исследуем зависимость между структурными свойствами функции ограниченной вариации f и ее неопределенной вариации v .

Теорема 1. Если на отрезке $[a, b]$ функция ограниченной вариации f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то ее неопределенная вариация v также непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Пусть $x_0 < b$. Докажем, что $v(x_0 + 0) = v(x_0)$, т.е. непрерывность справа функции v . Зададим $\varepsilon > 0$ и построим точки $x_0 < x_1 < \dots < x_s = b$, так, чтобы было выполнено неравенство

$$V = \sum_{k=1}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})| > V_{x_0}^b(f) - \varepsilon. \quad (12)$$

Поскольку от добавления новых точек сумма V не убывает, то, учитывая непрерывность функции f в точке x_0 , можем считать, что точка x_1 расположена настолько близко к x_0 , что $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$.

В этом случае из (12) следует,

$$V_{x_0}^b(f) < \varepsilon + \sum_{k=1}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})| < 2\varepsilon + \sum_{k=2}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq 2\varepsilon + V_{x_1}^b(f).$$

Отсюда и из теоремы об аддитивности вариации следует $V_{x_0}^{x_1}(f) < 2\varepsilon$, т.е. $v(x_1) - v(x_0) < 2\varepsilon$. Поскольку функция v возрастающая, то имеем $v(x_0 + 0) - v(x_0) < 2\varepsilon$, а значит, в силу произвольности ε , $v(x_0 + 0) = v(x_0)$.

Равенство $v(x_0 - 0) = v(x_0)$ для $a < x_0 \leq b$ устанавливается аналогичным образом. \square

Следствие. Если функция ограниченной вариации f непрерывна на $[a, b]$, то она представима в виде разности двух непрерывных возрастающих на $[a, b]$ функций.

Действительно, в силу доказанной теоремы, непрерывность f влечет непрерывность v , а отсюда и из критерия ограниченности вариации получаем, что возрастающая функция $w = v - f$ также непрерывна.

Другое доказательство этого следствия получим, если воспользуемся тем, что непрерывность f , в силу доказанной теоремы, влечет непрерывность неопределенных положительной и отрицательной вариаций P и N функции f .

Выше, в следствии 1 из критерия ограниченности вариации, было отмечено, что у функции ограниченной вариации f почти всюду существует конечная производная f' . Далее, неопределенная вариация v функции f , будучи возрастающей функцией, в силу теоремы Лебега, также имеет почти всюду конечную производную v' . Следующая теорема устанавливает связь между этими двумя производными.

Теорема 2. Пусть задана на отрезке $[a, b]$ функция ограниченной вариации f и пусть v - ее неопределенная вариация. Тогда почти всюду на $[a, b]$ справедливо равенство $v'(x) = |f'(x)|$.

Доказательство. Для натурального k найдем такое разбиение $a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \dots < x_{s_k}^{(k)} = b$ отрезка $[a, b]$, что выполнено неравенство $V - \sum_{i=1}^{s_k} |f(x_i^{(k)}) - f(x_{i-1}^{(k)})| < 2^{-k}$, где $V = V_a^b(f) = v(b)$. Прделавав это для всех $k = 1, 2, \dots$, получим последовательность разбиений $\{x_i^{(k)}\}_{i=1}^{s_k}$, $k = 1, 2, \dots$. Определим теперь последовательность функций f_k следующим образом. Положим $f_k(a) = 0$. Далее, в случае $f(x_i^{(k)}) - f(x_{i-1}^{(k)}) \geq 0$ полагаем $f_k(x) = f(x) + c_i^{(k)}$, $x \in [x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}]$, а если $f(x_i^{(k)}) - f(x_{i-1}^{(k)}) < 0$, то $f_k(x) = -f(x) + c_i^{(k)}$, $x \in [x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}]$. При этом числа $c_i^{(k)}$ подбираем так, чтобы в точках деления $x_i^{(k)}$ значения $f_k(x_i^{(k)})$ были определены однозначно.

Докажем, что функция $v - f_k$ возрастает на $[a, b]$. Для этого достаточно показать, что при $a \leq x < y \leq b$ справедливо неравенство

$$v(y) - v(x) \geq f_k(y) - f_k(x). \quad (13)$$

Если x и y принадлежат одному интервалу $(x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)})$, то это неравенство вытекает из следующего

$$v(y) - v(x) \geq |f(y) - f(x)| = |f_k(y) - f_k(x)|.$$

Если же $x \leq x_i^{(k)} < x_{i+1}^{(k)} < \dots < x_r^{(k)} \leq y$, то складывая неравенства

$$v(x_i^{(k)}) - v(x) \geq |f(x_i^{(k)}) - f(x)| = |f_k(x_i^{(k)}) - f(x)|,$$

$$\begin{aligned}
v\left(x_{i+j}^{(k)}\right) - v\left(x_{i+j-1}^{(k)}\right) &\geq \left|f\left(x_{i+j}^{(k)}\right) - f\left(x_{i+j-1}^{(k)}\right)\right| = \\
&= \left|f_k\left(x_{i+j}^{(k)}\right) - f_k\left(x_{i+j-1}^{(k)}\right)\right|, \quad j = 1, 2, \dots, r-i, \\
v(y) - v\left(x_r^{(k)}\right) &\geq \left|f(y) - f\left(x_r^{(k)}\right)\right| = \left|f_k(y) - f_k\left(x_r^{(k)}\right)\right|,
\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
&v(y) - v(x) \geq \\
&\geq \left|f_k\left(x_i^{(k)}\right) - f_k(x)\right| + \sum_{j=1}^{r-i} \left|f_k\left(x_{i+j}^{(k)}\right) - f_k\left(x_{i+j-1}^{(k)}\right)\right| + \left|f_k(y) - f_k\left(x_r^{(k)}\right)\right| \geq \\
&\geq \left|f_k(y) - f_k(x)\right|.
\end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (13) выполнено. С другой стороны, в силу построения функции f_k , имеем

$$f_k\left(x_i^{(k)}\right) - f_k\left(x_{i-1}^{(k)}\right) = \left|f\left(x_i^{(k)}\right) - f\left(x_{i-1}^{(k)}\right)\right|$$

и, следовательно,

$$v(b) - f_k(b) = v(b) - \sum_{i=1}^{s_k} \left[f_k\left(x_i^{(k)}\right) - f_k\left(x_{i-1}^{(k)}\right)\right] < 2^{-k}.$$

Значит, слагаемые ряда $\sum_{k=1}^{\infty} [v(x) - f_k(x)]$ из монотонных функций удовлетворяют неравенству

$$v(x) - f_k(x) \leq v(b) - f_k(b) < 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

так что этот ряд сходится. Применяя к нему теорему Фубини о почленном дифференцировании ряда с монотонными слагаемыми, получаем, что почти всюду на $[a, b]$ сходится ряд из производных. Отсюда следует, что $v'(x) - f'_k(x) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, для почти всех $x \in [a, b]$. Но, по определению функций f_k , почти всюду на $[a, b]$ будет $f'_k(x) = \pm f'(x)$. Поскольку $v'(x) \geq 0$ так как функция v возрастает, то получаем, что $v'(x) = |f'(x)|$ для почти всех $x \in [a, b]$. \square

Следующая теорема устанавливает связь между точками разрыва функции ограниченной вариации и ее неопределенной вариации.

Теорема 3. Функция ограниченной вариации f и ее неопределенная вариация v имеют одни и те же точки разрыва. В точках разрыва левый

и правый скачки функций f и v равны с точностью до знака, т.е. во всех точках $x \in [a, b]$

$$v(x) - v(x - 0) = |f(x) - f(x - 0)|, \quad v(x + 0) - v(x) = |f(x + 0) - f(x)|.$$

Доказательство. Будем применять обозначения, введенные при доказательстве предыдущей теоремы. Для $a \leq x < y \leq b$ имеем

$$\begin{aligned} |[v(y) - v(x)] - [f_k(y) - f_k(x)]| &\leq |v(y) - f_k(y)| + |v(x) - f_k(x)| \leq \\ &\leq 2 |v(b) - f_k(b)| < 2^{1-k}. \end{aligned}$$

Устремляя в этом неравенстве y к x , получим

$$|[v(x + 0) - v(x)] - [f_k(x + 0) - f_k(x)]| < 2^{1-k},$$

так что $f_k(x + 0) - f_k(x) \rightarrow v(x + 0) - v(x)$, $k \rightarrow \infty$. Но, очевидно, с точностью до знака правый скачок функции f_k равен правому скачку функции f . Поэтому, учитывая еще, что для возрастающей функции v справедливо $v(x + 0) - v(x) \geq 0$, получим

$$|f(x + 0) - f(x)| = v(x + 0) - v(x).$$

Для левых скачков утверждение доказывается аналогично. \square

В предыдущем разделе мы ввели понятие функции скачков для возрастающей функции. Там же было показано (теорема 2), что разность между возрастающей функцией и ее функцией скачков есть возрастающая непрерывная функция. С помощью этого утверждения мы получим аналогичный результат для функции с ограниченной вариацией. Для этого нам нужно обобщить понятие функции скачков для функции ограниченной вариации.

Определение. Пусть функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$ и пусть точки x_1, x_2, \dots — ее точки разрыва. Как и ранее для возрастающей функции, *функцией скачков* для функции f называется функция

$$s(x) = [f(a + 0) - f(a)] + \sum_{x_k < x} [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] + [f(x) - f(x - 0)],$$

$a < x \leq b$, и $s(a) = 0$.

Теорема 4. Любую функцию ограниченной вариации можно представить в виде суммы ее функции скачков и непрерывной функции, каждая из которых имеет ограниченную вариацию.

Доказательство. Пусть x_1, x_2, \dots - точки разрыва функции f . Согласно теореме 3, эти же точки будут точками разрыва неопределенной вариации v функции f . Как было показано в критерии ограниченности вариации, функция $w = v - f$ возрастает на $[a, b]$. Применяя теоремы 1 и 3, видим, что у функции w нет других точек разрыва, кроме, быть может, точек x_1, x_2, \dots . Рассмотрим функции скачков для возрастающих функций v и w

$$s_v(x) = [v(a+0) - v(a)] + \sum_{x_k < x} [v(x_k+0) - v(x_k-0)] + [v(x) - v(x-0)],$$

$$s_w(x) = [w(a+0) - w(a)] + \sum_{x_k < x} [w(x_k+0) - w(x_k-0)] + [w(x) - w(x-0)],$$

$a < x \leq b$, $s_v(a) = s_w(a) = 0$. Согласно теореме 2 из предыдущего раздела, разности $v - s_v$ и $w - s_w$ являются возрастающими непрерывными функциями. Из равенства $f = v - w$ следует

$$f = (v - s_v) - (w - s_w) + (s_v - s_w),$$

где функция $\varphi \equiv (v - s_v) - (w - s_w)$ непрерывна как разность двух непрерывных и имеет ограниченную вариацию как разность двух возрастающих функций. Далее, из очевидного равенства $s = s_v - s_w$ следует, что функция скачков s также имеет ограниченную вариацию как разность двух возрастающих на $[a, b]$ функций. Таким образом, мы получили нужное представление $f = \varphi + s$. \square

Разность $\varphi = f - s$, где s - функция скачков функции f называется *непрерывной составляющей* функции f . Поскольку функция φ имеет ограниченную вариацию, то у нее почти всюду существует производная φ' . Следующая теорема показывает, что производная функции ограниченной вариации почти всюду равна производной ее непрерывной составляющей.

Теорема 5. Пусть функция f имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$ и φ - ее непрерывная составляющая. Тогда для почти всех $x \in [a, b]$ справедливо равенство $f'(x) = \varphi'(x)$.

