ISSN 2304–1579

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ВІСНИК ОДЕСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Математика і механіка

Науковий журнал

Виходить 4 рази на рік

Серія заснована у січні 1997 р.

Том 17. Випуск 4 (16). 2012

Одеса
«Астропринт»
2012

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

«Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка» внесений до Переліку наукових фахових видань України постановою Президії ВАК України № 1-05/2 від 10.03.2010 р.

ISSN 2304–1579

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE, YOUTH AND SPORT OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

VISNYK ODESKOHO NATSIONALNOHO UNIVERSYTETU

(Odesa National University Herald)

Matematyka i Mekhanika
(Mathematics and Mechanics)

Scientific journal

Published four times a year

Series founded in January, 1997

Volume 17. Issue 4 (16). 2012

Odesa
«Astroprint»
2012

Founder: **Odesa National I. I. Mechnikov University**

Publisher: «Astroprint»

ЗМІСТ

МАТЕМАТИКА

МЕХАНІКА

CONTENTS

MATHEMATICS

MECHANICS

ISSN 2304–1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2012 .–Т. 17, вип. 4 (16).–С. 7–14

МАТЕМАТИКА

УДК 517.7

А.В. Арсирий
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОЗНАЧНЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Арсiрiй А.В. Кусково-сталi системи керування багатозначними траєкторiями iз терминальним критерiєм якостi. У данiй статтi розглядається задача оптимального керування багатозначними траекторiями. Обгрунтовується можливiсть звуження множини припустимих керувань до множини кусково сталих функцiй.
Ключовi слова: задачi керування, багатозначнi вiдображення, диференцiальнi рiвняння з похiдною Хукухари, кусково-сталi керованi системи.

Арсирий А.В. Кусочно-постоянные системы управления многозначными траекториями с терминальным критерием качества. В данной статье рассматривается задача оптимального управления многозначнымитраекториями. Обосновывается возможность сужения множествадопустимых управлений на множество кусочно-постоянных функций.
Ключевые слова: задачи управления, многозначные отображения, дифференциальные уравнения с производной Хукухары, кусочно-постоянные управляемые системы.

Arsirii A.V. Piecewise constant control systems with terminal criteria of quality. In the given article we consider the optimal control problem of the setvalued trajectories. The possibility of the admissible controls set narrowing to the set of the piecewise constant functions is justified.
Key words: control problem, set-valued map, differential equation with the Hukuhara derivative, piecewise constant control systems.

Введение. В 1969 году F.S. de Blasi и F. Iervolino ввели понятие дифференциального уравнения с производной Хукухары, решением которого является многозначное отображение [7]. В дальнейшем в работах F.S. de Blasi, F. Iervolino и A.J. Brandao Lopes Pinto были доказаны теоремы существования и устойчивости решений для такого типа уравнений [7, 8, 9]. А.А. Толстоногов доказал, что решение дифференциального уравнения с производной Хукухары дает оценку сверху множества достижимости задачи оптимального управления [6]. Исследованием дифференциальных уравнений с производной Хукухары также занимались M. Kisielewich, V. Laksmikantham, N.D. Phu, T.T. Tung, А.Н. Витюк, А.В. Плотников, О.Д. Кичмаренко, Н.В. Скрипник и др [2, 4, 5, 11, 12, 13].

В 80-е годы 20 столетия начала развиваться теория управления при неопределенных начальных условиях, которая сегодня переросла в теорию нечетких управляемых систем. В последнее время, поведение объекта в такого типа системах стали часто описывать нечеткими дифференциальными уравнениями. Производная от нечеткого отображения является обобщением производной Хукухары. Развитие теории управления многозначными траекториями предоставляет возможности в получении новых результатов и в теории управления нечеткими системами.

Данные факты говорят об актуальности исследования систем управления многозначными траекториями.

В данной статье рассматривается задача управления системой, состояние которой описывается дифференциальным уравнением с производной Хукухары, и обосновывается возможность замены исходного допустимого управления на приближенное кусочно-постоянное. Доказываются теоремы о близости соответствующих критериев качества в однозначном и многозначном случаях.

Пусть R^n - n-мерное вещественное евклидово пространство векторов $x = (x_1, ..., x_n)^T$ с нормой $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Пусть $Conv(R^n)$ пространство непустых компактных и выпуклых подмножеств евклидового пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = min\{r \geq 0 | A \subset S_r(B), B \subset S_r(A)\},$$

где $A, B \in Conv(R^n)$, $S_r(a)$ – шар радиуса r с центром в точке a.

Определение 1. [4] *Пусть $A, B \in Conv(R^n)$. Если существует множество $C \in Conv(R^n)$ такое, что $A = B + C$, то C называется разностью Хукухары множеств A и B и обозначается $A \overset{h}{-} B$.*

Определение 2. [4] *Многозначное отображение $F(\cdot) : R^1 \to Conv(R^n)$ дифференцируемо по Хукухаре в точке $t \in R^1$, если существует $D_h F(t) \in Conv(R^n)$ такое, что пределы*

$$\lim_{\Delta t \to 0_+} \frac{1}{\Delta t}(F(t + \Delta t) \overset{h}{-} F(t)), \quad \lim_{\Delta t \to 0_+} \frac{1}{\Delta t}(F(t) \overset{h}{-} F(t - \Delta t))$$

существуют и равны $D_h F(t)$.

Основные результаты.

Рассмотрим управляемое дифференциальное уравнение с производной Хукухары стандартного вида:

$$D_h X(t,u) = A(t)X(t,u) + F(t,u), \quad X(0,u) = X_0, \tag{1}$$

где $t \in [0,T]$; $u(t) \in R^m$, - управляющее воздействие; $X(\cdot, u) : [0,T] \times R^m \to Conv(R^n)$ - многозначное отображение, определяющее состояние системы; $D_h X(t,u)$ - производная Хукухары; $A(t)$ - матрица с элементами $a_{ij}(t)$ порядка $(n \times n)$; $F(\cdot, u) : [0,T] \times R^m \to Conv(R^n)$ - многозначное отображение.

Введем следующий критерий качества

$$I(u) = \Phi(X(T,u)), \tag{2}$$

где $\Phi(\cdot) : Conv(R^n) \to R^1$.

Определение 3. [3] *Множество измеримых функций таких, что* $u(t) \in U$ *для всех* $t \in [0,T]$ *будем называть множеством допустимых управлений и обозначать* $LU[0,T]$ *(или* LU*).*

Определение 4. [9] *Решением уравнения (1) соответствующим допустимому управлению* $u(\cdot) \in LU$*, называется абсолютно непрерывное многозначное отображение* $X(\cdot,u)$*, удовлетворяющее (1) почти всюду на* $[0,T]$*.*

Предположение 1. Будем предполагать, что задача (1),(2) удовлетворяет условиям:
1) матрица $A(t)$ - измерима на $[0,T]$;
2) существует константа $a > 0$ такая, что $\|A(t)\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2(t)} \leq a$ для почти всех $t \in [0,T]$;
3) многозначное отображение $F(t,u)$ измеримо по t и непрерывно по u;
4) существует измеримая функция $f(t) > 0$ такая, что $h(F(t,u),\{0\}) \leq f(t)$ для почти всех $t \in [0,T]$ и $\forall u \in LU$;
5) для всех $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in LU$ и $t \in [0,T]$ существует константа γ такая что

$$h\left(\int\limits_0^t F(s,u_1(s))ds, \int\limits_0^t F(s,u_2(s))ds\right) \leq \gamma \left\| \int\limits_0^t u_1(s)ds - \int\limits_0^t u_2(s)ds \right\|;$$

6) отображение $\Phi(\cdot)$ непрерывно на $Conv(R^n)$.

Теорема 1. [10] *Пусть правая часть уравнения (1) удовлетворяет условиям 1)-4) предположения 1.*

Тогда для любого допустимого управления $u(\cdot)$ *на сегменте* $[0,T]$ *существует единственное решение* $X(\cdot,u)$ *уравнения (1).*

Определение 5. [9] *Множеством достижимости* $Y(T)$ *в момент времени* T *называется множество всех множеств из пространства* $Conv(R^n)$*, в которые можно перейти за время* T *из начального множества* X^0 *по решениям уравнения (1) при всех возможных управлениях* $u(\cdot) \in LU$*, т.е.*

$$Y(T) = \{X(T,u) | u(\cdot) \in LU\}$$

Теорема 2. [14] *Множество достижимости* $Y(T)$ *уравнения (1) является непустой выпуклой и компактной частью пространства* $Conv(R^n)$*.*

Теорема 3. *Если задача управления (1),(2) удовлетворяет условиям 1)-4),6) предположения 1, то она имеет оптимальное решение.*

Доказательство следует из компактности множества достижимости уравнения (1), согласно предыдущей теореме, и непрерывности отображения $\Phi(\cdot)$.

В дальнейшем в качестве множества допустимых управлений будем рассматривать произвольные прямоугольные области $U = \prod\limits_{j=1}^{n} [u^j_{min}, u^j_{max}]$.

Если провести замену исходного измеримого управления $u(t)$ в задаче управления (1),(2) кусочно-постоянной функцией, то решение задачи станет намного более простым. Разработан алгоритм построения приближенного кусочно-постоянного управления.

Теорема 4. [1, 10] *Пусть* $u(t) = (u^1(t), u^2(t), ..., u^n(t))$ *- измеримая функция на отрезке* $[0, T]$ *такая, что* $u^j(t) \in [u^j_{min}, u^j_{max}]$, $\quad j = \overline{1, n}$ *для всех* $t \in [0, T]$. *Разобъем отрезок* $[0, T]$ *на* k *частей* $[(i-1)\Delta, i\Delta]$, $i = \overline{1, k}$, $\Delta = \frac{T}{k}$. *Тогда существует кусочно-постоянная функция* $\overline{u}(t)$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\overline{u}(t)$*-постоянная на каждом из отрезков* $[(i-1)\Delta, i\Delta], i = \overline{1, k}$;

2) $\overline{u}_i(t) = \{(\overline{u}_i^1(t), ..., \overline{u}_i^n(t))^T : \overline{u}_i^j(t) \in \{u^j_{min}, u^j_{max}\}, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}\}$ *для всех* $t \in [0, T]$;

3) для любого $t \in [0, T]$ *справедливо неравенство*

$$\left\| \int\limits_0^t u(s)ds - \int\limits_0^t \overline{u}(s)ds \right\| \leq \frac{1}{2} ||u_{max} - u_{min}||\Delta. \tag{3}$$

где $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$.

Для того, чтобы обосновать возможность сужения исходного множества допустимых управлений на класс кусочно-постоянных фунций, необходимо доказать близость траекторий, соответствующих исходному и приближенному управлениям, а также близость соответствующих критериев качества.

В следующей теореме доказана близость решений уравнения (1), соответствующих исходному измеримому управлению и построенному кусочно-постоянному.

Теорема 5. [10] *Пусть уравнение (1) удовлетворяет условиям 1)-5) предположения 1. Также пусть* $u(\cdot)$ *- произвольное допустимое управление, а* $X(t, u)$ *- соответствующее ему многозначное решение уравнения (1) с начальным условием* $X(0, u) = X_0$. *Разобъем отрезок* $[0, T]$ *на* k *частей и сконструируем управление* $\overline{u}(\cdot)$, *согласно теореме 4, и пусть* $X(t, \overline{u})$ *- соответствующее многозначное решение уравнения (1) с начальным условием* $X(0, \overline{u}) = X_0$. *Тогда для всех* $t \in [0, T]$ *выполняется неравенство*

$$h(X(t, u), X(t, \overline{u})) \leq C_1 \frac{\Delta}{2} ||u_{max} - u_{min}||, \tag{4}$$

где $C_1 = \gamma e^{aT}$, $\Delta = \frac{T}{k}$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$, $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$.

1. Близость значений критериев качества, соответствующих исходному и приближенному управлениям

Покажем близость значений критериев качества, соответствующих исходному измеримому управлению и построенному кусочно-постоянному.

Теорема 6. *Пусть задача (1),(2) удовлетворяем условиям предположения и пусть отображение $\Phi(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ. $u(t)$ - произвольное допустимое управление для уравнения (1) на промежутке времени $[0,T]$. Разобъем отрезок $[0,T]$ на k частей и сконструируем управление $\overline{u}(t)$, согласно теоремы 4. Тогда для всех $t \in [0,T]$ выполняется неравенство*

$$|I(u) - I(\overline{u})| \leq C_2 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|, \tag{5}$$

где $C_2 = \lambda\gamma e^{aT}$, $\Delta = \frac{T}{k}$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$, $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$.

Доказательство. Пусть $X(t,u)$ - решение уравнения (1) при управлении $u(t)$, а $X(t,\overline{u})$ - решение уравнения (1) при управлении $\overline{u}(t)$, то есть

$$D_h X(t,u) = A(t)X(t,u) + F(t,u), \quad X(0,u) = X_0;$$

$$D_h X(t,\overline{u}) = A(t)X(t,\overline{u}) + F(t,\overline{u}), \quad X(0,\overline{u}) = X_0.$$

Согласно предыдущей теореме справедлива оценка

$$h(X(t,u), X(t,\overline{u})) \leq C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Так как отображение $\Phi(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ и согласно предыдущей оценке

$$|I(u) - I(\overline{u})| = |\Phi(X(t,u)) - \Phi(X(t,\overline{u}))| \leq \lambda h(X(t,u), X(t,\overline{u})) \leq$$

$$\leq \lambda C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Обозначим $C_2 = \lambda C_1$, т.е. $C_2 = \lambda\gamma e^{aT}(C_1 = \gamma e^{aT}$ из теоремы 5). Тогда

$$|I(u) - I(\overline{u})| \leq C_2 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Теорема доказана.

2. Близость значений критериев качества в многозначном случае

Пусть теперь критерий качества для уравнения (1) будет многозначным, то есть

$$J(u) = \Omega(X(T,u)), \tag{6}$$

где $\Omega(\cdot) : Conv(R^n) \to Conv(R^1)$.

Определение 6. [5] *Управление $u^*(\cdot) \in LU$ назовем максиминным для задачи (1)(6), если для любого управления $u(\cdot) \in LU$ справедливо неравенство*

$$mJ(u) \leq mJ(u^*),$$

где $mA = min\{\, a \mid a \in A, \ A \in Conv(R^1)\}$.

Определение 7. [5] *Управление $u^*(\cdot) \in LU$ назовем максимаксным для задачи (1)(6), если для любого управления $u(\cdot) \in LU$ справедливо неравенство*

$$MJ(u) \leq MJ(u^*),$$

где $MA = max\{\, a \mid a \in A,\ A \in Conv(R^1)\}$.

Будут справедливы теоремы о близости максиминных и максмимаксных значений критериев качества, соответствующих исходному допустимому и построенному кусочно-постоянному управлениям.

Теорема 7. *Пусть уравнение (1) удовлетворяет условиям 1)-5) предположения 1 и пусть отображение $\Omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ. $u(t)$ - произвольное допустимое управление для уравнения (1) на промежутке времени $[0,T]$. Разобъем отрезок $[0,T]$ на k частей и сконструируем управление $\overline{u}(t)$, согласно теоремы 4. Тогда для всех $t \in [0,T]$ выполняется неравенство*

$$|mJ(u) - mJ(\overline{u})| \leq C_2 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|, \tag{7}$$

где $C_2 = \lambda \gamma e^{aT}$, $\Delta = \frac{T}{k}$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$, $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$.

Доказательство. Пусть $X(t,u)$ - решение уравнения (1) при управлении $u(t)$, а $X(t,\overline{u})$ - решение уравнения (1) при управлении $\overline{u}(t)$, то есть

$$D_h X(t,u) = A(t)X(t,u) + F(t,u), \quad X(0,u) = X_0,$$

$$D_h X(t,\overline{u}) = A(t)X(t,\overline{u}) + F(t,\overline{u}), \quad X(0,\overline{u}) = X_0.$$

Согласно теореме 5 справедлива оценка

$$h(X(t,u), X(t,\overline{u})) \leq C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Так как отображение $\Omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ и согласно предыдущей оценке

$$h(J(u), J(\overline{u})) = h(\Omega(X(t,u)), \Omega(X(t,\overline{u}))) \leq \lambda h(X(t,u), X(t,\overline{u})) \leq$$

$$\leq \lambda C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

С другой стороны

$$mJ(u) \leq mJ(\overline{u}) \leq mJ(u) + \lambda C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Таким образом

$$|mJ(u) - mJ(\overline{u})| \leq \lambda C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Обозначим $C_2 = \lambda C_1$, т.е. $C_2 = \lambda \gamma e^{aT} (C_1 = \gamma e^{aT}$ из теоремы 5). Тогда

$$|mJ(u) - mJ(\overline{u})| \leq C_2 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть уравнение (1) удовлетворяет условиям 1)-5) предположения 1 и пусть отображение $\Omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ. $u(t)$ - произвольное допустимое управление для уравнения (1) на промежутке времени $[0,T]$. Разобъем отрезок $[0,T]$ на k частей и сконструируем управление $\overline{u}(t)$, согласно теоремы 4. Тогда для всех $t \in [0,T]$ выполняется неравенство*

$$|MJ(u) - MJ(\overline{u})| \leq C_2 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|, \tag{8}$$

где $C_2 = \lambda\gamma e^{aT}$, $\Delta = \frac{T}{k}$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$, $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$.

Доказательство. Пусть $X(t,u)$ - решение уравнения (1) при управлении $u(t)$, а $X(t,\overline{u})$ - решение уравнения (1) при управлении $\overline{u}(t)$, то есть

$$D_h X(t,u) = A(t)X(t,u) + F(t,u), \quad X(0,u) = X_0,$$

$$D_h X(t,\overline{u}) = A(t)X(t,\overline{u}) + F(t,\overline{u}), \quad X(0,\overline{u}) = X_0.$$

Согласно теореме 5 справедлива оценка

$$h(X(t,u), X(t,\overline{u})) \leq C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Так как отображение $\Omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ и согласно предыдущей оценке

$$h(J(u), J(\overline{u})) = h(\Omega(X(t,u)), \Omega(X(t,\overline{u}))) \leq \lambda h(X(t,u), X(t,\overline{u}))| \leq$$

$$\leq \lambda C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

С другой стороны

$$MJ(u) \leq MJ(\overline{u}) \leq MJ(u) + \lambda C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Таким образом

$$|MJ(u) - MJ(\overline{u})| \leq C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Обозначим $C_2 = \lambda C_1$, т.е. $C_2 = \lambda\gamma e^{aT} (C_1 = \gamma e^{aT}$ из теоремы 5). Тогда

$$|MJ(u) - MJ(\overline{u})| \leq C_2 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Теорема доказана.

Заключение.

В статье рассматривалась задача управления многозначной траекторией с терминальным критерием качества. Состояние системы в задаче описывается дифференциальным уравнением с производной Хукухары. Обоснована возможность сужения множества допустимых управлений на класс кусочно-постоянных функций. Доказана теорема, показывающая близость решений исходной и усредненной задач по значениям критериев качества, соответственно, в однозначном и многозначном случаях.

1. **Арсирий А.В., Плотников А.В.** Системы управления многозначными траекториями с терминальным критерием качества // Украинский математический журнал. – Киев: 2009. – Т.61 (№ 8). – С. 1141 – 1146.
2. **Кичмаренко О.Д.** Усреднение в задачах управления системами с запаздыванием // Диссертация на соискание уч. степ. канд. физ.-матем. наук. Одесса, 2005.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления – М., 1972. – 576с.
4. **Плотников А.В., Скрипник Н.В.** Дифференциальные уравнения с "четкой" и нечеткой многозначной многозначной правой частью. Асимптотические методы – Одесса: "Астропринт", 2009. – 191 с.
5. **Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы – Одесса: "Астропринт", 1999. – 354с.
6. **Толстоногов А.А.** Дифференциальные включения в банаховом пространстве – Новосибирск: Наука, 1986. – 296с.
7. **de Blasi F.S., Iervolino F.** Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll.Unione Mat.Ital. – 1969. – Vol. 2, № 4–5. – P. 491 – 501.
8. **de Blasi F.S., Iervolino F.** Euler method for differential equations with set-valued solutions // Boll.Unione Mat.Ital. – 1971. – Vol. 4, № 4. – P. 941 – 949.
9. **Brandao Lopes Pinto A.J., de Blasi F.S., Iervolino F.** Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions // Boll. U.M.I. – 1970. – № 4. – P.534 – 538.
10. **Plotnikov A.V., Arsiry A.V.** Piecewise Constant Control Set Systems // American Journal of Computational and Applied Mathematics – 2011. – 1(2). – P.89 – 93.
11. **Kisielewicz M.** Differential inclusion and optimal control – Warszawa: PWN, 1991. – 239 p.
12. **Laksmikantham V., Granna Bhaskar T., Vasundhara Devi J.** Theory of set differential equations in metric spaces // Cambridge Scientific Publishers, 2006. – 204p.
13. **Phu N.D., Tung T.T.** Multivalued Differential Equations – VNU-HCM City : Publishing House, 2005.
14. **Plotnikov A.V., Komleva T.A., Arsiry A.V.** Necessary and sufficient optimality conditions for a control fuzzy linear problem // Int. J. Industrial Mathematics – 2009. – 1(3). – P.197 – 207.

ISSN 2304–1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2012 .–Т. 17, вип. 4 (16).–С. 15–24

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

М. А. Белозерова, О. В. Мещерякова
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОБЩЕГО ВИДА, В НЕКОТОРОМ СМЫСЛЕ БЛИЗКИХ К УРАВНЕНИЯМ СО СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Бiлозерова М. О., Мещерякова О. В. Асимптотичнi зображення розв'язкiв диференцiальних рiвнянь другого порядку загального виду, в деякому сенсi близьких до рiвнянь iз степеневими нелiнiйностями. Для диференцiальних рiвнянь другого порядку загального виду, що є у деякому сенсi близькими до рiвнянь з правильно мiнливими в околах особливих точок нелiнiйностями, отримано асимптотичнi зображення, необхiднi та достатнi умови iснування достатньо широких класiв розв'язкiв.
Ключовi слова: асимптотичнi зображення рiшень, правильно мiнливi нелiнiйностi.

Белозерова М. А., Мещерякова О. В. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка общего вида, в некотором смысле близких к уравнениям со степенными нелинейностями. Для дифференциальных уравнений второго порядка общего вида, в некотором смысле близких к уравнениям с правильно меняющимися в окрестностях особых точек нелинейностями, получены асимптотические представления, необходимые и достаточные условия существования достаточно широких классов решений.
Ключевые слова: асимптотические представления решений, правильно меняющиеся нелинейности.

Bilozerova M. A., Meshcheriakova O. V. Asymptotic representations of the solutions of second order differential equations of general form, which are in some sense related to the equations with power nonlinearities. The asymptotic representations, necessary and sufficient conditions of the existence of sufficient broad classes of the solutions are found for differential equations of the second order of general type that are in some sense similar to equations with nonlinearities, that are regularly varying at the singular points.
Key words: asymptotic representation of solutions, regularly varying nonlinearities.

Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 f(t, y, y'), \tag{1}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $f : [a, \omega[^1 \times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \to \mathbb{R}^+$— непрерывная функция, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, $\Delta_{Y_i} = \begin{cases} \text{либо } [y_i^0; Y_i[, \\ \text{либо }]Y_i, y_i^0]^2 \end{cases}$ $(i = 0, 1)$.

Кроме того, предполагается, что функция f удовлетворяет следующим услови-

[1] $-\infty < a < \omega \le +\infty$

[2] При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ считаем $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ соответственно.

ям:

1. для любого отрезка $[c;d]$ $(0 < c \le d < +\infty)$ и для любых $i, j \in \{0,1\}, \quad i \ne j$
$$\lim_{\substack{z_i \to Y_i \\ z_i \in \Delta_{Y_i}}} \frac{f(t, \lambda z_i, z_j)}{f(t, z_i, z_j)\lambda^{\sigma_i}} = 1 \tag{2}$$
равномерно по $\lambda \in [c,d]$, $t \in [a,\omega[$, $z_j \in \Delta_{Y_j}$;
2. для любой функции $L(z)$ $(L: \ \Delta_{Y_1} \to]0;+\infty[)$, медленно меняющейся при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_{Y_1})$
$$\lim_{\substack{z_1 \to Y_1 \\ z_1 \in \Delta_{Y_1}}} \frac{f(t, z_0, z_1 L(z_1))}{f(t, z_0, z_1)|L(z_1)|^{\sigma_1}} = 1 \tag{3}$$
равномерно по $t \in [a,\omega[$, $z_0 \in \Delta_{Y_0}$.

Также предполагается, что $\sigma_0 + \sigma_1 \ne 1$.

В силу вышеуказанных условий уравнение (1) является в некотором смысле близким к уравнению
$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{4}$$
где функции φ_0 и φ_1 являются правильно меняющимися функциями при стремлении аргументов к особым точкам порядков σ_0, σ_1 соответственно. Для степенных φ_0 и φ_1 уравнения (4) было детально исследовано в работах В. М. Евтухова [1]. Уравнения такого вида применялись в ядерной физике, в газовой динамике, механике жидкости, релятивистской механике и других областях естествознания. Случай произвольных правильно меняющихся φ_0 и φ_1 также исследовался ранее (см., например [2], [3]). Однако, при современном уровне развития вычислительной техники для построения точных математических моделей физических явлений оказывается недостаточно не только степенных, но даже и правильно меняющихся функций. Поэтому ставится задача рассмотрения общего случая уравнения (1).

Целью настоящей работы является распространение на уравнение (1) некоторых из полученных для уравнения (4) результатов. В работе используются некоторые методы исследования, предложенные в [4].

Определение 1. *Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением, если*

$$y^{(i)}: [t, \omega[\to \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)\, y(t)} = \lambda_0. \tag{5}$$

$P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решения являются правильно меняющимися функциями при $t \uparrow \omega$, если $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. В данной работе получены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(\lambda_0)$- решений уравнения (1) в неособых случаях $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Также установлены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для таких решений и их производных.

Основные результаты.

1. Формулировка основных результатов. Введем дополнительные обозначения, полагая

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t-\omega & \text{при } \omega < +\infty, \end{cases} \qquad C = \left| \lambda_0 \left| \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \right|^{\sigma_1 - 2} \right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

$$K(t, z_0, z_1) = f(t, z_0, z_1)|z_0|^{-\sigma_0}|z_1|^{-\sigma_1}|\pi_\omega(t)|^{\frac{\sigma_1+\lambda_0+\sigma_0\lambda_0-2}{\lambda_0-1}}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция $K(t, z_0, z_1)$ монотонна по переменной z_0 и для любой правильно меняющейся при $t \uparrow \omega$ функции $g \in C([a, \omega))$ такой, что*

$$g \ \mathrm{sign} y_0^0 : [a, \omega[\to \Delta_{Y_0}$$

функция $K\left(t, g(t), |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} \mathrm{sign} y_1^0\right)$ является медленно меняющейся при $t \uparrow \uparrow \omega$. Тогда для существования у уравнения (1) *$P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, где $\lambda_0 \in \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, необходимо, а если*

$$\lambda_0 \neq \sigma_1 - 1 \text{ либо } (\sigma_1 - 1)(\sigma_0 + \sigma_1 - 1) > 0,$$

$$\forall z_0 \in \Delta_{Y_0} \exists \ \tfrac{\partial f(t,z_0,z_1)}{\partial z_0}, \qquad \lim_{\substack{z_0 \to Y_0 \\ z_0 \in \Delta_{Y_0}}} \frac{z_0 \dfrac{\partial f(t, z_0, z_1)}{\partial z_0}}{f(t, z_0, z_1)} = \sigma_0, \tag{6}$$

то и достаточно выполнение условий

$$\pi_\omega(t) y_1^0 y_0^0 \lambda_0(\lambda_0 - 1) > 0, \quad \pi_\omega(t)\alpha_0 y_1^0(\lambda_0 - 1) > 0 \quad \text{при } t \in [a, \omega[, \tag{7}$$

$$\lim_{t \to \omega} y_0^0 |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} = Y_0, \ \ \lim_{t \to \omega} y_1^0 |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} = Y_1. \tag{8}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место следующие асимптотические представления при $t \uparrow \omega$:

$$\begin{gathered} \frac{y(t)}{\left| K\left(t, y(t), |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} \mathrm{sign} y_1^0\right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}} = C|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}[1 + o(1)], \\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\pi_\omega(t)(\lambda_0 - 1)}[1 + o(1)]. \end{gathered} \tag{9}$$

Замечание 1. *Для существования у уравнения (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, где $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ необходимо наличие хотя бы одной правильно меняющейся при $t \uparrow \omega$ порядка $\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}$ функции $g \in C([a, \omega))$ такой, что*

$$g \ \mathrm{sign} y_0^0 : [a, \omega[\to \Delta_{Y_0}$$

и функция $K\left(t, g(t), |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} \mathrm{sign} y_1^0\right)$ является медленно меняющейся при $t \uparrow \uparrow \omega$.

2. Доказательство теоремы *Необходимость.* Пусть $y(t) : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0}$ — $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ решение уравнения (1), где $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Тогда в силу (5) имеют место асимптотические представления при $t \uparrow \omega$

$$\frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}[1 + o(1)], \quad \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}[1 + o(1)]. \qquad (10)$$

Из (10) следует второе из соотношений (9), выполнение условий (7) и (8).

Докажем теперь, что существует медленно меняющаяся при $t \uparrow \omega$ функция $\Theta(t)[t_0, \omega[\to]0; +\infty[$ такая, что

$$y'(t) = |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0 - 1)}} \Theta(t) \mathrm{sign}\, y_1^0. \qquad (11)$$

Возьмем $\Theta(t) = |y'(t)||\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{1-\lambda_0}}$. Так как

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \Theta'(t)}{\Theta(t)} = \lim_{t \uparrow \omega} \left[\frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} - \frac{1}{\lambda_0 - 1} \right] = 0,$$

то функция Θ является медленно меняющейся при $t \uparrow \omega$. Тогда в силу свойств медленно меняющихся функций функция

$$L(z) = \Theta \left(\pi_\omega^{-1} \left(|z|^{\lambda_0 - 1} \mathrm{sign} \left(\alpha_0 y_1^0 (\lambda_0 - 1) \right) \right) \right)$$

является медленно меняющейся при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_{Y_1})$.

Используя (11) перепишем (1) в виде

$$\begin{aligned} y''(t) = \alpha_0 K \left(t, y(t), |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} L \left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} \mathrm{sign} y_1^0 \right) \mathrm{sign} y_1^0 \right) \times \\ \times |y(t)|^{\sigma_0} |y'(t)|^{\sigma_1} |\pi_\omega(t)|^{\frac{\sigma_1 + \lambda_0 + \sigma_0 \lambda_0 - 2}{1 - \lambda_0}}. \end{aligned} \qquad (12)$$

С учетом условия (3) имеем

$$\lim_{\substack{z_1 \to Y_1 \\ z_1 \in \Delta_{Y_1}}} \frac{K(t, z_0, z_1 L(z_1))}{K(t, z_0, z_1)} = \lim_{\substack{z_1 \to Y_1 \\ z_1 \in \Delta_{Y_1}}} \frac{f(t, z_0, z_1 L(z_1))}{f(t, z_0, z_1) L^{\sigma_1}(z_1)} = 1$$

равномерно по $t \in [a, \omega[, z_0 \in \Delta_{Y_0}$.

Поэтому с учетом (10) соотношение (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{y'(t)}{|y(t)|^{\sigma_0 + \sigma_1}} = \lambda_0 \left| \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \right|^{\sigma_1 - 1} K \left(t, y(t), |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} \mathrm{sign} y_1^0 \right) \times \\ \times |\pi_\omega(t)|^{\frac{(\sigma_1 + \sigma_0)\lambda_0 - 1}{1 - \lambda_0}} \mathrm{sign} y_1^0 [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Отсюда в силу первого из соотношений (10) имеем при $t \uparrow \omega$

$$\begin{aligned} \frac{y(t)}{|y(t)|^{\sigma_0 + \sigma_1}} = |C|^{1 - \sigma_0 - \sigma_1} |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0 (1 - \sigma_0 - \sigma_1)}{\lambda_0 - 1}} \times \\ \times K \left(t, y(t), |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} \mathrm{sign} y_1^0 \right) \mathrm{sign} y_0^0 [1 + o(1)], \end{aligned}$$

Из данного представления следует первое из соотношений (9).

Достаточность. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, а также имеют место условия (6) – (8). Покажем, что в этом случае дифференциальное уравнение (1) имеет хотя бы одно $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решение, допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (9). Сначала убедимся в том, что соотношение

$$y = C|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}} \left|K\left(t, y, |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} \mathrm{sign} y_1^0\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} (1+v) \tag{13}$$

однозначно определяет заданную на множестве $D = [t_1, \omega[\times\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, где $t_1 \in$ $\in [a, \omega[$, непрерывную неявную функцию $y = Y(t, v)$ вида

$$Y(t, v) = C|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1} + z(t,v)},$$

где функция z такова, что $|z(t,v)| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|$ при $(t, v) \in D$ и

$$\lim_{t\uparrow\omega} z(t,v) = 0 \quad \text{равномерно по } v: \ |v| \le \frac{1}{2}.$$

Полагая в (13) $y = C|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z(t,v)}$ получим

$$|\pi_\omega(t)|^{z(t,v)} = \left|K\left(t, C|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z(t,v)}, |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} \mathrm{sign} y_1^0\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} (1+v),$$

откуда следует, что

$$z(t, v) = b(t, v) + Z(t, v), \tag{14}$$

где

$$b(t,v) = \frac{\ln(1+v)}{\ln|\pi_\omega(t)|}, \ Z(t,v) = \frac{\ln K\left(t, C|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z(t,v)}, |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{(\lambda_0-1)}} \mathrm{sign} y_1^0\right)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\ln|\pi_\omega(t)|}.$$

В силу условий теоремы на функцию K с учетом свойств медленно меняющихся функций получим, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z(t,z) = 0 \quad \text{равномерно по } z: \ |z| \le \frac{1}{2}.$$

Кроме того в силу второго из условий (6) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\partial Z(t,z)}{\partial z} = 0 \quad \text{равномерно по } z: \ |z| \le \frac{1}{2}.$$

В силу приведенных выше предельных соотношений существует число $t_2 \in [t_1, \omega[$ такое, что на множестве $[t_1, \omega[\times\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ соблюдается неравенство

$$|b(t,v) + Z(t,z)| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right| \tag{15}$$

и условие Липшица

$$|Z(t,z_1) - Z(t,z_2)| \le \frac{1}{2}|z_1 - z_2| \tag{16}$$

при $t \in [t_2, \omega[$ и любых $z_1, z_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Выбрав таким образом число t_2 обозначим через $\mathbf{B}$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega = [t_2, \omega[\times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ функций $z : \Omega \to \mathbb{R}$ с нормой

$$||z|| = \sup_{(t,v)\in\Omega} |z(t,v)|.$$

Выделим из него подпространство $\mathbf{B}_0$ тех функций из $\mathbf{B}$, для которых $||z|| \le \le \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|$ и рассмотрим на $\mathbf{B}_0$ оператор Φ, определенный соотношением

$$\Phi(z)(t,v) = b(t,v) + Z(t,z). \tag{17}$$

В силу (15) и (16)

$$\forall z, \widetilde{z} \in \mathbf{B}_0 : \quad ||\Phi(z)|| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|, \quad ||\Phi(z) - \Phi(\widetilde{z})|| \le \frac{1}{2}||z - \widetilde{z}||.$$

Тогда оператор Φ отображает пространство $\mathbf{B}_0$ в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная функция $z \in \mathbf{B}_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (17) эта непрерывная на множестве Ω функция является единственным решением уравнения (13), удовлетворяющим условию $||z|| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|$. С учетом этого условия из (14) –(16) следует, что компоненты данного решения стремятся к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по v : $|v| \le \frac{1}{2}$. Таким образом показано, что искомая функция $Y(t,v)$ существует.

В силу условий теоремы на функцию K функция $Y(t,0)$ является правильно меняющейся функцией при $t \uparrow \omega$ порядка $\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \ne 0$. Тогда используя теорему 2.1 из [6] имеем при $t \uparrow \omega$

$$F(t) = \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} Y(t,0)[1 + o(1)], \tag{18}$$

где

$$F(t) = \int_{B_\omega}^{t} \frac{Y(\tau,0)}{\pi_\omega(\tau)} d\tau, \quad B_\omega = \begin{cases} a, & \text{если } \int_{t_2}^{\omega} \frac{Y(\tau,0)}{\pi_\omega(\tau)}\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int_{t_2}^{\omega} \frac{Y(\tau,0)}{\pi_\omega(\tau)}\, d\tau < +\infty. \end{cases}$$

С помощью замены

$$\begin{cases} y(t) = M_1(t(x))(1 + z_1(x)), \\ y'(t) = M_0(t(x))(1 + z_2(x)), \end{cases} \tag{19}$$
$$x = \beta \ln |\pi_\omega(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{если } \omega = +\infty, \\ -1 & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases}$$

где $M_0(t) = \frac{\lambda_0^2}{(\lambda_0-1)^2}\frac{F(t)}{\pi_\omega(t)}, \quad M_1(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}F(t),$
сведем уравнение (1) к системе

$$\begin{cases} z_1' = \frac{\beta\lambda_0}{\lambda_0-1}[z_2 - z_1], \\ z_2' = G_0(x)\beta(1+z_2)\dfrac{f(t(x), M_1(t(x))(1+z_1), M_0(t(x))(1+z_2))}{\alpha_0 M_0'(t(x))} - \\ -G_0(x)\beta(1+z_2), \end{cases} \tag{20}$$

где $G_0(x) = \dfrac{\pi_\omega(t(x))M_0'(t(x))}{M_0(t(x))}$.

Из вида функций M_0, M_1 с учетом условий (7)вытекает, что существует $t_0 \in$ $\in [t_2, \omega[$ такое, что

$$M_1(t)(1+z_1) \in \Delta_{Y_0}, \quad M_0(t)(1+z_2) \in \Delta_{Y_1} \text{ при } |z_1| < \frac{1}{2},\ |z_2| < \frac{1}{2},\ t \in [t_0, \omega[.$$

Рассмотрим систему (20) на множестве

$$\Omega = [x_0, +\infty[\times D, \quad \text{где } x_0 = \beta \ln|\pi_\omega(t_1)|, \quad D = \{(z_0, z_1) : |z_i| \le \frac{1}{2}, i = 1, 2\}.$$

Перепишем (20) в виде

$$\begin{cases} z_1' = A_{11}z_1 + A_{12}z_2, \\ z_2' = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + R_1(x, z_1, z_2) + R_2(x, z_1, z_2), \end{cases} \tag{21}$$

где

$$A_{11} = \beta\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}, \quad A_{12} = \beta\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1},$$
$$A_{21} = \beta\frac{1}{\lambda_0-1}\sigma_0, \quad A_{22} = \beta\frac{\sigma_1-1}{\lambda_0-1},$$

$$R_1(x, z_1, z_2) = \beta\left(G_1(x)G_0(x) - \frac{1}{\lambda_0-1}\right)[F_1(x, z_1, z_2)\cdot F_2(x, z_2)\cdot F_3(x)\cdot|1+z_1|^{\sigma_0}\times$$
$$\times|1+z_2|^{\sigma_1}] - (1+z_2)\beta\left(G_0(x) - \frac{1}{\lambda_0-1}\right) +$$
$$+\frac{\beta}{\lambda_0-1}[(F_1(x, z_1, z_2)\cdot F_2(x, z_2)\cdot F_3(x) - 1)\cdot|1+z_1|^{\sigma_0}\times$$
$$\times|1+z_2|^{\sigma_1}],$$

$$R_2(z_1, z_2) = \frac{\beta}{\lambda_0-1}[(|1+z_1|^{\sigma_0} - 1 - \sigma_0 z_1)|1+z_2|^{\sigma_1} + (1+\sigma_0 z_1)(|1+z_2|^{\sigma_1} - 1 - \sigma_1 z_2) +$$
$$+\sigma_0\sigma_1 z_1 z_2],$$

где

$$F_1(x, z_1, z_2) = \frac{K(t(x), M_1(t(x))(1+z_1), M_0(t(x))(1+z_2))}{K(t(x), M_1(t(x)), M_0(t(x))(1+z_2))},$$

$$F_2(x,z_2)=\frac{K(t(x),M_1(t(x)),M_0(t(x))(1+z_2))}{K(t(x),M_1(t(x)),M_0(t(x)))},$$

$$F_3(x)=\frac{K(t(x),M_1(t(x)),M_0(t(x)))}{K\left(t(x),Y(t(x),0),|\pi_\omega(t(x))|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\mathrm{sign}y_1^0\right)},$$

$$G_1(x)=\alpha_0\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right|^{\sigma_0+2\sigma_1}\left|\frac{F(t)}{Y(t,0)}\right|^{\sigma_0+\sigma_1-1}\frac{1}{\frac{Y(t,0)}{F(t)}-1}\left|\frac{Y(t,0)}{|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}}\right|^{\sigma_0+\sigma_1-1}.$$

Покажем, что

$$\lim_{x\to+\infty}F_1(x,z_1,z_2)=1 \text{ равномерно по } |z_1|<\frac{1}{2},|z_2|<\frac{1}{2}. \tag{22}$$

В силу условий (2) для любого отрезка $[c,d]\quad(0<c\le d)$

$$\lim_{\substack{u_0\to Y_0\\ u_0\in\Delta_{Y_0}}}\frac{K(t,\lambda u_0,u_1)}{K(t,u_0,u_1)}=1 \quad \text{равномерно по } \lambda\in[a,b],\quad t\in[a,\omega[,\quad u_1\in\Delta_{Y_1}.$$

В качестве $[c,d]$ возьмем $[0,5;1,5]$. Тогда в силу вида функций K и F_1 получим (22). Аналогично

$$\lim_{x\to+\infty}F_2(x,z_2)=1 \text{ равномерно по } |z_2|<\frac{1}{2}. \tag{23}$$

В силу вида функции M_0

$$\lim_{x\to+\infty}G_0(x)=\frac{1}{\lambda_0-1}. \tag{24}$$

Тогда функция M_0 является правильно меняющейся функцией порядка $\frac{1}{\lambda_0-1}$. Поэтому по аналогии с тем как было доказано (11) ясно, что

$$M_0(t)=|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}H(t),$$

где H — медленно меняющаяся функция при $t\uparrow\omega$. Отсюда с учетом (3), (13) и условий теоремы на функцию K следует, что

$$\lim_{x\to+\infty}F_3(x)=1. \tag{25}$$

Из (13) и (18) вытекает, что

$$\lim_{x\to+\infty}G_1(x)=1. \tag{26}$$

С учетом (22)–(26) имеем

$$\lim_{x\to+\infty}R_1(x,z_1,z_2)=0 \quad \text{равномерно по } |z_1|<\frac{1}{2},\quad |z_1|<\frac{1}{2}. \tag{27}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0} \frac{R_2(z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|} = 0. \tag{28}$$

Рассмотрим предельную матрицу коэффициентов системы (21)

$$A = \lim_{x\to+\infty} \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta\lambda_0}{\lambda_0-1} & \frac{\beta\lambda_0}{\lambda_0-1} \\ \frac{\beta\sigma_0}{\lambda_0-1} & \frac{\beta(\sigma_1-1)}{\lambda_0-1} \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы A $|A-\mu E|=0$, где E-единичная матрица второго порядка, имеет вид

$$\mu^2 + \mu\beta[\frac{\lambda_0-\sigma_1+1}{\lambda_0-1}] - \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)^2}[\sigma_1-1+\sigma_0] = 0. \tag{29}$$

В силу первого из условий (6) у этого уравнения при соответствующих значениях λ_0 нет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, с учетом (27) и (28), для системы дифференциальных уравнений (21) выполнены все условия теоремы 2.2 из [5]. Согласно этой лемме система (21), а значит, и система (20) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1,+\infty[\to \mathbb{R}^2 (x_1 \geq 0)$, стремящееся к нулю при $x\to+\infty$. Ему в силу замены (19), (13) и (18) соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (9). В силу этих представлений и (1) ясно, что полученное решение y является $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решением.

