

Міністерство освіти і науки України
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Інститут математики, економіки і механіки

О. Б. Васильєв, Н. С. Васильєва, О. Д. Кічмаренко

Методи розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації

Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи
для студентів IV курсу денної форми навчання
напрямів підготовки 6.040301 Прикладна математика
та 6.040201 Математика

Одеса
2017

УДК 519.816

ББК 22.18

Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради

ІМЕМ ОНУ імені І. І. Мечникова (протокол №5 від 19.04.2017).

Васильєв О. Б., Васильєва Н. С., Кічмаренко О. Д.

Методи розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації: методичні вказівки та завдання до самостійної роботи для студентів IV курсу денної форми навчання напрямів підготовки 6.040301 Прикладна математика та 6.040201 Математика / О. Б. Васильєв, Н. С. Васильєва, О. Д. Кічмаренко. — Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2017. — 48 с.

Рецензенти:

Страхов Є. М., кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри оптимального керування і економічної кібернетики ОНУ імені І. І. Мечникова;

Вербіцький В. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри обчислювальної математики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

© Васильєв О. Б., Васильєва Н. С.,
Кічмаренко О. Д., 2017

© ОНУ імені І. І. Мечникова, 2017

Зміст

Вступ	5
1 Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації і класифікація методів її розв'язування	6
1.1 Математична модель задачі багатокритеріальної оптимізації	6
1.2 Ефективні (парето-оптимальні) розв'язки задачі багатокритеріальної оптимізації	7
1.3 Способи нормалізації часткових критеріїв	12
1.4 Класифікація методів багатокритеріальної оптимізації	13
2 Методи зведення багатокритеріальних задач оптимізації до однокритеріальних	14
2.1 Методи згортання часткових критеріїв	14
2.1.1 Метод адитивної згортки критеріїв	15
2.1.2 Метод мультиплікативної згортки критеріїв	16
2.1.3 Метод максимінної згортки критеріїв (гарантованого результату)	16
2.2 Метод головного часткового критерію (метод задоволених вимог)	17

2.3	Метод послідовних поступок	18
2.4	Метод цільового програмування (ідеальної точки)	23
3	Інтерактивні методи багатокритеріальної оптимізації	26
3.1	Метод послідовного вводу обмежень	26
3.2	Метод бажаної точки	30
3.3	Метод аналізу ієрархій (МАІ)	33
	Контрольні питання	44
	Завдання для самостійної роботи	46
	Література	49

Вступ

Практично будь-яка серйозна реальна задача характеризується більш ніж одним критерієм. При дослідженні складних систем і об'єктів використання математичних моделей, які призводять до постановок задач лише скалярної оптимізації, не є адекватним. Реальні потреби практики проектування і експлуатації складних систем потребують врахування і узгодження кількох різних цілей. Аналіз задач планування та управління на виробництві також показує, що у реальній постановці ці задачі є багатокритеріальними. Оцінка діяльності підприємств проводиться на основі більше десятка критеріїв: виконання плану виробництва за обсягом, за номенклатурою; плану реалізації продукції, прибутку і т. д. Таким чином, для ефективного розв'язування подібних задач необхідно побудувати багатокритеріальну математичну модель, яку потім потрібно оптимізувати, попередньо вибравши найкращий для цього метод (або кілька методів).

Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації і класифікація методів її розв'язування

1.1 Математична модель задачі багатокритеріальної оптимізації

Всюди далі будемо розглядати задачі прийняття рішень в умовах визначеності при числовій оцінці наслідків, тобто коли зв'язок між альтернативами та наслідками детермінований (кожній альтернативі відповідає лише один наслідок), і ціль ототожнюється з максимізацією чи мінімізацією деякої дійснозначної функції, яка називається частковим критерієм або цільовою функцією.

Будемо розглядати скінченновимірні задачі багатокритеріальної максимізації:

$$f(X) \rightarrow \max_{X \in D}, \quad (1)$$

де $D \in \mathbb{R}^n$ — допустима область. Елементи $X = (x_1, \dots, x_n)$ множини D називаються допустимими розв'язками або альтернативами, а $f(X) = (f_1(X), \dots, f_m(X))$ — вектор-функція часткових критеріїв $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}^1, i = \overline{1, m}$. У таких задачах допустима множина D найчастіше задається у вигляді нерівностей:

$$D = \{X \in \mathbb{R}^n \mid g_j(X) \leq b_j, \quad j = \overline{1, n}\}.$$

Першим, хто зробив постановку задачі багатокритеріальної оптимізації, був італійський економіст Вільфредо Парето. У 1904 р. математична модель цієї задачі з'явилася у його дослідженнях товарного обміну. В. Парето належить означення поняття ефективного розв'язку задач із кількома критеріями.

1.2 Ефективні (парето-оптимальні) розв'язки задачі багатокритеріальної оптимізації

Цілі особи, що приймає рішення (ОПР), які виражені у вигляді часткових критеріїв (цільових функцій) $f_i, i = \overline{1, m}$, можуть знаходитися одна відносно другої у наступних відношеннях [4]:

1. Цілі взаємно нейтральні. У цьому випадку система або процес можуть розглядатися відносно окремих цілей незалежно.
2. Цілі кооперуються. Систему або процес можна розглядати відносно тільки однієї цілі, всі інші досягаються одночасно.
3. Цілі конкурують. У цьому випадку можна досягти однієї цілі лише за рахунок іншої.

Принциповим є тільки третій випадок. Дійсно, існування розв'язку, що максимізує одночасно декілька цільових функцій, є рідкісним винятком. Тому з традиційної математичної точки зору задачі багатокритеріальної оптимізації є некоректними: якщо один з часткових критеріїв $f_i, i \in \overline{1, m}$, досяг свого максимуму, то поліпшення за іншими компонентами векторного критерію у більшості випадків неможливо.

Наприклад, при знаходженні плану підприємства, що максимізує прибуток і мінімізує витрати, очевидна неможливість досягнення обох цілей одночасно, тому що для більшого прибутку повинно бути більше продукції, а тоді і більше витрат.

Часткові критерії ефективності у цьому випадку називаються суперечливими.

Отже, якщо часткові критерії f_1, f_2, \dots, f_m досягають максимуму в одній і тій же точці $X^* \in D$, то говорять, що задача

(1) є тривіальною і має ідеальний розв'язок. Випадки існування ідеального розв'язку вкрай рідкі. Тому основна проблема при розгляді задачі (1) — розробка концепції оптимальності, тобто визначення того, у якому сенсі «оптимальний» розв'язок кращий за інших. У випадку відсутності ідеального розв'язку у задачі (1) шукається компромісний.

Для фіксованої альтернативи $X \in D$ вектор зі значень часткових критеріїв $f(X) = (f_1(X), \dots, f_m(X))$ є векторною оцінкою альтернативи X . Векторна оцінка альтернативи містить повну інформацію про цінність (корисність) цієї альтернативи для особи, що приймає рішення (ОПР). Порівняння будь-яких двох розв'язків замінюється порівнянням їх векторних оцінок.

Означення 1. *Нехай $X_1, X_2 \in D$. Якщо для всіх часткових критеріїв мають місце нерівності*

$$f_i(X_2) \geq f_i(X_1), \quad i = \overline{1, m},$$

причому хоча б одна нерівність строга, то говорять, що розв'язок X_2 переважніший розв'язку X_1 , та зазначають у вигляді $X_2 \succ X_1$.

Означення 2. *У задачі (1) точка $X_0 \in D$ називається ефективною (оптимальною за Парето), якщо не існує іншої точки $X \in D$, яка була б переважніша, ніж X_0 .*

Точки, оптимальні за Парето, утворюють множину парето-оптимальних точок (множину ефективних або непокрощувальних розв'язків задачі (1)) $D_p \subset D$. Оптимальні розв'язки багатокритеріальної задачі (1) варто шукати тільки серед елементів множини D_p . У цій множині жоден (частковий) критерій не може бути покращений без погіршення хоча б одного з інших. Корисною властивістю множини D_p ефективних точок є можливість відкидати із множини альтернатив D свідомо невдалі (що поступаються іншим допустимим альтернативам за всіма критеріями). Розв'язання кожної багатокритеріальної задачі виду (1) повинно починатися з виділення множини D_p . При відсутності додаткової

інформації про систему переваг ОПП повинна вибирати розв'язок задачі (1) саме із множини D_p парето-оптимальних точок. У загальному випадку розв'язання багатокритеріальної задачі складається з побудови множини точок, оптимальних за Парето, і подальшого вибору однієї з них за допомогою якого-небудь додаткового критерію.

Зауважимо, що часткові критерії f_i , $i = \overline{1, m}$, відображають допустиму множину $D \subset \mathbb{R}^n$ у множину $F \subset \mathbb{R}^m$, яка називається множиною досяжності у критеріальному просторі, а множину $D_p \subset D$ парето-оптимальних точок — у множину $F_p \subset F$, що називається множиною Парето.

Приклад 1. [3] Нехай математична модель задачі БО із двома критеріями має вигляд:

$$\begin{aligned} f_1 &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ f_2 &= 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \end{aligned}$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити множину точок, оптимальних за Парето.

Допустима область D являє собою чверть кола радіусу 10 із центром у початку координат, розташовану в 1-му квадранті (рис. 1).

Знайдемо точки, оптимальні за критеріями f_1 і f_2 окремо. Для цього побудуємо вектори, що мають напрямки векторів $p_1(2; 1)$ й $p_2(2; 3)$, і перпендикулярно їм — лінії рівня. За лініями рівня визначаються оптимальні точки A і B , розміщені на колі.