Доказательство. В силу равенства $f = \varphi + s$ достаточно показать, что функция скачков s почти всюду имеет производную $s'(x) = 0$. Как

было показано при доказательстве предыдущей теоремы, функция скачков s может быть представлена в виде разности двух возрастающих функций скачков. Поэтому равенство $s'(x) = 0$ для почти всех x достаточно показать в случае, когда $s(x)$ возрастает.

Для точек разрыва x_1, x_2, \dots функции s положим

$$u_k = s(x_k) - s(x_k - 0) \geq 0, \quad v_k = s(x_k + 0) - s(x_k) \geq 0$$

(если $x_k = a$, то считаем, что $u_k = 0$, а для $v_k = b$ полагаем $v_k = 0$). Тогда ясно, что функция скачков может быть представлена в виде

$$s(x) = \sum_k s_k(x),$$

где

$$s_k(x) = \begin{cases} 0, & x < x_k, \\ u_k, & x = x_k, \\ u_k + v_k, & x > x_k. \end{cases}$$

Поскольку функции s_k возрастают и $s'_k(x) = 0$ при $x \neq x_k$, а ряд $\sum_k s_k(x)$ сходится к $s(x)$, то, по теореме Фубини о почленном дифференцировании ряда с монотонными слагаемыми, $s'(x) = \sum_k s'_k(x) = 0$ для почти всех $x \in [a, b]$. \square

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция ограниченной вариации f . Разложим $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_s = b$ и обозначим, как обычно, $\lambda = \max_{1 \leq k \leq s} (x_k - x_{k-1})$. Составим сумму

$$V = \sum_{k=1}^s |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Напомним, что полной вариацией функции f называется верхняя грань сумм V . Поставим следующий вопрос: *существует ли предел сумм V при стремлении к нулю диаметра разбиения λ ?*

Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующий пример. Пусть $f(x) = |\text{sign } x|$, $-1 \leq x \leq 1$. Тогда при любом способе деления, для которого точка $x = 0$ является точкой деления, имеем $V = 2$. Если же точка $x = 0$ не является точкой деления, то $V = 0$, так что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} V$, вообще говоря, не существует.

Совсем иначе обстоит дело в случае, когда функция ограниченной вариации f непрерывна на $[a, b]$. Именно, справедлива

Теорема 6. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} V = V_a^b(f),$$

где не исключен также случай $V_a^b(f) = +\infty$.

Доказательство. Зададим произвольное $A < V_a^b(f)$ и найдем такую сумму V^* , что $V^* > A$. Пусть эта сумма отвечает следующему способу деления $a = x_0^* < x_1^* < \dots < x_m^* = b$. Теперь пользуясь равномерной непрерывностью функции f на отрезке $[a, b]$, найдем такое $\delta > 0$, что для любых $x', x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{V^* - A}{4m}.$$

Покажем, что для любого способа деления, у которого $\lambda < \delta$, выполнено неравенство $V > A$.

Действительно, пусть задан произвольный способ деления $a = x_0 < x_1 < \dots < x_s = b$, у которого $\lambda < \delta$, и соответствующая ему сумма V . Составим новый способ деления, добавляя к точкам $\{x_k\}_{k=0}^s$ точки $\{x_i^*\}_{i=0}^m$, и пусть ему соответствует сумма V_0 . Поскольку от добавления новых точек деления соответствующие делениям суммы не уменьшаются, то $V_0 \geq V^*$.

С другой стороны, если на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ добавлена новая точка x_i^* , то для полученной суммы $V_0^{(i)}$ будем иметь

$$\begin{aligned} V_0^{(i)} - V &= |f(x_k) - f(x_i^*)| + |f(x_i^*) - f(x_{k-1})| - |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \\ &\leq 2 \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x') - f(x'')| \leq 2 \frac{V^* - A}{4m}. \end{aligned}$$

Поскольку V_0 получено из V путем $m - 1$ -кратного последовательного добавления к точкам $\{x_k\}_{k=1}^s$ точек x_i^* , $i = 1, \dots, m - 1$, то имеем

$$\begin{aligned} V_0 - V &\equiv V_0^{(m-1)} - V = \left(V_0^{(m-1)} - V_0^{(m-2)} \right) + \dots + \left(V_0^{(1)} - V \right) \leq \\ &\leq 2(m-1) \frac{V^* - A}{4m} < \frac{V^* - A}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $V_0 \geq V^*$, получаем

$$V > V_0 - \frac{V^* - A}{2} \geq \frac{V^* + A}{2} > A.$$

Итак, при $\lambda < \delta$ имеем $V > A$. С другой стороны, очевидно, $V < V_a^b(f)$. Отсюда уже сразу следует, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} V = V_a^b(f)$. \square

Рассмотрим теперь аналогичный вопрос для сумм вида $\Omega = \sum_{k=1}^s \omega_k$, где $\omega_k = \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x') - f(x'')|$ – колебание функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Если в рассмотренном выше примере способ деления содержит точку $x = 0$, то, очевидно, $\Omega = 2$; в противном случае $\Omega = 1$, так что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Omega$, вообще говоря, не существует.

Теорема 7. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Omega = V_a^b(f),$$

где не исключается также случай $V_a^b(f) = +\infty$.

Доказательство. Если суммы Ω и V соответствуют одному и тому же разбиению, то, очевидно, $\Omega \geq V$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое δ , что для любого разбиения $\{x_k\}_{k=0}^s$ с $\lambda < \delta$ справедливо $V > V_a^b(f) - \varepsilon$. Но тогда будет выполнено также и неравенство $\Omega > V_a^b(f) - \varepsilon$.

С другой стороны, пусть сумма Ω соответствует какому-нибудь способу деления $\{x_k\}_{k=0}^s$. Добавим к этому способу деления точки, в которых функция f принимает значения $\min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ и $\max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$. Тогда для полученной системы V' , очевидно, будет выполнено неравенство $\Omega \leq V'$. Таким образом

$$\Omega \leq V' \leq V_a^b(f).$$

Из вышесказанного следует, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Omega = V_a^b(f)$. \square

В заключение приведем одно интересное приложение теоремы 7.

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Обозначим

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Для $y \in [m, M]$ рассмотрим функцию $N(y)$ равную числу корней уравнения $f(x) = y$. Если множество таких корней бесконечно, то положим $N(y) = +\infty$. Функция $N(y)$ называется *индикатрисой Банаха*.

Теорема Банаха. Индикатриса Банаха измерима и

$$\int_m^M N(y) dy = V_a^b(f).$$

Доказательство. Разложим $[a, b]$ на 2^s равных частей и положим $d_1 = [a, a + \frac{b-a}{2^s}]$, $d_k = (a + (k-1)\frac{b-a}{2^s}, a + k\frac{b-a}{2^s}]$, $k = 2, 3, \dots, 2^s$. Далее, определим функцию $L_k(y)$, $k = 1, 2, \dots, 2^s$, положив ее равной 1, если уравнение $f(x) = y$ имеет хотя бы один корень в промежутке d_k , и $L_k(y) = 0$, если в d_k нет таких корней. Если $m_k = \inf_{x \in d_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in d_k} f(x)$, то $L_k(y) = 1$ при $y \in (m_k, M_k)$ и $L_k(y) = 0$ при $y \in [m, M] \setminus [m_k, M_k]$, так что функция $L_k(y)$ имеет не более двух точек разрыва на $[m, M]$ и, стало быть, измерима. Кроме того,

$$\int_m^M L_k(y) dy = M_k - m_k = \omega_k,$$

где ω_k - колебание функции f на замыкании промежутка d_k .

Рассмотрим функцию $N_s(y) = L_1(y) + L_2(y) + \dots + L_{2^s}(y)$, равную количеству тех промежутков d_k , в которых содержится хотя бы по одному корню уравнения $f(x) = y$. Очевидно, $N_s(y)$ - измеримая функция и

$$\int_m^M N_s(y) dy = \sum_{k=1}^{2^s} \omega_k,$$

так что, в силу теоремы 7,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_m^M N_s(y) dy = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^s} \omega_k = V_a^b(f).$$

Поскольку при переходе от s к $s+1$ каждый старый промежуток делится на два новых, то для любого $y \in [m, M]$ будет $N_s(y) \leq N_{s+1}(y)$, $s = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что существует (конечный или бесконечный)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} N_s(y) = N^*(y).$$

Функция $N^*(y)$ измерима как предел последовательности измеримых функций $N_s(y)$. Применяя к последовательности $N_s(y)$ теорему Леви о монотонной сходимости, получим

$$\int_m^M N^*(y) dy = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_m^M N_s(y) dy = V_a^b(f).$$

Доказательство теоремы будет завершено, если мы покажем, что $N^*(y) = N(y)$ для каждого $y \in [m, M]$.

Прежде всего, совершенно понятно, что $N_s(y) \leq N(y)$, $s = 1, 2, \dots$, откуда следует, что $N^*(y) \leq N(y)$.

С другой стороны, если $N(y)$ конечно, то положим $q = N(y)$, а при $N(y) = +\infty$ в качестве q выберем любое натуральное число. Тогда можно указать q различных корней x_1, x_2, \dots, x_q уравнения $f(x) = y$. Если s настолько большое, что $\frac{b-a}{2^s} < \min_{i \neq k} |x_k - x_i|$, то все q корней x_k попадут в различные промежутки d_k , так что при таком s получим, что $N_s(y) \geq q$, откуда и подалвно $N^*(y) \geq q$.

Итак, из неравенств $N^*(y) \geq q$ и $N^*(y) \leq q$ следует, что в случае, когда $q = N(y) < \infty$, имеем $N^*(y) = q = N(y)$. Если же $N(y) = +\infty$, то из неравенства $N^*(y) \geq q$, справедливого для любого натурального q , получаем, что $N^*(y) = +\infty$. Таким образом, в любом случае имеем $N^*(y) = N(y)$ и теорема доказана. \square

АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

В этом разделе мы рассмотрим класс абсолютно непрерывных функций, более узкий по сравнению с классом функций ограниченной вариации.

Определение. Конечная на отрезке $[a, b]$ функция f называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ что для любой конечной системы попарно непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = 1, \dots, s$, таких, что $\sum_{k=1}^s (b_k - a_k) < \delta$, справедливо неравенство $|\sum_{k=1}^s [f(b_k) - f(a_k)]| < \varepsilon$.

Ясно, что из абсолютной непрерывности следует равномерная непрерывность и, стало быть, непрерывность. Чтобы в этом убедиться, достаточно в определении абсолютной непрерывности взять $s = 1$. Обратное неверно. Подтверждающие примеры мы приведем ниже, когда исследуем некоторые свойства абсолютно непрерывных функций.

В данном определении абсолютной непрерывности вместо неравенства $|\sum_{k=1}^s [f(b_k) - f(a_k)]| < \varepsilon$ можно было бы требовать выполнение более сильного неравенства $\sum_{k=1}^s |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$. Действительно, пусть для $\varepsilon > 0$ число δ такое, что из условия $\sum_{k=1}^s (b_k - a_k) < \delta$ следует неравенство $|\sum_{k=1}^s [f(b_k) - f(a_k)]| < \varepsilon/2$. Разобьем эту систему интервалов на две подсистемы, относя к первой те интервалы (a_k, b_k) , для которых $f(b_k) - f(a_k) \geq 0$, а остальные интервалы – ко второй подсистеме. Обозначая через \sum_k^1 сумму по тем k , для которых интервалы (a_k, b_k) относятся к первой подсистеме, а через \sum_k^2 – ко второй подсистеме, получим

$$\sum_k^1 |f(b_k) - f(a_k)| = \left| \sum_k^1 [f(b_k) - f(a_k)] \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\sum_k^2 |f(b_k) - f(a_k)| = \left| \sum_k^2 [f(b_k) - f(a_k)] \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому и

$$\sum_{k=1}^s |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_k^1 |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_k^2 |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Далее, поскольку в сумме $\sum_{k=1}^s |f(b_k) - f(a_k)|$ все слагаемые неотрицательны и их число s произвольно, то эквивалентное определение абсолютной непрерывности может быть сформулировано следующим образом.