Полученные результаты проиллюстрируем на примере следующего класса уравнений.

Пример 1.

$$y'' = t^\mu e^{\sqrt{\ln|ty|}}|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1}, \tag{30}$$

где $\mu,\sigma_0,\sigma_1\in\mathbb{R}$, $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$, $t\in[5;+\infty[$.

Для данного уравнения функцией K из теоремы является функция $e^{\sqrt{\ln|ty|}}$. Поскольку функция $e^{\sqrt{\ln|z|}}$ является медленно меняющейся при $z\to+\infty$, то в силу свойств медленно меняющихся функций функция $e^{\sqrt{\ln|tg(t)|}}$ будет медленно меняющейся на бесконечности для любой правильно меняющейся на бесконечности функции g. Условия (2) и (3) очевидно выполняются для уравнений вида (30). В силу теоремы при

$$\frac{\mu+2-\sigma_1}{\mu+\sigma_0+1} \neq \sigma_1 - 1 \text{ либо } (\sigma_1-1)(\sigma_0+\sigma_1-1) > 0$$

уравнение (30) имеет $P_{+\infty}(Y_0,Y_1,\dfrac{\mu+2-\sigma_1}{\mu+\sigma_0+1})$– решения. Более того, для каждого такого решения имеет место второе из представлений и следующее асимптотическое представление при $t\to+\infty$

$$y(t)exp\left(\frac{\sqrt{\ln|ty|}}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right) \sim \left|\frac{2+\mu-\sigma_1}{\sigma+\mu+1}\left|\frac{2+\mu-\sigma_1}{1-\sigma_1-\sigma_0}\right|^{\sigma_1-2}\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \cdot t^{\frac{\mu+2-\sigma_1}{1-\sigma_1-\sigma_0}}.$$

Заключение. Для $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ установлены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений уравнения (1) и их производных первого порядка, а также получены необходимые и достаточные условия существования таких решений.

1. **Евтухов В. М.** Асимптотическое поведение решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена–Фаулера: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 [текст] / Евтухов Вячеслав Михайлович. – Одесса, 1980. – 119 с.
2. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов, М. А. Белозерова // Укр. мат. журнал. – 2008. – Т. 60, № 3. – С. 310–331.
3. **Белозерова М. А.** Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями близкими к степенным [текст] / М. А. Белозерова // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 3–15.
4. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных циклических систем обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / Евтухов В. М., Владова Е. С. // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 622–639.
5. **Евтухов В. М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений [текст] / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко// Укр. мат. ж. – 2010. – Т. 62, № 1. – С. 52–80.
6. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции [текст] / Е. Сенета. – М.: Наука, 1985. – 141 с.

ISSN 2304–1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2012 .–Т. 17, вип. 4 (16).–С. 25–33

УДК 519

Я. А. Воробьев
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Воробйов Я. А. Середнє значення одного класу арифметичних функцiй. В данiй статтi ми будуємо асимптотичну формулу для суматорних функцiй, асоцiйованих iз арифметичними функцiями спецiального класу, що дослiджувались в роботах Мак Магона та Оппенгейма. Ця асимптотична формула узагальнює результат, отриманий Катаи та Суббарао.
Ключовi слова: асимптотична формула, ряд Дiрiхле, арифметична функцiя.

Воробьев Я. А. Среднее значение одного класса арифметических функций. В данной статье мы строим асимптотическую формулу для сумматорных функций, ассоциированных с арифметическими функциями специального класса, которые исследовались в работах Мак Магона и Оппенгейма. Эта асимптотическая формула обобщает результат, полученный Катаи и Суббарао.
Ключевые слова: асимптотическая формула, ряд Дирихле, арифметическая функция.

Vorobyov Y. A. On summatory function of some class of multiplicative functions. In this paper we construct an asymptotic formula for summatory functions associated with the arithmetic functions of special class which investigated in the the works of Mac Mahon and Oppenheim. This asymptotic formula generalizes the result of Katai and Subbarao.
Key words: asymptotic formula, Dirichlet series, arithmetic function.

1. Введение.

Рассмотрим последовательность неотрицательных вещественных чисел $\{e_n\}$, $n = 2, 3, ...$ В предположении $e(n) < n, e(n) = O(n^{\varepsilon})$, где ε — произвольное малое положительное число, мы имеем

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{e(n)}{n^s}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}, \tag{1}$$

где бесконечное произведение и ряд сходятся абсолютно в полуплоскости $Res >$ > 1.

Равенство типа (1) часто встречаются в аналитической теории чисел. Например, пусть $e_n = 1$, если n — простое число, и $e_n = 0$ в остальных случаях, тогда (1) представляет собой тождество Эйлера, определяющее дзета-функцию $\zeta(s)$ при $Res > 1$. Аналогично, если $\chi(n)$ есть характер Дирихле по $mod\, p$ и

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} \chi(p), & \text{если } p - \text{ простое,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

то в (1) мы имеем тождество Эйлера для L-ции Дирихле.

В работах [1], [2], [3], [4], [5] рассмотрены более общие последовательности чисел $\{e_n\}$ и получены асимптотические формулы для соответствующих сумматорных функций $A_f(x) = \sum\limits_{n\le x} f(n)$.

Целью настоящей работы является построение асимптотических формул для $A_f(x)$ при достаточно общих условиях относительно производящего ряда

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(n)}{n^s}, Res > 1.$$

Мы будем использовать следующее обозначения:

$s = \sigma + it$ — комплексное число, $\sigma = Res$, $t = Ims$;

$\exp(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$;

$[x]$ — целая часть вещественного x;

$\zeta(s)$ — дзета-функция Римана;

$L(s, \chi_4) - L$ — функция Дирихле с неглавным характером $mod\, 4$;

$A_0, A_1, ...$ — положительные постоянные;

Символ Виноградова $'' <<''$означает то же, что и символ Ландау $''O''$.

2. Основные результаты.

Для последовательности $\{e_n\}$, определенной выше, рассмотрим производящий ряд

$$E(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \quad Res > 1.$$

Пусть $s_0 = 1$, $s_1 = 1 + it, ..., s_k = 1 + it_k$ — комплексные числа на прямой $Res = 1$, причем $0 < |t_1| < |t_2| < ... < |t_n| \le T_0$. Будем предполагать, что в полуплоскости $Res \ge 1$ справедливо представление

$$E(s) = \frac{A_0}{(s-1)^{\beta_0}} + \frac{A_1}{(s-s_1)^{\beta_1}} + ... + \frac{A_k}{(s-s_k)^{\beta_k}} + g(s), \tag{2}$$

где $A_0, A_1, ..., A_k, \beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ — положительные постоянные, а функция $g(s)$ ограничена в полосе

$$Res > 1, |Ims| \le T_0.$$

Кроме того, будем считать, что для фиксированого $a > 0$

$$|E(1+it)| < a \log|t|, \quad |t| \ge T_0. \tag{3}$$

Из определения $F(s)$ следует, что при $Res = \sigma > 1$

$$\log F(s) = \log \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{e(n)}{n^s}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(e(n))^{m-1}}{n^{ms}} =$$

$$= E(s) + O\left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m(\sigma-\varepsilon)-1)}\right) = E(s) + O(1),$$

с постоянной в символе $''O''$, зависящей от ε.

Поэтому в полосе $Res > 1$, $|t| \leq T_0$, имеем

$$F(\sigma + it) = \exp\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{(s-1-it_j)^{\beta_j}} + g_1(s)\right), \tag{4}$$

где $g_1(s)$ ограничена в этой полосе.

Для $Res > 1$, $|t| \leq T_0$, из (3) следует

$$|F(s)| = \exp\left(ReE(s) + c_0\right) \leq e^{c_0}\,|t|^a\,, \tag{5}$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{y^{s+l}}{s(s+1)...(s+l)}ds = \begin{cases} \frac{1}{l!}(y-1)^l, & \text{если } y \geq 1, \\ 0, & \text{если } 0 < y < 1, \end{cases}$$

мы можем записать

$$\sum_{n \leq x} f(n)\left(1 - \frac{n}{x}\right)^L = \frac{l!}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} F(s)\frac{x^s}{s(s+1)...(s+L)}ds, \tag{6}$$

где $L = [a] + 1$.

С точностью до переобозначения будем считать, что $0 < t_1 < t_2 < ... < t_{k_1}$; $t_k < t_{k-1} < ... < t_{k_1+1} < 0$;

Пусть $\Delta = \min(t_1, t_2 - t_1, ..., t_{k_1} - t_{k_1-1}, |t_{k_1+1}|, t_{k+1} - t_{k+2}, ..., t_{k-1} - t_k)$.

И теперь для каждого $j = 0, 1, ..., k$ положим

$$r_j = \min\left(\frac{\Delta}{2}, \left(\frac{\beta_j \Delta_j}{\log x}\right)^{\frac{1}{\beta_j+1}}\right).$$

Обозначим через C_j полуокружность $|s - s_j| = r_j$, $Res \geq 1$, $j = 0, 1, ..., k$.
С каждой точкой s_j связаны два отрезка J'_j, J''_j

$$J'_j = \left(1 + i(t_j + r_j), 1 + i\left(t + r_j + \frac{t_{j+1} - t_j}{2}\right)\right).$$

$$J''_j = \left(1 + i(t_j + r_j), 1 + i\left(t_j + r_j + \frac{t_j - t_{j-1}}{2}\right)\right).$$

Кроме того, обозначим через K_j отрезок на прямой $Res = 1$, расположенный между отрезками J''_j и J'_{j+1}.

Далее, обозначим еще 4 отрезка

$$I_1 = \{1 + it\,|t \in [T_0 + 1, \infty)\}\,,$$

$$I_2 = \{1 + it\,|t \in [t_{k_1} + r_{k_1}, T_0 + 1)\}\,,$$

$$I_3 = \{1 - it\,|t \in [-T_0 - 1, -\infty)\}\,,$$

$$I_4 = \{1 - it\,|t \in [t_{k_1} - r_{k_1}, T_0 - 1)\}\,.$$

Пусть Z есть объединение отрезков $I_1, I_2, I_3, I_4, J'_j, J''_j, K_j$ и полуокружностей C_j, $j = 0, 1, ..., k$.

И теперь заменим контур интегрирования в (6) контуром Z.

Заметим, что контур Z и прямая $Res = 2$ образуют замкнутый контур, внутри которого нет особенностей подынтегральной функции. Потому по теореме о вычетах получим

$$S_L(x) = \sum_{n \le x} f(n)\left(1 - \frac{n}{x}\right)^L = \frac{l!}{2\pi i}\int_Z F(s)\frac{x^s}{s(s+1)...(s+l)}ds. \qquad (7)$$

В силу оценки (5) имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{I_1} F(s)\frac{x^s}{s(s+1)...(s+l)}ds\right| = O(x). \qquad (8)$$

Аналогичную оценку имеют интегралы на контурах I_3, K_j, $j = 0, 1, ..., k$.

Далее, поскольку на отрезках I_2, I_4

$$|F(1+it)| \le \overline{\overline{C}}\max\left(\exp\left(\frac{A_{k_1}}{r_{k_1}^{\beta_1}}\cos\frac{\pi\beta_{k_1}}{2}\right), \exp\left(\frac{A_k}{r_k^{\beta_k}}\cos\frac{\pi\beta_k}{2}\right)\right), \qquad (9)$$

а на отрезках J'_j, J''_j, $j = 0, 1, ..., k$.

$$|F(1+it)| \le \overline{\overline{C}}_j\exp\left(\frac{A_j}{r\beta_j}\cos\frac{\pi\beta_j}{2}\right), \qquad (10)$$

где $c, A_0, A_1, ..., c_k$ — положительные абсолютные постоянные, то в силу $\dfrac{1}{\beta}\cos\dfrac{\pi\beta}{2} \le \dfrac{1}{\beta}$, находим

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{I_0} F(s)\frac{x^s}{s(s+1)...(s+l)}ds\right| << x\sum_{j=0}^{L}\exp(B_j\log x), \qquad (11)$$

где $B_j = \dfrac{1}{\beta_j}r_j$, $I_0 = \bigcup\limits_{j=0}^{k}\left(J'_j\bigcup J''_j\right)$.

Основную трудность доставляют интегралы на полуокружностях C_j. Рассмотрим типичную полуокружность

$$C = |s - 1 - iy| = r, r = \left(\frac{\beta A}{\log x}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}, A, \beta > 0 - const.$$

Здесь $1 + iy$ есть одна из точек $s_0, s_1, ..., s_k$.

Поэтому в окрестности точки $1+iy$ имеем

$$\frac{F(s)}{s(s+1)...(s+l)} = \exp\left(\frac{A}{(s-1-iy)^{\rho_0}} + g_2(s)\right)\frac{1}{s(s+1)...(s+l)}. \tag{12}$$

Ясно, что $g_2(s)$ — аналитична в окрестности точки $1+iy$, а поэтому

$$\frac{\exp(g_2(s))}{s(s+1)...(s+l)} = a_0 + a_1(s-1) + ... + a_m(s-1)^H + (s-1)^{H+1}g(s), \tag{13}$$

где H — произвольное фиксированное целое, $a_0, a_1, ..., a_H$ — подходящие постоянные, $a_0 \neq 0$ $g(s)$ — ограничена в круге $|s-1-iy| \leq r$.
Обозначим

$$J(h,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \exp\left(\frac{A}{(s-1-iy)^\beta}\right)(s-1-iy)^{h-1}x^s ds. \tag{14}$$

$$J_H(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \exp\left(\frac{A}{(s-1-iy)^\beta}\right)(s-1-iy)^{H-1}g(s)x^s ds. \tag{15}$$

Теперь из (12)-(13) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C F(s)\frac{x^s}{s(s+10...(s+l)}ds = \sum_{h=1}^{H+1} a_{h-1}J(h,y) + J_H(y). \tag{16}$$

Пусть

$$\begin{gathered} p(\theta) = \frac{\cos\beta\theta}{\beta} + \cos\theta; \quad q(\theta) = -\frac{\sin\beta\theta}{\beta} + \sin\theta; \\ u(\theta) = rp(\theta)\log x; \quad v_h(\theta) = rq(\theta)\log x + h\theta. \end{gathered} \tag{17}$$

Учитывая, что полуокружность C задаётся равенством $(s-1-iy) = re^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\begin{gathered} J(h) = \frac{r^h}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp(rp(\theta)\log x + iv_h(\theta))d\theta, \\ |J_H| \leq \frac{r^{H+2}}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp(rp(\theta)\log x)d\theta. \end{gathered} \tag{18}$$

Из определения $u(\theta)$ и $v_h(\theta)$ видно, что $u(h)$ — четная функция, а $v_h(\theta)$ — нечетная функция.

Поэтому

$$J(h) = \frac{r^h}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(u(\theta)) \cos v_h(\theta) d\theta.$$

И. Катаи и М. Суббарао в работе [2] разработали метод построения асимптотической оценки интегралов в (18). Результат этих авторов представим в виде леммы.

Лемма 1. *Для каждого* $h \in \{1, 2, ...H+1\}$ *и произвольных натуральных чисел* K_0, K_1 *существуют вычислимые постоянные* $b_1, ..., b_{2K_0}$ *и* $c_1(h), ..., c_{K_h}(h)$, *такие, что*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(u\left(\theta\right)\right) d\theta = \exp\left(\frac{r \log x}{\beta}\right) \left\{ \frac{b_1}{(r \log x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{b_2}{r \log x} + ... + \frac{b_{2K_0}}{(r \log x)^{K_0}} \right\} +$$

$$+O\left(\exp\left(\frac{\beta+1}{\beta} r \log x\right) (r \log x)^{-\frac{1}{2K_0+1}}\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(u\left(\theta\right)\right) \cos v_h(\theta) d\theta = \exp\left(\frac{\beta+1}{\beta} r \log x\right) \sum_{\nu=1}^{K_h} \frac{c_\nu(h)}{(r \log x)^{\frac{\nu}{2}}} +$$

$$+O\left(\exp\left(\frac{\beta+1}{\beta} r \log x\right) (r \log x)^{-\frac{K_1+1}{2}}\right).$$

Постоянные в символах "O" могут зависеть от K_0 *и, соответственно,* K_h.
(Подробнее, см., леммы 3.1 и 3.2 из [2]).

3. Основная теорема

В этой секции мы построим асимптотическую формулу для $S_0(x) = \sum_{n \le x} f(n)$ и приведем некоторые примеры.

В силу (7), (16), (8), (18) и леммы имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{l!}S_L(x) &= \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j}F(s)\frac{x^s}{s(s+1)...(s+l)}ds + \\
&\quad + O\left(x\sum_{j=0}^{k}\exp\left(\frac{r_j}{\beta_j}\log x\right)\right) = \\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{h=1}^{H+1}a_{h-1}^{(j)}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j}\exp\left(\frac{A_j}{(s-1-it_j)^{\beta_j}}\right)(s-1-it_j)^{h-1}x^s ds + \\
&\quad + O\left(\sum_{j=0}^{k}\exp\left(\frac{r_j}{\beta_j}\log x\right)\right) = \\
&= \sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{h=0}^{H+1}a_{h-1}^{(j)}J(h,t_j)+J_H(t_j)\right) + \qquad (19)\\
&\quad + O\left(\sum_{j=0}^{k}\exp\left(\frac{r_j}{\beta_j}\log x\right)\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{k}\sum_{h=1}^{H+1}a_{h-1}^{(j)}r_j^h\left\{\sum_{\nu=1}^{K_h}\frac{c_\nu(h)}{(r_j\log x)^{\frac{\nu}{2}}}+O\left(\exp\left(\frac{\beta+1}{\rho}r\log x\right)(r\log x)^{-\frac{K_h+1}{2}}\right)\right\} = \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{k}\left\{\sum_{h=1}^{H+1}a_{h-1}^{(j)}r_j^h\sum_{\nu=1}^{K_h}\frac{c_\nu(h)}{(r_j\log x)^{\frac{\nu}{2}}}+O\left(\frac{r_j^{H+2-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\log x}}\right)\right\}\exp\left(\frac{\beta_j+1}{\beta_j}r\log x\right) + \\
&\quad + O\left(\sum_{j=0}^{k}\exp\left(\frac{\beta+1}{\beta_j}r_j\log x\right)\sum_{h=1}^{H+1}r_j^h(r_j\log x)^{-\frac{K_h+1}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

Теперь, вспоминая определение чисел r_j и выбирая числа K_h достаточно большими, мы приходим к асимптотической формуле

$$
\begin{aligned}
S_L(x) &= \sum_{j=0}^{k}\exp\left(\gamma_j(\log x)^{-\frac{\beta_j}{\beta_j+1}}\right)\cdot \\
&\cdot\left\{\sum_{\substack{\eta\in T(H)\\ J(H)}}D(\eta)(\log x)^{-\frac{\eta}{\beta_j+1}}+O\left((\log x)^{-\frac{h_0}{\beta_j+1}}\right)\right\}, \qquad (20)
\end{aligned}
$$

где $T(H)$ — множество вещественных чисел η вида: $h+\dfrac{\nu\beta_j}{2}$; $h,\nu\in N$, под условием $\eta > h_0 = H+2+\max\limits_j\beta_j$; $\gamma_j = \dfrac{\beta_j+1}{\beta_j}(\beta_jA_j)^{\dfrac{1}{\beta_j+1}}$, $j=0,1,...,k$.

Теорема 1. *Пусть* $\{e(n)\}$, $\{f(n)\}$ *— последовательности неотрицательных вещественных чисел, которые связаны соотношением (1) и пусть соответствующие производящие функции* $E(s)$ *и* $F(s)$ *удовлетворяют условиям (2), (3), (4). Тогда при* $x \to \infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{n\le x} f(n) = x\sum_{j=0}^{k} D_j \exp\left(\gamma_j (\log x)^{-\frac{\beta_j}{\beta_j+1}}\left(1+O\left((\log x)^{-\varepsilon_0}\right)\right)\right),$$

где D_j *— вычислимые положительные постоянные, а* $\varepsilon_0 \ge \frac{1}{l}\min\limits_j\left(\dfrac{\beta_j}{\beta_j+1}\right)$.

Доказательство теоремы сразу следует из равенства (20) по методу асимптотического дифференцирования (с учетом неотрицательности чисел $f(n)$) (см., например, [6], Прилож. 1).

Рассмотрим функцию, определенную на множестве натуральных чисел и задаваемую равенством

$$b(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n - \text{ представимо суммой двух квадратов,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $B = \{n \in \mathbb{N} | b(n) = 1\}$.

Из теории чисел известно, что $b(n) = 1$ тогда и только тогда, когда в каноническое разложение n простые числа вида $4k+3$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ входят с четными показателями. Кроме того, производящая функция

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s},\ Res > 1,$$

имеет представление

$$F(s) = (1-2^{-s})^{-1}\prod_{p\equiv 1 (mod 4)}(1-p^{-s})^{-1}\prod_{p\equiv 3 (mod 4)}(1-p^{-2s})^{-1} = \sqrt{\xi(s)L(s,\chi_4)}\cdot G_0(s),$$

где $G(s)$ — регулярна и ограничена в полуплоскости $Res > \frac{1}{2}$.

Э. Ландау показал, что

$$\sum_{n\le x} b(n) = a_0(\log x)^{-\frac{1}{2}} + x\sum_{k-1}^{k=1}\frac{a_k}{(\log x)^{k+\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{k+\frac{1}{2}}}\right),$$

где $k > 0$ — произвольное целое, а постоянная в символе $''O''$ зависит только от k.

Такой же результат следует из доказанной нами теоремы.

Обобщим рассматриваемую задачу.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$.

Обозначим

$$\sigma_{i\alpha}^{(B)}(n) = b(n)\sum_{\substack{d|n \\ d\in B}} d^{i\alpha}.$$

Легко убедиться, что $\sigma_{i\alpha}^{(B)}(n)$ — мультипликативная функция, а потому, используя тождество, получим производящую функцию для последовательности $\{\sigma_{i\alpha}^{(B)}(n)\}$

$$F_{i\alpha}(s) = \sqrt{\xi(s)\xi(s-i\alpha)} \cdot G_0(s), \ (Res > 1),$$

где $G_0(s)$ — регулярная в области $Res > \frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$F_{i\alpha}(s) = \frac{a}{(s-1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{b}{(s-1-i\alpha)^{\frac{1}{2}}} + U(s), a, b - const,$$

где $U(s)$ удовлетворяет условиям доказанной теоремы. Поэтому для сумматорной функции $\sum\limits_{n\leq x} \sigma_{i\alpha}^{(B)}(n)$ мы можем получить асимптотическую формулу указанного в теореме вида.

Заметим также, что метод доказательства теоремы применим и в более общем случае, когда особые точки s_j функции $F(s)$ расположены не обязательно на прямой $Res = 1$. Важно только, чтобы Res_j, $j = 1, ..., k$, находились в полосе $\frac{1}{2} < Res_j \leq 1$.

Заключение. Для специального класса арифметических функций, исследованных в работах Мак Магона и Оппенгейма, построена асимптотическая формула для суммарной функции, обобщающая результат Катаи и Суббарао.

1. **Canfied R.** On the problem of Oppenheim concerning "Factorisatio Numerorum" [text] / R. Canfied, P. Erdos, C. Pomerance // I. Number Theory. – 1983. – V. 17. – P. 1–28.
2. **Katai I.** On product partitions and asymptotic formulas [text] / I. Katai, M. Subarao // Proc. Intorm. Conf. on analytic number teory, Banglagore, India, December 13–15, 2003. Mysore: Ramanujan Math.Soc., Romanujan Math. Soc. Lecture Notes. – 2006. – V. 2. – P. 99–114.
3. **Oppenheim A.** On an arithmetic function [text] / A. Oppenheim // Proc. London Math. Soc., I. – 1926. – P. 205–211.
4. **Oppenheim A.** On an arithmetic function [text] / A. Oppenheim // Proc. London Math. Soc., II. – 1927. – P. 123–130.
5. **Mac Mahon P.** Diruhlet series and the teory of partitions [text] / P. Mac Mahon // Proc. London Math. Soc. 2. – V. 22. – 1924. – P. 401–411.
6. **Прахар К.** Распределение простых чисел [текст] / К. Прахар. – М.: Мир, 1967. – 513 с.

ISSN 2304–1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2012 .–Т. 17, вип. 4 (16).–С. 34–39

УДК 517.925

З. Ю. Дадаян, А. С. Радова
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ФУНКЦИЯ ДЕЛИТЕЛЕЙ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ

Дадаян З. Ю., Радова А. С. Функцiя дiльникiв гауссових чисел. Побудовано асимптотичну формулу для суматорної функцiї, асоцiйованої з функцiєю дiльникiв $\tau(\omega)$ кiльця цiлих гауссових чисел.
Ключовi слова: гауссовi числа, функцiя дiльникiв, асимптотична формула.

Дадаян З. Ю., Радова А. С. Функция делителей гауссовых чисел. Построена асимптотическая формула для сумматорной функции, ассоциированной с функцией делителей $\tau(\omega)$ кольца целых гауссовых чисел.
Ключевые слова: гауссовы числа, функция делителей, асимптотическая формула.

Dadayan Z. Yu., Radova A. S. Divisor function of Gaussian integers. We will construct an asymptotic formula for the summatory function, associated with the divisor function over the ring of Gaussian integers.
Key words: gaussian integers, divisor function, asymptotic formula.

Введение. В 1962 году Лай Дык Тхинь [1] нашел асимптотическую формулу для сумматорной функции, ассоциированной с $\tau(\omega)$, с остаточным членом $O\left(x^{\theta+\varepsilon}\right)$. У. Б. Жанбырбаева [2] изучала распределение значений функции $\tau(\omega)$ на арифметической прогрессии.

В настоящей работе получено представление остаточного члена в виде конечной тригонометрической суммы, что позволяет изучать асимптотическое распределение среднего квадратического остаточного члена.

В дальнейшем используем следующие стандартные обозначения:
$s \in \mathbb{C},\ s = \sigma + it,\ \sigma = \Re s,\ t = \Im s$;
$\mathbb{Z}[i]$ — кольцо целых гауссовых чисел, то есть $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \,|\, a,\ b \in \mathbb{Z},\ i^2 = -1\}$;
$N(\omega) = |\omega|^2$ — норма целого гауссова ω;
$\tau(\cdot)$ — функция числа делителей над $\mathbb{Z}[i]$;
$\arg z$ — аргумент $z \in \mathbb{C}$;
$\zeta(s)$ — дзета-функция Римана;
$\chi_\gamma(\omega)$ — характер группы классов вычетов по модулю целого гауссова γ;
$L(s;\ \chi) = \sum\limits_{\omega\in\mathbb{Z}[i]} \frac{\chi(\omega)}{N^s(\omega)}$ — L-ряд Дирихле ($\Re s > 1$);
$Z_m(s) = \sum\limits_{\omega\in\mathbb{Z}[i]} \frac{\lambda_m(\omega)}{N^s(\omega)}$ — Z-функция Гекке с «Grossencharacter» $\lambda_m(\omega) = e^{4mi\arg\omega}$, где $m \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{C},\ \Re s > 1$.

Основные результаты. Для $m \in \mathbb{Z}$ и $\omega \in \mathbb{Z}[i]$ определим функцию

$$\tau_m(\omega) = \sum_{\substack{\delta_1,\, \delta_2 \in \mathbb{Z}[i] \\ \delta_1\delta_2 = \omega}} {}^{*} e^{4mi\arg\delta_1} e^{4mi\arg\delta_2} = e^{4mi\arg\omega}\tau(\omega), \tag{1}$$

где $\tau(\omega)$ — число различных (с точностью до ассоциированности) делителей целого гауссова числа ω, а «*» обозначает, что суммирование ведется с учетом неассоциированности.

Цель настоящей работы — построение асимптотической формулы для сумматорной функции
$$\sum_{N(\omega)\le x} \tau_m(\omega). \tag{2}$$

1. Вспомогательные утверждения. В этой секции будут получены некоторые вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основного результата.

Лемма. *В области* $-\frac{1}{4} \le \Re s \le 2,\ |\Im s| \ge 3$ *справедливы оценки*

$$Z_m(s) \ll \begin{cases} \left(m^2+t^2\right)^{\frac{1-\sigma}{3}} \log^4\left(m^2+t^2\right), \ \textit{если}\ 1 \le \sigma \le 2; \\ \log^4\left(m^2+t^2\right), \ \textit{если}\ \frac{1}{4} \le \sigma \le 1; \\ \left(m^2+t^2\right)^{\frac{19-32\sigma}{18}} \log^4\left(m^2+t^2\right), \ \textit{если}\ -\frac{1}{4} \le \sigma \le \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Из определения $Z_m(s)$, его функционального уравнения и в силу формулы Стирлинга для Г-функции получаем

$$Z_m(\sigma+it) \ll \log\left(m^2+t^2\right), \ \ \sigma \ge 1, \ \ |t| \ge 3;$$

$$Z_m\left(-\frac{1}{4}+it\right) \ll \left(m^2+t^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Кроме того, (см. 6.16 в [3])

$$Z_m\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll \left(m^2+t^2\right)^{\frac{1}{6}} \log\left(m^2+t^2\right).$$

Теперь утверждение леммы следует из принципа Фрагмена-Линделёфа в полосах $\frac{1}{2} \le \Re s \le 1$ и $-\frac{1}{4} \le \Re s \le \frac{1}{2}$.

Рассмотрим
$$T_m(x;\alpha_0) := \sum_{N(\omega)\le x}{}^{*} \frac{\tau_m(\omega)}{N^{\alpha_0}(\omega)}, \tag{4}$$
где $m \in \mathbb{Z},\ x \ge 1 \in \mathbb{R},\ \alpha_0 \in \mathbb{C}\ (\Re\alpha_0 = a)$.

Заметим, что производящий ряд Дирихле для функции $\frac{\tau_m(\omega)}{N(\omega)^{\alpha_0}}$, $\alpha_0 = a_0 + ib_0$, имеет вид
$$\sum_{\omega\in\mathbb{Z}[i]}{}^{*} \frac{\tau_m(\omega)N(\omega)^{-\alpha_0}}{N(\omega)} = Z_m^2(s+\alpha_0), \tag{5}$$
где $\Re(s+\alpha_0) > 1$.

Сначала рассмотрим случай, когда $\alpha_0 = 0,\ m = 0$.

В силу формулы Перрона для рядов Дирихле получаем

$$\begin{gathered}\sum_{N(\omega)\leq x}\tau(\omega)=\underset{s=1}{res}\left(Z_0^2(s)\tfrac{x^s}{s}\right)+\underset{s=0}{res}\left(Z_0^2(s)\tfrac{x^s}{s}\right)+\\ +\tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{-b-iT}^{-b+iT}Z_0^2(s)\tfrac{x^s}{s}ds+O\left(\tfrac{x^s}{T(c-1)^2}\right),\end{gathered}\tag{6}$$

где $T>1$, $A>1$, $0<b<\frac{1}{4}$ — вещественные числа, которые будут выбраны позднее.

Поскольку $Z_0(s)=\zeta(s)L(s,\chi_4)$, то

$$\begin{gathered}\underset{s=1}{res}\left(Z_0^2(s)\tfrac{x^s}{s}\right)=\tfrac{\pi^2}{16}x\log x+\left(\tfrac{\pi}{2}L'(1,\chi_4)+\tfrac{\pi^2\gamma}{8}-\tfrac{\pi^2}{16}\right)x,\\ \underset{s=0}{res}\left(Z_0^2(s)\tfrac{x^s}{s}\right)=\zeta^2(0)L^2(0,\chi_4).\end{gathered}\tag{7}$$

Для вычисления интеграла в (6) применим функциональное уравнение для $Z_0(s)$. Равномерная сходимость ряда для $Z_0(s)$ на прямой $Res=1+b$ даёт

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-b-iT}^{-b+iT}Z_0^2(s)\frac{x^s}{s}ds=\sum_{\omega}{}^{*}\frac{1}{\pi^2}\frac{\tau(\omega)}{N(\omega)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-b-iT}^{-b+iT}\frac{\Gamma^2(1-s)}{s\Gamma^2(s)}(\pi^4xN(\omega))^sds.\tag{8}$$

Используя формулу Стирлинга для Γ-функции Эйлера

$$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi}\exp\left(\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-z\right)\cdot\left(1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}+O\left(\frac{1}{|z|^3}\right)\right)\tag{9}$$

для $z\to\infty$ в полосе $-1\leq\Re z\leq 2$, получаем для $y=\pi^4xN(\omega)$

$$\begin{gathered}I(\omega):=\tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{-b-iT}^{-b+iT}\tfrac{\Gamma^2(1-s)}{s\Gamma^2(s)}y^sds=\\ =\tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{-b-iT}^{-b+iT}\Gamma\left(\tfrac{3}{2}-4s\right)e^{2\pi i\left(s-\frac{1}{2}\right)}\tfrac{y^s}{\sqrt{2\pi}}\left(1+O\left(\tfrac{1}{|s|}\right)\right)ds=\\ =\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{\frac{3}{8}}e^{-\frac{\pi i}{4}}\tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3}{2}+b-4iT}^{\frac{3}{2}+b+4iT}\Gamma(z)e^{-\frac{\pi iz}{2}}\left(y^{\frac{1}{4}}\right)^{-z}dz+O\left(T^{1+4b}y^{-b}\right).\end{gathered}\tag{10}$$

Возьмём $T_0>1$ (уточним его позже). Тогда в силу (9) интеграл справа в (10) приводит к равенству

$$\begin{gathered}I(\omega)=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\pi i}{4}}y^{\frac{3}{8}}\tfrac{1}{2\pi i}\cdot\\ \cdot\int\limits_{T_0}^{T}t^{1+4b}\left(y^{-\frac{it}{4}}e^{it(\log t-1)}+y^{\frac{it}{4}}e^{-it(\log t-1)}\right)\left(1+\tfrac{1}{12t}+\tfrac{A}{t^2}+O\left(\tfrac{1}{t^3}\right)\right)dt+\\ +O\left(T^{1+4b}y^{-b}\right)+O\left(T_0^{2+4b}y^{-b}\right).\end{gathered}\tag{11}$$

Положим $T_0=T^{\frac{1+4b}{2+4b}}y^{-\frac{b}{2+4b}}$, $T=x^{\frac{1}{2+4b}}$.

В последнем интеграле сделаем замену $t=y^{\frac{1}{4}}u$ и рассмотрим функцию $f(u)=y^{\frac{1}{4}}(u\log u-u)$. Имеем $f'(1)=0$, $f''(1)=y^{\frac{1}{4}}>0$, то есть $t=1$ является единственной стационарной точкой для интеграла в (11) (если $1 \in \left[\frac{T_0}{y^{\frac14}}, \frac{T}{y^{\frac14}}\right]$). Поэтому методом стационарной фазы (см. в [5] теорему 1.4) находим

$$I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-b} \frac{1}{2\pi i}\left(e^{-iy^{\frac14}+i\frac{\pi}{4}} - e^{iy^{\frac14}-i\frac{\pi}{4}}\right) y^{\frac38+b} + O\left(y^{\frac18}\right) + O\left(T^{1+4b}y^{-b}\right), \quad (12)$$

причём первое слагаемое нужно опустить, если $1 \notin \left[\frac{T_0}{y^{\frac14}}, \frac{T}{y^{\frac14}}\right]$.

Для случая $m \neq 0$ вместо интеграла (8) вычисляем интеграл

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-b-iT}^{-b+iT} Z_m(s)\frac{x^s}{s}ds = \\ = \sum_{\omega}{}^{*} \frac{1}{\pi^2}\frac{\tau_m(\omega)}{N(\omega)} \cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-b-iT}^{-b+iT} \frac{\Gamma^2(2|m|+1-s)}{s\Gamma^2(2|m|+s)}\left(\pi^4 x N(\omega)\right)^s ds,\end{gathered} \quad (13)$$

вычисление которого сводится к оценке интеграла

$$\begin{gathered} I_m(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-b} e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac32+b-4it}^{\frac32+b+4it}\left(\frac{m^2}{4}+t^2\right)^{\frac12+2b} \cdot \\ \cdot\left(y^{-i\frac{t}{4}} e^{it\left(4-2\log\left(\frac{m^2}{4}+t^2\right)\right)} + y^{i\frac{t}{4}} e^{-it\left(4-2\log\left(\frac{m^2}{4}+t^2\right)\right)}\right) \cdot \\ \cdot\left(1 + O\left(\frac{m^2}{4}+t^2\right)^{-\frac12}\right) dt. \end{gathered} \quad (14)$$

Для случая $|m| \geq T$ оцениваем $I_m(\omega)$ тривиально

$$I_m(\omega) \ll y^{-b}|m|^{2(1+2b)}\log T. \quad (15)$$

Если $|m| < T$, то $I_m(\omega)$ имеет такого же типа оценку, что $I_m(\omega)$ в соотношении (12):

$$\begin{gathered} I_m(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-b}\frac{1}{\pi}\left(\frac{m^2}{4}+1\right)^{\frac12+2b} y^{\frac38+b}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \pi\left(xN(\omega)\right)^{\frac14}\right) + \\ + O\left(y^{\frac18}\right) + O\left(T^2+m^2\right). \end{gathered} \quad (16)$$

2. Доказательство основного результата. В этой секции будут рассмотрены 2 теоремы, содержащие асимптотические оценки для сумматорных функций $\sum\limits_{N(\omega)\leq x}\tau(\omega)$ и $\sum\limits_{N(\omega)\leq x}\tau_m(\omega)$.

Теорема 1. *При* $x \to \infty$ *и* $X \geq x^{\frac{2+3b}{4-4b-3b^2}}$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{gathered} \sum_{N(\omega)\leq x}{}^{*}\tau(\omega) = \frac{\pi^2}{16}x\log x + \left(\frac{\pi}{2}L'(1,\chi_4) + \frac{\pi^2\gamma}{8} - \frac{\pi^2}{16}\right)x + \\ + \frac{x^{\frac38}}{\pi^2\sqrt2}\sum_{N(\omega)\leq X}{}^{*}\frac{\tau(\omega)}{N^{\frac58}(\omega)}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \pi(xN(\omega))^{\frac14}\right) + \\ + O\left(x^{\frac18}X^{\frac18}\log^2 X\right) + O\left(x^{\frac{1}{2+b}}X^{-\frac{b}{2+b}}\log^2 X\right), \end{gathered} \quad (17)$$

где $0 < b < \frac14$.

Доказательство. Воспользуемся соотношением (6). Тогда в силу (10) для $X > 2\frac{T^4}{\pi^4 x}$ имеем

$$\sum_{N(\omega)>X}{}^{*}\frac{\tau(\omega)}{N(\omega)}I(\omega) \ll \sum_{N(\omega)>X}{}^{*}\frac{\tau(\omega)}{N(\omega)}(xN(\omega))^{-b}\left|\int\limits_1^T t^{1+b}e^{it\left(\log\frac{t}{y^{\frac{1}{4}}}-1\right)}dt\right|.$$

Поскольку $\left|\frac{d}{dt}\left(t\log\frac{t}{y^{\frac{1}{4}}}-1\right)\right| = \left|\log\frac{t}{y^{\frac{1}{4}}}\right| > \log 2$, то интегрирование по частям в последней сумме даёт

$$\sum_{N(\omega)>X}{}^{*}\frac{\tau(\omega)}{N(\omega)}I(\omega) \ll \sum_{N(\omega)>X}{}^{*}\frac{\tau(\omega)x^{-b}}{N(\omega)^{1+b}}T^{1+b} \ll T^{1+b}x^{-b}X^{-b}\log X. \qquad (18)$$

Для $N(\omega) \le 2X$ пользуемся оценкой (12) для $I(\omega)$, что даёт

$$\begin{gathered}\sum_{N(\omega)\le X}{}^{*}\frac{\tau(\omega)}{N(\omega)}I(\omega) = \frac{1}{\pi^2\sqrt{2}}x^{\frac{3}{8}}\sum_{N(w)\le X}{}^{*}\frac{\tau(\omega)}{N^{\frac{5}{8}}(\omega)}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\pi(xN(\omega))^{\frac{1}{4}}\right)+\\ +O\left(x^{\frac{1}{8}}X^{\frac{1}{8}}\log^2 X\right).\end{gathered} \qquad (19)$$

Положим $T = x^{\frac{1+b}{2+b}}X^{\frac{b}{2+b}}$. Тогда для $0 < b < \frac{1}{4}$ из (18), (19), (6)–(8) следует, что для любого $X \ge x^{\frac{2+3b}{(2+b)(2-3b)}}$ справедливо равенство

$$\begin{gathered}\sum_{N(\omega)\le x}{}^{*}\tau(\omega) = \textit{гл. чл.} + \frac{x^{\frac{3}{8}}}{\pi^2\sqrt{2}}\sum_{N(\omega)\le X}{}^{*}\frac{\tau(\omega)}{N^{\frac{5}{8}}(\omega)}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\pi(xN(\omega))^{\frac{1}{4}}\right)+\\ +O\left(x^{\frac{1}{8}}X^{\frac{1}{8}}\log^2 X\right)+O\left(x^{\frac{1}{2+b}}X^{-\frac{b}{2+b}}\log^2 x\right).\end{gathered} \qquad (20)$$

Таким образом, теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\theta = \frac{1792}{3615} < 0,497$. *Тогда*

$$\sum_{N(\omega)\le x}{}^{*}\tau(\omega) = \textit{гл. чл.} + O(x^{\theta+\varepsilon}).$$

Действительно, возьмём $b = \frac{1}{15}$, $X = x^{\frac{8}{15}}$. Тогда из теоремы 1 и теоремы Ван дер Корпута об оценке тригонометрической суммы по второй производной (см. [4], гл. 5, лемма 3.9) приходим к утверждению следствия. Оптимальное значение для θ получается при $b \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, при котором $g(b) = \frac{6-b-b^2}{4-4b-3b^2}$ достигает минимум, а $X = x^{\frac{2+3b}{(2+b)(2-3b)}}$.

