Теория функций действительного переменного

(текст лекций)

Составитель – А.А.Кореновский

Одесса - 2005

Данный курс лекций был прочитан студентам третьего курса факультета математики Института математики, экономики и механики Одесского госуниверситета в 1996 - 1997 учебном году.

Курс рассчитан на два семестра. Он содержит подробное изложение построения меры и интеграла Лебега в многомерном евклидовом пространстве. Рассмотрен также класс функций, суммируемых с квадратом, и некоторые его приложения в теории ортогональных рядов. Ввиду того, что учебным планом не были предусмотрены практические занятия, в лекциях достаточно большое внимание уделено примерам.

Предлагаемый текст лекций может оказаться полезным студентам при подготовке к экзамену по данному курсу, а также для самостоятельного изучения теории меры и интеграла Лебега. При подготовке курса использовались следующие учебники:

1. И.П.Натансон. *Теория функций вещественной переменной.* М. Наука. 1974.

2. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М. Наука. 1972.

Эти книги могут быть рекомендованы также и для дальнейшего ознакомления с тематикой.

Значительная часть работы по напечатанию рукописи проделана студенткой факультета математики Быстрой Еленой.

Содержание

1 Мера Лебега.

1.1 Топология пространства R^n.

Будем рассматривать пространство R^n - множество всевозможных упорядоченных наборов из n действительных чисел $x = (x_1, ..., x_n)$. Элементы этого пространства называют n-мерными точками или векторами. Операции над векторами (сложение и умножение на действительные скаляры) определяется обычным образом.

Эвклидовой нормой (или *длиной*) вектора $x = (x_1, ..., x_n)$ называется число $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$.

Расстоянием между двумя точками $x, y \in \mathrm{R}^n$ называется число $d(x, y) = |x - y|$.

Открытым шаром с центром в точке $x_0 \in \mathrm{R}^n$ радиуса $r > 0$ называется множество $B(x_0, r) = \{x \in \mathrm{R}^n : d(x, x_0) < r\}$.

Открытый шар $B(x_0, \delta)$ называется *δ-окрестностью* точки x_0.

Множество $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathrm{R}^n : d(x, x_0) \leq r\}$ называется *замкнутым шаром* с центром в точке $x_0 \in \mathrm{R}^n$ радиуса $r \geq 0$.

Пусть множество $E \subset \mathrm{R}^n$. Точка $x_0 \in E$ называется *внутренней* точкой множества E, если существует такое $\delta > 0$, что $B(x_0, \delta) \subset E$.

Множество E называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Простейшие свойства открытых множеств.

1. Объединение любого семейства открытых множеств – открытое множество.

2. Пересечение *конечного* набора открытых множеств – открытое множество.

Структура открытого множества на действительной прямой.

Теорема. Любое непустое открытое множество $G \subset \mathrm{R}$ единственным образом представляется в виде конечного или счетного объединения попарно непересекающихся интервалов:

$$G = \bigcup_k I_k, \quad I_k \bigcap I_j = \emptyset \quad (k \neq j).$$

Доказательство. Интервал (α, β) назовем *составляющим* интервалом множества G, если $(\alpha, \beta) \subset G$ и $\alpha \notin G,\ \beta \notin G$.

Докажем,что

1) каждая точка множества G принадлежит некоторому составляющему интервалу множества G;

2) любые два составляющих интервала либо не пересекаются, либо совпадают;

3) множество всех составляющих интервалов не более, чем счетно.

1) Пусть точка $x_0 \in G$. Построим составляющий интервал (α, β), содержащий x_0. Так как G – открыто, то найдется такое $\delta > 0$, что $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset G$.

Обозначим $\alpha = \inf\{\xi : (\xi, x_0] \subset G\}$, $\beta = \sup\{\eta : [x_0, \eta) \subset G\}$ (нижняя и (или) верхняя грань могут быть бесконечными; берутся они по непустым множествам). Покажем, что (α, β) – составляющий интервал множества G. Действительно, если $x \in (\alpha, \beta)$ и $x \neq x_0$, то $x \in (\alpha, x_0)$ или $x \in (x_0, \beta)$. Пусть $x \in (\alpha, x_0)$. По определению α найдется точка $\xi, \alpha < \xi < x$, такая, что $(\xi, x_0] \subset G$. Но тогда и $x \in G$. Аналогично показываем, что в случае $x \in (x_0, \beta)$ справедливо $x \in G$. Таким образом, $(\alpha, \beta) \subset G$.

Покажем теперь, что $\alpha, \beta \notin G$. Предположим, что $\alpha \in G$. Так как G открыто, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset G$. Но поскольку $(\alpha, x_0] \subset G$, то и $(\alpha - \varepsilon, x_0] \subset G$, а это противоречит выбору α. Аналогично показываем,что $\beta \notin G$.

2) Предположим, что существуют составляющие интервалы (α, β) и (α', β'), которые не совпадают и имеют общую точку x_0. Пусть, например, $\alpha < \alpha'$. Так как $x_0 \in (\alpha, \beta)$ и $x_0 \in (\alpha', \beta')$, то $\alpha < \alpha' < x_0 < \beta$. Это противоречит тому, что (α', β') – составляющий интервал множества G.

3) Для того, чтобы установить, что любое семейство попарно непересекающихся интервалов на прямой не более, чем счетно, достаточно заметить, что в каждом интервале содержится хотя бы одна рациональная точка. Действительно, расположим в последовательность множество всех рациональных чисел, и, просматривая поочередно эти числа, занумеруем интервалы в том порядке, в каком в нашей последовательности будет встречаться первое рациональное число, принадлежащее тому или иному интервалу.

Итак, мы показали, что множество G может быть представленно в виде объединения составляющих интервалов. Осталось доказать единственность такого представления. Предположим противное. Пусть $G = \bigcap_k I_k$ и $G = \bigcap_s I'_s$, где I_k, I'_s – составляющие интервалы множества G. Если какой-либо из интервалов I_k пересекается, но не совпадает с каким-либо из интервалов I'_s, то, как и в п.2), получим, что либо один из концов интервала I_k, либо один из концов интервала I'_s содержится во множестве G, что противоречит тому, что эти интервалы составляющие. Таким образом, интервалы I_k совпадают с интервалами I'_s с точностью до нумерации. **QED**

Определение. Для непустого множества $E \subset \mathrm{R}^n$ совокупность всех его внутренних точек называют *внутренностью* множества E и обозначают $intE$ (или $\overset{\circ}{E}$).

Легко показать, что внутренность любого множества есть множество открытое.

Определение. Точка x_0 называется *предельной* точкой множества E, если в любой ее окрестности содержится точка множества E, отличная от x_0.

Сама точка x_0 может и не принадлежать множеству E, но быть предельной точкой этого множества.

Множество E называется *замкнутым,* если оно содержит все свои предельные точки.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема (двойственность замкнутых и открытых множеств). Множество F замкнуто тогда, и только тогда, когда его дополнение $cF \equiv \{x \in \mathrm{R}^n : x \notin F\}$ открыто.

Простейшие свойства замкнутых множеств.

1. Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.
2. Объединение любого *конечного* набора замкнутых множеств замкнуто.

Компактность.

Пусть задано множество $E \subset \mathrm{R}^n$. Семейство $T = \{G\}$ открытых множеств G называется открытым покрытием множества E, если каждая точка $x \in E$ содержится в некотором множестве G из семейства T.

Множество E называется *компактным,* если из любого его открытого покрытия можно выбрать *конечное* семейство множеств, также покрывающих множество E (конечное подпокрытие).

Определение. *Сегментом* в R^n называется множество

$$I = \{x \in \mathrm{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Интервалом в R^n называется множество

$$J = \{x \in \mathrm{R}^n : a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Легко видеть, что сегмент – замкнутое множество, интервал – открытое множество и внутренностью сегмента является интервал.

Лемма (о вложенных сегментах). Пусть дана последовательность вложенных сегментов $I_1 \supset I_2 \supset \ldots,\ I_k \subset \mathrm{R}^n,\ k = 1, 2, \ldots$ Тогда $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$. Если, кроме того, диаметры этих сегментов

$$diam I_k \equiv \sqrt{(b_1^{(k)} - a_1^{(k)})^2 + \ldots + (b_n^{(k)} - a_n^{(k)})^2} \to 0\ (k \to \infty),$$

то существует *единственная* точка $x^0 \in \mathrm{R}^n$, принадлежащая всем сегментам $I_k,\ k = 1, 2, \ldots$

Доказательство легко получается применением одномерной леммы Кантора о вложенных отрезках. Пусть

$$I_k = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n : a_i^k \leq x_i \leq b_i^k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Фиксируем i. Тогда получим последовательность вложенных друг в друга отрезков $\Delta_i^{(k)} \equiv [a_i^k, b_i^k],\ k = 1, 2, \ldots$ По лемме Кантора о вложенных отрезках найдется точка $x_i^0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_i^{(k)}$. Тогда ясно, что вектор $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ принадлежит всем сегментам I_k. Если же $diam I_k \to 0\ (k \to \infty)$, то для любого $i = 1, \ldots, n$ имеем $(b_i^{(k)} - a_i^{(k)}) \leq diam I_k \to 0$ и, в силу леммы Кантора, точка x_i^0 единственна для каждого $i = 1, \ldots, n$. Значит и вектор x^0 также единственен. **QED**

Лемма Гейне-Бореля. Любой сегмент $I \subset \mathrm{R}^n$ компактен.

Доказательство. Пусть $T = \{G\}$ – произвольное открытое покрытие сегмента I. Покажем, что из него можно выделить конечное подпокрытие. Предположим противное, т.е. пусть никакое конечное подсемейство множеств из T не покрывает I. Разделим сегмент I на 2^n конгруэнтных сегментов путём деления пополам каждой из сторон сегмента I. Если d – диаметр сегмента I, то каждый из полученных новых сегментов будет иметь диаметр $d/2$. Если каждый из этих сегментов можно было бы покрыть конечным набором множеств G из семейства T, то тогда и сегмент I был бы покрыт конечным набором множеств из T, что противоречит нашему предположению. Значит, найдётся такой сегмент $I_1 \subset I$, полученный в результате деления сегмента I, который не может быть покрытым никаким конечным набором множеств G из семейства T. Применим к сегменту I_1 такую же процедуру деления и выберем сегмент $I_2 \subset I_1$, который не может быть покрыт конечным набором множеств G из T, причём $diam I_2 = diam I_1/2 = d/2^2$. Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных друг в друга сегментов $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$, таких, что $diam I_k = d/2^k \to 0$ $(k \to \infty)$ и каждый из сегментов I_k не может быть покрытым никаким конечным набором множеств G из семейства T. Согласно лемме о вложенных сегментах, найдется единственная точка x^0, принадлежащая всем этим сегментам. Поскольку $x^0 \in I$, то найдётся *открытое* множество $G_0 \in T$, содержащее точку x^0. Так как G_0 – открытое и $x^0 \in G_0$, то найдётся окрестность $B(x^0, \delta) \subset G_0$. Так как $diam I_k \to 0$ $(k \to \infty)$, то начиная с некоторого номера будет $diam I_k < \delta$. Но из условий $x^0 \in I_k$ и $diam I_k < \delta$ следует, что $I_k \subset B(x^0, \delta)$. Значит $I_k \subset G_0$ начиная с некоторого номера. Другими словами, для достаточно большого k сегмент I_k покрывается одним множеством G_0, а это противоречит выбору сегментов I_k. **QED**

Определение. Множество $E \subset \mathrm{R}^n$ называется *ограниченным*, если найдётся шар, содержащий это множество. Очевидно, это условие равносильно тому, что найдётся сегмент, содержащий это множество.

Теорема Гейне - Бореля. Множество $K \subset \mathrm{R}^n$ компактно тогда, и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Доказательство. Необходимость. Пусть K – компактно. Докажем ограниченность. Рассмотрим набор открытых шаров $B(0, k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Ясно, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} B(0, k) = \mathrm{R}^n$. Поэтому шары $\{B(0, k)\}_{k=1}^{\infty}$ образуют открытое покрытие множества K. В силу компактности K, из этого открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие $B(0, k_1), \ldots, B(0, k_s)$. Тогда ясно, что при $R = \max_{1 \leq i \leq s} k_i$ шар $B(0, R)$ содержит K, а это и означает, что множество K ограниченное.

Для доказательства замкнутости K предположим противное. Пусть точка x_0 – предельная для K и $x_0 \notin K$. Рассмотрим семейство открытых множеств $c\overline{B}(x_0, 1/k)$, $k = 1, 2, \ldots$ – дополнения к замкнутым шарам с центром в точке x_0 радиусов $1/k$. Ясно, что объединение этих множеств покрывает все пространство R^n, за исключением одной точки x_0. Поскольку, как мы предположили, $x_0 \notin K$, то мы получили открытое покрытие компактного множества K. Извлечём из него конечное подпокрытие $\{c\overline{B}(x_0, \frac{1}{k_i)}\}_{i=1}^{s}$. Поскольку

$r = \min_{1 \le i \le s} \frac{1}{k_i} > 0$, то ясно, что $K \subset c\overline{B}(x_0, r)$. Другими словами, это означает, что в шаре $B(x_0, r)$ нет точек множества K, а это противоречит тому, что x_0 предельная точка множества K.

Достаточность. Пусть множество K замкнуто и ограничено. Докажем компактность. Пользуясь ограниченностью, построим сегмент $I \supset K$. Пусть $T = \{G\}$ – семейство открытых множеств, образующих открытое покрытие множества K. Добавим к набору T ещё одно множество cK. Оно открыто, поскольку K – замкнуто. Получим новое семейство T^*, покрывающее все пространство R^n, и, следовательно, сегмент I. В силу леммы Гейне - Бореля, так как сегмент I – компактен, то из семейства T^* можно извлечь конечное подпокрытие сегмента I. Но из условия $I \supset K$ следует также, что это конечное подпокрытие сегмента I образует также и конечное подпокрытие множества K. Если среди открытых множеств, образующих это подпокрытие, содержится множество cK, то, отбрасывая его, мы всё равно получим покрытие множества K. Оставшиеся множества входят в семейство T. Значит, множество K оказалось покрытым конечным набором множеств из семейства T. Поскольку T – произвольный набор открытых множеств, покрывающих K, то тем самым доказана компактность множества K. **QED**

Замечание. Мы доказали, что в конечномерном пространстве R^n компактность эквивалентна замкнутости и ограниченности. В курсе функционального анализа изучаются более общие пространства, в которых не каждое замкнутое ограниченное множество является компактным. Однако же из компактности вытекает замкнутость и ограниченность в любом метрическом пространстве, не обязательно конечномерном.

1.2 Построение меры Лебега в R^n.

1.2.1 Мера сегмента.

Мерой сегмента $I = \{x = (x_1, \dots x_n) \in \mathrm{R}^n : a_i \le x_i \le b_i, \ i = 1, \dots n\}$ называется число

$$mI \equiv |I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. Если сегмент I разбит на конечное число сегментов I_k с непересекающимися внутренностями, т.е. $I = \bigcup_{k=1}^{s} I_k$, где $\mathring{I}_k \bigcap \mathring{I}_i = \emptyset \ (k \ne i)$, то $|I| = \sum_{k=1}^{s} |I_k|$.

Доказательство. В случае, когда сегменты I_k образуют сетчатое розбиение сегмента I, доказательство леммы сводится к простым арифметическим вычислениям. Случай произвольного разбиения очевидным образом сводится к случаю сетчатого разбиения. **QED**

1.2.2 Мера фигуры.

Множество $X \subset \mathrm{R}^n$ называется *фигурой* если его можно представить в виде *конечного* объединения сегментов.

Теорема. Пусть фигура $X = \bigcup_{k=1}^{s} I_k$, где I_k – сегменты. Тогда существует конечный набор сегментов $\{Q_j\}_{j=1}^{m}$ с попарно непересекающимися внутренностями ($\overset{\circ}{Q}_j \bigcap \overset{\circ}{Q}_j = \emptyset,\ j \neq i$) таких, что $X = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$ и из условия $int(Q_j \bigcap I_k) \neq \emptyset$ следует, что $Q_j \subset I_k$. В частности, для каждого j найдётся такое k, что $Q_j \subset I_k$.

Доказательство. Применим индукцию по n. Докажем теорему для $n = 1$. Пусть $I_k = [a_k, b_k]$. Обозначим $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2s}$ концы сегментов I_k, занумерованные в порядке возрастания. Если $[\alpha_i, \alpha_{i+1}] \subset X$, то очередной Q_j полагаем равным $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$; в противном случае переходим к следующему сегменту $[\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}]$. Перебрав все номера $i = 1, 2, \ldots, 2s - 1$ получаем требуемый набор сегментов Q_j.

Предположим теперь, что утверждение теоремы справедливо в пространстве R^{n-1}. Так как в R^n сегмент есть декартово произведение $(n-1)$ – мерного сегмента на одномерный сегмент, то, применяя теорему к проекциям сегментов I_k на n-ю ось и предположение индукции к проекциям сегментов I_k на первые $n-1$ координатные оси, получаем конечные наборы $(n-1)$-мерных и одномерных сегментов. Далее, просматривая всевозможные декартовы призведения сегментов из первого и второго наборов и оставляя из них те, которые содержатся в фигуре X, получаем требуемый набор сегментов Q_j. **QED**

Определение. Если фигура $X = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$, где сегменты Q_j имеют попарно непересекающиеся внутренности, то говорят, что сегменты Q_j осуществляют *дизъюнктивное разложение* фигуры X.

Доказаная выше теорема, в частности, утверждает, что любая фигура допускает дизъюнктивное разложение. Сегменты Q_j, осуществляющие дизъюнктивное разложение фигуры X, называют *составляющими* сегментами фигуры X. Легко видеть, что для любой фигуры X её дизъюнктивное разложение не единственно, за исключением тривиального случая, когда X представляет собой объединение конечного набора одноточечных множеств.

Определение. *Мерой* фигуры X называется сумма мер сегментов, осуществляющих *дизъюнктивное* разложение данной фигуры.

Как уже было доказано, любая фигура допускает дизъюнктивное разложение. Поскольку такое разложение, вообще говоря, не единственно, то, чтобы доказать корректность определённой выше меры фигуры, нужно показать, что эта мера не зависит от дизъюнктивного разложения фигуры. Покажем это.

Пусть имеется два дизъюнктивных разложения фигуры X: $X = \bigcup_{k=1}^{s} I_k$ и $X = \bigcup_{i=1}^{r} Q_i$. Обозначим $R_{ki} = I_k \bigcap Q_i$, $k = 1, \ldots, s$, $i = 1, \ldots, r$. Тогда ясно, что сегменты R_{ki} имеют попарно непересекающиеся внутренности и $I_k = \bigcup_{i=1}^{r} R_{ki}$, $Q_i = \bigcup_{k=1}^{s} R_{ki}$. Поэтому, в силу свойства аддитивности меры сегментов, имеем:

$$\sum_{k=1}^{s} |I_k| = \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} |R_{ki}| = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} |R_{ki}| = \sum_{i=1}^{r} |Q_i|.$$

Тем самым доказана корректность определения меры фигур.

Свойства меры фигур.

Монотонность. Если фигуры $X \subset Y$, то $mX \le mY$.

Доказательство. Пусть $X = \bigcup_{k=1}^{s} I_k,\ Y = \bigcup_{i=1}^{r} Q_i$. К объединению наборов сегментов $\{I_k\}_{k=1}^{s}$ и $\{Q_i\}_{i=1}^{r}$ применим теорему о дизъюнктивном разложении фигуры $Y = (\bigcup_{k=1}^{s} I_k) \bigcup (\bigcup_{i=1}^{r} Q_i)$. В результате получим набор сегментов $J_l,\ l = 1, \ldots, p$, таких, что $Y = \bigcup_{l=1}^{p} J_l, \mathring{J}_l \bigcap \mathring{J}_j = \emptyset\ (l \neq j)$, и каждый сегмент J_l содержится в некотором I_k либо Q_i. Выберем среди всех сегментов J_l такие, которые целиком содержатся в фигуре X. Покажем, что все оставшиеся сегменты содержатся в $\overline{Y \setminus X}$. Действительно, если некоторый сегмент J_l имеет непустую внутренность пересечения с фигурой X, то он имеет непустую внутренность пересечения с некоторым из сегментов I_k и, так как J_l целиком содержится в этом I_k, то J_l целиком содержится и в фигуре X. Итак, множество всех сегментов $J_l,\ l = 1, 2, \ldots, p$ распадается на два семейства:

1. Сегменты, целиком содержащиеся в фигуре X; через $\bigcup_l'$, $\sum_l'$ будем обозначать объединение и сумму по тем номерам l, для которых сегмент с этим номером целиком содержится в X. Из вышесказанного следует, что $X = \bigcup_l' J_l$.

2. Оставшиеся сегменты, не вошедшие в первое семейство; для них будем обозначать операции следующим образом: $\bigcup_l''$, $\sum_l''$. Имеем $\bigcup_l'' J_l \subset \overline{Y \setminus X}$.

Итак, получаем

$$mY = \sum_{l=1}^{p} |J_l| = \sum_l{}' |J_l| + \sum_l{}'' |J_l| \ge \sum_l{}' |J_l| = mX,$$

что и требовалось доказать.

Полуаддитивность. Если X и Y – фигуры, то $m(X \bigcup Y) \le mX + mY$.

Доказательство. Пусть $X = \bigcup_{k=1}^{s} I_k,\ Y = \bigcup_{i=1}^{r} Q_i$. Заметим сначала, что $X \bigcup Y$– фигура, поскольку это есть конечное объединение сегментов I_k и Q_i. К объединению наборов этих сегментов применим теорему о дизъюнктивном разложении фигуры $X \bigcup Y$. В результате получим дизъюнктивный набор сегментов $\{J_l\}_{l=1}^{p}$, такой, что $X \bigcup Y = \bigcup_{l=1}^{p} J_l$, и каждый из сегментов J_l содержится либо в некотором I_k либо в некотором Q_i. Поэтому совокупность всех сегментов $\{J_l\}_{l=1}^{p}$ разбивается на три непересекающихся семейства:

1. Сегменты J_l, содержащиеся в X и имеющие пустую внутренность пересечения с фигурой Y; их объединение обозначается через $\bigcup_l'$.

2. Сегменты J_l, содержащиеся в Y и имеющие пустую внутренность пересечения с фигурой X; их объединение обозначается через $\bigcup_l''$.

3. Все оставшиеся сегменты J_l; они содержатся в $X \bigcap Y$, их объединение обозначается через $\bigcup_l'''$.

Легко видеть, что $X = (\bigcup_l' J_l) \bigcup (\bigcup_l''' J_l),\ Y = (\bigcup_l'' J_l) \bigcup (\bigcup_l''' J_l)$. Поэтому

$$m(X \bigcup Y) = \sum_{l=1}^{p} |J_l| = \sum_l{}' |J_l| + \sum_l{}'' |J_l| + \sum_l{}''' |J_l| \le$$

$$\le (\sum_l{}' |J_l| + \sum_l{}''' |J_l|) + (\sum_l{}'' |J_l| + \sum_l{}''' |J_l|) \ = \ mX + mY.$$

Аддитивность. Если фигуры X и Y такие, что $\overset{\circ}{X} \bigcap \overset{\circ}{Y} = \emptyset$, то $m(X \bigcup Y) = mX + mY$.

Доказательство. Достаточно заметить, что в обозначениях, использованных при доказательстве предыдущего свойства, из условия $\overset{\circ}{X} \bigcap \overset{\circ}{Y} = \emptyset$ вытекает $\sum_l''' |J_l| = 0$.

1.2.3 Мера открытых множеств.

Мера открытого множества определяется путём приближения его фигурами изнутри.

Определение. Мерой открытого множества $G \subset \mathrm{R}^n$ называется верхняя грань мер всевозможных фигур, содержащихся в G:

$$mG = \sup_{X \subset G,\ X\ -\ \text{фигура}} mX.$$

Пример. Пусть G – внутренность фигуры X: $G = \overset{\circ}{X}$. Тогда G – открытое множество. Покажем, что $mG = mX$. Действительно, для любой фигуры $Y \subset G$ имеем $Y \subset X$ и, в силу свойства монотонности мер фигур, $mY \leq mX$. Отсюда следует, что $mG = \sup_{Y \subset G} mY \leq mX$. С другой стороны, пусть дизъюнктивное разложение $X = \bigcup_{k=1}^{s} I_k$. Зададим $\varepsilon > 0$ и для каждого сегмента I_k с непустой внутренностью построим сегмент $\tilde{I_k} \subset \overset{\circ}{I}_k$ такой, что $|\tilde{I_k}| > |I_k| - \varepsilon/s$ (сегмент $\tilde{I_k}$ легко можно построить, сжимая стороны исходного сегмента I_k относительно его центра). Тогда фигура $X_\varepsilon = \bigcup_k \tilde{I_k}$ представлена дизъюнктивным разложением на сегменты $\tilde{I_k}$ и $X_\varepsilon \subset G$. Кроме того,

$$mX_\varepsilon = \sum_k |\tilde{I_k} \geq \sum_{k=1}^{s} (|I_k| - \varepsilon/s) = mX - \varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности ε, следует, что $mG \geq mX$. Это неравенство вместе с полученным выше неравенством противоположного смысла даёт равенство $mG = mX$.

Свойства меры открытых множеств.

Монотонность. Если открытые множества $G \subset H$ то $mG \leq mH$.

Доказательство. Если произвольная фигура $X \subset G$, то $X \subset H$. Это означает, что при определении $mG = \sup_{X \subset G} mX$ верхняя грань берётся по более узкому множеству, чем при определении $mH = \sup_{X \subset H} mX$. Из свойств верхней грани поэтому получаем $mG \leq mH$.

Лемма 1 (полуаддитивность меры открытых множеств). Пусть G и H – открытые множества. Тогда $m(G \bigcup H) \leq mG + mH$.

Доказательство. Пусть фигура $W \subset G \bigcup H$. Для точки $x \in W$ построим невырожденный сегмент $I(x)$ с центром в точке x, содержащийся либо целиком в G, либо целиком в H. Это возможно, поскольку из условия $x \in W$ следует $x \in G \subset H$, т.е. либо $x \in G$ либо $x \in H$. В первом случае, пользуясь тем, что

G – открытое множество и $x \in G$, построим окрестность $B(x,\delta) \subset G$, а затем невырожденный сегмент $I(x)$ с центром в точке x, содержащийся в $B(x,\delta)$, а значит и в G. Если же $x \in H$, то такую же процедуру проделаем со множеством H.

Проделав это построение для каждой точки $x \in W$, получим, что непустые внутренности сегментов $I(x)$ образуют открытое покрытие фигуры W. Поскольку фигура W – множество замкнутое и ограниченное, и, следовательно, компактное, то из имеющегося его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие, т.е. $W \subset \bigcup_{k=1}^{s} \overset{\circ}{I}(x_k)$. Ясно, что $W \subset \bigcup_{k=1}^{s} I(x_k)$. Выберем среди сегментов $I(x_k)$ такие, которые целиком содержатся в G и их объединение обозначим через X. Объединение оставшихся сегментов $I(x_k)$, т.е. содержащихся в H, обозначим через Y. Тогда X и Y – фигуры (как конечные объединения сегментов), $X \subset G$, $Y \subset H$ и

$$X \bigcup Y = \bigcup_{k=1}^{s} I(x_k) \supset W.$$

Используя теперь свойство монотонности и полуаддитивности меры фигур и учитывая определение меры открытых множеств G и H, получим

$$mW \leq m(X \bigcup Y) \leq mX + mY \leq mG + mH.$$

Наконец, поскольку W – произвольная фигура, содержащаяся в $G \bigcup H$, то, переходя к верхней грани по всевозможным фигурам $W \subset G \bigcup H$, получаем утверждение леммы.

1.2.4 Мера замкнутых ограниченных множеств.

Мера замкнутого ограниченного (т.е. компактного) множества определяется путём приближения его фигурами извне.

Определение. Мерой замкнутого ограниченного множества $K \subset \mathrm{R}^n$ называется нижняя грань мер всевозможных фигур, содержащих K:

$$mK = \inf_{X \supset K,\ X\ -\ \text{фигура}} mX.$$

Пример. Пусть X – фигура. Тогда, поскольку X является также и компактным множеством, то у неё имеется две меры: $m_f X$ – мера X как фигуры и $m_k X$ – мера X как компактного множества. Покажем, что эти две меры совпадают. Действительно, для любой фигуры $Y \supset X$, в силу монотонности меры фигур, имеем $m_f Y \geq m_f X$. С другой стороны, найдётся такая фигура $Y \supset X$, что $m_f Y = m_f X$ (в качестве такой фигуры Y можно взять X). Вместе с вышесказанным это означает, что

$$\inf_{Y \supset X} m_f Y = m_f X,$$

что и требовалось доказать.

Свойства меры замкнутых ограниченных множеств.

Монотонность. Если замкнутые ограниченные множества $K \subset L$, то $mK \leq mL$.

Доказательство этого свойства аналогично тому, как была доказана монотонность меры открытых множеств.

Для доказательства свойства аддитивности меры замкнутых ограниченных множеств нам понадобится следующая

Лемма (об отделимости). Пусть K и L – непересекающиеся замкнутые ограниченные множества. Тогда существуют фигуры X и Y, такие, что $X \supset K$, $Y \supset L$ и $X \bigcap Y = \emptyset$.

Доказательство. Используем компактность K и L. Пусть $x \in K$. Так как $K \bigcap L = \emptyset$, то $x \in cL$ и, поскольку cL – открыто, точка x – внутренняя в cL. Построим невырожденный сегмент $I(x)$ с центром в точке x, содержащийся целиком в cL.

Проделав эту операцию для каждой точки $x \in K$, получим, что совокупность непустых внутренностей сегментов $I(x)$ образует открытое покрытие компактного множества K. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $\overset{\circ}{I}(x_1), \ldots, \overset{\circ}{I}(x_s)$. Тогда ясно, что фигура $X \equiv \bigcup_{k=1}^{s} I(x_k)$ обладает следующими свойствами: $X \supset K$ и $X \bigcap L = \emptyset$.

Проделав аналогичное постренние, взяв вместо K множество L, а вместо L – полученную уже фигуру X, построим фигуру $Y \supset L$ такую, что $Y \bigcap X = \emptyset$.**QED**

Лемма 2 (аддитивность меры замкнутых ограниченных множеств). Пусть K и L – непересекающиеся замкнутые ограниченные множества. Тогда

$$m(K \bigcup L) = mK + mL.$$

Доказательство. Докажем сначала, что $m(K \bigcup L) \leq mK + mL$. Пусть фигуры X и Y такие, что $X \supset K$, $Y \supset L$. Тогда фигура $W = X \bigcup Y \supset K \bigcup L$. Имеем

$$m(K \bigcup L) \leq mW = m(X \bigcup Y) \leq mX + mY.$$

Поскольку X и Y – произвольные фигуры, содержащие K и L соответственно, то, переходя в этом неравенстве к нижней грани по всевозможным таким фигурам X и Y, получаем, что $m(K \bigcup L) \leq mK + mL$.

Для доказательства противоположного неравенства воспользуемся предыдущей леммой об отделимости. Построим фигуры X и Y, содержащие K и L соответственно, и такие, что $X \bigcap Y = \emptyset$. Пусть произвольная фигура $W \supset K \bigcup L$. Тогда фигуры $\tilde{X} = X \bigcap W$ и $\tilde{Y} = Y \bigcap W$, очевидно, обладают следующими свойствами: $\tilde{X} \bigcap \tilde{Y} = \emptyset$, $W \supset \tilde{X} \bigcup \tilde{Y}$, $\tilde{X} \supset K$, $\tilde{Y} \supset L$. Отсюда, используя аддитивность меры фигур, получаем:

$$mW \geq m(\tilde{X} \bigcup \tilde{Y}) = m\tilde{X} + m\tilde{Y} \geq mK + mL.$$

Поскольку W – произвольная фигура, содержащая $K \bigcup L$, то, переходя в полученном неравенстве к нижней грани по всевозможным таким фигурам W, получаем

$$m(K\bigcup L)\geq mK+mL.$$

Это неравенство вместе с полученным ранее противоположным неравенством завершает доказательство леммы.