Определение. Конечная на отрезке $[a, b]$ функция f называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой конечной или счетной системы попарно непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset [a, b], k = 1, 2, \dots$, таких, что $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$, справедливо неравенство $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Еще одно эквивалентное определение абсолютной непрерывности можно дать в терминах колебаний. Действительно, если $\alpha_k, \beta_k \in [a_k, b_k]$ такие, что $f(\alpha_k) = m_k = \inf_{x \in [a_k, b_k]} f(x)$, $f(\beta_k) = M_k = \sup_{x \in [a_k, b_k]} f(x)$, то из условия $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ следует, что и сумма длин интервалов с концами α_k и β_k также меньше, чем δ . Но тогда и

$$\sum_k |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| = \sum_k (M_k - m_k) = \sum_k \omega_k < \varepsilon,$$

где, как обычно, $\omega_k = M_k - m_k$ — колебание функции f на отрезке $[a_k, b_k]$.

Покажем, что если в данном определении абсолютной непрерывности отбросить требование $(a_k, b_k) \cap (a_i, b_i) = \emptyset (i \neq k)$, то полученное определение не будет равносильным прежнему.

Пример. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$. Зададим $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon^2/4$. Пусть интервалы $(a_k, b_k) \subset [0, 1], k = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются и $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$. Тогда, обозначая через \sum_k^1 сумму по тем k , для которых $b_k \geq \delta$, а через \sum_k^2 сумму по тем k , для которых $b_k < \delta$, получим

$$\begin{aligned} \sum_k^1 |f(b_k) - f(a_k)| &= \sum_k^1 (\sqrt{b_k} - \sqrt{a_k}) = \sum_k^1 \frac{b_k - a_k}{\sqrt{b_k} + \sqrt{a_k}} \leq \\ &\leq \sum_k^1 \frac{b_k - a_k}{\sqrt{b_k}} \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sum_k^1 (b_k - a_k) \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sum_k (b_k - a_k) < \frac{1}{\sqrt{\delta}} \delta = \sqrt{\delta} = \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Далее, поскольку интервалы (a_k, b_k) попарно не пересекаются, то

$$\sum_k^2 |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_k^2 (\sqrt{b_k} - \sqrt{a_k}) < \sqrt{\delta} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \sum_k |f(b_k) - f(a_k)| = \\ & = \sum_k^1 |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_k^2 |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

так что функция f абсолютно непрерывна.

С другой стороны, для интервалов $(a_k, b_k) = (0, 1/k^2)$, $k = 1, 2, \dots$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} [f(b_k) - f(a_k)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Отсюда следует, что условие малости суммы $\sum_k (b_k - a_k)$ не гарантирует, что и сумма $\sum_k [f(b_k) - f(a_k)]$ будет малой.

Покажем, что арифметические операции сохраняют свойство абсолютной непрерывности.

Теорема (об арифметических свойствах абсолютно непрерывных функций). Если функции f и g абсолютно непрерывны, то их сумма, разность и произведение абсолютно непрерывны. Если, кроме того, $g(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$, то абсолютно непрерывно и частное f/g .

Доказательство. Абсолютная непрерывность суммы и разности сразу следует из неравенства

$$|[f(b_k) \pm g(b_k)] - [f(a_k) \pm g(a_k)]| \leq |f(b_k) - f(a_k)| + |g(b_k) - g(a_k)|.$$

Далее, поскольку из абсолютной непрерывности следует непрерывность, а значит и ограниченность на $[a, b]$, то существуют конечные

$$A = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad B = \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|.$$

Тогда из неравенства

$$\begin{aligned} |f(b_k)g(b_k) - f(a_k)g(a_k)| & \leq |f(b_k)||g(b_k) - g(a_k)| + |g(a_k)||f(b_k) - f(a_k)| \leq \\ & \leq A|g(b_k) - g(a_k)| + B|f(b_k) - f(a_k)| \end{aligned}$$

следует абсолютная непрерывность произведения. Наконец, если $g(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$, то, в силу известной теоремы анализа, существует такое $\sigma > 0$, что $|g(x)| \geq \sigma$ для всех $x \in [a, b]$. Поэтому

$$\left| \frac{1}{g(b_k)} - \frac{1}{g(a_k)} \right| \leq \frac{1}{\sigma^2} |g(b_k) - g(a_k)|.$$

Отсюда следует абсолютная непрерывность функции $1/g$, а значит и функции $f/g = f \cdot \frac{1}{g}$. \square

Теорема 1. Если функция f абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она имеет ограниченную вариацию на этом отрезке.

Доказательство. Пользуясь абсолютной непрерывностью, найдем такое $\delta > 0$, что для любой системы попарно непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = 1, \dots, s$, справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^s |f(b_k) - f(a_k)| < 1.$$

Далее, найдем такое N , что $\frac{b-a}{N} < \delta$ и разделим $[a, b]$ на N равных по длине интервалов точками $a = c_0 < c_2 < \dots < c_N = b$. Тогда при всяком разложении отрезка $[c_{k-1}, c_k]$ на части сумма абсолютных приращений функции на этих частях будет меньшей, чем 1, поскольку сумма длин этих частей равна $c_k - c_{k-1} < \delta$. Отсюда следует, что и $V_{c_{k-1}}^{c_k}(f) \leq 1$. Но тогда и $V_a^b(f) = \sum_{k=1}^N V_{c_{k-1}}^{c_k}(f) \leq N$, т.е. функция f имеет ограниченную вариацию. \square

Замечание. Из этой теоремы уже следует, что существуют непрерывные, но не абсолютно непрерывные функции. Таковой будет каждая непрерывная функция, имеющая неограниченную вариацию, например, рассмотренная нами в предыдущем разделе функция

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad 0 < x \leq \frac{2}{\pi}, \quad f(0) = 0.$$

Следствие. Если функция f абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то почти в каждой точке $x \in [a, b]$ она имеет конечную производную $f'(x)$, которая является суммируемой функцией.

При изучении свойств монотонных функций мы построили примеры возрастающих (и даже строго) функций, у которых производная почти всюду равна нулю. Для абсолютно непрерывных функций такая ситуация невозможна.

Теорема 2. Если производная $f'(x)$ абсолютно непрерывной функции f равна нулю для почти всех $x \in [a, b]$, то функция f тождественно равна постоянной на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть E – множество тех точек $x \in [a, b]$, в которых $f'(x) = 0$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого $x \in E$ при достаточно малых $h > 0$ будет $\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} < \varepsilon$. Рассмотрим совокупность всевозможных отрезков $[x, x+h]$ с такими h . Она образует покрытие множества E в смысле Витали. Поэтому можно выбрать конечное число попарно непересекающихся отрезков $d_k = [x_k, x_k + h_k] \subset (a, b)$, $k = 1, \dots, s$, таких, что внешняя мера $m^*(E \setminus (\bigcup_{k=1}^s d_k)) < \delta$, где $\delta > 0$ наперед задано. Можем также считать, что $x_{k-1} < x_k$, $k = 2, \dots, s$. Рассмотрим промежутки $[a, x_1)$, $(x_1 + h_1, x_2)$, \dots , $(x_{s-1} + h_{s-1}, x_s)$, $(x_s + h_s, b]$, которые остались после удаления из отрезка $[a, b]$ всех отрезков d_k , $k = 1, \dots, s$. Из неравенства

$$b - a = mE \leq \sum_{k=1}^s md_k + m^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^s d_k\right)\right) < \sum_{k=1}^s md_k + \delta$$

получим

$$\sum_{k=1}^s md_k > b - a - \delta,$$

так что сумма длин указанных промежутков

$$[a, x_1), (x_1 + h_1, x_2), \dots, (x_{s-1} + h_{s-1}, x_s), (x_s + h_s, b]$$

меньше δ .

Но функция f абсолютно непрерывна. Поэтому δ можно считать заранее выбранным настолько малым, что сумма приращений функции f на этих промежутках меньше, чем ε :

$$\left| [f(x_1) - f(a)] + \sum_{k=1}^{s-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k + h_k)] + [f(b) - f(x_s + h_s)] \right| < \varepsilon. \quad (14)$$

С другой стороны, в силу самого определения отрезков d_k , справедливо неравенство $|f(x_k + h_k) - f(x_k)| < \varepsilon h_k$. Учитывая, что

$$\sum_{k=1}^s h_k = \sum_{k=1}^s md_k \leq b - a,$$

получим

$$\left| \sum_{k=1}^s [f(x_k + h_k) - f(x_k)] \right| < \varepsilon(b - a).$$

Отсюда и из (14) следует, что $|f(b) - f(a)| \leq \varepsilon(1 + b - a)$, и, поскольку ε произвольно, $f(b) = f(a)$.

Если эти рассуждения провести для отрезка $[a, x]$ вместо $[a, b]$, где $a < x \leq b$, то получим, что $f(x) = f(a)$, $a < x \leq b$, т.е. функция f тождественно постоянна на $[a, b]$. \square

Следствие. Если абсолютно непрерывные функции f и g таковы, что для почти всех $x \in [a, b]$ будет $f'(x) = g'(x)$, то разность $f - g$ тождественно постоянна на $[a, b]$.

Действительно, почти всюду на $[a, b]$ будет $(f - g)' = 0$.

Пусть функция f суммируема на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим ее интеграл Лебега с переменным верхним пределом $\int_a^x f(t)dt \equiv F(x)$. Совокупность функций вида $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – постоянная, называется *неопределенным интегралом Лебега* функции f .

Замечание. В самом определении неопределенного интеграла Лебега функции f мы не требуем условие того, чтобы производная неопределенного интеграла в каком-либо смысле была равна функции f , как это делается в классическом анализе. Такое определение дано по аналогии с известным свойством *непрерывной* функции f : *интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции f является одной из первообразных этой функции f , причем для непрерывной функции f интеграл можно понимать в смысле Римана.*

Итак, пусть Φ – неопределенный интеграл Лебега суммируемой функции f . Тогда ясно, что для любых $a \leq x < y \leq b$ справедливо равенство

$$\Phi(y) - \Phi(x) = \int_x^y f(t)dt.$$

С помощью этого равенства легко получается следующая

Теорема 3. Неопределенный интеграл Φ есть абсолютно непрерывная функция.

Доказательство. Для суммируемой на $[a, b]$ функции f справедливо свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого измеримого множества $e \subset [a, b]$, меры $m_e < \delta$, справедливо $|\int_e f(t)dt| < \varepsilon$. В частности, если сумма длин конечной системы попарно непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = 1, \dots, s$, меньше, чем δ , то $|\sum_{k=1}^s \int_{a_k}^{b_k} f(t)dt| < \varepsilon$. Но, как замечено нами, $\int_{a_k}^{b_k} f(t)dt = \Phi(b_k) - \Phi(a_k)$, так что $|\sum_{k=1}^s [\Phi(b_k) - \Phi(a_k)]| < \varepsilon$, т.е. функция Φ абсолютно непрерывна. \square

Из этой теоремы сразу следует, что функция Φ почти всюду на $[a, b]$ имеет конечную производную и эта производная суммируема. На самом деле справедливо более сильное утверждение.

Теорема 4. Производная неопределенного интеграла почти всюду равна подинтегральной функции, т.е. для любой суммируемой на $[a, b]$ функции f равенство

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

справедливо для почти всех $x \in [a, b]$.