Теорема 2. *Пусть* $m \ne 0$ *– целое. Тогда*

$$\begin{gathered}\sum_{N(\omega)\le x}{}^{*}\tau_m(\omega) = \frac{x^{\frac{3}{8}}}{\pi^2\sqrt{2}}\sum_{N(\omega)\le X}\frac{\tau_m(w)}{N^{\frac{5}{8}}(\omega)}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\pi(xN(\omega))^{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{m^2}{4}+1\right)^{\frac{1}{2}+2b}+\\ +O\left(x^{\frac{1}{8}}X^{\frac{1}{8}}|m|^{1+4b}\log^2 x\right)+O\left(x^{\frac{1}{2+b}}X^{-\frac{b}{2+b}}|m|^{1+4b}\log^2 x\right).\end{gathered}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 с использованием оценок (15) и (16).

Следствие 2. *Стандартное применение леммы о «стаканчиках» И. М. Виноградова (см. в [6]) приводит к следующему результату. Пусть* $0 \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$. *Тогда для* $\varphi_2 - \varphi_1 \ll x^{\theta+\varepsilon}$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{N(\omega) \leq x \\ \varphi_1 \leq \arg\omega < \varphi_2}} \tau(\omega) = \frac{2}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \textit{гл. чл.} + O\left(x^{\theta+\varepsilon}\right).$$

Замечание. *Полученное в теореме 1 представление сумматорной функции* $\sum\limits_{N(\omega)\leq x}{}^*\tau(\omega)$ *может быть применено к исследованию второго момента остаточного члена асимптотической формулы (17)*

$$\int\limits_1^X \left(\sum_{N(\omega)\leq t} {}^*\tau(\omega) - \textit{гл. чл.} \right)^2 dt.$$

Заключение. В данной работе построена асимптотическая формула для сумматорной функции, ассоциированной с функцией делителей $\tau(\omega)$ кольца целых гауссовых чисел.

1. **Лай Дык Тхинь.** О числе делителей в угле [текст] / Лай Дык Тхинь // ДАН СССР. – 1962. – Т. 143, № 1. – С. 28–30.
2. **Жанбырбаева У. Б.** Асимптотические задачи теории чисел в секториальных областях: дис. на соискание науч. степени канд. физ.-мат. наук [текст] / У. Б. Жанбырбаева. – 1995. – 128 с.
3. **Coleman M. D.** The Rosser-Iwaniec sieve in number fields [text] / M. D. Coleman // Acta Arith. – 1993. – № 65. – P. 53–83.
4. **Титчмарш Е.** Теория дзета-функции Римана [текст] / Е. Титчмарш. – М.: ИЛ, 1953. – 408 с.
5. **Федорюк М. В.** Асимптотика: Интегралы и ряды [текст] / М. В. Федорюк. – М.: Наука, 1987. – 544 с.
6. **Виноградов И. М.** Метод тригонометрических сумм в теории чисел [текст] / И. М. Виноградов. – М.: Наука, 1971. – 160 с.

ISSN 2304–1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2012 .–Т. 17, вип. 4 (16).–С. 40–46

УДК 517.9

О. В. Карпенко
Національний технічний університет України ”Київський політехнічний інститут”

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ ІСНУВАННЯМ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІЗНИЦЕВИХ ТА ВІДПОВІДНИХ ЇМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Буде доповідатися на Боголюбовських читаннях 23-30 червня 2013 року

Карпенко О. В. Про зв'язок між існуванням періодичних розв'язків різницевих та відповідних їм диференціальних рівнянь. У даній роботі вивчається питання існування періодичного розв'язку системи диференціальних рівнянь при наявності періодичного розв'язку у відповідної системи різницевих рівнянь. Наведено умови малості кроку різницевого рівняння.
Ключові слова: періодичний розв'язок, різницеве рівняння, диференціальне рівняння.

Карпенко О. В. О связи между существованием периодических решений разностных и соответственных им дифференциальных уравнений. В этой работе изучается вопрос о существовании периодического решения для системы дифференциальных уравнений при наличии периодического решения у системы соответствующих разностных уравнений. Приведены условия малости шага разностного уравнения.
Ключевые слова: периодическое решение, разностное уравнение, дифференциальное уравнение.

Karpenko O. V. About the relation between the existence of periodic solutions of difference equations and the corresponding diferential equations. It is considered the question of the existence of periodic solution of the system of differential equations provided that the corresponding difference system has such solution. It is showed the conditions of smallness of the step of difference equation.
Key words: periodic solution, difference equation, differential equation.

Вступ. При розв'язуванні диференціальних рівнянь наближеними методами, в основі яких лежить метод Ейлера, ми переходимо від диференціальних рівнянь до відповідних різницевих рівнянь, які є близькими до них при достатньо малому кроці. На сьогоднішній день дослідження різницевих рівнянь залишається актуальною задачею, оскільки вони є зручними математичними моделями для багатьох прикладних процесів — біологічних, економічних, фінансових. Це пов'язане з тим, що за реальними об'єктами ми спостерігаємо не постійно, а в конкретні дискретні моменти часу.

Дана робота присвячена вивченню зв'язку між якісними властивостями розв'язків диференціальних та відповідних їм різницевих рівнянь. А саме розглядається питання існування періодичного розв'язку системи диференціальних рівнянь при наявності такого у системи відповідних різницевих рівнянь.

Питанням зв'язку між періодичними розв'язками диференціальних та різницевих рівнянь присвячені, наприклад, роботи [3, 7].

Так, в [3] отримані умови існування при достатньо малому кроці h періодичного розв'язку різницевого рівняння при умові, що періодичний розв'язок має відповідне диференціальне рівняння.

Обернена задача розглядалася в роботі [7]. Але в ній вимагалося існування періодичного розв'язку у системи різницевих рівнянь при всіх достатньо малих кроках h. При цьому однією з умов була рівномірна по h асимптотична стійкість таких розв'язків.

Бажано було б отримати подібний результат при менших обмеженнях, а саме при умові існування періодичного розв'язку різницевого рівняння хоча б для одного фіксованого кроку $h = h_0$ і при цьому вказати його умову малості.

Дослідженню цього питання і присвячена дана робота.

Відзначимо, що періодичні розв'язки нелінійних різницевих рівнянь вивчалися в роботах багатьох авторів [1, 10]. Для різницевих рівнянь інших типів питання існування, єдиності періодичного розв'язку розглядалися в працях [4, 9, 12].

Іншим питанням про зв'язок між властивостями розв'язків диференціальних та відповідних різницевих рівнянь присвячені роботи [5, 6, 11].

Дана робота складається зі вступу та двох частин. В першій частині приводиться постановка задачі та необхідні допоміжні твердження. Основний результат роботи викладений в другій частині.

В кінці роботи наведений приклад.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \tag{1}$$

де $X(t, x)$ періодична функція по t з періодом ω, тобто

$$X(t + \omega, x) = X(t, x)$$

при $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$ — область з простору $\mathbb{R}^d$.

Будемо вважати також, що $X(t, x)$ в своїй області визначення неперервно-диференційовна за сукупністю змінних і обмежена разом зі своїми частинними похідними так, що існує стала $C > 0$:

$$|\, X(t, x) \,| + \left| \frac{\partial X(t, x)}{\partial t} \right| + \left\| \frac{\partial X(t, x)}{\partial x} \right\| \leq C, \tag{2}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$. Тут $\frac{\partial X}{\partial x}$ — відповідна матриця Якобі. При цьому через $|\cdot|$ будемо позначати евклідову норму вектора, а $\|\cdot\|$ — норму матриці, узгоджену з нормою вектора.

Розглянемо відповідну до (1) систему різницевих рівнянь

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hX(kh, x_k^h), \tag{3}$$

де $x_k^h = x^h(kh)$, $h > 0$ — крок різницевого рівняння. Даний крок виберемо $h = \frac{\omega}{m}$, $m \in \mathbb{N}$.

В роботі вивчається питання існування періодичного розв'язку у системи (1) при умові, що при деякому $h = h_0$ періодичний розв'язок має система (3).

Приведемо необхідне в подальшому означення і твердження.

Означення 1. *Розв'язок x_k^h системи (3) називається експоненціально стійким рівномірно по k_0, якщо існують сталі $\delta > 0$, $N > 0$, $\alpha > 0$ такі, що для довільного розв'язку y_k^h системи (3) такого, що*

$$| y_{k_0}^h - x_{k_0}^h |< \delta,$$

виконується нерівність

$$| y_k^h - x_k^h |\leq Ne^{-\alpha(k-k_0)h} | y_{k_0}^h - x_{k_0}^h |, \tag{4}$$

при $k \geq k_0$.

В подальшому ми використаємо результат про оцінку близькості між відповідними розв'язками різницевих та диференціальних рівнянь у вузлових точках. А саме розглянемо систему різницевих рівнянь

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hX(t_0 + kh, x_k^h), \tag{5}$$

де $x_k^h = x^h(t_0 + kh)$, $x^{t_0} = x_0$.

Лема. *Нехай $x(t)$ і x_k^h — розв'язки систем (1) і (5) такі, що $x(t_0) = x_0^h = x_0$. Тоді при виконанні нерівності (2) для цих розв'язків на $[t_0, t_0{+}T]$ до моменту їх виходу з області D справедлива оцінка*

$$|x(t_0 + kh) - x_k^h| \leq he^{CT}[1 + MT], \tag{6}$$

де $M = C + C^2$, $kh \leq T$.

Доведення. Доведення даної леми безпосередньо випливає з формули (12) монографії [2, с. 384].

2. Основний результат. Нехай тепер при деякому

$$h = h_0 = \frac{\omega}{m_0}, \quad m_0 \in \mathbb{N}, \quad m_0 - \text{фіксоване}$$

система (3) має періодичний, експоненціально стійкий в сенсі означення 1 розв'язок $x_k^{h_0}$ періоду $p(h_0) \in \mathbb{N}$, тобто

$$x_{k+p}^{h_0} = x_k^{h_0}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Виберемо таке $k_0 \in \mathbb{N}$, щоб

$$k_0 h_0 > \frac{1}{\alpha} \ln 2N,$$

де $\alpha > 0$, $N > 0$ — числа з означення 1.

Нехай r — найменше натуральне число таке, що

$$prm_0 \geq k_0. \tag{7}$$

Має місце теорема.

Теорема. *Якщо при $h = h_0$ система (3) має експоненціально стійкий в сенсі означення 1 періодичний з періодом p розв'язок $\psi_k^{h_0}$, що лежить в D разом з деяким своїм ρ-околом і виконуються умови:*

$$h_0 e^{Cpr\omega}\left[1 + (C + C^2)pr\omega\right] \le \frac{\delta}{2}, \tag{8}$$

$$\frac{3N\delta}{2} < \rho, \tag{9}$$

$$h_0 < \frac{\rho}{2C}, \tag{10}$$

то система (1) має періодичний розв'язок періоду кратного ω.

Доведення. Позначимо $U_\delta(\psi_0^{h_0})$ – δ-окіл точки $\psi_0^{h_0}$ – початкового значення періодичного розв'язку системи (3).

Нехай y_0 довільна точка з $U_\delta(\psi_0^{h_0})$.

Через $\varphi(t, y_0)$ позначимо розв'язок системи диференціальних рівнянь (1) такий, що $\varphi(0, y_0) = y_0$.

Нехай $y_k^{h_0}$ – розв'язок системи різницевих рівнянь (3) такий, що $y_0^{h_0} = y_0$.

Відзначимо, що з нерівностей (4) та (9) випливає, що розв'язок $y_k^{h_0}$ не виходить з ρ-околу періодичного розв'язку $\psi_k^{h_0}$, а отже і з області D.

Тоді при $kh_0 \ge k_0 h_0$ з означення 1 маємо:

$$\left|y_k^{h_0} - \psi_k^{h_0}\right| \le Ne^{-\alpha k h_0} \mid y_0 - \psi_0 \mid < \frac{\delta}{2}.$$

Позначимо $p_0 = rm_0$.

Тоді з (8) та леми отримаємо нерівність

$$\left|\varphi(p_0 p h_0) - y_{p_0 p}^{h_0}\right| \le \frac{\delta}{2}.$$

Відзначимо також, що в силу (7) і експоненціальної стійкості $\psi_k^{h_0}$ справедлива нерівність

$$\left|y_{p_0 p}^{h_0} - \psi_{p_0 p}^{h_0}\right| \le \frac{\delta}{2}.$$

Отже,

$$\left|\psi_{p_0 p}^{h_0} - \varphi(p_0 p h_0)\right| \le \delta. \tag{11}$$

Таким чином, розв'язок системи (1) $\varphi(t)$, що починається в δ-околі $\psi_0^{h_0}$, не виходячи з ρ-околу розв'язку $\psi_k^{h_0}$, в момент часу $p_0 p h_0$ знову попадає в його δ-окіл при умові, що розв'язок $\varphi(t)$ визначений на $[0, p_0 p h_0]$.

Покажемо, що $\varphi(t)$ визначений на $[0, p_0 p h_0]$. Розглянемо $\frac{\rho}{2}$-окіл розв'язку $\psi_k^{h_0}$. В силу теореми Пікара розв'язки системи (1), що починаються в цьому $\frac{\rho}{2}$-околі, продовжуються вліво та вправо на інтервал довжини, не меншої ніж $\frac{\rho}{2C}$.

Отже, з нерівностей (9) і (10) випливає, що розв'язок $\varphi(t)$, який починається в δ-околі $\psi_0^{h_0}$, продовжується на інтервал $[0, \frac{\rho}{2C}]$ і при цьому в точці $t = h_0$ виконується нерівність:

$$\left|\varphi(h_0) - y_1^{h_0}\right| < \frac{\delta}{2},$$

де $y_k^{h_0}$ – вказаний вище розв'язок системи (3).

Останнє означає, що точка $\varphi(h_0)$ лежить в області D разом з $\frac{\varrho}{2}$-околом, а тому розв'язок $\varphi(t)$ продовжується до точки $2h_0$ і $\varphi(2h_0)$ також лежить в D разом з $\frac{\varrho}{2}$-околом.

Продовжуючи цей процес, переконуємося, що $\varphi(t)$ визначений на відрізку $[0, p_0ph_0]$.

Оскільки $\psi_{p_0p}^{h_0} = \psi_0$, то з (11) маємо

$$|\varphi(p_0ph_0) - \psi_0| \le \delta.$$

Отже, відображення $\pi : \varphi(0, y_0) \to \varphi(p_0ph_0, y_0)$ переводить кулю радіуса δ в себе, причому $p_0ph_0 = pr\omega$.

Тоді з теореми Брауера про нерухому точку випливає існування такої точки $y_1 \in U_\delta(\psi_0^{h_0})$, що

$$\varphi(pr\omega, y_1) = y_1.$$

Враховуючи періодичність по t $X(t, x)$ і єдиність розв'язку задачі Коші, можна стверджувати, що розв'язок системи (1) з початковою умовою $\varphi(0) = y_1$ – періодичний з періодом $pr\omega$.

Теорема доведена.

Приведемо приклад, що ілюструє дану теорему.

Приклад. *Розглянемо в $\mathbb{R}^2$ наступну систему різницевих рівнянь типу (3):*

$$\begin{cases} x_{k+1}^h = x_k^h + \alpha h x_k^h + h f_1(kh, x_k^h, y_k^h), \\ y_{k+1}^h = y_k^h + \beta h y_k^h + h f_2(kh, x_k^h, y_k^h), \end{cases} \tag{12}$$

де $h > 0$, $\alpha \in [-1; 0)$ і $\beta \in [-1; 0)$ – деякі числа.

Будемо вважати, що функції f_1 і f_2 визначені на $\mathbb{R}^3$, належать класу $C^1(\mathbb{R}^3)$, обмежені там разом зі своїми частинними похідними деякою сталою $C > 0$ і періодичні по t з періодом ω. При цьому система

$$\begin{cases} x_{k+1}^h = (1 + \alpha h) x_k^h, \\ y_{k+1}^h = (1 + \beta h) y_k^h \end{cases} \tag{13}$$

є лінійною системою, що відповідає (12). Її матрицант, очевидно, має вигляд

$$X(n, k) = X(n - k) = \begin{pmatrix} (1 + \alpha h)^{n-k} & 0 \\ 0 & (1 + \beta h)^{n-k} \end{pmatrix},$$

а загальний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_k^h \\ y_k^h \end{pmatrix} = X(n - k) \begin{pmatrix} x_{k_0}^h \\ y_{k_0}^h \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, і $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$.

Очевидно, що матрицант допускає оцінку

$$\|X(n - k)\| \le \sqrt{2}(1 + \gamma h)^{n-k}, \quad n \ge k,$$

де $\gamma = \max\{\alpha;\beta\}$.

Виберемо $h_0 = \frac{\omega}{m_0}$, де $m_0 \in \mathbb{N}$.

Не важко показати, наприклад, методом послідовних наближень, що при такому h_0 система (12) має обмежений розв'язок $\eta_k^{h_0}$, який задовольняє наступне рівняння

$$\eta_k^{h_0} = h_0 \sum_{n=0}^{\infty} X(n) f\left((k-1-n)h_0, \eta_{k-1-n}^{h_0}\right). \tag{14}$$

Очевидно, що розв'язок $\eta_k^{h_0}$ періодичний з періодом m_0.

Перевіримо його експоненціальну стійкість.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що будь-який розв'язок z_k^h рівняння (12) допускає представлення

$$z_k^h = X(k-k_0) z_{k_0}^h + h \sum_{n=k_0}^{k-1} X(k-1-n) f(nh, z_n^h).$$

Звідки для різниці двох розв'язків маємо

$$|z_k^h - \eta_k^h| \le \sqrt{2}(1+\gamma h)^{k-k_0} |z_{k_0}^h - \eta_{k_0}^h| + Ch \sum_{n=k_0}^{k-1} \sqrt{2}(1+\gamma h)^{k-1-n} |z_n^h - \eta_n^h|$$

або

$$(1+\gamma h)^{-k} |z_k^h - \eta_k^h| \le \sqrt{2}(1+\gamma h)^{-k_0} |z_{k_0}^h - \eta_{k_0}^h| + \frac{Ch\sqrt{2}}{1+\gamma h} \sum_{n=k_0}^{k-1} (1+\gamma h)^{-n} |z_n^h - \eta_n^h|.$$

Враховуючи аналог нерівності Гронуолла [8, с. 257], отримуємо

$$|z_k^h - \eta_k^h| \le \sqrt{2}(1+\gamma h)^{k-k_0} \left(1 + \frac{Ch\sqrt{2}}{(1+\gamma h)}\right)^{k-k_0} |z_{k_0}^h - x_{k_0}^h|$$

або

$$|z_k^h - \eta_k^h| \le \sqrt{2}(1+\gamma h + Ch\sqrt{2})^{k-k_0} |z_{k_0}^h - x_{k_0}^h|.$$

Нехай тепер $\gamma + C\sqrt{2} < 0$ і h_0 вибрано так, що

$$0 < 1 + \gamma h_0 + Ch_0\sqrt{2} < 1. \tag{15}$$

Отже, при $h_0 = \frac{\omega}{m_0}$, що задовольняє нерівність (15), періодичний розв'язок $\eta_k^{h_0}$ експоненціально стійкий.

Відзначимо, що $\eta_k^{h_0}$ – глобально експоненціально стійкий, тому δ з означення 1 можна вибрати довільним.

Позначимо $B := \left[\frac{\ln \frac{1}{2\sqrt{2}}}{\ln(1+\gamma h + Ch\sqrt{2})}\right]$, де $[\cdot]$ – ціла частина. Для h_0 із (15) виберемо $\delta > 0$, щоб виконувалася умова (8), де r – найменше ціле число таке, що

$$prm_0 \ge B + 1.$$

Із умов (9) та (10) виберемо $\rho > 0$.

Тоді для (12) виконані умови теореми. Отже, відповідна система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x + f_1(t, x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta y + f_2(t, x, y) \end{cases}$$

має визначений на $\mathbb{R}$ періодичний розв'язок.

Висновки. У доведеній теоремі встановлено умови існування періодичного розв'язку диференціального рівняння при умові існування періодичного розв'язку відповідного різницевого рівняння. Отриманий результат є актуальним для подальшого розвитку якісної теорії диференціальних та різницевих рівнянь.

1. **Акбергенов А. А.** Існування періодичних розв'язків систем нелінійних різницевих рівнянь [текст] / А. А. Акбергенов // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2011. – № 4. – С. 7–12.
2. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа [текст] / К. И. Бабенко. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1986. – 744 с.
3. **Карасик Г. Я.** О сохранении периодического решения при переходе от дифференциальных уравнений к конечно-разностным [текст] / Г. Я. Карасик // Научные доклады в. ш. Физ.-матем. науки. – 1958. – № 4. – С. 43–46.
4. **Пелюх Г. П.** О периодических решениях линейных разностных уравнений в критическом случае [текст] / Г. П. Пелюх // Дифференциальные уравнения. МАИК: Наука. Интерпериодика. – 2008. – № 3. – С. 421–423.
5. **Скалкина М. А.** О колебаниях решений уравнений в конечных разностях [текст] / М. А. Скалкина // Изв. высших учебн. завед. Матем. – 1959. – С. 138–144.
6. **Станжицький О. М.** Коливність розв'язків лінійних функціонально-різницевих рівнянь другого порядку [текст] / О. М. Станжицький, О. В. Карпенко, В. І. Кравець // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65 (2). – С. 1110–1118.
7. **Станжицький О. М.** Про зв'язок між властивостями розв'язків різницевих та відповідних їм диференціальних рівнянь [текст] / О. М. Станжицький, А. М. Ткачук // Укр. мат. журн. – 2005. – № 7. – С. 989–996.
8. **Bohner M.** Advances in dynamical equations on time scales [text] / M. Bohner, A. Peterson. – Birkhäuser. Boston. Basel. Berlin. – 2001. – 358 p.
9. **Descrete** Oscillation Theory [text] / Ravi. P. Agarval, M. Bohner, Said R. Grace, Donal O'Regan. – Hindawi Publishing Corporation. – 2005. – 961 p.
10. **Grove E. A.** Perioditicities in Nonlinear difference equations [text] / E. A. Grove, G. Ladas, Chapman and Hall // CRC Press. – Boca Raton. – 2004. – 392 p.
11. **Grüne L.** Asymptotic behavior of dynamical and control systems pertubation and discretization [text] / L. Grüne. – Springer-Verlag, Berlin. – 2002. – 231 p.
12. **Teplinsky Yu. V.** On finding periodic solutions of second order difference equations in a banach space [text] / Yu. V. Teplinsky, I. V. Semenishina // Nonlinear oscillations. – 2001. – V. 4, № 3. – P. 405–421.

УДК 517.925.54

А. А. Кореновский
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ

Кореновський А. О. Iснування розв'язкiв диференцiальних рiвнянь в особливих вмпадках. Розглядається система квазiлiнiйних диференцiальних рiвнянь з зникаючими при $t \to +\infty$ множниками в правiй частинi. Наведенi умови, при виконаннi яких ця система має O-розв'язки при $t \to +\infty$. Отримана оцiнка для вказаних O-розв'язкiв.
Ключовi слова: система диференцiальних рiвнянь з особливiстю, теорема iснування, метод послiдовних наближень, асимптотичнi оцiнки.

Кореновский А. А. Существование решений дифференциальных уравнений в особых случаях. Рассматривается система квазилинейных дифференциальных уравнений с исчезающими при $t \to +\infty$ множителями в правой части. Приведены условия, при выполнении которых эта система имеет O-решения при $t \to +\infty$. Получена оценка для указанных O-решений.
Ключевые слова: система дифференциальных уравнений с особенностью, теорема существования, метод последовательных приближений, асимптотические оценки.

Korenovskyi A. A. Existenece of solutions of differential equations in special cases. The system of quasilinear differential equations is considered with vanishing at $t \to +\infty$ multipliers in the right part. Conditions are given under which the system has O-solutions at $t \to +\infty$. Estimate for this solutions is derived.
Key words: the system of differential equations with a singularity, the existence theorem, the method of successive approximations, the asymptotic estimates.

Введение. Существованию и асимптотическим разложениям решений дифференциальных уравнений в особых случаях посвящена обширная литература (см. библиографию по этому вопросу в книгах В. Вазова [1], Н. Г. Де Брейна [2], Ф. Олвера [3], Л. Чезари [4]).

Настоящая статья, в которой рассмотрен только вопрос существования O-решений, является продолжением и развитием работ А. В. Костина [5, 6], а также работы [8]. Асимптотические разложения таких решений будут проведены в дальнейшем. Изучается случай $\alpha(t) \to 0,\ \beta_k(t) \to 0$ $(t \to +\infty,\ k = \overline{1, n_3})$ (см. систему (1)), который является особым с точки зрения метода работ [5, 6].

Основные результаты.

Рассмотрим в некоторой области $G = \Delta \times \nabla$, $\Delta = \{t : t_0 \le t < +\infty\}$,

$$\begin{aligned}
&\nabla = \{\xi : \operatorname{colon}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\,, \\
&\xi_1 = \operatorname{colon}(\xi_{0,1}, \ldots, \xi_{0,n_1}) \in \mathbb{C}^{n_1}, \\
&\xi_2 = \operatorname{colon}(\xi_{0,n_1+1}, \ldots, \xi_{0,n_1+n_2}) \in \mathbb{C}^{n_2}, \\
&\xi_3 = \operatorname{colon}(\xi_{0,n_1+n_2+1}, \ldots, \xi_{0,n_1+n_2+n_3}) \in \mathbb{C}^{n_3}, \\
&\|\xi\| \le c,\ c = const > 0,\ n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

(здесь и далее используется обозначение $\|A\| = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{i\,k}|$, где $A = (a_{i\,k})$ – $m\times n$-матрица, $n, m \in \mathbb{N}$) систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\xi_1' = Q_1(t) + B_{1\,1}(t)\xi_1 + B_{1\,2}(t)\xi_2 + B_{1\,3}(t)\xi_3 + F_1(t,\xi),\\ &\xi_2' = \alpha(t)\left[Q_2(t) + B_{2\,1}(t)\xi_1 + B_{2\,2}(t)\xi_2 + B_{2\,3}(t)\xi_3 + F_2(t,\xi)\right],\\ &\xi_3' = \beta(t)\left[Q_3(t) + B_{3\,1}(t)\xi_1 + B_{3\,2}(t)\xi_2 + B_{3\,3}(t)\xi_3 + F_3(t,\xi)\right]\end{aligned} \tag{1}$$

(здесь и далее под произведением вектора $\beta(t)$ на матрицу будем подразумевать $\beta(t)B = (\beta_k(t)\,b_{k\,i})$, где $B = (b_{k\,i})$ – $m\times n$-матрица, $m = n_3$, $n \in \mathbb{N}$), в которой все величины, исключая t, являются в общем случае комплексными и выполняются такие условия:

1) $\beta(t) = \operatorname{colon}(\beta_1(t),\dots,\beta_{n_3}(t))$,
 $\beta_k(t)$ $\left(k=\overline{1,n_3}\right)$, $\alpha(t)$ – скалярные функции,
 $\alpha(t)\neq 0$, $\beta_k(t)\neq 0$ $(t\in\Delta)$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty}|\alpha(t)|\,dt = +\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\alpha(t) = 0$,
 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = 0$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty}|\beta_k(t)|\,dt = l_k < +\infty$ $(l_k = const)$ $\left(k=\overline{1,n_3}\right)$,
 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\beta_k'(t)}{\beta_k(t)} = 0$, $\left(k=\overline{1,n_3}\right)$,
 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\beta_s(t)}{\beta_k(t)} = 0$ $\left(s>k,\ k=\overline{1,n_3-1},\ s=\overline{2,n_3}\right)$,
 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\beta_1(t)}{\alpha(t)} = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\left(\alpha^{-1}(t)\beta_k(t)\right)'}{\beta_k(t)} = 0$ $\left(k=\overline{1,n_3}\right)$;

2) $Q_1(t) = \operatorname{colon}(q_1(t),\dots,q_{n_1}(t))$, $Q_2(t) = \operatorname{colon}(q_{n_1+1}(t),\dots,q_{n_1+n_2}(t))$, $Q_3(t) =$ $= \operatorname{colon}(q_{n_1+n_2+1}(t),\dots,q_{n_1+n_2+n_3}(t))$,
 $q_k(t)\in C_\Delta$, $\lim\limits_{t\to+\infty}q_k(t) = 0$ $\left(k=\overline{1,n_1+n_2+n_3}\right)$;

3) $B_{k\,i}(t)$ – матрицы соответствующей размерности, $B_{k\,i}(t)\in C_\Delta$ и существуют пределы $B_{k\,i}(+\infty) = B_{0,k\,i}$ $\left(k,i=\overline{1,3}\right)$, где $B_{0,k\,i}$ – постоянные матрицы; корни λ_k $\left(k=\overline{1,n_1}\right)$ уравнения

$$\det\left(B_{0,11} - \lambda E\right) = 0$$

 (E – единичная $n_1\times n_1$-матрица) обладают свойством

$$|\mathrm{Re}\,\lambda_k| \geq \gamma,\ \ \gamma = const > 0,$$

 корни γ_{n_1+k} $\left(k=\overline{1,n_2}\right)$ уравнения

$$\det\Big(B_{0,22} - B_{0,21}\left(B_{0,11}\right)^{-1}B_{0,12} - \lambda E\Big) = 0$$

 (E – единичная $n_2\times n_2$-матрица) обладают свойством

$$|\mathrm{Re}\,(\alpha(t)\gamma_{n_1+k})| \geq \gamma|\alpha(t)| \quad (t\in\Delta);$$

4) вектор-функция

$$F(t,\xi) = \operatorname{colon}(F_1(t,\xi), F_2(t,\xi), F_3(t,\xi))$$

$$
\begin{gathered}
\left(F_1(t,\xi) = \operatorname{colon}\left(f_1(t,\xi),\dots,f_{n_1}(t,\xi)\right),\right.\\
F_2(t,\xi) = \operatorname{colon}\left(f_{n_1+1}(t,\xi),\dots,f_{n_1+n_2}(t,\xi)\right),\\
\left.F_3(t,\xi) = \operatorname{colon}\left(f_{n_1+n_2+1}(t,\xi),\dots,f_{n_1+n_2+n_3}(t,\xi)\right)\right)
\end{gathered}
$$

удовлетворяет в области G условию Липшица по ξ

$$
\left\|F\left(t,\xi_{(1)}\right) - F\left(t,\xi_{(2)}\right)\right\| \le L\left\|\xi_{(1)} - \xi_{(2)}\right\|,\; L = L(c) = const,
$$

где постоянную L можно сделать сколь угодно малой уменьшением числа c, определяющего область G, а также условию $F(t,0) = 0$.

Изучим вопрос о существовании и оценке частных решений системы (1), стремящихся к нулю при $t \to +\infty$. Применим к системе (1) преобразование

$$
\begin{aligned}
&\xi_1 = A_1X_1,\\
&\xi_2 = \alpha(t)C_{2\,1}A_1X_1 + \mu A_2X_2,\\
&\xi_3 = \mu^2X_3,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $X_i(t)\ \left(i=\overline{1,3}\right)$ – столбцы новых неизвестных функций,
$C_{2\,1} = B_{0,2\,1}\left(B_{0,1\,1}\right)^{-1}$, $\mu = const$ достаточно малая;
A_1, A_2 – постоянные матрицы такие, что

$$
A_1^{-1}B_{0,1\,1}A_1 = V_{0,1\,1} = \left(v_{0,i\,j}\right)\quad \left(i,j=\overline{1,n_1}\right),
$$

$$
v_{0,i\,j} = \begin{cases} \lambda_i, \text{ если } j=i,\\ l_i, \text{ если } j=i+1,\\ 0, \text{ если } j\ne i,\ i+1,\end{cases}
$$

где

$$
l_k = \begin{cases} 0, \text{ если } \lambda_k \ne \lambda_{k+1}\\ l, \text{ если } \lambda_k = \lambda_{k+1}\end{cases},\quad \left(k=\overline{1,n_1-1}\right);
$$

$$
A_2^{-1}\left[B_{0,2\,2} - B_{0,2\,1}\left(B_{0,1\,1}\right)^{-1}B_{0,1\,2}\right]A_2 = V_{0,2\,2} = \left(v_{0,i\,j}\right)
$$

$$
\left(i,j=\overline{n_1+1,n_1+n_2}\right),
$$

$$
v_{0,i\,j} = \begin{cases} \gamma_i, \text{ если } j=i,\\ s_i, \text{ если } j=i+1,\\ 0, \text{ если } j\ne i, i+1,\end{cases}
$$

где

$$
s_k = \begin{cases} 0, \text{ если } \gamma_k \ne \gamma_{k+1}\\ l, \text{ если } \gamma_k = \gamma_{k+1}\end{cases},\quad \left(k=\overline{n_1+1,n_1+n_2-1}\right).
$$

Заметим, что такие матрицы A_1, A_2 всегда существуют в силу условия 3), причем константу l можно считать сколь угодно малой. Учитывая, что

$$
B_{k\,i}(t) = B_{0,k\,i} + H_{k\,i}(t),\quad \left\|H_{k\,i}(+\infty)\right\| = 0\quad \left(k,i=\overline{1,3}\right),
\tag{3}
$$

получим

$$
\begin{aligned}
&X_1' = U_1(t) + \left(V_{0,1\,1} + R_1(t)\right)X_1 + V_{1\,2}(t)X_2 + V_{1\,3}(t)X_3 + W_1(t,X),\\
&X_2' = \alpha(t)\left[U_2(t) + V_{2\,1}(t)X_1 + \right.\\
&\qquad \left. + \left(V_{0,2\,2} + R_1(t)\right)X_2 + V_{2\,3}(t)X_3 + W_2(t,X)\right],\\
&X_3' = \beta(t)\left[U_3(t) + V_{3\,1}(t)X_1 + V_{3\,2}(t)X_2 + V_{3\,3}(t)X_3 + W_3(t,X)\right],
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$\big(U_1(t)=A_1^{-1}Q_1(t),\quad U_2(t)=\mu^{-1}A_2^{-1}\left(Q_2(t)-C_{2\,1}Q_1(t)\right),$$

$$U_3(t)=\mu^{-2}Q_3(t),\quad V_{1\,2}(t)=\mu A_1^{-1}B_{1\,2}(t)A_2=\left(v_{k\,i}(t)\right),$$

$$|v_{k\,i}(t)|\le\mu_0=const\quad\left(k=\overline{1,n_1},\ i=\overline{n_1+1,n_1+n_2}\right),$$

$$V_{1\,3}(t)=\mu^2A_1^{-1}B_{1\,3}(t)=\left(v_{k\,i}(t)\right),$$

$$|v_{k\,i}(t)|\le\mu_0=const\quad\left(k=\overline{1,n_1},\ i=\overline{n_1+n_2+1,n_1+n_2+n_3}\right),$$

$$V_{2\,3}(t)=\mu A_2^{-1}\left[B_{2\,3}(t)-C_{2\,1}B_{1\,3}(t)\right]=\left(v_{k\,i}(t)\right),$$

$$|v_{k\,i}(t)|\le\mu_0=const\quad\left(k=\overline{n_1+1,n_1+n_2},\ i=\overline{n_1+n_2+1,n_1+n_2+n_3}\right),$$

где μ_0 достаточно мало вместе с $l,\mu,t\in\Delta$;

$$V_{2\,1}=\mu^{-1}A_2^{-1}[B_{2\,1}(t)+\alpha(t)B_{2\,2}(t)C_{2\,1}-C_{2\,1}B_{1\,1}(t)-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}C_{2\,1}-$$

$$-\alpha(t)C_{2\,1}B_{1\,2}(t)C_{2\,1}]A_1=\left(v_{k\,i}(t)\right)\quad\left(k=\overline{n_1+1,n_1+n_2},\ i=\overline{1,n_1}\right),$$

$$V_{3\,1}(t)=\mu^{-2}\left[B_{3\,1}(t)+\alpha(t)B_{3\,2}(t)C_{2\,1}\right]A_1=$$

$$=\left(v_{k\,i}(t)\right)\quad\left(k=\overline{n_1+n_2+1,n_1+n_2+n_3},\ i=\overline{1,n_1}\right),$$

$$V_{3\,2}(t)=\mu^{-1}B_{3\,2}(t)A_2=$$

$$=\left(v_{k\,i}(t)\right)\quad\left(k=\overline{n_1+n_2+1,n_1+n_2+n_3},\ i=\overline{n_1+1,n_1+n_2}\right),$$

$$V_{3\,3}(t)=B_{3\,3}(t)=\left(v_{k\,i}(t)\right)\quad\left(k,i=\overline{n_1+n_2+1,n_1+n_2+n_3}\right);$$

$$R_1(t)=A_1^{-1}\left[H_{1\,1}(t)+\alpha(t)B_{1\,2}(t)C_{2\,1}\right]A_1=\left(r_{k\,i}(t)\right)\quad\left(k,i=\overline{1,n_1}\right),$$

$$R_2(t)=A_2^{-1}\left[H_{2\,2}(t)-C_{2\,1}H_{1\,2}(t)\right]A_1=\left(r_{k\,i}(t)\right)\quad\left(k,i=\overline{n_1+1,n_1+n_2}\right),$$

$$W_1(t,X)=A_1^{-1}F_1(t,\xi)=\operatorname{colon}\left(w_1(t,X),\dots,w_{n_1}(t,X)\right),$$

$$W_2(t,X)=\mu^{-1}A_2^{-1}\left[F_2(t,\xi)-C_{2\,1}F_1(t,\xi)\right]=$$

$$=\operatorname{colon}\left(w_{n_1+1}(t,X),\dots,w_{n_1+n_2}(t,X)\right),$$

$$W_3(t,X)=\mu^{-2}F_3(t,\xi)=\operatorname{colon}\left(w_{n_1+n_2+1}(t,X),\dots,w_{n_1+n_2+n_3}(t,X)\right),$$

(ξ определяется из (2));

$$W(t,X)=\operatorname{colon}\left(w_1(t,X),\dots,w_{n_1+n_2+n_3}(t,X)\right)$$

удовлетворяет в области G условию Липшица по X

$$\left\|W\left(t,X_{(1)}\right)-W\left(t,X_{(2)}\right)\right\|\le L_0\left\|X_{(1)}-X_{(2)}\right\|,\quad L_0=L_0(c)=const,$$

где постоянную L_0 можно сделать сколь угодно малой уменьшением числа c, определяющего область G. Очевидно, что выполнены свойства:

$$\|R_1(+\infty)\|=0,\quad \|R_2(+\infty)\|=0,\quad \|V_{2,1}(+\infty)\|=0).$$

Стремящиеся к нулю решения системы (4) можно искать с помощью специального метода последовательных приближений [7], равномерно ограниченных при $t \geq t_1$, где t_1 достаточно велико. Сходимость этих приближений будет равномерной в полусегменте $[t_1, +\infty[$, если $\|X_k(t_1)\|$ $(k = \overline{1,3})$ достаточно мала.