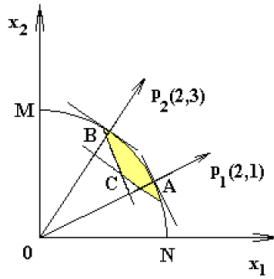


Рис. 1. Множина парето-оптимальних точок

Перевіримо довільну точку $C \in D$ на парето-оптимальність. Через неї проведемо лінії рівня цільових функцій і розглянемо конус, утворений перетином напівплощин, обмежених цими лініями, що лежать у напрямку збільшення відповідних цільових функцій (конус домінування для альтернативи C). На рис. 1 цей конус зафарбований. Очевидно, що точку C можна поліпшити за обома критеріями, і тому вона не є ефективною. Множина ефективних точок D_p (точок, оптимальних за Парето) розташована на дузі кола AB . Таким чином, ефективні точки лежать тільки між точками оптимуму, отриманими при розв'язанні багатокри-теріальної задачі окремо за кожним із критеріїв.

Знайдемо координати точки A . Нормальний вектор кола має координати $\bar{n}_1 = (2x_1; 2x_2)$, а лінії рівня 1-ої цільової функції — $\bar{n}_2 = (2; 1)$. З умови колінеарності векторів слідує пропорційність координат: $\frac{2x_1}{2} = \frac{2x_2}{1}$. Таким чином, координати точки A задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2, \\ x_1^2 + x_2^2 = 100. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримуємо точку $A(4\sqrt{5}; 2\sqrt{5})$. Аналогічно знайдемо, що точка B має координати $\left(\frac{20}{\sqrt{13}}; \frac{30}{\sqrt{13}}\right)$.

Приклад 2. [3] Для задачі, сформульованої у прикладі 1, визна-

чити множину досяжності і множину Парето.

Розглянемо, що відбувається у просторі критеріїв при відображенні альтернатив вектором цільових функцій.

Складемо табл. 1 з характерних точок допустимої області і відповідних їм образів у просторі критеріїв.

Таблиця 1

Точка в області D	x_1	x_2	Образ точки у множині F	$f_1 = 2x_1 + x_2$	$f_2 = 2x_1 + 3x_2$
O	0	0	O'	0	0
M	0	10	M'	10	30
N	10	0	N'	20	20
A	$4\sqrt{5} \approx 8.9$	$2\sqrt{5} \approx 4.5$	A'	$10\sqrt{5} \approx 22.4$	$14\sqrt{5} \approx 31.3$
B	$\frac{20}{\sqrt{13}} \approx 5.5$	$\frac{30}{\sqrt{13}} \approx 8.3$	B'	$\frac{70}{\sqrt{13}} \approx 19.4$	$\frac{130}{\sqrt{13}} \approx 36.1$

Для двох заданих критеріїв на рис. 2 представлено множину досяжності $F \subset \mathbb{R}^2$ і множину Парето $F_p \subset F$, що є образом множини D_p оптимальних за Парето точок. Ці множини отримані на основі даних табл. 1.

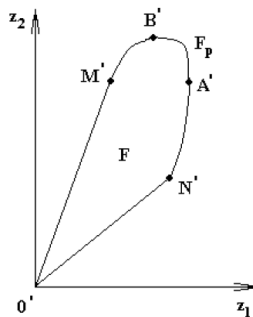


Рис. 2. Множина досяжності та множина Парето

Множина F_p на рис. 2 являє собою дугу $A'B'$. Для двох критеріїв ця множина утворює «північно-східну» границю множини досяжності.

Таким чином, розв'язком задачі МБО є множина D_p точок, оптимальних за Парето. Остаточний вибір одного розв'язку завжди залишається за ОПР.

1.3 Способи нормалізації часткових критеріїв

У реальних задачах масштаби виміру критеріїв часто неоднакові, а більшість використовуваних моделей чутливі до цього факту і мають сенс тільки у нормалізованому критеріальному просторі. Тому виникає необхідність виконувати нормалізацію критеріїв, тобто штучно зводити їх до єдиної міри. Надалі будемо вважати, що всі часткові критерії невід'ємні, тобто $f_i(X) \geq 0$ для всіх $i = \overline{1, m}$, $X \in D$.

Найбільш часто використовується така заміна критеріїв їх безрозмірними відносними величинами [4]:

$$\lambda_i(X) = \frac{f_i^{\max} - f_i(X)}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

де

$$f_i^{\max} = \max_{X \in D} f_i(X), \quad f_i^{\min} = \min_{X \in D} f_i(X), \quad i = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Досить часто не вдається знайти f_i^{\min} або f_i^{\max} . Якщо не вдається визначити f_i^{\min} , то нормалізують критерій f_i наступним чином:

$$\lambda_i(X) = \frac{f_i^{\max} - f_i(X)}{f_i^{\max}}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

або

$$\lambda_i(X) = \frac{f_i(X)}{f_i^{\max}}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Якщо не вдається знайти f_i^{\max} , то:

$$\lambda_i(X) = \frac{f_i(X)}{f_i^{\min}}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (6)$$

У разі неможливості знайти обидва екстремальні значення задовільний результат дає така нормалізація:

$$\lambda_i(X) = \frac{f_i(X)}{f_i^0}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (7)$$

де f_i^0 — якесь прийнятне значення часткового критерію f_i , $i =$

$\overline{1, m}$, що береться у якості базового.

Перевагою способів нормалізації (2)–(5) є те, що нормалізовані таким чином часткові критерії задовольняють нерівності $0 \leq \lambda_i(X) \leq 1, i = \overline{1, m}$. Значення критеріїв, нормалізованих способами (6), (7) є також безрозмірними величинами, але вони у загальному випадку можуть бути довільними.

1.4 Класифікація методів багатокритеріальної оптимізації

Основні, найбільш поширені методи розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації представлені на рис. 3.

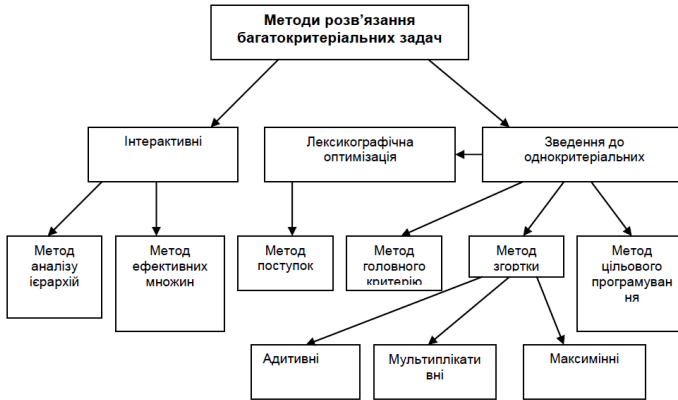


Рис. 3. Класифікація методів БО

Приведена на рис. 3 класифікація, як і усі інші, має досить умовний характер. Наприклад, у так званих інтерактивних методах також використовується згортання векторного критерію у скалярний: у методі бажаної точки використовується максимінна згортка, а у методі послідовного вводу обмежень — адитивна. Таким чином, інтерактивні методи відрізняються від звичайних тільки способом взаємодії з комп'ютером: вони застосовуються у режимі діалогу.

Методи зведення багатокритеріальних задач оптимізації до однокритеріальних

Усі методи розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації засновані на зведенні початкової задачі (1) з векторним критерієм до оптимізаційної задачі із скалярним критерієм. Між собою методи відрізняються тільки механізмом реалізації такого зведення. Розглянемо найбільш поширені з них: згортання часткових критеріїв, головного часткового критерію, послідовних поступок, цільового програмування.

2.1 Методи згортання часткових критеріїв

Замість часткових критеріїв f_1, f_2, \dots, f_m розглядається один скалярний критерій, отриманий шляхом їх комбінації. Розрізняють адитивну, мультиплікативну та максимінну згортки.

Будемо вважати, що усі часткові критерії нормалізовані одним із способів (2)-(7). Окрім цього, нехай визначений вектор вагових коефіцієнтів критеріїв $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, які характеризують важливість відповідного критерію: $a_i \geq a_j$, якщо частковий критерій f_i має пріоритет над частковим критерієм f_j , тобто $f_i \succ f_j$. При цьому $\sum_{i=1}^m a_i = 1$, $a_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$.

2.1.1 Метод адитивної згортки критеріїв

У цьому методі узагальнений скалярний критерій будується за правилом

$$Z(X) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot f_i(X). \quad (8)$$

Після цього розв'язується задача оптимізації критерію (8):

$$Z(X) \rightarrow \max_{X \in D}. \quad (9)$$

Головною перевагою адитивної згортки (8) є те, що для неї сформульовані й доведені необхідні та достатні умови оптимальності за Парето site1. Але часто отриманий цим методом розв'язок є нестійким: малим змінам вагових коефіцієнтів a_i відповідають великі зміни критерію.

Приклад 3. [1] Розглянемо задачу БО із двома критеріями

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 \rightarrow \max, \\ f_2 &= x_2 \rightarrow \max \end{aligned}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо задачу оптимізації за кожним з критеріїв окремо. Використовуючи графічний метод (рис. 4а), одержимо оптимальний розв'язок за першим критерієм $X_1^* = (2; 0)$ та оптимальний розв'язок за другим критерієм $X_2 = (0; 1)$.