Замечание. При доказательстве леммы нами полученно свойство полуаддитивности меры замкнутых множеств $m(K\bigcup L)\leq mK+mL$ без предположения того, что множества K и L не пересекаются.

Лемма 3 (связь между мерами замкнутых и открытых множеств). Пусть открытое множество G и замкнутое ограниченное множество K таковы, что $K\subset G$. Тогда $mK\leq mG$.

Доказательство. Очевидно, достаточно построить такую фигуру X, что $K\subset X\subset G$. Действительно, при этом утверждение леммы сразу следует из неравенств

$$mK=\inf_{Y\supset K}mY\leq mX\leq\sup_{Y\subset G}mY=mG.$$

Построим фигуру X, обладающую указанными свойствами. Пусть точка $x\in K$. Поскольку x – внутренняя точка в открытом множестве G, то существует невырожденный сегмент $I(x)$ с центром в точке x, целиком содержащийся в G.

Построим указанные сегменты $I(x)$ для всех точек $x\in K$. Тогда совокупность непустых внутренностей этих сегментов образует открытое покрытие множества K. Пользуясь компактностью K, выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $\overset{\circ}{I}(x_1),\dots,\overset{\circ}{I}(x_s)$. Ясно, что фигура $X=\bigcup_{k=1}^{s}I(x_k)$ обладает нужными свойствами. **QED**

1.2.5 Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества.

Для произвольного ограниченного множества $E\subset\mathrm{R}^n$ его внешняя мера определяется путём приближения открытыми множествами извне, а внутренняя мера – путём приближения замкнутыми множествами изнутри.

Определение. *Внешней мерой* ограниченного множества $E\subset\mathrm{R}^n$ называется нижняя грань мер всевозможных открытых множеств, содержащих E:

$$m^*E=\inf_{G\supset E,\ G\ -\ \text{открыто}}mG.$$

Внутренней мерой множества E называется верхняя грань мер всевозможных замкнутых множеств, содержащихся в E:

$$m_*E=\sup_{K\subset E,\ K\ -\ \text{компактно}}mK.$$

Для произвольного ограниченного множества $E\subset\mathrm{R}^n$ справедливо неравенство

$$m_*E\leq m^*E.$$

Действительно, если замкнутое множество $K\subset E$ и открытое множество $G\supset E$, то, так как $K\subset G$, в силу леммы 3, имеем: $mK\leq mG$. Переходя в этом неравенстве сперва к верхней грани по всевозможным замкнутым множествам $K \subset E$, а затем к нижней грани по всевозможным открытым множествам $G \supset E$, получаем требуемое неравенство.

Предложение 1. Пусть G – открытое множество. Тогда

$$m_* G = m^* G = mG.$$

Доказательство. Для любого открытого множества $H \supset G$, в силу монотонности меры открытых множеств, имеем $mH \geq mG$. С другой стороны, существует открытое множество $H \supset G$ такое, что $mH = mG$ (в качестве H можно взять G). Оба эти свойства вместе означают, что

$$m^* G \equiv \inf_{H \supset G} mH = mG.$$

Далее, учитывая, что

$$mG \equiv \sup_{X \subset G,\ X\ -\ \text{фигура}} mX$$

и тот факт, что каждая фигура является замкнутым и ограниченным множеством, получаем

$$\sup_{X \subset G} mX \leq \sup_{K \subset G,\ K\ -\ \text{компактно}} mK.$$

(Верхняя грань в правой части берётся по более широкому множеству). Последнее неравенство означает, что $mG \leq m_* G$. Учитывая уже доказанное и тот факт, что $m_* G \leq m^* G$, получаем

$$mG \leq m_* G \leq m^* G = mG.$$

Из этого неравенства следует наше утверждение.

Предложение 2. Пусть K – замкнутое ограниченное множество. Тогда

$$m_* K = m^* K = mK.$$

Доказательство. Для любого замкнутого ограниченного множества $L \subset K$, в силу монотонности меры замкнутых множеств, имеем $mL \leq mK$. С другой стороны, найдётся замкнутое ограниченное множество $L \subset K$ такое, что $mL = mK$ (в качестве L можно взять K). Оба эти свойства вместе означают, что

$$m_* K \equiv \sup_{L \subset K} mL = mK.$$

Далее, зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь определением меры замкнутого множества K, найдём фигуру $X_\varepsilon \supset K$ такую, что

$$mX_\varepsilon < mK + \varepsilon/2.$$

Если дизъюнктивное разбиение фигуры

$$X_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{s} I_k,$$

то, растянем каждый из сегментов I_k относительно его центра так, чтобы вновь полученные сегменты I'_k обладали следующими свойствами:

$$\overset{\circ}{I}{}'_k \supset I_k, \ \ |I'_k| \leq |I_k| + \varepsilon/2s.$$

Учитывая теперь тот ранее доказанный факт, что мера внутренности фигуры равна мере фигуры, и используя полуаддитивность меры фигур, для фигуры $X'_\varepsilon \equiv \bigcup_{k=1}^{s} I'_k$ получим :

$$\overset{\circ}{X}{}'_\varepsilon \supset X_\varepsilon$$

и

$$m \overset{\circ}{X}{}'_\varepsilon = mX'_\varepsilon \leq \sum_{k=1}^{s} |I'_k| \leq \sum_{k=1}^{s} (|I_k| + \varepsilon/2s) =$$

$$= mX_\varepsilon + \varepsilon/2 < mK + \varepsilon.$$

Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ мы построили открытое множество $\overset{\circ}{X}{}'_\varepsilon \supset K$, такое, что $m \overset{\circ}{X}{}'_\varepsilon < mK + \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует, что

$$m^*K \equiv \inf_{G \supset K} mG \leq mK.$$

Учитывая уже доказанное и тот факт, что $m_*K \leq m^*K$, получаем

$$m^*K \leq mK = m_*K \leq m^*K.$$

Из этого неравенства следует наше утверждение.

1.2.6 Измеримые множества.

Определение. Ограниченное множество $E \subset \mathrm{R}^n$ называется *измеримым по Лебегу,* если $m_*E = m^*E$. В этом случае общее значеник внешней и внутренней мер называется *мерой Лебега* множества E и обозначается mE. Если же $m_*E < m^*E$, то множество E называется *неизмеримым* и ему не приписывается никакое значение меры.

В терминах этого определения предложения 1 и 2 показывают, что ограниченное открытое и ограниченное замкнутое множества измеримы по Лебегу и их лебеговы меры совпадают с их мерами как открытого и замкнутого множества соответственно.

1.3 Свойства меры Лебега.

Монотонность. Если A и B измеримые множества, и $A \subset B$, то $mA \leq mB$.

Это свойство мгновенно вытекает из монотонности внутренней меры множеств. Монотонность внутренней меры легко можно доказать так же, как была доказана монотонность меры открытых множеств.

Лемма 4 (конечная аддитивность меры Лебега). Пусть измеримые множества A и B таковы, что $A \bigcap B = \emptyset$. Тогда их объединение $A \bigcup B$ измеримо и

$$m(A \bigcup B) = mA + mB.$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$m^*(A \bigcup B) \leq mA + mB. \tag{1}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и, пользуясь измеримостью множеств A и B и определением внешней меры, найдём открытые множества G и H такие, что $G \supset A$, $H \supset B$, $mG < mA + \varepsilon/2$, $mH < mB + \varepsilon/2$. Поскольку открытое множество $G \bigcup H \supset A \bigcup B$, то, снова используя определение внешней меры и полуаддитивность меры открытых множеств, получаем

$$m^*(A \bigcup B) \leq m(G \bigcup H) \leq mG + mH < mA + mB + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует (1).

Докажем теперь неравенство

$$m_*(A \bigcup B) \geq mA + mB. \tag{2}$$

Пользуясь измеримостью множеств A и B и определением внутренней меры, для заданного $\varepsilon > 0$ найдём замкнутые множества K и L, такие, что $K \subset A$, $L \subset B$, $mK > mA - \varepsilon/2$, $mL > mB - \varepsilon/2$. Из условия $A \bigcap B = \emptyset$ следует также, что $K \bigcap L = \emptyset$. Используя теперь аддитивность меры замкнутых множеств и определение внутренней меры, получаем

$$m_*(A \bigcup B) \geq m(K \bigcup L) = mK + mL > mA + mB - \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует (2).

Из (1) и (2) и из неравенства $m_*(A \bigcup B) \leq m^*(A \bigcup B)$ вытекает, что

$$m_*(A \bigcup B) = m^*(A \bigcup B) = mA + mB.$$

QED

Следствие. Если задан конечный набор измеримых множеств $A_1, \ldots, A_s$ таких, что $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $(i \neq j)$, то их объединение измеримо, и

$$m(\bigcup_{k=1}^{s} A_k) = \sum_{k=1}^{s} mA_k.$$

Доказательство этого следствия легко получить из леммы 4, применяя метод математической индукции.

Лемма 5 (критерий измеримости). Для того, чтобы ограниченное множество $E \subset \mathrm{R}^n$ было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы для любого

$\varepsilon > 0$ нашлось замкнутое множество $K \subset E$ и открытое множество $G \supset E$ такие, что $m(G \setminus K) < \varepsilon$.

Доказательство. Заметим, что множество $G \setminus K = G \bigcap (cK)$ открыто, и, в силу предложения 1, измеримо. Далее, поскольку из $K \subset G$ следует, что $G = K \bigcup (G \setminus K)$, где измеримые множества K и $G \setminus K$ не пересекаются, то, в силу леммы 4, $mG = mK + m(G \setminus K)$. Отсюда следует, что $m(G \setminus K) = mG - mK$.

Докажем *необходимость*. Пусть E – измеримо. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь определением внешней и внутренней мер множества E, найдём замкнутое множество $K \subset E$ и открытое множество $G \supset E$ такие, что $mK > m_*E - \varepsilon/2$, $mG < m^*E + \varepsilon/2$. Так как при этом $K \subset G$, то

$$m(G \setminus K) = mG - mK < m^*E - m_*E + \varepsilon = \varepsilon.$$

Достаточность. Если G и K соответственно открытое и замкнутое множества такие, что $K \subset E \subset G$, и $m(G \setminus K) < \varepsilon$, то из очевидного неравенства

$$mK \leq m_*E \leq m^*E \leq mG$$

следует

$$0 \leq m^*E - m_*E \leq mG - mK = m(G \setminus K) < \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует, что $m_*E = m^*E$, т.е. измеримость множества E. **QED**

Теорема 1. Пусть множества A и B измеримы. Тогда измеримы также множества $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$.

Доказательство. Докажем, что измеримо $A \setminus B$. Будем использовать критерий измеримости. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдём замкнутые множества K_1 и K_2, и открытые множества G_1 и G_2 такие, что

$$K_1 \subset A \subset G_1, \; K_2 \subset B \subset G_2$$

и

$$m(G_1 \setminus K_1) < \varepsilon/2, \; m(G_2 \setminus K_2) < \varepsilon/2.$$

Обозначим $G = G_1 \setminus K_2$, $K = K_1 \setminus G_2$. Множества G и K открыто и замкнуто соответственно и, как нетрудно проверить, $K \subset A \setminus B \subset G$. Кроме того, легко видеть, что $G \setminus K = (G_1 \setminus K_2) \setminus (K_1 \setminus G_2) \subset (G_1 \setminus K_1) \bigcup (G_2 \setminus K_2)$. Отсюда, в силу монотонности и полуаддитивности меры открытых множеств, следует, что

$$m(G \setminus K) \leq m((G_1 \setminus K_1) \bigcup (G_2 \setminus K_2)) \leq$$

$$\leq m(G_1 \setminus K_1) + m(G_2 \setminus K_2) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то, на основании критерия измеримости, получаем измеримость множества $A \setminus B$.

Для доказательства измеримости $A \bigcup B$ воспользуемся равенством $A \bigcup B = A \bigcup (B \setminus A)$. Так как множества A и $B \setminus A$ измеримы и не пересекаются, то, на основании леммы 4, множество $A \bigcup B$ измеримо.

Измеримость $A \bigcap B$ следует из равенства $A \bigcap B = A \setminus (A \setminus B)$. **QED**

Для доказательства следующего важнейшего свойства меры Лебега – счётной аддитивности – нам понадобится вспомогательная

Лемма 6 (счетная полуаддитивность меры открытых множеств). Пусть $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность открытых множеств и $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. Тогда

$$mG \leq \sum_{k=1}^{\infty} mG_k.$$

Доказательство. Множество G открыто и его мера, по определению, есть верхняя грань мер фигур, содержащихся в G. Пусть фигура $X \subset G$. Тогда набор множеств $G_k,\ k = 1, 2, \ldots$ образует открытое покрытие компактного множества X. Выберем конечное подпокрытие $G_{k_1}, \ldots, G_{k_s}$ фигуры X, т.е.

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{s} G_{k_i}.$$

Тогда, используя определение меры открытого множества $\bigcup_{i=1}^{s} G_{k_i}$ и конечную полуаддитивность меры открытых множеств, получим

$$mX \leq m(\bigcup_{i=1}^{s} G_{k_i}) \leq \sum_{i=1}^{s} mG_{k_i} \leq \sum_{k=1}^{\infty} mG_k.$$

Переходя в этом неравенстве к верхней грани по всевозможным фигурам $X \subset G$, получаем утверждение леммы.

Теорема 2 (счётная аддитивность меры Лебега). Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств, такая, что множество $A \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ограничено. Тогда множество A измеримо и

$$mA = \sum_{k=1}^{\infty} mA_k.$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$m^*A \leq \sum_{k=1}^{\infty} mA_k. \tag{3}$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь измеримостью множеств A_k, найдём такие открытые множества $G_k \supset A_k$, что $mG_k < mA_k + \varepsilon \cdot 2^{-k},\ k = 1, 2, \ldots$ Множество $G \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ открыто и $G \supset A$. Используя определение внешней меры множества A и лемму 6, получим

$$m^*A \leq mG \leq \sum_{k=1}^{\infty} mG_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} (mA_k + \varepsilon \cdot 2^{-k}) = \sum_{k=1}^{\infty} mA_k + \varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности ε , следует (3).

Докажем теперь неравенство

$$m_* A \geq \sum_{k=1}^{\infty} mA_k. \tag{4}$$

Зафиксируем натуральное s. Тогда множество $B_s \equiv \bigcup_{k=1}^{s} A_k \subset A$ и, в силу леммы 4, множество B_s измеримо и $mB_s = \sum_{k=1}^{s} mA_k$. Следовательно, применяя ещё монотонность внутренней меры, получим

$$m_* A \geq m_* B_s = mB_s = \sum_{k=1}^{s} mA_k.$$

Поскольку натуральное s произвольно, то, устремляя $s \to \infty$, из этого неравенства нолучаем (4).

Из (3) и (4) с учётом того, что $m_* A \leq m^* A$, получаем измеримость множества A и равенство $mA = \sum_{k=1}^{\infty} mA_k$. **QED**

Теорема 3. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых множеств, таких, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ограничено. Тогда множества $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ измеримы.

Доказательство. Обозначим

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_s = A_s \setminus (\bigcup_{k=1}^{s-1} A_k), \dots$$

Тогда множества B_s измеримы по теореме 1, попарно не пересекаются и, как легко видеть,

$$\bigcup_{s=1}^{\infty} A_s = \bigcup_{s=1}^{\infty} B_s.$$

Используя теперь теорему 2, получаем, что измеримо $\bigcup_{s=1}^{\infty} B_s$, а значит и $\bigcup_{s=1}^{\infty} A_s$.

Обозначим

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Выберем произвольный сегмент $I \supset E$. Тогда, как легко проверить, справедливо равенство

$$I \setminus E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (I \setminus A_k).$$

Множества $I \setminus A_k$ измеримы по теореме 1. По доказанной части теоремы 3 измеримо также и их объединение $I \setminus E$. Измеримость E теперь следует из равенства $E = I \setminus (I \setminus E)$ и из теоремы 1. **QED**

Замечание. При условии теоремы 3 справедливо неравенство

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} mA_k.$$

Действительно, на основании теоремы 2, из включения $B_k \subset A_k$ и равенства

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

следует

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} mB_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} mA_k.$$

Теорема 4 (непрерывность меры Лебега). Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых множеств. Тогда

а) если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ и множество $A \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ограничено, то $mA = \lim_{k\to\infty} mA_k$;

б) если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, то для множества $B \equiv \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ справедливо равенство $mB = \lim_{k\to\infty} mA_k$.

Доказательство. Докажем а). Обозначим $E_1 = A_1$,

$$E_k = A_k \setminus (\bigcup_{s=1}^{k-1} A_s),\ k = 2, 3, \ldots$$

Тогда все множества E_k измеримы, попарно не пересекаются и $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = A$. Кроме того, из условия $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ следует, что $A_k = E_1 \bigcup \ldots \bigcup E_k$. Значит, по теореме 1,

$$mA_k = \sum_{s=1}^{k} mE_s.$$

Кроме того, из вышесказанного следует, что

$$mA = \sum_{k=1}^{\infty} mE_k = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} mE_k) = \lim_{n\to\infty} mA_n.$$

Доказательство утверждения б) может быть получено с помощью уже доказанного утверждения а) следующим образом. Выберем сегмент $I \supset A_1$ и рассмотрим множества $E_k = I \setminus A_k$. Тогда, очевидно, E_k измеримы, $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ Применяя уже доказанную часть а), получаем

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{k\to\infty} mE_k = \lim_{k\to\infty} (mI \setminus mA_k) =$$

$$= mI - \lim_{k\to\infty} mA_k.$$

Отсюда и из очевидного равенства

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = I \setminus (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)$$

следует

$$m(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = m(I \setminus (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)) = mI - m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) =$$
$$= mI - (mI - \lim_{k\to\infty} mA_k) = \lim_{k\to\infty} mA_k.$$

QED

1.4 Сравнение меры Лебега с мерой Жордана.

Мы построили меру Лебега в R^n и изучили её свойства. В курсе математического анализа обычно применяется другая мера – мера Жордана. Она строится с помощью приближения произвольного ограниченного множества $E \subset \mathrm{R}^n$ *фигурами* извне и изнутри. Именно, *внешней мерой Жордана* называется нижняя грань мер всевозможных фигур, содержащих множество E:

$$\mu^* E = \inf_{X \subset E,\ X\ -\ \text{фигура}} mX.$$

Внутренней мерой Жордана называется верхняя грань мер всевозможных фигур, содержащихся во множестве E:

$$\mu_* E = \sup_{X \subset E,\ X\ -\ \text{фигура}} mX.$$

Как обычно, множество E называется *измеримым по Жордану,* если $\mu^* E = \mu_* E$. В этом случае общее значение внешней и внутренней мер Жордана называется *мерой Жордана* множества E и обозначается μE. В курсе анализа показывается также, что мера Жордана обладает свойством конечной аддитивности, а свойство измеримости по Жордану сохраняется при применении обычных теоретико – множественных операций над измеримыми множествами в конечном их числе.

Как мы уже показали выше, свойство измеримости по Лебегу замкнуто относительно применения теоретико – множественных операций над измеримыми множествами не только в конечном числе, но и в счётном наборе этих операций. Ниже мы покажем, что мера Жордана такими свойствами не обладает. Это означает, что мера Лебега имеет лучшие свойства по сравнению с мерой Жордана. Следующая теорема показывает, что измеримость множества по Жордану влечёт измеримость по Лебегу.

Теорема 5. Пусть ограниченное множество $E \subset \mathrm{R}^n$. Тогда $\mu_* E \leq m_* E$ и $m^* E \leq \mu^* E$.

Доказательство. Первое неравенство очевидно; оно означает, что

$$\sup_{X \subset E} mX \leq \sup_{K \subset E} mK,$$

которое, в свою очередь имеет место по той простой причине, что справа верхняя грань берётся по более широкому множеству, нежели в левой части. Второе неравенство означает, что

$$\inf_{G \supset E} mG \leq \inf_{X \supset E} mX.$$

Чтобы доказать это, очевидно, достаточно показать, что для любой фигуры X и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся открытое множество $G \supset X$ такое, что $mG < mX + \varepsilon$. Покажем это. Итак, пусть $\varepsilon > 0$ и дизъюнктивное разложение фигуры $X = \bigcup_{k=1}^{s} I_k$. Растянем каждый из сегментов I_k относительно его центра так, чтобы вновь полученные сегменты I'_k обладали следующими свойствами:

$$I_k \subset \overset{\circ}{I}{}'_k, \ |I'_k| < |I_k| + \varepsilon/s, \ k = 1, 2, \dots, s.$$

Тогда для открытого множества $G \equiv \bigcup_{k=1}^{s} \overset{\circ}{I}{}'_k$ будем иметь:

$$mG \le \sum_{k=1}^{s} m \overset{\circ}{I}{}'_k = \sum_{k=1}^{s} |I'_k| \le \sum_{k=1}^{s} (|I_k| + \varepsilon/s) =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} |I_k| + \varepsilon = mX + \varepsilon,$$

что и требовалось показать.

Следствие. Если ограниченное множество $E \subset \mathrm{R}^n$ измеримо по Жордану, то E измеримо по Лебегу и $mE = \mu E$.

Это утверждение мгновенно вытекает из следующих неравенств

$$\mu_* E \le m_* E \le m^* E \le \mu^* E.$$

Последнее следствие означает, что мера Лебега не слабее меры Жордана. Чтобы показать, что мера Лебега более общая, чем мера Жордана, приведём пример.

Пример множества, измеримого по Лебегу и неизмеримого по Жордану.

Пусть E – множество всех рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$. Покажем сначала, что E измеримо по Лебегу и его мера $mE = 0$. Для этого достаточно показать, что $m^* E = 0$, поскольку $0 \le m_* E \le m^* E$. Будем пользоваться тем, что множество E счётно, т.е. $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{r_k\}$, где $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ – занумерованная последовательность всех рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$. Зададим $\varepsilon > 0$ и построим открытое множество

$$G \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k - \varepsilon/2^{k+1}, r_k + \varepsilon/2^{k+1}).$$

Тогда, в силу полуаддитивности меры открытых множеств, получим

$$mG \le \sum_{k=1}^{\infty} m(r_k - \varepsilon/2^{k+1}, r_k + \varepsilon/2^{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k = \varepsilon.$$

Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ мы построили открытое множество $G \supset E$ такое, что $mG \le \varepsilon$. Это означает, что $m^* E = 0$, а значит E измеримо по Лебегу, и $mE = 0$.

Покажем теперь, что множество E не измеримо по Жордану. Действительно, если фигура $X \subset E$, то X представляет собой лишь конечное объединение одноточечных множеств, т.е. вырожденных сегментов. Следовательно, $mX = 0$ и, значит $\mu_* E = 0$. С другой стороны, если фигура $X \supset E$, то $X \supset [0,1]$. Действительно, пусть сегменты $I_k \equiv [a_k, b_k],\ k = 1, 2, \ldots, s$, осуществляют дизъюнктивное разложение фигуры X. Можем считать, что $a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le \ldots \le a_s \le b_s$. Если хотя бы при одном k будет $b_k < a_{k+1}$, то в интервале (b_k, a_{k+1}) найдётся точка множества E, не принадлежащая X, что противоречит тому, что $X \supset E$. А из условия $b_k = a_{k+1},\ k = 1, 2, \ldots, s-1$, с учётом того, что $0 \in X$ и $1 \in X$ вытекает, что

$$X \equiv \bigcup_{k=1}^{s} [a_k, b_k] \supset [0,1].$$

Таким образом, в силу монотонности меры фигур, $mX \ge m([0,1]) = 1$. Поскольку X – произвольная фигура, содержащая E, то отсюда следует, что $\mu^* E \ge 1$.

Итак, мы показали, что множество E неизмеримо по Жордану.

Замечание. Ясно, что одноточечное множество измеримо по Жордану и имеет жорданову меру нуль. Мы привели пример *счетного* множества E, неизмеримого по Жордану. Другими словами, счетное объединеие измеримых по Жордану (одноточечных) множеств может оказаться неизмеримым по Жордану множеством. Это означает, что свойство измеримости по Жордану не замкнуто относительно теоретико - множественных операций, применённых в счётном наборе.

1.5 Множества меры нуль.

Для того, чтобы убедиться, что множество $E \subset \mathrm{R}^n$ имеет меру нуль, достаточно показать, что $m^* E = 0$. Действительно, это сразу вытекает из неравенств $0 \le m_* E \le m^* E$. В свою очередь, по определению внешней меры, $m^* E = 0$ тогда, и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся открытое множество $G \supset E$ такое, что $mG < \varepsilon$. Отсюда уже легко получается следующее

Утверждение. Любое счётное ограниченное множество имеет меру нуль.

Доказательство. Пусть $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_k\}$. Зададим $\varepsilon > 0$ и для каждого k построим невырожденный сегмент I_k с центром в точке x_k и такой, что $|I_k| < \varepsilon / 2^k$. Поскольку $m \overset{\circ}{I}_k = |I_k|$, то для открытого множества $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overset{\circ}{I}_k \supset E$, в силу счётной полуаддитивности мер открытых множеств, получим

$$mG \le \sum_{k=1}^{\infty} m \overset{\circ}{I}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon / 2^k = \varepsilon,$$

а это и означает, что $m^* E = 0$.

Поскольку мера одноточечного множества, очевидно, равна нулю, то доказанное утверждение является частным случаем следующей теоремы.

Теорема 6. Пусть ограниченное множество $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где $mE_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots$ Тогда E измеримо, и $mE = 0$.

Доказательство. Множество E измеримо в силу теоремы 3. Далее, в силу замечания, сделанного после теоремы 3, имеем

$$mE \leq \sum_{k=1}^{\infty} mE_k = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0,$$

что и доказывает теорему.

Отметим ещё одно свойство множеств меры нуль.

Утверждение. Любое подмножество множества меры нуль измеримо и имеет меру нуль.

Доказательство. Пусть $A \subset B$ и $mB = 0$. Тогда, в силу монотонности внешней меры, $m^*A \leq m^*B = 0$, откуда следует измеримость A и $mA = 0$. **QED**

Выше мы показали, что каждое счётное ограниченное множество имеет меру нуль. Возникает естественный вопрос: исчерпывается ли совокупность всех множеств нулевой меры всевозможными счётными множествами? Другими словами, существуют ли несчётные множества нулевой меры? Положительный ответ на этот вопрос даёт следующий пример множества Кантора.

Пример (множество Кантора). Разделим отрезок $[0,1]$ на три равных по длине интервала и средний из них обозначим G_1 $(G_1 = (1/3, 2/3))$. Два оставшихся отрезка $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$ снова поделим на три равных по длине интервала каждый, и через G_2 обозначим объединение двух полученных средних интервалов: $G_2 = (1/9, 2/9) \bigcup (7/9, 8/9)$. Продолжая этот процесс, на k-ом шаге будем делить каждый из 2^{k-1} оставшихся после $k-1$- го шага отрезков на три равных по длине интервала и через G_k обозначим объединение 2^{k-1} штук серединных интервалов. В результате такого построения получим последовательность непересекающихся открытых множеств G_k, причём $mG_1 = 1/3$, $mG_2 = 1/9 \cdot 2, \ldots, mG_k = 1/3^k \cdot 2^{k-1}, \ldots$ Поэтому множество $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ имеет меру

$$mG = \sum_{k=1}^{\infty} mG_k = \sum_{k=1}^{\infty} 1/2 \cdot (2/3)^k = 1/2 \cdot ((2/3)/(1-2/3)) = 1.$$

Обозначим $K = [0,1] \setminus G$. Это множество K называют *множеством Кантора.* Поскольку множество K– замкнуто, $(K = [0,1] \bigcap (cG))$ и ограничено, то оно измеримо. Из равенств $K \bigcup G = [0,1]$, $mK + mG = 1, mG = 1$ вытекает, что $mK = 0$. Покажем, что канторово множество K несчётно. Для этого мы установим взаимно однозначное соответствие между точками множества K и точками отрезка $[0,1]$.

В первый из удалённых интервалов $(1/3, 2/3)$ попали все точки x, в троичном разложении $x = 0,\overline{\alpha_1 \alpha_2 \ldots}$ $(\alpha_k \in \{0,1,2\})$, у которых $\alpha_1 = 1$. Исключение составляют концы этого интервала $1/3 = 0,100\ldots = 0,022\ldots$ и $2/3 = 0,122\ldots = 0,200\ldots$ Для этих чисел мы будем использовать представление, не содержащее единиц. Все оставшиеся точки отрезка $[0,1]$ при разложении в троичную дробь не могут иметь на первом месте после запятой единицу.

Аналогично установим, что на втором шаге удаляются те, и только те точки, в троичном разложении которых на первом месте после запятой стоит 0 или 2, а на втором месте – единица. После этого удаления останутся те точки из отрезка $[0,1]$, в троичном разложении у которых первые две цифры после запятой принимают значения либо 0, либо 2.

Рассуждая аналогично, мы видим, что множество K состоит из всех таких чисел, троичное разложение которых состоит только лишь из нулей и двоек.

Теперь легко установить взаимно однозначное соответствие между точками множества K и всеми точками отрезка $[0,1]$. Для этого заметим, что каждая точка $y \in [0,1]$ допускает разложение в двоичную дробь $y = 0,\overline{\beta_1\beta_2\ldots}$, где β_k принимают значения 0 или 1. Каждой такой точке y поставим в соответствие точку множества K такую, что $x = 0,\overline{\alpha_1\alpha_2\ldots}$, где $\alpha_k = 0$, если $\beta_k = 0$ и $\alpha_k = 2$, если $\beta_k = 1$. Заметим, что такое отображение ещё не будет взаимно однозначным, ибо точкам $y = m\cdot 2^{-s}$, где $s \in \mathrm{N}$, $m = 1,\ldots,2^s-1$, допускающим по два различных представления в виде двоичной дроби, соответствуют по две точки множества K – концы одного составляющего интервала множества G. Но множество таких точек y счётно, как и множество концов составляющих интервалов у множества G. Поэтому между этими двумя множествами взаимно однозначное соответствие устанавливается совсем просто.

Итак, мы показали, что канторово множество K имеет меру нуль и мощность континуум.

1.6 Об измеримости неограниченных множеств.

До сих пор понятие измеримости нами рассматривалось лишь для ограниченных множеств $E \subset \mathrm{R}^n$. Если множество E неограничено, то для него понятие измеримости определяется следующим образом.

Рассмотрим множество $E_R = E\bigcap B(0,R)$, где $R > 0$. Ясно, что для любого $R > 0$ множество E_R является ограниченным. Если E_R измеримо для любого $R > 0$, то неограниченное множество E называют *измеримым по Лебегу.* При этом *мерой* множества E называют

$$mE = \lim_{R\to+\infty} mE_R.$$

Заметим, что при таком определении мера измеримого множества может оказаться и бесконечной.

Нетрудно показать, что при таком определении многие основные свойства меры Лебега сохраняются и для неограниченных множеств, однако существуют и исключения. Так, например, пересечение вложенных множеств бесконечной меры может оказаться пустым (сравните с теоремой 4, частью б) – свойством непрерывности). Действительно, для множеств $E_k \equiv [k,+\infty)$, справедливо: $mE_k = \infty$, $k = 1,2,\ldots$, $E_{k+1} \subset E_k$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$.

Мы не будем детально изучать свойства неограниченных измеримых множеств.

1.7 О неизмеримых множествах.

Выше было показано, что множество всех рациональных точек из отрезка $[0,1]$ неизмеримо по Жордану. Примеры неизмеримых по Лебегу множеств строятся гораздо сложнее. Более того, все известные примеры неизмеримых множеств строятся с использованием *аксиомы выбора.*

Пример неизмеримого по Лебегу множества.