Покажем, как оценить стремящиеся к нулю решения системы (4) в изучаемом нами случае. Для этого введем вспомогательные последовательности

$$\{x_{0,k\,\nu}(t)\} \quad \left(k = \overline{1, n_1 + n_2 + n_3},\ \nu = 1, 2, 3, \dots\right)$$

$$(X_{0,1\,\nu}(t) = \operatorname{colon}(x_{0,1\,\nu}(t), \dots, x_{0,n_1\,\nu}(t)),$$

$$X_{0,2\,\nu}(t) = \operatorname{colon}(x_{0,n_1+1\,\nu}(t), \dots, x_{0,n_1+n_2\,\nu}(t)),$$

$$X_{0,3\,\nu}(t) = \operatorname{colon}(x_{0,n_1+n_2+1\,\nu}(t), \dots, x_{0,n_1+n_2+n_3\,\nu}(t)))$$

так, чтобы выполнялось условие

$$|x_{k\,\nu}(t)| \leq x_{0,k\,\nu}(t) \quad \left(k = \overline{1, n_1 + n_2 + n_3},\, \nu = 1, 2, \dots\right), \tag{5}$$

где $x_{k\,\nu}(t)$ – последовательные приближения. Положим

$$x_{0,k\,1}(t) = 0, \quad t \geq t_1 \quad \left(k = \overline{1, n_1 + n_2 + n_3}\right),$$

$$x_{0,k\,\nu}(t) = \exp(-\varepsilon_k \gamma t)\, \{|c_k| + \varepsilon_k \int_{A_k}^{t} [|u_k(\tau)| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_1} r_{0,k\,j} x_{0,j\,\nu-1} + \mu_0 \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2+n_3} x_{0,j\,\nu-1} + l_k x_{0,k+1\,\nu-1} +$$

$$+ L_0 \sum_{j=1}^{n_1+n_2+n_3} |x_{0,j\,\nu-1}|] \exp(\varepsilon_k \gamma \tau)\, d\tau\}$$

$$\Bigg(k = \overline{1, n_1},\ x_{0,n_1+1\,\nu-1} = 0,\ A_k = \begin{cases} t_1, & \text{если } \operatorname{Re} \lambda_k < -\gamma, \\ +\infty, & \text{если } \operatorname{Re} \lambda_k > \gamma, \end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} x_k(t_1), & \text{если } A_k = t_1, \\ 0, & \text{если } A_k = +\infty, \end{cases} \qquad \varepsilon_k = \begin{cases} 1, & \text{если } A_k = t_1, \\ -1, & \text{если } A_k = +\infty \end{cases} \Bigg);$$

$$x_{0,k\,\nu}(t) = \exp\left(-\varepsilon_k \gamma \int_{t_1}^{t} |\alpha(\tau)|\, d\tau\right) \Bigg\{|c_k| + \varepsilon_k \int_{A_k}^{t} |\alpha(\tau)| \times$$

$$\times [|u_k(\tau)| + \sum_{j=1}^{n_1} v_{0,k\,j} x_{0,j\,\nu-1} + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} r_{0,k\,j} x_{0,j\,\nu-1} +$$

$$+ s_k x_{0,k+1\,\nu-1} + \mu_0 \sum_{j=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} x_{0,j\,\nu-1} + L_0 \sum_{j=1}^{n_1+n_2+n_3} |x_{0,j\,\nu-1}|] \times$$

$$\times \exp\left(\varepsilon_k \gamma \int_{t_1}^{\tau} |\alpha(t)|\, dt\right) d\tau \Bigg\}$$

$$\Bigg(k = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2},\ x_{0,n_1+n_2+1\,\nu-1} = 0,$$

$$A_k = \begin{cases} t_1, \text{ если } \operatorname{Re}\,(\alpha(t)\gamma_k) < 0 \\ +\infty, \text{ если } \operatorname{Re}\,(\alpha(t)\gamma_k) > 0 \end{cases}, \quad t \ge t_1,$$

$$c_k = \begin{cases} x_k\,(t_1)\,, \text{ если } A_k = t_1, \\ 0, \text{ если } A_k = +\infty, \end{cases} \qquad \varepsilon_k = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } A_k = t_1, \\ -1, \text{ если } A_k = +\infty \end{array} \right);$$

$$x_{0,k\,\nu}(t) = \int_{+\infty}^{t} |\beta_{k-n_1-n_2}(\tau)|\,[|u_k(\tau)| + \sum_{j=1}^{n_1+n_2+n_3} v_{0,k\,j} x_{0,j\,\nu-1} +$$

$$+ L_0 \sum_{j=1}^{n_1+n_2+n_3} |x_{0,j\,\nu-1}|]\,d\tau \quad \left(k = \overline{n_1+n_2+1, n_1+n_2+n_3}\right);$$

$$\Bigg(\nu = 2, 3, \ldots,\ l_{n_1} = s_{n_1+n_2} = 0,$$

$$v_{0,k\,j} = \sup_{[t_1,+\infty[} |v_{k\,j}(t)| \quad \begin{array}{l} \left(k = \overline{n_1+1, n_1+n_2},\ j = \overline{1, n_1};\right. \\ \left. k = \overline{n_1+n_2+1, n_1+n_2+n_3},\ j = \overline{1, n_1+n_2+n_3}\right), \end{array}$$

$$r_{0,k\,j} = \sup_{[t_1,+\infty[} |r_{k\,j}(t)| \quad \left(k, j = \overline{1, n_1};\ k, j = \overline{n_1+1, n_1+n_2}\right)\Bigg).$$

Определенные так $x_{0,k\,\nu}(t)$ будут заведомо удовлетворять неравенству (5) для всех k, ν.

Далее заметим, что

$$X_{0,k}(t) = \lim_{\nu\to\infty} X_{0,k\,\nu}(t) \quad \left(k = \overline{1,3}\right)$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$x'_{0,k}(t) = \varepsilon_k (|u_k(t)| - \gamma x_{0,k} + \sum_{j=1}^{n_1} (r_{0,k\,j} + L_0)\, x_{0,j} +$$

$$+ l_k x_{0,k+1} + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2+n_3} (\mu_0 + L_0)\, x_{0,j}), \quad k = \overline{1, n_1},$$

$$x'_{0,k}(t) = \varepsilon_k |\alpha(t)| (|u_k(t)| - \gamma x_{0,k} + \sum_{j=1}^{n_1} (v_{0,k\,j} + L_0)\, x_{0,j} +$$

$$+ \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} (r_{0,k\,j} + L_0) x_{0,j} + s_k x_{0,k+1} + \sum_{j=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} (\mu_0 + L_0)\, x_{0,j}),$$

$$k = \overline{n_1+1, n_1+n_2},$$

$$x'_{0,k}(t) = |\beta_{k-n_1-n_2}(t)|\, (|u_k(t)| + \sum_{j=1}^{n_1+n_2+n_3} (v_{0,k\,j} + L_0)\, x_{0,j}),$$

$$k = \overline{n_1+n_2+1, n_1+n_2+n_3},$$

или, в векторной форме, системе

$$\begin{aligned} X'_{0,1} &= U_{0,1}(t) + P_{1\,1}X_{0,1} + P_{1\,2}X_{0,2} + P_{1\,3}X_{0,3}, \\ X'_{0,2} &= |\alpha(t)|\left[U_{0,2}(t) + P_{2\,1}X_{0,1} + P_{2\,2}X_{0,2} + P_{2\,3}X_{0,3}\right], \\ X'_{0,3} &= |\beta(t)|\left[U_{0,3}(t) + P_{3\,1}X_{0,1} + P_{3\,2}X_{0,2} + P_{3\,3}X_{0,3}\right], \end{aligned} \tag{6}$$

причем элементы постоянных матриц $P_{1\,2}, P_{1\,3}, P_{2\,1}, P_{2\,3}$ достаточно малы по сравнению с корнями характеристических уравнений постоянных матриц $P_{1\,1}$, $P_{2\,2}$, и константы t_1, $r_{0,k\,i}$, L_0, $v_{0,k\,i}$ всегда можно выбрать так, чтобы эти корни были простыми, вещественными и удовлетворяли условию

$$|\lambda_{0,k}| > \gamma - \varepsilon, \quad |\gamma_{0,s}| > \gamma - \varepsilon \quad \left(k = \overline{1, n_1},\ s = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}\right),$$

где $\varepsilon = const$ сколь угодно малая.

Не ограничивая общности рассуждений, матрицы $P_{1\,1}$, $P_{2\,2}$ можно считать диагональными, так как достигнуть этого всегда можно при помощи линейных преобразований из собственных векторов матриц $P_{1\,1}$, $P_{2\,2}$, влияющих только на постоянный множитель в искомой оценке.

Приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если $p(t)$, $q(t)$ – вещественные функции, непрерывные на промежутке $[T, +\infty[$, причем*

$$\int_T^{+\infty} p(t)\,dt = k < +\infty, \quad \int_T^{+\infty} q(t)\,dt = c < +\infty,$$

то имеет место следующее асимптотическое свойство

$$\mathrm{e}^{-\int\limits_t^{+\infty} p(\tau)\,d\tau} \int_t^{+\infty} q(\tau)\mathrm{e}^{\int\limits_\tau^{+\infty} p(t)\,dt}\,d\tau \sim \int_t^{+\infty} q(\tau)\,d\tau, \quad (t \to +\infty).$$

Лемма 2. *Если в области $G_1 = \Delta_1 \times \nabla_1$,*

$$\Delta_1 = \{t:\, t_0 \le t < +\infty\},$$

$$\nabla_1 = \{Y:\, Y = \mathrm{colon}\,(y_1, \ldots, y_n)\,,\ \|Y\| \le c,\ c = const > 0\}$$

для системы дифференциальных уравнений

$$Y' = \beta(t)\left[Q(t) + B(t)Y + \Phi(t, Y)\right], \tag{7}$$

в которой все величины, исключая t и $\beta(t)$, являются в общем случае комплексными, выполнены следующие условия:

а) $\beta(t) = \mathrm{colon}\,(\beta_1(t), \ldots, \beta_N(t))$, $\beta_i(t)$ *– вещественные функции, непрерывные на промежутке $[T, +\infty[$, причем*

$$\int_{t_0}^{+\infty} |\beta_i(t)|\,dt = k < +\infty \quad \left(i = \overline{1, N}\right),$$

б) $Q(t) = \operatorname{colon}(q_1(t), \ldots, q_N(t))$, $q_k(t) \in C_{\Delta_1}$,

$$\lim_{t\to+\infty} q_k(t) = 0 \quad \left(k = \overline{1,N}\right);$$

в) $B(t)$ – $N \times N$*-матрица,* $B(t) \in C_{\Delta_1}$*, элементы матрицы* $B(t)$ *ограничены при* $t \in \Delta_1$*;*

г) *вектор-функция* $\Phi(t,Y)$ *удовлетворяет в области* G_1 *условию Липшица*

$$\left\|\Phi\left(t, Y_{(1)}\right) - \Phi\left(t, Y_{(2)}\right)\right\| \le L_2 \left\|Y_{(1)} - Y_{(2)}\right\|, \quad L_2 = L_2(c) = const,$$

где постоянную L_2 *можно сделать сколь угодно малой уменьшением числа* c*, определяющего область* G_1*,*

то у этой системы существует непрерывное на промежутке $[T, +\infty[$*,* $T \ge t_0$*, стремящееся к нулю при* $t \to +\infty$ *частное решение, для которого имеет место оценка вида*

$$\|Y(t)\| \le A_Y \int_{+\infty}^{t} \|\beta(\tau)\| \cdot \|Q(\tau)\|\, d\tau, \tag{8}$$

где $A_Y = A_Y(T) = const.$

Доказательство. Из (7) следует справедливость следующего интегрального неравенства:

$$\|Y(t)\| \le A_1 \int_{+\infty}^{t} \left(\|\beta(\tau)\| \cdot \|Q(\tau)\| + \|\beta(\tau)\| \left(\|B(\tau) + L_2 E\|\right) \|Y\|\right) d\tau \le$$

$$\le A_1 \int_{+\infty}^{t} \|\beta(\tau)\| \cdot \|Q(\tau)\|\, d\tau + A_2 \int_{+\infty}^{t} \|\beta(\tau)\| \cdot \|B^*(\tau)\| \cdot \|Y\|\, d\tau \le$$

$$\le A_1 \int_{+\infty}^{t} \|\beta(\tau)\| \cdot \|Q(\tau)\|\, d\tau +$$

$$+ A_2 \int_{+\infty}^{t} \|\beta(\tau)\| \cdot \|B^*(\tau)\| \cdot A_1 \int_{+\infty}^{\tau} \|\beta(\theta)\| \cdot \|Q(\theta)\|\, d\theta\, d\tau + \ldots$$

(A_1, A_2 – константы, $B^*(\tau) = B(\tau) + L_2 E$, где E – единичная матрица).

Так как правая часть этого неравенства представляет собой разложение стремящегося к нулю при $t \to +\infty$ решения скалярного уравнения

$$\|Y(t)\|' = \|\beta(t)\| \cdot \left[\|Q(t)\| + \|B^*(t)\| \cdot \|Y\|\right],$$

а к нему применима лемма 1, то оценка (8) верна.

Применим к системе (6) преобразование:

$$\begin{aligned} X_{0,1} &= Z_1, \\ X_{0,2} &= A_{2\,1}(t) Z_1 + Z_2, \\ X_{0,3} &= A_{3\,1}(t) Z_1 + A_{3\,2}(t) Z_2 + Z_3, \end{aligned} \tag{9}$$

где $A_{2\,1}(t)$, $A_{3\,1}(t)$, $A_{3\,2}(t)$ – неопределенные пока матрицы коэффициентов преобразования, а Z_1, Z_2, Z_3 – столбцы новых неизвестных функций.

Подставляя (9) в (6), получим систему дифференциальных уравнений:

$$Z_1' = U_{0,1}(t) + \left(P_{1\,1} + P_{1\,2}A_{2\,1}(t) + P_{1\,3}A_{3\,1}(t)\right) Z_1 + \left(P_{1\,2} + P_{1\,3}A_{3\,2}(t)\right) Z_2 + P_{1\,3}Z_3,$$

$$\begin{aligned} Z_2' = |\alpha(t)| \Bigg\{ U_{0,2}(t) - \frac{A_{2\,1}(t)}{|\alpha(t)|}U_{0,1}(t) + \Bigg[P_{2\,1} - \frac{A_{2\,1}'(t)}{|\alpha(t)|} - \\ - \frac{A_{2\,1}(t)}{|\alpha(t)|}\left(P_{1\,1} + P_{1\,2}A_{2\,1}(t) + P_{1\,3}A_{3\,1}(t)\right) + P_{2\,2}A_{2\,1}(t) + P_{2\,3}A_{3\,1}(t)\Bigg] Z_1 + \\ + \left(P_{2\,2} + P_{2\,3}A_{3\,2}(t) - \frac{A_{2\,1}(t)}{|\alpha(t)|}\left(P_{1\,2} + P_{1\,3}A_{3\,2}(t)\right)\right) Z_2 + \\ + \left(P_{2\,3} - \frac{A_{2\,1}(t)}{|\alpha(t)|}P_{1\,3}\right) Z_3 \Bigg\}, \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} Z_3' = |\beta(t)| \Bigg\{ U_{0,3}(t) - \frac{A_{3\,1}(t)}{|\alpha(t)|}U_{0,1}(t) - \\ - |\beta(t)|^{-1}|\alpha(t)|A_{3\,2}(t)\left(U_{0,2}(t) - \frac{A_{2\,1}(t)}{|\alpha(t)|}U_{0,1}(t)\right) + \\ + \Bigg[\big[P_{3\,1} + P_{3\,2}A_{2\,1}(t) + P_{3\,3}A_{3\,1}(t) - |\beta(t)|^{-1}A_{3\,1}'(t) - |\beta(t)|^{-1}A_{3\,1}(t) \times \\ \times \left(P_{1\,1} + P_{1\,2}A_{2\,1}(t) + P_{1\,3}A_{3\,1}(t)\right)\big] - \\ - |\beta(t)|^{-1}|\alpha(t)|A_{3\,2}(t)\Bigg(P_{2\,1} + P_{2\,2}A_{2\,1}(t) + P_{2\,3}A_{3\,1}(t) - \frac{A_{2\,1}'(t)}{|\alpha(t)|} - \\ - \frac{A_{2\,1}(t)}{|\alpha(t)|}\left(P_{1\,1} + P_{1\,2}A_{2\,1}(t) + P_{1\,3}A_{3\,1}(t)\right)\Bigg)\Bigg] Z_1 + \\ + \Bigg[P_{3\,2} + P_{3\,3}A_{3\,2}(t) - |\beta(t)|^{-1}A_{3\,2}'(t) - |\beta(t)|^{-1}A_{3\,1}(t) \times \\ \times \left(P_{1\,2} + P_{1\,3}A_{3\,2}(t)\right) - |\beta(t)|^{-1}|\alpha(t)|A_{3\,2}(t) \times \\ \times \left(P_{2\,2} + P_{2\,3}A_{3\,2}(t) + \frac{A_{2\,1}(t)}{|\alpha(t)|}\left(P_{1\,2} + P_{1\,3}A_{3\,2}(t)\right)\right)\Bigg] Z_2 + \\ + \left[P_{3\,3} - |\beta(t)|^{-1}A_{3\,1}(t)P_{1\,3} - |\beta(t)|^{-1}|\alpha(t)|A_{3\,2}(t)\left(P_{2\,3} - \frac{A_{2\,1}(t)}{|\alpha(t)|}P_{1\,3}\right)\right] Z_3 \Bigg\} \end{aligned}$$

$\left(|\beta(t)|^{-1} = \mathrm{colon}\left(|\beta_1(t)|^{-1}, \ldots, |\beta_{n_3}(t)|^{-1}\right)\right)$.

Выберем теперь $A_{2\,1}(t)$, $A_{3\,1}(t)$ и $A_{3\,2}(t)$ так, чтобы в последней системе дифференциальных уравнений выражения, стоящие в квадратных скобках, обратились в нуль. С этой целью положим

$$A_{2\,1}(t) = |\alpha(t)|P_{2\,1}P_{1\,1}^{-1} + A_{0,2\,1}(t), \quad A_{3\,1}(t) = |\beta(t)|P_{3\,1}P_{1\,1}^{-1} + A_{0,3\,1}(t),$$

$$A_{3\,2}(t) = |\beta(t)|^{-1}|\alpha(t)|P_0 + A_{0,3\,2}(t),$$

($P_0 = \left(P_{3\,2} - P_{3\,1}P_{1\,1}^{-1}P_{1\,2}\right)\left(P_{2\,2} - P_{2\,1}P_{1\,1}^{-1}P_{1\,2}\right)^{-1}$, матрица P_0 существует, так как элементы матриц $P_{2\,1}$ и $P_{1\,2}$ достаточно малы, а матрица $P_{2\,2}$ невырождена), где $A_{0,2\,1}(t)$, $A_{0,3\,1}(t)$, $A_{0,3\,2}(t)$ – новые неизвестные матрицы.

Относительно новых неизвестных получим систему дифференциальных уравнений:

$$
\begin{gathered}
A'_{0,2\,1}(t) = -|\alpha(t)|' P_{2\,1} P_{1\,1}^{-1} + |\alpha(t)|^2 \left[P_{2\,2} - P_{2\,1} P_{1\,1}^{-1} P_{1\,2} \right] P_{2\,1} P_{1\,1}^{-1} + \\
+ |\alpha(t)| |\beta(t)| \left[P_{2\,3} - P_{2\,1} P_{1\,1}^{-1} P_{1\,3} \right] P_{3\,1} P_{1\,1}^{-1} + \\
+ A_{0,2\,1}(t) \left[-P_{1\,1} + |\alpha(t)| P_{1\,2} P_{2\,1} P_{1\,1}^{-1} - |\beta(t)| P_{1\,3} P_{3\,1} P_{1\,1}^{-1} \right] + \\
+ \left[|\alpha(t)| P_{2\,2} - |\alpha(t)| P_{2\,1} P_{1\,1}^{-1} P_{1\,2} \right] A_{0,2\,1}(t) + \\
+ |\alpha(t)| \left[P_{2\,3} - P_{2\,1} P_{1\,1}^{-1} \right] A_{0,3\,1}(t) - \\
- A_{0,2\,1}(t) P_{1\,2} A_{0,2\,1}(t) - A_{0,2\,1}(t) P_{1\,3} A_{0,3\,1}(t), \\
A'_{0,3\,1}(t) = -|\beta(t)|' P_{3\,1} P_{1\,1}^{-1} + |\beta(t)| |\alpha(t)| \left[P_{3\,2} - P_{3\,1} P_{1\,1}^{-1} P_{1\,2} \right] P_{2\,1} P_{1\,1}^{-1} + \\
+ |\beta(t)|^2 \left[P_{3\,3} - P_{3\,1} P_{1\,1}^{-1} P_{1\,3} \right] P_{3\,1} P_{1\,1}^{-1} + \\
+ |\beta(t)| \left[P_{3\,2} - P_{3\,1} P_{1\,1}^{-1} P_{1\,2} \right] A_{0,2\,1}(t) + |\beta(t)| \left[P_{3\,3} - P_{3\,1} P_{1\,1}^{-1} P_{1\,3} \right] A_{0,3\,1}(t) + \\
+ A_{0,3\,1}(t) \left[-P_{1\,1} - |\alpha(t)| P_{1\,2} P_{2\,1} P_{1\,1}^{-1} - |\beta(t)| P_{1\,3} P_{3\,1} P_{1\,1}^{-1} \right] + \\
+ \left(-A_{0,3\,1}(t) P_{1\,2} A_{0,2\,1}(t) - A_{0,3\,1}(t) P_{1\,3} A_{0,3\,1}(t) \right), \qquad (11) \\
A'_{0,3\,2}(t) = -\left(|\beta(t)| \cdot |\alpha(t)|^{-1} \right)' P_0 + |\alpha(t)|^{-1} |\beta(t)|^2 \left[P_{33} - P_{3\,1} P_{1\,1}^{-1} P_{1\,3} - \right. \\
\left. - P_0 P_{2\,3} - P_0 P_{2\,1} P_{1\,1}^{-1} P_{1\,3} \right] P_0 + |\beta(t)| \cdot |\alpha(t)|^{-1} A_{0,2\,1}(t) \times \\
\times \left[-P_{1\,2} - |\alpha(t)|^{-1} |\beta(t)| P_{1\,3} P_0 \right] + A_{0,3\,1}(t) \left[-P_{1\,2} - |\beta(t)| \cdot |\alpha(t)|^{-1} P_{1\,3} P_0 \right] + \\
+ |\beta(t)| \left[P_{3\,3} - P_{3\,1} P_{1\,1}^{-1} P_{1\,3} - P_0 P_{2\,3} - P_0 P_{2\,1} P_{1\,1}^{-1} P_{1\,3} \right] A_{0,3\,2}(t) + \\
+ A_{0,3\,2}(t) \left[-|\alpha(t)| P_{2\,2} - |\beta(t)| P_{2\,3} P_0 - |\alpha(t)| P_{2\,1} P_{1\,1}^{-1} P_{1\,2} - |\beta(t)| P_{2\,1} P_{1\,1}^{-1} P_{1\,3} P_0 \right] - \\
- A_{0,3\,1}(t) P_{1\,3} A_{0,3\,2}(t) - |\alpha(t)| A_{0,3\,2}(t) P_{2\,3} A_{0,3\,2}(t) - \\
- A_{0,3\,2}(t) A_{0,2\,1}(t) P_{1\,2} - |\beta(t)| \cdot |\alpha(t)|^{-1} A_{0,3\,2}(t) A_{0,2\,1}(t) P_{1\,3} P_0 - \\
- |\beta(t)| \cdot |\alpha(t)|^{-1} P_0 A_{0,2\,1}(t) P_{1\,3} A_{0,3\,2}(t) - |\alpha(t)| A_{0,3\,2}(t) P_{2\,1} P_{1\,1}^{-1} P_{1\,3} A_{0,3\,2}(t) - \\
- A_{0,3\,2}(t) A_{0,2\,1}(t) P_{1\,3} A_{0,3\,2}(t) \\
\left(|\beta(t)| \cdot |\alpha(t)|^{-1} = \operatorname{colon} \left(\frac{|\beta_1(t)|}{|\alpha(t)|}, \ldots, \frac{|\beta_{n_3}(t)|}{|\alpha(t)|} \right), \right. \\
\left(|\beta(t)| \cdot |\alpha(t)|^{-1} \right)' = \operatorname{colon} \left(\left(\frac{|\beta_1(t)|}{|\alpha(t)|} \right)', \ldots, \left(\frac{|\beta_{n_3}(t)|}{|\alpha(t)|} \right)' \right), \\
|\alpha(t)|^{-1} |\beta(t)|^2 = \operatorname{colon} \left(\frac{|\beta_1(t)|^2}{|\alpha(t)|}, \ldots, \frac{|\beta_{n_3}(t)|^2}{|\alpha(t)|} \right); \\
\left. A'_{0,r\,s}(t) = \left(a'_{i\,k}(t) \right) \quad \begin{matrix} (r = 2,\ s = 1,\ i = \overline{1, n_2},\ k = \overline{1, n_1}; \\ r = 3,\ s = 1,\ i = \overline{1, n_3},\ k = \overline{1, n_1}; \\ r = 3,\ s = 2,\ i = \overline{1, n_3},\ k = \overline{1, n_2}) \end{matrix} \right).
\end{gathered}
$$

Первые два "уравнения" системы (11) представляют собой самостоятельную систему дифференциальных уравнений, для которой справедлива оценка, полученная в работе [5]. Из этой оценки следует, что первые два "уравнения" системы (11) имеют решения, обладающие свойством

$$\|A_{0,2\,1}(t)\| = o(|\alpha(t)|), \quad \|A_{0,3\,1}(t)\| = o(\|\beta(t)\|),$$

а третье "уравнение" системы (11), в силу леммы 1.1 из [8], имеет решение, обладающее свойством

$$\|A_{0,3\,2}(t)\| = o\left(\left\|\beta(t)\alpha^{-1}(t)\right\|\right).$$

Итак, существуют матрицы

$$A_{2\,1}(t) = |\alpha(t)|P_{2\,1}P_{1\,1}^{-1} + o(|\alpha(t)|),$$

$$A_{3\,1}(t) = |\beta(t)|P_{3\,1}P_{1\,1}^{-1} + o(\|\beta(t)\|),$$

$$A_{3\,2}(t) = |\alpha(t)|^{-1}|\beta(t)|\left(P_{3\,2} - P_{3\,1}P_{1\,1}^{-1}P_{1\,2}\right)\left(P_{2\,2} - P_{2\,1}P_{1\,1}^{-1}P_{1\,2}\right)^{-1} + \\ + o\left(\left\||\alpha(t)|^{-1}|\beta(t)|\right\|\right)$$

такие, что после применения к системе дифференциальных уравнений (6) преобразования (9) последняя станет "верхней треугольной".

Теорема 1. *При выполнении условий* 1) – 4) *у системы* (1) *существуют частные решения, стремящиеся к нулю при* $t \to +\infty$, *и для любого такого решения, непрерывного в некотором промежутке* $[T, +\infty[$, $T \geq t_0$ *имеет место оценка*

$$\begin{array}{l} \|\xi_1(t)\| \leq A_{\xi_1} J_1(t), \\ \|\xi_2(t)\| \leq A_{\xi_2}\left(J_2(t) + |\alpha(t)|J_1(t)\right), \\ \|\xi_3(t)\| \leq A_{\xi_3}\left(J_3(t) + \|\beta(t)\|J_1(t) + \left\|\alpha^{-1}(t)\beta(t)\right\| J_2(t)\right), \end{array} \tag{12}$$

где

$$J_3(t) = A_{J_3}\int_{+\infty}^{t} \|\beta(\tau)\| \cdot \|Q(\tau)\|\, d\tau,$$

$$J_2(t) = A_{J_2}\Bigg[\exp\left(-\gamma_\varepsilon \int_T^t |\alpha(\tau)|\, d\tau\right) + \exp\left(-\gamma_\varepsilon \int_T^t |\alpha(\tau)|\, d\tau\right) \times \\ \times \int_T^t |\alpha(\tau)| \left(\|Q_1(\tau)\| + \|Q_2(\tau)\| + J_3(\tau)\right) \exp\left(\int_T^\tau \gamma_\varepsilon |\alpha(\theta)|\, d\theta\right) d\tau + \\ + \exp\left(\gamma_\varepsilon \int_T^t |\alpha(\tau)|\, d\tau\right) \int_t^{+\infty} |\alpha(\tau)| \left(\|Q_1(\tau)\| + \|Q_2(\tau)\| + J_3(\tau)\right) \times \\ \times \exp\left(-\gamma_\varepsilon \int_T^\tau |\alpha(\theta)|\, d\theta\right) d\tau\Bigg], \tag{13}$$

$$J_1(t) = A_{J_1}\Bigg[\exp\left(-\gamma_\varepsilon t\right) + \\ + \exp\left(-\gamma_\varepsilon t\right) \int_T^t \left(\|Q_1(\tau)\| + J_2(\tau) + J_3(\tau)\right) \exp\left(\gamma_\varepsilon \tau\right) d\tau +$$

$$+ \exp(\gamma_\varepsilon t) \int_t^{+\infty} (\|Q_1(\tau)\| + J_2(\tau) + J_3(\tau)) \exp(-\gamma_\varepsilon \tau)\, d\tau \Big],$$

$t \geq T$, $\gamma_\varepsilon = \gamma - \varepsilon$, A_{ξ_1}, A_{ξ_2}, A_{ξ_3}, A_{J_1}, A_{J_2}, A_{J_3}, γ, ε *– константы, причем* γ *определяется условием* 3)*, константу* ε *можно считать сколь угодно малой,* A_{J_1}, A_{J_2}, A_{J_3}*, зависят от* T*,* ε *и от рассматриваемого решения.*

Заключение. Получена теорема, в которой приведены достаточные условия существования у системы дифференциальных уравнений (1) O-решений при $t \to +\infty$, а также оценка для таких решений. Данная оценка может быть использована в дальнейшем при построении асимптотических разложений указанных решений.

1. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / Вазов В. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
2. **Де Брейн Н. Г.** Асимптотические методы в анализе [текст] / Де Брейн Н. Г. – М.: ИЛ, 1961. – 247 с.
3. **Олвер Ф.** Введение в асимптотические методы и специальные функции [текст] / Олвер Ф. – М.: Наука, 1978. – 375 с.
4. **Чезари Л.** Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных урвнений [текст] / Чезари Л. – М.: Мир, 1964. – 477 с.
5. **Костин А. В.** Об асимптотических рядах в теории нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I [текст] / А. В. Костин // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, № 6. – С. 875–889.
6. **Костин А. В.** Об асимптотических рядах в теории нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II [текст] / А. В. Костин // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, № 7. – С. 1070–1077.
7. **Костин А. В.** К вопросу о существовании у системы обыкновенных диффероенциальных уравнений ограниченных частных решений и частных решений, стремящихся к нулю при $t \to +\infty$ [текст] / А. В. Костин // Дифференциальные уравнения. – 1965. – Т. 1, № 5. – С. 585–604.
8. **Костин А. В.** О представлении решений дифференциальных уравнений асимптотическими рядами в особых случаях [текст] / А. В. Костин, А. А. Кореновский. – К. 1983. – 45 с. – Деп УКРНИИНТИ 30.12.83, № 1470Ук-Д83.

ISSN 2304–1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2012 .–Т. 17, вип. 4 (16).–С. 59–66

УДК 517.9

З. М. Лысенко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ДВУМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ЯДРОМ БЕРГМАНА

Лисенко З. М. Двовимiрнi iнтегральнi оператори з ядром Бергмана. З точнiстю до iзометричного iзоморфiзму встановлено структуру простору Бергмана у смузi. Знайдено оператор, унiтарно еквiвалентний ортогональному проектору Бергмана у смузi.
Ключовi слова: простiр Бергмана, унiтарний оператор, спряжений оператор, компактний оператор.

Лысенко З. М. Двумерные интегральные операторы с ядром Бергмана. С точностью до изометрического изоморфизма установлена структура пространства Бергмана в полосе. Найден оператор, унитарно эквивалентный ортогональному проектору Бергмана в полосе.
Ключевые слова: пространство Бергмана, проектор Бергмана, унитарный оператор, сопряжённый оператор, компактный оператор.

Lysenko Z. M. Two-dimensional integral operators with the Bergman kernel. We describe the structure of the Bergman space in the strip up to isometric isomorphism. An operator was found which is unitary equivalent to the orthogonal Bergman projection in the strip.
Key words: Bergman space, Bergman projection, the unitary operator, the adjoint operator, a compact operator.

Введение.

1. Постановка задачи

Пусть D – связная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В пространстве $L_2(D)$ с обычной плоской мерой Лебега $d\nu(z) = dxdy$, где $z = x + iy$, введем оператор

$$(B_D\varphi)(z) = \int\limits_D K_D(z,\sigma)\varphi(\sigma)d\nu(\sigma),$$

где

$$K_D(z,\sigma) = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\partial^2 g(z,\sigma)}{\partial z\partial\overline{\sigma}}$$

есть керн-функция Бергмана [1], построенная по функции Грина $g(z,\sigma)$ области D. Известно [2], что B_D – ортогональный проектор (проектор Бергмана) пространства $L_2(D)$ на его замкнутое подпространство – пространство Бергмана $A^2(D)$, состоящее из всех функций, аналитических в области D.

Рассмотрим двумерный сингулярный интегральный оператор в $L_2(D)$, определяемый формулой

$$(S_D\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{\varphi(\sigma)}{(\sigma - z)^2}d\nu(\sigma), \quad z \in D.$$

Тогда сопряженный к S_D двумерный сингулярный оператор S_D^* имеет вид:

$$(S_D^*\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{\varphi(\sigma)}{(\overline{\sigma}-\overline{z})^2}d\nu(\sigma), \quad z \in D.$$

Для проектора Бергмана B_D имеет место следующее представление [2]:

$$B_D = I - S_D S_D^* + L,$$

где I – тождественный оператор, L – компактный оператор.

В работе изучаются пространство Бергмана и проектор Бергмана для полосы

$$S = \left\{ w \in \mathbb{C} : |Re\, w| < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Интегральные операторы с керн-функцией Бергмана изучались многими авторами. Наиболее полное исследование таких операторов в случае, когда область D – единичный круг, проведена в [2]–[7]. Случай единичного круга в $\mathbb{C}^n$ рассматривался в [9]. В работах [5] и [10] рассматривались операторы Бергмана для верхней полуплоскости.

Результаты данной работы являются аналогом результатов, полученных ранее в [5] для случаев, когда область либо единичный круг, либо верхняя полуплоскость, и могут быть использованы для построения теории Фредгольма операторов из алгебры, одной из образующих которых является ортопроектор B_S.

2. Вспомогательные утверждения.

Известно [2], что ядро Бергмана для единичного круга $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ имеет вид:

$$K_{\mathbb{D}}(z,\sigma) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{(1-z\overline{\sigma})^2}.$$

Воспользуемся следующим свойством керн-функции Бергмана [11]:

$$K_S(z,\sigma) = K_{\mathbb{D}}(z,\sigma)\cdot\alpha'(w)\cdot\overline{\alpha'(\omega)},$$

где $z = \alpha(\omega) = \operatorname{tg}\omega$. Отсюда вытекает

Теорема 1. *Проектор Бергмана*

$$B_S : L_2(S) \to A^2(S)$$

является интегральным оператором вида

$$(B_S\varphi)(w) = \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\varphi(\omega)}{\cos^2(w+\overline{\omega})}d\nu(\omega).$$

Пусть $F : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ – преобразование Фурье, определяемое формулой

$$(F\varphi)(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-iu\xi}\varphi(\xi)d\xi.$$

Введем унитарный оператор

$$U_1 = I \otimes F,$$

действующий в пространстве $L_2(S) = L_2(G) \otimes L_2(\mathbb{R})$, где $G = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Тогда [2] пространство $A_1^2 = U_1(A^2(S))$ состоит из всех функций пространства $L_2(S)$, удовлетворяющих уравнению:

$$U_1\, 2\, \frac{\partial}{\partial \overline{w}}\, U_1^{-1} \varphi \equiv \left(\frac{\partial}{\partial u} - v \right) \varphi(u, v) = 0.$$

Общим решением уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - v \right) \varphi(u, v) = 0,$$

как легко проверить, будет

$$\varphi(u, v) = \psi(v) e^{uv}, \quad u \in G, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Условие $\varphi \in L_2(S)$ удовлетворяется, если A_1^2 состоит из функций вида

$$\varphi_0(u, v) = \sqrt{\frac{v}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} v}} \cdot f(v) \cdot e^{uv}, \quad \text{где } f \in L_2(\mathbb{R}).$$

Замечание. $\|\varphi_0\|_{A_1^2} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}$.

Теорема 2. *Ортогональный проектор*

$$B_1 = U_1 B_S U_1^{-1} : L_2(S) \to A_1^2$$

представим в следующем виде:

$$(B_1 \varphi)(u, v) = \frac{v}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} v} \cdot e^{uv} \cdot \int\limits_G \varphi(\xi, v) e^{\xi v} d\xi.$$

Доказательство. Представим ядро Бергмана $K_S(\omega, w)$ следующим образом:

$$K_S(\omega, w) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{e^{2A}} \cdot \frac{e^{-2q}}{\left(e^{-\frac{A}{1/2}} + e^{-\frac{q}{1/2}} \right)^2},$$

где $\omega = \xi + iq$, $w = u + iv$; $A = i(\xi + u) + v$, $q \in \mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{4} < \xi$, $u < \frac{\pi}{4}$. Согласно [12], преобразование Фурье ядра $K_S(\omega, w)$ относительно $q = Im\,\omega$ имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iAy} \cdot \frac{y}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} y}.$$

Отсюда

$$(I \otimes F) K_S(\omega, w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(\xi + u) q} \cdot e^{-ivy} \cdot \frac{q}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} q}.$$

Непосредственно вычисляем:

$$\begin{aligned}
\left(I \otimes F^{-1}\right) B_1 \varphi &= B_S \left(I \otimes F^{-1}\right) \varphi = \\
&= \left\langle \left(I \otimes F^{-1}\right) \varphi, K_S(\omega, w) \right\rangle = \\
&= \langle \varphi, (I \otimes F)\, K_S(\omega, w) \rangle = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left\{ \int\limits_G \varphi(\xi, q) e^{(\xi+u)q} \cdot \tfrac{q}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} q} d\xi \right\} e^{ivq} dq = \\
&= \left(I \otimes F^{-1}\right) \int\limits_G \varphi(\xi, v) e^{(\xi+u)v} \cdot \tfrac{v}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} v} d\xi.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$(B_1\varphi)(u, v) = \frac{v}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} v} \cdot e^{uv} \cdot \int\limits_G \varphi(\xi, v) e^{\xi v} d\xi.$$

□

Теорема 3. *Положим*

$$\varphi_0(u, v) = \sqrt{\frac{v}{sh \frac{\pi}{2} v}} \cdot f(v) \cdot e^{uv},$$

где

$$f(v) = \sqrt{\frac{v}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} v}} \cdot \int\limits_G \varphi(\xi, v) e^{\xi v} d\xi.$$

Тогда

$$B_1 \varphi_0 = \varphi_0.$$

Доказательство. Проводится непосредственной проверкой. □

Рассмотрим область

$$\widetilde{S} = \left\{ (x, y) | y \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{4} c_y < x < \frac{\pi}{4} c_y \right\},$$

где

$$c_y = \begin{cases} \frac{y}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} y} & , \quad y \neq 0, \\ \frac{2}{\pi} & , \quad y = 0. \end{cases}$$

Введем унитарный оператор

$$U_2 : L_2(S) \to L_2(\widetilde{S})$$

по правилу

$$U_2 : \varphi(u, v) \mapsto \frac{1}{\sqrt{c_y}} \varphi \left(\frac{x}{c_y}, y \right).$$

Тогда

$$U_2^{-1} : \varphi(x, y) \mapsto \sqrt{c_v} \varphi(u c_v, v).$$

Обозначим:

$$A_2^2 = U_2 \left(A_1^2 \right), \quad B_2 = U_2 B_1 U_2^{-1}.$$

Следовательно, B_2 — ортогональный оператор пространства $L_2(\widetilde{S})$ на A_2^2.

Теорема 4. *Проектор $B_2 : L_2(\widetilde{S}) \to A_2^2$ имеет следующий вид:*

$$(B_2\varphi)(x, y) = e^{x \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} y} \int\limits_{I_y} \varphi(\nu, y) e^{\nu \frac{\pi}{2} y} d\nu,$$

где $I_y = \left(-\frac{\pi}{4}c_y, \frac{\pi}{4}c_y\right)$.

Доказательство. Проводится непосредственной проверкой. □

Основные результаты.

Обозначим

$$l_{0,y}(x) = e^{x \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} y}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\|l_{0,y}\|_{L_2(I_y)} = 1.$$

Фиксируем $y \in \mathbb{R}$. Пусть $L_{0,y}$ — одномерное подпространство пространства $L_2(I_y)$, порожденное $l_{0,y}(x)$. Тогда одномерный проектор

$$P_{0,y} : L_2(I_y) \to L_{0,y}$$

имеет вид:

$$(P_{0,y}\psi)(x) = \langle \psi, l_{0,y} \rangle \cdot l_{0,y} = e^{x \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} y} \int\limits_{I_y} \psi(\xi) e^{\xi \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} y} d\xi.$$

Отсюда и из теоремы 4 следует

Теорема 5.

$$B_2 = P_{0,y} \underset{y \in \mathbb{R}}{\otimes} I.$$

Из теорем 2 и 5 непосредственно вытекает

Теорема 6. *Унитарный оператор*

$$U = U_2 U_1 : L_2(S) \to L_2(\widetilde{S})$$

устанавливает изометрический изоморфизм пространств

$$L_2(S) = L_2(G) \otimes L_2(\mathbb{R})$$

и

$$L_2(\widetilde{S}) = L_2(I_y) \underset{y \in \mathbb{R}}{\otimes} L_2(\mathbb{R}),$$

при котором

1) пространство Бергмана $A^2(S)$ отображается на $L_{0,y} \underset{y \in \mathbb{R}}{\otimes} L_2(\mathbb{R})$, где $L_{0,y}$ — одномерное подпространство пространства $L_2(y)$, порожденное $l_{0,y}(x) = e^{x \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} y}$, $x \in I_y$;

2) проектор Бергмана B_S унитарно эквивалентен

$$U B_S U^{-1} = P_{0,y} \underset{y \in \mathbb{R}}{\otimes} I,$$

при этом $P_{0,y}$ — одномерный проектор $L_2(I_y)$ на $L_{0,y}$.

Введём изометрический изоморфизм

$$R_0 : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\widetilde{S})$$

по правилу:

$$\big(R_0 f\big)(x, y) = f(y) l_{0,y}(x).$$

Тогда сопряженный оператор

$$R_0^* : L_2(\widetilde{S}) \to L_2(\mathbb{R})$$

представим в следующем виде:

$$\big(R_0^* g\big)(y) = \int\limits_{I_y} l_{0,y}(x) g(x, y) dx.$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что для операторов

$$R_0^* R_0 : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$$

и

$$R_0 R_0^* : L_2(\widetilde{S}) \to A_2^2$$

имеют место равенства:

$$R_0 R_0^* = I, \quad R_0^* R_0 = B_2.$$

Введем оператор

$$R = R_0^* U : L_2(S) \to L_2(\mathbb{R}).$$

Сужение

$$R\big|_{A^2(S)} : A^2(S) \to L_2(\mathbb{R})$$

является изометрическим изоморфизмом соответствующих пространств.