На рис. 4б зображена множина досяжності F і зазначені значення $f_1^{\max} = 2$ та $f_2^{\max} = 1$. Виконаємо згортку критеріїв:

$$z = a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X) = a_1 x_1 + a_2 x_2 \rightarrow \max,$$

де $a_1 + a_2 = 1$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$.

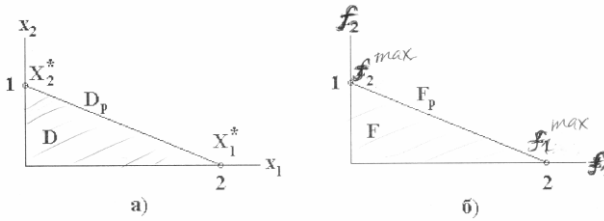


Рис. 4. Графічна інтерпретація розв'язання задачі оптимізації за двома локальними критеріями

Цільова функція є лінійною, тому залежно від a_1 та a_2 оптимальними будуть кутові точки допустимої області X_1^* або X_2^* , або всі точки відрізка $X_1^*X_2^*$. Якщо $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, то отримаємо оптимальний розв'язок $X^* = X_1^* = (2; 0)$.

2.1.2 Метод мультиплікативної згортки критеріїв

Для цього методу узагальнений скалярний критерій береться у формі добутку:

$$Z(X) = \prod_{i=1}^m f_i^{a_i}(X) \rightarrow \max_{X \in D}, \quad (10)$$

де $f_i(X) > 0$, $i = \overline{1, m}$, $X \in D$.

Поясненням мультиплікативного методу є уявлення про вагові коефіцієнти a_i як про ймовірності досягнення деяких показників якості.

2.1.3 Метод максимінної згортки критеріїв (гарантованого результату)

Розглядаються методи гарантованого результату, які дають найкращий результат навіть для самого найменшого із часткових критеріїв, тобто компромісний розв'язок отримується шляхом розв'язання наступної задачі оптимізації:

$$Z(X) = \min_{i=\overline{1, m}} f_i(X) \rightarrow \max_{X \in D}. \quad (11)$$

Основний недолік методів згортання критеріїв полягає у суб'єктивності вибору вагових коефіцієнтів a_i , $i = \overline{1, m}$.

2.2 Метод головного часткового критерію (метод задоволених вимог)

Визначається головний на думку ОПР (чи експертів) частковий критерій. Наприклад, $f_j(X)$. Всі інші часткові критерії переводяться у розряд обмежень за наступним правилом. Відповідно до вимог ОПР на всі інші часткові критерії накладаються певні обмеження — призначаються мінімальні допустимі значення \tilde{f}_i для кожного критерію:

$$f_i(X) \geq \tilde{f}_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad i \neq j. \quad (12)$$

Після цього розв'язується задача однокритеріальної оптимізації

$$f_j(X) \rightarrow \max, \quad j \in \overline{1, m} \quad (13)$$

при умовах

$$\begin{cases} f_i(X) \geq \tilde{f}_i, & i = \overline{1, m}, \quad i \neq j, \\ X \in D. \end{cases} \quad (14)$$

Як результат розв'язування задачі (13), (14) визначається ефективна альтернатива X^* і її оцінка $y^* = (f_1(X^*), \dots, f_m(X^*))$. ОПР аналізує отримане значення y_j^* головного часткового критерію f_j . Якщо це значення не задовольняє її, то ОПР намагається збільшити значення головного критерію за рахунок змін мінімально допустимих рівнів інших критеріїв. Якщо значення головного критерію задовольняє ОПР, то вона розмірковує — можливо чи ні деяке погіршення значення головного критерію з метою покращення значень інших. Якщо ні, то процедура закінчується. У протилежному випадку можна зробити спробу призначити інший головний критерій.

Приклад 4. [1] Методом головного часткового критерію розв'я-

зати задачу із прикладу 3.

Нехай перший частковий критерій f_1 обраний у якості головного. Призначимо мінімальне допустиме значення критерію f_2 на рівні $\tilde{f}_2 = 0.4$. Тоді отримуємо наступну однокритеріальну задачу:

$$f_1(X) = x_1 \rightarrow \max$$

при умовах

$$\begin{cases} x_2 \geq 0.4; \\ x_1 + 2x_2 \leq 2; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, що оптимальним розв'язком є точка $X^* = (1.2; 0.4)$, а $\max f_1(X) = f_1(X^*) = 1.2$. Якщо це значення головного критерію f_1 задовольняє ОПР, то процедура методу закінчується. Якщо ні, то ОПР намагається його збільшити, замінюючи мінімальний рівень для часткового критерію f_2 . Якщо при цьому значення другого часткового критерію стає неприпустимо малим, то, можливо, треба замінити пріоритети критеріїв (якщо це не буде суперечити змісту задачі).

2.3 Метод послідовних поступок

Часткові критерії нумеруються у порядку спадання їх важливості для ОПР. Нехай критерії f_1, f_2, \dots, f_m вже записані у порядку зменшення їх пріоритету, тобто $f_1 \succ f_2 \succ \dots \succ f_m$.

Крок 1. Розв'язується задача оптимізації за першим частковим критерієм

$$f_1(X) \rightarrow \max_{X \in G_1}, \quad (15)$$

де множина $G_1 = D \subset \mathbb{R}^n$. Нехай X^1 — оптимальний розв'язок задачі (15). Позначимо через

$$y^1 = (f_1(X^1), \dots, f_m(X^1)) = (y_1^1, \dots, y_m^1)$$

відповідну оцінку значень часткових критеріїв.

Крок 2. ОПР аналізує отриману оцінку. У випадку, коли во-

на не задовольняє ОПР, призначається величина поступки Δf_1 за першим критерієм, на яку ОПР може погодитися з метою покращення значень інших, менш важливих критеріїв. Далі будується «уточнена» множина альтернатив $G_2 \subset G_1$:

$$G_2 = \{X \in G_1 : f_1(X) \geq y_1^1 - \Delta f_1\}, \quad (16)$$

на якій розв'язується задача оптимізації за другим частковим критерієм:

$$f_2(X) \rightarrow \max_{X \in G_2}. \quad (17)$$

Нехай X^2 — оптимальний розв'язок задачі (17), а $y^2 = (f_1(X^2), \dots, f_m(X^2)) = (y_1^2, \dots, y_m^2)$ — відповідна оцінка.

Крок 3. ОПР аналізує отриману оцінку і призначає величину поступки Δf_2 за другим критерієм. Будується «уточнена» множина альтернатив

$$G_3 = \{X \in G_2 : f_2(X) \geq y_2^2 - \Delta f_2\} \quad (18)$$

і розв'язується задача оптимізації за третім критерієм:

$$f_3(X) \rightarrow \max_{X \in G_3} \quad (19)$$

і т. д.

Крок m . Призначається поступка Δf_{m-1} за $(m-1)$ -м критерієм, будується множина

$$G_m = \{X \in G_{m-1} : f_{m-1}(X) \geq y_{m-1}^{m-1} - \Delta f_{m-1}\} \quad (20)$$

і розв'язується задача

$$f_m(X) \rightarrow \max_{X \in G_m}, \quad (21)$$

розв'язок якої позначимо X^m .

ОПР повинна чи погодитися з отриманою альтернативою X^m , чи повторно виконати процедуру, замінивши величини поступок

$\Delta f_i, i = \overline{1, m-1}$. У цьому випадку ОПР збагачується знанням про взаємозв'язок величин поступок за критеріями та значень менш важливих критеріїв.

Варто зазначити: якщо на перших кроках методу призначити занадто великі значення поступок, то ефективна альтернатива, отримана в кінці процедури, може мати вищі показники за менш важливими критеріями. І навпаки, якщо ОПР намагається отримати високі показники за більш важливими критеріями, то вона може отримати ефективну альтернативу із неприпустимо малими показниками за менш важливими критеріями. Звідси можна зробити висновок, що дуже важливо вірно впорядкувати часткові критерії. Тоді ОПР може обмежитись аналізом попарного зв'язку критеріїв.

Одним із серйозних недоліків методу є зростання обчислювальної складності однокритеріальних задач оптимізації з кількістю зроблених кроків, оскільки на кожному кроці додається нове обмеження. Але основний недолік методу полягає у суб'єктивності вибору прийнятних значень часткових критеріїв та величин поступок. При невдалому виборі величин поступок розв'язок задачі вже з другого кроку може стати не ефективним. Варто також пам'ятати, що поступки можуть бути непорівнянні між собою, тому треба попередньо нормалізувати часткові критерії.

Приклад 5. [1] Методом послідовних поступок розв'язати таку трикритеріальну задачу:

$$\begin{aligned} f_1(X) &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ f_2(X) &= x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ f_3(X) &= -x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ D: &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 0 \leq x_1, x_2 \leq 4. \end{cases} \end{aligned}$$

На рис. 5 зображено множину альтернатив D ; лінії рівнів першого, другого та третього критеріїв, відповідно (1), (2), (3); X' , X'' , X''' — найкращі, відповідно за першим, другим та третім

критеріями задачі, альтернативи.

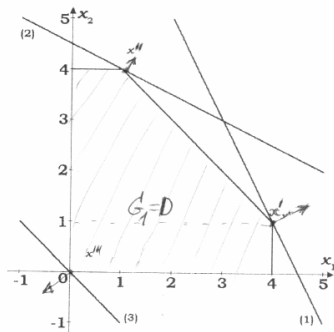


Рис. 5.