Разобъем все точки отрезка $[-1/2, 1/2]$ на классы, относя две точки x и y в один класс, если разность $x-y$ есть рациональное число. Покажем, что любые два класса K_1 и K_2 либо совпадают, либо не пересекаются. Предположим, что $z \in K_1 \bigcap K_2$. Пусть произвольные $x \in K_1$ и $y \in K_2$. Тогда из $z \in K_1$ следует, что $z-x$ рационально, а из $z \in K_2$ следует, что $z-y$ рационально. Значит, и $x-y=(z-y)-(z-x)$ рационально, т.е. x и y принадлежат одному классу, т.е. классы K_1 и K_2 совпадают.

Ясно также, что каждое действительное число $x \in [-1/2, 1/2]$ попадает в некоторый класс $K(x)$. Пользуясь аксиомой выбора, составим множество A, которое содержит *по одному представителю от каждого класса.* Покажем, что A – неизмеримо. Для этого занумеруем все рациональные точки отрезка $[-1, 1]$: $r_0 = 0,\ r_1,\ r_2, \ldots$, и обозначим через A_k множество, полученное сдвигом множества A на число r_k, т.е.

$$A_k = \{y:\ y = x + r_k,\ x \in A\}.$$

Ясно, что $A_k \subset [-3/2, 3/2]$ и все множества A_k имеют одинаковые внутренние и внешние меры Лебега:

$$m_* A_k = m_* A \equiv \alpha,\ m^* A_k = m^* A = \beta,\ k = 0, 1, \ldots$$

Докажем, что

$$[-1/2, 1/2] \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k. \tag{5}$$

Действительно, пусть $x \in [-1/2, 1/2]$. Тогда x попадает в какой - нибудь из классов приведенного выше разбиения. Пусть x_0 – представитель этого класса во множестве A. Тогда $x - x_0$ рационально и принадлежит отрезку $[-1, 1]$. Значит, в нашей последовательности есть число $r_k = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + r_k$, что означает, что $x \in A_k$.

Используя теперь свойство монотонности и полуаддитивности внешней меры Лебега, из (5) получаем

$$1 = m^*[-1/2, 1/2] \le m^*(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) \le \sum_{k=0}^{\infty} m^* A_k.$$

Отсюда следует, что

$$1 \le \beta + \beta + \beta + \ldots$$

т.е. $\beta > 0$.

С другой стороны, покажем, что $\alpha = 0$. Для этого докажем, что $A_k \bigcap A_j = \emptyset,\ (k \ne j)$. Если $z \in A_k \bigcap A_j$, то $z = x + r_k$ и $z = y + r_j$, где $x \in A$ и $y \in A$. Но тогда $x - y = r_j - r_k \ne 0$ – рационально, что противоречит построению множества A, ибо оно содержит только по одному представителю из каждого класса, а мы получили, что в A есть различные элементы x и y из одного класса.

Итак, множества A_k не пересекаются, и, как было отмечено выше, $A_k \subset [-3/2, 3/2]$. Отсюда следует, что

$$3 = m_*[-3/2, 3/2] \geq m_*(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) \geq \sum_{k=0}^{\infty} m_* A_k,$$

т.е.

$$3 \geq \alpha + \alpha + \alpha + \dots$$

Это возможно только при $\alpha = 0$.

Итак, мы получили, что $\alpha = m_* A = 0$, $\beta = m^* A > 0$. Это означает, что множество A неизмеримо.

Замечание. Если бы с самого начала разбивать на классы эквивалентности не сегмент $[-1/2, 1/2]$, а произвольное измеримое множество E положительной меры, то, повторяя приведенные рассуждения, мы бы получили неизмеримое множество $A \subset E$. Итак, справедливо

Утверждение. Любое множество положительной меры содержит неизмеримое подмножество.

2 Измеримые функции.

Введём сначала некоторые обозначения. Пусть $P = P(x)$ некоторое свойство, зависящее от x. Через $E(P)$ будем обозначать совокупность всех точек $x \in E$ таких, для которых выполнено свойство P. Например, если функция f определена на множестве E и λ – действительное число, то

$$E(f > \lambda) = \{x \in E : f(x) > \lambda\}.$$

Аналогично определяются множества $E(f \geq \lambda), E(f < \lambda),\ E(f \leq \lambda),\ E(f = \lambda)$.

Определение. Пусть функция f задана на *измеримом* множестве E. Эту функцию называют *измеримой*, если для любого действительного λ множества $E(f > \lambda)$ измеримы.

2.1 Простейшие свойства измеримых функций.

Предложение 1. Пусть функция f определена на измеримом множестве E. Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны:

1) множества $E(f > \lambda)$ измеримы для всех $\lambda \in \mathrm{R}$;
2) множества $E(f \geq \lambda)$ измеримы для всех $\lambda \in \mathrm{R}$;
3) множества $E(f < \lambda)$ измеримы для всех $\lambda \in \mathrm{R}$;
4) множества $E(f \leq \lambda)$ измеримы для всех $\lambda \in \mathrm{R}$.

Доказательство. Докажем следующую цепочку импликаций: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1). Это и будет утверждение нашего предложения.

1) $\Rightarrow$ 2). Это утверждение сразу следует из равенства

$$E(f \geq \lambda) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f > \lambda - 1/k). \qquad (i)$$

Действительно, справа мы имеем счётное пересечение измеримых по условию множеств, которое, в силу свойств измеримых множеств, является измеримым. Докажем (i). Имеем:

$$x \in E(f \geq \lambda) \Leftrightarrow f(x) \geq \lambda \Leftrightarrow \text{для всех } k \quad f(x) > \lambda - 1/k \Leftrightarrow$$
$$\text{для всех } k \quad x \in E(f > \lambda - 1/k) \Leftrightarrow x \in \textstyle\bigcap_{k=1}^{\infty} E(f > \lambda - 1/k).$$

2) $\Rightarrow$ 3). Это утверждение вытекает из равенства $E(f < \lambda) = E \setminus E(f \geq \lambda)$.

3) $\Rightarrow$ 4). Это утверждение вытекает из равенства

$$E(f \leq \lambda) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f < \lambda + 1/k).$$

4) $\Rightarrow$ 1). Это утверждение вытекает из равенства $E(f > \lambda) = E \setminus E(f \leq \lambda)$. Предложение доказано.

Это предложение показывает, что в определении измеримости функции вместо множеств $E(f > \lambda)$ можно рассматривать множества

$$E(f \geq \lambda),\ E(f < \lambda),\ E(f \leq \lambda).$$

Следствие. Если функция f измерима на множестве E, то при любом $\lambda \in \mathrm{R}$ множества $E(f = \lambda)$ измеримы.

Действительно, это следствие мгновенно вытекает из очевидного равенства $E(f = \lambda) = E(f \geq \lambda) \bigcap E(f \leq \lambda)$.

Замечание. Утверждение, обратное приведенному выше следствию, неверно. Чтобы это показать, приведём соответствующий пример.

Пусть неизмеримое подмножество $A \subset [0,1]$. Положим $f(x) = x$ при $x \in A$, и $f(x) = -x$ при $x \in [0,1] \setminus A$. Тогда, как легко видеть, при любом $\lambda \in \mathrm{R}$ множество $E(f = \lambda)$ либо пусто, либо состоит из одной точки. В любом случае получаем, что множество $E(f = \lambda)$ измеримо. Вместе с тем $E(f \geq 0) = A$ – неизмеримое множество, так что функция f неизмерима.

Предложение 2. Пусть ограниченное измеримое множество E представленно в виде не более, чем счётного набора измеримых множеств $E_k, \quad k = 1, 2, \ldots$ Если заданная на E функция f измерима на каждом E_k, то f измерима и на E.

Доказательство. Утверждение сразу следует из равенства

$$E(f > \lambda) = \bigcup_k E_k(f > \lambda),$$

справедливого, очевидно, для любого действительного λ. **QED**

Предложение 3. Если функция f постоянна на измеримом множестве E, то f измерима на E.

Доказательство. Пусть $f(x) \equiv c, \quad x \in E$. Тогда, очевидно,

$$E(f > \lambda) = \begin{cases} \emptyset, & \lambda \geq c, \\ E, & \lambda < c. \end{cases}$$

В любом случае справа имеем измеримое множество.**QED**

Определение. Функция f, заданная на измеримом множестве E, называется *простой,* если E можно разбить на *конечное* число попарно непересекающихся измеримых множеств E_k таких, что f постоянна на каждом из E_k, т.е. $E = \bigcup_{k=1}^{s} E_k, \quad E_k \bigcap E_j = \emptyset \quad (k \neq j)$ и $f(x) = c_k, \quad x \in E_k$.

Предложение 4. Простая функция измерима.

Доказательство. Пусть $E = \bigcup_{k=1}^{s} E_k$, где $E_k \bigcap E_j = \emptyset, \quad (k \neq j)$, E_k – измеримы и $f(x) = c_k, \quad x \in E_k$. Тогда для любого $\lambda \in E$

$$E(f > \lambda) = \bigcup_{\{k:\ c_k > \lambda\}} E_k.$$

Поскольку справа объединение конечного набора измеримых множеств (или пустое множество), то множество $E(f > \lambda)$ измеримо.**QED**

Предложение 5. Если функция f измерима на множестве E, то $|f|$ также измерима на E.

Доказательство. Имеем:

$$E(|f| > \lambda) = \begin{cases} E, & \lambda < 0, \\ E(f > \lambda) \bigcup E(f < -\lambda), & \lambda \geq 0. \end{cases}$$

В любом случае справа имеем измеримое множество. **QED**

Замечание. Из измеримости $|f|$ не следует измеримость f. Действительно, пусть неизмеримое множество $A \subset [0,1]$. Тогда функция $f(x) = 1, \quad x \in A$ и $f(x) = -1, \quad x \in [0,1] \setminus A$, очевидно, неизмерима на $[0,1]$. В то же время $|f(x)| \equiv 1, \quad x \in [0,1]$, измерима на $[0,1]$.

Важный класс измеримых функций составляют *непрерывные* функции. Напомним определение непрерывности. Функция f, заданная на множестве $E \subset \mathrm{R}^n$, называется *непрерывной в точке* $x \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой шар $B(x,\delta)$, что для всех $y \in B(x,\delta) \bigcap E$ справедливо неравенство $|(f(y) - f(x))| < \varepsilon$. Функция f называется *непрерывной на множестве* E, если она непрерывна в каждой точке $x \in E$.

Для дальнейшего нам понадобится следующее свойство непрерывных функций, вытекающее непосредственно из теоремы о сохранении знака непрерывной функции. Если в некоторой точке $x \in E$ непрерывная функция $f(x) > \lambda$, где число $\lambda \in \mathrm{R}$, то существует такой шар $B(x,\delta)$, что для всех $y \in B(x,\delta) \bigcap E$ справедливо $f(y) > \lambda$.

Предложение 6 . Пусть функция f непрерывна на измеримом множестве E. Тогда f измерима на E.

Доказательство. Зададим $\lambda \in \mathrm{R}$. Покажем, что если множество $E(f > \lambda)$ не пусто, то оно представимо в виде пересечения множества E с некоторым открытым множеством G_λ. Это и будет означать измеримость множества $E(f > \lambda)$.

Итак, пусть $x_0 \in E(f > \lambda)$. Тогда, пользуясь свойством непрерывной функции, отмеченным перед формулировкой нашего предложения, найдем шар $B(x_0, \delta_{x_0})$ такой, что для всех $y \in B(x_0, \delta_{x_0}) \bigcap E$ справедливо $f(y) > \lambda$. Проделаем это для всех точек $x_0 \in E(f > \lambda)$. Получим семейство открытых шаров $\{B(x_0, \delta_{x_0})\}_{x_0 \in E(f>\lambda)}$. Обозначим

$$G_\lambda = \bigcup_{x_0 \in E(f>\lambda)} B(x_0, \delta_{x_0}).$$

Множество G_λ, очевидно, открытое. Осталось показать, что $E(f > \lambda) = E \bigcap G_\lambda$. Включение $E(f > \lambda) \subset E \bigcap G_\lambda$ очевидно, так как каждая точка $x_0 \in E(f > \lambda)$ принадлежит E и является также центром некоторого шара $B(x_0, \delta_{x_0})$. Обратно, если $x \in E \bigcap G_\lambda$, то $x \in E$ и $x \in B(x_0, \delta_{x_0})$ при некотором $x_0 \in E(f > \lambda)$. Но шары $B(x_0, \delta_{x_0})$ выбирались так, что для всех $x \in B(x_0, \delta_{x_0}) \bigcap E$ выполнялось неравенство $f(x) > \lambda$. Следовательно, $x \in E(f > \lambda)$ и тем самым доказано и обратное включение $E(f > \lambda) \supset E \bigcap G_\lambda$, а вместе с ним и наше предложение.

2.2 Измеримость и арифметические операции.

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть функции f и g измеримы на E. Тогда множество $E(f > g)$ измеримо.

Доказательство. Если $x \in E(f > g)$, т.е. $f(x) > g(x)$, то найдётся такое рациональное число r, что $f(x) > r > g(x)$. Последнее неравенство означает, что $x \in E(f > r) \bigcap E(g < r)$.

Пусть теперь $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных чисел. Тогда, учитывая вышесказанное, получим

$$E(f > g) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(f > r_k) \bigcap E(g < r_k).$$

Отсюда сразу следует утверждение леммы, так как в правой части имеем счётное объединение измеримых множеств. **QED**

Теорема 1. Пусть функции f и g измеримы на E. Тогда функции $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ и f/g (если $g(x) \neq 0,\ x \in E$) измеримы на E.

Доказательство. Покажем сначала, что для любой постоянной $c \in \mathrm{R}$ функции cf и $c+f$ измеримы на E. Имеем $E(c+f > \lambda) = E(f > \lambda - c)$, так что $c+f$ измерима. Далее, если $c = 0$ то $cf \equiv 0$ на E и измерима как тождественная постоянная. Если $c > 0$, то $E(cf > \lambda) = E(f > \lambda/c)$. Для $c < 0$ имеем $E(cf > \lambda) = E(f < \lambda/c)$. В любом случае множества в правых частях полученных равенств измеримы, так что функция cf также измерима.

Докажем измеримость $f-g$. Пусть $\lambda \in \mathrm{R}$. Тогда $E(f-g > \lambda) = E(f > g+\lambda)$. Измеримость множества в правой части следует из уже доказанной измеримости функции $g+\lambda$ и из леммы.

Измеримость $f+g$ получим, если воспользуемся измеримостью разности измеримых функций, измеримостью функции $-g$ и равенством $f+g = f-(-g)$.

Для доказательства измеримости произведения $f \cdot g$ докажем сначала измеримость функции f^2. Имеем

$$E(f^2 > \lambda) = \begin{cases} E, \quad \lambda < 0, \\ E(f > \sqrt{\lambda}) \bigcup E(f < -\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \geq 0. \end{cases}$$

В любом случае справа получаем измеримое множество, так что f^2 измерима. Теперь измеримость $f \cdot g$ следует из уже доказанной части теоремы и из равенства

$$f \cdot g = 1/4[(f+g)^2 - (f-g)^2].$$

Для доказательства измеримости частного f/g, очевидно, достаточно показать измеримость функции $1/g$, а затем воспользоваться равенством $f/g = f \cdot 1/g$ и уже доказанной измеримостью произведения измеримых функций. Измеримость же функции $1/g$ вытекает из следующего очевидного равенства

$$E(1/g > \lambda) = \begin{cases} E(g > 0) \bigcup E(g < \frac{1}{\lambda}), \quad \lambda < 0, \\ E(g < \frac{1}{\lambda}) \bigcap E(g > 0), \quad \lambda > 0, \\ E(g > 0), \quad \lambda = 0. \end{cases}$$

. В каждом случае множества в правой части измеримы, так что и функция $1/g$ также измерима.

Теорема доказана.

2.3 Измеримость и предельный переход.

Теорема 2. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых на множестве E функций, сходящаяся в каждой точке $x \in E$ к конечному пределу $f(x)$,

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x), \quad x \in E.$$

Тогда функция $f(x)$ измерима на E.

Доказательство. Зададим произвольное $\alpha \in \mathrm{R}$ и покажем, что множество $E(f \geq \alpha)$ измеримо. Для этого, очевидно, достаточно доказать следующее равенство

$$E(f \geq \alpha) = \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} E(f_k > \alpha - 1/s). \tag{$*$}$$

Докажем $(*)$. Пусть $x \in E(f \geq \alpha)$. Это означает, что $f(x) \geq \alpha$. Так как

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x),$$

то для каждого $s \in \mathrm{N}$ найдётся номер $N = N(x, s)$ такой, что для всех $k \geq N$ справедливо неравенство $f_k(x) > \alpha - 1/s$. Значит,

$$x \in \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} E(f_k > \alpha - 1/s),$$

и тем самым доказано, что множество в левой части $(*)$ содержится во множестве, записанном в правой части $(*)$. Обратно, пусть

$$x \in \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} E(f_k > \alpha - 1/s).$$

Это означает, что для любого $s \in \mathrm{N}$ найдётся такой номер N, что для всех $k \geq N$ справедливо неравенство $f_k(x) > \alpha - 1/s$. Но если все элементы последовательности $\{f_k(x)\}$ больше, чем $\alpha - 1/s$ начиная с некоторого номера, то и их предел $f(x)$ удовлетворяет неравенству $f(x) \geq \alpha - 1/s$. Поскольку это справедливо для каждого $s \in \mathrm{N}$, то отсюда следует, что $f(x) \geq \alpha$, т.е. $x \in E(f \geq \alpha)$. Тем самым доказано обратное включение и вместе с ним равенство $(*)$.

Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(x)$ есть предел последовательности непрерывных на измеримом множестве E функций $f_k(x)$, то $f(x)$ измерима.

Это утверждение сразу получается из предыдущей теоремы и предложения 6.

Частным случаем данного следствия является следующее

Утверждение. Пусть $f(x) = F'(x), \quad a \leq x \leq b$. Тогда $f(x)$ измерима на $[a, b]$.

Действительно, если положим $F(x) = F(b), \quad b < x \leq b + 1$ и обозначим $\varphi_k(x) = k[F(x + 1/k) - F(x)]$, то получим , что функции $\varphi_k(x)$ непрерывны и

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x),$$

так что, в силу предыдущего следствия, f – измеримая функция на $[a,b]$.

Определение. Если некоторое свойство выполнено во всех точках множества E, за исключением, быть может, точек, составляющих множество меры нуль, то говорят, что это свойство выполнено *почти всюду* на множестве E. Например, если две функции f и g на множестве E таковы, что $mE(f \neq g) = 0$, то говорят, что функция f равна функции g почти всюду на E. Если две функции f и g равны почти всюду на множестве E, то их называют *эквивалентными* на E функциями и обозначают это так: $f \sim g$ на E. Например, функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in (\mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}), \\ 1, & x \in \mathrm{Q} \end{cases}$$

эквивалентна функции $f(x) \equiv 0$, поскольку для любого множества E множество $E(f \neq 0) = E \bigcap \mathrm{Q}$ не более, чем счетно и, стало быть, имеет меру нуль.

Если две функции f и g эквивалентны на измеримом множестве E и одна из них измерима, то измерима также и другая функция. Действительно, для любого $\lambda \in \mathrm{R}$ множества $E(f > \lambda)$ и $E(g > \lambda)$ отличаются друг от друга разве что на множество нулевой меры и поэтому измеримость одного из них влечет измеримость другого.

Замечание. В теореме 2 вместо сходимости последовательности $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в каждой точке $x \in E$ можно было предположить лишь сходимость почти всюду на E. В этом случае множество $E^* \equiv E(f_k \not\to f)$ имеет меру нуль и на нём функция $f(x)$ не определена. Если применить теорему 2 к множеству $E \setminus E^*$, то получим, что предельная функция $f(x)$ измерима на $E \setminus E^*$. Доопределив функцию f на множестве E^* произвольным образом, мы получим измеримую функцию f на множестве E.

Итак, при изучении свойства измеримости функции f на измеримом множестве E мы можем предполагать функцию f определенной не в каждой точке $x \in E$, а лишь только почти всюду на E. При этом, как и выше, будем считать, что в тех точках $x \in E$, в которых $f(x)$ не определено, функцию $f(x)$ можно доопределить произвольным образом. Такое доопределение не сказывается на измеримость функции f на множестве E, ибо множество точек, в которых мы доопределяем функцию f, имеет нулевую меру.

2.4 Сходимость по мере.

Определение. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых на множестве E функций и пусть также функция f измерима на E. Будем говорить, что последовательность f_n сходится к f *по мере* на множестве E, если

$$\lim_{k\to\infty} mE(|f_k - f| \geq \sigma) = 0$$

для любого $\sigma > 0$. Обозначают это так: $f_k \stackrel{m}{\to} f$ *на* E.

Предложение (единственность предела по мере). Если последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ измеримых на множестве E функций, сходится по мере на E к измеримым функциям f и g, то эти функции f и g эквивалентны на E.

Доказательство. Нужно показать, что $mE(f \neq g) = 0$. Для этого покажем сначала, что для любого $\sigma > 0$ справедливо $mE(|f-g| \geq \sigma) = 0$. Действительно, для $\sigma > 0$ имеем

$$E(|f-g| \geq \sigma) \subset E(|f-f_k| \geq \sigma/2) \bigcup E(|g-f_k| \geq \sigma/2), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда получаем

$$mE(|f-g| \geq \sigma) \leq mE(|f-f_k| \geq \sigma/2) + mE(|g-f_k| \geq \sigma/2).$$

Устремляя $k \to \infty$ в правой части, получаем, что $mE(|f-g| \geq \sigma) = 0$.

Для завершения доказательства нашего предложения теперь достаточно воспользоваться очевидным равенством

$$E(f \neq g) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(|f-g| \geq 1/k).$$

Действительно, как уже показано, каждое из множеств справа имеет меру нуль, а значит равна нулю и мера их объединения. **QED**

2.5 Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду.

Теорема Лебега. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых на множестве E функций, сходящаяся почти всюду на этом множестве к функции $f(x)$. Тогда f_k сходится к функции f на E по мере.

Доказательство. Измеримость предельной функции f установлена в теореме 2 (см. также замечание к этой теореме). Зададим произвольное $\sigma > 0$ и рассмотрим множества $E_k(\sigma) \equiv E(|f_k - f| \geq \sigma)$. Эти множества измеримы и нам нужно лишь доказать, что $\lim_{k\to\infty} mE_k(\sigma) = 0$.

Обозначим $R_s(\sigma) = \bigcup_{k=s}^{\infty} E_k(\sigma)$. Множества $R_s(\sigma)$ измеримы и, очевидно, $R_s(\sigma) \supset R_{s+1}(\sigma)$. Обозначим $A(\sigma) = \bigcap_{s=1}^{\infty} R_s(\sigma)$. Тогда, в силу свойства непрерывности меры,

$$mA(\sigma) = \lim_{s\to\infty} mR_s(\sigma). \qquad (i)$$

Покажем, что $mA(\sigma) = 0$. Действительно, обозначим $e = E(f_k \not\to f)$. По условию, $me = 0$. Поэтому, достаточно показать, что $A(\sigma) \subset e$ и отсюда сразу получим $mA(\sigma) = 0$.

Докажем,что $A(\sigma) \subset e$. Пусть $x_0 \in E \setminus e$. Это означает, что $\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = f(x_0)$ и поэтому найдется такое $s \in \mathrm{N}$ что для всех $k \geq s$ справедливо неравенство $|f_k(x_0) - f(x_0)| < \sigma$. Это в свою очередь означает, что $x_0 \notin E_k(\sigma)$ для всех $k \geq s$ а поэтому $x_0 \notin R_s(\sigma)$ при некотором s. Стало быть, $x_0 \notin A(\sigma)$. Итак, мы показали, что условие $x_0 \notin e$ влечет $x_0 \notin A(\sigma)$, т.е.$A(\sigma) \subset e$.

Как уже было сказано, мы получили, что $mA(\sigma) = 0$. Из (i) следует, что $\lim_{s\to\infty} mR_s(\sigma) = 0$. Но $E_s(\sigma) \subset R_s(\sigma)$. Значит и $\lim_{s\to\infty} mE_s(\sigma) = 0$, что и требовалось доказать.**QED**

Итак, теорема Лебега утверждает, что сходимость почти всюду влечёт сходимость по мере. Обратное утверждение неверно, т.е. из сходимости по мере не следует сходимость почти всюду. Чтобы это подтвердить, приведем соответствующий пример.

Пример последовательности, сходящейся по мере и расходящейся в каждой точке.

Обозначим

$$\varphi_k^{(s)}(x) = \chi_{[\frac{k-1}{s}, \frac{k}{s})}(x), \quad 0 \le x < 1,$$

где $k = 1, 2, \ldots, s, \quad s = 1, 2, \ldots$ а характеристическая функция

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 0, & x \notin E, \\ 1 & x \in E. \end{cases}$$

Расположим теперь все функции $\varphi_k^{(s)}$ в последовательность $f_i(x)$ следующим образом:

$$\varphi_1^{(1)}, \varphi_1^{(2)},\ \varphi_2^{(2)}, \ldots, \varphi_1^{(s)}, \ldots, \varphi_s^{(s)}, \varphi_1^{(s+1)}, \ldots, \varphi_{s+1}^{(s+1)}, \ldots$$

Поскольку $m(\{x \in [0,1) :\ \varphi_k^{(s)}(x) \ne 0\}) = \frac{1}{s}$ и условие $i \to \infty$ эквивалентно условию $s \to \infty$, то имеем $f_i \overset{m}{\to} 0$ на $[0,1)$. С другой стороны, для любого $x \in [0,1)$ среди элементов числовой последовательности $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ имеется сколь угодно много нулей и сколь угодно много единиц. Следовательно, такая числовая последовательность не может быть сходящейся. Итак, $f_i(x)$ расходится в каждой точке $x \in [0,1)$.

Итак, сходимость по мере не влечёт сходимости даже в какой – нибудь единственной точке. Вместе с тем, справедлива следующая

Теорема Ф. Рисса. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых на множестве E функций, сходящаяся по мере к измеримой функции f на E. Тогда из нее можно извлечь подпоследовательность $\{f_{k_s}\}_{s=1}^{\infty}$, сходящуюся к функции f почти всюду на E.

Доказательство. Согласно условию, для любого $\sigma > 0$

$$\lim_{k \to \infty} mE(|f_k - f| \ge \sigma) = 0.$$

Выберем последовательность положительных чисел σ_s, монотонно стремящуюся к нулю. Так как $mE(|f_k - f| \ge \sigma_1) \to 0$ $(k \to \infty)$, то найдётся такой номер k_1, что $mE(|f_{k_1} - f| \ge \sigma_1) < \frac{1}{2}$. Далее, поскольку $mE(|f_k - f| \ge \sigma_2) \to 0$ $(k \to \infty)$, то найдётся такой номер $k_2 > k_1$, что $mE(|f_{k_2} - f| \ge \sigma_2) < \frac{1}{2^2}$. Продолжая этот процесс, на s-м шаге найдём номер $k_s > k_{s-1}$ такой, что $mE(|f_{k_s} - f| \ge \sigma_s) < \frac{1}{2^s}$. В результате получим подпоследовательность номеров k_s. Покажем, что подпоследовательность f_{k_s} сходится к функции f почти всюду на E.

Обозначим $e_s = E(|f_{k_s} - f| \ge \sigma_s)$, $\Delta_i = \bigcup_{s=i}^{\infty} e_s$, $\Delta = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Delta_i$. Докажем, что $m\Delta = 0$. Действительно, $\Delta_i \supset \Delta_{i+1}$ и, по свойству непрерывности меры, $m\Delta = \lim_{i \to \infty} m\Delta_i$. Но

$$m\Delta_i \le \sum_{s=i}^{\infty} me_s \le \sum_{s=i}^{\infty} \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^{i-1}} \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Поэтому $m\Delta = 0$.

Покажем теперь, что в точке $x \in E \setminus \Delta$ справедливо $f_{k_s}(x) \to f(x)$ $(s \to \infty)$. Действительно, пусть $x \notin \Delta$. Тогда $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} \Delta_i$, т.е. найдётся такое i_0 что $x \notin \Delta_{i_0}$. Это означает, что для всех $s \geq i_0$ справедливо $x \notin e_s$. Учитывая определение множества e_s, получаем $|f_{k_s}(x) - f(x)| < \sigma_s, \ s \geq i_0$. Поскольку $\sigma_s \to 0$ $(s \to \infty)$ то отсюда следует, что $f_{k_s}(x) \to f(x)$ при $s \to \infty$.

Итак, вне точек множества Δ, имеющего нулевую меру, подпоследовательность f_{k_s} сходится к f, т.е. f_{k_s} сходится к f почти всюду на E. **QED**

2.6 Почти равномерная сходимость.

Напомним, что последовательность функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ называтся *равномерно* сходящейся к функции f на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что для всех $k \geq N$ и для любого $x \in E$ справедливо неравенство $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Ясно, что из равномерной сходимости следует сходимость в каждой точке. Обратное, однако, неверно. Например, последовательность функций $f_k(x) = x^k, \ \ 0 < x < 1,$ сходится к функции $f(x) \equiv 0$ на $(0,1)$ в каждой точке x, но неравномерно. Вместе с тем, какое бы ни было число $\delta > 0$ на множестве $(0, 1 - \delta)$ наша последовательность будет сходиться равномерно.

Приведенный пример приводит к следующему определению.

Определение. Пусть задана последовательность функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ на измеримом множестве E. Будем говорить, что эта последовательность сходится к функции f *почти равномерно* на E, если для любого $\delta > 0$ найдётся измеримое подмножество $E_\delta \subset E$ такое, что $mE_\delta > mE - \delta$ и на множестве E_δ последовательность f_k сходится к f равномерно.

Теорема Егорова. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых на множестве E функций, сходящаяся почти всюду на E к функции f. Тогда $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f почти равномерно на E.

Доказательство. По теореме 2 функция f измерима на E. Для $\sigma > 0$, как и при доказательстве теоремы Лебега, обозначим $E_k(\sigma) = E(|f_k - f| \geq \sigma)$, $R_s(\sigma) = \bigcup_{k=s}^{\infty} E_k(\sigma)$. При доказательстве теоремы Лебега было показано, что

$$\lim_{s \to \infty} mR_s(\sigma) = 0. \tag{i}$$

Пусть σ_k – монотонно убывающая к нулю последовательность положительных чисел. Зададим произвольное $\delta > 0$. Пользуясь (i), для $\sigma = \sigma_1$ найдём такое s_1, что $mR_s(\sigma_1) < \frac{\delta}{2}$. Далее, для $\sigma = \sigma_2$ найдем такое $s_2 > s_1$, что $mR_{s_2}(\sigma_2) < \frac{\delta}{2^2}$. Продолжая этот процесс, на i-м шаге найдем номер $s_i > s_{i-1}$ такой, что $mR_{s_i}(\sigma_i), \frac{\delta}{2^i}$. Такой номер существует в силу (i).

Итак, мы построили строго возрастающую последовательность номеров s_i такую, что

$$mR_{s_i}(\sigma_i) < \frac{\delta}{2^i}. \tag{ii}$$

Обозначим $e = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{s_i}(\sigma_i)$. Тогда

$$m\ e \le \sum_{i=1}^{\infty} mR_{s_i}(\sigma_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^i} = \delta.$$

Пусть $E_\delta = E \setminus e$. Тогда $mE_\delta \ge mE - \delta$. Покажем, что на множестве E_δ последовательность $\{f_k\}$ сходится к функции f равномерно.