Теорема 7. $RR^* = I$, $R^* R = B_S$.

Доказательство.

$$RR^* = (R_0^* U)(U^* R_0) = R_0^* (UU^*) R_0 = R_0^* R_0 = I;$$

$$R^* R = U^* (R_0 R_0^*) U = U^* B_2 U = U^* (U B_S U^{-1}) U = B_S.$$

□

Теорема 8. *Для изометрического изоморфизма*

$$R^* = U^* R_0 : L_2(\mathbb{R}) \to A^2(S)$$

имеет место следующее интегральное представление:

$$\big(R^* f\big)(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \sqrt{c_\xi} \cdot f(\xi) \cdot e^{\xi z} d\xi.$$

Доказательство. Непосредственно находим

$$\begin{aligned} \big(U^* R_0 f\big)(z) &= \big(\big(U_2 U_1^*\big) R_0 f\big)(z) = U_1^{-1} U_2^{-1} f(y) l_{0,y}(x) = \\ &= \big(I \otimes F^{-1}\big) \left\{ \sqrt{\tfrac{v}{sh \frac{\pi}{2} v}} \cdot f(v) \cdot e^{u c_v \cdot \mathrm{sh}\, \frac{\pi}{2} v} \right\} = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \sqrt{\tfrac{\xi}{sh \frac{\pi}{2} \xi}} \cdot f(\xi) \cdot e^{x\xi} \cdot e^{i\xi y} d\xi. \end{aligned}$$

$\square$

Замечание 1. *Из теоремы 8 следует, что*

$$\begin{aligned} \langle f, R^* g \rangle &= \int\limits_S f(x,y) \left\{ \overline{\int\limits_{\mathbb{R}} \sqrt{c_\xi} g(\xi) e^{\xi(x+iy)} d\xi} \right\} dx\, dy = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{g(\xi)} d\xi \int\limits_S \left\{ \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x,y) \sqrt{c_\xi} e^{\xi(x-iy)} \right\} dx\, dy. \end{aligned}$$

Отсюда для оператора $R : A^2(S) \to L_2(\mathbb{R})$ *получим следующее интегральное представление:*

$$\big(Rf\big)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{c_\xi} \cdot \int\limits_S f(x,y) e^{\xi \overline{\omega}} d\mu(\omega).$$

Заключение. В данной работе с точностью до изометрического изоморфизма установлена структура пространства Бергмана в полосе. Найден оператор, унитарно эквивалентный ортогональному проектору Бергмана в полосе.

1. **Bergman S.** The kernel function and conformal mapping [text] / S. Bergman // Math Surveys. Amer. Math. Soc., 1950. – № 5. – 161 p.
2. **Джураев А. Д.** Метод сингулярных интегральных уравнений [текст] / А. Д. Джураев // М.: Наука, 1987. – 415 с.
3. **Комяк И. И.** Об условиях нётеровости и формуле для индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений [текст] / И. И. Комяк // ДАН БССР. – 1979. – Т. 22. – № 6. – С. 488–491.
4. **Комяк И. И.** Об одном классе двумерных сингулярных интегральных уравнений с ядром Бергмана [текст] / И. И. Комяк // ДАН БССР. – 1979. – Т. 23. – № 1. – С. 8–11.
5. **Vasilevski Nikolai** Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space [text] / Nikolai L. Vasilevski // Series: Operator Theory: Advances and Applications. – 2008. – Vol. 185. – 417 p.
6. **Loaiza Maribel** Algebras generated by the Bergman projection and operators of multiplication by piecewise continuous functions [text] / Maribel Loaiza // Integr. equ. oper. theory. – 2003. – T. 46 – P. 215–234.
7. **Sanchez-Nungaray Armando** Toeplitz operators on the Bergman spaces with pseudodifferential defining symbols [text] / Armando Sanchez-Nungaray and Nikolai Vasilevski // Operator Theory: Advances and Applications. – 2011, Vol. 1. – P. 1–20.

8. **Ze-Hua Zhou** Algebraic properties of Toeplitz operators with radial symbols on the Bergman space of the unit balls [text] / Ze-Hua Zhou and Xing-Tang Dong // Integr. equ. oper. theory. – 2009. – T. 64. – P. 137–154.

9. **Zhi Ling Sun** Toeplitz Operators on the weighted pluriharmonic Bergman space with radial symbols [text] / Zhi Ling Sun and Yu Feng Lu // Abstract and Applied Analysis. – 2011. – 15 p.

10. **Karlovich Yu. I.** Algebras generated by Bergman and anti-Bergman projections and by multiplications by piecewice continuous functions [text] / Yu. I. Karlovich and Luis Pessoa // Integr. equ. oper. theory. – 2005. – T. 52. – P. 219–270.

11. **Курант Р.** Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности [текст] / Р. Курант. – М., 1962. – 254 с.

12. **Бэйтмен Г.** Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина [текст] / Т. Бэйтмен, А. Эрдейн. – М.: Наука, 1969. – Т. 1. – 343 с.

УДК 517.9

А. П. Огуленко, О. Д. Кичмаренко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

СХЕМА ПОЛНОГО УСРЕДНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

Огуленко О. П., Кiчмаренко О. Д. Схема повного усереднення рiвнянь на часових шкалах. Доведено аналог теореми Боголюбова для динамiчних рiвнянь на часових шкалах. Одержано оцiнку близкостi розв'язкiв заданої та усередненої систем рiвнянь.
Ключовi слова: метод усереднення, динамiчнi рiвняння на часових шкалах.

Огуленко А. П., Кичмаренко О. Д. Схема полного усреднения уравнений на временных шкалах. Доказан аналог теоремы Боголюбова для динамических уравнений на временных шкалах. Получена оценка близости решений заданной и усредненной систем уравнений.
Ключевые слова: метод усреднения, динамические уравнения на временных шкалах.

Ogulenko O. P., Kichmarenko O. D. Full averaging scheme for equations on time scales. An analogue of Bogolubov's theorem prooved for dynamical equations on a time scale. An estimation for proximity of solutions of given and averaged system of equations was obtained.
Key words: averaging Method, Dynamic Aquation on Time Scales.

Введение. Метод усреднения является важным методом асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений. Он зародился во второй половине XVIII века в работах А. Клеро, Ж. Лагранжа и С. Лапласа по небесной механике. В начале XX века Б. Ван-Дер-Поль применил метод усреднения к дифференциальным уравнениям, описывающим колебания в системах с одной степенью свободы. Однако вопросы строгого обоснования метода усреднения оставались открытыми.

В теории усреднения дифференциальных уравнений основополагающими являются работы Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова [1]. Позже этот подход был развит Н. Н. Боголюбовым и его учениками [2]. С развитием теории оптимального управления во второй половине XX века метод усреднения приобрел еще большую важность, так как он позволил эффективно применять вычислительную технику для решения практических и фундаментальных задач, которые ранее считались безнадежными.

Метод усреднения был обоснован для большого числа различных классов динамических систем: дифференциальных уравнений с разрывной правой частью [3], для дифференциальных включений [4], квазидифференциальных уравнений, включений и динамических систем с запаздыванием и импульсами [5, 6, 7, 8], уравнений с запаздыванием и максимумом в правой части [9, 10], уравнений с производной Хукухары [11, 12, 14], уравнений с нечеткой правой частью [13, 15].

Основное направление этих исследований заключалось в расширении понятия динамической системы и, соответственно, понятия решения такой системы.

В последнее время был осуществлен перенос метода усреднения на дискретные динамические системы, например, [16, 17, 18].

С другой стороны, во многом изменился подход к пониманию природы времени в динамических системах. Понятие временной шкалы, впервые введенное S. Hilger в 1988 году [19], позволило построить общую теорию динамических систем, одним языком описывающую и непрерывные системы, и дискретные, и — что особенно важно — смешанные случаи. Подробное изложение теории динамических систем на временных шкалах можно найти в [20, 21].

Вопросы устойчивости динамических систем на временных шкалах изучались в [22, 23], а непосредственно задача усреднения, насколько нам известно, впервые была рассмотрена в [24, 25]. В этих работах рассматривался вопрос близости решения исходной системы на временной шкале и решения усредненного обобщенного дифференциального уравнения. Таким образом, операция усреднения не обеспечивала замкнутости множества решений.

Цель нашей работы заключается в построении метода усреднения динамических систем на временных шкалах, в котором усредненная система имела бы ту же природу, что и исходная.

Ниже мы приведем основные сведения о временных шкалах, которые необходимы для изложения полученных результатов.

Временная шкала — непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел, обозначается символом $\mathbb{T}$. Свойства временной шкалы определяются тремя функциями:

1) оператор перехода вперед:
$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\};$$
2) оператор перехода назад:
$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\},$$
(при этом полагается $\inf\varnothing = \sup\mathbb{T}$ и $\sup\varnothing = \inf\mathbb{T}$);
3) функция зернистости
$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Поведение операторов перехода вперед и назад в конкретной точке временной шкалы определяет тип этой точки. Соответствующая классификация точек представлена в таблице .

Определим множество $\mathbb{T}^\kappa$ следующим образом:

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T}\setminus\{M\}, & \text{если } \exists \text{ справа рассеянная точка } M \in \mathbb{T} : M = \sup\mathbb{T}, \sup\mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее полагаем $[a, b] = \{t \in \mathbb{T} : a \leqslant t \leqslant b\}$.

Определение 1. [20] *Пусть $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Число $f^\Delta(t)$ называется Δ-производной функции f в точке t, если $\forall\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки t (то есть $U = (t-\delta, t+\delta)\cap\mathbb{T}, \delta < 0$), что*
$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leqslant \varepsilon|\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U.$$

Table 1: Классификация точек временной шкалы

t справа рассеянная	$t < \sigma(t)$
t справа плотная	$t = \sigma(t)$
t слева рассеянная	$\rho(t) < t$
t слева плотная	$\rho(t) = t$
t изолированная	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t плотная	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

Определение 2. [20] *Если $f^{\Delta}(t)$ существует $\forall t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, то $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется Δ-дифференцируемой на $\mathbb{T}^{\kappa}$. Функция $f^{\Delta}(t) : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ называется дельта-производной функции f на $\mathbb{T}^{\kappa}$.*

Если f дифференцируемая в t, то

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t).$$

Определение 3. [20] *Функция $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется регулярной, если во всех плотных справа точках временной шкалы $\mathbb{T}$ она имеет конечные правосторонние пределы, а во всех слева плотных точках она имеет конечные левосторонние пределы.*

Определение 4. [20] *Функция $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется rd-непрерывной, если в справа плотных точках она непрерывна, а в слева плотных точках имеет конечные левосторонние пределы. Множество таких функций обозначается $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T})$, а множество дифференцируемых функций, производная которых rd-непрерывна, обозначается как $C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T})$.*

Определение 5. [20] *Для любой регулярной функции $f(t)$ существует функция F, дифференцируемая в области D такая, что для всех $t \in D$ выполняется равенство*

$$F^{\Delta}(t) = f(t).$$

Эта функция называется пред-первообразной для $f(t)$ и определяется неоднозначно.

Неопределенный интеграл на временной шкале имеет вид:

$$\int f(t) \Delta t = F(t) + C,$$

где C — произвольная константа интегрирования, а $F(t)$ — пред-первообразная для $f(t)$.

Далее, если для всех $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ выполняется $F^{\Delta}(t) = f(t)$, где $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ — rd-непрерывная функция, то $F(t)$ называется первообразной функции $f(t)$. Если

$t_0 \in \mathbb{T}$, то $F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\Delta s$ для всех t. Определенный Δ-интеграл для любых $r, s \in \mathbb{T}$ определяется как

$$\int\limits_{r}^{s} f(t)\Delta t = F(s) - F(r).$$

Определение 6. [20] *Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала и X — банахово пространство. Функцию $f : \mathbb{T} \times X \to X$ будем называть:*

1) *rd-непрерывной, если функция $g(t) = f(t, x(t))$ rd-непрерывна для любой непрерывной функции $x : \mathbb{T} \to X$;*
2) *ограниченной в области $Q \subset \mathbb{T} \times X$, если существует константа $M > 0$ такая, что $\|f(t,x)\| \leq M$ для любой точки $(t,x) \in Q$;*
3) *липшицевой в области $Q \subset \mathbb{T} \times X$, если существует константа $\lambda > 0$ такая, что*

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leqslant \lambda \|x_1 - x_2\| \qquad \forall (t,x_1), (t,x_2) \in Q .$$

Сформулируем задачу Коши на временной шкале. Пусть задано уравнение

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{T}.$$

Функция $x(t)$ называется решением этого дифференциального уравнения, если $x(t) \in C^1_{rd}([t_0, +\infty) \cap \mathbb{T})$ и при подстановке ее в уравнение последнее превращается в тождество. Если, кроме того, функция $x(t)$ удовлетворяет заданному начальному условию

$$x(t_0) = x_0,$$

то она называется решением соответствующей начальной задачи или задачи Коши.

Условия существования и единственности решения задачи Коши сформулированы и доказаны в [20] (теоремы 8.16, 8.18 и 8.20).

В дальнейшем нам понадобится аналог экспоненциальной функции, построенный для произвольной временной шкалы. Вначале выделим важный класс функций:

Определение 7. [20] *Функцию $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ будем называть регрессивной, если*

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa}.$$

Множество регрессивных и rd-непрерывных функций обозначается $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T})$.

Как показано в [20], функции p из класса $\mathcal{R}$ можно поставить в соответствие экспоненту $e_p(t,s)$. В дальнейшем понадобится также неравенство Гронуолла, которое мы сформулируем в виде следующей леммы:

Лемма (неравенство Гронуолла, [20]). *Пусть y — rd-непрерывная на $\mathbb{T}$ функция, $p \in \mathcal{R}^+, p \geqslant 0$, и $\alpha \in \mathbb{R}$. Если справедливо неравенство*

$$y(t) \leqslant \alpha + \int\limits_{t_0}^{t} y(\tau)p(\tau)\Delta\tau, \qquad \tau \in \mathbb{T},$$

то

$$y(t) \leqslant \alpha e_p\left(t, t_0\right), \qquad \tau \in \mathbb{T}\ .$$

Основные результаты. Сформулируем и докажем аналог теоремы Боголюбова для динамических уравнений с малым параметром на временных шкалах. Рассмотрим динамическую систему вида

$$x^{\Delta} = \varepsilon X(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $X(t, x)$ — n-мерная вектор-функция, $t \in \mathbb{T}$ — время, заданное временной шкалой. Поставим ей в соответствие следующую систему:

$$\xi^{\Delta} = \varepsilon \overline{X}\left(\xi\right) \quad \xi(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где

$$\overline{X}(x) = \lim_{\substack{T \to \infty \\ T \in \mathbb{T}}} \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{T} X(t, x)\Delta t. \tag{3}$$

Эту последнюю систему мы будем называть усредненной, соответствующей исходной системе (1).

Теорема 1 (об усреднении на временной шкале). *Пусть в области $Q = \{t \in \mathbb{T}, x \in D\}$ выполнены следующие условия:*

1) *функция $X(t, x)$ rd-непрерывна по t, регрессивна и для нее выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши, причем $\forall (t, x) \in Q$ $\|f(t, x)\| \leqslant M$, $M > 0$, $f(t, x)$ липшицева по x с константой $\lambda > 0$, то есть*

$$\left\|f\left(t, x_1\right) - f\left(t, x_2\right)\right\| \leqslant \lambda \left\|x_1 - x_2\right\| \qquad \forall \left(t, x_1\right), \left(t, x_2\right) \in Q\ ;$$

2) *предел (3) существует равномерно относительно $x \in D$;*

3) *решение $\xi(t)$ усредненной системы (2) с начальным условием $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ определено для всех $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ и лежит вместе с ρ-окрестностью в области D;*

4) *существует такое число $\mu_0 > 0$, что для любого $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ либо $\mu(t) = 0$, либо $\mu(t) > \mu_0$.*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0\left(\eta, L\right) > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ справедливо

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta\ , \tag{4}$$

где $x(t)$ и $\xi(t)$ — решения задач Коши (1) и (2) соответственно.

Доказательство. Покажем вначале, что функция $\overline{X}(x)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица. Действительно, согласно условию 2) для любого заданного $\delta > 0$ можно указать такое $T_1(\delta)$, что при всех $T > T_1(\delta)$ справедлива оценка

$$\left\|\overline{X}(x') - \overline{X}(x'')\right\| \leqslant + \left\|\overline{X}(x') - \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{T} X(t,x')\Delta t\right\| +$$

$$+ \left\|\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{T}\left[X(t,x') - X(t,x'')\right]\Delta t\right\| + \left\|\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{T} X(t,x'')\Delta t - \overline{X}(x'')\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \delta + \tfrac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{T}\left\|X(t,x') - X(t,x'')\right\|\Delta t \leqslant \delta + \lambda\left\|x' - x''\right\| \ .$$

Поскольку значение δ выбирается произвольным образом, то в пределе получаем

$$\left\|\overline{X}(x') - \overline{X}(x'')\right\| \leqslant \lambda\left\|x' - x''\right\| \ .$$

Таким образом, из условий 1) и 2) следует, что и исходная, и усредненная системы будут иметь единственные решения, продолжаемые по времени до тех пор, пока $x(t) \in D$ (соответственно, $\xi(t) \in D$).

Запишем теперь эти системы в интегральной форме:

$$\begin{aligned} x(t) = &\quad x_0 + \varepsilon\int\limits_{t_0}^{t} X(s,x(s))\Delta s, \\ \xi(t) = &\quad x_0 + \varepsilon\int\limits_{t_0}^{t} \overline{X}(\xi(s))\Delta s. \end{aligned}$$

Оценим норму разности решений исходной и усредненной систем:

$$\begin{aligned} \left\|x(t) - \xi(t)\right\| &= \left\|\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t}\left[X(s,x(s)) - \overline{X}(\xi(s))\right]\Delta s\right\| = \\ &= \varepsilon\left\|\int\limits_{t_0}^{t}\left[X(s,x(s) - X(s,\xi(s))\right]\Delta s + \int\limits_{t_0}^{t}\left[X(s,\xi(s) - \overline{X}(\xi(s))\right]\Delta s\right\| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon\int\limits_{t_0}^{t}\left\|X(s,x(s) - X(s,\xi(s))\right\|\Delta s + \varepsilon\left\|\int\limits_{t_0}^{t}\left[X(s,\xi(s) - \overline{X}(\xi(s))\right]\Delta s\right\| \leqslant \\ &\leqslant \lambda\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t}\left\|x(s) - \xi(s)\right\|\Delta s + \varepsilon\left\|\int\limits_{t_0}^{t}\left[X(s,\xi(s) - \overline{X}(\xi(s))\right]\Delta s\right\| \ . \end{aligned}$$

Оценим последнее слагаемое на промежутке временной шкалы $\left[t_0, L\varepsilon^{-1}\right] \cap \mathbb{T}$.

Построим разбиение промежутка следующим образом: зададимся диаметром разбиения δ, положим первую точку разбиения равной t_0, а дальнейшие точки определим по формуле

$$t_i = \begin{cases} \sup\,(t_{i-1}, t_{i-1}+\delta], & \text{если} \quad t_{i-1}+\delta \in \mathbb{T}^{\kappa}, \\ \sigma(t_{i-1}), & \text{если} \quad t_{i-1}+\delta \notin \mathbb{T}^{\kappa}. \end{cases}$$

Можно показать ([21], с. 120) , что построенное таким образом разбиение обладает следующим свойством: для любого i либо $t_i - t_{i-1} \leqslant \delta$ (будем считать, что в этом случае $i \in I_\delta$), либо $t_i - t_{i-1} > \delta$ и $\sigma(t_{i-1}) = t_i$ (тогда $i \in I_\sigma$). Пусть $N = |I_\delta| + |I_\sigma|$.

Далее, обозначим функцию $\varphi(t, \xi(t)) = X(t, \xi(t)) - \overline{X}(\xi(t))$. По свойствам интегралов имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(s, \xi(s)) \Delta s \right\| &= \varepsilon \left\| \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(s, \xi(s)) \Delta s \right\| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon \left\| \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\varphi(s, \xi(s)) - \varphi(s, \xi_i)\right) \Delta s \right\| &+ \varepsilon \left\| \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(s, \xi_i) \Delta s \right\|. \end{aligned} \tag{5}$$

В силу условия 2) существует монотонно убывающая при $t \to \infty$ функция $f(t)$ такая, что

$$\varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(s, \xi(s)) \Delta s \right\| \leqslant t f(t)\,.$$

Тогда

$$\begin{gathered} \varepsilon \left\| \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(s, \xi_i) \Delta s \right\| = \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t_i} \varphi(s, \xi_i) \Delta s - \int\limits_{t_0}^{t_{i-1}} \varphi(s, \xi_i) \Delta s \right\| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t_i} \varphi(s, \xi_i) \Delta s \right\| + \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t_{i-1}} \varphi(s, \xi_i) \Delta s \right\| \leqslant \varepsilon t_i f(t_i) + \varepsilon t_{i-1} f(t_i) \leqslant 2F(\varepsilon), \end{gathered}$$

где $F(\varepsilon) = \sup\limits_{\tau} \left[\tau f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right]$, причем супремум берется по $\tau \in \left[t_0, L\varepsilon^{-1}\right] \cap \mathbb{T}$. Нетрудно видеть, что $F(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Итак, в оценке (5) вторая сумма мажорируется выражением $2NF(\varepsilon)$.

Рассмотрим подробнее первую сумму в (5). Во-первых, легко показать, что функция $\varphi(t,\xi)$ липшицева по ξ с константой 2λ. Во-вторых,

$$\varepsilon\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\|\xi(s)-\xi_i\|\Delta s=\varepsilon\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|x_0+\varepsilon\int\limits_{t_0}^{s}\overline{X}(\xi(\tau))\Delta\tau-x_0-\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t_i}\overline{X}(\xi(\tau))\Delta\tau\right\|\Delta s=$$
$$=\varepsilon^2\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|\int\limits_{t_i}^{s}\overline{X}(\xi(\tau))\Delta\tau\right\|\Delta s\leqslant\varepsilon^2\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}M\int\limits_{t_i}^{s}\Delta\tau\Delta s=$$
$$=\varepsilon^2 M\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_i)\,\Delta s\ .$$

Итак, получили оценку

$$\varepsilon\left\|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(\varphi(s,\xi(s))-\varphi(s,\xi_i))\,\Delta s\right\|\leqslant 2\lambda\cdot\varepsilon\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\|\xi(s)-\xi_i\|\Delta s\leqslant 2\lambda\varepsilon^2 M\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_i)\,\Delta s\ .$$

Пусть $i\in I_\sigma$. Тогда

$$\varepsilon\left\|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(\varphi(s,\xi(s))-\varphi(s,\xi_i))\,\Delta s\right\|\leqslant 2\lambda\varepsilon^2 M\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_i)\,\Delta s=2\lambda\varepsilon^2 M\int\limits_{t_{i-1}}^{\sigma(t_{i-1})}(s-t_i)\,\Delta s=$$
$$=2\lambda\varepsilon^2 M\mu(t_{i-1})\,(t_i-t_i)=0\ .$$

Пусть теперь $i\in I_\delta$. Тогда

$$\varepsilon\left\|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(\varphi(s,\xi(s))-\varphi(s,\xi_i))\,\Delta s\right\|\leqslant 2\lambda\varepsilon^2 M\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_i)\,\Delta s=2\lambda\varepsilon^2 M\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\delta\Delta s\leqslant$$
$$\leqslant 2\lambda\varepsilon^2 M\delta^2\ .$$

Итак, мы получили, что

$$\varepsilon\left\|\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(\varphi(s,\xi(s))-\varphi(s,\xi_i))\,\Delta s\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{N}\varepsilon\left\|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi(s,\xi(s))-\varphi(s,\xi_i)\Delta s\right\|\leqslant\sum_{i\in I_\delta}2\lambda\varepsilon^2 M\delta^2.$$

Чтобы оценить последнюю сумму, воспользуемся условием теоремы 4). Именно, положим $\delta<\mu_0$. Легко видеть, что тогда $|I_\delta|<\dfrac{L}{\varepsilon\delta}$. Пусть теперь $N_0=\dfrac{L}{\varepsilon\mu_0}$. Значит, для всех $N>N_0$ и $\delta=\dfrac{L}{N\varepsilon}$ имеем $\delta<\mu_0$, и оценка примет вид:

$$\varepsilon\left\|\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(\varphi(s,\xi(s))-\varphi(s,\xi_i))\,\Delta s\right\|\leqslant\sum_{i\in I_\delta}2\lambda\varepsilon^2 M\frac{L^2}{\varepsilon^2N^2}=\sum_{i\in I_\delta}\frac{2\lambda ML^2}{N^2}<\frac{2\lambda ML^2}{N}\ .$$

В итоге получаем

$$\varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(s,\xi(s))\Delta s \right\| \leqslant \frac{2\lambda M L^2}{N} + 2NF(\varepsilon)\ .$$

Вернемся к оценке разности решений исходной и усредненной систем:

$$\begin{aligned}
\|x(t)-\xi(t)\| &= \left\| \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s,x(s)) - \overline{X}(\xi(s))\right] \Delta s \right\| \leqslant \\
&\leqslant \lambda\varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \|x(s)-\xi(s)\|\, \Delta s + \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s,\xi(s) - \overline{X}(\xi(s))\right] \Delta s \right\| \leqslant \\
&\leqslant \lambda\varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \|x(s)-\xi(s)\|\, \Delta s + \frac{2\lambda M L^2}{N} + 2NF(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Тогда, вследствие неравенства Гронуолла, имеем:

$$\|x(t)-\xi(t)\| \leqslant \left(\frac{2\lambda M L^2}{N} + 2NF(\varepsilon)\right) \cdot e_{\lambda\varepsilon}(t,t_0)\ .$$

Исходя из свойств экспоненциальной функции ([20], теорема 2.36, пункт ii), $e_{\lambda\varepsilon}(t,t_0) < < e_{\lambda\varepsilon}\left(\frac{L}{\varepsilon},t_0\right)$. Далее, так как $1+\lambda\varepsilon\mu(t) > 0$, то по определению экспоненты [20] имеем:

$$e_{\lambda\varepsilon}\left(\frac{L}{\varepsilon},t_0\right) = \exp\left(\int\limits_{t_0}^{\frac{L}{\varepsilon}} \frac{\ln(1+\lambda\varepsilon\mu(\tau))}{\mu(\tau)}\Delta\tau\right) < \exp\left(\int\limits_{t_0}^{\frac{L}{\varepsilon}} \frac{\lambda\varepsilon\mu(\tau)}{\mu(\tau)}\Delta\tau\right) < e^{\lambda L}.$$

Выберем теперь N достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{2\lambda M L^2}{N} e^{\lambda L} \leqslant \frac{\eta}{2}\ .$$

Зафиксируем это значение и выберем ε_0 достаточно малым, чтобы при всех $\varepsilon \in \in (0,\varepsilon_0]$ выполнялось

$$2NF(\varepsilon)e^{\lambda L} \leqslant \frac{\eta}{2}\ .$$

Тогда

$$\|x(t)-\xi(t)\| \leqslant \eta, \qquad t \in \left[t_0, \frac{L}{\varepsilon}\right] \cap \mathbb{T},$$

что и требовалось доказать.

■

Заключение. В работе обоснована схема полного усреднения системы уравнений на временной шкале с малым параметром в правой части. Этот вопрос рассматривался ранее в работах A. Slavík [24, 25], причем в качестве усредненной системы использовалась система обобщенных дифференциальных уравнений. Нами при весьма общих условиях доказан аналог теоремы Боголюбова, получена оценка близости решения исходной системы и решения усредненной системы, поставленной ей в соответствие, причем усредненная система определяется на той же временной шкале, что и исходная система.

1. **Крылов Н. М.** Введение в нелинейную механику [текст] / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. – Киев : Изд-во АН СССР, 1937. – 363 с.
2. **Боголюбов Н. Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [текст] / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
3. **Плотников В. А.** Метод усреднения в задачах управления [текст] / В. А. Плотников. – Изд-во Лыбидь, Киев-Одесса, 1992. – 188 с.
4. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса, Астропринт, 1999. – 356 с.
5. **Плотников В. А.** Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами [текст] / В. А. Плотников, Л. И. Плотникова // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 11. – С. 1526–1532.
6. **Плотников В. А.** Теорема Боголюбова для квазидифференциальных уравнений с импульсами [текст] / В. А. Плотников, П. М. Китанов // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 45, № 1. – С. 140–142.
7. **Plotnikov V. A.** Asymptotic methods for quasidifferential equations in the metric space [text] / V. A. Plotnikov, L. I. Plotnikova // Functional Differential Equations, Israel. – 1996. – V. 3. – P. 185–205.
8. **Plotnikov V. A.** Method of averaging for impulsive differential inclusions [text] / V. A. Plotnikov, R. P. Ivanov, N. M. Kitanov // Pliska Stud. Math. Bulgar. – 1998. – № 12. – P. 43–55.
9. **Kichmarenko O. D.** Quazidifferential equations with delay [text] / O. D. Kichmarenko // Applications of Mathematics in Engineering and Economics. – Sofia: Heron Press, 2001. – P. 100–105.
10. **Плотников В. А.** Усереднення диференціальних рівнянь із максимумом [текст] / В. А. Плотников, О. Д. Кичмаренко // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. вип. 150. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 78–82.
11. **Плотников В. А.** Усреднение управляемых уравнений с производной Хукухары [текст] / В. А. Плотников, О. Д. Кичмаренко // Нелінійні коливання. – 2006, № 3. – С. 376–385.
12. **Плотников В. А.** Усреднение уравнений с производной Хукухары, многозначным управлением и запаздыванием [текст] / В. А. Плотников, О. Д. Кичмаренко // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2007. – Т. 12. – Вип. 7. – С. 130–139.
13. **Кичмаренко О. Д.** Усреднение нечетких дифференциальных уравнений с запаздыванием [текст] / О. Д. Кичмаренко, Н. В. Скрипник // Нелінійні коливання. – 2008. – Т. 11, № 3. – С. 316–328.

14. **Kichmarenko O. D.** Averaging of differential equations with Hukuhara derivative with maxima [text] // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2009. – V. 57, № 3. – P. 447–457.

15. **Kichmarenko O. D.** One scheme of averaging of fuzzy differential equations with maxima [text] / O. D. Kichamrenko, N. V. Skripnik // J. Advanced Research in Applied Mathematics. – 2011. – V. 3, № 1. – P. 94–103.

16. **Плотников В. А.** Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления [text] / В. А. Плотников, Л. И. Плотникова, А. Т. Яровой // Нелинейные колебания. – 2004. – Т. 7. – № 2. – С. 241–254.

17. **Бойцова И. А.** Метод усреднения в системах дискретных уравнений с быстрыми и медленными переменными [текст] / И. А. Бойцова // Вiсник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. i мех. – 2008. – Т. 13. – Вип. 18. – С. 7–22.

18. **Кiчмаренко О. Д.** Усереднення керованих систем з постiйним запiзненням на дисретному часi [текст] / О. Д. Кiчмаренко, М. Л. Карпичева // Вiсник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. i мех. – 2012. – Т. 17. – Вип. 12 (13-14). – С. 54–69.

19. **Hilger S.** Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten [text] / S. Hilger. – Ph.D. thesis, Universität Würzburg, 1988.

20. **Bohner M.** Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications [text] / M. Bohner, A. Peterson. – Birkhäuser Basel, 2001. – 358 p.

21. **Advances** in Dynamic Equations on Time Scales [text] / M. Bohner, A. Peterson et al. – Springer, 2002. – 368 p.

22. **Бохнер М.** Элементы теории устойчивости А. М. Ляпунова для динамических уравнений на временной шкале [текст] / М. Бохнер, А. А. Мартынюк // Прикл. механика. – 2007. – Т. 43, №. 2. – С. 3–26.

23. **Martynyuk-Chernienko Yu. A.** On the stability of dynamical systems on a time scale [text] / Yu. A. Martynyuk-Chernienko // Dokl. Acad. Nauk. – 2007. – V. 413. – P. 1–5. [Russian].

24. **Mesquita J. G.** Periodic averaging theorems for various types of equations [text] / Jaqueline Godoy Mesquit, Antonín Slavík // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2012. – V. 387, No. 2. – P. 862–877.

25. **Slavík A.** Averaging dynamic equations on time scales [text] / Antonín Slavík // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2012. – V. 388, No. 2. – P. 996–1012.

УДК 519.2

А. Ю. Рижов
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

АДАПТИВНІ ОЦІНКИ РОЗПОДІЛІВ КОМПОНЕНТ У МОДЕЛІ СУМІШЕЙ ЗІ ЗМІННИМИ КОНЦЕНТРАЦІЯМИ ЗА ЦЕНЗУРОВАНИМИ СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ

Рижов А. Ю. Адаптивні оцінки розподілів компонент у моделі сумішей зі змінними концентраціями за цензурованими спостереженнями. В роботі розглянуто адаптивний підхід до питання побудови оцінок компонент сумішей зі змінними концентраціями. Для випадку відомих значень концентрацій компонент сумішей показана асимптотична еквівалентність оптимальних та адаптивних лінійних оцінок.
Ключові слова: суміші зі змінними концентраціями, цензурування, аналіз виживання, оцінка Каплана–Меєра.

Рыжов А. Ю. Адаптивные оценки распределений компонент в модели смесей с переменными концентрациями по цензурированным наблюдениям. В работе рассматривается адаптивный подход к проблеме построения оценок компонент смесей с переменными концентрациями. Для случая известных значений концентраций компонент показана асимптотическая еквивалентность оптимальных и адаптивных линейных оценок.
Ключевые слова: смеси с переменными концентрациями, цензурирование, анализ выживаемости, множительная оценка.

Ryzhov A. Yu. Adaptive estimators of components in a model of mixtures with varying concentrations by censored observations. In the paper an adaptive approach to the problem of estimation of cumulative distribution functions (CDFs) of components of mixtures with varying concentrations is considered. In case of known values of concentrations of mixtures components an asymptotic equivalency between optimal and adaptive linear estimators is proved.
Key words: mixtures with varying concentrations, censorship, survival analysis, product-limit estimator.

Вступ.

Аналіз даних типу тривалості життя є окремим розділом математичної статистики. В ньому вивчаються властивості об'єктів, основною характеристикою яких є поняття *"тривалості життя об'єкта"*. Цим терміном позначається тривалість спостереження за об'єктом від деякого початкового моменту до появи певної події. Прикладами спостережень типу тривалості життя можуть бути: тривалість роботи механізмів та машин у техніці; тривалість страйків або періодів безробіття в економіці; час, необхідний особі для виконання завдань психологічного тесту; період ремісії у клінічних дослідженнях, тощо. Характерними рисами даних такого типу є, по-перше, невід'ємність значень випадкової величини, що позначає "тривалість життя"; по-друге, можлива наявність у досліджуваних вибірках *цензурованих* спостережень. Наприклад, тривалість роботи технічного устрою може припинитися з причин, не пов'язаних безпосередньо з його відмовою. В цьому випадку спостерігається лише частина "тривалості життя" устрою, а спостереження називається цензурованим. Вивчення властивостей оцінок та критеріїв, побудованих за спостереженнями з цензуруванням, було і залишається основним завданням аналізу даних типу тривалості життя.

Часто спостережувані об'єкти належать до популяцій, що мають різні ймовірносні характеристики. Як наслідок, досліджувана вибірка, або вибірки фактично є сумішами таких об'єктів. Останнім часом поглиблено вивчаються моделі сумішей, у яких концентрації компонент відрізняються у різні моменти спостереження. Задачі такого типу для випадку нецензурованих спостережень розглядалися у [4, 6], а також в [3, 7].

В роботі [8] розглянуто випадок цензурованих спостережень у моделі сумішей зі змінними концентраціями у припущенні абсолютної неперервності функцій розподілу компонент. Проте часто на практиці це припущення не має місця, оскільки у спостережуваній вибірці (вибірках) можуть зустрічатися повторювані значення. Метою даної роботи є отримання оцінок для функцій розподілу компонент суміші за довільних функцій розподілу компонент у випадку відомих значень концентрацій компонент сумішей. Питання оцінки значень концентрацій розглядаються в [6, 9].

У подальшому $I\{A\}$ позначає індикаторну функцію множини A; для довільної функції $f(t)$, визначеної на додатній півосі, неперервної справа із скінченими границями зліва, $\Delta f(t) = f(t) - f(t-)$; для функції розподілу тривалості життя покладемо $F(0-) = 0$. Також всюди за означенням покладемо $0/0 \equiv 0$.

Основні результати.

1. Постановка задачі. Розглянемо модель $N > 1$ сумішей зі змінними концентраціями за цензурованими спостереженнями.

Означення ("Модель випадкового цензурування"). *Нехай* (T_{jk}, U_{jk}), $k = 1, \ldots, n_j, j = 1, \ldots, N$, *позначають* n $(n = n_1 + \cdots + n_N)$ *незалежних у сукупності пар невід'ємних випадкових величин. Випадкові величини* T_{jk} *представляють м. н. скінчені моменти відмови з функцією розподілу* $F_j(t) = P\{T_{jk} \le t\} = 1 - S_j(t)$, *випадкові величини* U_{jk} *— моменти можливого цензурування з функцією розподілу* $G_j(t) = P\{U_{jk} \le t\} = 1 - C_j(t)$. *Спостережуваними величинами є набір пар* (X_{jk}, η_{jk}), *де*

$$\begin{aligned} X_{jk} &= \min(T_{jk}, U_{jk}) = T_{jk} \wedge U_{jk}, \\ \eta_{jk} &= I\{X_{jk} = T_{jk}\}, \\ & k = 1, \ldots, n_j, j = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

□

Припустимо, що генеральна сукупність Ω, з якої отримуються об'єкти для дослідження, є об'єднанням $m, 1 < m \le N$ непорожніх неперетинних популяцій $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$: $\Omega_l \cap \Omega_{l'} = \emptyset, l \ne l', \Omega = \bigcup \Omega_l$, так, що умовний розподіл моментів відмови об'єктів з l-ї популяції є

$$P\{T_{jk} \le t / O_{jk} \in \Omega_l\} = H_l(t), l = 1, \ldots, m.$$

Для кожного об'єкта O_{jk}, для якого спостерігається пара величин (X_{jk}, η_{jk}), відомо, що він належить до однієї з популяцій $\{\Omega_l, l = 1, \ldots, m\}$, проте невідомо до якої саме. Якщо для кожного $j = 1, \ldots, N$ і всіх $k = 1, \ldots, n_j$ покласти $w_l^{(j)} = P\{O_{jk} \in \Omega_l\}, l = 1, \ldots, m$, тоді

$$F_j(t) = H_1(t)w_1^{(j)} + \cdots + H_m(t)w_m^{(j)}. \quad (1)$$

Означення в поєднанні із співвідношенням (1) для функцій розподілу моментів відмови призводить до моделі суміші зі змінними концентраціями за цензурованими спостереженнями, оскільки тоді кожну з N груп спостережень можна розглядати як суміш зі скінченою кількістю компонент m. Величини $w_l^{(j)}$, $l = 1, \ldots, m$, називаються *концентраціями компонент* в j-й суміші, $j = 1, \ldots, N$. **Задача** полягає в побудові за спостереженнями $((X_{jk}, \eta_{jk}))$ оцінок функцій розподілу компонент $H_1(t), \ldots, H_m(t)$ за відомих значень концентрацій $\{w_l^{(j)}\}$.

2. Оцінка Каплана–Меєра та її властивості. Позначимо вектори

$$\bar{F}(t) = (F_1(t), \ldots, F_N(t))^T,$$
$$\bar{H}(t) = (H_1(t), \ldots, H_m(t))^T,$$

а також матрицю концентрацій компонент $X = \left(w_l^{(j)}\right)_{j=1,l=1}^{N \quad m}$. Тоді (1) можна записати у матричному вигляді: $\bar{F}(t) = X\bar{H}(t)$.

Розглянемо клас L_{KM} лінійних оцінок вигляду

$$\hat{H}(t, \bar{a}(t)) = \sum_{j=1}^{N} a_j(t)\hat{F}_j(t) = \bar{a}^T(t)\hat{\bar{F}}(t),$$

де $\bar{a}(t) = (a_1(t), \ldots, a_N(t))^T$ – невипадковий вектор вагових коефіцієнтів з обмеженими компонентами, вектор

$$\hat{\bar{F}}(t) = \left(\hat{F}_1(t), \ldots, \hat{F}_N(t)\right)^T$$

є вектором оцінок Каплана–Меєра $\hat{F}_j(t)$ [2] функцій $F_j(t)$, побудованих за j-ю вибіркою (“сумішшю”) відповідно:

$$\hat{F}_j(t) = 1 - \prod_{k:T_{jk} \le t} \left(1 - \frac{\Delta\bar{N}_j(t)}{\bar{Y}_j(t)}\right),$$

де

$$\bar{N}_j(t) = \sum_{k=1}^{n_j} I\{T_{jk} \le t, \eta_{jk} = 1\},$$
$$\bar{Y}_j(t) = \sum_{k=1}^{n_j} I\{X_{jk} \ge t\}, j = 1, \ldots, N.$$

Оцінки Каплана–Меєра мають наступні властивості [1, 5] (індекс j опущено). Нехай $\tau_H = \sup\{t : S(t)C(t) > 0\}$, тоді

1. $E(\hat{F}(t) - F(t)) \to 0, n \to \infty$ для $0 \le t < \tau_H$;

2. $\sup_{t<\tau_H} |\hat{F}(t) - F(t)| \xrightarrow{P} 0, n \to \infty$.

Позначимо множину

$$\Pi_N = \left\{ t \geq 0 \mid \prod_{j=1}^{N} ((1 - F_j(t-))C_j(t-)) > 0 \right\}$$

і зафіксуємо деяке $\tau \in \Pi_N$, $\tau < \infty$. Слабку збіжність вектора $\sqrt{n}\left(\hat{\bar{F}}(t) - \bar{F}(t)\right)$ на $[0, \tau]$ забезпечує наступний результат, який є узагальненням теореми 4.2.2. [1].