Будемо вважати, що критерії вже впорядковані за зменшенням їхньої важливості та знайдемо максимум першого критерію на множині альтернатив:

$$f_1(X) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max_{G_1},$$

$$G_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 0 \leq x_1, x_2 \leq 4. \end{cases}$$

Отримаємо ефективну альтернативу $X^1 = (4; 1)$, яка має оцінку $y^1 = (9; 6; -5)$. Припустимо, що отриманий результат не задовольняє ОПР. Тоді визначимо величину поступки Δf_1 , на яку можна погодитися, щоб покращити значення інших критеріїв. Нехай $\Delta f_1 = 1$, «уточнена» множина альтернатив: $G_2 = \{X : X \in G_1, f_1(X) \geq y_1^1 - \Delta f_1 = 8\}$.

На другому кроці максимізуємо другий критерій на уточненій множині альтернатив:

$$f_1(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max_{G_2},$$

$$G_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 0 \leq x_1, x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + x_2 \geq 8. \end{cases}$$

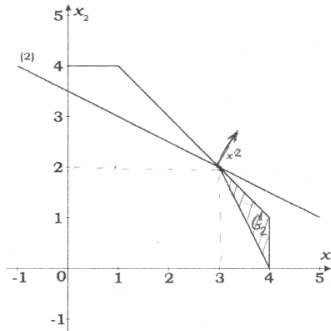


Рис. 6.

Із рис. 6 бачимо, що розв'язком задачі буде ефективна альтернатива $X^2 = (3; 2)$, яка має оцінку $y^2 = (8; 7; -5)$. Припустимо, що отриманий результат також не задовольняє ОНР. Тоді визначимо величину поступки Δf_2 , на яку можна погодитися, щоб покращити значення третього критерію. Нехай $\Delta f_2 = 1$, «уточнена» множина альтернатив $G_3 = \{X : X \in G_2, f_2(X) \geq y_2^2 - \Delta f_2 = 6\}$.

Тепер (крок 3) на цій множині максимізуємо третій критерій:

$$f_3(X) = -x_1 - x_2 \rightarrow \max_{G_3},$$

$$G_3 : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 0 \leq x_1, x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6. \end{cases}$$

Звідси (це можна побачити на рис. 7) знаходимо ефективну альтернативу $X^3 = \left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$, яка має оцінку $y^3 = \left(8; 6; -\frac{14}{3}\right)$.

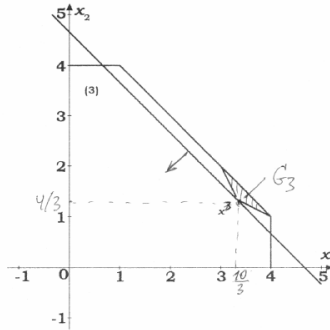


Рис. 7.

Якщо ОПР не влаштовують отримані результати, вона повертається на відповідний крок, де було зроблено (на думку ОПР) невірну поступку. В іншому випадку процедура закінчується.

2.4 Метод цільового програмування (ідеальної точки)

Назва методу пов'язана з тим, що при його реалізації ОПР задає певні цільові значення $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m$ для кожного часткового критерію. Даний метод у загальному випадку не потребує інформації про перевагу на множині критеріїв. Задача багатокритеріальної оптимізації перетворюється на задачу мінімізації суми відхилень від цільових значень із деяким показником $p \geq 1$:

$$Z(X) = \left(\sum_{i=1}^m w_i |f_i(X) - \bar{f}_i|^p \right)^{1/p} \rightarrow \min_{X \in D}, \quad (22)$$

де $w_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$ — деякі вагові коефіцієнти. Якщо часткові критерії вважаються рівноцінними, то $w_i = 1$, $i = \overline{1, m}$.

У межах методу робиться припущення про наявність так званої «ідеальної точки» $f^{\max} = (f_1^{\max}, \dots, f_m^{\max})$ у просторі критеріїв, де $f_i^{\max} = \max_{X \in D} f_i(X)$, $i = \overline{1, m}$. Тоді при $p = 2$ і $w_i = 1$, $i = \overline{1, m}$

із (22) одержимо задачу мінімізації семи квадратів відхилень:

$$Z(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^m |f_i(X) - f_i^{\max}|^2} \rightarrow \min_{X \in D}, \quad (23)$$

у якій мінімізується евклідова відстань від множини досяжності F до «ідеальної точки» f^{\max} («абсолютного максимуму»). Таким чином, у цьому методі правило вибору компромісу полягає у знаходженні альтернативи, оцінка якої є найближчою до «ідеальної точки» у деякій метриці.

Ускладнення, обумовленні різномасштабністю величин $|f_i(X) - f_i^{\max}|$, можна усунути за допомогою нормалізації критеріїв:

$$Z(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{|f_i(x) - f_i^{\max}|}{f_i^{\max}} \right)^2} \rightarrow \min_{X \in D}. \quad (24)$$

Приклад 6. [1] Методом цільового програмування розв'язати задачу із прикладу 3:

$$\begin{aligned} f_1(X) &= x_1 \rightarrow \max_{X \in D}, \\ f_2(X) &= x_2 \rightarrow \max_{X \in D}, \\ D &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}. \end{aligned}$$

В умовах прикладу 3 маємо $f_1^{\max} = 2$, $f_2^{\max} = 1$, тому задача (24) прийме вигляд:

$$Z(X) = \sqrt{\frac{(x_1 - 2)^2}{4} + \frac{(x_2 - 1)^2}{1}} \rightarrow \min_{X \in D}$$

при умовах

$$D : \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

При постійному значенні Z лінії рівня цільової функції

$$\frac{(x_1 - 2)^2}{(2Z)^2} + \frac{(x_2 - 1)^2}{Z^2} = 1$$

являтимуть собою еліпси із центром у точці $M(2; 1)$ та півосями $a = 2Z$ й $b = Z$. Необхідно знайти мінімальне значення Z , для якого відповідний еліпс буде мати спільні точки з областю D . На рис. 8 показано графічний розв'язок даної задачі.

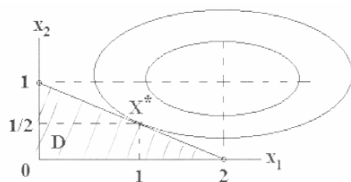


Рис. 8.

Оптимальною є точка $X^* = \left(1; \frac{1}{2}\right)$, у якій еліпс дотикається межі області D .

Інтерактивні методи багатокритеріальної оптимізації

Часто для визначення найкращого рішення ОПР доводиться розв'язувати задачі структурної та параметричної оптимізації. При цьому модель прийняття рішень описується як задача багатокритеріальної оптимізації. У даний час набули поширення інтерактивні методи розв'язування задач векторної оптимізації, у яких уточнення узагальнених критеріїв та упорядкування часткових критеріїв за важливістю виробляється на основі діалогу з ЕОМ. При цьому користувач може змінити процес розв'язування задачі на будь-якому етапі. Основною проблемою тут є розробка ефективних пакетів прикладних програм, сценаріїв діалогу, евристичних і точних алгоритмів розв'язування задач.

Найбільш поширеними на практиці є такі інтерактивні методи: послідовного вводу обмежень, бажаної точки та аналізу ієрархій. Стисло розглянемо алгоритми цих методів.

3.1 Метод послідовного вводу обмежень

Характерною особливістю цієї діалогової процедури є послідовне (на кожному кроці) введення обмежень на альтернативи, які мають незадовільні, із погляду ОПР, значення критеріїв.

k -й крок ($k = 1, 2, \dots$). Обчислюються оптимальні значення кожного критерію окремо на «уточненій» множині альтернатив:

$$f_i^{*(k)} = \max_{x \in G_k} f_i(x), \quad i = \overline{1, m}; \quad G_1 \equiv D \quad (25)$$

і формується вектор «ідеальної» оцінки на уточненій множині альтернатив: $f^{*(k)} = (f_1^{*(k)}, \dots, f_m^{*(k)})$. Далі визначаються вагові коефіцієнти критеріїв $\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_m^{(k)}$ так. Складається матриця $\sigma^{(k)} = (\sigma_{ij}^{(k)})_{i,j=\overline{1,m}}$ переваг ОПР на множині критеріїв, кожна пара симетричних елементів якої $(\sigma_{ij}^{(k)}, \sigma_{ji}^{(k)})$ характеризує відносну важливість i -го критерію порівняно з j -м. Значення кожної пари елементів цієї матриці вибирається так: $(8, 1)$ — при явній перевазі i -го критерію над j -м; $(4, 1)$ — при значній перевазі; $(2, 1)$ — при «звичайній» перевазі; $(1, 1)$ — при рівноцінності критеріїв. Тепер розраховуються вагові коефіцієнти критеріїв за такою формулою:

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{\sum_{s=1}^m \sigma_{is}}{\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \sigma_{rs}}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Унаслідок розв'язку задачі $\max_{X \in G_k} \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(k)} f_i(X)$ визначається альтернатива X^k і її оцінка $y^k = (f_1(X^k), \dots, f_m(X^k))$.

ОПР аналізує отриману альтернативу й оцінку y^k шляхом її зіставлення з «ідеальною» оцінкою $f^{*(k)}$. Якщо оцінка y^k задовольняє ОПР, то процедура закінчується, а альтернатива X^k приймається за розв'язок вихідної задачі. Інакше, вказується номер $s \in \{1, \dots, m\}$ критерію, значення якого найменш, на думку ОПР, його задовольняє; визначається, до якого рівня ξ_s потрібно покращити значення цього критерію, формується нова «уточнена» множина альтернатив $G_{k+1} = \{X \in G_k : f_s(X) \geq \xi_s\}$ і здійснюється перехід на наступний крок.