Доказательство. Пусть $p < q$ два действительных числа. Далее, пусть $E_{p,q}$ есть множество тех точек $x \in [a, b]$, где существует $\Phi'(x)$ и справедливо неравенство $\Phi'(x) > q > p > f(x)$. Поскольку производная любой функции измерима, то измеримо и множество

$$E_{p,q} = E(\Phi' > q) \cap E(f < p) \setminus e_0,$$

где e_0 – множество тех $x \in [a, b]$, в которых Φ' не существует, $m_{e_0} = 0$. Докажем, что $mE_{p,q} = 0$. Для этого зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и, пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, найдем такое $\delta > 0$, что неравенство $m_e < \delta$ влечет $|\int_e f(t)dt| < \varepsilon$. Можем считать, что точки a и b не входят в $E_{p,q}$ и $\delta < \varepsilon$. Построим такое открытое множество $G \subset [a, b]$, что $G \supset E_{p,q}$ и $mG < mE_{p,q} + \delta$. Если $x \in E_{p,q}$, то при достаточно малых $h > 0$ будет $\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} > q$. Для всех таких h совокупность отрезков вида $[x, x+h]$ образует покрытие множества $E_{p,q}$ в смысле Витали, причем мы сразу можем считать, что все отрезки $[x, x+h] \subset G$. Поэтому существует такой счетный набор попарно непересекающихся отрезков $[x_1, x_1 + h_1], [x_2, x_2 + h_2], \dots$, что $m(E_{p,q} \setminus S) = 0$, где $S = \bigcup_k [x_k, x_k + h_k]$. В силу построения отрезков $[x, x+h]$ и из опре-

деления функции Φ имеем

$$\frac{1}{h_k} \int_{x_k}^{x_k+h_k} f(t) dt > q.$$

Поэтому

$$\int_S f(t) dt > q mS.$$

Покажем, что $mS = mE_{p,q} + \theta\varepsilon$, где $0 \leq \theta \leq 1$. В самом деле, из равенств

$$S = (S \cap E_{p,q}) \cup (S \setminus E_{p,q}), \quad (S \cap E_{p,q}) \cap (S \setminus E_{p,q}) = \emptyset,$$

$$E_{p,q} = (S \cap E_{p,q}) \cup (E_{p,q} \setminus S), \quad m(E_{p,q} \setminus S) = 0$$

следует, что

$$\begin{aligned} mS &= m(S \cap E_{p,q}) + m(S \setminus E_{p,q}) = \\ &= [m(S \cap E_{p,q}) + m(E_{p,q} \setminus S)] + m(S \setminus E_{p,q}) = mE_{p,q} + m(S \setminus E_{p,q}). \end{aligned}$$

Но $S \subset G$ и $E_{p,q} \subset G$, так что $S \setminus E_{p,q} \subset G \setminus E_{p,q}$, и поэтому

$$m(S \setminus E_{p,q}) \leq m(G \setminus E_{p,q}) = mG - mE_{p,q} < \delta \leq \varepsilon,$$

т.е. $m(S \setminus E_{p,q}) = \theta\varepsilon$, где $0 \leq \theta \leq 1$.

Таким образом, $mS = mE_{p,q} + \theta\varepsilon$, где $0 \leq \theta \leq 1$, а значит и

$$\int_S f(t) dt > q(mE_{p,q} + \theta\varepsilon),$$

где $0 \leq \theta \leq 1$.

С другой стороны, $S \subset G$, значит $S \setminus E_{p,q} \subset G \setminus E_{p,q}$, так что

$$m(S \setminus E_{p,q}) \leq m(G \setminus E_{p,q}) < \delta.$$

Следовательно,

$$\left| \int_{S \setminus E_{p,q}} f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Отсюда, учитывая, что $m(E_{p,q} \setminus S) = 0$, т.е. $\int_{E_{p,q}} f(t) dt = \int_{S \cap E_{p,q}} f(t) dt$, получим

$$\int_S f(t) dt < \int_{E_{p,q}} f(t) dt + \varepsilon.$$

Но на множестве $E_{p,q}$ имеем $f(t) < p$, так что

$$\int_{E_{p,q}} f(t)dt \leq p mE_{p,q}.$$

Поэтому

$$\int_S f(t)dt < p mE_{p,q} + \varepsilon.$$

Но выше мы показали, что

$$\int_S f(t)dt > q(mE_{p,q} + \theta\varepsilon).$$

Итак, получили

$$q(mE_{p,q} + \theta\varepsilon) < p mE_{p,q} + \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует, что

$$q mE_{p,q} \leq p mE_{p,q}.$$

Но $q > p$, так что это возможно лишь в случае $mE_{p,q} = 0$.

Пусть теперь E это множество тех точек $x \in [a, b]$, в которых функция Φ дифференцируема и $\Phi'(x) > f(x)$. Тогда $E = \bigcup_{p,q} E_{p,q}$, где объединение берется по всем парам рациональных чисел p, q таким, что $p < q$. Поскольку множество всех таких пар счетно и $mE_{p,q} = 0$, то и $mE = 0$.

Таким образом, мы получили, что $\Phi'(x) \leq f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

Положим теперь $g(x) = -f(x)$, $\Gamma(x) = \int_a^x g(t)dt$. Тогда ясно, что $\Gamma(x) = -\Phi(x)$, так что функции Γ и Φ имеют производные в одних и тех же точках $x \in [a, b]$. Применяя уже доказанную часть теоремы для функций g и Γ , получим, что для почти всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $\Gamma'(x) \leq g(x)$, или, что то же самое, $-\Phi'(x) \leq -f(x)$, т.е. $\Phi'(x) \geq f(x)$. Сравнивая это с полученным выше противоположным неравенством, находим, что почти всюду на $[a, b]$ будет иметь место равенство $\Phi'(x) = f(x)$, что и требовалось доказать. \square

Теорема 5. Абсолютно непрерывная функция является неопределенным интегралом своей производной т.е. если функция f абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, \quad a \leq x \leq b.$$

Доказательство. Выше уже было отмечено, что производная f' абсолютно непрерывной функции f суммируема. Для $a \leq x \leq b$ положим

$F(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$. В силу теоремы 3 эта функция также абсолютно непрерывна и, по теореме 4, для почти всех $x \in [a, b]$ имеем $F'(x) = f'(x)$. Но тогда, по следствию из теоремы 2, разность $F(x) - f(x)$ тождественно постоянна на $[a, b]$. Поскольку, очевидно, $F(a) - f(a) = 0$, то $F(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. \square

Из теорем 3 и 5 вытекает, что для того, чтобы функция Φ была неопределенным интегралом от некоторой суммируемой функции, необходимо и достаточно, чтобы Φ была абсолютно непрерывной функцией. В самом деле, необходимость этого утверждения доказана в теореме 3, а достаточность – в теореме 5.

Вернемся к теореме 4, согласно которой производная интеграла с переменным верхним пределом почти всюду равна подинтегральной функции. Это утверждение можно усилить. Для этого введем следующее понятие.

Определение. Пусть в точке x значение $f(x)$ суммируемой функции f конечно. Если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = 0,$$

то точка x называется *точкой Лебега* функции f .

Из неравенства

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - f(x) \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt$$

сразу следует, что в точке Лебега средние интегральные значения

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

функции f стремятся к значению $f(x)$ при стремлении к нулю длины отрезка, по которому вычисляются эти средние.

Например, каждая точка непрерывности $x \in [a, b]$ суммируемой на $[a, b]$ функции f является ее точкой Лебега. В самом деле, для заданного $\varepsilon > 0$, пользуясь непрерывностью функции f в точке x , найдем $\delta > 0$, такое, что при всех t , удовлетворяющих условию $|t - x| < \delta$, справедливо

неравенство $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Но тогда при $|h| < \delta$ будем иметь

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \varepsilon,$$

так что x – точка Лебега функции f .

Следующие две теоремы в совокупности содержат как частный случай теорему 4.

Теорема 6. Если x – точка Лебега функции f , то в этой точке неопределенный интеграл этой функции $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ имеет производную $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - f(x) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует утверждение теоремы. \square

Заметим, что обратное к теореме 6 утверждение, вообще говоря, неверно. Построим подтверждающий пример.

Пример функции, у которой неопределенный интеграл Лебега имеет производную в некоторой точке, равную значению функции в этой точке, но сама эта точка не является точкой Лебега.

Положим $f(0) = 0$. Обозначим $x_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) = \frac{2k+1}{2k(k+1)}$ и для $x \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$ положим $f(x) = 1$, при $\frac{1}{k+1} < x \leq x_k$ и $f(x) = -1$, при $x_k < x \leq \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда, очевидно, $\int_{1/(k+1)}^{1/k} f(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Ясно, что $x = 0$ не является точкой Лебега функции f , ибо для $h > 0$ имеем

$$\frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - f(0)| dt = \frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - 0| dt = \frac{1}{h} \int_0^h 1 dt = 1,$$

так что $\frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - f(0)| dt$ не стремится к нулю при $h \rightarrow 0$.

С другой стороны, покажем, что функция $\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt$ имеет производную справа в точке $x = 0$ и эта производная равна $0 = f(0)$. Легко убедиться в том, что $\Phi(x_k) = \frac{1}{2k(k+1)}$, $\Phi(\frac{1}{k}) = 0$, а на отрезках $[x_k, \frac{1}{k}]$ и $[\frac{1}{k+1}, x_k]$ функция $\Phi(x)$ линейна. Зададим $h > 0$ и найдем такое k , что $\frac{1}{k+1} < h \leq \frac{1}{k}$. Тогда, учитывая, что $0 \leq \Phi(h) \leq \frac{1}{2k(k+1)}$, получаем

$$\left| \frac{\Phi(h) - \Phi(0)}{h} \right| = \frac{1}{h} \Phi(h) \leq (k+1) \frac{1}{2k(k+1)} = \frac{1}{2k}.$$

Поскольку при $h \rightarrow 0+$ будет $k \rightarrow \infty$, то отсюда следует, что существует $\Phi'(0) = 0 = f(0)$.

Теорема 7. Если функция f суммируема на отрезке $[a, b]$, то почти каждая точка $x \in [a, b]$ является точкой Лебега функции f .

Доказательство. Зададим рациональное число r и рассмотрим функцию $\varphi(t) = |f(t) - r|$. Эта функция также суммируема на $[a, b]$ и, в силу теоремы 4, для почти всех $x \in [a, b]$ справедливо $(\int_a^x \varphi(t)dt)' = \varphi(x)$. Это равенство можно переписать так

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - r| dt = |f(x) - r|. \quad (15)$$

Заметим, что мы можем сразу гарантировать выполнение почти всюду такого равенства при $r = f(x)$. Именно, рассматривая функцию $\varphi_x(t) = |f(t) - f(x)|$, мы также получим, что производная ее неопределенного интеграла Лебега почти всюду равна подинтегральной функции, но у нас нет гарантии, что такое равенство будет выполнено именно в конкретной точке x .

Обозначим через $E(r)$ множество тех точек $x \in [a, b]$, в которых не выполнено (15). Тогда $mE(r) = 0$. Занумеруем все рациональные числа r_1, r_2, \dots и обозначим $E = (\bigcup_{k=1}^{\infty} E(r_k)) \cup E(|f| = \infty)$. Тогда $mE = 0$ и для доказательства нашей теоремы достаточно показать, что каждая точка $x \in [a, b] \setminus E$ является точкой Лебега функции f .