Для каждого $x \notin e$ справедливо $x \notin R_{s_i}(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ и, следовательно, $x \notin E_k(\sigma_i)$, $k = s_i, s_i + 1, \ldots$ Последнее означает, что

$$|f_k(x) - f(x)| < \sigma_i,\ i = 1, 2, \ldots,\ k \ge s_i. \qquad (iii)$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдём такой номер i, что $\sigma_i < \varepsilon$. Положим $N = s_i$. Тогда для всех $k \ge N$ и для всех $x \in E_\delta$ из (iii) следует, что $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$. Это и означает, что последовательность f_k сходится к f равномерно на множестве E_δ. **QED**

2.7 Структура измеримых функций.

Обычно в анализе при изучении какой – либо функции ставится естественный вопрос о приближении её в каком – нибудь смысле функциями более простой природы. Здесь мы рассмотрим различные теоремы о приближении измеримых функций.

Теорема 1. Пусть на множестве E задана измеримая почти везде конечная функция f. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся измеримая ограниченная функция g такая, что

$$mE(f \ne g) < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим $E_k = E(|f| > k)$, $E^* = E(|f| = +\infty)$. По условию $mE^* = 0$ и, очевидно $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, $E^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. В силу свойства непрерывности меры Лебега,

$$\lim_{k \to \infty} mE_k = mE^* = 0.$$

Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ найдётся номер k_0 такой, что $mE_{k_0} < \varepsilon$. Положим $g(x) = f(x)$ для $x \in E \setminus E_{k_0}$ и $g(x) = 0$ при $x \in E_{k_0}$. Поскольку функция g измерима на $E \setminus E_{k_0}$ и на E_{k_0}, то g измерима также и на $E = (E \setminus E_{k_0}) \bigcap E_{k_0}$. Далее, функция g, очевидно, ограничена на E и $|g(x)| \le k_0$ для всех $x \in E$. Наконец, $E(f \ne g) = E_{k_0}$ и так как $mE_{k_0} < \varepsilon$, то тем самым функция g удовлетворяет всем требованиям теоремы. **QED**

Доказанная теорема означает, что каждая измеримая почти везде конечная функция совпадает с ограниченной измеримой функцией, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры.

Далее мы рассмотрим вопрос о приближении измеримой функции непрерывными функциями. Сначала докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть замкнутые множества $F_1, \ldots, F_s$ попарно не пересекаются и функция f, заданная на множестве $F \equiv \bigcup_{k=1}^{s} F_k$ постоянна на каждом из F_k. Тогда f непрерывна на F.

Доказательство. Пусть точка $x_0 \in F$. Тогда найдётся такое единственеое k, что $x_0 \in F_k$. Поскольку $x_0 \notin F_i \quad (i \neq k)$, то $x_0 \in cF_i \quad (i \neq k)$ и, так как F_i замкнуты, то cF_i открыты. Поэтому для каждого $i \neq k$ найдётся окрестность $B(x_0, \delta_i) \subset cF_i, \quad (i \neq k)$. Тогда окрестность $B(x_0, \delta)$, где $\delta = \min_{i \neq k} \delta_i > 0$ не пересекается с множествами $F_i \quad (i \neq k)$. Значит, для всех $x \in B(x_0, \delta) \bigcap F$ справедливо $x \in F_k$ и, так как f постоянна на F_k, $\quad f(x) = f(x_0)$. Отсюда следует непрерывность функции f в точке x_0. **QED**

Следующая лемма относится к одномерному случаю. Её доказательство опирается на тот факт, что в R^1 любое открытое множество представляет собой объединение не более, чем счётного набора составляющих интервалов. Напомним, что интервал (α, β) называется составляющим для множества G, если $(\alpha, \beta) \subset G$ а его концы не принадлежат множествау G.

Лемма 2. Пусть K – замкнутое и ограниченное множество на прямой и функция f непрерывна на K. Тогда существует непрерывная на R функция g такая, что $f(x) = g(x)$ для всех $x \in K$ и

$$\max_{x \in \mathrm{R}} g(x) = \max_{x \in K} f(x), \quad \min_{x \in \mathrm{R}} g(x) = \min_{x \in K} f(x).$$

Доказательство. Обозначим $\alpha = \inf K, \quad \beta = \sup K$. Тогда, в силу замкнутости K, $\alpha \in K$, и $\beta \in K$. Положим $g(x) = f(\alpha), \quad x < \alpha$ и $g(x) = f(\beta), \quad x > \beta$. Далее, положим также $g(x) = f(x)$ для $x \in K$. Если $K = [\alpha, \beta]$ то лемма, очевидно, доказана. Предположим, что $K \neq [\alpha, \beta]$. Поскольку K – замкнуто, то множество $G = cK$ открыто и, стало быть, множество G представляет собой объединение непересекающихся составляющих интервалов, среди которых, очевидно, имеются два неограниченных интервала $(-\infty, \alpha)$ и $(\beta, +\infty)$. На этих двух интервалах функция g уже определена. Пусть (a, b) – один из ограниченных составляющих интервалов множества G. Поскольку его концы не принадлежат G, то $a, b \in K$ и в этих точках функция g уже определена. Для $x \in (a, b)$ определим функцию $g(x)$ как линейную со значениями $g(a)$ и $g(b)$ в точках a и b соответственно. Проделав такую операцию на всех ограниченных составляющих интервалах множества G, мы получим функцию g, определённую на всей действительной прямой, совпадающую с функцией f в точках множества K. Докажем непрерывность g в каждой точке $x \in \mathrm{R}$.

Если $x \in G$, то непрерывность g в точке x очевидна, поскольку g совпадает с линейной функцией в некоторой окрестностью точки x. Далее, если x совпадает с правым концом какого – нибудь из составляющих интервалов множества G, то, очевидно, функция g непрерывна слева в точке x, ибо, как и выше, в некоторой левой полуокрестности точки x функция g совпадает с линейной функцией. Пусть точка x не является правым концом никакого составляющего интервала множества G и $x \notin G$. Докажем, что функция g непрерывна слева в точке x. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и, пользуясь непрерывностью слева функции f в точке $x \in K$ вдоль множества K, найдём такое $\delta > 0$ что для всех $y \in (x - \delta, x) \bigcap K$ справедливо неравенство $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Поскольку точка $x \notin G$ и не является правым концом какого – либо составляющего интервала множества G, то множество $(x - \delta, x) \bigcap K$ не пусто. Пусть $x_1 \in (x - \delta, x) \bigcap K$.

Покажем, что для всех $y \in (x_1, x)$ справедливо неравенство

$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Это и будет означать непрерывность слева функции g в точке x.

Если $y \in K, \quad x_1 < y < x$, то $(*)$, очевидно, выполнена, поскольку в точках множества K функция g совпадает с f. Пусть $x_1 < y < x$ и $y \in G$. Тогда y принадлежит некоторому составляющему интервалу (a, b) множества G, причём поскольку $x_1 \in K$ и $x \in K$, то $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$, и $|f(b) - f(x)| < \varepsilon$. Отсюда следует, что и $g(y)$ как значение линейной функции на $[a, b]$, т.е. находящееся между значениями $f(a)$ и $f(b)$, также будет удовлетворять неравенству

$$|g(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Поскольку $g(x) = f(x)$, то тем самым доказано $(*)$ для всех $y \in (x_1, x)$ т.е. непрерывность функции g слева в точке x.

Совершенно аналогично докажем, что функция g непрерывна справа в каждой точке $x \in \mathrm{R}$ и тем самым получим непрерывность функции g на всей действительной прямой.

Осталось доказать равенства

$$\max_{x \in \mathrm{R}} g(x) = \max_{x \in K} f(x), \quad \min_{x \in \mathrm{R}} g(x) = \min_{x \in K} f(x).$$

Докажем первое. Наибольшее значение функции $f(x)$ на компактном множестве K достигается в силу известной теоремы Вейерштрасса. По самому построению функции g значение $g(x)$ вне $[a, b]$ не могут быть большими, чем значения $g(x)$ для $\alpha \leq x \leq \beta$. Поэтому наибольшее значение $g(x)$ на R также достигается, причём это наибольшее значение достигается при $\alpha \leq x \leq \beta$. Легко видеть также, что наибольшее значение $g(x)$ на $[a, b]$ достигается в точке множества K, ибо на составляющих интервалах множества G, дополнительному к множеству K, функция g линейная.

Аналогично доказывается и второе равенство. **QED**

Теорема Бореля. Пусть на отрезке $[a, b] \equiv E$ задана измеримая почти везде конечная функция f. Тогда для любых $\sigma > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует непрерывная на $[a, b]$ функция g такая, что

$$mE(|f - g| \geq \sigma) < \varepsilon.$$

Если при этом $m \leq f(x) \leq M$, то и функцию g можно подобрать так, чтобы было $m \leq g(x) \leq M, \quad x \in [a, b]$.

Доказательство. Предположим сначала, что $m \leq f(x) \leq M$. Фиксируем $\sigma > 0$ и $\varepsilon > 0$ и найдём такое натуральное s, что $\frac{M-m}{s} < \sigma$. Построим множества

$$E_i = E\left(m + (i-1)\frac{M-m}{s} \leq f < m + i\frac{M-m}{s}\right), \; i = 1, 2, \ldots, s-1,$$

$$E_s = E\left(M - \frac{M-m}{s} \leq f \leq M\right).$$

Множества E_i попарно не пересекаются, измеримы и $\bigcup_{i=1}^{s} E_i = [a,b]$. Для каждого i построим замкнутое множество $F_i \subset E_i$ такое, что $mF_i > mE_i - \frac{\varepsilon}{s}$. Обозначим $F = \bigcup_{i=1}^{s} F_i$. Тогда

$$m([a,b] \setminus F) = m(\bigcup_{i=1}^{s}(E_i \setminus F_i)) = \sum_{i=1}^{s} m(E_i \setminus F_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s}(mE_i - mF_i) < \sum_{i=1}^{s} \frac{\varepsilon}{s} = \varepsilon.$$

Зададим на множестве F функцию h, полагая $h(x) = m + (i-1)\frac{M-m}{s}$, $x \in F_i$, $i = 1, 2 \ldots, s$. Функция h удовлетворяет всем условиям леммы 1 и, следовательно, непрерывна на F. Кроме того, $m \le h(x) \le M, \quad x \in F$, и $|f(x) - h(x)| < \sigma, \quad x \in F$.

Применим к функции h лемму 2. В результате получим непрерывную на всей действительной оси функцию g, совпадающую с функцией h на множестве F, причём $m \le g(x) \le M, \quad x \in \mathrm{R}$. Поскольку $E(|f-g| \ge \sigma) \subset [a,b] \setminus F$, то ясно, что функция g удовлетворяет требованиям теоремы.

Осталось доказать теорему для случая неограниченной f. В этом случае применим к f теорему 1 и построим ограниченную функцию φ такую, что $mE(f \ne \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$. Применяя теперь к функции φ уже доказанную часть нашей теоремы, построим непрерывную функцию g такую, что $mE(|\varphi - g| \ge \sigma) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, в силу очевидного включения

$$E(|f-g| \ge \sigma) \subset E(f \ne \varphi) \bigcup E(|\varphi - g| \ge \sigma),$$

получаем $mE(|f-g| \ge \sigma) < \varepsilon$, так что функция g – требуемая. **QED**

Следствие. Для любой измеримой, почти всюду конечной на $[a,b] \equiv E$ функции f существует последовательность непрерывных на $[a,b]$ функций g_k, сходящаяся по мере к функции f.

Доказательство. Зададим две последовательности $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел, стремящиеся к нулю. Для каждого k, пользуясь теоремой Бореля, построим непрерывную функцию g_k такую, что $mE(|f-g_k| \ge \sigma_k) < \varepsilon_k$. Тогда последовательность $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к функции f по мере. Действительно, зададим произвольное $\sigma > 0$ и покажем, что $mE(|f-g_k| \ge \sigma) \to 0 \quad (k \to \infty)$. Пусть произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём такое s, что $\sigma_k < \sigma$ и $\varepsilon_k < \varepsilon$ для всех $k \ge s$. Тогда для этих номеров k будем иметь $E(|f-g_k| \ge) \subset E(|f-g_k| \ge \sigma_k)$. Отсюда следует, что $mE(|f-g_k| \ge \sigma) \le mE(|f-g_k| \ge \sigma_k) < \varepsilon_k < \varepsilon$, для всех $k \ge s$, т.е. $\lim_{k\to\infty} mE(|f-g_k| \ge \sigma) = 0$. **QED**

Применяя к последовательности $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ непрерывных на $[a,b]$ функций, сходящейся по мере к измеримой f, теорему Ф. Рисса, получим подпоследовательность, сходящуюся к f почти всюду. Итак, нами установлена

Теорема Фреше. Для любой измеримой, почти всюду конечной на отрезке $[a,b]$ функции f существует последовательность непрерывных на $[a,b]$ функций g_k, сходящаяся к f почти всюду.

Следующая теорема очень важная. Она говорит о том, что понятие измеримости функции тесно связано с понятием непрерывности. Именно, измеримая функция всюду на отрезке $[a,b]$, кроме множества сколь угодно малой меры, совпадает с непрерывной функцией. Это свойство мы сформулируем в качестве отдельного определения.

Определение. Говорят, что функция f, заданная на множестве E, обладает С- *свойством Лузина*, если для любого $\delta > 0$ найдётся такая *непрерывная* на E функция g, что $m^*E(f \neq g) < \delta$.

Теорема Лузина. Пусть задана измеримая почти всюду конечная на отрезке $[a,b] \equiv E$ функция f. Тогда эта функция f обладает С-свойством, т.е. для любого $\delta > 0$ найдётся непрерывная функция g такая, что $mE(f \neq g) < \delta$. Если, кроме того, $m \leq f(x) \leq M$, то и g можно подобрать так, чтобы было выполнено неравенство $m \leq g(x) \leq M, \quad x \in [a,b]$.

Доказательство. Пользуясь теоремой Фреше, построим последовательность $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ непрерывных на $[a,b]$ функций, сходящуюся почти всюду на $[a,b]$ к фукции f. Пусть $\delta > 0$. Применяя к последовательности $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ теорему Егорова, найдём такое множество $E_\delta \subset [a,b]$, что $mE_\delta > b - a - \frac{\delta}{2}$ и на множестве E_δ последовательность $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к функции f равномерно. Поскольку g_k непрерывные функции, равномерно сходящиеся к f на E_δ, то функция f непрерывна на множестве E_δ (вдоль множества E_δ, т.е. сужение $f|E_\delta$ непрерывно на E_δ, вне множества E_δ мы не рассматриваем функцию f). Выберем теперь замкнутое множество $F \subset E_\delta$ так, что $mF > mE_\delta - \frac{\delta}{2}$. Если функцию f рассматривать только на множестве F, то она также будет непрерывна на этом множестве. Применим к сужению $f|F$ лемму 2. В результате получим непрерывную на R функцию g, совпадающую с f на множестве F. Поэтому $E(f \neq g) \subset [a,b] \setminus F$. Отсюда $mE(f \neq g) \leq m([a,b] \setminus F) < \delta$.

Если, в частности, $m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a,b]$, то и сужение $f|F$ также удовлетворяет этому неравенству, а применение леммы 2 позволяет построить непрерывную функцию g, для которой такая же оценка тоже будет справедливой.

Теорема доказана.

Итак, мы доказали, что из измеримости вытекает С-свойство. Это важное свойство иногда принимают за определение измеримости. Покажем, что в самом деле С-свойство эквивалентно измеримости.

Предложение. Пусть функция f обладает С-свойством Лузина на отрезке $[a,b] \equiv E$. Тогда f измерима на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть произвольное $\alpha \in$ R. Покажем, что множество $E(f > \alpha)$ измеримо. Зададим произвольное $\delta > 0$ и, пользуясь С-свойством, построим непрерывную на $[a,b]$ функцию g такую, что
$m^*E(f \neq g) < \frac{\delta}{2}$. Обозначим $E_1 = E(f \neq g)$. Построим открытое множество $G \supset E_1$ такое, что $mG < m^*E_1 + \frac{\delta}{2}$. На замкнутом множестве $F \equiv [a,b] \setminus G$ функция f совпадает с непрерывной функцией g и,следовательно, сужение $f|F$ непрерывно вдоль F. Значит, $f|F$ измеримо на F, т.е. множество $F(f > \alpha)$ из-

меримо. Ясно также, что $F(f>\alpha) \subset E(f>\alpha) \subset F(f>\alpha) \bigcup ([a,b] \setminus F)$. Но

$$m([a,b] \setminus F) = mG < m^* E_1 + \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \tag{$*$}$$

Поэтому

$$mF(f>\alpha) \leq m_* E(f>\alpha) \leq m^* E(f>\alpha) \leq mF(f>\alpha) + m([a,b] \setminus F).$$

Отсюда с учетом $(*)$ следует

$$m^* E(f>\alpha) - m_* E(f>\alpha) < \delta$$

и, так как $\delta > 0$ произвольно, $m^* E(f>\alpha) = m_* E(f>\alpha)$, т.е. множество $E(f>\alpha)$ измеримо. **QED**

3 Интеграл Лебега.

Напомним сначала в общих чертах определение интеграла Римана. Рассматривается конечная функция f на отрезке $[a,b]$. Этот отрезок разбивается точками $\Pi: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{s-1} < x_s = b$, в каждом частичном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ выбирается точка ξ_k и составляется интегральная сумма

$$\sigma = \sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Если суммы σ стремятся к конечному пределу I при стремлении к нулю диаметра разбиения $\lambda = \max_{0 \le k \le s-1} (x_{k+1} - x_k)$, то функция f называется *интегрируемой по Риману* на $[a,b]$, а число I называют *интегралом Римана* :

$$I = (R) \int_a^b f(x)dx.$$

Хорошо известно, что каждая непрерывная функция интегрируема по Риману. Существуют также и разрывные интегрируемые по Риману функции, например, любая монотонная функция интегрируема по Риману. Однако, даже очень простая функция – функция Дирихле – неинтегрируема на любом отрезке $[a,b]$. Для того, чтобы глубже понять это обстоятельство, вспомним ещё определение сумм Дарбу – Римана. Для ограниченной на $[a,b]$ функции f *верхняя и нижняя суммы Дарбу – Римана* определяются соответственно равенствами

$$\overline{S}_\Pi = \sum_{k=0}^{s-1} M_k(x_{k+1} - x_k), \quad \underline{S}_\Pi = \sum_{k=0}^{s-1} \mu_k(x_{k+1} - x_k),$$

где

$$M_k = \sup_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x), \quad \mu_k = \inf_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x).$$

Далее, *верхним и нижним интегралами Дарбу –Римана* называются соответственно

$$\overline{I}(f) = \inf_\Pi \overline{S}_\Pi, \quad \underline{I}(f) = \sup_\Pi \underline{S}_\Pi.$$

При построении интеграла Римана рассматриваются обычно следующие критерии интегрируемости.

Теорема 1 (критерий интегрируемости по Риману в терминах сумм Дарбу). Для того, чтобы ограниченная функция f была интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda \to 0} (\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi) = 0.$$

Теорема Дарбу. Для того, чтобы ограниченная функция f была интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$.

Итак, при определении интегральных сумм Дарбу – Римана исходный отрезок $[a,b]$ разбивается на малые отрезки $[x_k, x_{k+1}]$, $\quad k = 0, 1, \ldots, s-1$, и рассматриваются нижняя и верхняя грани таких сумм $\overline{I}(f)$ и $\underline{I}(f)$ соответственно.

В силу теоремы Дарбу, совпадение $\overline{I}(f)$ и $\underline{I}(f)$ означает интегрируемость по Риману функции f на отрезке $[a,b]$. Естественно возникает вопрос: *почему разбиение исходного отрезка производится только на отрезки* $[x_k, x_{k+1}]$? Более естественным было бы призводить разбиение на *произвольные* непересекающиеся множества e_k и далее строить интеграл по обычной схеме, т.е. строить суммы Дарбу, верхний и нижний интегралы и т.д. При этом от множеств e_k естественно потребовать *измеримость*, ибо аналог сумм Дарбу будет выражаться в терминах мер этих множеств.

Можно показать, что если применить указанный выше процесс, при котором суммы Дарбу строятся по всевозможным разбиениям исходного отрезка $[a,b]$ на измеримые *по Жордану* множества e_k, а затем строятся интегралы $\overline{I}(f)$ и $\underline{I}(f)$ и функция f объявляется *интегрируемой*, если $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$, приводит к тому же самому интегралу Римана. Если же вместо жордановой меры мы будем применять более общую *меру Лебега*, то получим более общий интеграл, обладающий рядом преимуществ по сравнению с интегралом Римана.

3.1 Определение интеграла Лебега для ограниченной функции.

Пусть f – ограниченная функция на измеримом множестве $E \subset \mathrm{R}^n$. Рассмотрим произвольное *разбиение* τ множества E на попарно непересекающиеся измеримые *по Лебегу* множества $e_1, \ldots, e_s$ такие, что $\bigcup_{k=1}^{s} e_k = E$. Обозначим $M_k = \sup_{x \in e_k} f(x)$, $\mu_k = \inf_{x \in e_k} f(x)$. Суммы $\overline{S}(\tau, f) \equiv \sum_{k=1}^{s} M_k m e_k$ и $\underline{s}(\tau, f) \equiv \sum_{k=1}^{s} \mu_k m e_k$ называются соответственно *верхней и нижней суммами Дарбу – Лебега.*

Если $\tau = \{e_k\}_{k=1}^{s}$ – разбиение множества E, то разбиение $\tau' = \{e'_i\}_{i=1}^{s'}$ будем называть *продолжением (измельчением)* разбиения τ, если для любого i найдётся такое k, что $e'_i \subset e_k$ т.е. если τ' получено из τ путем дальнейшего разбиения некоторых из множеств e_k.

Рассмотрим некоторые свойства сумм Дарбу – Лебега.

Лемма 1. Пусть разбиение τ' является продолжением разбиения τ. Тогда $\overline{S}(\tau, f) \geq \overline{S}(\tau', f)$, $\underline{S}(\tau, f) \leq \underline{S}(\tau', f)$, т.е. при измельчении разбиения верхняя сумма не увеличивается, а нижняя сумма не уменьшается.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда разбиение τ' получается из τ путем разбиения одного из множеств e_k на два измеримых подмножества e'_k и e''_k, т.е. $e_k = e'_k \bigcup e''_k$, $\quad e'_k \bigcap e''_k = \emptyset$. Тогда, очевидно,

$$M'_k \equiv \sup_{x \in e'_k} f(x) \leq M_k, \quad M''_k \equiv \sup_{x \in e''_k} f(x) \leq M_k,$$

$$\mu'_k \equiv \inf_{x \in e'_k} f(x) \geq \mu_k, \quad \mu''_k \equiv \inf_{x \in e''_k} f(x) \geq \mu_k.$$

Отсюда следует

$$\overline{S}(\tau, f) = \sum_{i=1}^{s} M_i m e_i = \sum_{i \neq k} M_i m e_i + M_k(m e'_k + m e''_k) \geq$$

$$\geq \sum_{i\neq k} M_i me_i + M'_k me'_k + M''_k me''_k = \overline{S}(\tau', f).$$

Аналогично получаем, что $\underline{S}(\tau, f) \leq \underline{S}(\tau', f)$. **QED**

Лемма 2. Пусть $\tau' = \{e'_k\}_{k=1}^{s'}$ и $\tau'' = \{e''_i\}_{i=1}^{s''}$ – два произвольных разбиения множества E. Тогда $\overline{S}(\tau', f) \geq \underline{S}(\tau'', f)$, т. е. любая нижняя сумма Дарбу – Лебега не превосходит любой верхней суммы Дарбу – Лебега.

Доказательство. Рассмотрим разбиение $\tau = \{e'_k \bigcap e''_k\}_{k=1\dots,s',\ i=1,\dots,s''}$. Ясно, что τ является продолжением как разбиения τ', так и разбиения τ''. В силу предыдущей леммы, $\overline{S}(\tau', f) \geq \overline{S}(\tau, f) \geq \underline{S}(\tau, f) \geq \underline{S}(\tau'', f)$. **QED**

Лемма 2, в частности, показывает, что множество всех нижних сумм Дарбу – Лебега ограничено сверху (например, какой-либо верхней суммой), а множество всех верхних сумм ограничено снизу (например, какой-либо нижней суммой). Этот факт позволяет ввести следующее

Определение. Пусть задана ограниченная функция f на измеримом множестве E. Тогда числа

$$\overline{I}(f) = \inf_{\tau} \overline{S}(\tau, f), \quad \underline{I}(f) = \sup_{\tau} \underline{S}(\tau, f)$$

называются *верхним и нижним интегралами Дарбу – Лебега* соответсвенно.

Пусть τ' и τ'' – два произвольных разбиения множества E. Тогда, в силу леммы 2, $\overline{S}(\tau', f) \geq \underline{S}(\tau'', f)$. Переходя в этом неравенстве к нижней грани по всевозможным разбиениям τ', получим $\overline{I}(f) \geq \underline{S}(\tau'', f)$. В этом неравенстве перейдём к верхней грани по всевозможным разбиениям τ''. Получим $\overline{I}(f) \geq \underline{I}(f)$.

Определение. Ограниченная на измеримом множестве E функция f называется интегрируемой по Лебегу на множестве E, если $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. При этом общее значение верхнего и нижнего интегралов называется *интегралом Лебега* функции f и обозначается $\int_E f(x)dx$.

Примеры.

1^o. Если $mE = 0$, то любая ограниченная функция f интегрируема на E и

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

Это сразу следует из того, что при любом разбиении $\tau = \{e_k\}_{k=1}^{s}$ будет $me_i = 0$ и, следовательно, $\underline{S}(\tau, f) = \overline{S}(\tau, f) = 0$.

2^o. Пусть $f(x) \equiv c$ на измеримом множестве E. Тогда f интегрируема на E и $\int_E f(x)dx = c \cdot mE$.

Действительно, для любого разбиения $\tau = \{e_k\}_{k=1}^{s}$ имеем $M_k = \mu_k = c$, $\underline{S}(\tau, f) = \overline{S}(\tau, f) = \sum_{k=1}^{s} c \cdot me_k = c\sum_{k=1}^{s} me_k = c \cdot mE$. Отсюда вытекает, что $\overline{I}(f) = \underline{I}(f) = c \cdot mE$.

3^o.Пусть задана функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathrm{R}, \\ 0, & x \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q} \end{cases}$$

на сегменте $[a,b] \equiv E$. Рассмотрим разбиение $\tau_0 = \{e_1, e_2\}$, где $e_1 = [a,b] \bigcap \mathrm{Q}$, $e_2 = [a,b] \setminus \mathrm{Q}$. Тогда $M_1 = 1$, $M_2 = 0$ и $\overline{S}(\tau_0, D) = 1 \cdot me_1 + 0 \cdot me_2 = 1 \cdot 0 + +0 \cdot (b-a) = 0$. Далее, поскольку $D(x) \geq 0$ для всех $x \in [a,b]$, то при любом разбиении $\tau = \{e_k\}_{k=1}^s$ имеем $\mu_k \geq 0$ и, следовательно, $\underline{S}(\tau, D) \geq 0$. Отсюда следует, что $\underline{I}(D) \geq 0$. С другой стороны, мы построили разбиение τ_0 такое, что $\overline{S}(\tau_0, D) = 0$. Отсюда следует, что $\overline{I}(D) = \inf_\tau \overline{S}(\tau, D) \leq 0$. Окончательно получаем $0 \leq \underline{I}(D) \leq \overline{I}(D) \leq 0$, так что функция Дирихле интегрируема по Лебегу на любом отрезке $[a,b]$ и $(L)\int_a^b D(x)dx = 0$.

Вспомним, что функция Дирихле неинтегрируема по Риману. Для нее верхний и нижний интегралы Дарбу – Римана равны соответственно $b-a$ и 0.

Следующие две теоремы показывают, что для ограниченной на измеримом множестве E функции f понятие интегрируемости эквивалентно измеримости f на E.

Теорема 1. Пусть ограниченная функция f измерима на множестве E. Тогда f интегрируема по Лебегу на E.

Доказательство. Измеримость f на E влечёт измеримость самого множества E. Нужно доказать, что $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$. Воспользуемся неравенством $\underline{S}(\tau, f) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \overline{S}(\tau, f)$, справедливым для любого разбиения τ. Отсюда будет следовать требуемое равенство, если мы покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение τ множества E, для которого $\overline{S}(\tau, f) - \underline{S}(\tau, f) < \varepsilon$. Покажем это.

Пользуясь ограниченностью f на E, найдём такие числа μ и M, что $\mu < f(x) < M$ для всех $x \in E$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдём такое натуральное s, что $\frac{M-\mu}{s} < \frac{\varepsilon}{mE}$ (случай $mE = 0$ тривиален и мы его не рассматриваем). Положим $y_k = \mu + k \cdot \frac{M-\mu}{s}$, $k = 0, 1, \ldots, s$, и построим множества $e_k = E(y_{k-1} \leq f < y_k)$, $k = 1, \ldots, s$. Множества e_k измеримы, попарно не пересекаются и $\bigcup_{k=1}^s e_k = E$, так что $\tau = \{e_k\}_{k=1}^s$ – разбиение множества E. Заметим, что $y_{k-1} \leq \mu_k \leq M_k \leq y_k$, где $\mu_k = \inf_{x \in e_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in e_k} f(x)$. Отсюда получаем

$$\overline{S}(\tau, f) - \underline{S}(\tau, f) = \sum_{k=1}^s M_k me_k - \sum_{k=1}^s \mu_k me_k \leq \sum_{k=1}^s (y_k - y_{k-1}) \cdot me_k =$$

$$= \frac{M-\mu}{s} \sum_{k=1}^s me_k = \frac{M-\mu}{s} \cdot mE < \frac{\varepsilon}{mE} \cdot mE = \varepsilon.$$

Итак, равенство $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ доказано. **QED**

Теорема 2. Пусть ограниченная функция f интегрируема по Лебегу на измеримом множестве E. Тогда функция f измерима на E.

Доказательство. Мы покажем, что функция f может быть представлена как предел почти всюду сходящейся последовательности простых функций. Поскольку простая функция измерима и предел почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций есть функция измеримая, то тем самым будет доказана измеримость f.

Покажем сначала, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение τ, что $\overline{S}(\tau, f) - \underline{S}(\tau, f) < \varepsilon$. Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое разбиение

τ', что $\overline{S}(\tau', f) < \overline{I}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, найдём такое разбиение τ'', что $\underline{S}(\tau'', f) > \underline{I}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для разбиения τ, являющегося объединением разбиений τ' и τ'', пользуясь леммой 1, получим

$$\underline{I}(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(\tau'', f) \leq \underline{S}(\tau, f) \leq \overline{S}(\tau, f) \leq \overline{S}(\tau', f) < \overline{I}(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, пользуясь равенством $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, которое следует из интегрируемости f, получаем

$$\overline{S}(\tau, f) - \underline{S}(\tau, f) < \varepsilon.$$

Применяя теперь доказанное свойство, построим последовательность разбиений $\tau_k = \{e_i^{(k)}\}_{i=1}^{s_k}$ такую, что

$$\lim_{k\to\infty} (\overline{S}(\tau_k, f) - \underline{S}(\tau_k, f)) = 0.$$

Для $k \in \mathrm{N}$ обозначим $M_i^{(k)} = \sup_{x\in e_i^{(k)}} f(x),\ \mu_i^{(k)} = \inf_{x\in e_i^{(k)}} f(x),\ i = 1, \ldots, s_k,$

$$\overline{f_k}(x) = M_i^{(k)},\ \underline{f_k}(x) = \mu_i^{(k)} \text{ при } x \in e_i^{(k)}.$$

Функции $\overline{f_k}$ и $\underline{f_k}$ простые, так как они постоянны на измеримых множествах $e_i^{(k)},\ i = 1, \ldots, s_k$. Далее, очевидно, справедливо неравенство $\underline{f_k}(x) \leq f(x) \leq \overline{f_k}(x),\ x \in E$.