Приклад 7. [1] Методом послідовного вводу обмежень розв'язати таку двокритеріальну задачу:

$$f_1(X) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max_{X \in D}, \quad f_2(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max_{X \in D},$$

де $D = \left\{ X : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4, x_{1,2} \geq 0 \right\}$.

На рис. 9 зображено множину альтернатив D ; лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1) і (2);

$X' = (4\sqrt{5}/5 + 1; 2\sqrt{5}/5 + 1)$, $X'' = (2\sqrt{5}/5 + 1; 4\sqrt{5}/5 + 1)$ — найкращі, відповідно за першим і другим критерієм задачі, альтернативи.

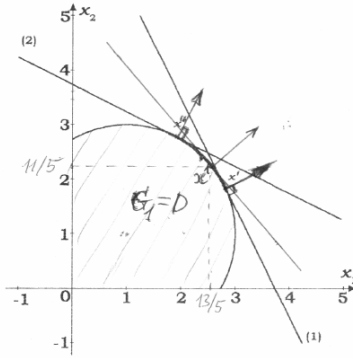


Рис. 9.

Крок 1. Обчислюємо оптимальні значення кожного критерію окремо на всій множині альтернатив і отримуємо вектор «ідеальної» оцінки $f^{*(1)} = (7.5; 7.5)$. Нехай перший критерій значно переважає другий. Тоді матриця переваг критеріїв буде мати такий вигляд: $\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Обчислюємо вагові коефіцієнти критеріїв

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{1+4}{4+1+1+1} = \frac{5}{7}, \quad \alpha_2^{(1)} = \frac{1+1}{4+1+1+1} = \frac{2}{7}.$$

Із задачі

$$\begin{aligned} Z(X) &= \alpha_1^{(1)} f_1(X) + \alpha_2^{(1)} f_2(X) = \\ &= \frac{5}{7} (2x_1 + x_2) + \frac{2}{7} (x_1 + 2x_2) = \frac{3}{7} (4x_1 + 3x_2) \rightarrow \max_{G_1}, \end{aligned}$$

де $G_1 = D = \{X : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4, x_{1,2} \geq 0\}$, визначимо ефективну альтернативу $X^1 = (13/5; 11/5)$ та її оцінку $y^1 = (7.4; 7)$. Нехай ми вирішили, що внаслідок порівняння отриманої

оцінки і «ідеальної» оцінки $f^{*(1)} = (7.5; 7.5)$ другий критерій на-
буде неприпустимо малого значення. Встановимо мінімальний
рівень цього критерію $\xi_2 = 7.2$, отримаємо «уточнену» множину
альтернатив $G_2 = \{X \in G_1 : x_1 + 2x_2 \geq 7.2\}$.

Крок 2. На рис. 10 зображено множину G_2 .

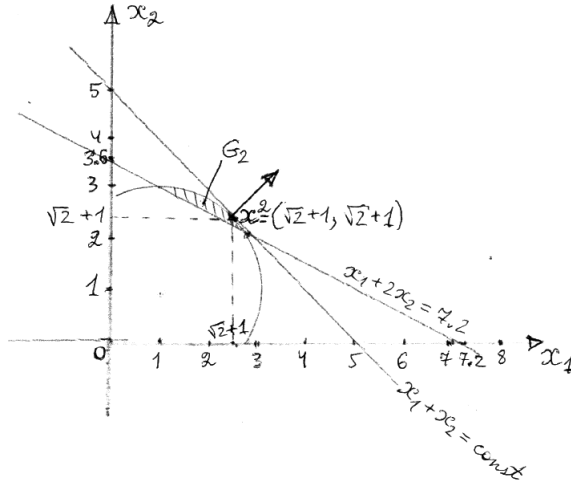


Рис. 10.

Обчислюємо оптимальні значення кожного критерію окремо
на «уточненій» множині альтернатив і отримуємо вектор «іде-
альної» оцінки $f^{*(2)} \approx (7.28; 7.5)$. Нехай тепер критерії рівноцінні
для ОПР. Тоді матриця переваг критеріїв матиме такий вигляд:

$\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Обчислюємо вагові коефіцієнти критеріїв

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{1+1}{1+1+1+1} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2^{(2)} = \frac{1+1}{1+1+1+1} = \frac{1}{2}.$$

Розв'язавши задачу

$$\begin{aligned} Z(X) &= \alpha_1^{(2)} f_1(X) + \alpha_2^{(2)} f_2(X) = \\ &= \frac{1}{2} (2x_1 + x_2) + \frac{1}{2} (x_1 + 2x_2) = \frac{3}{2} (x_1 + x_2) \rightarrow \max_{G_2}, \end{aligned}$$

де $G_2 = \{X : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4, x_1 + 2x_2 \geq 7.2, x_{1,2} \geq 0\}$, визначимо ефективну альтернативу $X^2 = (\sqrt{2} + 1; \sqrt{2} + 1)$ і її оцінку $y^2 = (3\sqrt{2} + 3; 3\sqrt{2} + 3) \approx (7.24; 7.24)$ (на рис. 10 зображено: (1) — лінія рівня цільової функції задачі, X^2 — розв'язок задачі). Якщо отримана ефективна альтернатива та її оцінка задовольняють ОПР, то процедура закінчується. У протилежному випадку — перехід на наступний крок.

У цьому методі можуть використовуватися й інші способи виявлення переваг $\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_m^{(k)}$ на множині критеріїв. Наприклад, нехай X^{il} — альтернатива, яка максимізує l -й критерій на множині G_i ; $f_i^{*(k)}, f_i^{\min(k)}$ — відповідно найкраще та найгірше значення i -го критерію на цій множині. Далі, для $i = \overline{1, m}$ обчислюються величини: чи $\delta_i^{(k)} = \max_{l=\overline{1, m}} \frac{f_i^{*(k)} - f_i(X^{il})}{f_i^{*(k)} - f_i^{\min(k)}}$, чи $\delta_i^{(k)} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \frac{f_i^{*(k)} - f_i(X^{il})}{f_i^{*(k)} - f_i^{\min(k)}}$, відповідно чи максимальне, чи середнє відносне відхилення від найкращого значення i -го критерію на альтернативах, що максимізують інші критерії. Вагові коефіцієнти критеріїв визначаються за формулою:

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{\delta_i^{(k)}}{\sum_{j=1}^m \delta_j^{(k)}}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (26)$$

Метод використовує два типи інформації від ОПР: інформацію про відносну важливість критеріїв та інформацію про діапазони значень критеріїв.

3.2 Метод бажаної точки

Особливістю цієї діалогової процедури є необхідність задання ОПР бажаних значень критеріїв для визначення переваги на множині критеріїв.

0-й крок. Розраховуються «найкращі» і «найгірші» значення критеріїв: $f_i^* = \max_{X \in D} f_i(X)$, $h_i^* = \min_{X \in D} f_i(X)$, $i = \overline{1, m}$, здійснюється

монотонне перетворення критеріїв до нормованого безрозмірного вигляду:

$$\omega_i(X) = \frac{f_i^* - f_i(X)}{f_i^* - h_i^*}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (27)$$

k -й крок ($k = 1, 2, \dots$). ОПР аналізує отриманий на попередньому кроці розв'язок і його оцінку порівняно з «найкращими» і «найгіршими» значеннями критеріїв і вказує бажані значення критеріїв $\xi_i^k \in [h_i^*; f_i^*]$, $i = \overline{1, m}$.

Здійснюється перетворення бажаних значень цільових функцій до нормованого безрозмірного вигляду:

$$\omega_i^k = \frac{f_i^* - \xi_i^k}{f_i^* - h_i^*}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (28)$$

Обчислюються вагові коефіцієнти критеріїв:

$$\rho_i^k = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^m \omega_j^k}{\sum_{j=1}^m \prod_{l=1, l \neq j}^m \omega_l^k}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (29)$$

Ефективна альтернатива X^k знаходиться як розв'язок одно-критеріальної задачі: $\max_{X \in D} \min_{i=1, m} \rho_i^k \omega_i(X)$

Обчислюється оцінка $y^k = (f_1(X^k), \dots, f_m(X^k))$. Якщо отримані значення цільових функцій задовольняють ОПР, то процедура закінчується, у протилежному випадку — переходимо на наступний крок. Цей метод використовує тільки один тип інформації від ОПР про бажані значення критеріїв.

Приклад 8. [1] Розв'язати методом бажаної точки таку задачу:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\rightarrow \max, & x_1 + 2x_2 &\rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 &\leq 5, & 0 &\leq x_{1,2} \leq 4. \end{aligned}$$

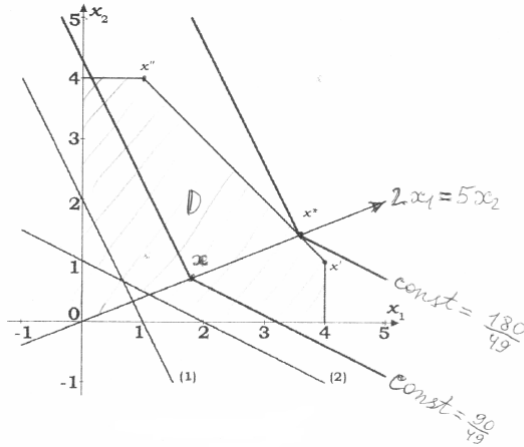


Рис. 11.