Пусть $x_0 \in [a, b] \setminus E$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое рациональное r_k , что $|f(x_0) - r_k| < \varepsilon/3$. Тогда из неравенства

$$||f(t) - r_k| - |f(t) - f(x_0)|| \leq |f(x_0) - r_k| < \frac{\varepsilon}{3}$$

следует

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_k| dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [|f(t) - r_k| - |f(t) - f(x_0)|] dt \right| \leq \\
&\leq \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} ||f(t) - r_k| - |f(t) - f(x_0)|| dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Но поскольку $x_0 \notin E$, то для нашего ε найдется такое δ , что при $|h| < \delta$ справедливо

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_k| dt - |f(x_0) - r_k| \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

т.е., с учетом того, что $|f(x_0) - r_k| < \frac{\varepsilon}{3}$,

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_k| dt < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Отсюда и из (16) следует, что

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt < \varepsilon$$

и теорема доказана. \square

Доказанная нами теорема 3 утверждает, что неопределенный интеграл Лебега является абсолютно непрерывной функцией. В то же время, по теореме 1, абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную вариацию. Следующая теорема позволяет найти эту полную вариацию.

Теорема 8. Пусть функция f суммируема на отрезке $[a, b]$ и ее неопределенный интеграл Лебега $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Тогда

$$V_a^b(F) = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Другими словами, полная вариация абсолютно непрерывной функции равна интегралу от модуля ее производной.

Доказательство. Если $a = x_0 < x_1 < \dots < x_s = b$ есть некоторое разложение отрезка $[a, b]$ на части, то

$$\sum_{k=1}^s |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^s \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^s \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt,$$

так что

$$V_a^b(F) \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Для доказательства противоположного неравенства обозначим $E = [a, b]$, $P = E(f \geq 0)$, $N = E(f < 0)$. Тогда

$$\int_a^b |f(t)| dt = \int_P f(t) dt - \int_N f(t) dt.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, найдем такое $\delta > 0$, что для любого измеримого множества $e \subset [a, b]$ с мерой $m_e < \delta$ справедливо неравенство $\int_e |f(t)| dt < \varepsilon$.

Выберем замкнутые множества $F_P \subset P$ и $F_N \subset N$ такие, что $mF_P > mP - \delta$ и $mF_N > mN - \delta$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(t)| dt &= \int_{F_P} f(t) dt + \int_{P \setminus F_P} f(t) dt - \left(\int_{F_N} f(t) dt + \int_{N \setminus F_N} f(t) dt \right) < \\ &< \int_{F_P} f(t) dt - \int_{F_N} f(t) dt + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь свойством отделимости, которое состоит в том, что любые два непересекающиеся замкнутые ограниченные множества можно погрузить в непересекающиеся открытые множества. Найдем открытые множества $G'_P \supset F_P$ и $G'_N \supset F_N$ такие, что $G'_P \cap G'_N = \emptyset$. Можем считать, что $G'_P \subset (a, b)$ и $G'_N \subset (a, b)$. Далее, найдем такие открытые ограниченные множества $G''_P \supset F_P$ и $G''_N \supset F_N$, что $mG''_P < mF_P + \delta$ и $mG''_N < mF_N + \delta$. Обозначим $G_P = G'_P \cap G''_P$ и $G_N = G'_N \cap G''_N$. Тогда $F_P \subset G_P \subset (a, b)$, $m(G_P \setminus F_P) < \delta$, $F_N \subset G_N \subset (a, b)$, $m(G_N \setminus F_N) < \delta$, $G_P \cap G_N = \emptyset$ и G_P, G_N — открытые множества. Поэтому

$$\int_a^b |f(t)| dt < \int_{G_P} f(t) dt - \int_{G_N} f(t) dt + 4\varepsilon.$$

Множество G_P является объединением не более, чем счетного набора своих составляющих интервалов. Поэтому можно выбрать конечное число этих интервалов, такое, что для их объединения B_P справедливо $m(G_P \setminus B_P) < \delta$. Тогда будет $\int_{G_P} f(t) dt - \int_{B_P} f(t) dt < \varepsilon$. Пусть $B_P = \bigcup_{k=1}^s (\lambda_k, \mu_k)$. Тогда

$$\int_{B_P} f(t) dt = \sum_{k=1}^s \int_{\lambda_k}^{\mu_k} f(t) dt = \sum_{k=1}^s [F(\mu_k) - F(\lambda_k)].$$

Итак,

$$\int_{G_P} f(t) dt < \sum_{k=1}^s [F(\mu_k) - F(\lambda_k)] + \varepsilon.$$

Аналогичным образом выберем конечный набор $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^m$ из всех составляющих интервалов множества G_N так, чтобы было выполнено неравенство

$$\int_{G_N} f(t) dt > \sum_{k=1}^m [F(\beta_k) - F(\alpha_k)] - \varepsilon.$$

Из всего вышесказанного следует, что

$$\int_a^b |f(t)| dt < \sum_{k=1}^s [F(\mu_k) - F(\lambda_k)] - \sum_{k=1}^m [F(\beta_k) - F(\alpha_k)] + 6\varepsilon,$$

откуда тем более

$$\int_a^b |f(t)| dt < \sum_{k=1}^s |F(\mu_k) - F(\lambda_k)| + \sum_{k=1}^m |F(\beta_k) - F(\lambda_k)| + 6\varepsilon.$$

Но интервалы (λ_k, μ_k) и (α_k, β_k) не пересекаются, так что в последнем неравенстве правая часть не превосходит $V_a^b(F) + 6\varepsilon$. В силу произвольности ε , получаем

$$\int_a^b |f(t)| dt \leq V_a^b(F)$$

и тем самым завершается доказательство теоремы. \square

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке ограниченную вариацию. Тогда ее производная f' существует почти всюду на $[a, b]$ и суммируема. Положим $\varphi(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$, $r(x) = f(x) - \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$. Тогда $f = \varphi + r$, где функция φ абсолютно непрерывна, поскольку она является неопределенным интегралом Лебега суммируемой функции f' . Далее, функция φ почти всюду на $[a, b]$ имеет производную $\varphi' = f'$. Поэтому функция r непрерывна на $[a, b]$ как разность двух непрерывных функций и для почти всех $x \in [a, b]$ справедливо равенство $r'(x) = f'(x) - \varphi'(x) = 0$. Если дополнительно предположить, что функция f абсолютно непрерывна, то из равенства почти всюду $\varphi' = f'$, и из $f(a) = \varphi(a)$ получим, что $\varphi(x) = f(x)$, $a \leq x \leq b$, т.е. $r(x) \equiv 0$, $a \leq x \leq b$. Если же не предполагать абсолютной непрерывности функции f , то все вышесказанное может иметь место и в случае, когда функция r отлична от тождественного нуля.

Определение. Отличная от постоянной непрерывная функция с ограниченной вариацией, производная которой почти всюду равна нулю, называется *сингулярной* функцией.

Ясно, что сингулярная функция не может быть абсолютно непрерывной, ибо, в противном случае, в силу теоремы 2, она была бы тождественной постоянной. Пример возрастающей (и даже строго возрастающей) сингулярной функции построен нами в разделе "Монотонные функции" (функция Кантора а также следующий за ним пример).

Выше мы показали, что любая непрерывная функция f ограниченной вариации может быть представлена в виде $f = \varphi + r$, где функция φ абсолютно непрерывна, $\varphi(a) = f(a)$, а r — сингулярная или тождественный нуль. Покажем, что такое представление единственно. В самом деле, если существует два таких представления $f = \varphi + r = \varphi_1 + r_1$, то мы имели бы $\varphi - \varphi_1 = r_1 - r$, т.е. у абсолютно непрерывной функции было бы $(\varphi - \varphi_1)'(x) = r_1'(x) - r'(x) = 0$ для почти всех $x \in [a, b]$ и $(\varphi - \varphi_1)(a) = 0$. Это означает, что $\varphi(x) = \varphi_1(x)$, $a \leq x \leq b$. Отсюда также следует, что $r(x) = r_1(x)$, $a \leq x \leq b$.

Теорема 9. Если функция f возрастает, то ее абсолютно непрерывная и сингулярная компоненты также возрастают.

Доказательство. Ясно, что $f'(x) \geq 0$ почти всюду на $[a, b]$, т.е. в тех точках x , где эта производная существует. Отсюда следует, что абсолютно непрерывная компонента $\varphi(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ также возрастает на $[a, b]$. Далее, в разделе "Монотонные функции" мы доказали, что для монотонной функции f справедливо неравенство

$$\int_x^y f'(t)dt \leq f(y) - f(x), \quad a \leq x < y \leq b.$$

Отсюда следует, что $\varphi(y) - \varphi(x) \leq f(y) - f(x)$, или, что то же самое, $r(x) \leq r(y)$. \square

Следствие. Для того, чтобы возрастающая непрерывная функция f была абсолютно непрерывной на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a). \quad (17)$$

Доказательство. Необходимость получается мгновенно, если мы перепишем условие (17) в виде $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)dx$. Это равенство, очевидно, выполнено, поскольку справа мы имеем значение абсолютно непрерывной компоненты φ функции f в точке b , а равенство $f(b) = \varphi(b)$ вытекает из единственности разложения непрерывной функции f на абсолютно непрерывную и сингулярную компоненты. Последняя в нашем случае обращается в тождественный нуль для случая абсолютно непрерывной функции f .

Докажем достаточность. Предположим, что f не есть абсолютно непрерывной. Тогда для ее абсолютно непрерывной и сингулярной компонент φ и r справедливо равенство $f(b) - f(a) = \varphi(b) - \varphi(a) + r(b) - r(a)$, или $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx + r(b) - r(a)$.

Но функция r возрастает в силу предыдущей теоремы и отлична от тождественной постоянной. Значит $r(b) > r(a)$, а это означает, что не выполнено условие (17). \square

В предыдущем разделе мы показали, что любая функция ограниченной вариации может быть представлена в виде суммы своей функции скачков и непрерывной функции ограниченной вариации. Далее, выше мы показали также, что непрерывная функция представима в виде суммы абсолютно непрерывной и сингулярной компонент. Таким образом, мы получаем, что любая функция ограниченной вариации может быть представлена в виде суммы абсолютно непрерывной функции, сингулярной функции и функции скачков. При этом некоторые из слагаемых могут обращаться в тождественный нуль.

Вернемся к последнему следствию. Заменяем в равенстве (17) число b на произвольное x и перепишем его в виде

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (18)$$

При доказательстве следствия в части необходимости мы не использовали монотонности функции f . Это означает, что из абсолютной непрерывности функции f следует равенство (18). Сейчас мы хотим исследовать условия на производную, гарантирующие выполнение (18). Естественно предполагать, что производная f' существует почти всюду на $[a, b]$ и суммируема. Но этих требований явно недостаточно для справедливости (18), как показывает, например, функция Кантора, даже в случае возрастающей непрерывной функции f .

С другой стороны, во введении мы показали, что равенство (18) спра-

ведливо при условии, что производная $f'(x)$ существует в каждой точке x и ограничена. Следующая теорема существенно усиливает этот результат. Именно, она показывает, что условие ограниченности производной можно заменить более слабым условием суммируемости. Прежде, чем формулировать эту теорему, докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть на $[a, b]$ задана функция f , конечная в каждой точке. Если в каждой точке $x \in [a, b]$ все производные числа $Df(x)$ неотрицательны, то f возрастает на $[a, b]$.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и положим $F(x) = f(x) + \varepsilon x$. Предположим, что $F(b) < F(a)$. Пусть $c = \frac{a+b}{2}$. Тогда хотя бы одна из разностей $F(b) - F(c)$ или $F(c) - F(a)$ отрицательна. Пусть $[a_1, b_1]$ тот из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, для которого $F(b_1) - F(a_1) < 0$. Снова разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам точкой $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ и т.д.

Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных друг в друга отрезков $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^{\infty}$, длины которых стремятся к нулю и таких, что $F(b_k) < F(a_k)$. По лемме Кантора о вложенных отрезках существует точка $x_0 \in [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда при каждом $k = 1, 2, \dots$ одна из разностей $F(b_k) - F(x_0)$ или $F(x_0) - F(a_k)$ отрицательна. Положим $h_k = b_k - x_0$, если $F(b_k) - F(x_0) < 0$, и $h_k = a_k - x_0$, если $F(x_0) - F(a_k) < 0$ (если оба числа $F(b_k) - F(x_0)$ и $F(x_0) - F(a_k)$ отрицательны, то в качестве h_k выберем любое из чисел $b_k - x_0$ или $a_k - x_0$). При таком выборе, очевидно,

$$\Delta_k \equiv \frac{F(x_0 + h_k) - F(x_0)}{h_k} < 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Выберем подпоследовательность $\{\Delta_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, имеющую предел, быть может, равный $-\infty$. Мы получаем, что функция F будет иметь этот предел своим производным числом и, ясно, это производное число будет $DF(x_0) \leq 0$. Но это невозможно, ибо $DF(x_0) = Df(x_0) + \varepsilon > 0$.

Мы получили, что неравенство $F(b) < F(a)$ невозможно. Значит $F(b) \geq F(a)$, т.е. $f(b) + \varepsilon b \geq f(a) + \varepsilon a$, или $f(b) - f(a) \geq -\varepsilon(b - a)$. Отсюда, в силу произвольности ε , следует, что $f(b) \geq f(a)$.

Заменяя в приведенном доказательстве a и b произвольными x и y , $a \leq x < y \leq b$, получим $f(x) \leq f(y)$. \square

Лемма 2. Пусть функция f конечна в каждой точке отрезка $[a, b]$. Если почти всюду на $[a, b]$ все производные числа $Df(x)$ неотрицательны и ни в какой точке из $[a, b]$ ни одно из производных чисел не обращается в $-\infty$ (т.е. в каждой точке x из отрезка $[a, b]$ каждое производное число $Df(x) > -\infty$), то функция f возрастает на $[a, b]$.

Доказательство. Обозначим через E множество меры нуль тех точек, в которых хотя бы одно из производных чисел $Df(x)$ отрицательно. Построим непрерывную, возрастающую на $[a, b]$ функцию φ такую, что во всех точках x множества E будет $\varphi'(x) = +\infty$. Пример такой функции нами был построен в разделе "Монотонные функции" сразу после доказательства теоремы Лебега о дифференцировании монотонной функции.

Положим $F(x) = f(x) + \varepsilon\varphi(x)$, где $\varepsilon > 0$ задано. Покажем, что в каждой точке $x \in [a, b]$ все производные числа $DF(x)$ неотрицательны. В самом деле, из возрастания функции φ следует, что

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \varepsilon \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \geq \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

так что для $x \notin E$ все производные числа $DF(x)$ неотрицательны. Если же $x \in E$, то для любой последовательности $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$, $h_k \rightarrow 0$, $h_k \neq 0$, отношение $\frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k}$ ограничено снизу (ибо, в противном случае, в точке x существовало бы производное число $Df(x)$, равное $-\infty$). Кроме того, $\varphi'(x) = +\infty$, так что в точке $x \in E$ существует $F'(x) = +\infty$. Итак, все производные числа функции F неотрицательны. Стало быть, в силу леммы 1, функция F возрастает, т.е. из $a \leq x < y \leq b$ следует $F(x) \leq F(y)$, или, что то же самое, $f(x) + \varepsilon\varphi(x) \leq f(y) + \varepsilon\varphi(y)$. Устремляя ε к нулю, отсюда находим $f(x) \leq f(y)$. \square

Теорема 10. Если производная $f'(x)$ существует всюду, конечная в каждой точке $x \in [a, b]$ и суммируема, то

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Доказательство. Положим $\varphi_k(x) = \min(f'(x), k)$, $k = 1, 2, \dots$. Из неравенства $|\varphi_k(x)| \leq |f'(x)|$ следует, что функции φ_k суммируемы. Положим

$$F_k(x) = f(x) - \int_a^x \varphi_k(t)dt, \quad a \leq x \leq b, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и покажем, что функции F_k возрастают на $[a, b]$. Для этого заметим, что $F'_k(x) = f'(x) - \varphi_k(x) \geq 0$ для почти всех $x \in [a, b]$. Это означает, что множество тех точек x , в которых хотя бы одно производное число функции F_k отрицательно, имеет меру нуль. С другой стороны, из неравенства $\varphi_k(t) \leq k$ следует, что $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varphi_k(t)dt \leq k$, и, стало быть,

$$\frac{F_k(x+h) - F_k(x)}{h} \geq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - k.$$

Отсюда ясно, что ни одно производное число функции F_k не может обратиться в $-\infty$. Поэтому, в силу леммы 2, функция F_k возрастает на $[a, b]$, а значит $F_k(b) \geq F_k(a)$. Последнее неравенство означает, что $f(b) - f(a) \geq \int_a^b \varphi_k(x) dx$.

Но, очевидно, $f'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x)$ и, как уже было замечено выше, $|\varphi_k(x)| \leq |f'(x)|$. Отсюда, в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_k(x) dx = \int_a^b f'(x) dx$, так что $f(b) - f(a) \geq \int_a^b f'(x) dx$.

Применим теперь те же рассуждения к функции $-f$. Тогда получим, что $f(b) - f(a) \leq \int_a^b f'(x) dx$. Отсюда и из предыдущего неравенства следует $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$.

Если теперь в доказанном равенстве заменить b на произвольное $x \in [a, b]$, то получаем утверждение теоремы. \square

Пример. Пусть $f(x) = x^{3/2} \sin \frac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$, $f(0) = 0$. Эта функция в каждой точке $x \in [0, 1]$ имеет производную

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} \sin \frac{1}{x} - x^{-1/2} \cos \frac{1}{x}, \quad 0 < x \leq 1, \quad f'(0) = 0,$$

и эта производная суммируема, поскольку $|f'(x)| \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Значит, функция f удовлетворяет всем условиям теоремы 10. Однако, легко убедиться в том, что производная f' неограничена на $[0, 1]$, так что теорема о восстановлении функции по ее известной производной, доказанная нами во введении, к этой функции неприменима.

Вместе с тем и теорема 10 не решает полностью вопрос о восстановлении функции по известной ее производной, даже если последняя существует и конечная в каждой точке, ибо производная может оказаться несуммируемой. Чтобы это подтвердить, приведем пример.

Пример. Пусть $f(x) = x^2 \cos \frac{\pi}{x^2}$, $0 < x \leq 1$, $f(0) = 0$. Ясно, что производная $f'(x)$ существует в каждой точке $x \in [0, 1]$, но она несуммируема. В самом деле, для $0 < \alpha < \beta \leq 1$ производная $f'(x)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и, стало быть,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx = \beta^2 \cos \frac{\pi}{\beta^2} - \alpha^2 \cos \frac{\pi}{\alpha^2}.$$

В частности, для $\alpha_k = \sqrt{\frac{2}{4k+1}}$, $\beta_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}$ будет $\int_{\alpha_k}^{\beta_k} f'(x) dx = \frac{1}{2k}$. По-

сколькo отрезки $[\alpha_k, \beta_k]$ не пересекаются, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f'(x)| dx &\geq \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} [\alpha_k, \beta_k]} |f'(x)| dx = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |f'(x)| dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f'(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = +\infty, \end{aligned}$$

так что $f'(x)$ несуммируема на $[0, 1]$.

Итак, операция интегрирования по Лебегу решает вопрос о восстановлении функции по известной ее производной в более общем случае, чем интегрирование по Риману, но все же не полностью. Полное решение вопроса дает процесс интегрирования Данжуа-Перрона. Интеграл Данжуа-Перрона более общий, чем интеграл Лебега. Изучение этого интеграла не входит в рамки нашего курса.

НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

Из классического курса анализа хорошо известны примеры непрерывных функций, не имеющих производной в некоторых отдельных точках. Но возникает естественный вопрос: *может ли непрерывная функция быть недифференцируемой в каждой точке?* Первый пример такой функции был построен Вейерштрассом (опубликован Дю Буа-Реймоном в 1875 г.). Этот пример приводится в учебнике Г.М.Фихтенгольца "Курс дифференциального и интегрального исчисления". Мы рассмотрим другой, более простой пример, принадлежащий Ван дер Вардену (1930 г.).

Пример непрерывной нигде недифференцируемой функции.

Обозначим через $\{x\}$ расстояние от x до ближайшего целого числа и рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}. \quad (19)$$

Слагаемые этого ряда неотрицательны, непрерывны и мажорируются слагаемыми сходящегося числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n}$. Поэтому ряд (19) сходится равномерно и его сумма $f(x)$ есть функция непрерывная. Покажем, что в каждой точке функция $f(x)$ не имеет производной, т.е. что разностное отношение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ не имеет предела при $h \rightarrow 0$.

Ясно, что в силу периодичности f достаточно рассмотреть те значения x , для которых $0 \leq x < 1$. Представим x в виде $x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, где $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, причем, если десятичная дробь конечна, то будем дополнять ее нулями. Тогда $10^n x = a_1 \dots a_n, a_{n+1} a_{n+2} \dots$ и

$$\{10^n x\} = \begin{cases} 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots, & \text{если } 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots, & \text{если } 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Построим теперь такую последовательность чисел $h_m \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$), для которой выражение

$$\frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} \quad (20)$$

не имеет предела при $m \rightarrow \infty$. Это и будет означать, что функция f в точке x не имеет производной.

Положим $h_m = -10^{-m}$, если a_m равно 4 или 9, и $h_m = 10^{-m}$ во всех остальных случаях. Тогда разностное отношение (20) принимает

следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} &= \frac{1}{h_m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n(x+h_m)\}}{10^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n} \right] = \\ &= \pm 10^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\}}{10^n}. \end{aligned} \quad (21)$$

При $n \geq m$ числители дробей в правой части (21) равны нулю. Если же $n < m$, то

$$\begin{aligned} &\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\} = \\ &= \begin{cases} 0, a_{n+1} \dots a_{m-1} a'_m a_{m+1} \dots - 0, a_{n+1} \dots a_{m-1} a_m a_{m+1} \dots, & \text{если } 0, a_{n+1} \dots \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - 0, a_{n+1} \dots a_{m-1} a'_m a_{m+1} \dots - (1 - 0, a_{n+1} \dots a_{m-1} a_m a_{m+1} \dots), & \text{если } 0, a_{n+1} \dots > \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

где a'_m отличается от a_m на 1. Таким образом, слагаемые разности $\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\}$ отличаются друг от друга тем, что в $m - n$ -ом десятичном разряде соответствующие цифры отличаются на 1. Поэтому $\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\}$ равно $\pm 10^{n-m}$, и правая часть (21) принимает вид

$$\pm 10^m \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\pm 10^{n-m}}{10^n} = \pm \sum_{n=0}^{m-1} (\pm 1).$$

Итак, разностное отношение $\frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m}$ принимает целые (положительные, отрицательные или нулевые) значения, которые имеют ту же четность, что и число m . Ясно, что такая последовательность не может иметь предела, ибо целочисленная последовательность может сходиться лишь в том случае, когда все ее элементы постоянны, начиная с некоторого номера.

Рассмотрим теперь вопрос о том, какими могут быть производные числа Df произвольной функции f . Для этого введем понятия верхних и нижних производных чисел.