Покажем сначала, что последовательность функций $g_k = \overline{f_k} - \underline{f_k}$ сходится на E по мере к функции, тождественно равной нулю. Зададим произвольное $\sigma > 0$ и обозначим $E_k(\sigma) = E(g_k \geq \sigma)$. Нужно показать, что $mE_k(\sigma) \to 0,\ (k \to \infty)$. Заметим, что $E_k(\sigma)$ представляет собой объединение тех множеств $e_i^{(k)}$, для которых $M_i^{(k)} - \mu_i^{(k)} \geq \sigma$. Следовательно, мы получаем

$$\overline{S}(\tau_k, f) - \underline{S}(\tau_k, f) = \sum_{i=1}^{s_k} (M_i^{(k)} - \mu_i^{(k)}) \cdot me_i^{(k)} \geq$$

$$\geq \sigma \cdot \sum_{k: M_i^{(k)} - \mu_i^{(k)} \geq \sigma} me_i^{(k)} = \sigma m E_k(\sigma).$$

Отсюда

$$mE_k(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma} (\overline{S}(\tau_k, f) - \underline{S}(\tau_k, f))$$

и, так как правая часть стремится к нулю при $k \to \infty$, имеем $mE_k(\sigma) \to 0$ $(k \to \infty)$.

Итак, мы доказали, что последовательность $g_k = \overline{f_k} - \underline{f_k}$ сходится к нулю на E по мере. Пользуясь теоремой Рисса, извлечем из нее подпоследовательность g_{k_j}, сходящуюся к нулю почти всюду на E. Но тогда, в силу неравенств

$$\underline{f}_{k_j}(x) \leq f(x) \leq \overline{f_{k_j}}(x),\ x \in E,$$

получаем, что в тех точках x множества E, в которых $g_{k_j}(x) = \overline{f_{k_j}}(x) - \underline{f}_{k_j}(x) \to 0$ $(j \to \infty)$, справедливо
$$f(x) = \lim_{j\to\infty} \overline{f_{k_j}}(x).$$

Итак, мы получили, что для почти всех $x \in E$ функция $f(x)$ представляет собой предел последовательности простых, а значит измеримых, функций $\overline{f_{k_j}}(x)$. Это означает, что f измерима на E. **QED**

3.1.1 Элементарные свойства интеграла Лебега от ограниченных функций.

Выше мы показали, что для ограниченной на измеримом множестве функции интегрируемость по Лебегу эквивалентна измеримости. Поэтому в дальнейшем вместо интегрируемости мы будем предполагать выполненным более подробно изученное свойство измеримости.

Теорема о среднем. Пусть функция f ограничена и измерима на множестве E такая, что $\mu \le f(x) \le M$ для всех $x \in E$. Тогда
$$\mu \cdot mE \le \int_E f(x)dx \le M \cdot mE.$$

Доказательство. Для любого разбиения $\tau = \{e_k\}_{k=1}^s$ множества E имеем $\mu \le \mu_k \le M_k \le M$, $k = 1,\dots,s$. Поэтому и $\overline{S}(\tau) = \sum_{k=1}^s M_k me_k \le M\sum_{k=1}^s me_k = M \cdot mE$. Отсюда сразу следует, что и $\int_E f(x)dx \le M \cdot mE$. Аналогично получаем неравенство $\int_E f(x)dx \ge \mu \cdot mE$. **QED**

Теорема (свойство полной аддитивности). Пусть ограниченное множество E представлено в виде счетного объединения попарно непересекающихся измеримых множеств E_k : $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$, $E_i \bigcap E_k = \emptyset$, $(k \ne i)$. Тогда для любой измеримой, ограниченной на E функции f справедливо равенство
$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f(x)dx.$$

Доказательство. Сперва докажем теорему для двух множеств $E_1 \bigcup E_2 \equiv E$, $E_1 \bigcap E_2 = \emptyset$. Пусть $\tau = \{e_k\}_{k=1}^s$ – разбиение множества E. Оно порождает разбиения $\tau' = \{e_k'\}_{k=1}^s$ и $\tau'' = \{e_k''\}_{k=1}^s$ множеств E_1 и E_2 соответственно: $e_k' = E_1 \bigcap e_k$, $e_k'' = E_2 \bigcap e_k, k = 1,\dots,s$. Пусть M_k, M_k', M_k'' – верхние, а μ, μ', μ'' – нижние грани функции f на множествах e_k, e_k', e_k'' соответственно. Тогда $\overline{S}(\tau,f) = \sum_{k=1}^s M_k me_k$, $\overline{S}(\tau',f) = \sum_{k=1}^s M_k' me_k'$, $\overline{S}(\tau'',f) = \sum_{k=1}^s M_k'' me_k''$, $\underline{S}(\tau,f) = \sum_{k=1}^s \mu_k me_k$, $\underline{S}(\tau',f) = \sum_{k=1}^s \mu_k' me_k'$, $\underline{S}(\tau'',f) = \sum_{k=1}^s \mu_k'' me_k''$. Так как $M_k' \le M_k$, $M_k'' \le M_k$, $\mu_k' \ge \mu_k$, $\mu_k'' \ge \mu_k$, то $\overline{S}(\tau',f) + \overline{S}(\tau'',f) \le \sum_{k=1}^s M_k(me_k' + me_k'') = \sum_{k=1}^s M_k me_k = \overline{S}(\tau,f)$, $\underline{S}(\tau',f) + \underline{S}(\tau'',f) \ge \sum_{k=1}^s \mu_k(me_k' + me_k'') = \sum_{k=1}^s \mu_k me_k = \underline{S}(\tau,f)$. Отсюда, складывая очевидные неравенства
$$\underline{S}(\tau',f) \le \int_{E_1} f(x)dx \le \overline{S}(\tau',f)$$

$$\underline{S}(\tau'', f) \le \int_{E_2} f(x)dx \le \overline{S}(\tau'', f),$$

получаем

$$\underline{S}(\tau, f) \le \underline{S}(\tau', f) + \underline{S}(\tau'', f) \le \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx \le$$

$$\le \overline{S}(\tau', f) + \overline{S}(\tau'', f) \le \overline{S}(\tau, f).$$

Поскольку $\sup_\tau \underline{S}(\tau, f) = \inf_\tau \overline{S}(\tau, f) = \int_E f(x)dx$, то из полученного неравенства

$$\underline{S}(\tau, f) \le \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx \le \overline{S}(\tau, f)$$

очевидным образом вытекает

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx.$$

Итак, наша теорема доказана для случая двух множеств. Пользуясь методом математической индукции, получим утверждение теоремы для любого конечного набора множеств $E_1, \dots, E_s$. Осталось рассмотреть случай счетного набора множеств.

Обозначим $Q_s = \bigcup_{k=1}^s E_k,\ R_s = \bigcup_{k=s+1}^\infty E_k$. Тогда, используя уже доказанную часть теоремы, получаем

$$\int_E f(x)dx = \int_{Q_s} f(x)dx + \int_{R_s} f(x)dx = \sum_{k=1}^s \int_{E_k} f(x)dx + \int_{R_s} f(x)dx.$$

Из этого равенства сразу получим утверждение теоремы, если покажем, что $\int_{R_s} f(x)dx \to 0$ $(s \to \infty)$. Чтобы это доказать, воспользуемся теоремой о среднем. В силу ограниченности функции f на E, существует число M такое, что $|f(x)| \le M,\ x \in E$. Тогда, по теореме о среднем получим $|\int_{R_s} f(x)dx| \le M \cdot mR_s$. Но по свойству счетной аддитивности меры Лебега, $mE = \sum_{k=1}^\infty mE_k$, т.е. ряд справа сходится. Значит $mR_s = m(\bigcup_{k=s+1}^\infty E_k) = \sum_{k=s+1}^\infty mE_k \to 0$ $(s \to \infty)$ как остатки сходящегося ряда. Из вышесказанного следует, что $\int_{R_s} f(x)dx \to 0$ $(s \to \infty)$ и теорема доказана полностью. **QED**

Следствие 1. Пусть измеримые ограниченные на множестве E функции f и g эквивалентны. Тогда $\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx$.

Доказательство. Обозначим $E_1 = E(f \ne g),\ E_2 = E \setminus E_1$. Тогда $E = E_1 \bigcup E_2,\ E_1 \bigcap E_2 = \emptyset,\ mE_1 = 0$. Поскольку, как было показано в примере 1^o, $\int_{E_1} f(x)dx = \int_{E_1} g(x)dx = 0$, то, по свойству аддитивности, получим

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx =$$

$$= 0 + \int_{E_2} g(x)dx = \int_{E_1} g(x)dx + \int_{E_2} g(x)dx = \int_E g(x)dx.$$

Замечание. Равенство нулю интеграла от функции Дирихле по любому измеримому множеству E легко можно получить из этого следствия. Действительно, достаточно воспользоваться тем, что на любом измеримом множестве E функция Дирихле эквивалентна тождественному нулю и применить пример 2^o.

Следствие 2. Если измеримая, ограниченная, неотрицательная на множестве E функция f такова, что $\int_E f(x)dx = 0$, то f эквивалентна тождественному нулю на E.

Доказательство. Заметим, что $E(f > 0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(f > \frac{1}{k})$. Если f не эквивалентна нулю на E, т.е. $mE(f > 0) > 0$, то найдется такое s, что $mE(f > \frac{1}{s}) > 0$. Обозначим $E_1 = E(f > \frac{1}{s}),\ E_2 = E \setminus E_1$. Тогда, по свойству аддитивности интеграла, получим

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx.$$

Применяя к интегралам в правой части теорему о среднем, получим

$$\int_E f(x)dx \geq \frac{1}{s} mE_1 + 0 \cdot mE_2 > 0,$$

что противоречит условию. **QED**

Следствие 3. Пусть функция f простая на множестве E, т.е. $E = \bigcup_{k=1}^{s} E_k$, $E_k \bigcap E_i = \emptyset\ (k \neq i)$, E_k – измеримы и $f(x) = c_k,\ x \in E_k,\ k = 1, \ldots, s$. Тогда $\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{s} c_k m E_k$.

Это следствие сразу вытекает из аддитивности интеграла Лебега и примера 2^o.

Теорема (линейность интеграла Лебега). Пусть функции f и g ограничены и измеримы на множестве E и число $\alpha \in \mathrm{R}$. Тогда

$$\int_E (f(x) + g(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx,\ \int_E (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_E f(x)dx.$$

Доказательство. Функции $f + g$ и αf также ограничены и измеримы на E, так что все интегралы существуют.

Докажем первое равенство. Обозначим $h = f + g$ и пусть $\tau = \{e_k\}_{k=1}^{s}$ – произвольное разбиени E. Через $M_k(\varphi)$ и $\mu_k(\varphi)$ будем обозначать соответственно верхнюю и нижнюю грани функции φ на множестве e_k. Тогда из неравенства $h(x) = f(x) + g(x) \leq M_k(f) + M_k(g),\ x \in e_k$, получим $M_k(h) \leq M_k(f) + M_k(g)$. Аналогично получим неравенство $\mu_k(h) \geq \mu_k(f) + \mu_k(g)$. Отсюда следует, что

$$\overline{S}(\tau, h) \leq \overline{S}(\tau, f) + \overline{S}(\tau, g),\ \underline{S}(\tau, h) \geq \underline{S}(\tau, f) + \underline{S}(\tau, g).$$

Поэтому, применяя еще очевидное неравенство

$$\underline{S}(\tau, h) \leq \int_E h(x)dx \leq \overline{S}(\tau, h),$$

находим

$$\underline{S}(\tau, f) + \underline{S}(\tau, g) \leq \int_E h(x)dx \leq \overline{S}(\tau, f) + \overline{S}(\tau, g), \qquad (*)$$

для любого разбиения τ.

Зададим теперь $\varepsilon > 0$ и найдём такие разбиения τ', τ'', что $\overline{S}(\tau', f) < \int_E f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$, $\overline{S}(\tau'', g) < \int_E g(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для разбиения τ, являющегося объединением разбиений τ', τ'', в силу леммы 1, из правого неравенства в $(*)$ получим

$$\int_E h(x)dx \leq \overline{S}(\tau', f) + \overline{S}(\tau'', g) < \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx + \varepsilon. \qquad (i)$$

Аналогично докажем неравенство

$$\int_E h(x)dx > \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx - \varepsilon. \qquad (ii)$$

Объединяя (i) и (ii), получаем

$$\int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx - \varepsilon < \int_E h(x)dx < \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx + \varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности ε, следует первое равенство в утверждении нашей теоремы.

Для доказательства второго равенства рассмотрим сначала случай $\alpha > 0$. Обозначим $\varphi = \alpha f$. Тогда для любого разбиения $\tau = \{e_k\}_{k=1}^s$ имеем $M_k(\varphi) = \alpha M_k(f)$, $k = 1, \ldots, s$. Отсюда следует $\overline{S}(\tau, \varphi) = \alpha \overline{S}(\tau, f)$. Переходя в этом равенстве к нижней грани по всевозможным разбиениям τ, получим $\int_E \varphi(x)dx = \alpha \int_E f(x)dx$. Тем самым наше равенство доказано для $\alpha > 0$.

Случай $\alpha = 0$ тривиален и мы опускаем его доказательство.

Пусть $\alpha < 0$. Тогда $\alpha f + (-\alpha) f = 0$. Используя уже доказанную часть теоремы и пример 2^o, получаем

$$0 = \int_E [\alpha f + (-\alpha) f](x)dx = \int_E (\alpha f)(x)dx + \int_E (-\alpha f)(x)dx =$$

$$= \int_E (\alpha f)(x)dx + (-\alpha) \int_E f(x)dx = \int_E (\alpha f)(x)dx - \alpha \int_E f(x)dx,$$

откуда следует равенство

$$\int_E (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_E f(x)dx.$$

Теорема доказана полностью.

Теорема (об интегрировании модуля). Пусть функция f ограничена и измерима на множестве E. Тогда

$$\left| \int_E f(x)dx \right| \leq \int_E |f(x)|dx.$$

Доказательство. Обозначим $E^+ = E(f \geq 0)$, $E^- = E(f < 0)$. Тогда, используя аддитивность и линейность интеграла, получим

$$\left| \int_E f(x)dx \right| = \left| \int_{E^+} f(x)dx + \int_{E^-} f(x)dx \right| = \left| \int_{E^+} f(x)dx + \int_{E^-} (-|f(x)|)dx \right| =$$

$$= \left| \int_{E^+} |f(x)|dx - \int_{E^-} |f(x)|dx \right| \leq \int_{E^+} |f(x)|dx + \int_{E^-} |f(x)|dx = \int_E |f(x)|dx.$$

Последнее неравенство в этой цепочке справедливо в силу того, что модуль разности двух неотрицательных чисел не превосходит суммы этих чисел. **QED**

Теорема (об интегрировании неравенств). Пусть ограниченные и измеримые на множестве E функции f и g таковы, что $f(x) \geq g(x),\ x \in E$. Тогда $\int_E f(x)dx \geq \int_E g(x)dx$.

Доказательство. Используя линейность интеграла и теорему о среднем, получим

$$\int_E f(x)dx - \int_E g(x)dx = \int_E [f(x) - g(x)]dx \geq 0 \cdot mE = 0,$$

поскольку $f(x) - g(x) \geq 0,\ x \in E$. Отсюда следует утверждение теоремы. **QED**

3.1.2 Предельный переход под знаком интеграла.

Сначала сформулируем задачу. Пусть на множестве E задана последовательность измеримых ограниченных функций f_k, сходящаяся к ограниченной функции f в каждой точке множества E. Как известно, функция f также измерима и, стало быть, интегрируема. Мы ставим вопрос: верно ли равенство

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx \ (\equiv \int_E (\lim_{k\to\infty} f_k(x))dx)? \qquad (*)$$

Следующий пример показывает, что такой предельный переход под знаком интеграла, вообще говоря, недопустим.

Пусть $f_k(x) = k\chi_{(0,\frac{1}{k})}(x),\ x \in (0,1)$, где характеристическая функция

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Тогда, как легко видеть, для любого $x \in E \equiv (0,1)$ имеем $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0 \equiv f(x)$. Применяя следствие 3 из теоремы об аддитивности интеграла Лебега, находим

$$\int_E f_k(x)dx = k \cdot m((0, \frac{1}{k})) + 0 \cdot m((\frac{1}{k}, 1)) = 1,\ k = 1, 2, \ldots$$

Вместе с этим $\int_E f(x)dx = \int_E 0dx = 0$, так что равенство $(*)$ не выполняется.

Следующая теорема содержит условия, при которых допустим предельный переход под знаком интеграла Лебега.

Теорема Лебега (об ограниченной сходимости.) Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность ограниченных, измеримых функций, сходящаяся по мере на множестве E к ограниченной функции f. Предположим, что функции f_k ограничены в совокупности на E, т.е. существует такое число $M > 0$, что $|f_k(x)| \leq M$ для всех $x \in E$ и для всех номеров $k = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx. \qquad (i)$$

Доказательство. Заметим, что из условий теоремы следует, что для почти всех $x \in E$ справедливо неравенство $|f(x)| \le M$. Действительно, пользуясь теоремой Ф. Рисса, выберем подпоследовательность f_{k_j}, сходящуюся к f почти всюду на E. Но из условия $|f_{k_j}(x)| \le M$ следует, что и для $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_{k_j}(x)$ справедливо неравенство $|f(x)| \le M$.

Для произвольного $\sigma > 0$ обозначим $E_k(\sigma) = E(|f_k - f| \ge \sigma)$. Используя свойства интеграла Лебега, получим

$$\left|\int_E f(x)dx - \int_E f_k(x)dx\right| \le \int_E |f(x) - f_k(x)|dx =$$

$$= \int_{E_k(\sigma)} |f(x) - f_k(x)|dx + \int_{E\setminus E_k(\sigma)} |f(x) - f_k(x)|dx \le$$

$$\le 2M \cdot mE_k(\sigma) + \sigma \cdot m(E \setminus E_k(\sigma)) \le 2M \cdot mE_k(\sigma) + \sigma \cdot mE. \qquad (*)$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\sigma = \frac{\varepsilon}{2mE}$. Пользуясь тем, что для данного σ, в силу условия сходимости по мере последовательности f_k к функции f, $mE_k(\sigma) \to 0$ $(k \to \infty)$, найдём такой номер s, что для всех $k \ge s$ справедливо неравенство $mE_k(\sigma) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Тогда из $(*)$ следует

$$\left|\int_E f(x)dx - \int_E f_k(x)dx\right| < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2mE} \cdot mE = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $k \ge s$. Это и означает, что выполнено (i). **QED**

3.1.3 Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана.

Теорема 1. Пусть функция f интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$. Тогда f интегрируема на $[a, b]$ и по Лебегу и ее интеграл Лебега равен интегралу Римана.

Доказательство. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$, $\Pi:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{s-1} < x_s = b$. Пусть $\overline{S}_\Pi$ и $\underline{S}_\Pi$ соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу - Римана для функции f, соответствующие разбиению Π. Тогда, в силу определения верхнего и нижнего интегралов Дарбу - Лебега, получим

$$\underline{S}_\Pi \le \underline{I}(f) \le \overline{I} \le \overline{S}_\Pi.$$

Так как f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то, согласно критерию интегрируемости в терминах сумм Дарбу - Римана,

$$\overline{S}_\Pi - \underline{S}_\Pi \to 0,\ d(\Pi) \to 0.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, так что f интегрируема по Лебегу на $[a, b]$. Кроме того, из неравенств

$$\underline{S}_\Pi \le (L)\int_a^b f(x)dx \le \overline{S}_\Pi,$$

$$\underline{S}_\Pi \leq (R)\int_a^b f(x)dx \leq \overline{S}_\Pi$$

следует также, что интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана. **QED**

Замечание. Из этой теоремы следует, что интегрируемая по Риману на сегменте $[a,b]$ функция измерима на $[a,b]$.

Выше было показано, что функция Дирихле интегрируема по Лебегу на любом сегменте $[a,b]$. Как хорошо известно, функция Дирихле не интегрируема по Риману на $[a,b]$. Поэтому утверждение, обратное к теореме 1, не имеет места. Это означает, что интеграл Лебега позволяет интегрировать существенно более широкий класс функций, чем интеграл Римана.

3.1.4 Критерий интегрируемости по Риману.

В курсе анализа критерии интегрируемости по Риману ограниченной на сегменте функции формулируются, как правило, в терминах верхних и нижних сумм Дарбу - Римана, или же в терминах верхних и нижних интегралов Дарбу - Римана. Однако, с точки зрения практического применения эти критерии в большинстве случаев неудобны и громоздки. В терминах же легко проверяемых структурных свойств функции в курсе анализа даются, обычно, достаточные условия интегрируемости по Риману. Это такие условия, как непрерывность, наличие лишь конечного числа точек разрыва, монотонность. Известно также, что никакое из этих условий не является необходимым для интегрируемости по Риману. Но все эти достаточные условия можно объединить по тому признаку, что множество точек разрыва не более, чем счетно, и, следовательно, имеет лебегову меру нуль. В этом разделе мы докажем замечательную теорему Лебега, которая устанавливает, что по Риману интегрируемы только "не очень разрывные" функции, а именно, такие, у которых множество точек разрыва имеет лебегову меру нуль.

Сначала приведём несколько вспомогательных определений и утверждений.

Пусть на сегменте $[a,b]$ задана функция f, причём допускаем, что в некоторых точках $x \in [a,b]$ значения $f(x)$ могут равнятся $+\infty$ или $-\infty$. Для $\delta > 0$ и $x_0 \in [a,b]$ обозначим $m_\delta(x_0) = \inf\{f(x):\ x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\bigcap[a,b]\},\ M_\delta(x_0) = \sup\{f(x):\ x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\bigcap[a,b]\}$. Ясно, что $m_\delta(x_0) \leq f(x_0) \leq M_\delta(x_0)$ для любого $x_0 \in [a,b],\ \delta > 0$. Далее, с уменьшением δ функция $m_\delta(x_0)$ не убывает, а $M_\delta(x_0)$ не возрастает. Поэтому существуют $m(x_0) = \lim_{\delta\to 0+} m_\delta(x_0);\ M(x_0) = \lim_{\delta\to 0+} M_\delta(x_0)$, причем

$$m_\delta(x_0) \leq m(x_0) \leq f(x_0) \leq M(x_0) \leq M_\delta(x_0).$$

Функции $m(x)$ и $M(x)$ называются соответсвенно *верхней и нижней функциями Бэра* для функции $f(x)$.

Теорема Бэра. Пусть функция f конечна в точке x_0. Для того, чтобы f была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$m(x_0) = M(x_0). \qquad (*)$$

Доказательство. Пусть f непрерывна в точке x_0. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём такое $\delta > 0$, что из условия $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \bigcap [a, b]$ следует $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Последнее неравенство означает, что $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \bigcap [a, b]$. Поэтому $f(x_0) - \varepsilon \le m_\delta(x_0) \le M_\delta(x_0) \le f(x_0) + \varepsilon$ и, тем более, $f(x_0) - \varepsilon \le m(x_0) \le M(x_0) \le f(x_0) + \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует, что $m(x_0) = M(x_0)$. Необходимость доказана.

Для доказательства достаточности предположим, что f разрывна в точке x_0. Это означает, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдётся $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \bigcap [a, b]$, для которого $|f(x) - f(x_0)| \ge \varepsilon_0$. Полагая $\delta = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$, построим последовательность точек $x_k \in (x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k}) \bigcap [a, b]$ такую, что $|f(x_k) - f(x_0)| \ge \varepsilon_0$, $k = 1, 2, \ldots$ Последнее неравенство означает, что выполнено одно из двух неравенств: $f(x_k) \ge f(x_0) + \varepsilon_0$, либо $f(x_k) \le f(x_0) - \varepsilon_0$. Поэтому по крайней мере одно из этих двух неравенств выполнено для бесконечного набора номеров k_i, $i = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим случай, когда $f(x_{k_i}) \ge f(x_0) + \varepsilon_0$, $i = 1, 2, \ldots$ Отсюда следует, что $M_{1/k_i}(x_0) \ge f(x_0) + \varepsilon_0$, а значит и $M(x_0) \ge f(x_0) + \varepsilon_0$. С другой стороны, $m(x_0) \le f(x_0)$, так что $m(x_0) < M(x_0)$, т.е. $(*)$ не выполнено. В случае, когда для бесконечного набора номеров k_i выполнено неравенство $f(x_{k_i}) \le f(x_0) - \varepsilon_0$, аналогично получаем, что $m(x_0) \le f(x_0) - \varepsilon_0$. Тогда из неравенства $M(x_0) \ge f(x_0)$ также получаем, что $m(x_0) < M(x_0)$. **QED**

Лемма. Пусть Π_k : $a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \ldots < x_{s_k - 1}^{(k)} < x_{s_k}^{(k)} = b$ – последовательность разбиений сегмента $[a, b]$ такая, что их диаметры $d(\Pi_k) \equiv \max_{1 \le i \le s_k}(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) \to 0$ $(k \to \infty)$. Обозначим $m_i^{(k)} = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $i = 1, \ldots, s_k$, $\varphi_k(x) = m_i^{(k)}$ при $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, s_k$, $\varphi_k(x_i^{(k)}) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, s_k$. Тогда для любой точки $x_0 \in [a, b]$, отличной от $x_i^{(k)}$, $i = 0, 1, \ldots, s_k$, $k = 1, 2, \ldots$ справедливо равенство

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x_0) = m(x_0).$$

Доказательство. Фиксируем k и пусть $x_0 \in [x_{i_0 - 1}^{(k)}, x_{i_0}^{(k)}]$. Поскольку x_0 не совпадает с $x_{i_0 - 1}^{(k)}$ и $x_{i_0}^{(k)}$, то $x_{i_0 - 1}^{(k)} < x < x_{i_0}^{(k)}$. Следовательно, при достаточно малом δ будет $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (x_{i_0 - 1}^{(k)}, x_{i_0}^{(k)})$. Поэтому $m_\delta(x_0) \ge m_{i_0}^{(k)}$, откуда следует, что и $m_\delta(x_0) \ge \varphi_k(x_0)$ при достаточно малых δ. Устремив δ к нулю, отсюда получаем $m(x_0) \ge \varphi_k(x_0)$. Тем самым наша лемма доказана в случае, если $m(x_0) = -\infty$.

Пусть $m(x_0) > -\infty$, и число $h < m(x_0)$. Тогда найдем такое $\delta > 0$, что $m_\delta(x_0) > h$. Для этого δ найдем такое k_0, что при $k \ge k_0$ будет $[x_{i_0 - 1}^{(k)}, x_{i_0}^{(k)}] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где, как и выше, $[x_{i_0 - 1}^{(k)}, x_{i_0}^{(k)}]$ – тот сегмент, который содержит точку x_0. Такой сегмент существует при всех $k \ge k_0$ в силу условия $d(\Pi_k) \to 0$ $(k \to \infty)$. Для $k \ge k_0$ имеем $m_{i_0}^{(k)} \ge m_\delta(x_0) > h$, или, что то же самое, $\varphi_k(x_0) > h$.

Итак, для любого $h < m(x_0)$ найдётся номер k_0 такой, что для всех $k \ge k_0$ справедливо неравенство $\varphi_k(x_0) > h$. Выше мы уже показали, что $\varphi_k(x_0) \le$

$m(x_0)$, $k = 1, 2, \ldots$ Вместе с предыдущим это означает, что $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_0) = m(x_0)$. **QED**

Следствие 1. Функция Бэра $m(x)$ измерима.

Действительно, множество точек деления $\{x_i^{(k)},\ i = 1, 2, \ldots, s_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ счётно и поэтому имеет меру нуль. Таким образом, наша лемма означает, что для почти всех $x \in [a, b]$ функция $m(x)$ представляет собой предел последовательности функций $\varphi_k(x)$. Но функции φ_k простые, а значит измеримые. Стало быть измерима и $m(x)$ как предел почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций.

Аналогично можно показать, что верхняя функция Бэра $M(x)$ измерима.

Следствие 2. Если в условиях леммы исходная функция f ограничена, то

$$\lim_{k\to\infty} (L) \int_a^b \varphi_k(x)dx = (L) \int_a^b m(x)dx. \tag{$*$}$$

Доказательство. Если $|f(x)| \le K$ для всех $x \in [a, b]$, то, очевидно, $|\varphi_k(x)| \le K$, $|m(x)| \le K$, $x \in [a, b]$. Поэтому функции φ_k и m ограничены и измеримы, а значит интегрируемы по Лебегу на $[a, b]$. Равенство $(*)$ мгновенно вытекает из теоремы Лебега об ограниченной сходимости, поскольку $\varphi_k \to m$ $(k \to \infty)$ почти всюду на $[a, b]$, а значит и по мере. **QED**

Заметим, что в силу свойств интеграла Лебега

$$(L) \int_a^b \varphi_k(x)dx = \sum_{i=1}^{s_k} \int_{x_{i-1}^{(k)}}^{x_i^{(k)}} \varphi_k(x)dx = \sum_{i=1}^{s_k} m_i^{(k)}(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) = \underline{S}_{\Pi_k},$$

где $\underline{S}_{\Pi_k}$ – нижняя сумма Дарбу - Римана, соответствующая разбиению Π_k. Таким образом, следствие 2 можно переписать так

$$\lim_{k\to\infty} \underline{S}_{\Pi_k} = (L) \int_a^b m(x)dx.$$

Аналогично можно установить, что верхние суммы Дарбу - Римана $\overline{S}_{\Pi_k}$ стремятся к интегралу Лебега от верхней функции Бэра $M(x)$

$$\lim_{k\to\infty} \overline{S}_{\Pi_k} = (L) \int_a^b M(x)dx.$$

Но в таком случае

$$\lim_{k\to\infty} (\overline{S}_{\Pi_k} - \underline{S}_{\Pi_k}) = (L) \int_a^b (M(x) - m(x))dx.$$

С другой стороны, из курса анализа известно, что необходимым и достаточным условием интегрируемости по Риману ограниченной на $[a, b]$ функции f является равенство нулю предела в левой части последнего равенства. Поэтому необходимым и достаточным условием интегрируемости по Риману также будет условие

$$(L) \int_a^b (M(x) - m(x))dx = 0.$$

Поскольку $M(x) - m(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$, то это равенство эквивалентно тому, что $M(x) = m(x)$ для почти всех $x \in [a, b]$. Но, в силу теоремы Бэра, условие $M(x) = m(x)$ равносильно непрерывности функции f в точке x. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема Лебега (критерий интегрируемости по Риману). Для того, чтобы ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция f была интегрируема по Риману на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была непрерывной для почти всех $x \in [a, b]$.

Эта теорема дает наиболее простой и ясный критерий интегрируемости по Риману. В частности, она объясняет тот факт, что функция Дирихле неинтегрируема по Риману. Именно, функция Дирихле разрывна в каждой точке и, стало быть, множество ее точек разрыва на сегменте $[a, b]$ имеет положительную меру, равную $b - a$.

3.2 Интеграл Лебега для неотрицательной измеримой функции.

Определение. Пусть задана неотрицательная на множестве E функция f. Для $t > 0$ *срезкой* функции f на уровне t называется функция $[f]_t(x) = \min\{f(x), t\},\ x \in E$.

Легко видеть, что для измеримой на E функции f ее срезка $[f]_t$ измерима при любом $t > 0$. Действительно, при любом $\lambda \in \mathrm{R}$ имеем

$$E([f]_t > \lambda) = \begin{cases} E(f > \lambda), & \lambda < t, \\ \emptyset, & \lambda \geq t. \end{cases}$$

Пусть f – измеримая, неотрицательная на множестве E функция. Тогда при любом $t > 0$ ее срезка $[f]_t$ измерима на E и ограничена: $0 \leq [f]_t(x) \leq t,\ x \in E$. Следовательно, функция $[f]_t$ интегрируема по Лебегу на E. Далее, если $0 < t_1 < t_2$, то, как легко видеть, $[f]_{t_1}(x) \leq [f]_{t_2}(x)\ , x \in E$. Поэтому и $\int_E [f]_{t_1}(x)dx \leq \int_E [f]_{t_2}(x)dx$. Это означает, что функция $\Phi(t) = \int_E [f]_t(x)dx$ является неубывающей на $(0, +\infty)$. Как известно из анализа, в этом случае существует (конечный или равный $+\infty$) $\lim_{t\to+\infty} \Phi(t)$.