На рис. 11 зображено множину альтернатив D ; лінії рівнів першого та другого критеріїв, відповідно (1), (2); $X' = (4; 1)$, $X''(1; 4)$ — найкращі, відповідно за першим і другим критерієм задачі, альтернативи.

0-й крок. Обчислюємо «найкращі» і «найгірші» значення критеріїв: $f_1^* = 9$, $h_1^* = 0$, $f_2^* = 9$, $h_2^* = 0$.

Крок 1. ОПР вказує бажані значення критеріїв $\xi_i^1 \in [0; 9]$, $i = 1, 2$. Нехай, наприклад, $\xi_1^1 = 27/7$, $\xi_2^1 = 36/7$. Здійснюємо перетворення бажаних значень цільових функцій до нормованого безрозмірного вигляду: $\omega_1^1 = \frac{9 - \frac{27}{7}}{9} = \frac{4}{7}$, $\omega_2^1 = \frac{9 - \frac{36}{7}}{9} = \frac{3}{7}$.

Обчислюємо вагові коефіцієнти критеріїв:

$$\rho_1^1 = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{3}{7} + \frac{4}{7}} = \frac{3}{7}, \quad \rho_2^1 = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{7} + \frac{4}{7}} = \frac{4}{7}.$$

Ефективну альтернативу X^1 знаходимо як розв'язок задачі

$$\min \left\{ \frac{3}{7} (2x_1 + x_2), \frac{4}{7} (x_1 + 2x_2) \right\} \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 \leq 5, \quad 0 \leq x_{1,2} \leq 4.$$

На рис. 11 бачимо лінії рівнів $\frac{90}{49}$ і $\frac{180}{49}$ цієї функції, які утворюють кути, вершини яких X і X^* знаходяться на прямій $2x_1 = 5x_2$, що визначається умовою рівності аргументів функції

$$\min \left\{ \frac{3}{7} (2x_1 + x_2), \frac{4}{7} (x_1 + 2x_2) \right\},$$

а бокові сторони паралельні лініям рівня відповідних критеріїв початкової двокритеріальної задачі. Рівень $\frac{180}{49}$ буде максимальним значенням функції, а точка $X^{(1)} = X^* = \left(\frac{25}{7}; \frac{10}{7} \right)$ буде оптимальним розв'язком цієї задачі. Обчислюємо оцінку $y^1 = \left(\frac{60}{7}; \frac{45}{7} \right)$. Якщо отримані значення критеріїв задовольняють ОНР, то процедура закінчується, у протилежному випадку — переходимо на наступний крок.

3.3 Метод аналізу ієрархій (МАІ)

Цей метод розроблений американським математиком Томасом Сааті. МАІ дозволяє зрозумілим і раціональним чином структурувати складну проблему прийняття рішень у вигляді ієрархії, порівняти і виконати кількісну оцінку альтернативних варіантів рішення. МАІ не нав'язує ОНР будь якого «правильного рішення», а дозволяє їй в інтерактивному режимі знайти такий варіант (альтернативу), який найкращим чином узгоджується з його розумінням суті проблеми та вимогами до її вирішення.

Аналіз проблеми прийняття рішень у МАІ починається з побудови ієрархічної структури, яка включає мету, критерії, альтернативи та інші фактори, що впливають на вибір. Ця структура відображає розуміння проблеми особою, яка приймає рішення.

Кожен елемент ієрархії може представляти різні аспекти розв'язуваної задачі, причому до уваги можуть бути прийняті як матеріальні, так і нематеріальні чинники, вимірювані кількісні параметри та якісні характеристики, об'єктивні дані та суб'єктивні експертні оцінки.

Наступним етапом аналізу є визначення пріоритетів, які представляють відносну важливість або перевагу елементів побудованої ієрархічної структури, за допомогою процедури парних порівнянь.

На заключному етапі аналізу виконується синтез (лінійна згортка) пріоритетів на ієрархії, в результаті якої обчислюються пріоритети альтернативних рішень щодо головної мети. Кращою вважається альтернатива із максимальним значенням пріоритету.

Порядок застосування методу аналізу ієрархій:

1. Побудова якісної моделі проблеми у вигляді ієрархії, що включає мету, альтернативні варіанти досягнення цілі і критерії для оцінки якості альтернатив.
2. Визначення пріоритетів всіх елементів ієрархії з використанням методу парних порівнянь.
3. Синтез глобальних пріоритетів альтернатив шляхом лінійної згортки пріоритетів елементів на ієрархії.
4. Перевірка суджень на узгодженість.
5. Прийняття рішення на основі отриманих результатів.

Перший крок МАІ — побудова ієрархічної структури, що об'єднує мету вибору, критерії, альтернативи та інші фактори, що впливають на вибір рішення. Побудова такої структури допомагає проаналізувати всі аспекти проблеми і глибше вникнути у суть задачі.

Ієрархічна структура — це графічне представлення проблеми у вигляді перевернутого дерева, де кожен елемент, за винятком самого верхнього, залежить від одного або більше вище розташованих елементів. У вершині ієрархії (інколи кажуть на верхньому чи на першому рівні) знаходиться найважливіший критерій. Деяка підмножина критеріїв утворює другий (за важливістю) рівень ієрархії, інша підмножина — третій і т. д. На нижньому рівні

ієрархії знаходяться безпосередньо альтернативи. На рис. 12 наведено загальну схему ієрархії, де f_j^i — елементи ієрархії критеріїв, x_i — альтернативи. Верхній індекс елементів вказує рівень ієрархії, нижній — порядковий номер. Метод аналізу ієрархій реалізує декомпозицію задачі експертного оцінювання на простіші складові частини. Унаслідок цього визначається відносна значущість альтернатив за ієрархічною системою критеріїв. Відносна значущість виражається чисельно у вигляді векторів пріоритетів. Отримані таким чином значення векторів пріоритетів є оцінками у шкалі відношень і відповідають так званим жорстким оцінкам.

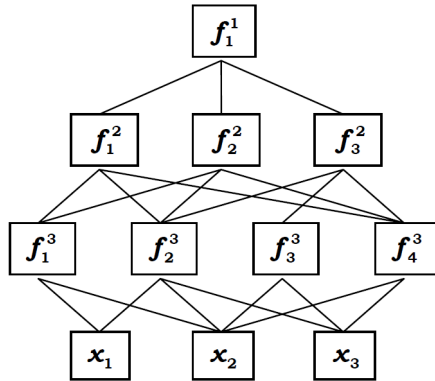


Рис. 12.

Можна виділити ряд модифікацій МАІ, які визначаються характером зв'язків між критеріями й альтернативами, розташованими на найнижчому рівні ієрархії, а також методом порівняння альтернатив. За характером зв'язків між критеріями й альтернативами визначається два типи ієрархій. До першого типу відносяться такі, у яких кожен критерій, що має зв'язок з альтернативами, пов'язаний з усіма розглянутими альтернативами (тип ієрархій з однаковим числом і функціональним складом альтернатив). До другого типу ієрархій належать такі, у яких кожен критерій, що має зв'язок з альтернативами, пов'язаний не з усіма альтернативами (тип ієрархій із різним числом і функціональ-

ним складом альтернатив). У МАІ відомі три методи порівняння альтернатив: попарне порівняння; порівняння альтернатив щодо стандартів і порівняння альтернатив копіюванням. Нижче розглядаються методологія МАІ та відмінні риси його модифікацій.

Метод попарного порівняння елементів ієрархії. У цій модифікації методу розглядається ієрархія з однаковими числом і функціональним складом альтернатив. Для установлення відносної важливості елементів ієрархії використовується шкала відношень (табл. 2). Ця шкала дозволяє експерту ставити у відповідність ступеням переваги одному порівнюваному об'єкту перед іншим — деяке число.

Таблиця 2. Шкала відношень (ступеня значущості дій)

Ступінь значущості	Означення	Пояснення
1	Однакова значущість	Дві дії вносять однаковий внесок у досягнення мети
3	Слабка значущість	Існують недостатньо переконливі міркування на користь переваги однієї з дій
5	Істотна значущість	Є дані для того, щоб довести перевагу однієї з дій
7	Очевидна значущість	Переконливе свідчення на користь однієї дії перед іншою
9	Абсолютна значущість	Незаперечні переконливі свідчення на користь переваги однієї дії іншій
2, 4, 6, 8	Проміжні значення між сусідніми судженнями	Ситуація, коли необхідне компромісне рішення

Правомірність цієї шкали доведена практично при порівнянні з багатьма іншими. При використанні зазначеної шкали експерт, порівнюючи два об'єкти в змісті досягнення цілі, розташованої на вищому рівні ієрархії, повинен поставити у відповідність цьому порівнянню число в інтервалі від 1 до 9 або обернене до нього. У

тих випадках, коли важко розрізнити скільки є проміжних градацій від абсолютного до слабкої переваги або цього не потрібно в конкретній задачі, може використовуватися шкала з меншим числом градацій. Гранично шкала має дві оцінки: 1 — об'єкти рівнозначні; 2 — перевага одного об'єкта над іншим.

Матриці попарних порівнянь. Після побудови ієрархії встановлюється метод порівняння її елементів. Якщо приймається метод попарного порівняння, то будується множина матриць попарних порівнянь. Для цього в ієрархії виділяють елементи двох типів: елементи-«батьки» і елементи-«нащадки». Елементи-«нащадки» впливають на відповідні елементи вищого рівня ієрархії, які є для них «батьками». Матриці попарних порівнянь будуються для всіх елементів-«нащадків», що відносяться до відповідного елемента-«батька». Елементами-«батьками» можуть бути елементи, що належать будь-якому ієрархічному рівневі, крім останнього, на якому розташовані, як правило, альтернативи. Парні порівняння проводяться в термінах домінування одного елемента над іншим. Отримані судження виражаються в цілих числах за дев'ятибальною шкалою (див. табл. 2).