Теорема 1. *Припустимо, що*

1. *випадкові величини T_{jk}, U_{jk} є незалежними у сукупності;*
2. *для кожного j функції розподілу $F_j(t) = P\{T_{jk} \leq t\}$ та $G_j(t) = P\{U_{jk} \leq t\}$ не залежать від індексу k;*
3. *існують сталі $h_j > 0, j = 1, \ldots, N$, що $n_j/n \to h_j$, $n \to \infty$.*

Тоді при $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\left(\hat{\bar{F}}(t) - \bar{F}(t)\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{S_1(t)}{\sqrt{h_1}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \frac{S_N(t)}{\sqrt{h_N}} \end{pmatrix} \bar{Z}$$

у просторі Скорохода $D([0,\tau]^N)$. Компоненти вектора $\bar{Z} = (Z_1, \ldots, Z_N)^T$ є гаусівськими процесами з незалежними приростами, $EZ_j(t) = 0$,

$$EZ_j^2(t) = v_j(t) = \int_0^t \frac{I\{\Delta\Lambda_j(s) < 1\} d\Lambda_j(s)}{(1 - \Delta\Lambda_j(s))(1 - F_j(s-))C_j(s-)},$$

$$\Lambda_j(t) = \int_0^t (1 - F_j(s-))^{-1} dF_j(s).$$

Для кожного $j = 1, ..., N$ величина

$$\hat{v}_j(t) = n_j \int_0^t \frac{I\{\Delta\bar{N}_j(s) < \bar{Y}(s)\}}{(\bar{Y}_j(s) - \Delta\bar{N}_j(s))} \frac{d\bar{N}_j(s)}{\bar{Y}_j(s)} \tag{2}$$

є консистентною оцінкою для $v_j(t)$.

Доведення цього результату повторює доведення теореми 4.2.2. [1], яке, в свою чергу, полягає в перевірці умов теореми 4.2.1. (там же) для випадку $N = 1$.

3. Грубі та оптимальні оцінки функцій розподілу компонент

Надалі припустимо, що поряд з умовами теореми 1 виконуються умови:

a) стовпчики матриці X є лінійно незалежними векторами;

b) для кожного $j = 1, \ldots, N$ має місце $F_j(t) > 0$ при $t > 0$.

Зафіксуємо $\tau \in \Pi_N$, $\tau < \infty$, і розглянемо на $[0, \tau]$ вектор

$$\hat{\bar{H}}(t, A(t)) = (\hat{H}(t, \bar{a}^{(1)}(t)), \ldots, \hat{H}(t, \bar{a}^{(m)}(t)))^T$$

– вектор лінійних оцінок, кожна компонента якого належить класу L_{KM}, де $\bar{a}^{(l)}(t)$ – l-ий стовпчик матриці $A(t), l = 1, \ldots, m$. Очевидно, оцінки компонент побудовані, якщо визначено матрицю $A(t)$, оскільки в цьому випадку

$$\hat{\bar{H}}(t, A(t)) = A^T(t)\hat{\bar{F}}(t).$$

Застосуємо адаптивну техніку оцінювання функцій розподілу компонент. На першому кроці розглядатимемо матриці $A(t)$ такі, що

$$A^T(t)X = E_m,$$

де E_m – одинична матриця розмірності $m \times m$. Відповідні вектори оцінок $\hat{\bar{H}}(t, A(t))$ називатимемо "грубими". Для них має місце рівність

$$\hat{\bar{H}}(t, A(t)) - \bar{H}(t) = A^T(t)\hat{\bar{F}}(t) - A^T(t)X\bar{H}(t) = A^T(t)(\hat{\bar{F}}(t) - \bar{F}(t)).$$

Елементи матриці $A(t)$ є невипадковими і обмеженими, а оцінки Каплана–Меєра побудовані за незалежними вибірками, тому за виконання умов теореми 1 отримаємо, що грубі оцінки є асимптотично незміщеними, рівномірно консистентними та асимптотично нормальними оцінками для функцій розподілу компонент сумішей. Зокрема,

$$\sqrt{n}\left(\hat{\bar{H}}(t, A(t)) - \bar{H}(t)\right) \Rightarrow A^T(t)D(t)\bar{Z}, n \to \infty,$$

де

$$D(t) = \begin{pmatrix} \frac{S_1(t)}{\sqrt{h_1}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \frac{S_N(t)}{\sqrt{h_N}} \end{pmatrix},$$

$\mathrm{cov}\bar{Z} = \mathrm{diag}(v_1(t), \ldots, v_N(t))$, звідки

$$\mathrm{cov}(A^T(t)D(t)\bar{Z}) = A^T(t)D_1(t)A(t),$$

$$D_1(t) = D(t)\mathrm{cov}\bar{Z}D^T(t) = \begin{pmatrix} \frac{S_1^2(t)v_1(t)}{h_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \frac{S_N^2(t)v_N(t)}{h_N} \end{pmatrix}.$$

Тому на другому кроці серед усіх матриць грубих оцінок шукатимемо таку матрицю $A_*(t)$, що для довільної іншої матриці $A(t)$ вектора грубих оцінок виконується

$$A_*^T(t)D_1(t)A_*(t) \le A^T(t)D_1(t)A(t)$$

(умова $A \le B$ для матриць означає, що матриця $B - A$ є невід'ємно визначеною). Відповідні оцінки $\hat{\bar{H}}(t, A_*(t))$ називатимемо "оптимальними" оцінками. Матриця $A_*(t)$ вектора оптимальних вагових оцінок буде розв'язком задачі

$$\begin{cases} A^T(t)D_1(t)A(t) \to \min, \\ A^T(t)X = E_m. \end{cases} \quad (3)$$

Якщо існують обернені матриці $D_1^{-1}(t)$ та $(X^TD_1^{-1}(t)X)^{-1}$, тоді розв'язком задачі (3) буде матриця

$$A_*(t) = D_1^{-1}(t)X(X^TD_1^{-1}(t)X)^{-1}. \tag{4}$$

Дійсно, матриця $D_1(t)$ є симетричною,

$$A_*^T(t)X = (X^TD_1^{-1}(t)X)^{-1}X^TD_1^{-1}(t)X = E_m$$

і для будь-якої матриці $A(t)$, для якої $A^T(t)X = E_m$, матиме місце нерівність

$$0 \le (A(t) - A_*(t))^TD_1(t)(A(t) - A_*(t)) = A^T(t)D_1(t)A(t) - A^T(t)D_1(t)A_*(t) - A_*^T(t)D_1(t)A(t) + A_*^T(t)D_1(t)A_*(t).$$

Безпосередній підрахунок дає співвідношення

$$A^T(t)D_1(t)A_*(t) = A^T(t)D_1(t)D_1^{-1}(t)X(X^TD_1^{-1}(t)X)^{-1} = \\ = A^T(t)X(X^TD_1^{-1}(t)X)^{-1} = E_m(X^TD_1^{-1}(t)X)^{-1} = (X^TD_1^{-1}(t)X)^{-1}.$$

Аналогічно,

$$A_*^T(t)D_1(t)A(t) = A_*^T(t)D_1(t)A_*(t) = (X^TD_1^{-1}(t)X)^{-1},$$

звідки

$$0 \le A^T(t)D_1(t)A(t) - A^T(t)D_1(t)A_*(t) - A_*^T(t)D_1(t)A(t) + A_*^T(t)D_1(t)A_*(t) = \\ = A^T(t)D_1(t)A(t) - (X^TD_1^{-1}(t)X)^{-1} - (X^TD_1^{-1}(t)X)^{-1} + (X^TD_1^{-1}(t)X)^{-1} = \\ = A^T(t)D_1(t)A(t) - (X^TD_1^{-1}(t)X)^{-1} = A^T(t)D_1(t)A(t) - A_*^T(t)D_1(t)A_*(t),$$

або

$$A_*^T(t)D_1(t)A_*(t) \le A^T(t)D_1(t)A(t).$$

Крім того, з невиродженості матриці $D_1(t)$ випливає, що матриця $A_*(t)$ єдина.

Покажемо, що матриці $D_1(t)$ та $X^TD_1^{-1}(t)X$ дійсно будуть невиродженими. Матриця $D_1(t)$ є невиродженою, якщо $S_j^2(t)v_j(t)h_j^{-1} > 0$ для будь-якого $j = 1, \ldots, N$ і $t \in (0, \tau]$. За виконання умов теореми 1 $h_j > 0$, внаслідок вибору точки τ маємо $S_j(t) > 0, t \in [0, \tau]$, а з умови b) випливає, що $\Lambda_j(t) = = \int_0^t (1 - F_j(s-))^{-1}dF_j(s) > 0$, отже, і $v_j(t) > 0$ для кожного $j, t \in (0, \tau]$. Аналогічно показується, що $\Lambda_j(\tau) < \infty$, отже, і $v_j(\tau) < \infty$, тому елементи матриці $A_*(t)$ є обмеженими.

Зауваження 1. *Матриця $D_1(0)$ завжди вироджена, оскільки за означенням всі $v_j(0) = 0$, тому за означенням вважаємо, що*

$$\hat{\hat{H}}(0, A_*(0)) := (0, \ldots, 0)^T.$$

Далі,

$$X^TD_1^{-1}(t)X = X^T(D_1^{-1/2}(t))^TD_1^{-1/2}(t)X = (D_1^{-1/2}(t)X)^T(D_1^{-1/2}(t)X),$$

тобто $X^TD_1^{-1}(t)X$ є матрицею Грама вектор-стовпчиків матриці $D_1^{-1/2}(t)X$. Їх лінійна незалежність випливатиме з умови невиродженості матриці $D_1(t)$ та лінійної незалежності вектор-стовпчиків матриці X (умова а)). Таким чином, має місце теорема про існування та властивості "оптимальних" лінійних оцінок.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови a),b) та умови теореми 1, матриця $A_*(t)$ визначається з (4). Тоді для довільного $t \in [0,\tau]$ має місце збіжність*

$$\sqrt{n}\left(\hat{\bar{H}}(t, A_*(t)) - \bar{H}(t)\right) \Rightarrow A_*^T(t)D(t)\bar{Z}, n \to \infty.$$

Для довільної матриці $A(t)$, що $A^T(t)X = E_m$, матриця $cov\left(A^T D(t)\bar{Z}\right) -$ $- cov\left(A_*^T D(t)\bar{Z}\right)$ є невід'ємно визначеною, $t \in [0,\tau]$.

4. Адаптивні оцінки функцій розподілу компонент сумішей

На жаль використати оптимальні оцінки $A_*(t)$ не можна, оскільки невідомими залишаються функції $S_j(t)$, $v_j(t)$ та $C_j(t)$. Тому останнім, третім кроком адаптивної схеми є побудова "адаптивних" оцінок $\hat{A}_*(t)$. Для цього скористаємося оцінками Каплана–Меєра $\hat{S}_j(t)$ та $\hat{v}_j(t)$ і визначимо матриці

$$\hat{D}_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{\hat{S}_1^2(t)\hat{v}_1(t)}{h_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\hat{S}_N^2(t)\hat{v}_N(t)}{h_N} \end{pmatrix}.$$

і

$$\hat{A}_*(t) = \hat{D}_1^{-1}(t)X(X^T\hat{D}_1^{-1}(t)X)^{-1}. \tag{5}$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови a), b) та умови теореми 1, матриця $A_*(t)$ визначається з (4), матриця $\hat{A}_*(t)$ визначається з (5). Тоді для довільного $t \in [0,\tau]$ має місце збіжність*

$$\sqrt{n}\left(\hat{\bar{H}}(t, \hat{A}_*(t)) - \bar{H}(t)\right) \Rightarrow A_*^T(t)D(t)\bar{Z}, n \to \infty.$$

Таким чином, граничні коваріаційні матриці для "оптимальних" та "адаптивних" оцінок співпадають.

Доведення. Помітимо, що м. н. $\hat{A}_*^T(t)X = E_m$, отже м. н.

$$\hat{\bar{H}}(t, \hat{A}_*(t)) - \bar{H}(t) = \hat{A}_*^T(t)\hat{\bar{F}}(t) - \hat{A}_*^T(t)X\bar{H}(t) = \hat{A}_*^T(t)(\hat{\bar{F}}(t) - \bar{F}(t)).$$

Оцінки $\hat{S}_j(t)$ та $\hat{v}_j(t)$ на проміжку $[0,\tau]$ є рівномірно консистентними оцінками величин $S_j(t)$ та $v_j(t)$ відповідно, причому матриці $D_1(t)$ та $X^T D_1^{-1}(t)X$ невироджені, тому для $t \neq 0$ має місце поелементна збіжність $\hat{D}_1^{-1}(t) \xrightarrow{P} D_1^{-1}(t)$ та $(X^T\hat{D}_1^{-1}(t)X)^{-1} \xrightarrow{P} (X^T D_1^{-1}(t)X)^{-1}$ при $n \to \infty$, а отже і поелементна збіжність $\hat{A}_*(t) \xrightarrow{P} A_*(t), n \to \infty$. У випадку $t = 0$ покладемо $\hat{\bar{H}}(0, \hat{A}_*(0)) = (0,\dots,0)^T$. Звідси, за теоремою Слуцького,

$$\sqrt{n}\left(\hat{\bar{H}}(t, \hat{A}_*(t)) - \bar{H}(t)\right) = \hat{A}_*^T(t)\sqrt{n}(\hat{\bar{F}}(t) - \bar{F}(t)) \Rightarrow A_*^T(t)D(t)\bar{Z}, n \to \infty.$$

Теорема доведена. □

Висновки. В роботі розглянуто модель сумішей зі змінними концентраціями за спостереженнями з цензуруванням. Для випадку відомих значень концентрацій компонент у класі лінійних оцінок отримано оптимальні оцінки. Оскільки оптимальні оцінки виявилися залежними від невідомих функцій розподілу компонент сумішей, практичне їх застосування неможливе. Тому було запропоновано адаптивні оцінки, для яких має місце асимптотична нормальність, а гранична коваріаційна матриця співпадає з граничною коваріаційною матрицею оптимальних оцінок.

1. **Gill R. D.** Censoring and stochastic integrals [text] / R. D. Gill. – Mathematical Centre Tracts. – 1980. – V. 124. – 184 p.
2. **Kaplan E. L.** Nonparametric estimation from incomplete observations [text] / E. L. Kaplan, P. Meier // J. Am. Statist. Assoc. – 1958. – V. 53. – P. 457–81.
3. **Maiboroda R. E.** Consistency of the weighted empirical distribution function based on the observations from mixtures with varying concentrations [text] / R. E. Maiboroda // Theory of Stochastic Processes. – 1999. – V. 5. – № 3–4. – P. 152–161.
4. **Titterington D. M.** Analysis of finite mixture distributions [text] / D. M. Titterington, A. F. Smith, U. E. Makov. – Wiley, New York, 1985. – 243 p.
5. **Wang J.-G.** A note on the uniform conitency of the Kaplan-Meier etimator [text] / J.-G. Wang // Ann. Stat. – 1987. – V. 15. – № 3. – P. 1313–1316.
6. **Майборода Р. Є.** Статистичний аналіз сумішей: Навч. посіб. [текст] / Р. Є. Майборода. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2003. – 176 с.
7. **Майборода Р. Є.** Статистика раптової смерті [текст] / Р. Є. Майборода // Теорія ймов. і мат. стат. – 1998. – № 58. – С. 104–113.
8. **Рижов А. Ю.** Оцінки розподілів компонент суміші по цензурованим даним [текст] / А. Ю. Рижов // Теорія ймов. і мат. стат. – 2003. – № 69. – С. 154–161.
9. **Рижов А. Ю.** Оцінка параметрів концентрацій двокомпонентних сумішей за цензурованими даними [текст] / А. Ю. Рижов // Теорія ймов. і мат. стат. – 2007. – № 76. – С. 150–159.

УДК 517.9

О. О. Самойленко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Самойленко О. О. Достатні умови існуваня оптимального керування для деяких класів систем диференціальних рівнянь. Доведені теореми існування оптимального керування для систем диференціальних рівнянь в термінах їх правих частин та критерія якості.
Ключові слова: оптимальне керування, критерій якості, момент виходу, мінімізуюча послідовність, слабка компактність.

Самойленко Е. А. Достаточные условия существования оптимального управления для некоторых классов систем дифференциальных уравнений. Доказаны теоремы существования оптимального управления для систем дифференциальных уравнений в терминах их правых частей и критерия качества.
Ключевые слова: оптимальное управление, критерий качества, момент выхода, минимизирующая последовательность, слабая компактность.

Samoilenko E. A. Sufficient conditions for the existence of optimal control for some classes of systems of differential equations. Has been proven the theorems of existence of optimal controls for systems of differential equations in terms of their right parts and cost function.
Key words: optimal control, cost function, exit time, minimizing sequence, weak compactness.

1. Постановка задачі. В даній роботі розглядається наступна задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t,x) + f_2(t,x)u(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int\limits_0^\tau L(t, x(t), u(t))\, dt \to \inf, \tag{2}$$

де $x_0 \in D$ — фіксований вектор, $t \in [0,T]$, $x \in D$ — фазовий вектор, D — область в $\mathbb{R}^d$, ∂D — її межа, $\overline{D} = D \cup \partial D$, τ — момент першого виходу розв'язку $x(t)$ на границю області D, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ — вектор керування, U — опукла, замкнена множина, вектор-функція $f_1(t,x) : [0,T] \times \overline{D} \to \mathbb{R}^d$ та матриця $f_2(t,x) : [0,T] \times \overline{D} \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ — неперервні за сукупністю змінних функції, а також для них виконується умова: для будь-яких $t \in [0,T]$, $x \in \overline{D}$ існує така стала $C > 0$, що

$$| f_1(t,x) | \le C(1+ | x |), \; || f_2(t,x) || \le C(1+ | x |). \tag{3}$$

Функції $L(t,x,u)$, $L_x(t,x,u)$ і $L_u(t,x,u)$ є неперервними для будь-яких $t \in \in [0,T], x \in \overline{D}$ та $u \in U$ і задовольняють наступні умови:
1) існують такі сталі $k > 0$ та $p > 1$, що виконується нерівність

$$L(t,x,u) \geq k \mid u \mid^p, \tag{4}$$

для $t \in [0,T]$, $x \in \overline{D}$, $u \in U$.
2) існує $K > 0$ та $\alpha > 0$, що

$$\mid L_x(t,x,u) \mid + \mid L_u(t,x,u) \mid \leq K(1+ \mid u \mid^{p-1} + \mid x \mid^{\alpha}), \tag{5}$$

для $t \in [0,T]$, $x \in \overline{D}$, $u \in U$.
3) $L(t,x,u)$ опукла по u для будь-яких фіксованих $t \in [0,T]$, $x \in \overline{D}$.

Керування $u(t)$ вважаються допустимими, якщо:
а1) $u(t) \in L_p([0,T])$,
а2) $u(t) \in U$, при $t \in [0,T]$.

Множину керувань, що задовольняють умови а1), а2), будемо називати допустимою для задачі (1),(2) і позначатимемо її через V.

Мета даної роботи — отримати достатні умови існування оптимального керування для задачі (1), (2) в термінах правих частин системи та функціоналу якості, без застосування методу динамічного програмування та принципу максимума.

Раніше подібні задачі розглядалися, наприклад, в роботах [1], [2], [3], [7] та інших, де є широка бібліографія. Так, в роботі [1, с. 51] була отримана теорема існування оптимального керування для системи $\dot{x} = u(t)$ на заданій обмеженій області Q, з критерієм якості

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{\tau} L(t, x(t), \dot{x})\, dt + \psi(\tau, x(\tau)) \to \inf,$$

де t_0 — початковий момент часу, τ — момент першого виходу розв'язку $x(t)$ на границю області Q.

Відмінність даної роботи від [1] полягає в тому, що: по-перше, вивчається більш складна керована система, по-друге, область, в якій розглядається система, може бути необмеженою, по-третє, на відміну від [1], від правих частин не вимагається виконання умови Ліпшиця.

В роботах [2, с. 87, 7], [3, с. 113] доводяться теореми існування оптимального керування, де множина U може бути як компактом, так і не компактом, але множина досягнень є компактною і на функції, що входять в систему, крім умов лінійного росту, накладається і умова Ліпшиця. Оскільки в нашій роботі множина D не обов'язково обмежена, то і множина досягнень також може не бути компактом. Окрім того, в даних роботах від правих частин системи також вимагається виконання умови Ліпшиця. До того ж ми розглянемо також випадок, коли функції $f_1(t,x)$ та $f_2(t,x)$ не задовольняють умову лінійного росту.

В роботі [3, с. 113], у випадку некомпактності множини допустимих керувань, розглянута задача оптимального керування для функціоналу спеціального вигляду

$$J(u) = \int\limits_0^T [A^0(x,t) + B^0(u,t)]\, dt \to \inf,$$

де $t \in [0, T]$ і $x \in \mathbb{R}^d$. При цьому умови на праві частини аналогічні умовам робіт [1], [2], [8]. Відзначимо також роботи [5], [6], де задачі оптимального керування досліджуються методом усереднення.

Отже, основна відмінність даної роботи від раніше розглянутих полягає в тому, що область D може бути необмеженою, а праві частини системи не обов'язково ліпшицеві.

2. Основний результат. Основним результатом данної роботи є наступна теорема.

Теорема. *Нехай для системи (1) з критерієм якості (2), виконуються умови пункту 1. Тоді задача (1), (2) має розв'язок в класі допустимих керувань V, тобто існує оптимальне керування $u^*(t)$, що мінімізує критерій якості (2).*

Доведення. Зазначимо, що керування $u(t) = u_0 = const, u_0 \in U$ є допустимими, тоді в силу (4) розв'язки $x(t)$, що відповідають керуванню u_0, обмежені при $t \in$
$\in [0, \tau]$, де τ — момент виходу $x(t)$ на границю області D. А тому

$$\int_0^{\tau} L(t, x(t), u_0)dt < \infty.$$

Оскільки критерій якості невід'ємна величина, то існує невід'ємна нижня границя m значень $J(u)$ і тому існує послідовність допустимих керувань $\{u_n(t), n \geq$ $\geq 1\}$ таких, що $J(u_n) \to m$, при $n \to \infty$ монотонно. Тобто

$$J(u_n) = \int_0^{\tau_n} [L(t, x_n(t), u_n(t))]dt \to m, \text{ при } n \to \infty,$$

де $x_n(t)$ — розв'язки системи (1), що відповідають керуванням $u_n(t), \tau_n$ — моменти виходу розв'язку $x_n(t)$ на границю області D.

Зауважимо, що для достатньо великих n

$$J(u_n) \leq m + 1.$$

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $u_n(s) = 0$ для $\tau_n < s \leq T$, коли $\tau_n < T$, а отже, використовуючи умову (4), отримаємо

$$\int_0^{\tau_n} \mid u_n(t) \mid^p dt = \int_0^{T} \mid u_n(t) \mid^p dt \leq \frac{m+1}{k}$$

і

$$\| u_n(\cdot) \|_p \leq (\frac{m+1}{k})^{1/p}. \tag{6}$$

Тому можна вибрати підпослідовність (яку також будемо позначати через $u_n(t)$), що слабко збігається до границі $u^*(t) \in L_p([0, T])$, і таку, що виконується умова (6). Тоді, за лемою Мазура [4, с. 173] знайдеться опукла комбінація $b_k(t) =$ $= \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i(k) u_i(t)$ елементів $u_i(t) \in U (\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i = 1)$, що в L_p маємо $b_k \to u^*, k \to \infty$. Отже, існує майже всюди збіжна на $[0, T]$ за мірою Лебега підпослідовність b_{k_l}, що $b_{k_l}(t) \to u^*(t), l \to \infty$ для майже всіх t. Оскільки U опукла та замкнена множина, то $\sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i u_i(t) \in U$ і $u^*(t) \in U$ майже для всіх t.

Розглянемо тепер послідовність розв'язків $x_n(t)$ системи (1), що відповідають послідовності керувань $\{u_n(t), n \geq 1\}$. В силу теореми Каратеодорі [9, с. 7] всі $x_n(t)$ існують на відрізку $[0, \tau_n]$, де τ_n — момент виходу $x_n(t)$ на границю області D і для них справедливе інтегральне представлення

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t [f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t))u_n(t)]\, ds, t \in [0, \tau_n].$$

Покажемо рівномірну обмеженість розв'язків x_n при $t \in [0, \tau_n]$. Використовуючи нерівність Гельдера та умову лінійного росту для будь-якого $t \in [0, \tau_n]$, маємо для $q = p/(p-1)$

$$| x_n(t) |^q = | x_0 + \int_0^t f_1(s, x_n(s))ds + \int_0^t f_2(s, x_n(s))u_n(s)ds |^q \leq$$

$$\leq 3^{q-1}(| x_0 |^q + | \int_0^t f_1(s, x_n(s))ds |^q + | \int_0^t f_2(s, x_n(s))u_n(s)ds |^q) \leq$$

$$\leq 3^{q-1}(| x_0 |^q + (\int_0^t C(1 + | x_n(s) |)ds)^q + (\int_0^t C(1 + | x_n(s) |) | u_n(s) | ds)^q) \leq$$

$$\leq 3^{q-1}(| x_0 |^q + (CT + C\int_0^t | x_n(s) | ds)^q + (C\int_0^t | u_n(s) | ds +$$

$$+ \int_0^t | x_n(s) || u_n(s) | ds)^q) \leq 3^{q-1}(| x_0 |^q + 2^{q-1}(CT)^q +$$

$$+ 2^{q-1}C^q(\int_0^t | x_n(s) | ds)^q + 2^{q-1}C^q(\int_0^t | u_n(s) | ds)^q +$$

$$+ 2^{q-1}C^q(\int_0^t | x_n(s) || u_n(s) | ds)^q) \leq 6^{q-1}C^q(\tfrac{|x_0|^q 2^{1-q}}{C^q} + T^q +$$

$$+ T^{q/p}\int_0^t | x_n(s) |^q ds + T(\int_0^T | u_n(s) |^p ds)^{q/p} +$$

$$+ (\int_0^T | u_n(s) |^p ds)^{q/p}\int_0^t | x_n(s) |^q ds) \leq 6^{q-1}C^q(\tfrac{|x_0|^q 2^{1-q}}{C^q} + T^q +$$

$$+ T^{q/p}\int_0^t | x_n(s) |^q ds + T \| u_n \|_p^q + \| u_n \|_p^q \int_0^t | x_n(s) |^q ds)$$

Нехай $M_1 = 6^{q-1}C^q(\frac{|x_0|^q 2^{1-q}}{C^q} + T^q + T \| u_n \|_p^q) = const$
$M_2 = 6^{q-1}C^q(T^{q/p} + \| u_n \|_p^q)$.

Тоді за лемою Гроноулла–Беллмана маємо

$$| x_n(t) |^q \leq M_1 e^{M_2 T} = A^q < \infty, \tag{7}$$

при $t \in [0, \tau_n]$. Оскільки розв'язки x_n, при $t \in [0, \tau_n]$ рівномірно обмежені, то $| x_n(\tau_n) | \leq A$. Тому функції x_n можна продовжити на весь інтервал $t \in [0, T]$ наступним чином:

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(t), \text{ при } t \in [0, \tau_n), \\ x_n(\tau_n), \text{ при } t \in [\tau_n, T]. \end{cases} \tag{8}$$

Доведемо рівностепеневу неперервність функцій $y_n(t)$, при $t \in [0,T]$.

Із нерівності Гельдера для будь-яких $s_1, s_2 \in [0, \tau_n]$ таких, що $s_1 < s_2$ маємо
$\mid y_n(s_1) - y_n(s_2) \mid = \mid x_n(s_1) - x_n(s_2) \mid = \mid \int\limits_{s_1}^{s_2} [f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t)) u_n(t)] dt \mid \leq$
$\leq \int\limits_{s_1}^{s_2} C(1 + \mid x_n(t) \mid)(1 + \mid u_n(t) \mid) dt = C \int\limits_{s_1}^{s_2} \mid x_n(t) \mid dt + \int\limits_{s_1}^{s_2} \mid u_n(t) \mid dt +$
$+ \int\limits_{s_1}^{s_2} \mid x_n(t) \mid\mid u_n(t) \mid dt \leq C((s_2 - s_1) + \int\limits_{s_1}^{s_2} \mid x_n(t) \mid dt + \int\limits_{s_1}^{s_2} \mid u_n(t) \mid dt +$
$+ \int\limits_{s_1}^{s_2} \mid x_n(t) \mid\mid u_n(t) \mid dt) \leq C(s_2 - s_1) + (s_2 - s_1)A + (s_2 - s_1)^{1/q} \mid\mid u_n(t) \mid\mid_p +$
$+ \mid\mid u_n(t) \mid\mid_p A(s_2 - s_1)^{1/q}) \to 0$, при $\mid s_2 - s_1 \mid \to 0$.

Якщо $s_1 < \tau_n < s_2 < T$, то маємо
$\mid y_n(s_1) - y_n(\tau_n) \mid = \mid x_n(s_1) - x_n(\tau_n) \mid = \mid \int\limits_{s_1}^{\tau_n} [f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t)) u_n(t)] dt \mid \leq$
$\leq \int\limits_{s_1}^{\tau_n} C(1 + \mid x_n(t) \mid)(1 + \mid u_n(t) \mid) dt = C \int\limits_{s_1}^{\tau_n} \mid x_n(t) \mid dt + \int\limits_{s_1}^{\tau_n} \mid u_n(t) \mid dt +$
$+ \int\limits_{s_1}^{\tau_n} \mid x_n(t) \mid\mid u_n(t) \mid dt \leq C((\tau_n - s_1) + \int\limits_{s_1}^{\tau_n} \mid x_n(t) \mid dt + \int\limits_{s_1}^{\tau_n} \mid u_n(t) \mid dt +$
$+ \int\limits_{s_1}^{\tau_n} \mid x_n(t) \mid\mid u_n(t) \mid dt) \leq C(\tau_n - s_1) + (\tau_n - s_1)A + (\tau_n - s_1)^{1/q} \mid\mid u_n(t) \mid\mid_p +$
$+ \mid\mid u_n(t) \mid\mid_p A(\tau_n - s_1)^{1/q}) \to 0$, при $\mid s_2 - s_1 \mid \to 0$.

Якщо $\tau_n < s_1 < s_2 < T$, тоді
$\mid y_n(s_1) - y_n(s_2) \mid = \mid x_n(\tau_n) - x_n(\tau_n) \mid = 0$.

Звідси випливає рівностепенева неперервність функцій $y_n(t)$. За теоремою Асколлі, тепер можна виділити підпослідовність послідовності $\{y_n(t), n \geq 1\}$ (яку також позначимо через $\{y_n(t), n \geq 1\}$) таку, що $y_n(t) \to y^*(t)$, при $n \to \infty$ рівномірно на відрізку $[0,T]$.

Позначимо через τ^* момент першого виходу $y^*(t)$ на границю ∂D, тобто

$$\tau^* = \begin{cases} \inf\{t \in [0,T] : y^*(t) \in \partial D\}, \\ T, \text{ якщо } y^*(t) \in D, \forall t \in [0,T], \end{cases}$$

і

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\{t \in [0,T] : y_n(t) \in \partial D\}, \\ T, \text{ якщо } y_n(t) \in D, \forall t \in [0,T]. \end{cases}$$

Покажемо, що $\tau^* \leq \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n$.

Припустимо, що це не так. Тоді

$$\tau^* > \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n = \tau.$$

За теоремою про характеризацію нижньої границі для будь-якого $\delta > 0$, множина $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < \tau + \delta\}$ є нескінченною. Виберемо δ таким чином, щоб $\tau + \delta < \tau^*$. Тоді існує така підпослідовність $\{\tau_{n_k}, n_k \geq 1\}$ послідовності $\{\tau_n, n \geq 1\}$, що існує $N \in \mathbb{N}$: для будь-якого $n_k \geq N, \tau_{n_k} < \tau + \delta$.

Виберемо момент часу t_0 такий, що $t_0 \in (\tau + \delta, \tau^*)$, тоді $y_{n_k}(t_0) = x_{n_k}(\tau_{n_k}) \in$
$\in \partial D$.

Із рівномірної збіжності $y_n(t)$ до $y^*(t)$ на $[0,T]$ маємо, що для будь-якого $\epsilon > 0$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що для будь-якого $n_k \geq N$ виконується нерівність

$$| y^*(t) - y_{n_k}(t) | < \epsilon.$$

Але якщо вибрати $0 < \epsilon < \inf_{v \in \partial D} | y^*(t_0) - v |$, тоді для фіксованого $t_0 \in (\tau+\delta, \tau^*)$ $| y^*(t_0) - y_{n_k}(t) | = | y^*(t_0) - x_{n_k}(\tau_{n_k}) | > \epsilon$.

Ми отримали протиріччя. Отже,

$$\tau^* \leq \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n.$$

Покладемо $x^*(t) = y^*(t)$, при $t \in [0, \tau^*]$.

Покажемо, що $x^*(t)$ є розв'язком системи (1), при $t \in [0, \tau^*]$, що відповідає керуванню $u^*(t)$.

Розглянемо 2 випадки.

1) Нехай $\tau^* < \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n$. Тоді, за теоремою про характеризацію нижньої границі, множина $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < \tau^*\}$ - скінченна. Тому можна вибрати підпослідовність $\{\tau_k, k \geq 0\}$ послідовності $\{\tau_n, n \geq 0\}$ таку, що для будь-якого $k > 0 : \tau_k > \tau^*$. Тоді для кожного $t \in [0, \tau^*]$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$ і оскільки для всіх $t \in [0,T]$, $y_k(t) \to y^*(t)$, при $k \to \infty$ рівномірно, то $x_k(t) \to x^*(t)$, при $k \to \infty$ рівномірно по $t \in [0, \tau^*]$.

Оскільки $x_k(t)$ — розв'язок системи (1), то маємо

$$\begin{aligned} x_k(t) = x_0 + \int_0^t [f_1(s, x_k(s))dt + f_2(s, x_k(s))u_k(s)]\, ds = x_0 + \\ + \int_0^t [f_1(s, x_k(s)) + f_2(s, x_k(s))u^*(s)]\, ds + \\ + \int_0^t [f_2(s, x_k(s)) - f_2(s, x^*(s))](u_k(s) - u^*(s))\, ds + \\ + \int_0^t f_2(s, x^*(s))[u_k(s) - u^*(s)]\, ds. \end{aligned} \tag{9}$$

Враховуючи (3) і (7), в силу теореми Лебега, другий інтеграл прямує до нуля, при $k \to \infty$. Прямування до нуля третього інтеграла випливає з (3) і (7) в силу слабкої збіжності $u_k(t)$ до $u^*(t)$, при $k \to \infty$. Аналогічними міркуваннями отримуємо, що перший інтеграл прямує до $\int_0^t [f_1(s, x^*(s))dt + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, ds$.

Отже, граничним переходом в (9) отримуємо

$x^*(t) = x_0 + \int_0^t [f_1(s, x^*(s))dt + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, ds$

для будь-якого $t \in [0, \tau^*]$.

2) Нехай тепер $\tau^* = \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n$. Виберемо довільний момент t_2 такий, що $t_2 < \tau^*$. Тоді за теоремою про характеризацію нижньої границі множина $\{n \in \mathbb{N} \mid$

$\tau_n < t_2\}$ - скінченна, а на проміжку (t_2, τ^*) може лежати нескінченна кількість τ_n. У цьому випадку виберемо підпослідовність $\{\tau_k, k > 0\}$ послідовності $\{\tau_n, n > 0\}$ таку, що для будь-якого $k > 0, \tau_k \in (t_2, \tau^*)$. Тоді для кожного $t \in [0, t_2]$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$. Аналогічно попередньому пункту маємо

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t [f_1(s, x^*(s))ds + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, ds$$

для будь-якого $t \in [0, t_2]$.

Оскільки момент часу t_2 ми обрали довільним чином, а $\tau_k \to \tau^*$, при $k \to \infty$, а функції $\phi_1(t_2) = \int_0^{t_2} f_1(s, x^*(s))ds$ та $\phi_2(t_2) = \int_0^{t_2} f_2(s, x^*(s))u^*(s)ds$ є неперервними відносно t_2, то $\phi_1(t_2) \to \phi_1(\tau^*)$ та $\phi_2(t_2) \to \phi_1(\tau^*)$, при $t_2 \to \tau^*$. Отже, маємо

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t [f_1(s, x^*(s))dt + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, ds$$

для будь-якого $t \in [0, \tau^*]$.

Випадок скінченної кількості τ_k таких, що $\tau_k \in (t_2, \tau^*)$. Отже, $x^*(t)$ — розв'язок системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$, при $t \in [0, \tau^*]$.

Залишилось довести, що керування $u^*(t)$ є оптимальним.

Знову розглянемо 2 випадки:

1) $y^*(\tau^*) \in \partial D$.

а) Нехай $\tau^* < \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n$. Тоді, за теоремою про характеризацію нижньої границі, множина $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < \tau^*\}$ — скінченна. Тому можна вибрати підпослідовність $\{\tau_k, k \geq 0\}$ послідовності $\{\tau_{n_k}, n_k \geq 0\}$ таку, що для будь-якого $k > 0 : \tau_k > \tau^*$. Тоді для кожного $t \in [0, \tau^*]$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$.

Покажемо інтегровність функції $L(t, x^*(t), u_k(t))$ для будь-якого $k > 0$.

Маємо

$$\begin{aligned}
&\mid L(t, x^*(t), u_k(t)) \mid \leq \mid L(t, x^*(t), u_0) \mid + \mid L(t, x^*(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_0) \mid \leq \\
&\leq \mid L(t, x^*(t), u_0) \mid + \sup_{\lambda \in (0,1)} \mid L_u(t, x^*(t), u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0) \mid\mid u_k(t) - u_0 \mid \leq \\
&\leq \mid L(t, x^*(t), u_0) \mid + K(1 + \mid x^*(t) \mid^\alpha + \\
&+ \sup_{\lambda \in (0,1)} \mid u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0) \mid^{p-1}) \mid u_k(t) - u_0 \mid \leq \\
&\leq \mid L(t, x^*(t), u_0) \mid + K \mid u_k(t) - u_0 \mid + K \mid x^*(t) \mid^\alpha \mid u_k(t) - u_0 \mid + \\
&+ K \sup_{\lambda \in (0,1)} \mid u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0) \mid^{p-1} \mid u_k(t) - u_0 \mid .
\end{aligned}$$

Перші три доданки інтегровні на відрізку $[0, \tau^*]$. Покажемо окремо інтегровність останнього доданку. Нехай $A_k = \{t \in [0, \tau^*] : u_k(t) = u_0\}$. Тоді

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau^*} sup_{\lambda \in (0,1)} \mid u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0) \mid^{p-1} \mid u_k(t) - u_0 \mid dt \leq \\
&\leq \int_0^{\tau^*} (\mid u_0 \mid + \mid u_k(t) - u_0 \mid)^{p-1} \mid u_k(t) - u_0 \mid dt \leq \\
&\leq \int_{A_k} \mid u_0 \mid + \mid u_k(t) - u_0 \mid^{p-1} \mid u_k(t) - u_0 \mid dt + \\
&+ \int_{[0,\tau^*] \setminus A_k} (\mid u_0 \mid + \mid u_k(t) - u_0 \mid)^{p-1} \mid u_k(t) - u_0 \mid dt \leq \\
&\leq \int_{[0,\tau^*] \setminus A_k} \frac{(|u_0| + |u_k(t) - u_0|)^p}{|u_0| + |u_k(t) - u_0|} \mid u_k(t) - u_0 \mid dt \leq \\
&\leq 2^{p-1} \int_{[0,\tau^*] \setminus A_k} \frac{|u_0|^p + |u_k(t) - u_0|^p}{|u_k(t) - u_0|} \mid u_k(t) - u_0 \mid dt \leq
\end{aligned}$$

$\leq 2^{p-1}\int\limits_0^{\tau^*}(|\, u_0\,|^p + |\, u_k(t)-u_0\,|^p)dt < \infty.$

Отже, функція $L(t,x^*(t),u_k(t))$ інтегровна на відрізку $[0,\tau^*]$ для будь-якого $k>0$.

Нехай $\chi_R(t)$ — характеристична функція множини $\{t :|\, u^*(t)\,|< R\}$. Оскільки $L(t,x,\cdot)$ — опукла, то виконується нерівність
$L(t,x^*(t),v(t))\chi_R(t) \geq L(t,x^*(t),u^*(t))\chi_R(t) + (v(t)-u^*(t))L_v(t,x^*(t),u^*(t))\chi_R(t)$, $\forall v(t)\in V, t\in[0,\tau^*]$
покладемо $v(t)=u_k(t)$, тоді

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\tau^*} L(t,x^*(t),u_k(t))\chi_R(t)dt \geq \int\limits_0^{\tau^*} L(t,x^*(t),u^*(t))\chi_R(t)dt + \\ + \int\limits_0^{\tau^*}(u_k(t)-u^*(t))L_u(t,x^*(t),u^*(t))\chi_R(t)dt.\end{aligned} \tag{10}$$

Із умови (4) маємо
$|\, L_u(t,x^*(t),u^*(t))\,|\,\chi_R(t) \leq K(1+|\, u^*(t)\,|^{p-1} + |\, x^*(t)\,|^{\alpha}) \leq K(1+R^{p-1}+A^{\alpha}).$
Отже, другий інтеграл в нерівності (10) прямує до 0, при $k\to\infty$. Останнє випливає із слабкої збіжності $u_k(t)$ до $u^*(t)$. Отже,

$$\lim_{k\to\infty}\inf\int\limits_0^{\tau^*} L(t,x^*(t),u_k(t))\chi_R(t)\,dt \geq \int\limits_0^{\tau^*} L(t,x^*(t),u^*(t))\chi_R(t)\,dt.$$

Оскільки $L(t,x,u)\geq 0, \chi_R(t)\leq 1$ і $\chi_R(t)\to 1$, при $R\to\infty$, то

$$\lim_{k\to\infty}\inf\int\limits_0^{\tau^*} L(t,x^*(t),u_k(t))\,dt \geq \int\limits_0^{\tau^*} L(t,x^*(t),u^*(t))\,dt. \tag{11}$$

Розглянемо також величину

$$\begin{aligned}&|\int\limits_0^{\tau^*}[L(t,x_k(t),u_k(t)) - L(t,x^*(t),u_k(t))]dt\,| = \\ &=|\int\limits_0^{\tau^*}\int\limits_0^{1} L_x(t,x_{\lambda_k}(t),u_k(t))(x_k(t)-x^*(t))\,d\lambda dt\,| \leq \\ &\leq \int\limits_0^{\tau^*}|\, x_k(t)-x^*(t)\,|\,K(1+|\, u_k(t)\,|^{p-1} + |\, x_k(t)+x^*(t)\,|^{\alpha})dt \leq \\ &\leq K\int\limits_0^{\tau^*}|\, x_k(t)-x^*(t)\,|\,(1+(2A)^{\alpha})dt + K\int\limits_0^{\tau^*}|\, x_k(t)-x^*(t)\,||\, u_k(t)\,|^{p-1}\,dt \leq \\ &\leq K\int\limits_0^{\tau^*}|\, x_k(t)-x^*(t)\,|\,(1+(2A)^{\alpha})dt + K||u_k||_p^{p/q}(\int\limits_0^{\tau^*}|\, x_k(t)-x^*(t)\,|^p\,dt)^{1/p},\end{aligned} \tag{12}$$

де $x_{\lambda_k}(t) = x^*(t) + \lambda(x_k(t)-x^*(t))$.