Определение. Правым верхним производным числом функции f в точке x_0 называется

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \equiv \overline{D}_R f(x_0).$$

Правым нижним производным числом называется

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \equiv \underline{D}_R f(x_0).$$

Аналогично определяются левые верхнее и нижнее производные числа соответственно

$$\overline{D}_L f(x_0) \equiv \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h},$$

$$\underline{D}_L f(x_0) \equiv \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}.$$

Далее производными числами мы будем называть верхнее или нижнее, правое или левое производные числа. Другие производные числа мы рассматривать не будем. Два производных числа мы будем называть *смежными*, если они оба правые или оба левые. Два производных числа называются *противоположными*, если они не смежные и одно из них верхнее, а другое – нижнее.

Ясно, что производные числа удовлетворяют неравенствам

$$-\infty \leq \underline{D}_L f(x_0) \leq \overline{D}_L f(x_0) \leq +\infty, \quad -\infty \leq \underline{D}_R f(x_0) \leq \overline{D}_R f(x_0) \leq +\infty,$$

а равенство $\underline{D}_L f(x_0) = \overline{D}_L f(x_0) = \underline{D}_R f(x_0) = \overline{D}_R f(x_0)$ необходимо и достаточно для того, чтобы функция f имела производную $f'(x_0)$, равную, быть может, $+\infty$ или $-\infty$. При этом $f'(x_0)$ равно общему значению всех четырех производных чисел функции f в точке x_0 .

Нетрудно построить

Пример непрерывной функции с наперед заданными производными числами в заданной точке. Действительно, пусть заданы числа $-\infty \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq +\infty$, $-\infty \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq +\infty$. Сначала построим непрерывную на отрезке $[0, 1]$ функцию f_{β_1, β_2} , у которой $\underline{D}_R f(0) = \beta_1$, $\overline{D}_R f(0) = \beta_2$. Положим $f(0) = 0$. Если β_1 и β_2 конечны, то функцию $f_{\beta_1, \beta_2}(x)$, $0 < x \leq 1$, определим равенством

$$f_{\beta_1, \beta_2}(x) = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} x \sin \frac{1}{x} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} x.$$

Для бесконечных β_1 и β_2 полагаем

$$f_{+\infty, +\infty}(x) = \sqrt{x}, \quad f_{-\infty, +\infty}(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}, \quad f_{-\infty, -\infty}(x) = -\sqrt{x}.$$

Если $-\infty < \beta_1 < \beta_2 = +\infty$, то $f_{\beta_1, +\infty}(x) = \beta_1 x + \sqrt{x} \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right)$, а для $-\infty = \beta_1 < \beta_2 < +\infty$ полагаем $f_{-\infty, \beta_2}(x) = \beta_2 x + \sqrt{x} \left(-1 + \sin \frac{1}{x}\right)$. Ясно, что в любом случае имеем $\underline{D}_R f_{\beta_1, \beta_2}(0) = \beta_1$, $\overline{D}_R f_{\beta_1, \beta_2}(0) = \beta_2$.

Определим теперь функцию

$$f_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2}(x) = \begin{cases} f_{\beta_1, \beta_2}(x), & x \geq 0, \\ f_{-\alpha_2, -\alpha_1}(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Тогда легко видеть, что функция f непрерывна и она имеет следующие производные числа

$$\begin{aligned} \underline{D}_L f_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2}(0) &= \alpha_1, & \overline{D}_L f_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2}(0) &= \alpha_2, \\ \underline{D}_R f_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2}(0) &= \beta_1, & \overline{D}_R f_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2}(0) &= \beta_2. \end{aligned}$$

Приведенный пример показывает, что даже у непрерывной функции в отдельной точке производные числа могут быть совершенно произвольными. Однако, мы увидим, что такая ситуация не может иметь место сразу во всех точках. Именно, ниже будет показано, что у произвольной функции почти во всех точках либо существует конечная производная, либо хотя бы одно из производных чисел бесконечно. Прежде, чем точно формулировать окончательное утверждение, докажем несколько вспомогательных утверждений. Для простоты будем рассматривать функции, определенные на интервале (a, b) .

Основная лемма. Пусть функция f конечна на интервале (a, b) . Тогда почти всюду на множестве E таких точек $x \in (a, b)$, для которых при всех $\xi \in (a, x)$ выполнено неравенство $f(x) > f(\xi)$, имеет место соотношение

$$\underline{D}_L f(x) = \overline{D}_R f(x), \quad (22)$$

причем обе части равенства (22) конечны.

Доказательство. Итак, $E = \{x \in (a, b) : \forall \xi \in (a, x) \quad f(x) > f(\xi)\}$. Из определения множества E сразу следует, что сужение $f|_E$ функции f на E представляет собой возрастающую функцию. Пусть $\alpha = \inf E$. Определим на (a, b) возрастающую функцию g , совпадающую с f в точках множества E . Это можно сделать следующим образом. Если $\alpha > a$, то положим $g(x) = \inf\{f(\xi) : \xi \in E\}$, $a < x < \alpha$. Для $x > \alpha$ положим $g(x) = \sup\{f(\xi) : \xi \in E \cap (a, x]\}$. Ясно, что функция g обладает указанными свойствами.

Поскольку функция g возрастает, то для почти всех $x \in (a, b)$ существует $g'(x)$. Исключим из множества E те точки x , в которых не существует $g'(x)$. Множество всех таких исключенных точек имеет меру нуль.

Далее, выше мы показали, что почти каждая точка произвольного множества является его точкой плотности. Поэтому исключая из множества E также еще и те точки, которые не являются его точками плотности, мы получим множество $E_0 \subset E$ такое, что $m(E \setminus E_0) = 0$.

Лемма, таким образом, будет доказана, если мы покажем, что в каждой точке $x \in E_0$ справедливо (22).

Зафиксируем $x_0 \in E_0$. Поскольку x_0 — точка плотности множества E , а на множестве E функции f и g совпадают и существует $g'(x_0)$, то существует также и

$$f'_E(x_0) = \lim_{\xi \rightarrow x_0, \xi \in E} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \underline{D}_L f(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} \inf \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \\ &\leq \lim_{\xi \rightarrow x_0, \xi \in E, \xi < x_0} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} = f'_E(x_0) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \overline{D}_R f(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} \sup \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \\ &\geq \lim_{\xi \rightarrow x_0, \xi \in E, \xi > x_0} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} = f'_E(x_0). \end{aligned}$$

С другой стороны, если $x < x_0$ и $x_0 - x$ достаточно мало, то при $x \in E$ разностное отношение $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ мало отличается от $f'_E(x_0)$. Если же $x \notin E$, то найдем точку $\xi \in E$ такую, что $x < \xi < x_0$ и $\xi - x$ мало по сравнению с $x_0 - x$, т.е. $\frac{\xi - x}{x_0 - x}$ мало. Из определения множества E следует, что $f(\xi) > f(x)$, а значит и $f(\xi) - f(x_0) \geq f(x) - f(x_0)$. Разделив это неравенство на $x - x_0 < 0$, получаем

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{f(\xi) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0 + (x - \xi)}.$$

Выражение справа мало отличается от $\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}$, которое, в свою очередь, мало отличается от $f'_E(x_0)$. Стало быть и

$$\underline{D}_L f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} \inf \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'_E(x_0).$$

Аналогично, рассматривая точки $x > x_0$, мы получим неравенство

$$\overline{D}_R f(x_0) \leq f'_E(x_0).$$

Сопоставляя эти два неравенства с полученными выше противоположными неравенствами, будем иметь

$$\underline{D}_L f(x_0) = f'_E(x_0) = \overline{D}_R f(x_0),$$

и тем самым наша лемма доказана. \square

Следствие 1. Пусть функция f конечна на интервале (a, b) . Тогда почти всюду на множестве E тех точек $x \in (a, b)$, где $\underline{D}_L f(x) > -\infty$, справедливо соотношение

$$\underline{D}_L f(x) = \overline{D}_R f(x), \quad (23)$$

причем обе части равенства (23) конечны.

Доказательство. Для рациональных $r \in (a, b)$ и натурального k обозначим через $E_{r,k}$ множество тех $x \in (r, b)$, что для всех $\xi \in (r, x)$ справедливо неравенство $\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > -k$. Пусть $\{r_s\}_{s=1}^{\infty}$ — последовательность всех рациональных чисел из интервала (a, b) . Докажем сначала, что справедливо равенство $E = \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{r_s, k}$.

Пусть $x \in E_{r_s, k}$. Это означает, что для всех $\xi \in (r_s, x)$ справедливо $\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > -k$. Отсюда следует, что и

$$\liminf_{\xi \rightarrow x, \xi < x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \underline{D}_L f(x) \geq -k,$$

т.е. $x \in E$. Обратно, если $x \in E$, то найдется такое k , что $\underline{D}_L f(x) > -k$. Поэтому найдется такое $r_s < x$, что для всех $\xi \in (r_s, x)$ справедливо неравенство $\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > -k$, т.е. $x \in E_{r_s, k}$.

Итак, в силу доказанного равенства $E = \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{r_s, k}$, наше следствие будет доказано, если мы покажем, что равенство (23) справедливо почти всюду на множестве $E_{r, k}$ при каждом $r \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$ и $k \in \mathbb{N}$. Далее, равенство (23) равносильно тому, что $\underline{D}_L f_k(x) = \overline{D}_R f_k(x)$, где $f_k(x) = f(x) + kx$, а для $x \in E_{r, k}$ будем иметь

$$\frac{f_k(\xi) - f_k(x)}{\xi - x} = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} + k > -k + k = 0, \quad r < \xi < x,$$

или, что то же самое, $f_k(\xi) < f_k(x)$, $r < \xi < x$. Другими словами, множество $E_{r, k}$ состоит из тех точек $x > r$, что для всех $\xi \in (r, x)$ справедливо неравенство $f_k(\xi) < f_k(x)$. Это означает, что множество $E_{r, k}$ представляет собой то множество E , которое фигурирует в условии основной

леммы для функции f_k , заданной на (r, b) вместо f на (a, b) . Поэтому, из основной леммы, примененной к функции f_k на (r, b) , получаем, что $\underline{D}_L f_k(x) = \overline{D}_R f_k(x)$ для почти всех $x \in E_{r,k}$ и тем самым завершается доказательство следствия. \square

Следствие 2. Пусть функция f конечна на интервале (a, b) . Тогда почти всюду на множестве E_1 тех точек $x \in (a, b)$, где $\overline{D}_L f(x) < +\infty$, справедливо соотношение

$$\overline{D}_L f(x) = \underline{D}_R f(x), \quad (24)$$

причем обе части равенства (24) конечны.

Доказательство. Достаточно заметить, что справедливы следующие равенства

$$\underline{D}_L(-f(x)) = -\overline{D}_L f(x), \quad \overline{D}_R(-f(x)) = -\underline{D}_R f(x).$$

Поэтому (24) получается из (23) применением последнего к функции $-f$. \square

Следствие 3. Пусть функция f конечна на интервале (a, b) . Тогда почти всюду на множестве E_2 тех точек $x \in (a, b)$, в которых справедливы соотношения $-\infty < \underline{D}_L f(x) \leq \overline{D}_L f(x) < +\infty$, функция f имеет конечную производную.

Доказательство. Ясно, что $E_2 = E \cap E_1$, где множества E и E_1 определены в формулировках следствий 1 и 2 соответственно. Используя следствия 1 и 2, для почти всех $x \in E_2$ получим

$$-\infty < \underline{D}_L f(x) \leq \overline{D}_L f(x) = \underline{D}_R f(x) \leq \overline{D}_R f(x) = \underline{D}_L f(x) \leq \overline{D}_L f(x) < +\infty,$$

так что все производные числа функции f конечны и равны. Это означает, что функция f дифференцируема в точке x . \square

Легко видеть, что для функции $g(x) = f(-x)$ справедливы следующие соотношения

$$\underline{D}_L g(x) = -\overline{D}_R f(-x), \quad \overline{D}_L g(x) = -\underline{D}_R f(-x),$$

а для функции $h(x) = -f(-x)$

$$\underline{D}_L h(x) = \underline{D}_R f(-x), \quad \overline{D}_L h(x) = \overline{D}_R f(-x).$$

Учитывая это, легко получить следующие утверждения.