Заповнення квадратних матриць попарних порівнянь здійснюється за таким правилом. Якщо елемент E_1 домінує над елементом E_2 , то комірка матриці, що відповідає рядковій E_1 і стовпчику E_2 заповнюється цілим числом, а комірка, що відповідає E_2 і E_1 , заповнюється оберненим до нього числом. Якщо елемент E_2 домінує над E_1 , то ціле число ставиться в комірку, що відповідає рядковій E_2 і стовпчику E_1 , а дріб проставляється в клітку, що відповідає E_1 і E_2 . Якщо елементи рівноцінні, то в симетричних комірках матриці ставляться одиниці.

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1/\mu_1 & \mu_1/\mu_2 & \dots & \mu_1/\mu_n \\ \mu_2/\mu_1 & \mu_2/\mu_2 & \dots & \mu_2/\mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n/\mu_1 & \mu_n/\mu_2 & \dots & \mu_n/\mu_n \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Для отримання кожної матриці експерт виносить $n(n-1)/2$

суджень (тут n — порядок матриці попарних порівнянь). Розглянемо приклад формування матриці попарних порівнянь.

Нехай E_1, E_2, \dots, E_n — множина з n елементів (альтернатив) і $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ відповідають їхній вазі або інтенсивності. Порівняємо попарно вагу або інтенсивність кожного елемента з вагою або інтенсивністю будь-якого іншого елемента множини відносно загальної для них властивості або цілі (стосовно елемента «батька»). У цьому випадку матриця попарних порівнянь має поданий вигляд (30).

Матриця попарних порівнянь має властивість зворотної симетрії, тобто $\mu_{ij} = 1/\mu_{ji}$. При проведенні попарних порівнянь варто відповідати на такі питання: який із двох порівнюваних елементів є важливішим (або має більший вплив) чи є більш ймовірним. При порівнянні критеріїв звичайно запитують, який із критеріїв важливіший; при порівнянні альтернатив стосовно критерію — яка з альтернатив краща або більш ймовірна.

Оцінка однорідності суджень. Ранжування елементів, що аналізуються з використанням матриці попарних порівнянь, здійснюється на підставі аналізу головних власних векторів матриці попарних порівнянь. Обчислення головного власного вектора W додатної квадратної матриці A проводиться на підставі рівності $AW = \lambda_{\max} W$, де λ_{\max} — максимальне власне число матриці A .

Для додатної квадратної матриці A правий власний вектор W , що відповідає максимальному власному числу λ_{\max} із точністю до постійного множника C , можна обчислити за формулою

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k e}{e^\top A^k e} = CW, \quad (31)$$

де $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$ — одиничний вектор, k — показник степеня.

На практиці обчислення власного вектора виконуються до досягнення заданої точності ξ : $e^\top (W^k - W^{k-1}) \leq \xi$. Із достатньої для практики точністю можна прийняти $\xi = 0.01$ незалежно від порядку матриці. Максимальне власне значення обчислюється

за формулою:

$$\lambda_{\max} = e^{\top} A W. \quad (32)$$

У практичних задачах кількісна (кардинальна) і транзитивна (порядкова) однорідність (погодженість) порушується, оскільки людські відчуття не можна виразити точною формулою. Для покращення однорідності в числових судженнях, яка б величина a_{ij} не була узята для порівняння i -го елемента з j -м, a_{ji} приписується значення оберненої величини, тобто $1/a_{ij}$. Звідси, якщо один елемент у a разів є важливішим за інший, то останній лише в $1/a$ разів є важливішим за перший.

При порушенні однорідності ранг матриці буде відмінний від одиниці і вона буде мати кілька власних значень. Однак при невеликих відхиленнях суджень від однорідності одне з власних чисел буде істотно більшим за інші та приблизно дорівнюватиме порядковій матриці. Таким чином, для оцінки однорідності суджень експерта необхідно використовувати відхилення величини максимального власного числа від порядку матриці n .

Однорідність суджень оцінюється індексом однорідності (IO) або відношенням однорідності (BO) з допомогою таблиці, у якій $M(IO)$ — середнє значення (математичне очікування) індексу однорідності випадково складеної матриці попарних порівнянь, що базується на експериментальних даних (табл. 3), а $BO = \frac{IO}{M(IO)}$.

Таблиця 3. Середнє значення індексу однорідності

Порядок матриці	$M(IO)$	Порядок матриці	$M(IO)$	Порядок матриці	$M(IO)$
1	0.00	6	1.24	11	1.51
2	0.00	7	1.32	12	1.48
3	0.58	8	1.41	13	1.56
4	0.90	9	1.45	14	1.57
5	1.12	10	1.49	15	1.59

За припущення береться значення $BO \leq 0.1$. Якщо для матриці попарних порівнянь відношення однорідності $BO > 0.1$, то

це свідчить про істотне порушення експертом логічності суджень при заповненні матриці, тому експертові пропонується переглянути дані, використані для побудови матриці, щоб покращити однорідність.

Ієрархічний синтез використовується для зважування власних векторів матриць попарних порівнянь альтернатив вагами критеріїв (елементів), що знаходяться в ієрархії, а також для обчислення суми за усіма відповідними зваженими компонентами власних векторів нижчого рівня ієрархії. Далі розглядається алгоритм ієрархічного синтезу з урахуванням позначень, прийнятих у попередній ієрархії.

Крок 1. Визначаються вектори пріоритетів альтернатив $W_{(f_i^j)}^x$ щодо елементів f_i^j передостаннього рівня ієрархії ($i = S$). Тут через f_i^j позначені елементи ієрархії, причому верхній індекс i указує на рівень ієрархії, а нижній індекс j — порядковий номер елемента на рівні. Обчислення множини векторів пріоритетів альтернатив W_S^x щодо рівня ієрархії S здійснюється за ітераційним алгоритмом, реалізованим на основі співвідношень (31) і (32) по вихідним даним, зафіксованим у матрицях попарних порівнянь. Унаслідок цього визначається множина векторів: $W_S^X = \{W_{f_1^S}^X, W_{f_2^S}^X, \dots, W_{f_p^S}^X\}$.

Крок 2. Аналогічно обробляються матриці попарних порівнянь власне елементів f_i^j . Дані матриці побудовані так, щоб визначити перевагу елементів визначеного ієрархічного рівня щодо елементів вищого рівня, із якими вони безпосередньо пов'язані. Наприклад, для обчислення векторів пріоритетів елементів третього ієрархічного рівня (див. рис. 12) обробляються три матриці попарних порівнянь:

f_1^2	f_1^3	f_2^3	f_4^3
f_1^3	μ_1/μ_1	μ_1/μ_2	μ_1/μ_4
f_2^3	μ_2/μ_1	μ_2/μ_2	μ_2/μ_4
f_4^3	μ_4/μ_1	μ_4/μ_2	μ_4/μ_4

f_2^2	f_1^3	f_2^3	f_4^3
f_1^3	μ_1/μ_1	μ_1/μ_2	μ_1/μ_4
f_2^3	μ_2/μ_1	μ_2/μ_2	μ_2/μ_4
f_4^3	μ_4/μ_1	μ_4/μ_2	μ_4/μ_4

f_3^2	f_1^3	f_2^3	f_4^3
f_2^3	μ_2/μ_2	μ_2/μ_3	μ_2/μ_4
f_3^3	μ_3/μ_2	μ_3/μ_3	μ_2/μ_4
f_4^3	μ_4/μ_2	μ_4/μ_3	μ_4/μ_4

Унаслідок обробки матриць попарних порівнянь визначається

множина векторів пріоритетів критеріїв: $W^f = \left\{ W_{f_j^i}^f \right\}$.

Отримані значення векторів використовуються згодом при визначенні векторів пріоритетів альтернатив щодо всіх елементів ієрархії.

Крок 3. Здійснюється власне ієрархічний синтез, що полягає в послідовному визначенні векторів пріоритетів альтернатив щодо критеріїв f_j^i , які знаходяться на всіх ієрархічних рівнях, крім передостаннього, що містить критерії f_j^S . Обчислення векторів пріоритетів проводиться в напрямку від нижніх рівнів до верхнього з урахуванням конкретних зв'язків між критеріями, що належать різним рівням. Обчислення проводиться шляхом перемножування відповідних векторів і матриць.

Вираз для обчислення векторів пріоритетів альтернатив визначається так:

$$W_{f_j^i}^X = \left[W_{f_1^{i-1}}^X, W_{f_2^{i-1}}^X, \dots, W_{f_n^{i-1}}^f \right] \cdot W_{f_j^{i-1}}^f, \quad (33)$$

де $W_{f_j^i}^X$ — вектор пріоритетів альтернатив щодо критерію $W_{f_j^{i-1}}^X$, що визначає j -й стовпчик матриці; $W_{f_j^i}^f$ — вектор пріоритетів критеріїв $f_1^{i-1}, f_2^{i-1}, \dots, f_n^{i-1}$, пов'язаних із критерієм f_j^i вищого рівня ієрархії.