Определение. Пусть функция f измерима и неотрицательна на множестве E. Тогда ее *интегралом Лебега* по множеству E называется

$$\lim_{t\to+\infty} \int_E [f]_t(x)dx \equiv \int_E f(x)dx.$$

Если этот предел конечен, то функция f называется *суммируемой* на E. В противном случае говорят, что f *несуммируема* на E и полагают $\int_E f(x)dx = +\infty$.

Легко видеть, что в случае, когда неотрицательная измеримая функция f ограничена на E, то новое определение интеграла совпадает с данным ранее определением.

Пример. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^\alpha},\ 0 < x \leq 1,\ \alpha > 0$. Из курса анализа известно, что несобственный интеграл Римана $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и равен $\frac{1}{1-\alpha}$.

Если же $\alpha \geq 1$, то этот интеграл расходится. Рассмотрим для этой функции интеграл Лебега.

Прежде всего, заметим, что функция f непрерывна на $E \equiv (0,1]$, а значит измерима. Найдем срезки этой функции. Пусть $t > 1$. Тогда неравенство $\frac{1}{x^\alpha} > t$ равносильно следующему $0 < x < t^{-1/\alpha}$. Значит, при $t > 1$

$$[f]_t(x) = \begin{cases} t, & 0 < x < t^{-1/\alpha}, \\ \frac{1}{x^\alpha}, & t^{-1/\alpha} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Учитывая, что $[f]_t$ непрерывна на $[0,1]$ (для этого положим $[f]_t(0) = t$), а значит интегрируема по Риману, получаем

$$(L)\int_0^1 [f]_t(x)dx = (R)\int_0^1 [f]_t(x)dx = \int_0^{t^{-1/\alpha}} tdx + \int_{t^{-1/\alpha}}^1 \frac{dx}{x^\alpha} = t^{1-\frac{1}{\alpha}} + \frac{1-t^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\alpha},$$

если $\alpha \neq 1$, и, аналогично, $(L)\int_0^1 [f]_t(x)dx = 1 + \ln t$ при $\alpha = 1$. Следовательно, при $t \to +\infty$ предел $\lim_{t\to+\infty}\int_0^1 [f]_t(x)dx$ существует и равен $\frac{1}{1-\alpha}$ при $\alpha < 1$, и равняется $+\infty$ при $\alpha \geq 1$. Таким образом, при $0 < \alpha < 1$ функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ суммируема на $(0,1]$, и ее интеграл Лебега $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$. Если же $\alpha \geq 1$, то $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ несуммируема на $(0,1]$, т.е. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$.

Как видно, для данного примера условие суммируемости совпадает с условием сходимости несобственного интнграла Римана. В этом случае оба интеграла равны между собой.

3.2.1 Простейшие свойства интеграла от неотрицательных функций.

1^o. Если E – множество меры нуль, то любая неотрицательная функция f суммируема на E и $\int_E f(x)dx = 0$.

Действительно, любая функция f измерима на множестве E меры нуль. Далее, для любого $t > 0$, в силу соответствующего свойства интеграла для ограниченной функции, имеем $\int_E [f]_t(x)dx = 0$. Поэтому и

$$\int_E f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_E [f]_t(x)dx = 0.$$

2^o. Пусть неотрицательные измеримые функции f и g эквивалентны на множестве E. Тогда $\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx$.

Действительно, для любого $t > 0$ срезки $[f]_t$ и $[g]_t$ также эквивалентны, ибо $E([f]_t \neq [g]_t) \subset E(f \neq g)$. Поэтому, в силу аналогичного свойства интеграла для ограниченных функций, для любого $t > 0$ имеем $\int_E [f]_t(x)dx = \int_E [g]_t(x)dx$. Переходя в этом равенстве к пределу при $t \to +\infty$, получаем требуемое равенство.

3^o. Пусть E и Q – измеримые множества и $Q \subset E$. Тогда для любой неотрицательной измеримой на E функции f справедливо неравенство $\int_Q f(x)dx \leq \int_E f(x)dx$.

Действительно, для любого $t > 0$ срезка $[f]_t$ неотрицательна на E. Поэтому $\int_E [f]_t(x)dx = \int_Q [f]_t(x)dx + \int_{E\setminus Q} [f]_t(x)dx \geq \int_Q [f]_t(x)dx$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $t \to +\infty$, получаем нужный результат.

4^o. Если неотрицательные, измеримые на множестве E функции f и g таковы, что $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in E$, то $\int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)dx$.

Действительно, для любого $t > 0$ имеем $[f]_t(x) \leq [g]_t(x)$ для всех $x \in E$. Отсюда, применяя соответствующее свойство интеграла для ограниченных функций, получаем $\int_E [f]_t(x)dx \leq \int_E [g]_t(x)dx$. Теперь требуемое неравенство получается переходом к пределу при $t \to +\infty$.

5^o. Если функция f неотрицательная, измеримая на множестве E и $\int_E f(x)dx = 0$, то f эквивалентна нулю на E.

В самом деле, поскольку $0 \leq [f]_1(x) \leq f(x)$ для всех $x \in E$, то, в силу предыдущего свойства, $0 \leq \int_E [f]_1(x)dx \leq \int_E f(x)dx = 0$, так что $\int_E [f]_1(x)dx = 0$. Применяя теперь аналогичное свойство интеграла от ограниченной функции, получаем, что функция $[f]_1$ эквивалентна нулю на E. Но тогда и f эквивалентна нулю на E, ибо $E(f \neq 0) = E([f]_1 \neq 0)$.

Теорема (полная аддитивность интеграла). Пусть ограниченное множество $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где измеримые множества E_k, $k = 1, 2, \ldots$, попарно не пересекаются. Тогда для любой неотрицательной, измеримой на E функции f справедливо

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx. \tag{1}$$

Доказательство. Фиксируем $t > 0$. В силу свойства полной аддитивности интеграла от ограниченных функций, имеем

$$\int_E [f]_t(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E [f]_t(x)dx. \tag{2}$$

Но для всех $k = 1, 2, \ldots$ $\int_{E_k} [f]_t(x)dx \leq \int_{E_k} f(x)dx$. Поэтому

$$\int_E [f]_t(x)dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $t \to +\infty$, получаем

$$\int_E f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx. \tag{3}$$

С другой стороны, из (2) следует, что при любом $s \in \mathrm{N}$

$$\int_E [f]_t(x)dx \geq \sum_{k=1}^{s} \int_{E_k} [f]_t(x)dx.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $t \to +\infty$. Получим

$$\int_E f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{s} \int_{E_k} f(x)dx.$$

Поскольку последнее неравенство верно при любом $s \in \mathbb{N}$, то, устремляя $s \to \infty$, находим

$$\int_E f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$

Отсюда и из (3) следует (1). **QED**

Теорема (линейность интеграла). Пусть заданы неотрицательные, измеримые на множестве E функции f и g и число $\alpha \geq 0$. Тогда

$$\int_E (f(x) + g(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx, \quad \int_E (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_E f(x)dx.$$

Доказательство. Обозначим $h = f + g$. Поскольку при любом $t > 0$ имеем $[f]_t(x) \leq f(x)$, $[g]_t(x) \leq g(x)$, то $h(x) \geq [f]_t(x) + [g]_t(x)$ для всех $x \in E$. Воспользовавшись теперь свойством линейности интеграла для ограниченных функций, получаем

$$\int_E h(x)dx \geq \int_E ([f]_t(x) + [g]_t(x))dx \geq \int_E [f]_t(x)dx + \int_E [g]_t(x)dx.$$

Отсюда, устремляя $t \to +\infty$, находим

$$\int_E h(x)dx \geq \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx. \tag{$*$}$$

Чтобы получить противоположное неравенство, докажем, что для любого $t > 0$ и для всех $x \in E$ справедливо

$$[h]_t(x) \leq [f]_t(x) + [g]_t(x). \tag{$**$}$$

Действительно, если $h(x) \leq t$, то $f(x) \leq t$, $g(x) \leq t$ и $(**)$ обращается в равенство. Пусть $h(x) > t$. Тогда $[h]_t(x) = t$. Если хотя бы одно из чисел $f(x)$ или $g(x)$ больше t, то $(**)$ очевидно. Если же $f(x)$ и $g(x)$ оба не превосходят t, то

$$t = [h]_t(x) \leq h(x) = f(x) + g(x) = [f]_t(x) + [g]_t(x),$$

так что и в этом случае $(**)$ имеет место. Из неравенства $(**)$, используя линейность интеграла от ограниченных функций, получаем

$$\int_E [h]_t(x)dx \leq \int_E ([f]_t(x) + [g]_t(x))dx = \int_E [f]_t(x)dx + \int_E [g]_t(x)dx.$$

Устремляя в этом неравенстве $t \to +\infty$, находим

$$\int_E h(x)dx \leq \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.$$

Отсюда и из $(*)$ следует первое из утверждений нашей теоремы.

Докажем второе равенство. Оно, очевидно, выполнено при $\alpha = 0$. Пусть $\alpha > 0$. Обозначим $\varphi(x) = (\alpha f)(x)$, $x \in E$. Поскольку для любого $t > 0$ неравенство $\varphi(x) > t$ эквивалентно нeравеству $f(x) > \frac{t}{\alpha}$, то отсюда следует, что

$[\varphi]_t(x) = \alpha \cdot [f]_{\frac{t}{\alpha}}(x),\ \ x \in E$. Поэтому, в силу свойства линейности интеграла для ограниченных функций, $\int_E [\varphi]_t(x)dx = \alpha \int_E [f]_{\frac{t}{\alpha}}(x)dx$. Переходя в этом равенстве к пределу при $t \to +\infty$, получаем второе утверждение нашей теоремы. **QED**

3.2.2 Предельный переход под знаком интеграла.

Теорема Леви (о монотонной сходимости). Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных, суммируемых на множестве E функций, неубывающая в каждой точке $x \in E$, т.е. $f_1(x) \le f_2(x) \le \dots$ Если $\int_E f_k(x)dx \le M,\ k = 1, 2, \dots$, то предельная функция $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ конечна почти всюду на E и

$$\int_E f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx.$$

Доказательство. Поскольку при фиксированном $x \in E$ числовая последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не убывает, то существует $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$, конечный, или равный $+\infty$. Одно из важных утверждений этой теоремы состоит в том, что этот предел конечен для почти всех $x \in E$, т.е. функция $f(x)$ конечна почти всюду на E.

Далее, из монотонности $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty},\ x \in E$, также следует, что числовая последовательность $\{\int_E f_k(x)dx\}_{k=1}^{\infty}$ также не убывает. Поскольку, по условию, она ограничена сверху, то существует

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx \equiv K.$$

Зафиксируем $t > 0$ и покажем, что для всех $x \in E$

$$\lim_{k\to\infty} [f_k]_t(x) = [f]_t(x). \tag{i}$$

Действительно, если $f(x) > t$, то, начиная с некоторого номера все $f_k(x) > t$, так что для таких номеров k справедливо $[f_k]_t(x) = t,\ \ [f]_t(x) = t$. Если же $f(x) \le t$, то для всех номеров k имеем $f_k(x) \le t$ и следовательно, равенство (i) принимает вид $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, что выполнено по условию.

Применяя к (i) теорему Лебега об ограниченной сходимости, получаем

$$\int_E [f]_t(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_E [f_k]_t(x)dx.$$

Но поскольку $\int_E [f_k]_t(x)dx \le \int_E f_k(x)dx$, то

$$\int_E [f]_t(x)dx \le \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx \equiv K. \tag{ii}$$

Из (ii) уже следует, что $f(x) < +\infty$ для почти всех $x \in E$. Действительно, обозначим $E_t = E([f]_t = t),\ E^* = E(f = +\infty)$. Тогда $E^* \subset E_t$ для всех $t > 0$. Покажем, что $mE_t \to 0$ при $t \to \infty$. В самом деле, для $t > 0$ имеем

$$\int_E [f]_t(x)dx \ge \int_{E_t} [f]_t(x)dx = t \cdot mE_t$$

(множество E_t измеримо, поскольку функция $[f]_t$ – измерима на E как предел последовательности измеримых функций $[f_k]_t$ $k = 1, 2, \ldots$). Отсюда, в силу (ii), получаем

$$mE_t \leq \frac{1}{t} \int_E [f]_t(x)dx \leq \frac{K}{t},$$

так что $mE_t \to 0$ при $t \to \infty$. Теперь из включения $E^* \subset E_t$ следует, что $mE^* = 0$ и, значит, $f(x)$ конечно для почти всех $x \in E$.

Переходя в (ii) к пределу при $t \to +\infty$, получим

$$\int_E f(x)dx \leq K. \qquad (iii)$$

С другой стороны, так как $f_k(x)$ стремится к $f(x)$ возрастая, то $f_k(x) \leq f(x)$, $x \in E$, $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому $\int_E f_k(x)dx \leq \int_E f(x)dx$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$K \leq \int_E f(x)dx.$$

Это неравенство вместе с (iii) завершает доказательство теоремы. **QED**

Следствие. Пусть $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных, измеримых на множестве E функций. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k(x)dx$ сходится, то почти всюду на E сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и справедливо равенство

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k(x)dx.$$

Это следствие получается сразу, если теорему Леви применить к последовательности функций $f_k = u_1 + \ldots + u_k$.

Теорема Фату. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных, измеримых на множестве E функций, такая, что для почти всех $x \in E$ существует (конечный или равный $+\infty$) $\lim_{k\to\infty} f_k(x) \equiv f(x)$. Если $\int_E f_k(x)dx \leq M$, $k = 1, 2, \ldots$, то функция $f(x)$ конечна для почти всех $x \in E$ и $\int_E f(x)dx \leq M$.

Доказательство. Зафиксируем $t > 0$ и покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} [f_k]_t(x) = [f]_t(x) \qquad (*)$$

для почти всех $x \in E$. В случае, когда $f(x) > t$ доказательство такое же, как и доказательство равенства (i) в теореме Леви. Если $f(x) < t$, то, очевидно, начиная с некоторого номера справедливо неравенство $f_k(x) < t$, $k \geq k_0$. Тогда $(*)$ принимает вид $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, что выполнено по условию. Осталось рассмотреть случай $f(x) = t$. В этом случае из условия $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) = t$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер k_0, начиная с которого $|f_k(x) - t| < \varepsilon$. Последнее неравенство означает, что $t - \varepsilon < f_k(x) < t + \varepsilon$, $k \geq k_0$. Но тогда и $t - \varepsilon < \min\{f_k(x), t\} \equiv [f_k]_t(x) \leq t < t + \varepsilon$, для всех $k \geq k_0$. Это означает, что $\lim_{k\to\infty} [f_k]_t(x) = t$, так что $(*)$ имеет место и в этом, последнем случае.

Применяя к $(*)$ теорему Лебега об ограниченной сходимости, получаем

$$\int_E [f]_t(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_E [f_k]_t(x)dx.$$

Но, в силу условия,

$$\int_E [f_k]_t(x)dx \le \int_E f_k(x)dx \le M,\ k = 1,2,\ldots,$$

так что

$$\int_E [f]_t(x)dx \le M.$$

Из этого неравенства, как и при доказательстве теоремы Леви, получим, что $f(x)$ конечно для почти всех $x \in E$. Если же в этом неравенстве устремить $t \to +\infty$, то получим

$$\int_E f(x)dx \le M,$$

и теорема доказана. **QED**

Приведем еще одно доказательство теоремы Фату, основанное на применении следующего утверждения.

Лемма. Пусть числовая последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $a_k \ge 0$, $k = 1,2,\ldots$, и $\lim_{k\to\infty} a_k = a$. Тогда последовательность $\overline{a_k} \equiv \inf\{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$ не убывает и также сходится к a.

Доказательство. Монотонность последовательности $\{\overline{a_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сразу следует из ее определения.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдём номер k_0 такой, что для всех $k \ge k_0$ справедливо неравенство $|a_k - a| < \varepsilon$, или, что то же самое, $a - \varepsilon < a_k < a + \varepsilon$. Но тогда ясно, что при $k \ge k_0$ для $\overline{a_k}$, равного нижней грани множества всех a_s, где $s \ge k$, будет выполнено неравенство $a < \varepsilon \le \overline{a_k} \le a + \varepsilon$, а это и означает, что $\lim_{k\to\infty} \overline{a_k} = a$. **QED**

Доказательство теоремы Фату. Определим последовательность $\overline{f}_k(x) = \inf\{f_k(x),\ f_{k+1}(x), \ldots\}$, $x \in E$, $k = 1,2\ldots$ Все функции $\overline{f_k}$ измеримы, поскольку $E(\overline{f_k} \ge \lambda) = \bigcap_{i=k}^{\infty} E(f_i \ge \lambda)$ при любом $\lambda \in \mathrm{R}$. Кроме того, последовательность $\{\overline{f_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не убывает при любом $x \in E$ и, в силу леммы, $\lim_{k\to\infty} \overline{f_k}(x) = f(x)$. Следовательно, по теореме Леви,

$$\int_E f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_E \overline{f_k}(x)dx. \qquad (v)$$

Но, очевидно, $\overline{f_k}(x) \le f_k(x)$, $x \in E$, $k = 1,2,\ldots$ Значит, $\int_E \overline{f_k}(x)dx \le \int_E f_k(x)dx$. Из условия теоремы $\int_E f_k(x)dx \le M$, и из (v) следует, что

$$\int_E f(x)dx \le M.$$

Теорема доказана.

Замечание. Даже если в условии теоремы Фату дополнительно предположить, что существует $\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx$, то все равно нельзя гарантировать выполнения равенства

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

Это высказывание может быть подтверждено примером, приведенным нами ранее для иллюстрации того, что предельный переход под знаком интеграла, вообще говоря, недопустим даже для ограниченных функций.

3.3 Суммируемые функции произвольного знака.

Определение. Пусть функция f задана на множестве E. *Положительной частью* функции f называют функцию $f^+(x)=\max\{0,f(x)\},\ x\in E$. *Отрицательной частью* функции f называют функцию $f^-(x)=\max\{-f(x),0\},\ x\in E$.

Ясно, что функции f^+ и f^- неотрицательны на E. Далее, если f измерима на E, то измеримы также f^+ и f^-. В самом деле,

$$E(f^+>\lambda)=\begin{cases}E, & \lambda<0,\\ E(f>\lambda), & \lambda\ge 0,\end{cases}\qquad E(f^->\lambda)=\begin{cases}E, & \lambda<0,\\ E(f<-\lambda), & \lambda\ge 0.\end{cases}$$

Очевидны также следующие равенства

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x),\quad |f(x)|=f^+(x)+f^-(x),\ x\in E.$$

Определение. Измеримая на множестве E функция f называется *суммируемой* на E если на E суммируемы функции f^+ и f^-. При этом интегралом от f на E называют

$$\int_E f(x)dx=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx.$$

Если хотя бы одна из функций f^+ или f^- несуммируема на E то функция f называется *несуммируемой* на E и интегралу от f не приписывается никакого значения (в отличие от случая неотрицательной несуммируемой функции, когда интеграл полагается равным $+\infty$).

Предположим, что измеримые функции f и g эквивалентны на E. Тогда, очевидно, $f^+\sim g^+,\ f^-\sim g^-$ на E. Поскольку интегралы от неотрицательных эквивалентных функций равны, то и функции f и g одновременно суммируемы, или несуммируемы. Если они суммируемы, то $\int_E f(x(dx=\int_E g(x)dx$.

Для несобственных интегралов Римана в курсе анализа имеется понятие *условной сходимости*. Это означает, что интеграл от функции является сходящимся, а от ее модуля – расходящимся. Следующая теорема показывает, что для интегралов Лебега такая ситуация невозможна.

Теорема. Измеримая на множестве E функция f суммируема на E тогда, и только тогда, когда суммируем $|f|$. В этом случае

$$\left|\int_E f(x)dx\right|\le\int_E|f(x)|dx.$$

Доказательство. Пусть f суммируема. По определению это означает, что суммируемы функции f^+, f^-. Но тогда, в силу линейности интеграла для неотрицательных функций, суммируема и функция $|f| = f^+ + f^-$.

Обратно, если f измерима и $|f|$ суммируема, то из неравенств $0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|$, $0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|$ следует также суммируемость функций f^+, f^-, а значит и функции f.

Наконец, используя очевидное неравенство $|a - b| < a + b$, $a, b \geq 0$, для суммируемой на множестве E функции f получаем

$$\left|\int_E f(x)dx\right| = \left|\int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx\right| \leq \int_E f^+(x)dx + \int_E f^-(x)dx =$$

$$= \int_E (f^+(x) + f^-(x))dx = \int_E |f(x)|dx.$$

Здесь мы применили линейность интеграла для неотрицательных функций.
QED

Следствия.

1^o. Если $mE = 0$, то любая конечная функция f суммируема на E и $\int_E f(x)dx = 0$.

Действительно, $|f|$ суммируема на E и, в силу предыдущей теоремы,

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leq \int_E |f(x)|dx = 0.$$

2^o. Если Q и E измеримые множества, $Q \subset E$, то из суммируемости функции f на E следует суммируемость f на Q.

В самом деле, в силу предыдущей теоремы, суммируемость f на E влечет суммируемость $|f|$ на E. Отсюда, в силу соответствующего свойства для неотрицательных функций, следует, что $|f|$ суммируем на Q. Наконец, снова применяя предыдущую теорему, получаем, что и f суммируема на Q.

3^o. Если измеримая на множестве E функция f такова, что $|f(x)| \leq g(x)$, $x \in E$, где функция g суммируема на E, то f суммируема на E.

Действительно, из нашего условия следует, что $|f|$ суммируем на E, а значит суммируема и функция f на E.

Приведем пример, показывающий,что сходимость несобственного интеграла Римана не влечет суммируемости.

Пример. Обозначим $\Delta_k = (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k = (0, 1] \equiv E$, $\Delta_k \bigcap \Delta_s = \emptyset$, $(k \neq s)$. Положим $x_k = \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1})$ и определим функцию f следующим равенством

$$f(x) = \begin{cases} k, & \frac{1}{k+1} < x \leq x_k, \\ -k, & x_k < x \leq \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Покажем, что f несуммируема на $(0, 1]$. В самом деле,

$$\int_{\Delta_k} |f(x)|dx = k|\Delta_k| = k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{k+1}$$

и

$$\int_0^1 |f(x)|dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta_k} |f(x)|dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty,$$

так что $|f|$, а значит и f несуммируема на $(0,1]$.

Вместе с тем, несобственный интеграл Римана от этой функции $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 f(x)dx = 0$. Действительно, для $0 < \varepsilon < 1$ найдем такое s, что $\frac{1}{s+1} < \varepsilon < \frac{1}{s}$. Тогда, учитывая, что $\int_{\frac{1}{(k+1)}}^{\frac{1}{k}} f(x)dx = 0$, имеем

$$\left|\int_\varepsilon^1 f(x)dx\right| = \left|\int_\varepsilon^{\frac{1}{s}} f(x)dx + \sum_{k=1}^{s-1}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(x)dx\right| = \left|\int_\varepsilon^{\frac{1}{s}} f(x)dx\right| \leq$$

$$\leq \int_{\frac{1}{s+1}}^{\frac{1}{s}} sdx = s(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}) = \frac{1}{s+1}.$$

Но при $\varepsilon \to +0$ имеем $s \to \infty$, так что $\frac{1}{s+1} \to 0$. Это и означает, что $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Данный пример, кроме вышесказанного, показывает также, что из суммируемости функции f на каждом из множеств E_k, $k = 1,2,\dots$, не следует суммируемость f на объединении этих множеств даже в предположении,что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)dx$ сходится. Поэтому свойство счетной аддитивности интеграла для функций произвольного знака отличается от счетной аддитивности интеграла для неотрицательных функций, в котором сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)dx$ достаточна для суммируемости f на $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Теорема (конечная аддитивность интеграла). Пусть $E = \bigcup_{k=1}^{s} E_k$, где измеримые множества E_k попарно не пересекаются. Если функция f суммируема на каждом из множеств E_k, то f суммируема и на E и

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{s}\int_{E_k} f(x)dx.$$

Доказательство. Применяя свойство аддитивности интеграла для неотрицательных функций, получаем

$$\int_E f^+(x)dx = \sum_{k=1}^{s}\int_{E_k} f^+(x)dx, \quad \int_E f^-(x)dx = \sum_{k=1}^{s}\int_{E_k} f^-(x)dx.$$

По предположению, правые части этих равенств конечны. Поэтому функции f^+, f^- суммируемы на E, а значит суммируема и f. Вычитая первое равенство из первого, получаем утверждение теоремы. **QED**

Замечание. Как уже было сказано, эта теорема не может быть распространена на случай счетного набора множеств E_k, ибо из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)dx$ не следует сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f^+(x)dx, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f^-(x)dx.$$

Вместе с тем, справедлива следующая

Теорема 1 (счетная аддитивность интеграла). Пусть функция f суммируемая на множестве E, где $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ и измеримые множества E_k попарно не пересекаются. Тогда

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$

Доказательство. В силу полной аддитивности интеграла от неотрицательных функций, имеем

$$\int_E f^+(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^+(x)dx, \quad \int_E f^-(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^-(x)dx.$$

По предполложению, левые части этих равенств конечны. Стало быть, ряды в правых частях являются сходящимися. Вычитая второе равенство из первого, получаем утверждение теоремы. **QED**

Теорема 2 (счетная аддитивность интеграла). Пусть ограниченное множество $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где измеримые множества E_k попарно не пересекаются. Пусть функция f измерима на E. Предположим, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)|dx$. Тогда функция f суммируема на E и

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx. \qquad (*)$$

Доказательство. По свойству полной аддитивности интеграла от неотрицательных функций имеем $\int_E |f(x)|dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)dx$. По предположению, ряд справа сходится. Поэтому $|f|$ суммируема на E, а значит суммируема и функция f на множестве E. Применяя теперь предыдущую теорему, получаем равенство $(*)$. **QED**

Линейность интеграла.

Теорема 1. Пусть функция f суммируема на множестве E и число $\alpha \in \mathrm{R}$. Тогда функция (αf) суммируема на E и

$$\int_E (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_E f(x)dx. \qquad (*)$$

Доказательство. Для $\alpha = 0$ утверждение очевидно. Пусть $\alpha > 0$. Тогда $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. Применяя свойство линейности для интеграла от неотрицательных функций, имеем

$$\int_E (\alpha f)^+(x)dx = \alpha \int_E f^+(x)dx, \quad \int_E (\alpha f)^-(x)dx = \alpha \int_E f^-(x)dx.$$

Отсюда следует суммируемость функции (αf), а вычитая второе равенство из первого, получаем $(*)$.

Пусть $\alpha < 0$. Ясно, что достаточно рассмотреть случай $\alpha = -1$. Но тогда из равенств $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$ следует суммируемость функции $-f$. Имеем

$$\int_E (-f)(x)dx = \int_E (-f)^+(x)dx - \int_E (-f)^-(x)dx = \int_E f^-(x)dx - \int_E f^+(x)dx =$$

$$= -\left(\int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx\right) = -\int_E f(x)dx.$$

QED

Теорема 2. Пусть функции f и g суммируемы на множестве E. Тогда функция $h = f + g$ суммируема на E и

$$\int_E h(x)dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx. \qquad (**)$$

Доказательство. Ясно, что теорему достаточно доказать для каждого из множеств $E_1 = E(f \geq 0) \bigcap E(g \geq 0)$, $E_2 = E(f \geq 0) \bigcap E(g < 0)$, $E_3 = E(f < 0) \bigcup E(g \geq 0)$, $E_4 = E(f < 0) \bigcap E(g < 0)$, а затем применить свойство конечной аддитивности интеграла. Суммируемость функции h на каждом из множеств следует из неравенства $|h(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, $x \in E$.

На множестве E_1 суммируемость суммы и равенство

$$\int_{E_1} (f(x) + g(x))dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_1} g(x)dx$$

следуют из свойства линейности интеграла для неотрицательных функций.

Для множества E_4, применяя предыдущую теорему, получаем, что суммируемость f и g на E_4 влечет суммируемость на E_4 неотрицательных функций $-f$, $-g$. Но тогда, в силу линейности интеграла от неотрицательных функций, получаем, что функция $-h = (-f) + (-g)$ суммируема на E_4. По предыдущей теореме, на E_4 суммируема также и функция $h = -(-h)$. Имеем

$$\int_{E_4} (f(x) + g(x))dx = -\int_{E_4} ((-f(x)) + (-g(x)))dx = -\left(\int_{E_4} (-f(x))dx +\right.$$

$$\left. + \int_{E_4} (-g(x))dx\right) = \int_{E_4} f(x)dx + \int_{E_4} g(x)dx.$$

Обозначим $E_2^+ = E_2(h \geq 0)$, $E_2^- = E_2(h < 0)$. Для $x \in E_2^+$ из равенства $h(x) = f(x) + g(x)$ следует $f(x) = h(x) + (-g(x))$. Применяя к этому равенству свойство аддитивности интеграла для неотрицательных функций и предыдущую теорему, получаем

$$\int_{E_2^+} f(x)dx = \int_{E_2^+} h(x)dx - \int_{E_2^+} g(x)dx,$$

откуда следует, что

$$\int_{E_2^+} h(x)dx = \int_{E_2^+} f(x)dx + \int_{E_2^+} g(x)dx.$$

Если же $x \in E_2^-$, то равенство $h(x) = f(x) + g(x)$ перепишем так: $-g(x) = f(x) + (-h(x))$. Отсюда, как и выше, получаем

$$\int_{E_2^-} h(x)dx = \int_{E_2^-} f(x)dx + \int_{E_2^-} g(x)dx.$$

Складывая это равенство с предыдущим, в силу аддитивности, получим

$$\int_{E_2} h(x)dx = \int_{E_2} f(x)dx + \int_{E_2} g(x)dx.$$

Доказательство подобного равенства для множества E_3 проводится точно так же, как и для E_2, если поменять местами f и g.

Складывая теперь полученные равенства для всех E_i, $i = 1, 2, 3, 4$, получаем $(**)$. **QED**

Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.

Из курса анализа хорошо известно следующее свойство интеграла Римана. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то интеграл с переменным верхним пределом $F(x) \equiv \int_a^x f(t)dt$ непрерывен и, в силу теоремы Кантора, равномерно непрерывен на $[a, b]$. Это означает,что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых точек $x', x'' \in [a, b]$ таких, что $|x' - x''| < \delta$, справедливо $|F(x') - F(x'')| < \varepsilon$. Последнее неравенство можно переписать так $|\int_I f(x)dx| < \varepsilon$, где произвольный отрезок $I \subset [a, b]$ такой, что $|I| < \delta$.