Следствие 1'. Пусть функция f конечна на интервале (a, b) . Тогда почти всюду на множестве E_3 тех точек $x \in (a, b)$, где $\underline{D}_R f(x) > -\infty$, справедливо соотношение

$$\underline{D}_R f(x) = \overline{D}_L f(x), \quad (25)$$

где обе части в (25) конечны.

Следствие 2'. Пусть функция f конечна на интервале (a, b) . Тогда почти всюду на множестве E_4 тех точек $x \in (a, b)$, где $\overline{D}_R f(x) < +\infty$, справедливо соотношение

$$\overline{D}_R f(x) = \underline{D}_L f(x), \quad (26)$$

где обе части в (26) конечны.

Рассмотрим множество $((a, b) \setminus E) \cap E_4$. Согласно следствию 2', почти всюду на E_4 , а значит и на нашем множестве справедливо (26), в котором обе части конечны. Значит соотношения $\underline{D}_L f(x) = -\infty$, и $-\infty \leq \overline{D}_R f(x) < +\infty$ одновременно могут выполняться лишь на множестве меры нуль.

Аналогичным образом получаем, что соотношения $\overline{D}_L f(x) = +\infty$, и $-\infty < \underline{D}_R f(x) \leq +\infty$ одновременно могут выполняться также лишь на множестве меры нуль. Значит, на множестве положительной меры одновременно могут выполняться лишь следующие две пары равенств $\underline{D}_L f(x) = -\infty$, $\overline{D}_R f(x) = +\infty$, или $\overline{D}_L f(x) = +\infty$, $\underline{D}_R f(x) = -\infty$.

Сопоставляя это со следствием 3, получаем следующую теорему.

Теорема Данжуа-Юнг-Сакса. Пусть функция f конечна на интервале (a, b) . Тогда во всех точках $x \in (a, b)$, за исключением, быть может, множества меры нуль, может осуществляться лишь одна из двух следующих возможностей:

а) два противоположных производных числа оба конечны и равны между собой;

б) из пары противоположных производных чисел верхнее производное число равно $+\infty$, а нижнее равно $-\infty$.

Из этой теоремы, в частности, вытекает

Следствие 4. Почти всюду на (a, b) два смежных производных числа либо оба конечны и равны, либо хотя бы одно из них бесконечно.

Из теоремы Данжуа-Юнг-Сакса сразу следует теорема Лебега о дифференцировании монотонной функции. В самом деле, поскольку у возрастающей функции f не может быть отрицательных производных чисел, то почти всюду на (a, b) остается возможным лишь утверждение а) теоремы Данжуа-Юнг-Сакса. Это означает, что для почти всех $x \in (a, b)$ справедливы равенства $\underline{D}_R f(x) = \overline{D}_L f(x)$, $\overline{D}_R f(x) = \underline{D}_L f(x)$. Отсюда получаем

$$-\infty < \underline{D}_L f(x) \leq \overline{D}_L f(x) = \underline{D}_R f(x) \leq \overline{D}_R f(x) = \underline{D}_L f(x) < +\infty,$$

так что все производные числа равны и f имеет конечную производную в точке x .

ЛИТЕРАТУРА

1. И.П.Натансон. *Теория функций вещественной переменной*. М., Наука, 1974.
2. Ф.Рисс, Б.Секефальви-Надь. *Лекции по функциональному анализу*. М., Мир, 1979.
3. Б.Гелбаум, Дж.Олмстед. *Контрпримеры в анализе*. М., Мир, 1967.

ПРОГРАММА
курса
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ
ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ВВЕДЕНИЕ

1. Предмет исследования. Предварительные сведения из курса анализа.
2. Пример функции, производная у которой ограничена, но неинтегрируема в смысле Римана.
3. Восстановление функции по ее ограниченной производной с помощью интеграла Лебега.

МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ

1. Скачки монотонной функции. Теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.
2. Функция скачков. Разложение монотонной функции в сумму функции скачков и непрерывной составляющей.
3. Лемма Витали о покрытии (два варианта).
4. Леммы о производных числах монотонной функции. Теорема Лебега.
5. Пример монотонной функции, не имеющей производной на заданном множестве меры нуль.
6. Оценка интеграла от производной монотонной функции.
7. Примеры возрастающей и строго возрастающей непрерывных функций с почти всюду равной нулю производной.
8. Теорема Фубини о почленном дифференцировании ряда с монотонными слагаемыми.
9. Точки плотности. Теорема Лебега о точках плотности.
10. Аппроксимативная непрерывность. Теорема Данжуа.

ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

1. Определение функции ограниченной вариации. Примеры.
2. Арифметические свойства функций ограниченной вариации.
3. Аддитивность вариации. Следствия.
4. Критерий ограниченности вариации. Следствия.
5. Неопределенная вариация функции. Теорема о непрерывности неопределенной вариации. Следствие.
6. Теорема о производной неопределенной вариации.

7. Теорема о точках разрыва неопределенной вариации.
8. Функция скачков для функции ограниченной вариации. Разложение функции ограниченной вариации на сумму функции скачков и непрерывной функции.
9. Теорема о равенстве производных функции ограниченной вариации и ее неопределенной вариации.
10. Вычисление вариации непрерывной функции с помощью пределов (две теоремы).
11. Индикатриса Банаха. Теорема Банаха.

АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Различные определения абсолютно непрерывной функции и их эквивалентность. Примеры.
2. Арифметические свойства абсолютно непрерывных функций.
3. Связь абсолютной непрерывности с ограниченностью вариации. Следствие.
4. Теорема о постоянстве абсолютно непрерывной функции.
5. Неопределенный интеграл Лебега. Абсолютная непрерывность неопределенного интеграла Лебега.
6. Теорема о производной неопределенного интеграла Лебега.
7. Абсолютно непрерывная функция как неопределенный интеграл Лебега от своей производной.
8. Точки Лебега. Дифференцируемость неопределенного интеграла Лебега в точке Лебега. Пример функции, у которой неопределенный интеграл Лебега имеет производную в точке, не являющейся точкой Лебега.
9. Теорема о точках Лебега суммируемой функции.
10. Вариация неопределенного интеграла Лебега.
11. Сингулярная функция. Разложение непрерывной функции на абсолютно непрерывную и сингулярную компоненты.
12. Теорема об абсолютно непрерывной и сингулярной компонентах монотонной функции. Следствие.
13. Условия монотонности функции в терминах производных чисел.
14. Теорема о восстановлении функции по ее суммируемой производной.
15. Пример функции с несуммируемой производной.

НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

1. Пример Ван дер Вардена непрерывной, нигде недифференцируемой функции.

2. Односторонние производные числа функции. Пример функции с заданными односторонними производными числами в точке.
3. Леммы о равенстве противоположных производных чисел.
4. Теорема Данжуа-Юнг-Сакса. Следствие для монотонной функции.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ

Билет N 1

1. Пример функции, производная у которой ограничена, но неинтегрируема в смысле Римана.
2. Теорема о производной неопределенной вариации.
3. Абсолютно непрерывная функция как неопределенный интеграл Лебега от своей производной.

Билет N 2

1. Оценка интеграла от производной монотонной функции.
2. Определение функции ограниченной вариации. Примеры.
3. Теорема о точках Лебега суммируемой функции.

Билет N 3

1. Восстановление функции по ее ограниченной производной с помощью интеграла Лебега.
2. Аддитивность вариации. Следствия.
3. Вариация неопределенного интеграла Лебега.

Билет N 4

1. Аппроксимативная непрерывность. Теорема Данжуа.
2. Теорема о точках разрыва неопределенной вариации.
3. Пример функции с несуммируемой производной.

Билет N 5

1. Точки плотности. Теорема Лебега о точках плотности.
2. Арифметические свойства функций ограниченной вариации.
3. Теорема о производной неопределенного интеграла Лебега.

Билет N 6

1. Теорема Фубини о почленном дифференцировании ряда с монотонными слагаемыми.
2. Теорема о равенстве производных функции ограниченной вариации и ее неопределенной вариации.
3. Различные определения абсолютно непрерывной функции и их эквивалентность. Примеры.

Билет N 7

1. Скачки монотонной функции. Теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.
2. Функция скачков для функции ограниченной вариации. Разложение функции ограниченной вариации на сумму функции скачков и непрерывной функции.
3. Теорема о восстановлении функции по ее суммируемой производной.

Билет N 8

1. Функция скачков. Разложение монотонной функции в сумму функции скачков и непрерывной составляющей.
2. Неопределенная вариация функции. Теорема о непрерывности неопределенной вариации. Следствие.
3. Условия монотонности функции в терминах производных чисел.

Билет N 9

1. Лемма Витали о покрытии (два варианта).
2. Критерий ограниченности вариации. Следствия.
3. Точки Лебега. Дифференцируемость неопределенного интеграла Лебега в точке Лебега. Пример функции, у которой неопределенный интеграл Лебега имеет производную в точке, не являющейся точкой Лебега.

Билет N 10

1. Пример монотонной функции, не имеющей производной на заданном множестве меры нуль.
2. Вычисление вариации непрерывной функции с помощью пределов (две теоремы).
3. Арифметические свойства абсолютно непрерывных функций.

Билет N 11

1. Леммы о производных числах монотонной функции. Теорема Лебега.
2. Аддитивность вариации. Следствия.
3. Связь абсолютной непрерывности с ограниченностью вариации. Следствие.

Билет N 12

1. Аппроксимативная непрерывность. Теорема Данжуа.
2. Арифметические свойства функций ограниченной вариации.
3. Теорема о постоянстве абсолютно непрерывной функции.

Билет N 13

1. Примеры возрастающей и строго возрастающей непрерывных функций с почти всюду равной нулю производной.
2. Индикатриса Банаха. Теорема Банаха.
3. Сингулярная функция. Разложение непрерывной функции на абсолютно непрерывную и сингулярную компоненты.

Билет N 14

1. Пример функции, производная у которой ограничена, но неинтегрируема в смысле Римана.
2. Неопределенная вариация функции. Теорема о непрерывности неопределенной вариации. Следствие.
3. Теорема об абсолютно непрерывной и сингулярной компонентах монотонной функции. Следствие.

Билет N 15

1. Примеры возрастающей и строго возрастающей непрерывных функций с почти всюду равной нулю производной.
2. Функция скачков для функции ограниченной вариации. Разложение функции ограниченной вариации на сумму функции скачков и непрерывной функции.
3. Неопределенный интеграл Лебега. Абсолютная непрерывность неопределенного интеграла Лебега.

Билет N 16

1. Скачки монотонной функции. Теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.
2. Критерий ограниченности вариации. Следствия.
3. Пример Ван дер Вардена непрерывной, нигде недифференцируемой функции.

Билет N 17

1. Леммы о производных числах монотонной функции. Теорема Лебега.
2. Теорема о производной неопределенной вариации.
3. Односторонние производные числа функции. Пример функции с заданными односторонними производными числами в точке.

Билет N 18

1. Теорема Фубини о почленном дифференцировании ряда с монотонными слагаемыми.
2. Определение функции ограниченной вариации. Примеры.
3. Леммы о равенстве противоположных производных чисел.

Билет N 19

1. Точки плотности. Теорема Лебега о точках плотности.
2. Теорема о точках разрыва неопределенной вариации.
3. Теорема Данжуа-Юнг-Сакса. Следствие для монотонной функции.