Оцінка однорідності ієрархії. Після розв'язання задачі ієрархічного синтезу оцінюється однорідність всієї ієрархії за допомогою підсумовування показників однорідності всіх рівнів, приведені шляхом «зважування» до першого рівня ієрархії, де знаходиться корнева вершина. Число кроків алгоритму з обчислення однорідності визначається конкретною ієрархією.

Розглянемо принципи обчислення індексу та відношення однорідності ієрархії. Нехай задана ієрархія критеріїв і альтернатив (рис. 13) і для кожного рівня визначений індекс однорідності та вектори пріоритетів критеріїв так: IO_1^1 — індекс однорідності для 1-го рівня; $\{IO_1^2, IO_2^2\}$ — індекси однорідності для 2-го рівня; $\{IO_1^3, IO_2^3, IO_3^3\}$ — індекси однорідності для 3-го рівня; $\{W_1^1\}$ —

вектор пріоритетів f_1^2, f_2^2 відносно критерію f_1^1 ; $\{W_1^2\}, \{W_2^2\}$ — вектори пріоритетів критеріїв f_1^3, f_2^3, f_3^3 відносно критеріїв f_1^2, f_2^2 другого рівня.

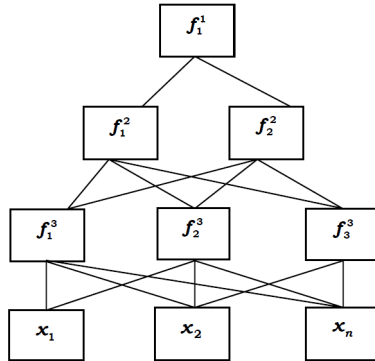


Рис. 13.

У цьому випадку індекс однорідності розглянутої ієрархії можна визначити за формулою:

$$IO = IO_1^1 + \{W_1^1\}^\top \begin{pmatrix} IO_1^2 \\ IO_2^2 \end{pmatrix} + \{W_1^1\}^\top [W_1^2 W_2^2]^\top \begin{pmatrix} IO_1^3 \\ IO_2^3 \\ IO_3^3 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Визначення відношення однорідності BO для всієї ієрархії здійснюється за формулою: $BO = IO/M(IO)$ — індекс однорідності ієрархії при випадковому заповненні матриць попарних порівнянь.

Розрахунок індексу однорідності $M(IO)$ за експериментальними даними (див. табл. 3) виконується за формулою аналогічною індексу однорідності. Однорідність ієрархії вважається задовільною при значеннях $BO \leq 0.1$.

Агрегація думок декількох експертів. Для агрегування думок експертів береться середнє геометричне, що обчислюється за таким співвідношенням: $a_{ij}^A = \sqrt[n]{a_{ij}^1 \dots a_{ij}^n}$, де a_{ij}^A — агрегована оцінка елемента, що належить i -му стовпчику матриці попарних

порівнянь; n — число матриць попарних порівнянь, кожна з яких складена одним експертом. Логічність цього критерію стає очевидною, якщо два експерти вказують при порівнянні об'єктів відповідно оцінки a і $1/a$, що при обчисленні агрегованої оцінки дає одиницю і свідчить про еквівалентність порівнюваних об'єктів.

Осереднення суджень експертів може здійснюватися і на рівні власних векторів матриць попарних порівнянь. Покажемо це на прикладі. Нехай задані судження двох експертів у виді матриць попарних порівнянь:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/7 \\ 1/2 & 1 & 1/5 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/5 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

Власні вектори W_i , максимальні власні значення λ_{\max} й оцінки однорідності (IO, BO) для цих матриць мають такий вигляд:

- для матриці A_1 : $W_1 = (0.15, 0.16, 0.744)^\top$, $\lambda_{\max} = 3.121$, $IO = 0.06$, $BO = 0.103$;
- для матриці A_2 : $W_2 = (0.223, 0.127, 0.65)^\top$, $\lambda_{\max} = 3.297$, $IO = 0.148$, $BO = 0.255$.

Осереднення на рівні елементів власних векторів дає

$$W = (0.184, 0.117, 0.7)^\top.$$

Осереднюючи елементи матриць A_1 , A_2 , одержимо матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2.45 & 0.17 \\ 0.41 & 1 & 0.26 \\ 5.9 & 3.9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Власним вектором матриці A буде $W_A = (0.184, 0.116, 0.7)^\top$.

Контрольні питання

1. Сформулюйте загальну постановку задачі багатокритеріальної оптимізації.
2. Які альтернативи називають ефективними за Парето?
3. Які методи знаходження ефективних альтернатив ви знаєте?
4. Для чого потрібна нормалізація критеріїв при розв'язуванні багатокритеріальних задач?
5. Які способи нормалізації критеріїв ви знаєте?
6. У чому полягає задача пошуку компромісних рішень?
7. У чому полягають методи згортки в застосуванні до розв'язування багатокритеріальних задач?
8. Які види згорток ви знаєте?
9. Назвіть переваги й недоліки методів типу згортки.
10. Чи є обов'язковою нормалізація критеріїв при використанні методів згортки?
11. Чи потрібні кількісні значення переваг критеріїв при використанні методів згортки?
12. У чому полягає сутність методу головного критерію розв'язування багатокритеріальних задач?
13. Перелічіть переваги й недоліки застосування методу головного критерію.

14. Чи обов'язкова нормалізація критеріїв при використанні методу головного критерію до розв'язування багатокритеріальних задач?
15. Чи потрібні кількісні значення переваг критеріїв при використанні методу головного критерію в розв'язуванні багатокритеріальних задач?
16. Яка сутність методу послідовної поступки розв'язування багатокритеріальних задач?
17. Які існують переваги і в чому полягають труднощі застосування методу послідовної поступки до розв'язування багатокритеріальних задач?
18. Чи передбачено нормалізацію критеріїв у разі застосування методу послідовної поступки?
19. Чи потрібні кількісні значення переваг критеріїв при використанні методу послідовної поступки?
20. Чи визначають методи згортки, послідовної поступки та головного критерію єдиний оптимальний розв'язок багатокритеріальної задачі?
21. Чи можна знайти за допомогою цих методів один з ефективних розв'язків багатокритеріальної задачі?

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати множину ефективних альтернатив задачі багатокритеріальної оптимізації:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1 + 7x_2 \rightarrow \max, \\ f_2(x_1, x_2) &= 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max, \\ &\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Розв'язати задачу багатокритеріальної оптимізації методом головного критерію, якщо переваги критеріїв задано таким чином: $f_3 \succ f_1 \succ f_2$:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1 + 7x_2 \rightarrow \max, \\ f_2(x_1, x_2) &= 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max, \\ f_3(x_1, x_2) &= -x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ &\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Розв'язати задачу багатокритеріальної оптимізації методом адитивної згортки, якщо переваги критеріїв дорівнюють 0.3,

0.2, 0.5 відповідно:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min, \\ f_2(x_1, x_2) &= x_1 - 3x_2 \rightarrow \max, \\ f_3(x_1, x_2) &= -x_1 + x_2 \rightarrow \min, \\ &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_2 \leq 6, \end{cases} \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

4. На множині критеріїв задано пріоритети: $f_3 \succ f_1 \succ f_2$. Які методи багатокритеріальної оптимізації можуть бути застосовані? Розв'язати за цих умов таку задачу багатокритеріальної оптимізації методом послідовних поступок:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1 - 3x_2 \rightarrow \max, \\ f_2(x_1, x_2) &= 4x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ f_3(x_1, x_2) &= -x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ &\begin{cases} x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \end{cases} \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Варіанти розрахунково-графічної роботи

Нехай i — номер студента у списку. Дана наступна задача оптимізації з двома критеріями:

$$\begin{aligned} f_1(X) &= c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max_{X \in D}, \\ f_2(X) &= d_1x_1 + d_2x_2 \rightarrow \max_{X \in D} \end{aligned}$$

де $c_1 = 100 + i$; $c_2 = 240 + i$; $d_1 = 250 + i$; $d_2 = 80 + i$, а допустима множина D задана обмеженнями:

$$\begin{cases} 0.1x_1 + 0.2x_2 \leq 10 + 0.1 \cdot i, \\ 0.2x_1 + 0.1x_2 \leq 7 + 0.1 \cdot i, \\ 0.2x_1 + 0.05x_2 \leq 5 + 0.1 \cdot i, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1. Зобразити множину ефективних точок задачі графічно.
2. Розв'язати задачу методом головного часткового критерію. Для непарних i вважати головним критерієм f_1 , а для парних — f_2 .
3. Розв'язати задачу методом адитивної згортки. Для непарних i вагові коефіцієнти дорівнюють $w_1 = 0.5 + 0.005 \cdot i$, $w_2 = 0.5 - 0.005 \cdot i$, а для парних — $w_1 = 0.5 - 0.005 \cdot i$, $w_2 = 0.5 + 0.005 \cdot i$.

Література

1. Волошин О. Ф., Мащенко С. О. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посібник. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2010. — 336 с.
2. Ус С. А., Коряшкіна Л. С. Моделі й методи прийняття рішень: навч. посібник. — Д.: НГУ, 2014. — 300 с.
3. Вибрані розділи багатокритеріальної оптимізації: методичні рекомендації до виконання контрольних та лабораторних робіт для студентів математичного факультету / розробник Н. Е. Кондрук. — Ужгород: УжНУ, 2015. — 56 с.
4. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. — М.: Мир, 1990. — 208 с.
5. Леоненков А. В. Решение задач оптимизации в среде MS Excel. — СПб.: «БХВ-Петербург», 2005. — 704 с.