Аналогом этого свойства для интеграла Лебега служит

Теорема (абсолютная непрерывность интеграла). Пусть функция f суммируема на множестве E. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого измеримого подмножества $e \subset E$, мера которого $me < \delta$, справедливо неравенство

$$\left| \int_e f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Поскольку суммируемость f равносильна суммируемости $|f|$ и $\left|\int_e f(x)dx\right| \le \int_e |f(x)|dx$, то теорему достаточно доказать для неотрицательной функции f. Напомним, что для неотрицательной f интеграл Лебега определяется с помощью срезок следующим образом

$$\int_E f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_E [f]_t(x)dx.$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое $t > 0$, что

$$0 \le \int_E f(x)dx - \int [f]_t(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (i)$$

Далее, поскольку $[f]_t(x) \le t$, $x \in E$, то для любого измеримого множества $e \subset E$ справедливо неравенство $\int_e [f]_t(x)dx \le t \cdot me$. Поэтому, если положить $\delta = \frac{\varepsilon}{2t}$, то для любого измеримого подмножества $e \subset E$, у которого $me < \delta$, получим

$$\int_e [f]_t(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (ii)$$

Из (i) и (ii), с учетом того, что функция $f - [f]_t$ неотрицательна на E, следует, что для любого $e \subset E$ с $me < \delta$ будет

$$0 \leq \int_e f(x)dx = \int f(x)dx - \int_e [f]_t(x)dx + \int_e [f]_t(x)dx =$$

$$= \int_e (f(x) - [f]_t(x))dx + \int [f]_t(x)dx \leq \int_E (f(x) - [f]_t(x))dx + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \int_E f(x)dx - \int_E [f]_t(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

QED

3.3.1 Предельный переход под знаком интеграла.

Теорема Лебега (о мажорируемой сходимости). Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность измеримых на множестве E функций, сходящаяся на E по мере к измеримой функции f. Если существует суммируемая на E функция $\varphi(x)$ такая, что $|f_k(x)| \leq \varphi(x),\ x \in E,\ k = 1, 2, \dots$, то

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx. \tag{1}$$

Доказательство. Для $\sigma > 0$ обозначим $E_k(\sigma) = E(|f - f_k| \geq \sigma),\ k = 1, 2, \dots$ В силу условия сходимости по мере, имеем $mE_k(\sigma) \to 0$ $(k \to \infty)$. Заметим, что из условия $|f_k(x)| \leq \varphi(x),\ x \in E$, следует суммируемость функций $f_k,\ k = 1, 2, \dots$ Далее, пользуясь теоремой Рисса, извлечем подпоследовательность $\{f_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, сходящуюся почти всюду к функции f. Тогда из неравенства $|f_{k_i}(x)| \leq \varphi(x),\ x \in E$, получим, что $|f(x)| \leq \varphi(x)$ для почти всех $x \in E$. Можем считать, что неравенство $|f(x)| \leq \varphi(x)$ выполнено всюду на E. Для этого достаточно заменить нулем значения функции f на множестве меры нуль – там, где f_{k_i} не сходятся к f. Имеем

$$\left| \int_E f(x)dx - \int_E f_k(x)dx \right| \leq \int_E |f(x) - f_k(x)|dx =$$

$$= \int_{E_k(\sigma)} |f(x) - f_k(x)|dx + \int_{E \setminus E_k(\sigma)} |f(x) - f_k(x)|dx \equiv I_k'(\sigma) + I_k''(\sigma).$$

Для оценки $I_k'(\sigma)$ воспользуемся тем, что $|f_k(x)| \leq \varphi(x),\ |f(x)| \leq \varphi(x),\ x \in E$. Тогда получим

$$I_k'(\sigma) \leq \int_{E_k(\sigma)} (|f_k(x)| + |f(x)|)dx \leq 2 \int_{E_k(\sigma)} \varphi(x)dx.$$

Если же $x \in E \setminus E_k(\sigma)$, то $|f(x) - f_k(x)| \leq \sigma$. Поэтому $I_k''(\sigma) \leq \sigma \cdot mE$. Таким образом,

$$\left| \int_E f(x)dx - \int_E f_k(x)dx \right| \leq 2 \int_{E_k(\sigma)} \varphi(x)dx + \sigma \cdot mE. \tag{$*$}$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, найдем такое $\delta > 0$, что для любого измеримого множества $e \subset E$ меры $me < \delta$, справедливо неравенство $\int_e \varphi(x)dx < \varepsilon/4$. Положим $\sigma = \frac{\varepsilon}{2mE}$. Тогда из условия $mE_k(\sigma) \to 0$ $(k \to \infty)$ найдем такое s, что для всех $k \geq s$ справедливо неравенство $mE_k(\sigma) < \delta$. Поэтому, при $k \geq s$ из $(*)$ следует

$$\left|\int_E f(x)dx - \int_E f_k(x)dx\right| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2mE} \cdot mE = \varepsilon,$$

а это и означает (1). **QED**

3.3.2 Связь меры плоского множества с мерами его сечений.

В этом разделе мы установим связь между двумерной мерой Лебега множества из R^2 и одномерной мерой сечений этого множества.

Определение. Множество $I \equiv \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 : a \leq x < a+h,\ b \leq y < b+h\}$, где $a, b \in \mathrm{R},\ h > 0$, называется *полуоткрытым справа квадратом.*

Лемма 1. Любое открытое множество $G \subset \mathrm{R}^2$ можно представить в виде счетного объединения попарно непересекающихся полуоткрытых справа квадратов.

Доказательство. Для $k = 1, 2, \ldots$ будем называть *квадратами k-го ранга* следуюшие полуоткрытые справа квадраты

$$\Delta_{ij}^{(k)} = [i \cdot 2^{-k}, (i+1) \cdot 2^{-k}) \times [j \cdot 2^{-k}, (j+1) \cdot 2^{-k}),\ i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Все такие квадраты называются *двоичными.* Очевидно, совокупность всех двоичных квадратов образует *счетное множество.* Важное свойство двоичных квадратов состоит в том, что различные квадраты одного ранга не пересекаются, объединение их всех равно R^2, а каждый квадрат большего ранга содержится целиком в некотором квадрате любого меньшего ранга. Поэтому, если какие-либо два двоичных квадрата имеют непустое пересечение, то один из этих квадратов содержится в другом.

Обозначим через E_0 – объединение тех квадратов нулевого ранга, которые целиком содержатся в G. Если множества $E_0, E_1, \ldots, E_{k-1}$ уже построены, то через E_k обозначим объединение тех квадратов $k-$го ранга, целиком содержащихся в G, которые не содержатся в $E_0, E_1, \ldots, E_{k-1}$. Продолжая этот процесс, получаем последовательность множеств $E_k,\ k = 0, 1, \ldots$, таких, что $E_k \bigcap E_s = \emptyset$ $(k \neq s)$, и каждое из множеств E_k представдяет собой объединение квадратов $k-$го ранга.

Покажем, что $G = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$. Действительно, поскольку при любом $k = 0, 1, \ldots$, по построению, $E_k \subset G$, то и $\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k \subset G$. Для доказательства обратного включения зафиксируем точку $(x_0, y_0) \in G$. Поскольку для любого $k = 0, 1, \ldots$ существует единственный квадрат $k-$го ранга $\overline{\Delta}^{(k)}$, содержащий точку (x_0, y_0), то получим последовательность двоичных квадратов $\{\overline{\Delta}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, содержащих точку (x_0, y_0) и стягивающихся к этой точке. Поскольку множество G открытое, то точка (x_0, y_0) входит во множество G вместе с некоторой окрестностью. Значит, начиная с некоторого номера все двоичные квадраты $\overline{\Delta}^{(k)}$ будут содержаться в G. Пусть s – *наименьший* из номеров k таких, что $\overline{\Delta}^{(k)} \subset G$. Тогда $\overline{\Delta}^{(s)}$ является одним из квадратов $s-$го ранга, объединение которых образует множество E_s. Значит $(x_0, y_0) \in E_s$ и, следовательно, имеет место и обратное включение $G \subset \bigcup_{s=0}^{\infty} E_s$.

Наконец, поскольку множество всевозможных двоичных квадратов счетно, то и множество G представлено нами в виде объединения не более, чем счетного объединения двоичных квадратов. С другой стороны, легко видеть, что любое *конечное* объединение полуоткрытых справа двоичных квадратов не является открытым множеством. Поэтому множество тех двоичных квадратов, объединение которых образует открытое множество G, не может быть конечным. **QED**

Определение. Множество $E \subset \mathrm{R}^n$ называется *множеством типа* G_δ, если его можно представить в виде счетного пересечения открытых множеств, т.е. $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,\ G_k$ – открытые, $k = 1, 2, \ldots$

Например, любое открытое множество имеет тип G_δ. Одноточечное множество не является открытым, но имеет тип G_δ. Действительно, точку можно представить как пересечение открытых шаров с центром в этой точке, радиусы которых стремятся к нулю.

Можно показать, что множество всех рациональных точек не является множеством типа G_δ.

Каждое множество типа G_δ можно представить в виде пересечения последовательности вложенных друг в друга открытых множеств $G_1 \supset G_2 \supset \ldots$ Действительно, если $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \widetilde{G}_k$, где $\widetilde{G}_k$ – открытые множества, то множества $G_s = \bigcap_{k=1}^{s} \widetilde{G}_k$ также открытые, $G_s \supset G_{s+1},\ s = 1, 2, \ldots$ и $\bigcap_{s=1}^{\infty} G_s = \bigcap_{k=1}^{\infty} \widetilde{G}_k$.

Лемма 2. Пусть измеримое множество $E \subset \mathrm{R}^n$. Тогда существует множество Q типа G_δ такое, что $Q \supset E$ и $m(Q \setminus E) = 0$.

Доказательство. По определению внешней меры, для любого $k = 1, 2, \ldots$ найдется открытое множество $G_k \supset E$, такое, что $mG_k < m^*E + \frac{1}{k}$. Обозначим $Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. Тогда Q имеет тип G_δ и для любого k имеем $mQ \le mG_k \le m^*E + \frac{1}{k}$. Но, в силу измеримости E, $m^*E = mE$. Значит $mQ \le mE$. С другой стороны, поскольку $Q \supset E$, то $mQ \ge mE$.

Окончательно получаем $mQ = mE$, а из $Q \supset E$ следует, что $m(Q \setminus E) = 0$. **QED**

Определение. Пусть $E \subset \mathrm{R}^2$. Для любой фиксированной точки $x_0 \in \mathrm{R}$ будем обозначать E_{x_0} или $E(x_0)$ множество всех тех значений $y \in \mathrm{R}$, для которых $(x_0, y) \in E$. Это множество E_{x_0} называется *сечением* множества E, определяемым точкой x_0.

Если множество $E \subset \mathrm{R}^2$ открыто, то любое его сечение E_{x_0} также открытое множество в R. Действительно, пусть E_{x_0} не пусто и $y_0 \in E_{x_0}$. Это означает, что (x_0, y_0) входит в E вместе с некоторым шаром $B((x_0, y_0), \delta)$. Но тогда и окрестность $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset E_{x_0}$, т.е. y_0 – внутренняя точка в E_{x_0}.

Применяя теорему двойственности открытых и замкнутых множеств, отсюда легко получим, что любое сечение замкнутого множества замкнуто.

Сформулируем теперь основную теорему данного раздела.

Теорема. Пусть измеримое множество $E \subset \mathrm{R}^2$ содержится в прямоугольнике $\Pi = (a,b) \times (c,d)$. Тогда для почти всех $x \in (a,b)$ сечение $E(x)$ является измеримым подмножеством из (c,d) и справедливо равенство

$$mE = \int_a^b mE(x)dx. \tag{1}$$

Доказательство. Заметим, что в равенстве (1) слева символ m обозначает плоскую (т.е. двумерную) меру Лебега, а справа под знаком интеграла символом m обозначается линейная (т.е. одномерная) мера Лебега.

Доказательство будем проводить в несколько этапов.

1_o. Пусть E – полуоткрытый справа квадрат, $E = [\alpha, \alpha+h) \times [\beta, \beta+h),\ h > 0$. Тогда для $x \in [\alpha, \alpha+h)$ имеем $E(x) = [\beta, \beta+h)$. Если же $x \notin [\alpha, \alpha+h)$, то $E(x) = \emptyset$. Здесь все сечения $E(x)$ измеримы и

$$\int_a^b mE(x)dx = \int_\alpha^{\alpha+h} mE(x)dx = \int_\alpha^{\alpha+h} hdx = h^2 = mE.$$

2_o. Пусть E – открытое множество. Тогда, по лемме 1, его можно представить в виде счетного объединения полуоткрытых справа, попарно непересекающихся квадратов $\Delta_k,\ E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$. Для любого $x \in (a,b)$, очевидно, $E(x) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k(x)$, причем при фиксированном x сечения $\Delta_k(x)$ попарно не пересекаются. Каждое из сечений $\Delta_k(x)$ либо пусто, либо открытый справа полуинтервал, т.е. измеримое множество. Поэтому измеримо также и $E(x) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k(x)$. В силу свойства счетной аддитивности меры, $mE(x) = \sum_{k=1}^{\infty} m\Delta_k(x),\ x \in [a,b]$. Применяя следствие из теоремы Леви и результат предыдущего п. 1_o, получаем

$$\int_a^b mE(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b m\Delta_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} m\Delta_k = mE,$$

так что и в этом случае (1) выполнено.

3_o. Пусть E – множество типа G_δ. Пользуясь леммой 2, представим E в виде $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, где открытые множества $G_1 \supset G_2 \supset \ldots$ Можно считать, что все $G_k \subset \Pi$, ибо, в противном случае, мы перейдем к рассмотрению множеств $G_k \bigcap \Pi,\ k = 1, 2, \ldots$ Для каждого $x \in (a,b)$ имеем $E(x) = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k(x)$. Все сечения $G_k(x)$ открытые и, значит, измеримые множества, так что измеримо и их пересечение $E(x)$. Далее, множества $G_k(x),\ k = 1, 2, \ldots$, образуют убывающую последовательность, т.е. $G_1(x) \supset G_2(x) \supset \ldots$ По свойству непрерывности меры Лебега, имеем $mE(x) = \lim_{k\to\infty} mG_k(x)$ для каждого $x \in (a,b)$. Поскольку $mG_k(x) \le d - c,\ k = 1, 2, \ldots$, то, применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости, получаем

$$\int_a^b mE(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b mG_k(x)dx.$$

Отсюда, используя результат предыдущего п. 2_o и используя тот факт, что $mE = \lim_{k\to\infty} mG_k$, который вытекает из непрерывности меры Лебега, получаем

$$\int_a^b mE(x)dx = \lim_{k\to\infty} mG_k = mE,$$

т.е. равенство (1) в нашем случае.

4_o. Пусть E – множество меры нуль. Докажем, что почти все сечения $E(x)$ имеют линейную меру нуль. Обозначим $\Delta = \{x \in (a,b) :\ m^*E(x) > 0\}$. Тогда нужно доказать, что множество Δ измеримо и его линейная мера $m\Delta = 0$.

Для $\varepsilon > 0$ обозначим $\Delta_\varepsilon = \{x \in (a,b) :\ m^*E(x) \geq \varepsilon\}$. Поскольку $\Delta = \bigcup_{k=1}^\infty \Delta_{1/k}$, то достаточно показать, что $m\Delta_\varepsilon = 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

Поскольку, по условию, плоская мера множества E равна нулю, то можем построить последовательность открытых множеств $G_k \supset E$ таких, что $mG_k < 1/k,\ k = 1,2,\ldots$ Не ограничивая общности, можем считать, что $G_k \subset \Pi$. Обозначим $\Delta_\varepsilon^{(k)} = \{x \in (a,b) :\ mG_k(x) \geq \varepsilon\}$. Множество $G_k(x)$ измеримо, т.к. оно открытое. Далее, в предыдущем п. 3_o мы показали, что функция $mG_k(x)$ интегрируема, а значит, измерима на (a,b). Поэтому и множества $\Delta_\varepsilon^{(k)}$ измеримы. Поскольку $E \subset G_k,\ k = 1,2,\ldots,$ то для каждого $x \in (a,b)$ имеем $E(x) \subset G_k(x),\ k = 1,2,\ldots$ Поэтому $\Delta_\varepsilon \subset \Delta_\varepsilon^{(k)},\ k = 1,2,\ldots,$ и, значит,

$$m^*\Delta_\varepsilon \leq m\Delta_\varepsilon^{(k)},\ k = 1,2,\ldots \tag{$*$}$$

Оценим $m\Delta_\varepsilon^{(k)}$. В силу доказанного п. 3_o,

$$mG_k = \int_a^b mG_k(x)dx \geq \int_{\Delta_\varepsilon^{(k)}} mG_k(x)dx \geq \varepsilon \cdot m\Delta_\varepsilon^{(k)}.$$

С другой стороны, множества G_k были построены так, что $mG_k < 1/k$. Значит $m\Delta_\varepsilon^{(k)} \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{k},\ k = 1,2,\ldots$ Отсюда и из $(*)$, устремляя $k \to \infty$, получаем $m^*\Delta_\varepsilon = 0$, и тем самым завершается доказательство нашего случая 4_o.

5_o. Пусть, наконец, произвольное измеримое множество $E \subset \Pi$. Пользуясь леммой 2, найдем множество $Q \supset E$ типа G_δ такое, что $m(Q \setminus E) = 0$. Не ограничивая общности, можем считать, что $Q \subset \Pi$. Обозначим $e = Q \setminus E$. Тогда $E = Q \setminus e$ и для любого $x \in (a,b)$ справедливо равенство $E(x) = Q(x) \setminus e(x)$. По уже доказанному в п.п. 3_o и 4_o, множество $Q(x)$ измеримо для всех $x \in (a,b)$, а множество $e(x)$ имеет линейную меру нуль для почти всех $x \in (a,b)$, поскольку само множество e имеет плоскую меру нуль. Следовательно, $E(x)$ – измеримое линейное множество для почти всех $x \in (a,b)$ и при этом $mE(x) = mQ(x)$ для почти всех $x \in (a,b)$. По доказанному в п. 3_o, функция $mQ(x)$ измерима на (a,b) и $\int_a^b mQ(x)dx = mQ$. Следовательно и функция $mE(x)$, совпадающая почти всюду на (a,b) с $mQ(x)$, измерима на (a,b) и $\int_a^b mE(x)dx = \int_a^b mQ(x)dx = mQ$. Но $mQ = mE$. Стало быть, равенство (1) выполнено и в этом случае.

Теорема доказана полностью.

Следствие. Пусть измеримое множество $E \subset \mathrm{R}^2$ такое, что для почти всех x его сечения $E(x)$ измеримы и имеют меру нуль. Тогда множество E имеет плоскую меру нуль.

Действительно, в силу доказанной нами теоремы,

$$mE = \int_a^b mE(x)dx.$$

Но $mE(x) = 0$ почти всюду. Значит и $mE = 0$.

3.4 Повторные интегралы.

Пусть измеримое множество $E \subset \mathrm{R}^n$ содержится в некотором $n-$мерном интервале $I \equiv (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$. *Характеристической функцией множества* E называется функция

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \in I \setminus E. \end{cases}$$

Ясно, что множество E измеримо тогда, и только тогда, когда измерима на I функция χ_E. При этом

$$\int_I \chi_E(x)dx = \int_E 1dx + \int_{I\setminus E} 0dx = mE.$$

Напомним, что функция f называется *простой* на измеримом множестве E, если E можно разбить на конечное объединение попарно непересекающихся измеримых множеств E_k таких, что f постоянна на каждом из E_k, $k = 1, \ldots s$.

Каждая простая функция удобно может быть представлена с помощью характеристических функций следующим образом

$$f(x) = \sum_{k=1}^{s} c_k \chi_{E_k}(x),$$

где c_k – значение функции f на множестве E_k.

Ранее нами было доказано, что любая ограниченная измеримая на множестве E функция может быть представлена как предел равномерно сходящейся на E последовательности простых функций.

Определение. Пусть функция $f(x, y)$ определена на двумерном интервале $\Pi \equiv (a, b) \times (c, d)$. Фиксируя точку $x_0 \in (a, b)$, мы получаем функцию $f_{x_0}(y) \equiv f(x_0, y)$ переменного y на (c, d). Эту функцию называют *сечением* функции $f(x, y)$, определяемым точкой x_0.

Теорема Фубини. Пусть функция $f(x, y)$ суммируема на интервале $\Pi \equiv (a, b) \times (c, d)$. Тогда

a) для почти каждого $x \in (a, b)$ функция $f_x(y)$ является суммируемой функцией переменного y на (c, d);

b) функция $\varphi(x) = \int_c^d f_x(y)dy$ является суммируемой функцией переменного x на (a, b);

c) справедливо равенство

$$\int\int_\Pi f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f_x(y)dy \right) dx. \tag{1}$$

Доказательство. Проведем его в несколько этапов.

1_o. Пусть $f(x,y)$ – характеристическая функция некоторого измеримого множества $E \subset \Pi$. Тогда, в силу предыдущей теоремы, будем иметь.

a) Для каждого $x \in (a,b)$ имеем $f_x(y) = \chi_{E(x)}(y)$. Поскольку $E(x)$ измеримо для почти всех $x \in (a,b)$, то

$$f_x(y) = \begin{cases} 1, & y \in E(x), \\ 0, & y \notin E(x) \end{cases}$$

измерима и ограничена на (c,d), а значит, суммируема для почти всех $x \in (a,b)$.

b) Имеем $\int_c^d f_x(y)dy = \int_c^d \chi_{E(x)}(y)dy = mE(x)$. Как показано в предыдущей теореме, функция $\varphi(x) = mE(x)$ суммируема на (a,b).

c) В предыдущей теореме показано, что $\int_a^b mE(x)dx = mE$. С другой стороны, $\int\int_\Pi f(x,y)dxdy = \int\int_\Pi \chi_E(x,y)dxdy = mE$, так что равенство (1) в нашем случае имеет место.

2_o. Пусть функция $f(x,y)$ – простая на E, т.е. $f(x,y) = \sum_{k=1}^s c_k\chi_{E_k}(x,y)$. Тогда, применяя результат предыдущего п. 1, получим.

a) Для каждого $x \in (a,b)$ функция $f_x(y) = \sum_{k=1}^s c_k\chi_{E_k(x)}(y),\ y \in (c,d)$. Поскольку каждая из функций $\chi_{E_k(x)}(y)$ измерима на (c,d) для почти всех $x \in (a,b)$, то для почти всех $x \in (a,b)$ измерима на (c,d) и их линейная комбинация $f_x(y)$. Поскольку $f_x(y)$ еще и ограничена, то она суммируема на (c,d).

b) Имеем

$$\int_c^d f_x(y)dy = \int_c^d \sum_{k=1}^s c_k\chi_{E_k(x)}(y)dy = \sum_{k=1}^s c_k \int_c^d \chi_{E_k(x)}(y)dy = \sum_{k=1}^s c_k mE_k(x)$$

для почти всех $x \in (a,b)$. Функции $mE_k,\ k = 1,\ldots,s$, как показано в предыдущем п. 1_o, суммируемы на (a,b). Значит, суммируема и функция $\varphi(x) = \sum_{k=1}^s c_k mE_k(x)$ на (a,b).

c) Имеем

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^s c_k \int_a^b mE_k(x)dx = \sum_{k=1}^s c_k mE_k.$$

С другой стороны, так как функция f простая на E, то

$$\int\int_\Pi f(x,y)dxdy = \int\int_E f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^s c_k mE_k.$$

Поэтому справедливо равенство (1).

3_o. Пусть $f(x,y)$ – ограниченная, измеримая на Π функция. Тогда, как известно, функция f может быть представлена в виде предела равномерно сходящейся на Π последовательности $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ простых функций.

a) Как показано в предыдущем п. 2_o, для каждого $k \in \mathrm{N}$ найдется множество $\Delta_k \subset (a,b)$ такое, что $m\Delta_k = b - a$ и для каждого $x \in \Delta_k$ функция $(g_k)_x(y)$ измерима на (c,d). Обозначим $e_k = (a,b) \setminus \Delta_k,\ e = \bigcup_{k=1}^\infty e_k$. Поскольку $me_k =$

$0,\ k=1,2,\ldots$, то и $me=0$. Тогда для множества $\Delta\equiv(a,b)\setminus e=\bigcap_{k=1}^{\infty}\Delta_k$ справедливо $m\Delta=b-a$ и для каждого $x\in\Delta$ все функции $(g_k)_x(y),\ k=1,2,\ldots$, измеримы на (c,d).

Фиксируем $x\in\Delta$. Тогда $f_x(y)=\lim_{k\to\infty}(g_k)_x(y)$, где функции $(g_k)_x$ измеримы на (c,d). Следовательно, измерима на (c,d) и функция $f_x(y)$ как предел поточечно сходящейся последовательности измеримых функций. Поскольку $f_x(y)$ еще и ограничена, то она суммируема на (c,d) при каждом $x\in\Delta$, т.е. для почти всех $x\in(a,b)$.

b) Рассмотрим $\varphi(x)=\int_c^d f_x(y)dy,\ x\in\Delta$. Нам нужно доказать, что функция φ суммируема на (a,b), или, что то же самое, на Δ. Обозначим $\varphi_k(x)=\int_c^d(g_k)_x(y)dy$. Поскольку $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно на Π, то $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к φ равномерно на Δ. Действительно, зададим $\varepsilon>0$ и найдем номер s такой, что для всех $k\geq s$ и $(x,y)\in\Pi$ справедливо $|g_k(x,y)-f(x,y)|<\varepsilon$. Тогда для $x\in\Delta$ получим

$$|\varphi_k(x)-\varphi(x)|\leq\int_c^d|f_x(y)-(g_k)_x(y)|dy\leq\varepsilon(d-c),\ k\geq s,$$

а это означает, что $\{\varphi_k\}$ сходится к φ равномерно на Δ. По доказанному в п. 2_o, функции φ_k измеримы на Δ. Следовательно, измерима на Δ и функция φ как предел последовательности измеримых функций. Далее, из ограниченности f следует, что $|f(x,y)|\leq M$ для всех $(x,y)\in\Pi$. Но тогда и $|\varphi(x)|\leq\int_c^d|f_x(y)|dy\leq M(d-c)$ для всех $x\in\Delta$. Итак, функция φ измерима и ограничена на Δ. Значит, φ суммируема на Δ, а поскольку $m\Delta=b-a$, то φ суммируема и на (a,b).

c) Из равномерного стремления $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ к φ на Δ получаем, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b\varphi_k(x)dx=\int_a^b\varphi(x)dx.$$

В предыдущем п. 2_o было показано, что

$$\int_a^b\varphi_k(x)dx=\int_a^b\left(\int_c^d(g_k)_x(y)dy\right)dx=\int\int_\Pi g_k(x,y)dxdy.$$

Но из того, что $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно на Π следует

$$\lim_{k\to\infty}\int\int_\Pi g_k(x,y)dxdy=\int\int_\Pi f(x,y)dxdy.$$

Из вышесказанного получаем

$$\int\int_\Pi f(x,y)dxdy=\lim_{k\to\infty}\int\int_\Pi g_k(x,y)dxdy=\lim_{k\to\infty}\int_a^b\varphi_k(x)dx=\int_a^b\varphi(x)dx,$$

а это и есть равенство (1).

4_o. Пусть $f(x,y)$ неотрицательная, измеримая на Π функция. Для $k=1,2,\ldots$ рассмотрим срезки $[f]_k(x,y)$. При любом k срезка $[f]_k$ измерима и ограничена и для нее утверждения a), b), и c) уже доказаны. Пользуясь этим, докажем их в нашем случае.

a) Как и в предыдущем п. 3_o, построим такое множество Δ, что $m\Delta = b-a$ и для каждого $x \in \Delta$ при любом $k \in \mathrm{N}$ функция $([f]_k)_x(y)$ измерима на (c,d). Поскольку для любой точки $(x,y) \in \Pi$ имеем $[f]_k(x,y) \to f(x,y)$ $(k \to \infty)$, то при каждом фиксированном $x \in \Delta$ будет $([f]_k)_x(y) \to f_x(y)$ $(k \to \infty)$ на (c,d). Таким образом, для каждого $x \in \Delta$ функция $f_x(y)$ является пределом последовательности измеримых функций $([f]_k)_x(y)$. Значит, $f_x(y)$ измерима на (c,d) для каждого $x \in \Delta$.

Для $x \in \Delta$ можем рассматривать $\int_c^d f_x(y)dy$. Заметим, что последовательность $([f]_k)_x(y)$ стремится к $f_x(y)$ при $k \to \infty$ монотонно возрастая. Поэтому и последовательность функций $\varphi_k(x) = \int_c^d([f]_k)_x(y)dy$, $k = 1,2,\ldots$, возрастает при каждом фиксированном $x \in \Delta$. Покажем, что $\varphi_k(x) \to \varphi(x) \equiv \int_c^d f_x(y)dy$ $(k \to \infty)$. Действительно, при фиксировенном $x \in \Delta$ функции $[f]_k(x,y)$ стремятся к $f(x,y)$ возрастая. Кроме того,

$$\int_c^d [f]_k(x,y)dy \le \int_c^d f(x,y)dy < +\infty,\ k = 1,2,\ldots$$

Значит, по теореме Леви о монотонной сходимости, имеем

$$\int_c^d [f]_k(x,y)dy \ \to \ \int_c^d f(x,y)dy,\ k \to \infty,$$

а это в наших обозначениях и означает, что $\varphi_k(x) \to \varphi(x)$ $(k \to \infty)$ при каждом $x \in \Delta$. Мы хотим еще раз применить теорему Леви к последевательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для этого проверим оставшееся условие этой теоремы

$$\int_a^b \varphi_k(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d ([f]_k)_x(y)dy\right) dx =$$

$$= \int\int_\Pi [f]_k(x,y)dxdy \le \int\int_\Pi f(x,y)dxdy \equiv A < +\infty.$$

Применяя теорему Леви, получаем, что предельная функция $\varphi(x)$ конечна почти всюду на Δ.

b) Функция $\varphi(x)$ измерима как предел последовательности измеримых функций $\varphi_k(x)$. Далее, по теореме Леви,

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi_k(x) \le A,$$

так что функция φ суммируема на (a,b).

c) Заметим, что в силу уже доказанного п. 3_o,

$$\int_a^b \varphi_k(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d ([f]_k)_x(y)dy\right) dx = \int\int_\Pi [f]_k(x,y)dxdy.$$

С другой стороны, в силу определения интеграла Лебега,

$$\lim_{k\to\infty}\int\int_{\Pi}[f]_k(x,y)dxdy=\int\int_{\Pi}f(x,y)dxdy.$$

Однако, как уже показано,

$$\lim_{k\to\infty}\int\int_{\Pi}[f]_k(x,y)dxdy=\lim_{k\to\infty}\int_a^b\varphi_k(x)dx=\int_a^b\varphi(x)dx,$$

так что

$$\int\int_{\Pi}f(x,y)dxdy=\int_a^b\varphi(x)dx,$$

т.е. доказано (1).

5_o. Если f – произвольная суммируемая на Π функция, то применяя уже доказанный п. 4_o к функциям f^+ и f^-, получаем утверждения теоремы a), b), c) и в этом случае.

Теорема доказана полностью.

Следствие. Если функция f суммируема на интервале $\Pi\equiv(a,b)\times(c,d)$, то существуют и равны следующие повторные интегралы

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx \quad \text{и} \quad \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Замечание. Напомним, что аналогичная теорема о переходе от кратного интеграла к повторному для интегралов Римана помимо интегрируемости в смысле Римана функции f на сегменте $\Pi\equiv[a,b]\times[c,d]$ в качестве условия требует еще и существование $\int_c^d f(x,y)dy$ при каждом $x\in[a,b]$. Как видим из теоремы Фубини, для интегралов Лебега необходимость в таком дополнительном требовании отпадает. Это условие является следствием суммируемости функции f на Π.

4 Пространство функций с суммируемым квадратом и ряды Фурье.

Определение. Измеримая на множестве $E \subset \mathrm{R}^n$ функция f называется функцией *с суммируемым квадратом* на E, если функция f^2 суммируема на E, т.е. если $\int_E f^2(x)dx < \infty$. Множество всех измеримых на E функций с суммируемым квадратом обозначается через $L^2(E)$.

Из неравенства $|f(x)| \leq (1 + f^2(x))/2,\ x \in E$, сразу следует, что каждая функция $f \in L^2(E)$ суммируема на E. Обратное неверно. Например, функция $f(x) = 1/\sqrt{x}$ суммируема на $(0, 1)$, а $f^2(x) = 1/x$ несуммируема на $(0, 1)$.