Оскільки $||\, u_k\,||_p$ — обмежена, то права частина нерівності (11) прямує до 0, при $k\to\infty$. Далі маємо

$$\int\limits_0^{\tau^*} L(t,x_k(t),u_k(t))\,dt \pm \int\limits_0^{\tau^*} L(t,x^*(t),u_k(t))\,dt \pm \int\limits_0^{\tau^*} L(t,x^*(t),u^*(t))\,dt =$$
$$= \int\limits_0^{\tau^*} [L(t,x_k(t),u_k(t)) - L(t,x^*(t),u_k(t))]\,dt + \int\limits_0^{\tau^*} [L(t,x^*(t),u_k(t)) - L(t,x^*(t),u^*(t))]\,dt +$$
$$+ \int\limits_0^{\tau^*} L(t,x^*(t),u^*(t))\,dt.$$

Перший інтеграл в правій частині останьої нерівності прямує до 0, при $k \to \infty$ в силу нерівності (12). А в силу нерівності (11) маємо

$$J(u^*) = \int\limits_0^{\tau^*} L(t,x^*(t),u^*(t))dt \le \lim_{k\to\infty}\inf \int\limits_0^{\tau^*} L(t,x_k(t),u_k(t))dt \le$$

$$\le \lim_{k\to\infty}\inf \int\limits_0^{\tau_k} L(t,x_k(t),u_k(t))dt = m.$$

Звідси
$$J(u^*) = m.$$
Отже, $u^*(t)$ — оптимальне керування.

b) Нехай тепер $\tau^* = \lim_{n\to\infty}\inf \tau_n$. Виберемо довільний момент t_2 такий, що $t_2 < \tau^*$. Тоді, за теоремою про характеризацію нижньої границі, множина $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < t_2\}$ — скінченна. А на проміжку (t_2, τ^*) може лежати нескінченна кількість τ_n. У цьому випадку виберемо підпослідовність $\{\tau_k, k > 0\}$ послідовності $\{\tau_n, n >$
$> 0\}$ таку, що для будь-якого $k > 0, \tau_k \in (t_2, \tau^*)$. Тоді для кожного $t \in [0, t_2]$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$.

Аналогічно попередньому випадку для будь-якого $t_2 \in [0, \tau^*)$ отримаємо

$$\int\limits_0^{t_2} L(t,x^*(t),u^*(t))dt \le m.$$

Звідки граничним переходом при $t_2 \to \tau^*$ маємо

$$J(u^*) = \int\limits_0^{\tau^*} L(t,x^*(t),u^*(t))dt \le m.$$

А тому
$$J(u^*) = m.$$
Отже, $u^*(t)$ — оптимальне керування.

2) Нехай тепер $y^*(\tau^*) \in D$, тоді $\tau^* = T$. Отже, для достатньо великих $n_k : \tau_{n_k} =$
$= T$.

Далі доведення аналогічне першому випадку з заміною τ^* і τ_k на T.

Теорему доведено.

Розглянемо тепер випадок, коли замість умови лінійного росту (3) для функцій $f_1(t,x)$ та $f_2(t,x)$ виконується наступна умова, для будь-якого $\alpha > 0$

$$\mid f_1(t,x) \mid \le C(1+ \mid x \mid^{\alpha}),\ \| f_2(t,x) \| \le C(1+ \mid x \mid^{\alpha}). \tag{13}$$

Відзначимо, що при $\alpha > 1$ дана умова допускає вихід розв'язку задачі Коші (1) на нескінченність за скінченний час (вибух). Однак, використовуючи доведену теорему, можна отримати достатні умови оптимальності і в цьому випадку. Має місце наслідок.

Наслідок. *Якщо в задачі оптимального керування (1), (2) замість умови лінійного росту (3) виконується умова (13), а для функції $L(t,x,u)$ виконуються умови теореми з заміною умов 1) та 2) на умови*

1') існують такі сталі $k > 0, \alpha > 0$ та $p > 1$, що виконується нерівність

$$L(t,x,u) \geq k(\mid u \mid^p + \mid x \mid^{\alpha q}), \qquad (14)$$

для $t \in [0,T]$, $x \in \overline{D}$, $u \in U$.

2') існує $K > 0$, що

$$\mid L_x(t,x,u) \mid + \mid L_u(t,x,u) \mid \leq K(1 + \mid u \mid^{p-1} + \mid x \mid^{\alpha(q-1)}). \qquad (15)$$

Крім того, нехай існує хоча б одне таке допустиме керування $u_1(t)$, що

$$\int\limits_0^{\tau_1} L(t, x_1(t), u_1(t))dt < \infty. \qquad (16)$$

Тоді задача (1), (2) має розв'язок в класі допустимих керувань V.

Доведення. З урахуванням (16) існує невід'ємна нижня границя m значень $J(u)$ і послідовність допустимих керувань $\{u_n(t), n \geq 1\}$ така, що $J(u_n) \to m$ при $n \to \infty$. Отже, для достатньо великих n

$$J(u_n) \leq m + 1.$$

Тоді з (14) отримаємо

$$k \int\limits_0^{\tau_n} (\mid u_n(t) \mid^p + \mid x_n(t) \mid^{\alpha q})dt \leq \int\limits_0^{\tau_n} L(t, x_n, u_n)dt \leq m + 1.$$

Звідки маємо

$$\int\limits_0^{\tau_n} \mid x_n(t) \mid^{\alpha q} dt \leq (\frac{m+1}{k}).$$

Але

$$\mid x_n(t) \mid = \mid x_0 + \int\limits_0^t f_1(s, x_n(s))ds + \int\limits_0^t f_2(s, x_n(s))u_n(s)ds \mid \leq$$

$$\leq \mid x_0 \mid + \int\limits_0^t C(1 + \mid x_n(s) \mid^\alpha)ds + \int\limits_0^t C(1 + \mid x_n(s) \mid^\alpha)u_n(s)ds \leq$$

$$\leq \mid x_0 \mid + CT + C\int\limits_0^t \mid x_n(s) \mid^\alpha ds + C\int\limits_0^t \mid u_n(s) \mid ds + \int\limits_0^t \mid x_n(s) \mid^\alpha \mid u_n(s) \mid ds \leq$$

$$\leq \mid x_0 \mid + CT + CT^{1/p}(\int\limits_0^t \mid x_n(s) \mid^{\alpha q} ds)^{1/q} + CT^{1/p} \mid\mid u_n(s) \mid\mid_p +$$

$$+ C(\int\limits_0^t \mid x_n(s) \mid^{\alpha q} ds)^{1/q} \mid\mid u_n(s) \mid\mid_p \leq \mid x_0 \mid + CT + 2CT^{1/p}(\tfrac{m+1}{k})^{1/q} + C(\tfrac{m+1}{k})^{2/q}.$$

Отже, для будь-яких $t \in [0, \tau_n]$ розв'язки $x_n(t)$ рівномірно обмежені, тому $x_n(\tau_n) < \infty$.

Далі доведення проводиться аналогічно доведенню теореми.

Приклад. Нехай задача оптимального керування має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + e^{-t}x^2u(t), \\ x(0) = 2, \end{cases}$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int\limits_0^\tau (x^5 + 2u^6)\, dt \to \inf,$$

де $x > 0$, $t \in [0, 3]$, $u \in U$, U — довільна опукла замкнена множина, що містить 0.

Не важко перевірити, що для керування $u = 0$ виконується умова (16) і дана задача задовольняє всі умови наслідку при $K = 12, p = 6, \alpha = 25/6, C = 2$. Отже, задача має розв'язок.

Висновки. У даній статті доведені теореми існування оптимального керування для систем диференціальних рівнянь в термінах їх правих частин та критерія якості.

1. **Fleming W. H.** Controlled Markov Processes and Viscosity Solution [text] / W. H. Fleming, H. M. Soner. – Springer, 2005. – 448 p.
2. **Флеминг У.** Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами [текст] / У. Флеминг, Р. Ришел. – М.: Мир, 1978.
3. **Ли Э. Б.** Основы теории оптимального управления [текст] / Э. Б. Ли, Л. Маркус. – М.: Наука, 1972.
4. **Иосида К.** Функциональный анализ [текст] / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
5. **Станжицкий А. М.** Исследование задач оптимального управления на полуоси методом усреднения [текст] / А. М. Станжицкий, Т. В. Добродзий // Диф. уравн. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 264–277.
6. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] // Плотников В. А., Плотников А. Н., Витюк А. Н. – Одесса: Астропринт, 1999. – 354 с.
7. **Lamberto Cesari** Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints. II. Existence theorems for weak solutions [text] / Lamberto Cesari // Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – P. 413–430.
8. **Филипов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью [текст] / А. Ф. Филипов. – М.: Наука, 1985. – 224 с.

ISSN 2304–1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2012 .–Т. 17, вип. 4 (16).–С. 97–103

УДК 517.926

S. A. Shchogolev
Odessa National I. I. Mechnikov University

ON A REDUCTION OF NONLINEAR SECOND-ORDER DIFFERENTIAL SYSTEM TO A SOME SPECIAL KIND

Щоголев С. А. Про зведення нелінійної диференціальної системи другого порядку до одного спеціального вигляду. Для нелінійної коливної диференціальної системи другого порядку побудовано перетворення, яке зводить цю систему до близької до системи з повільно змінними коефіцієнтами.
Ключові слова: диференціальний, повільно змінний, ряди Фур'є.

Щёголев С. А. О приведении нелинейной дифференциальной системы второго порядка к одному специальному виду. Для нелинейной колебательной системы второго порядка построено преобразование, приводящее эту систему к близкой к системе с медленно меняющимися коэффициентами.
Ключевые слова: дифференциальный, медленно меняющийся, ряды Фурье.

Shchogolev S. A. On a reduction of nonlinear second order differential system to a some special kind. For nonlinear oscillating second-order differential system construct the transformation which reducing this system close to a system with slowly varying coefficients.
Key words: differential, slowly varying, Fourier series.

1. Introduction. One of the powerful methods of the study of nonlinear systems of differential equations is the method of integral manifolds [1,2]. Particularly important role it plays in the research of multi-frequency oscillations, in particular, in systems containing the slowly varying parameters [3]. An important object of study in the same time and are single-frequency system [4]. In the research of integral manifolds of nonlinear systems of differential equations is usually necessary to bring the system prior to some simpler form. The construction of the corresponding transformations in many cases leads in turn to auxiliary systems of differential equations that require special study. Therefore, the task of constructing these transformations can be regarded as independent. In this paper, a second order nonlinear system of differential equations, the coefficients of which are represented by an absolutely and uniformly convergent Fourier series with slowly varying parameters. For such a system, that is, systems with coefficients oscillating type, construct a transformation with coefficients of a similar structure, which reducing the system close to a system with slowly varying coefficients.

2. Basic notation and definitions.

Let $G = \{t, \varepsilon : \ t \in \mathbf{R}, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \ \varepsilon_0 \in \mathbf{R}^+\}$.

Definition 1. We say, that a function $f(t,\varepsilon)$, in general a complex-valued, belongs to the class $S_m(\varepsilon_0)$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, if $t, \varepsilon \in G$ and

1) $f(t,\varepsilon) \in C^m(G)$ with respect t,

2) $d^k f(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_k^*(t,\varepsilon)$ $(0 \le k \le m)$,

$$\|f\|_m \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sup_G |f_k^*(t,\varepsilon)|.$$

Definition 2. We say, that a function $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ belongs to the class $F^{\theta}_{m,l}(\varepsilon_0)$ $(m,l \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, if this function can be represented as:

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

and:

1) $f_n(t,\varepsilon) \in S_m(\varepsilon_0)$;

2)

$$\|f\|_{m,l} \stackrel{def}{=} \|f_0\|_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^l \|f_n\|_m < +\infty,$$

particular

$$\|f\|_{m,0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f_n\|_m;$$

3) $\theta(t,\varepsilon)$ – the real function on G.

Definition 3. We say, that a function $f(t,\varepsilon,x)$ belongs to the class $\widetilde{S}^{x}_{m,q}(\varepsilon_0,d)$, if this function belongs to the class $S_m(\varepsilon_0)$ with respect t,ε and to the class $C^q[-d,d]$ with respect x, $|x| \le d$.

Definition 4. We say, that a function $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x)$ belongs to the class $\widetilde{F}^{\theta,x}_{m,l,q}(\varepsilon_0,d)$, if this function belongs to the class $F^{\theta}_{m,l}(\varepsilon_0)$ with respect t,ε,θ and to the class $C^q[-d,d]$ with respect x, $|x| \le d$.

3. Statement of the Problem.

Consider the following system of differential equations:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu X(t,\varepsilon,\theta,x) + \varepsilon a(t,\varepsilon,\theta,x), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega(t,\varepsilon) + \mu\Theta(t,\varepsilon,\theta,x) + \varepsilon b(t,\varepsilon,\theta,x), \end{aligned} \tag{1}$$

where $x \in \mathbf{R}$, $|x| \le d$, $X,\ \Theta,\ \omega,\ a,\ b \in \mathbf{R}$, $X,\ \Theta \in \widetilde{F}^{\theta,x}_{m,l,q}(\varepsilon_0,d)$, $a,b \in \widetilde{F}^{\theta,x}_{m-1,l,q}(\varepsilon_0,d)$, $\omega \in S_m(\varepsilon_0)$, $\inf\limits_G \omega = \omega_0 > 0$; $\mu \in (0,\mu_0)$.

We study the question of the existence of the transformation

$$x = y + \mu u(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu), \quad \theta = \varphi + \mu v(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu), \tag{2}$$

where $|y| \le d_1 < d$, $u,v \in \widetilde{F}^{\varphi,y}_{m_1,l_1,q_1}(\varepsilon_0,d_1)$, which reducing the system (1) to the form:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \mu Y(t,\varepsilon,y,\mu) + \varepsilon\widetilde{a}(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(t,\varepsilon) + \mu\Phi(t,\varepsilon,y,\mu) + \varepsilon\widetilde{b}(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu), \end{aligned} \tag{3}$$

where $Y,\Phi \in \widetilde{S}^{y}_{m,q_2}(\varepsilon_0,d_1)$, $\widetilde{a},\widetilde{b} \in \widetilde{F}^{\varphi,y}_{m-1,l_2,q_2}(\varepsilon_0,d_1)$. The numbers m_1,l_1,q_1,m_2,l_2,q_2 in some way dependent from m,l,q.

4. Principal Results.

Theorem. $\forall r \in \mathbf{N}$, $r < l$, $r < q$ $\exists \mu_r \in (0,\mu_0)$: $\forall \mu \in (0,\mu_r)$ *exist the transformation of kind*

$$x = y + \sum_{k=1}^{r} u_k(t,\varepsilon,\varphi,y)\mu^k, \quad \theta = \varphi + \sum_{k=1}^{r} v_k(t,\varepsilon,\varphi,y)\mu^k, \tag{4}$$

$|y| \le d_1 < d$, $u_k, v_k \in \widetilde{F}^{\varphi,y}_{m,l-k+1,q-k+1}(\varepsilon_0, d_1)$ $(k=\overline{1,r})$, *which reducing the system (1) to the form:*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \sum_{k=1}^{r} Y_k(t,\varepsilon,y)\mu^k + \mu^{r+1}\widetilde{Y}_r(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu) + \varepsilon a_r(t,\varepsilon,\varphi,\mu), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(t,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{r} \omega_k(t,\varepsilon,y)\mu^k + \mu^{r+1}\widetilde{\omega}_r(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu) + \varepsilon b_r(t,\varepsilon,\varphi,\mu), \end{aligned} \tag{5}$$

where $Y_k,\ \omega_k \in \widetilde{S}^{y}_{m,q-k+1}(\varepsilon_0,d_1)$, $\widetilde{Y}_r,\ \widetilde{\omega}_r \in \widetilde{F}^{\varphi,y}_{m,l-r,q-r}(\varepsilon_0,d_1)$, $a_r,\ b_r \in$ $\in \widetilde{F}^{\varphi,y}_{m-1,l-r,q-r}(\varepsilon_0,d_1)$.

Proof. We sustitute relations (4) in system (1) and require that the transformed system have the form (5). Then we obtain the following systems of the differential equations for u_k, v_k $(k=\overline{1,r})$:

$$\begin{aligned} Y_1(t,\varepsilon,y) + \omega(t,\varepsilon)\frac{\partial u_1}{\partial\varphi} &= X(t,\varepsilon,\varphi,y), \\ \omega_1(t,\varepsilon,y) + \omega(t,\varepsilon)\frac{\partial v_1}{\partial\varphi} &= \Theta(t,\varepsilon,\varphi,y), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &Y_2(t,\varepsilon,y) + Y_1(t,\varepsilon,y)\frac{\partial u_1}{\partial y} + \omega_1(t,\varepsilon,y)\frac{\partial u_1}{\partial\varphi} + \omega(t,\varepsilon)\frac{\partial u_2}{\partial\varphi} = \\ &= \frac{\partial X(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial\varphi}\ v_1 + \frac{\partial X(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial y}\ u_1, \\ &\omega_2(t,\varepsilon,y) + Y_1(t,\varepsilon,y)\frac{\partial v_1}{\partial y} + \omega_1(t,\varepsilon,y)\frac{\partial v_1}{\partial\varphi} + \omega(t,\varepsilon)\frac{\partial v_2}{\partial\varphi} = \\ &= \frac{\partial \Theta(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial\varphi}\ v_1 + \frac{\partial \Theta(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial y}\ u_1, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &Y_j(t,\varepsilon,y) + \sum_{k=1}^{j-1} Y_{j-k}(t,\varepsilon,y)\frac{\partial u_k}{\partial y} + \sum_{k=1}^{j-1} \omega_{j-k}(t,\varepsilon,y)\frac{\partial u_k}{\partial\varphi} + \omega(t,\varepsilon)\frac{\partial u_j}{\partial\varphi} = \\ &= \frac{\partial X(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial\varphi}\ v_{j-1} + \frac{\partial X(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial y}\ u_{j-1} + P_j(t,\varepsilon,\varphi,y,v_1,\dots,v_{j-2},u_1,\dots,u_{j-2}), \\ &\omega_j(t,\varepsilon,y) + \sum_{k=1}^{j-1} Y_{j-k}(t,\varepsilon,y)\frac{\partial v_k}{\partial y} + \sum_{k=1}^{j-1} \omega_{j-k}(t,\varepsilon,y)\frac{\partial v_k}{\partial\varphi} + \omega(t,\varepsilon)\frac{\partial v_j}{\partial\varphi} = \\ &= \frac{\partial \Theta(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial\varphi}\ v_{j-1} + \frac{\partial \Theta(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial y}\ u_{j-1} + Q_j(t,\varepsilon,\varphi,y,v_1,\dots,v_{j-2},u_1,\dots,u_{j-2}), \\ &j=\overline{3,r}, \end{aligned} \tag{8}$$

where P_j, Q_j – the polynomials with respect $v_1,\dots,v_{j-2},u_1,\dots,u_{j-2}$ whose coefficients dependent from derivatives up to the $(j-1)$-order with respect φ, y from functions X, Θ. The functions $\widetilde{Y}_r$, $\widetilde{\omega}_r$, a_r, b_r defined from the following systems of the linear algebraic equations:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial u_k}{\partial y}\ \mu^k\right)\widetilde{Y}_r + \left(\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial u_k}{\partial\varphi}\ \mu^k\right)\widetilde{\omega}_r = \\ &= -\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial u_k}{\partial y}\left(\sum_{s=r-k+1}^{r} Y_s\mu^{s-r+k-1}\right) - \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial u_k}{\partial\varphi}\left(\sum_{s=r-k+1}^{r} \omega_s\mu^{s-r+k-1}\right) + \\ &+ \widetilde{P}_r(t,\varepsilon,\varphi,y,v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_r), \end{aligned}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial v_k}{\partial y}\,\mu^k\right)\widetilde{Y}_r+\left(1+\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial v_k}{\partial \varphi}\,\mu^k\right)\widetilde{\omega}_r=$$

$$=-\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial v_k}{\partial y}\left(\sum_{s=r-k+1}^{r}Y_s\mu^{s-r+k-1}\right)-\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial v_k}{\partial \varphi}\left(\sum_{s=r-k+1}^{r}\omega_s\mu^{s-r+k-1}\right)+$$

$$+\widetilde{Q}_r(t,\varepsilon,\varphi,y,v_1,\ldots,v_r,u_1,\ldots,u_r), \tag{9}$$

$$\left(1+\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial u_k}{\partial y}\,\mu^k\right)a_r+\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial u_k}{\partial \varphi}\,\mu^k\right)b_r=$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial u_k}{\partial t}\,\mu^k\right)+a\left(t,\varepsilon,\varphi+\sum_{k=1}^{r}v_k\mu^k,y+\sum_{k=1}^{r}u_k\mu^k\right), \tag{10}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial v_k}{\partial y}\,\mu^k\right)a_r+\left(1+\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial v_k}{\partial \varphi}\,\mu^k\right)b_r=$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial v_k}{\partial t}\,\mu^k\right)+b\left(t,\varepsilon,\varphi+\sum_{k=1}^{r}v_k\mu^k,y+\sum_{k=1}^{r}u_k\mu^k\right),$$

$\widetilde{P}_r,\ \widetilde{Q}_r\in\widetilde{F}^{\varphi,y}_{m,l-r,q-r}(\varepsilon_0,d_1)$.

Consider the system (6). Expand the functions X, Θ in the Fourier series with respect φ:

$$X(t,\varepsilon,\varphi,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n(t,\varepsilon,y)\exp(in\varphi),\ \ \Theta(t,\varepsilon,\varphi,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Theta_n(t,\varepsilon,y)\exp(in\varphi).$$

Solution of the system (6) found in the form of a Fourier series also:

$$u_1(t,\varepsilon,\varphi,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_{1n}(t,\varepsilon,y)\exp(in\varphi),\ \ v_1(t,\varepsilon,\varphi,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}v_{1n}(t,\varepsilon,y)\exp(in\varphi).$$

We substitute these expressions in the system (6), assuming:

$$Y_1(t,\varepsilon,y)=X_0(t,\varepsilon,y),\ \ \omega_1(t,\varepsilon,y)=\Theta_0(t,\varepsilon,y), \tag{11}$$

We obtain:

$$u_1(t,\varepsilon,\varphi,y)=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{X_n(t,\varepsilon,y)}{in\omega(t,\varepsilon)}\exp(in\varphi), \tag{12}$$

$$v_1(t,\varepsilon,\varphi,y)=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{\Theta_n(t,\varepsilon,y)}{in\omega(t,\varepsilon)}\exp(in\varphi). \tag{13}$$

Obviously, that $u_1,v_1\in\widetilde{F}^{\varphi,y}_{m,l+1,q}(\varepsilon_0,d_1)$.

We denote:

$$g_1(t,\varepsilon,\varphi,y)=\frac{\partial X(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial\varphi}\,v_1+\frac{\partial X(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial y}\,u_1-Y_1(t,\varepsilon,y)\frac{\partial u_1}{\partial y}-\omega_1(t,\varepsilon,y)\frac{\partial u_1}{\partial\varphi},$$

$$h_1(t,\varepsilon,\varphi,y)=\frac{\partial \Theta(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial\varphi}\,v_1+\frac{\partial \Theta(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial y}\,u_1-Y_1(t,\varepsilon,y)\frac{\partial v_1}{\partial y}-\omega_1(t,\varepsilon,y)\frac{\partial v_1}{\partial\varphi}.$$

Then $g_1, h_1 \in \widetilde{F}^{\varphi,y}_{m,l-1,q-1}(\varepsilon_0, d_1)$. System (7) takes the form:

$$\begin{gathered} Y_2(t,\varepsilon,y) + \omega(t,\varepsilon)\frac{\partial u_2}{\partial\varphi} = g_1(t,\varepsilon,\varphi,y), \\ \omega_2(t,\varepsilon,y) + \omega(t,\varepsilon)\frac{\partial v_2}{\partial\varphi} = h_1(t,\varepsilon,\varphi,y). \end{gathered} \tag{14}$$

Expand the functions g_1, h_1 in the Fourier series with respect φ:

$$g_1(t,\varepsilon,\varphi,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{1n}(t,\varepsilon,y)\exp(in\varphi),$$

$$h_1(t,\varepsilon,\varphi,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{1n}(t,\varepsilon,y)\exp(in\varphi).$$

Similarly formulas (11), (12), (13) we obtain:

$$Y_2(t,\varepsilon,y) = g_{10}(t,\varepsilon,y),\ \omega_2(t,\varepsilon,y) = h_{10}(t,\varepsilon,y), \tag{15}$$

$$u_2(t,\varepsilon,\varphi,y) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{g_{1n}(t,\varepsilon,y)}{in\omega(t,\varepsilon)} \exp(in\varphi), \tag{16}$$

$$v_2(t,\varepsilon,\varphi,y) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{h_{1n}(t,\varepsilon,y)}{in\omega(t,\varepsilon)} \exp(in\varphi). \tag{17}$$

Obviously, that $u_2, v_2 \in \widetilde{F}^{\varphi,y}_{m,l,q-1}(\varepsilon_0, d_1)$.

Continuing the same way, in the j-s step we assume:

$$\begin{gathered} g_{j-1}(t,\varepsilon,\varphi,y) = \frac{\partial X(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial\varphi}\, v_{j-1} + \frac{\partial X(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial y}\, u_{j-1} - \\ - \sum_{k=1}^{j-1} Y_{j-k}(t,\varepsilon,y)\frac{\partial u_k}{\partial y} - \sum_{k=1}^{j-1} \omega_{j-k}(t,\varepsilon,y)\frac{\partial u_k}{\partial\varphi} + \\ + P_j(t,\varepsilon,\varphi,y,v_1,\dots,v_{j-2},u_1,\dots,u_{j-2}), \\ h_{j-1}(t,\varepsilon,\varphi,y) = \frac{\partial\Theta(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial\varphi}\, v_{j-1} + \frac{\partial\Theta(t,\varepsilon,\varphi,y)}{\partial y}\, u_{j-1} - \\ - \sum_{k=1}^{j-1} Y_{j-k}(t,\varepsilon,y)\frac{\partial v_k}{\partial y} - \sum_{k=1}^{j-1} \omega_{j-k}(t,\varepsilon,y)\frac{\partial v_k}{\partial\varphi} + \\ + Q_j(t,\varepsilon,\varphi,y,v_1,\dots,v_{j-2},u_1,\dots,u_{j-2}), \end{gathered} \tag{18}$$

Functions g_{j-1}, h_{j-1} belongs to the class $\widetilde{F}^{\varphi,y}_{m,l-j+1,q-j+1}(\varepsilon_0, d_1)$.

System (8) takes the form:

$$\begin{gathered} Y_j(t,\varepsilon,y) + \omega(t,\varepsilon)\frac{\partial u_j}{\partial\varphi} = g_{j-1}(t,\varepsilon,\varphi,y), \\ \omega_j(t,\varepsilon,y) + \omega(t,\varepsilon)\frac{\partial v_j}{\partial\varphi} = h_{j-1}(t,\varepsilon,\varphi,y),\ j = \overline{3,r}. \end{gathered}$$

Expand the functions g_{j-1}, h_{j-1} in the Fourier series with respect φ:

$$g_{j-1}(t,\varepsilon,\varphi,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{j-1,n}(t,\varepsilon,y)\exp(in\varphi),$$

$$h_{j-1}(t,\varepsilon,\varphi,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{j-1,n}(t,\varepsilon,y)\exp(in\varphi).$$

Then

$$Y_j(t,\varepsilon,y)=g_{j-1,0}(t,\varepsilon,y),\ \omega_j(t,\varepsilon,y)=h_{j-1,0}(t,\varepsilon,y),\ j=\overline{3,r},$$

$$u_j(t,\varepsilon,\varphi,y)=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{g_{j-1,n}(t,\varepsilon,y)}{in\omega(t,\varepsilon)}\exp(in\varphi),\ j=\overline{3,r},$$

$$v_j(t,\varepsilon,\varphi,y)=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{h_{j-1,n}(t,\varepsilon,y)}{in\omega(t,\varepsilon)}\exp(in\varphi), j=\overline{3,r}.$$

Obviously $u_j,\ v_j\in \widetilde{F}^{\varphi,y}_{m,l-j+2,q-j+1}(\varepsilon_0,d_1)$, $Y_j,\ \omega_j\in \widetilde{S}^{y}_{m,q-j+1}(\varepsilon_0,d_1)$ $(j=\overline{3,r})$.

Thus, the functions

$$u(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu)=\sum_{k=1}^{r} u_k(t,\varepsilon,\varphi,y)\mu^{k-1},$$

$$v(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu)=\sum_{k=1}^{r} v_k(t,\varepsilon,\varphi,y)\mu^{k-1}$$

belongs to the class $\widetilde{F}^{\varphi,y}_{m,l-r+2,q-r+1}(\varepsilon_0,d_1)$.

From correlations (9), (10) follows, that for sufficiently small μ: $\widetilde{Y}_r,\ \widetilde{\omega}_r\in$ $\in \widetilde{F}^{\varphi,y}_{m,l-r,q-r}(\varepsilon_0,d_1)$, $a_r,\ b_r\in \widetilde{F}^{\varphi,y}_{m-1,l-r,q-r}(\varepsilon_0,d_1)$.

Theorem are proved.

Conclusions. Thus, for the system (1) the sufficient conditions of the existence of the transformation, which reducing this system close to a system with slowly varying coefficients and the algorithm for constructing this transformation are obtained. This result can be used for the research of integral manifolds of the system (1), which represented by an absolutely and uniformly convergent Fourier series with slowly varying parameters.

1. **Bogolubov N. N.** The method of accelerated convergence in nonlinear mechanics [in Russian] [text] / Bogolubov N. N., Mitropol'skii Yu. A., Samoilenko A. M. – Naukova dumka, Kiev, 1969. – 247 p.
2. **Mitropol'skii Yu. A.** The method of Integral Manifolds in nonlinear mechanics [in Russian] [text] / Mitropol'skii Yu. A., Lykova O. B. – Nauka, Moscow, 1973. – 512 p.

3. **Samoilenko A. M.** Mathematical Aspects of theory of nonlinear oscillations [in Ukrainian] [text] / Samoilenko A. M., Petryshin R. I. – Naukova dumka, Kiev, 2004. – 474 p.

4. **Mitropol'skii Yu. A.** Nonlinear mechanics. Single-frecuency oscillations [in Russian] [text] / Mitropol'skii Yu. A. – Inst Math., Kiev, 1997. – 388 p.

ISSN 2304–1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2012 .–Т. 17, вип. 4 (16).–С.104–114

М Е Х А Н І К А

УДК 539.375

Ю. В. Діхтяренко
Уманський державний педагогічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ПЛАСТИЧНОЇ ЗОНИ В КІНЦІ ТРІЩИНИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ, ЩО ВИХОДИТЬ НА НЕГЛАДКУ МЕЖУ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

Діхтяренко Ю. В. Дослідження моделі пластичної зони в кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу поділу середовищ. Методом Вінера-Хопфа в умовах плоскої деформації виконано розрахунок початкової пластичної зони в кінці тріщини нормального відриву, яка виходить на негладку межу поділу двох різних пружних середовищ в її кутовій точці. Для знаходження орієнтації пластичної зони використовується критерій максимуму швидкості дисипації енергії в ній. Отримано аналітичні вирази для довжини пластичної зони.
Ключові слова: пластична зона, кутова точка межі поділу середовищ, тріщина нормального відриву.

Дихтяренко Ю. В. Исследование модели пластической зоны в конце трещины нормального отрыва, выходящей на негладкую границу раздела упругих сред. Методом Винера-Хопфа в условиях плоской деформации выполнен расчет начальной пластической зоны в конце трещины нормального отрыва, выходящей на негладкую границу раздела двух различных упругих сред в ее угловой точке. Для определения ориентации пластической зоны используется критерий максимума скорости диссипации энергии в ней. Получены аналитические выражения для длин пластической зоны.
Ключевые слова: пластическая зона, угловая точка границы раздела сред, трещина нормального отрыва.

Dikhtiarenko Yu. V. Research of the model of the plastic zone at the tip of the normal bond-failure crack, out coming onto broken interface elastic media. A static problem on the calculation of the initial plastic zone at the tip of the normal bond-failure crack, out coming onto broken interface dissimilar elastic media in the corner point by Wiener-Hopf's method are done. Criterion of maximum energy dissipation rate is used to find the orientation of the plastic zone. An analytical expressions for the length of the plastic zone is obtained.
Key words: plastic zone, corner point of a media interface, normal bond-failure crack.

Вступ. Тріщини, включення та інші гострокінцеві дефекти є концентраторами напружень зі степеневою особливістю, тобто при навантаженні тіла в їх околі виникає висока інтенсивність напружень, яка приводить до утворення зони передруйнування. В залежності від властивостей матеріалу та умов навантаження зона передруйнування, яка утворюється в околі вершини тріщини, може бути крихкою (утворена у пружно-крихкому матеріалі і переважаючі деформації у ній носять характер відриву) або пластичною (утворена в пружно-пластичному матеріалі, і переважаючі деформації у ній носять характер зсуву). Проте аналітичне розв'язання відповідної задачі механіки руйнування є досить складною математичною проблемою, тому використовуються різноманітні їх моделі. Однією з таких моделей є модель Леонова–Панасюка–Дагдейла, яка представляє зону лінією розриву переміщення, на якій в залежності від властивостей матеріалу задані певні умови його переходу у передруйнівний стан. В рамках даної моделі виконана велика кількість розрахунків зон передруйнування в однорідних тілах [1-3]. Розрахунки зон передруйнування в кусково-однорідних тілах, як правило, стосуються тріщин, розташованих на плоскій [4-8] або ламаній [9-11] межі поділу різних середовищ. Проте, не менш важливе значення для механіки композитних матеріалів, клеєних, зварних з'єднань мають також задачі про розрахунок зон передруйнування в кінці тріщин, що виходять на межу поділу середовищ [12-15]. Зокрема в [12], здійснено розрахунок пластичної зони у кінці тріщини нормального відриву в з'єднувальному матеріалі на межі поділу середовищ. В даній роботі розглядається симетрична задача про розрахунок пластичної зони у кінці тріщини нормального відриву, яка поширюється під кутом до лінії, на якій розташована тріщина в одному з матеріалів з'єднання.

1. Постановка задачі. В умовах плоскої деформації для кусково-однорідного ізотропного тіла з негладкою межею поділу середовищ розглядається задача про розрахунок початкової пластичної зони, яка утворюється в кінці тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки межі поділу в матеріал з модулем Юнга E_1 і коефіцієнтом Пуассона ν_1. Розрізнятимемо випадки утворення зони у матеріалі з пружними сталими E_1 і ν_1 (Рис. 1) та у матеріалі з пружними сталими E_2 і ν_2 (Рис. 2). У відповідності з гіпотезою локалізації [16-17] початкова зона зосереджена у тонкому шарі матеріалу, тому моделюватимемо її двома нахиленими під кутом β_i до продовження тріщини лініями розриву дотичного переміщення, на яких дотичне напруження дорівнює границі текучості матеріалу τ_i. Тут і нижче індексом i $(i = 1, 2)$ будемо позначати величини, які відносяться до утворення пластичної зони в першому або другому матеріалі.

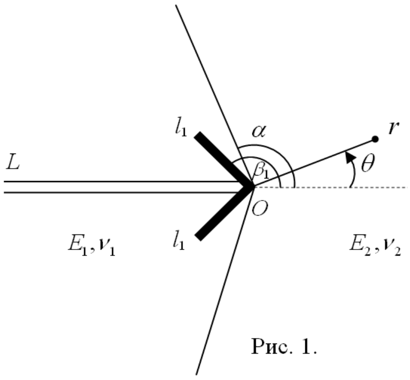

Рис. 1.

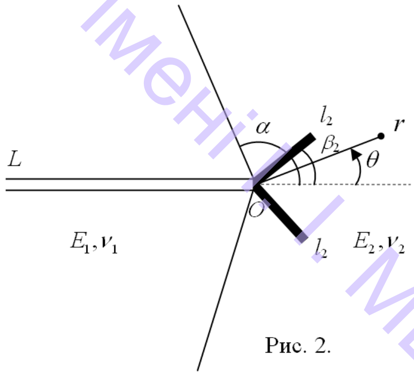

Рис. 2.

На початковому етапі розвитку розміри пластичної зони значно менші від довжини L тріщини і всіх інших суттєвих розмірів тіла, тому тіло будемо вважати кусково-однорідною площиною з межею поділу середовищ у формі сторін кута, з вершини якого вздовж бісектриси виходить півнескінчена прямолінійна тріщина, а під кутом β_i дві пластичні лінії розриву. Симетрія задачі дозволяє обмежитись верхньою частиною кусково-однорідної площини і виконати розрахунок лише однієї смуги в області $0 \le \theta \le \pi$, тому приходимо до двох однотипних статичних крайових задач теорії пружності з граничними умовами:

$$\theta = \pi : \ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \theta = 0 : \ \tau_{r\theta} = 0, \ \ u_\theta = 0;$$

$$\theta = \alpha : \ \ \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \ \ \langle u_r \rangle = \langle u_\theta \rangle = 0;$$

$$\theta = \beta_i : \ \ \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \ \ \langle u_\theta \rangle = 0; \tag{1}$$

$$\theta = \beta_i, \ r < l_i : \ \tau_{r\theta} = \pm \tau_i;$$

$$\theta = \beta_i, \ r > l_i : \ \ \langle u_r \rangle = 0; \tag{2}$$

$$\theta = \beta_i, \ \ r \to \infty, \ \tau_{r\theta} = C F_i\left(\beta_i\right) r^\lambda + o\left(1/r\right), \tag{3}$$

де $0 \le 2\alpha \le 2\pi$ — кут розхилу межі поділу середовищ; $\langle f \rangle$ — стрибок величини f; C — стала, яка характеризує інтенсивність зовнішнього силового поля і вважається заданою за умовою задачі;

$$F_i\left(\beta\right) = \begin{cases} F_1\left(\beta\right), & \alpha \le \theta \le \pi \\ F_2\left(\beta\right), & 0 \le \theta \le \alpha \end{cases}$$

$$F_1\left(\beta\right) = \frac{\left(2\pi\right)^\lambda}{4\lambda\varphi_2}\left\{\left(\lambda+2\right)\varphi_1 \sin\left(\lambda+2\right)\left(\pi-\beta\right) - \lambda\varphi_1 \sin\lambda\left(\pi-\beta\right) - \right.$$

$$\left. - \lambda\varphi_2 \cos\left(\lambda+2\right)\left(\pi-\beta\right) + \lambda\varphi_2 \cos\lambda\left(\pi-\beta\right)\right\},$$

$$F_2\left(\beta\right) = \frac{-\left(2\pi\right)^\lambda}{4\lambda\varphi\varphi_2\cos\lambda\alpha}\left\{\left[\left(\lambda+2\right)\psi_1\varphi_1 + \lambda\psi_2\varphi_2\right]\cos\lambda\alpha\sin\left(\lambda+2\right)\beta + \right.$$

$$\left. + \lambda\left(\psi_3\varphi_1 + \psi_4\varphi_2\right)\sin\lambda\beta\right\},$$

$$\varphi = -\left[\left(\lambda+1\right)\sin 2\alpha + \sin 2\left(\lambda+1\right)\alpha\right],$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi \{ & \left(e-1\right)\lambda\sin\left(\lambda+2\right)\left(\pi-\alpha\right) - \left[\left(e-1\right)\left(\lambda+2\right) - e\left(1+\kappa_2\right) + \right. \\ & \left. + \left(1+\kappa_1\right)\right]\sin\lambda\left(\pi-\alpha\right)\} - 2e\left(1+\kappa_2\right)\lambda\cos\pi\lambda\sin\left(\lambda+1\right)\alpha\sin\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \varphi & \{\left[\left(e-1\right)\left(\lambda+2\right) - e\left(1+\kappa_2\right) + \left(1+\kappa_1\right)\right]\cos\lambda\left(\pi-\alpha\right) - \\ & - \left(e-1\right)\left(\lambda+2\right)\cos\left(\lambda+2\right)\left(\pi-\alpha\right)\} - 2e\left(1+\kappa_2\right)\sin\pi\lambda \times \\ & \times \left(\lambda\sin\left(\lambda+1\right)\alpha\sin\alpha + \cos\lambda\alpha\right), \end{aligned}$$

$$\psi_1 = -2\lambda\cos\left(\pi\lambda-\alpha\right)\sin\alpha + 2\sin\left(\lambda+2\right)\left(\pi-\alpha\right)\cos\lambda\alpha,$$

$$\psi_2 = -2\lambda\sin\left(\pi\lambda-\alpha\right)\sin\alpha + 2\cos\lambda\pi - 2\cos\left(\lambda+2\right)\left(\pi-\alpha\right)\cos\lambda\alpha,$$

$$\psi_3 = -\varphi \cos \lambda \left(\pi - \alpha\right) - 2 \sin \pi\lambda \left(\lambda \sin \left(\lambda + 1\right) \alpha \sin \alpha + \cos \lambda\alpha\right),$$

$$\psi_4 = -\varphi \sin \lambda \left(\pi - \alpha\right) + 2\lambda \cos \pi\lambda \sin \left(\lambda + 1\right) \alpha \sin \alpha,$$

$$\kappa_i = 3 - 4\nu_i, e = \frac{E_1}{E_2}\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1},$$

λ — єдиний на інтервалі $(-1, 0)$ корінь характеристичного рівняння аналогічної задачі без пластичної зони [8]:

$$D_0(-\lambda - 1) = 0, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&D_0\left(p\right) = 4e^2 \left[\kappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha\right] \cdot \left[p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p \left(\pi - \alpha\right)\right] + \\
&+e \left\{\left(1+\kappa_1\right)\left(1+\kappa_2\right) \sin 2p\pi - 4\left[\kappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha\right]\left[p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p \left(\pi - \alpha\right)\right] - \right.\\
&\left. - \left(p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha\right)\left[(1+\kappa_1)(1+\kappa_2) - 4\left(p^2 \sin^2 \alpha + \kappa_1 \sin^2 p \left(\pi - \alpha\right)\right)\right]\right\} + \\
&+\left(p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha\right)\left\{\left(1+\kappa_1\right)^2 - 4\left[p^2 \sin^2 \alpha + \kappa_1 \sin^2 p \left(\pi - \alpha\right)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

В кінці пластичної смуги для напружень і зміщень реалізується асимптотика, яка являє собою асимптотично найбільший розв'язок однорідної задачі теорії пружності біля вершини півнескінченої прямої лінії розриву дотичного переміщення в однорідному матеріалі. Зокрема, мають місце асимптотики

$$\theta = \beta_i, \;\; r \to l_i + 0: \;\; \tau_{r\theta} \sim \frac{K_i}{\sqrt{2\pi(r - l_i)}}; \tag{5}$$

$$\theta = \beta_i, \;\; r \to l_i - 0: \;\; \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \sim -\frac{4(1-\nu_i^2)}{E_i}\frac{K_i}{\sqrt{2\pi(l_i - r)}},$$

де K_i — коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці лінії розриву, який повинен бути знайденим в ході розв'язання задачі.