Каждая ограниченная измеримая функция, очевидно, суммируема с квадратом.

Отметим еще некоторые свойства.

1_o. Если функции $f, g \in L^2(E)$, то их произведение $f \cdot g$ суммируемо на E.

Действительно, это сразу следует из очевидного неравенства

$$|f(x)g(x)| \leq (f^2(x) + g^2(x))/2,\ x \in E.$$

2_o. Если функции $f, g \in L^2(E)$ и число $\alpha \in \mathrm{R}$, то $f + g \in L^2(E)$ и $(\alpha f) \in L^2(E)$.

Действительно, $(f + g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$. В правой части – суммируемая функция, следовательно, суммируема и функция в левой части. Принадлежность классу $L^2(E)$ функции (αf) следует из равенства $(\alpha f)^2 = \alpha^2 f^2$.

Свойство 2_o показывает, что $L^2(E)$ – линейное пространство.

3_o. **Неравенство Шварца.** Если функции $f, g \in L^2(E)$, то

$$\int_E |f(x)g(x)|dx \leq \sqrt{\int_E f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_E g^2(x)dx}.$$

Доказательство. Для любого $\lambda > 0$, из неравенства

$$(\lambda|f(x)| - |g(x)|)^2 \geq 0,\ x \in E,$$

следует

$$2|f(x)g(x)| \leq \lambda f^2(x) + \frac{1}{\lambda} g^2(x),\ x \in E.$$

Интегрируя, получаем

$$2\int_E |f(x)g(x)|dx \leq \lambda \int_e f^2(x)dx + \frac{1}{\lambda}\int_E g^2(x)dx. \qquad (*)$$

Если $\int f^2(x)dx = 0$, то неравенство Шварца, очевидно, выполнено, так как функция f эквивалентна нулю на E, а значит и fg эквивалентно нулю на E. Если же $\int_E f^2(x)dx > 0$, то положим $\lambda = (\int_E g^2(x)dx / \int_E f^2(x)dx)^{1/2}$. Тогда $(*)$ примет вид

$$2\int_E |f(x)g(x)|dx \leq 2\left(\int_E f^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int g^2(x)dx\right)^{1/2}$$

и неравенство Щварца доказано.

Следствие. Если функция $f \in L^2(E)$, то

$$\frac{1}{mE}\int_E |f(x)|dx \le \left(\frac{1}{mE}\int_E f^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Для доказательства достаточно в неравенстве Щварца положить $g(x) \equiv \frac{1}{mE}$, $x \in E$.

4_o. **Неравенство Минковского (неравенство треугольника).** Пусть функции $f, g \in L^2(E)$. Тогда

$$\left(\int_E (f(x)+g(x))^2 dx\right)^{1/2} \le \left(\int_E f^2(x)dx\right)^{1/2} + \left(\int_E g^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Очевидно,

$$\int_E (f(x)+g(x))^2 dx = \int_E f(x)(f(x)+g(x))dx + \int_E g(x)(f(x)+g(x))dx.$$

К каждому из интегралов справа применим неравенство Шварца. Получим

$$\int_E (f(x)+g(x))^2 dx \le \left(\sqrt{\int_E f^2(x)dx} + \sqrt{\int_E g^2(x)dx}\right)\sqrt{\int_E (f(x)+g(x))^2 dx}.$$

Если интеграл слева равен нулю, то неравенство Минковского очевидно. Если же он положителен, то неравенство Минковского получается из последнего неравенства делением его на корень из левой части. **QED**

Последнее свойство позволяет в пространстве $L^2(E)$ определить понятие *нормы*

$$\|f\| = \sqrt{\int_E f^2(x)dx}.$$

При таком определении, очевидно, справедливы обычные свойства нормы:
1_o. $\|f\| \ge 0$, $\|f\| = 0$ тогда, и только тогда, когда $f \sim 0$ на E;
2_o. $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$ для любого $\alpha \in \mathrm{R}$;
3_o. $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$.

4.1 Сходимость в среднем.

Определение. Говорят, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ функций из $L^2(E)$ сходится *в среднем* к функции $f \in L^2(E)$, если $\|f_k - f\| \to 0$ $(k \to \infty)$. В этом случае функция f называется *пределом последовательности* $\{f_k\}$ *в среднем, или пределом в* $L^2(E)$.

4.1.1 Свойства последовательностей, содящихся в среднем.

1_o. **Единственность предела.** Если последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ функций $f_k \in L^2(E)$ сходится в среднем к функциям $f \in L^2(E)$ и $g \in L^2(E)$, то функции f и g эквивалентны на E.

Доказательство. Воспользуемся неравенством треугольника $\|f-g\| \leq \|f-f_k\| + \|g-f_k\|$. Поскольку, по условию, $\|f-f_k\| \to 0$ и $\|g-f_k\| \to 0$ при $k \to \infty$, то получим, что $\|f-g\| = 0$. Это означает, что $(f-g)^2$ эквивалентно нулю на E, или, что то же самое, $f \sim g$ на E. **QED**

2_o. **Непрерывность нормы.** Если последовательность функций $f_k \in L^2(E)$, $k = 1, 2, \ldots$ сходится в среднем к функции $f \in L^2(E)$, то

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\| = \|f\|.$$

Доказательство. Наше утверждение сразу следует из неравенства

$$\left|\ \|f_k\| - \|f\|\ \right| \leq \|f_k - f\|,\ k = 1, 2, \ldots$$

Для доказательства этого неравенства воспользуемся неравенством треугольника. Тогда получим

$$\|f_k\| = \|(f_k - f) + f\| \leq \|f_k - f\| + \|f\|,$$

откуда следует

$$\|f_k\| - \|f\| \leq \|f_k - f\|.$$

Если теперь поменять местами f_k и f, то получим

$$\|f\| - \|f_k\| \leq \|f_k - f\|.$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$-\|f_k - f\| \leq \|f_k\| - \|f\| \leq \|f_k - f\|,$$

а это и есть нужное неравенство. **QED**

4.1.2 Сравнение сходимости в среднем с другими видами сходимости.

1_o. Если последовательность функций $f_k \in L^2(E)$ равномерно на E сходится к функции f, то $f \in L^2(E)$ и $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f на E в среднем.

Доказательство. Действительно, равномерная сходимость $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ к f на E означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер K такой, что для всех $k \geq K$ и для каждого $x \in E$ справедливо неравенство $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Зададим $\varepsilon = 1$ и найдем такой номер k, что для всех $x \in E$ выполнено $|f_k(x) - f(x)| < 1$. Это неравенство означает, что

$$|f(x)| \leq |f_k(x)| + 1,\ x \in E.$$

Поскольку $f_k \in L^2(E)$ по условию, то отсюда следует, что $f \in L^2(E)$.

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем номер K такой, что для всех $k \geq K$ и для каждого $x \in E$ справедливо неравенство $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$. Тогда для таких k получим

$$\int_E |f_k(x) - f(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2 mE,$$

или, что то же самое, $\|f_k - f\| \leq \varepsilon\sqrt{mE}$. Это означает, что $\|f_k - f\| \to 0$ $(k \to \infty)$. **QED**

2_o. Если последовательность функций $f_k \in L^2(E)$ сходится в среднем к функции $f \in L^2(E)$, то $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится на E к функции f по мере.

Доказательство. Зададим $\sigma > 0$ и обозначим
$E_k(\sigma) = E(|f - f_k| \geq \sigma)$. Нужно показать, что $mE_k(\sigma) \to 0$ $(k \to \infty)$ при любом $\sigma > 0$. Оценим $mE_k(\sigma)$. Имеем

$$\int_E |f_k(x) - f(x)|^2 dx \geq \int_{E_k(\sigma)} |f_k(x) - f(x)|^2 dx \geq \sigma^2 mE_k(\sigma).$$

Отсюда следует, что

$$mE_k(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma^2} \int_E |f_k(x) - f(x)|^2 dx = \frac{1}{\sigma^2}\|f_k - f\|^2.$$

Поскольку, по условию, правая часть стремится к нулю при $k \to \infty$, то стремится к нулю и левая часть $mE_k(\sigma)$. **QED**

Следствие. Если последовательность функций $f_k \in L^2(E)$, сходится в среднем к функции $f \in L^2(E)$, то из нее можно извлечь подпоследовательность $\{f_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, сходящуюся к функции f почти всюду на E.

Действительно, это следствие получается мгновенно, если к сходящейся по мере последовательности из свойства 2_o применить теорему Ф. Рисса.

3_o. Из сходимости в среднем последовательности функций $f_k \in L^2(E)$ не следует, что эта последовательность сходится хотя бы в одной точке $x \in E$.

Действительно, чтобы в этом убедиться, достаточно раасмотреть приведенный нами ранее пример последовательности сходящейся по мере и расходящейся в каждой точке.

4_o. Из сходимости почти всюду на E последовательности функций $f_k \in L^2(E)$ не следует сходимость этой последовательности в среднем на E к некоторой функции $f \in L^2(E)$.

Для доказательства приведем пример. Пусть $f_k(x) = k\chi_{(0,1/k)}(x)$, $x \in (0,1) \equiv E$. Тогда, очевидно, в каждой точке $x \in E$ имеем $f_k(x) \to 0$ $(k \to \infty)$. С другой стороны, $\|f_k\|^2 = \int_0^1 f_k^2(x)dx = k^2 \cdot \frac{1}{k} = k$, так что $\|f_k\| = \sqrt{k} \to \infty$ при $k \to \infty$. Отсюда уже следует, что $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ не сходится в среднем к какой-либо функции $f \in L^2(E)$. Действительно, предположив противное, мы сразу придем к противоречию со свойством непрерывности нормы.

4.2 Полнота пространства L^2.

Напомним, что числовая последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое K, что для всех $k \geq K$, $i \geq K$ справедливо неравенство $|a_k - a_i| < \varepsilon$. В курсе анализа доказывается критерий Коши, согласно которому для числовых последовательностей понятия сходимости и фундаментальности равносильны.

Определение. Последовательность функций $f_k \in L^2(E)$ называется *фундаментальной* (или *сходящейся в себе*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер K, что для всех $k \geq K$, $i \geq K$ справедливо неравенство $\|f_k - f_i\| < \varepsilon$.

Из сходимости в среднем последовательности функций $f_k \in L^2(E)$ к некоторой функции $f \in L^2(E)$ сразу следует фундаментальность этой последовательности.

Действительно, сходимость в среднем $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ к f на E означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер K такой, что для всех $k \geq K$ справедливо неравенство $\|f_k - f\| < \varepsilon$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое K. Тогда для $k \geq K$, $i \geq K$, в силу неравенства треугольника, получим

$$\|f_k - f_i\| \leq \|f_k - f\| + \|f_i - f\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

а это и означает, что $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность.

Нетривиальным является тот факт, что каждая фундаментальная последовательность функций $f_k \in L^2(E)$ сходится в среднем к некоторой функции $f \in L^2(E)$. Пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность имеет предел, называется *полным* пространством. Следующая теорема показывает, что пространство $L^2(E)$ – полное.

Теорема Рисса-Фишера (о полноте пространства $L^2(E)$). Пусть последовательность функций $f_k \in L^2(E)$ фундаментальна. Тогда существует такая функция $f \in L^2(E)$, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в среднем на E к функции f.

Доказательство. Для $\varepsilon = 2^{-i}$, пользуясь фундаментальностью, найдем такой номер k_i, что для всех $k \geq k_i$ справедливо неравенство $\|f_k - f_{k_i}\| < 2^{-i}$, $i = 1, 2, \ldots$ Ясно, что последовательность номеров k_i можно выбрать так, чтобы она строго возрастала. Тогда будет выполнено неравенство $\|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\| < 2^{-i}$, $i = 1, 2, \ldots$ Следовательно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\|$ является сходящимся. Отсюда, применяя следствие из неравенства Шварца

$$\int_E |f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)| dx \leq \sqrt{mE} \|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\|$$

получим, что сходится также и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \int_E |f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)| dx$. К последовательности функций $u_i(x) = |f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)|$ применим следствие из теоремы Леви. В силу этого следствия, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)|$ сходится для почти всех $x \in E$. Стало быть, почти всюду на E сходится также и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x))$.

Рассмотрим ряд $f_{k_1} + \sum_{i=1}^{\infty}(f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x))$. Как и предыдущий ряд, он также сходится для почти всех $x \in E$. Это означает, что его частичные суммы

$$f_{k_1} + \sum_{i=1}^{s-1}(f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)) =$$

$$= f_{k_1}(x) + (f_{k_2}(x) - f_{k_1}(x)) + \ldots + (f_{k_s}(x) - f_{k_{s-1}}(x)) = f_{k_s}(x)$$

для почти всех $x \in E$ имеют предел при $s \to \infty$. Обозначим

$$f(x) = \lim_{s\to\infty} f_{k_s}(x).$$

Покажем, что $f \in L^2(E)$. Действительно, по выбору числа k_1, для всех $s \geq 1$ имеем $\|f_{k_s} - f_{k_1}\| \leq \frac{1}{2}$. Поэтому для $s = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $\|f_{k_s}\| \leq \|f_{k_1}\| + \frac{1}{2} \equiv A$. Это означает, что $\int_E f_{k_s}^2(x)dx \leq A^2$, а поскольку $\{f_{k_s}\}_{s=1}^{\infty}$ сходится к f почти всюду на E, то и $\{f_{k_s}^2\}_{s=1}^{\infty}$сходится к f^2 почти всюду на E. Применяя теорему Фату к последовательности $\{f_{k_s}^2\}_{s=1}^{\infty}$, получаем, что f^2 суммируема на E и $\int_E f^2(x)dx \leq A^2$. Следовательно, $f \in L^2(E)$.

Осталось доказать, что $\|f_k - f\| \to 0$ $(k \to \infty)$. Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь фундаментальностью, найдем номер K такой, что для всех $k \geq K$, $i \geq K$ справедливо неравенство $\|f_k - f_i\| < \varepsilon$. Поскольку построенная подпоследовательность номеров $k_s \to \infty$ $(s \to \infty)$, то найдется такое S, что при $s \geq S$ будет $\|f_k - f_{k_s}\| < \varepsilon$. Последнее неравенство означает, что $\int_E |f_k(x) - f_{k_s}(x)|^2 dx < \varepsilon^2$. Зафиксируем $k \geq K$. Пользуясь тем, что $f_{k_s}(x) \to f(x)$ при $s \to \infty$ почти всюду на E, получим, что $|f_k(x) - f_{k_s}(x)|^2 \to |f_k(x) - f(x)|^2$ почти всюду на E. Учитывая, что $\int_E |f_k(x) - f_{k_s}(x)|^2 dx < \varepsilon^2$, $s \geq S$, и применяя снова теорему Фату к последовательности $\{|f_k - f_{k_s}|^2\}_{s\geq S}$, получим, что $\int_E |f_k(x) - f(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2$. Поскольку $k \geq K$ произвольно, то тем самым доказано, что $\|f_k - f\| \to 0$ $(k \to \infty)$. **QED**

4.3 О приближении функций в пространстве $L^2(E)$.

В этом разделе мы рассмотрим некоторые вопросы, связанные с приближением функций из пространства $L^2(E)$ более простыми функциями.

Определение. Множество A, содержащееся в $L^2(E)$, называется *всюду плотным* в $L^2(E)$, если любая функция $f \in L^2(E)$ является пределом сходящейся в среднем последовательности функций, принадлежащих множеству A.

Легко видеть, что для того, чтобы множество A было всюду плотным в $L^2(E)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f \in L^2(E)$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно было найти такую функцию $g \in A$, для которой $\|f - g\| < \varepsilon$.

Теорема 1. Класс измеримых ограниченных функций всюду плотен в $L^2(E)$.

Доказательство. Пусть $f \in L^2(E)$ и число $\varepsilon > 0$. Пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, найдем такое $\delta > 0$, что для любого измеримого подмножества $e \subset E$ меры $me < \delta$ справедливо неравенство $\int_e f^2(x)dx < \varepsilon^2$. Применяя теорему 1, доказанную нами в разделе "Структура измеримых функций", для этого δ найдем такую измеримую, ограниченную на

E функцию g, что $mE(f \neq g) < \delta$, причем можем считать, что $g(x) = 0$ для всех $x \in E(f \neq g)$. Тогда

$$\|f-g\|^2 = \int_E |f(x)-g(x)|^2 dx = \int_{E(f\neq g)} |f(x)-g(x)|^2 dx = \int_{E(f\neq g)} f^2(x)dx < \varepsilon^2,$$

т.е. $\|f-g\| < \varepsilon$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Класс непрерывных функций всюду плотен в $L^2([a,b])$.

Доказательство. Пусть $f \in L^2([a,b])$ и число $\varepsilon > 0$. В силу предыдущей теоремы, существует такая ограниченная, измеримая на $[a,b] \equiv E$ функция φ, что $\|f-\varphi\| < \varepsilon/2$. Тогда $|\varphi(x)| \leq M,\ x \in [a,b]$. Пименяя теорему Лузина о C-свойстве к функции φ, построим такую непрерывную на $[a,b]$ функцию g, что $mE(g \neq \varphi) < \frac{\varepsilon^2}{16M^2}$ и $|g(x)| \leq M,\ x \in [a,b]$. Для этой функции получим

$$\|g-\varphi\|^2 = \int_a^b |g(x)-\varphi(x)|^2 dx =$$

$$= \int_{E(g\neq\varphi)} |g(x)-\varphi(x)|^2 dx \leq 4M^2 mE(g \neq \varphi) < \frac{\varepsilon^2}{4},$$

так что $\|g-\varphi\| < \varepsilon/2$. Стало быть,

$$\|f-g\| \leq \|f-\varphi\| + \|g-\varphi\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и теорема доказана.

Можно показать, что всюду плотным в $L^2([a,b])$ будут также следующие классы функций:

– класс всех многочленов;

– класс ступенчатых функций;

– класс тригонометрических многочленов в случае, когда $[a,b] = [-\pi,\pi]$.

4.4 Ортонормированные системы.

Выше было показано, что для функций $f, g \in L^2(E)$ их произведение суммируемо на E.

Определение. Функции $f, g \in L^2(E)$ называются *ортогональными* на множестве E, если $\int_E f(x)g(x)dx = 0$. Система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ функций $\varphi_k \in L^2(E)$ называется *ортогональной,* если $\int_E \varphi_k(x)\varphi_i(x)dx = 0$ при $k \neq i$, а при $k = i$ $\|\varphi_k\|^2 > 0,\ k = 1, 2, \ldots$, т.е. ни одна из функций φ_k не эквивалентна нулю на E. Ортогональная система функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *ортонормированной,* если $\|\varphi_k\| = 1,\ k = 1, 2, \ldots$

Например, тригонометрическая система функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots\ \cos kx,\ \sin kx,\ \ldots$$

ортогональна на $[0, 2\pi]$, но не ортонормирована. Соответствующая ортонормированная система – это следующая система:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \ \ldots$$

Ясно, что таким способом любую ортогональную систему $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно привести к ортонормированной, положив $\psi_k = \varphi_k/\|\varphi_k\|, \ k = 1, 2, \ldots$

4.4.1 Коэффициенты Фурье.

Пусть задана ортонормированная на E система функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для действительных чисел $c_k, \ k = 1, \ldots, s$, рассмотрим функцию $f(x) = \sum_{k=1}^{s} c_k\varphi_k(x)$, которую называют *полиномом порядка s по системе* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Выберем натуральное число j, умножим $f(x)$ на $\varphi_j(x)$ и проинтегрируем полученное равенство:

$$\int_E f(x)\varphi_j(x)dx = \sum_{k=1}^{s} c_k \int_E \varphi_k(x)\varphi_j(x)dx.$$

Если $j \le s$, то справа все слагаемые равны нулю, кроме одного, соответствующего номеру $k = j$. Получим равенство

$$c_j = \int_E f(x)\varphi_j(x)dx, \ j = 1, \ldots, s.$$

Определение. Пусть заданы ортонормированная на E система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ и функция $f \in L^2(E)$. Тогда числа $c_k = \int_E f(x)\varphi_k(x)dx, \ k = 1, 2, \ldots,$ называются *коэффициентами Фурье* функции f по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$ называется *рядом Фурье* функции f по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Определение. Говорят, что функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на множестве E *в среднем* к функции $f \in L^2(E)$, если последовательность его частичных сумм сходится в среднем на E к функции f, т.е. если $\|f - S_k\| \to 0 \ (k \to \infty)$, где $S_k(x) = \sum_{i=1}^{k} u_i(x), \ x \in E$.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу.

Пусть задана ортонормированная на множестве E система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ и функция $f \in L^2(E)$. Требуется среди всех полиномов порядка не выше заданного натурального числа s по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ найти такой, который наименее уклоняется от функции f по норме $L^2(E)$.

Решение этой задачи содержит следующая

Теорема Грамма. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная на множестве E система и функция $f \in L^2(E)$. Тогда среди всех полиномов $\sum_{k=1}^{s} a_k\varphi_k$ порядка не выше, чем заданное s, наименее уклоняется от функции f по норме $L^2(E)$ ее $s-$я частичная сумма ряда Фурье, т.е.

$$\inf_{a_1,\ldots,a_s} \|f - \sum_{k=1}^{s} a_k\varphi_k\| = \|f - \sum_{k=1}^{s} c_k\varphi_k\|,$$

где $c_k = \int_E f(x)\varphi_k(x)dx, \ k = 1, \ldots, s$ – коэффициенты Фурье функции f.

Доказательство. Для любых чисел $a_1, \dots, a_s$ имеем

$$\|f - \sum_{k=1}^{s} a_k \varphi_k\|^2 = \int_E \left(f(x) - \sum_{k=1}^{s} a_k \varphi_k(x) \right)^2 dx =$$

$$= \int_E f^2(x)dx - 2\sum_{k=1}^{s} a_k \int_E f(x)\varphi_k(x)dx + \int_E \left(\sum_{k=1}^{s} a_k \varphi_k(x) \right)^2 dx. \qquad (*)$$

Интегрируя равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{s} a_k \varphi_k(x) \right)^2 = \sum_{k=1}^{s} a_k^2 \varphi_k^2(x) + \sum_{k \neq i} a_k a_i \varphi_k(x) \varphi_i(x)$$

и учитывая ортонормированность системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, получаем, что последнее слагаемое в правой части $(*)$ равно

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{s} a_k \varphi_k(x) \right)^2 dx = \sum_{k=1}^{s} a_k^2.$$

Поэтому из $(*)$ следует

$$\|f - \sum_{k=1}^{s} a_k \varphi_k\|^2 = \int_E f^2(x)dx - 2\sum_{k=1}^{s} a_k c_k + \sum_{k=1}^{s} a_k^2 =$$

$$= \int_E f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{s} c_k^2 + \sum_{k=1}^{s} (c_k - a_k)^2.$$

Отсюда ясно, что наименьшее значение левой части достигается в том случае, если $a_k = c_k,\ k = 1, \dots, s$, что и доказывает теорему. **QED**

Обозначим $S_s(x) = \sum_{k=1}^{s} c_k \varphi_k(x)$ — s—ю частичную сумму ряда Фурье функции f по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда, как видно из доказательства теоремы Грамма, справедливо равенство

$$\|f - S_s\|^2 = \int_E f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{s} c_k^2,\ s = 1, 2, \dots$$

Это равенство называют *тождеством Бесселя.*

Поскольку левая часть тождества Бесселя, очевидно, неотрицательна, то отсюда получаем неравенство

$$\sum_{k=1}^{s} c_k^2 \leq \int_E f^2(x)dx,\ s = 1, 2, \dots$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $s \to \infty$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \int_E f^2(x)dx.$$

Это неравенство называется *неравенством Бесселя.* Если для некоторой функции $f \in L^2(E)$ неравенство Бесселя обращается в равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \int_E f^2(x)dx,$$

то это равенство называют *равенством Парсеваля.*

Из тождества Бесселя сразу следует, что равенство Парсеваля необходимо и достаточно для того, чтобы ряд Фурье функции f сходился в среднем на множестве E к этой функции f.

Определение. Ортонормированная на множестве E система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *замкнутой*, если для любой функции $f \in L^2(E)$ выполнено равенство Парсеваля. Как следует из вышесказанного, это условие равносильно тому, что для любой функции $f \in L^2(E)$ ее ряд Фурье сходится к f на E в среднем.

Пусть задана ортонормированная на множестве E система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда, в силу неравенства Бесселя, для любой функции $f \in L^2(E)$ ряд из квадратов ее коэффициентов Фурье по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится. Рассмотрим обратную задачу. Пусть числа c_k такие, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$. Можно ли подобрать функцию $f \in L^2(E)$ так, чтобы числа c_k были ее коэффициентами Фурье?

Положительный ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема Рисса-Фишера (о коэффициентах Фурье). Пусть на множестве E задана ортонормированная система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда для любой последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ действительных чисел, таких, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится, найдется функция $f \in L^2(E)$ такая, что числа c_k являются коэффициентами Фурье функции f по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, т.е. $c_k = \int_E f(x)\varphi_k(x)dx$, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$ сходится к функции f на множестве E в среднем.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ и покажем, что последовательность его частичных сумм $S_k(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i\varphi_i(x)$ фундаментальна. Действительно, для $k > m$, в силу ортонормированности, имеем

$$\|S_k - S_m\|^2 = \|\sum_{i=m+1}^{k} c_i\varphi_i\|^2 = \int_E \left(\sum_{i=m+1}^{k} c_i\varphi_i(x)\right)^2 dx =$$

$$= \int_E \left(\sum_{i=m+1}^{k} c_i^2\varphi_i^2(x) + \sum_{i,j=m+1, i\neq j}^{k} c_ic_j\varphi_i(x)\varphi_j(x)\right) dx = \sum_{i=m+1}^{k} c_i^2.$$

Отсюда и из условия сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$, в силу критерия Коши сходимости числового ряда, получаем, что последовательность $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна на множестве E. Применим к этой последовательности теорему Рисса-Фишера о полноте. В силу этой теоремы, найдется функция $f \in L^2(E)$ такая, что последовательность $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f в среднем на E. Другими словами, это означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$ сходится на E к функции f в среднем.

Осталось показать, что числа c_k являются коэффициентами Фурье функции f по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Зафиксируем натуральное s. Тогда, для $k \geq s$ получим

$$\int_E f(x)\varphi_s(x)dx = \int_E (f(x) - S_k(x))\varphi_s(x)dx + \int_E S_k(x)\varphi_s(x)dx.$$

Но, в силу ортонормированности системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\int_E S_k(x)\varphi_s(x)dx = \int_E \left(\sum_{i=1}^{k} c_i\varphi_i(x)\right)\varphi_s(x)dx = \sum_{i=1}^{k} c_i \int_E \varphi_i(x)\varphi_s(x)dx = c_s.$$

Поэтому

$$\int_E f(x)\varphi_s(x)dx = c_s + \int_E (f(x) - S_k(x))\varphi_s(x)dx,\ k \geq s. \tag{$*$}$$

Покажем, что интеграл справа в $(*)$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Действительно, в силу неравенства Шварца,

$$\left|\int_E (f(x) - S_k(x))\varphi_s(x)dx\right| \leq \|f - S_k\| \cdot \|\varphi_s\| = \|f - S_k\|.$$

Но поскольку $\|f - S_k\| \to 0$ $(k \to \infty)$, как было показано выше, то из $(*)$, устремляя $k \to \infty$, получаем $\int_E f(x)\varphi_s(x)dx = c_s$. Так как $s \in \mathrm{N}$ произвольно, то тем самым завершается доказательство теоремы. **QED**

Замечание. В силу единственности предела, функция f, определяемая при доказательстве теоремы Рисса-Фишера, задается однозначно с точностью до значений на множестве меры нуль. Однако, может быть такая ситуация, когда существует бесконечно много функций, имеющих одинаковые коэффициенты Фурье $c_k,\ k = 1, 2, \ldots$ Действительно, предположим, что существует неэквивалентная нулю на множестве E функция h, ортогональная ко всем функциям $\varphi_k,\ k = 1, 2, \ldots$ Поскольку $c_k = \int_E f(x)\varphi_k(x)dx$, то для функции $g = f + h$ будем иметь

$$\int_E g(x)\varphi_k(x)dx = \int (f(x) + h(x))\varphi_k(x)dx =$$

$$= \int_E f(x)\varphi_k(x)dx + \int_E h(x)\varphi_k(x)dx = c_k,$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$, т.е. числа c_k являются также и коэффициентами Фурье функции g по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

В связи с этим дадим следующее

Определение. Ортонормированная на множестве E система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *полной*, если не существует неэквивалентной нулю на E функции, ортогональной ко всем функциям $\varphi_k,\ k = 1, 2, \ldots$, этой системы.

Из предыдущего замечания следует, что если система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ не является полной, то существует сколь угодно много функций, имеющих одинаковые коэффициенты Фурье по этой системе. Одна из таких функций определяеся теоремой Рисса-Фишера. Поэтому, если такая функция единственная, то система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является полной. Справедливо также и обратное утверждение. Именно, если система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна, то функция, определяемая в теореме Рисса-Фишера, единственна. Действительно, если две функции f и g имеют одинаковые коэффициенты Фурье по этой системе, т.е. если

$$\int_E f(x)\varphi_k(x)dx = \int_E g(x)\varphi_k(x)dx,\ k = 1, 2, \ldots,$$

то их разность $f-g$, будучи ортогональной ко всем функциям $\varphi_k,\ k=1,2,\dots$, должна равняться нулю почти всюду на E, т.е. $f(x)=g(x)$ для почти всех $x\in E$.

Итак, мы доказали, что полнота системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ необходима и достаточна для того, чтобы функция, имеющая коэффициентами Фурье заданные числа $c_k,\ k=1,2,\dots$, была единственной.

Следующая теорема показывает, что понятие полноты и замкнутости эквивалентны.

Теорема. Для того, чтобы ортонормированная система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ была полна, необходимо и достаточно, чтобы она была замкнута.

Доказательство. Пусть система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута. Это означает, что для любой функции $f\in L^2(E)$ справедливо равенство Парсеваля. Если какая-нибудь функция $f\in L^2(E)$ ортогональна ко всем функциям $\varphi_k,\ k=1,2,\dots$, то все ее коэффициенты Фурье $c_k,\ k=1,2,\dots$, по этой системе равны нулю. Тогда, в силу равенства Парсеваля, $\|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=0$, так что функция f эквивалентна нулю на E. Это означает, что система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна.

Обратно, предположим, что система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна. Предположим, что для какой-нибудь функции $g\in L^2(E)$ не выполнено равенство Парсеваля. Это означает, что $\|g\|^2>\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2$, где $c_k=\int_E g(x)\varphi_k(x)dx$ – коэффициенты Фурье функции g по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пользуясь теоремой Рисса-Фишера, построим функцию f такую, что $\int_E f(x)\varphi_k(x)dx=c_k,\ k=1,2,\dots$, и ее ряд Фурье сходится к ней в среднем на E. Последнее означает, что $\|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2$. Но тогда из равенства $\int_E f(x)\varphi_k(x)dx=\int_E g(x)\varphi_k(x)dx,\ k=1,2,\dots$, следует, что разность $f-g$ ортогональна ко всем функциям $\varphi_k,\ k=1,2,\dots$ В силу полноты системы это означает, что функция $f-g$ эквивалентна нулю на E, или, что то же самое, функции f и g эквивалентны на E. Но это противоречит тому, что

$$\|g\|^2>\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\|f\|^2.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА.

1. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1972.

2. И.П.Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., Наука. 1974.

3. Теорія міри та інтеграла. Курс лекцій. Упор. – А.О.Кореновський. Одеса. АстроПринт. 1999.

4. С.А.Теляковский. Сборник задач по теории функций действительной переменной. М., Наука. 1980.

5. Ю.С.Очан. Сборник задач по математическому анализу. М., Просвещение. 1981.