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді суми розв'язків двох наступних задач. Перша задача відрізняється від вихідної тим, що замість першої з умов (2) використовується умова:

$$\theta = \beta_i, \; r \le l_i: \; \tau_{r\theta} = \tau_i - CF_i\left(\lambda, \beta_i\right) r^{\lambda}, \tag{6}$$

а на нескінченності напруження спадають швидше, ніж $\frac{1}{r}$. Друга задача — аналогічна задача без пластичної зони. Оскільки цей розв'язок відомий [8], достатньо розв'язати першу задачу.

2. Розрахунок пластичної зони методом Вінера-Хопфа. Застосувавши до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука і граничних умов (1) інтегральне перетворення Мелліна [18] $f^*(p, \theta) = \int_0^\infty f(r, \theta) r^p dr$, де $f\left(r, \theta\right)$ — довільна компонента тензора напружень або вектора переміщення, p — комплексний параметр перетворення, та використовуючи другу умову (2) і умову (6), отримаємо рівняння Вінера-Хопфа першої задачі:

$$\Phi_i^+\left(p, \beta_i\right) + \frac{\tau_i}{p+1} - \frac{CF_i\left(\beta_i\right) l_i^{\lambda}}{p + \lambda + 1} = -tgp\pi G_i\left(p, \beta_i\right) \Phi_i^-\left(p, \beta_i\right) \left(-\delta_2 < Rep < \delta_1\right), \tag{7}$$

$$\Phi_i^+(p,\beta)=\int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l_i,\beta)\rho^p d\rho,\ \ \Phi_i^-(p,\beta)=\frac{E_i}{4(1-\nu_i^2)}\int_0^1\left\langle\frac{\partial u_r}{\partial r}\right\rangle\Bigg|_{\substack{r=\rho l_i\\ \theta=\beta}}\rho^p d\rho,$$

$$G_i(p,\beta)=\frac{D_i(p,\beta)\cos p\pi}{D_0(p)\sin p\pi},$$

$$\begin{aligned}D_1(p,\beta)=\,&4(e-1)(\Delta_1\Delta_4-\Delta_2\Delta_5)\left[e(1+\kappa_2)\sin 2p\alpha-(e-1)\Delta_6\right]-\\&-4(e-1)(1+\kappa_1)\Delta_6\left[\sin 2p(\beta-\alpha)\Delta_1+\sin^2 p(\beta-\alpha)\Delta_5\right]+\\&+e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)\left[4\sin(p-1)\beta\sin(p+1)\beta\Delta_1+(\Delta_6-\Delta_3)\Delta_5\right]-\\&-(1+\kappa_1)^2\Delta_5\Delta_6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2(p,\beta)=\,&e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)\left[\Delta_3(\Delta_4-\Delta_5)+4\sin(p-1)\beta\sin(p+1)\beta\times\right.\\&\left.\times(\Delta_1-\Delta_2-\Delta_7)\right]+\left[4\sin(p-1)\beta\sin(p+1)\beta\Delta_2-\Delta_3\Delta_4\right]\Big\{(1+\kappa_1)^2+\\&+4(e-1)(1+\kappa_1)\sin^2 p(\pi-\alpha)-4(e-1)^2\Delta_7\Big\}+4e^2(1+\kappa_2)^2\times\\&\times\sin(p-1)\beta\sin(p+1)\beta\Delta_7+4(e-1)e(1+\kappa_2)\Delta_7\Delta_8,\end{aligned}$$

$$\Delta_1=p^2\sin^2\beta-\sin^2 p(\pi-\beta),\Delta_2=p^2\sin^2(\beta-\alpha)-\sin^2 p(\beta-\alpha),$$

$$\Delta_3=p\sin 2\beta+\sin 2p\beta,\Delta_4=p\sin 2(\beta-\alpha)+\sin 2p(\beta-\alpha),$$

$$\Delta_5=p\sin 2\beta-\sin 2p(\pi-\beta),\Delta_6=p\sin 2\alpha+\sin 2p\alpha,$$

$$\Delta_7=p^2\sin^2\alpha-\sin^2 p(\pi-\alpha),$$

$$\Delta_8=p\sin 2\beta\sin 2p(\alpha-\beta)-2\sin^2 p(\alpha-\beta)\cos 2\beta+2\sin p(\alpha+\beta)\sin p(\alpha-\beta).$$

Функція $G_i(it,\beta)$ — парна, додатна, прямує до 1 при $t\to\infty$, тому можлива її факторизація за формулою Гахова [19]:

$$G_i(p,\beta)=\frac{G_i^+(p,\beta)}{G_i^-(p,\beta)}\ (Re p=0),$$
$$\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\ln G_i(z,\beta)}{z-p}dz\right]=\begin{cases}G_i^+(p,\beta), & Re p<0\\ G_i^-(p,\beta), & Re p>0\end{cases}. \qquad (8)$$

Крім того, має місце факторизація:

$$tgp\pi=\frac{p}{K^+(p)K^-(p)},\quad K^\pm(p)=\frac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma(\frac12\mp p)},$$

де $\Gamma(p)$ — гамма-функція Ейлера. Тоді рівняння Вінера–Хопфа (7) можна подати у вигляді:

$$\begin{gathered}\frac{K^+(p)\,\Phi_i^+(p,\beta_i)}{pG_i^+(p,\beta_i)}+\frac{\tau_i}{p+1}\left[\frac{K^+(p)}{pG_i^+(p,\beta_i)}+\frac{K^+(-1)}{G_i^+(-1,\beta_i)}\right]-\\ -\frac{CF_i(\beta_i)\,l_i^\lambda}{p+\lambda+1}\left[\frac{K^+(p)}{pG_i^+(p,\beta_i)}+\frac{K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)\,G_i^+(-\lambda-1,\beta_i)}\right]=\\ =-\frac{\Phi_i^-(p,\beta_i)}{K_i^-(p)G_i^-(p,\beta_i)}-\frac{CF_i(\beta_i)\,l_i^\lambda K^+(-\lambda-1)}{(p+\lambda+1)(\lambda+1)G_i^+(-\lambda-1,\beta_i)}+\\ +\frac{\tau_iK^+(-1)}{(p+1)\,G_i^+(-1,\beta_i)}\qquad(Rep=0)\,.\end{gathered}\tag{9}$$

Ліва частина рівняння (9) аналітична в півплощині $Rep<0$, а права — в півплощині $Rep>0$. Отже, у відповідності з принципом аналітичного продовження, повинна існувати єдина функція, аналітична у всій комплексній площині, яка дорівнює лівій і правій частині цього рівняння у відповідних півплощинах.

Враховуючи асимптотики (5), за допомогою теореми абелевого типу отримаємо [20]:

$$\Phi_i^+(p,\beta_i)\sim\tfrac{K_i}{\sqrt{-2pl_i}},\quad \Phi_i^-(p,\beta_i)\sim-\tfrac{K_i}{\sqrt{2pl_i}}\quad(p\to\infty)\ ,\tag{10}$$

звідки випливає, що функції у лівій і правій частинах рівняння (9) на нескінченності прямують до нуля. Тому, відповідно до теореми Ліувілля, єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю у всій комплексній площині p. Звідси отримуємо точний розв'язок рівняння Вінера-Хопфа:

$$\begin{gathered}\Phi_i^+(p,\beta_i)=-\frac{pG_i^+(p,\beta_i)}{K^+(p)}\left\{\frac{\tau_i}{p+1}\left[\frac{K^+(p)}{pG_i^+(p,\beta_i)}+\frac{K^+(-1)}{G_i^+(-1,\beta_i)}\right]-\right.\\ \left.-\frac{CF_i(\beta_i)\,l_i^\lambda}{p+\lambda+1}\left[\frac{K^+(p)}{pG_i^+(p,\beta_i)}+\frac{K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)\,G_i^+(-\lambda-1,\beta_i)}\right]\right\}\qquad(Rep<0)\,,\end{gathered}\tag{11}$$

$$\begin{gathered}\Phi_i^-(p,\beta_i)=K^-(p)\,G_i^-(p,\beta_i)\left\{\frac{\tau_iK^+(-1)}{(p+1)\,G_i^+(-1,\beta_i)}-\right.\\ \left.-\frac{CF_i(\beta_i)\,l_i^\lambda K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)\,(p+\lambda+1)\,G_i^+(-\lambda-1,\beta_i)}\right\}\qquad(Rep>0)\,.\end{gathered}$$

У відповідності з отриманим розв'язком (11) для рівняння Вінера-Хопфа має місце асимптотика

$$\Phi_i^-(p,\beta_i)\sim\frac{1}{\sqrt{p}}\left\{\frac{\tau_iK^+(-1)}{G_i^+(-1,\beta_i)}-\frac{CF_i(\beta_i)\,l_i^\lambda K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)\,G_i^+(-\lambda-1,\beta_i)}\right\}\quad(p\to\infty)\,.\tag{12}$$

Порівнюючи (12) і (10), знаходимо коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці пластичної смуги:

$$K_i=-\sqrt{2l_i}\left\{\frac{\tau_iK^+(-1)}{G_i^+(-1,\beta_i)}-\frac{CF_i(\beta_i)\,l_i^\lambda K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)\,G_i^+(-\lambda-1,\beta_i)}\right\}.\tag{13}$$

Приймаючи умову обмеженості напружень в кінці лінії розриву, покладемо $K_i = 0$ і отримаємо з (13) вираз для визначення її довжини:

$$l_i = \left(\frac{|C|}{\tau_i}\right)^{-\frac{1}{\lambda}} R_i\left(\beta_i\right), \tag{14}$$

$$R_i\left(\beta_i\right) = \left[\frac{\sqrt{\pi}\left|F_i\left(\beta_i\right)\right|\Gamma\left(\lambda+1\right)I_i\left(0,\beta_i\right)}{2\Gamma\left(1,5+\lambda\right)I_i\left(\lambda,\beta_i\right)}\right]^{-\frac{1}{\lambda}},$$

$$I_i = \exp\left[\frac{\lambda+1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\ln G_i(it,\beta_i)}{t^2+(\lambda+1)^2}dt\right].$$

Згідно з формулою (14) довжина пластичної зони нелінійно зростає зі збільшенням зовнішнього навантаження, яке входить у рівняння для довжини через множник C. Крім того, довжина зони тим більша, чим менша границя текучості матеріалу τ_i.

В якості критерію вибору напрямку поширення пластичної смуги використаємо умову максимуму швидкості дисипації енергії в смузі [21]. Враховуючи знайдений вище розв'язок рівняння Вінера-Хопфа (11), умову $K_i = 0$ і формули (14), знаходимо потенціальну енергію, накопичену у смузі:

$$W_i = -\frac{4\tau_i^2(1-\nu_i^2)\lambda}{\pi E_i(2+\lambda)}\left(\frac{|C|\sqrt{\pi}\Gamma\left(\lambda+1\right)}{2\tau_i\Gamma\left(1,5+\lambda\right)}\right)^{-\frac{2}{\lambda}} w_i\left(\beta_i\right). \tag{15}$$

$$w_i\left(\beta\right) = \left[\frac{\left|F_i\left(\beta\right)\right| I_i\left(0,\beta\right)^{1+\lambda}}{I_i\left(\lambda,\beta\right)}\right]^{-\frac{2}{\lambda}}.$$

Пов'язуючи залежність потенціальної енергії від часу зі зміною навантаження, що входить у множник C, отримуємо швидкість дисипації енергії в пластичній смузі:

$$\frac{dW_i}{dt} = \frac{8\tau_i^2(1-\nu_i^2)}{\pi E_i(2+\lambda)}\left(\frac{|C|\sqrt{\pi}\Gamma\left(\lambda+1\right)}{2\tau_i\Gamma\left(1,5+\lambda\right)}\right)^{-\frac{2}{\lambda}} w_i\left(\beta_i\right)\frac{1}{C}\frac{dC}{dt}. \tag{16}$$

Припускаючи, що $\dfrac{1}{C}\dfrac{dC}{dt} > 0$ (C — додатна зростаюча або від'ємна спадаюча функція часу), приходимо до умови визначення очікуваного напрямку поширення пластичної смуги $w_i\left(\beta_i\right) = \max$.

Виконавши зворотне перетворення Мелліна [18] трансформант напружень із залученням теореми про лишки, можна визначити головні члени розвинень напружень у асимптотичні ряди в околі вершини тріщини після утворення пластичної зони. Зокрема, формула для нормального напруження має наступну структуру:

$$\begin{aligned}\sigma_\theta\left(r,\theta\right) = C_i\left(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2, L, \tau, C\right) f_i\left(\theta, \alpha, e_0, \nu_1, \nu_2\right) r^{\lambda_i} + \\ +\tau\varphi_i\left(\theta, \alpha, e_0, \nu_1, \nu_2, C\right) + \psi_i\left(r, \theta, \alpha, e_0, \nu_1, \nu_2, L, \tau, C\right),\end{aligned} \tag{17}$$

де $e_0 = E_1/E_2$; C_i, f_i, φ_i — відомі функції; ψ_i — функція, що наближається до нуля при $r \to 0$; λ_i — корені характеристичного рівняння задачі

$$D_i\left(-\lambda_i - 1, \beta_i\right) = 0, \tag{18}$$

що лежать у смузі $-1 < \lambda_i < 0$. Відмінність зазначених коренів рівняння (18) від коренів рівняння (4) характеризує зміну характеру напружено-деформованого стану в околі кутової точки внаслідок утворення початкової пластичної зони.

3. Аналіз отриманих результатів. Використовуючи критерій максимуму швидкості дисипації енергії для визначення кута нахилу пластичної зони, порівняємо їх значення для смуг у кожному з матеріалів з'єднання. Відношення цих швидкостей дисипації енергій, а також довжин пластичних смуг дорівнюють

$$\frac{dW_1/dt}{dW_2/dt} = \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{-2(\lambda+1)/\lambda} Z, \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{-1/\lambda} X, \tag{19}$$

$$Z = \frac{1-\nu_1}{e(1-\nu_2)}\left[\frac{\left|F_1\left(\beta_1\right)\right| I_1\left(0,\beta_1\right)^{1+\lambda} I_2\left(\lambda,\beta_2\right)}{\left|F_2\left(\beta_2\right)\right| I_2\left(0,\beta_2\right)^{1+\lambda} I_1\left(\lambda,\beta_1\right)}\right]^{-\frac{2}{\lambda}},$$

$$X = \left[\frac{\left|F_1\left(\beta_1\right)\right| I_1\left(0,\beta_1\right) I_2\left(\lambda,\beta_2\right)}{\left|F_2\left(\beta_2\right)\right| I_2\left(0,\beta_2\right) I_1\left(\lambda,\beta_1\right)}\right]^{-\frac{1}{\lambda}}.$$

В таблиці 1 представлені результати числових розрахунків залежності від кута розхилу межі поділу середовищ 2α кутів нахилу пластичних смуг в кожному з матеріалів, а також множників X і Z, які визначають відношення довжин і швидкостей дисипації енергій. Розрахунки виконані при відношеннях модулів Юнга середовищ $\frac{E_1}{E_2} = 0,2$ (ліва частина таблиці) та $\frac{E_1}{E_2} = 5$ (права частина таблиці) і однакових значеннях їхніх коефіцієнтів Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$.

Таблиця 1

$2\alpha^\circ$	$\beta_1{}^\circ$	$\beta_2{}^\circ$	X	Z	$\beta_1{}^\circ$	$\beta_2{}^\circ$	X	Z
20	99,1	10	7,336	78,096	69,4	10	5,667	6,045
40	110,6	20	3,621	23,088	61,5	20	1,988	1,345
60	114,5	30	4,945	44,681	30	30	1,022	0,999
80	115,3	40	16,736	504,195	40	40	1,020	1,000
100	115,6	50	344,265	$4{,}087\bullet 10^{5}$	50	50	1,021	1,000
120	116,1	60	115,535	$2{,}225\bullet 10^{4}$	60	60	1,022	0,999
140	116,8	70	12,644	$2{,}54\bullet 10^{2}$	70	67,1	1,072	0,996
160	117,5	80	4,146	26,202	80	70,6	1,104	0,958
180	117,6	65,1	0,854	3,125	90	73,9	1,075	0,877
200	115,9	61,2	0,602	0,128	100	77	0,998	0,747
220	110	61,6	0,053	0,011	110	80	0,870	0,574
240	120	63,9	0,024	0,002	120	83	0,715	0,0387
260	130	66,7	0,011	$4{,}869\bullet 10^{-4}$	130	85,8	0,554	0,228
280	140	69,5	$4{,}7\bullet 10^{-3}$	$9{,}016\bullet 10^{-5}$	140	87,7	0,402	0,117
300	150	72,1	$1{,}55\bullet 10^{-3}$	$1{,}063\bullet 10^{-5}$	150	87,4	0,250	0,045
320	160	74,1	$3{,}23\bullet 10^{-4}$	$5{,}463\bullet 10^{-7}$	160	83,5	0,097	$7{,}085\bullet 10^{-3}$
340	170	75,4	$2{,}19\bullet 10^{-5}$	$3{,}811\bullet 10^{-9}$	170	78,2	0,010	$8{,}903\bullet 10^{-5}$

Аналіз приведених в таблиці 1 результатів розрахунків показує, що при рівності границь текучості з'єднаних матеріалів ($\tau_1 = \tau_2$) у випадку $E_1 < E_2$ і кутах розхилу межі поділу середовищ $2\alpha \leq 180^\circ$ маємо $dW_1/dt > dW_2/dt$, що у відповідності з прийнятим енергетичним критерієм припускає утворення двох симетричних бокових пластичних смуг в першому матеріалі, тоді як при кутах розхилу $180^\circ < 2\alpha < 340^\circ$ маємо $dW_1/dt < dW_2/dt$, тому перевагу слід надати утворенню двох бокових смуг у другому матеріалі.

З правої частини таблиці випливає, що при $E_1 > E_2$ і однакових значеннях границь текучості з'єднаних матеріалів ($\tau_1 = \tau_2$) при кутах розхилу $2\alpha \leq 40^\circ$ маємо $dW_1/dt > dW_2/dt$, тобто дві симетричні пластичні смуги утворюються в першому матеріалі. При кутах розхилу від $\approx 60^\circ$ до деякого $2\alpha_1 \simeq 120^\circ$, який визначається з умови $dW_1/dt > dW_2/dt$, поширення пластичної смуги буде відбуватись вздовж межі поділу середовищ у першому або другому матеріалі ($\beta_1 = \beta_2 = \alpha$) в залежності від значень границь текучості з'єднаних матеріалів. При кутах $2\alpha_1 > 120^\circ$ маємо $dW_1/dt < dW_2/dt$, тому передбачається утворення двох симетричних бокових смуг у другому матеріалі.

На рис. 3 представлені результати числових розрахунків залежності показників сингулярності напружень від кута розхилу межі поділу середовищ 2α при відсутності пластичної зони (λ) та після утворення пластичної зони в першому матеріалі (λ_1) і після утворення пластичної зони у другому матеріалі (λ_2). Порівняння коренів λ характеристичного рівняння (4) задачі без пластичної зони і λ_i характеристичних рівнянь (18) після утворення зон в одному з матеріалів вказує на послаблення концентрації напружень в околі вершини тріщини ($\lambda_i > \lambda$), за винятком певних параметрів, при яких, як показав попередній аналіз, утворення пластичної зони у відповідному матеріалі малоймовірне. Збереження концентрації в околі вершини тріщини означає, що розвиток пластичної зони в околі кутової точки буде продовжуватись шляхом збільшення геометричних розмірів початкової зони при збільшенні навантаження та появою нових пластичних зон або зон крихкого передруйнування (process zone), які можуть бути розраховані аналогічним способом. Разом з тим при певних кутах розхилу концентрація напружень після утворення пластичної смуги зникає ($\lambda_i = 0$).

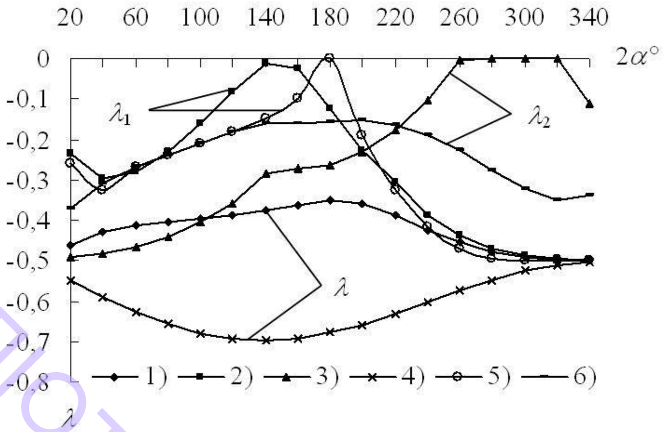

Рис. 3. Залежність показників сингулярності напружень від кута розхилу межі поділу середовищ $2\alpha(\nu_1 = \nu_2 = 0,25) : 1-3)\frac{E_1}{E_2} = 0,2; 4-6)\frac{E_1}{E_2} = 5$.

Висновки. Розглянута симетрична задача про розрахунок пластичної зони в кінці тріщини нормального відриву, вершина якої співпадає з кутовою точкою межі поділу середовищ. Задача розв'язана методом Вінера-Хопфа із застосуванням інтегрального перетворення Мелінна та деяких положень теорії функцій комплексної змінної. Отримані результати можна використовувати для інженерних розрахунків НДС в композитних матеріалах з тріщиною, яка виходить на негладку межу поділу середовищ в її кутовій точці.

1. **Панасюк В. В.** Модель смуг пластичності в пружно-пластичних задачах механіки руйнування [текст] / В. В. Панасюк, М. П. Саврук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – Т. 28, № 1. – С. 49–68.
2. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения [текст] / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
3. **Черепанов Г. П.** Пластические линии разрыва в конце трещины [текст] / Г. П. Черепанов // Прикл. мат. и мех. – 1976. – Т. 40, № 4. – С. 720–728.
4. **Каминский А. А.** Расчет зоны предразрушения в конце трещины на границе раздела сред [текст] / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, М. В. Дудик // Теор. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 90–93.
5. **Каминский А. А.** Линия скольжения в конце разреза на границе раздела различных сред [текст] / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, № 6. – С. 86–91.

6. **Каминский А. А.** Расчет пластической зоны в конце трещины в рамках модели "трезубец" / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова // Прикл. механика. – 1997. – Т. 33. – № 5. – С. 70–76.
7. **Каминский А. А.** О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред [текст] / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова // Прикл. механика. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 63–68.
8. **Камінський А. О.** Напруження біля кінців тріщини на межі розділу двох середовищ за наявності пластичних смуг [текст] / А. О. Камінський, М. В. Дудик, Л. А. Кіпніс // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – № 3. – С. 71–76.
9. **Dudyk M. V.** Investigation of the initial stage of kinking of an interface crack at an angular point of the interface of two media [text] / M. V. Dudyk, Yu. V. Dikhtyarenko // Materials Science. – 2012. – V. 47, № 5. – P. 627–635.
10. **Dudyk M. V.** Development of a prefracture zone from an interface crack at a corner point of an interface of two elastic media [text] / M. V. Dudyk, Yu. V. Dikhtyarenko // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – V. 184, № 2. – P. 121–135.
11. **Діхтяренко Ю. В.** Моделювання початкової пластичної смуги у кутовій точці межі розділу середовищ з міжфазною тріщиною [текст] / Ю. В. Діхтяренко // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2011. – Т. 16, вип. 16. – С. 76–86.
12. **Dudik M. V.** Analysis of plastic slip lines at the tip of a crack terminating at the interface of different media [text] / M. V. Dudik, L. A. Kipnis, A. V. Pavlenko // Int. Appl. Mech. – 2002. – V. 38, № 2. – С. 197–202.
13. **Каминский А. А.** О начальном развитии зоны предразрушения вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред [текст] / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, М. В. Дудик // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 2. – С. 74–81.
14. **Каминский А. А.** О зоне предразрушения в конце трещины, выходящей на границу раздела упругих сред [текст] / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова, М. В. Дудик // Доповіді НАН України. – 2006. – № 7. – С. 43–46.
15. **Камінський А. О.** Дослідження зони передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу розділу пружних середовищ [текст] / А. О. Камінський, Л. А. Кіпніс, М. В. Дудик, Ю. В. Діхтяренко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 4. – С. 111–119.
16. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits [text] / D. S. Dugdale // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – V. 8, № 2. – P. 100–104.
17. **Леонов М. Я.** Полосы пластичности при растяжении пластин с трещиновидным концентратором [текст] / М. Я. Леонов, П. М. Витвицкий, С. Я. Ярема // ДАН СССР. – 1963. – Т. 148, № 3. – С. 541–544.
18. **Уфлянд Я. С.** Интегральные преобразования в задачах теории упругости [текст] / Я. С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
19. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи [текст] / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
20. **Нобл Б.** Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных [текст] / Б. Нобл. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
21. **Черепанов Г. П.** К общей теории разрушения [текст] / Г. П. Черепанов // Физ.-хим. механика материалов. – 1986. – № 1. – С. 36–44.

ISSN 2304–1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2012 .–Т. 17, вип. 4 (16).–С.115–127

УДК 539.3

О. Ф. Кривий
Одеська національна морська академія

ОСОБЛИВОСТІ ПОЛЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ТУНЕЛЬНОГО ВКЛЮЧЕННЯ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ АНІЗОТРОПНОМУ ПРОСТОРІ

Кривий О. Ф. Особливості поля напружень біля тунельного включення в кусково-однорідному анізотропному просторі. Розглянуті задачі про тунельне включення, що виходить одним кінцем в площину з'єднання двох різних анізотропних півпросторів, які знаходяться в умовах узагальненої плоскої деформації. Досліджені випадки повного зчеплення або гладкого контакту включення із середовищем. За допомогою побудованого розривного розв'язку, задачі зведені до системи трьох сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомою особливістю. Встановлені умови існування і асимптотики розв'язків вказаних систем. Отримані залежності показників особливостей напружень в вершині включення від його розташування і анізотропних властивостей півпросторів.

Ключові слова: кусково-однорідний анізотропний простір, включення, розривний розв'язок, сингулярні інтегральні рівняння, нерухома особливість.

Кривой А. Ф. Особенности поля напряжений возле туннельного включения в кусочно-однородном анизотропном пространстве. Рассмотрены задачи о туннельном включении, выходящем одним концом в плоскость соединения двух различных анизотропных полупространств, которые находятся в условиях обобщенной плоской деформации. Исследованы случаи полного сцепления или гладкого контакта включения со средой. С помощью построенного разрывного решения задачи сведены к системам сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. Установлены условия разрешимости и асимптотика решений указанных систем. Получены зависимости показателей напряжений в вершине включения от его положения и анизотропных свойств полупространств.

Ключевые слова: кусочно-однородное анизотропное пространство, включение, разрывное решение, сингулярные интегральные уравнения, неподвижная особенность.

Kryvyy O. F. Features of the stress field in a neighborhood the tunnel inclusion in piecewise homogeneous anisotropic space. Consider the problem of the tunnel inclusion, which is similarly overlooking one end in the plane connecting two different anisotropic half-spaces, which are in terms of the generalized plane strain. The cases of complete clutch or enable smooth contact with the medium. With the construction of discontinuous solutions of the problem are reduced to a system of singular integral equations with fixed singularity.Establish conditions for the solvability and the asymptotic behavior of solutions of these systems. The dependencies of stress valuet in the top of the inclusion of the anisotropic properties of half-spaces and the location of inclusion.

Key words: piecewise homogeneous anisotropic space, inclusion, discontinuous solution, singular integral equations, fixed singularity.

Вступ. Задачі про міжфазні дефекти в кусково-однорідних анізотропних середовищах розглядали багато авторів. При цьому дослідження в основному обмежувались плоскими випадками [1-6]. В роботах [7-9] за допомогою побудованих інтегральних сингулярних співвідношень досліджені міжфазні тунельні дефекти в кусково-однорідному анізотропному середовищі, яке знаходиться в двовимірному стані (узагальнена плоска деформація [10]). В цій роботі вказаний метод узагальнено на випадок внутрішніх тунельних включень. Зокрема, побудовано розривний розв'язок для кусково-однорідного анізотропного простору за наявності внутрішніх дефектів і інтегральні співвідношення, що зв'язують стрибки і суми переміщень та напружень на вказаних дефектах в просторі узагальнених функцій повільного зростання. В результаті задача про тунельні включення, які виходять під довільним кутом до площини з'єднання двох різних анізотропних півпросторів і перебувають в умовах повного зчеплення або гладкого контакту, зведена до системи трьох сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) з нерухомими особливостями. Обґрунтовано існування і виявлена асимптотика поведінки розв'язків отриманих системи СІР. Отримані залежності показників особливостей напружень в вершинах включення від анізотропних властивостей матеріалів і кута нахилу включення.

1. Побудова розривного розв'язку для кускво-однорідного анізотропного середовища. Нехай простір, який складений із двох різних анізотропних півпросторів, з'єднаних в площині $x = 0$, знаходиться в двовимірному стані, без наявності площин пружної симетрії, тобто в умовах узагальненої плоскої деформації [10]. В просторі містяться довільні кусково-неперервні циліндричні поверхні, напрямні яких паралельні осі OZ, в результаті перетину останніх площиною XOY утворюється кусково-неперервний контур ℓ. На вказаних поверхнях розташовані наскрізні дефекти загальної природи (типу тріщин, відшарованих і невідшарованих включень). Виходячи із рівняння рівноваги та узагальненого закону Гука, відносно компоненти тензора напружень та вектора переміщень

$$\vec{\eta} = \{\eta_k(x,y)\}_{k=1}^{8} = \{\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy},\ \tau_{xz},\ \tau_{yz},\ u,\ v,\ w\}, \qquad (1)$$

отримаємо наступну систему диференційних рівнянь:

$$D[x,\partial_1,\partial_2]\vec{\eta} = f,\ x \neq 0,\ (x,y) \notin \ell, \qquad (2)$$

$$D[x,\partial_1,\partial_2] = \left\| \begin{array}{cc} D_* & O_{3\times3} \\ -B(x) & D_*^{\mathrm{T}} \end{array} \right\|,\ B(x) = \{\beta_{kj}(x)\}_{j,k=1}^{5},\ \beta_{kj}(x) = \begin{cases} \beta_{kj}^{+}, x > 0, \\ \beta_{kj}^{-}, x < 0, \end{cases}$$

$$D_* = \left\| \begin{array}{ccccc} \partial_1 & 0 & \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \end{array} \right\|,\ \partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x},\ \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y},$$

$f = \{-X_0,\ -Y_0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\}$, $\beta_{kj}^{\pm}$ — коефіцієнти узагальненого закону Гука відповідно для верхнього та нижнього півпросторів X_0, Y_0 проекції об'ємних сил на відповідні осі. Нормальні напруження σ_z при цьому визначимо за формулою $\sigma_z = -\beta_{66}^{-1}\sum_{j=1}^{5}\beta_{6j}v_j$. В площинні $x = 0$ вважаємо виконаними умови неперервності:

$$\chi^{-} = 0, \qquad (3)$$

де $\chi^- = \left\{\chi_k^-(y)\right\}^6 = \left\{\langle\eta_1\rangle^-, \langle\eta_3\rangle^-, \langle\eta_4\rangle^-, \langle\eta_6\rangle^-, \langle\eta_7\rangle^-, \langle\eta_8\rangle^-\right\}, \langle\eta_k\rangle^-$ — стрибки функцій η_k при переході площини $x = 0$. Для подання умов на лінії ℓ, де можливі розриви всіх компонент вектора $\vec{\eta}$, введемо в кожній точці лінії ℓ локальну систему координат $(\mathrm{N}, \mathrm{S}, \mathrm{Z})$. Напрямок осі S співпадає з напрямком дотичного вектора s до лінії ℓ в даній точці, напрямок осі N співпадає з напрямком нормального вектора n, який вибирається зліва від дотичного вектора, вісь Z залишається незмінною. Кут між осями X і N позначимо $\phi = \phi(x, y)$, $(x, y) \in \ell$. В новій системі координат компоненти тензора напружень та вектора переміщень позначимо так:

$$\vec{\eta}_\ell = \{\tilde{\eta}_k(x, y)\}_{k=1}^8 = \{\sigma_{\mathrm{N}},\ \sigma_{\mathrm{S}},\ \tau_{\mathrm{NS}},\ \tau_{\mathrm{NZ}},\ \tau_{\mathrm{SZ}},\ u_{\mathrm{N}},\ v_{\mathrm{S}},\ w_{\mathrm{Z}}\}. \tag{4}$$

В залежності від виду контактної взаємодії дефектів із простором на лінії ℓ, будуть відомі шість із наступних величин: $\tilde{\chi}^\pm = \{\tilde{\chi}_k^\pm\}_{k=1}^6$, де $\tilde{\chi}_k^\pm = \langle\tilde{\chi}_k(x, y)\rangle_\ell^\pm$ — відповідно стрибки і суми функцій (4). Для визначеності будемо вважати відомими на лінії ℓ стрибки:

$$\langle\tilde{v}_k\rangle_\ell^- = \tilde{\chi}_k^-(x, y),\ k = \overline{1, 8},\ k \neq 2, 5,\ (x, y) \in \ell. \tag{5}$$

Розв'язки крайової задачі (2), (3), (5), при виконанні умов $X_0, Y_0 \in C_{0,\ell}^1(\mathbb{R}^2) \cap$ $\cap L_1(\mathbb{R}^2)$, $\tilde{\chi}_k^\pm(x, y) \in C_*(\ell) \cap L_1(\ell)$, $\chi_{k0}^\pm(y) \in C_*(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, слід розшукувати в класі $C_{0,\ell}^1(\mathbb{R}^2) \cap L_1(\mathbb{R}^2)$, де $C_{0,\ell}^m$ — простір функцій, неперервних разом зі всіма похідними до m–порядку в $\mathbb{R}^2$, за виключенням прямої $x = 0$ і лінії ℓ, $L_1(\mathbb{R}^2)$ — простір інтегровних в $\mathbb{R}^2$ функцій, $C_*(\ell), L_1(\ell)$ — простори відповідно кусково-неперервних та інтегровних на ℓ функцій.

Продовжимо систему (2) на весь простір, для цього перейдемо до простору узагальнених функцій повільного зростання $\Im'(\mathbb{R}^2)$ і врахуємо зв'язок між узагальненими і звичайними похідними $\partial_k\eta_j = \tilde{\partial}_k\eta_j - \chi_j^-(x, y)(-1)^{k+1}\kappa_k\delta(\ell)$, де $\delta(\ell)$ — функція Дірака зосереджена на контурі ℓ, χ_j^- — стрибки функцій η_j на контурі ℓ, а також формули зв'язку між компонентами векторів $\vec{\eta}$ і $\vec{\eta}_\ell$ [11]. В результаті, відносно вектору $\vec{\eta}$ в просторі $\Im'(\mathbb{R}^2)$ отримаємо крайову задачу

$$\left(D[x, \tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2]\vec{\eta}, q\right) = (f_*, q),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ q \in \Im(\mathbb{R}^2), \tag{6}$$

$$\eta_k^+ = \eta_k^-,\ k = 1, 3, 4, 6, 7, 8, \tag{7}$$

де

$$v_k^\pm \in \Im'_\pm(\mathbb{R}^2),\ f_* = \{f_{j*}\}^8,\ f_{1*} = \left(\tilde{\chi}_1^-\kappa_1 + \tilde{\chi}_2^-\kappa_2\right)\delta(\ell) - X_0,$$

$$f_{2*} = \left(-\tilde{\chi}_1^-\kappa_2 + \tilde{\chi}_2^-\kappa_1\right)\delta(\ell) - Y_0,\ f_{3*} = \tilde{\chi}_3^-\delta(\ell),\ f_{8*} = -\tilde{\chi}_6^-\kappa_2\delta(\ell),$$

$$f_{4*} = (\tilde{\chi}_4^-\kappa_1 + \tilde{\chi}_5^-\kappa_2)\kappa_1\delta(\ell),\ f_{5*} = (\tilde{\chi}_4^-\kappa_2 - \tilde{\chi}_5^-\kappa_1)\kappa_2\delta(\ell),\ \kappa_1 = \cos\phi,$$

$$f_{6*} = (\tilde{\chi}_5^-(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) - 2\kappa_1\kappa_2\tilde{\chi}_4^-)\delta(\ell),\ f_{7*} = \tilde{\chi}_6^-\kappa_1\delta(\ell),\ \kappa_2 = \sin\phi,$$

$$\Im'_\pm(\mathbb{R}^2) = \{f^\pm \in \Im'(\mathbb{R}^2)\,|\mathrm{supp}\ f^\pm = \mathbb{R}_\pm \times \mathbb{R}\}.$$

Розв'язки крайової задачі (6), (7), слідуючи роботам [12,7–9], будемо називати *розривним розв'язком для кусково-однорідного анізотропного середовища* в просторі $\Im'(\mathbb{R}^2)$. Останній здобудемо, спираючись на фундаментальний розривний розв'язок для кусково-однорідного анізотропного простору, тобто на систему векторів $w_j = \{w_{kj}(x, y, x_0, y_0)\}_{k=\overline{1,8}}$, $w_{kj} \in \Im'(\mathbb{R}^2)$, $j = \overline{1,8}$, яка задовольняє наступній системі крайових задач:

$$D[x, \tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2]w_j = f_{0j}, j = \overline{1,8} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{8}$$

$$w_{kj}^{+} = w_{kj}^{-}, \quad k = \overline{1,8}, \quad k \neq 2, \quad k \neq 5, \tag{9}$$

де $w_{kj}^{\pm} \in \Im'_{\pm}(\mathbb{R}^2)$, $f_{0j} = \{f_{kj}^0\}^8 = \{\delta_{kj}\}^8 \delta(x - x_0, y - y_0), \cdots (x_0, y_0) \neq 0$, δ_{nj} — символ Кронекера.

Компоненти векторів w_j належать підпростору [6] $\Im'_0(\mathbb{R}^2)$, отже, застосувавши до (8) двовимірне перетворення Фур'є і скориставшись результатами робіт [7–9], відносно $\mathrm{W}_{kj}^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathrm{F}_2\left[w_{kj}^{\pm}\right] \in \Omega'_{\pm,-1}(\mathbb{R}^2)$, отримаємо за змінною α_1 матричну крайову задачу Рімана в просторі $\Im'(\mathbb{R}^2)$:

$$M_+(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\, W_j^{+} = M_-(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\, W_j^{+} + f_{*j}, \quad j = \overline{1,8}, \tag{10}$$

де $M_{\pm} = \pm D\left[\pm 0, -i\alpha_1, -i\alpha_2\right], W_j^{\pm} = \left\{\mathrm{W}_{kj}^{\pm}\right\}^8$, $f_{*j} = \{\delta_{kj} e_0^*\}^8$, $e_0^* = e^{i\alpha_1 x_0 + i\alpha_2 y_0}$.

Враховуючи поліноміальний вид коефіцієнтів задачі (10), застосуємо до її розв'язування метод, поданий в роботах [6–7], в результаті отримаємо

$$W_{kj} = W_{kj}^{+} + W_{kj}^{-}, \; k = \overline{1,8}, \; j = \overline{1,8}, \tag{11}$$

де $(W_{kj}^{\pm} = (-i\alpha_2)W_{kj}^{\pm}, \; k = 6, 7, 8), W_{kj}^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2) = \dfrac{1}{\mathrm{P}_6^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2)} \displaystyle\sum_{p=1}^{8} i^{\theta_1} r_{kp}^{\pm} t_{pj}^{\pm}$,

$$\mathrm{P}_6^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathrm{P}_4^{\pm}\mathrm{P}_2^{\pm} - \left(\mathrm{P}_3^{\pm}\right)^2, \; \mathrm{P}_2^{\pm} = \beta_{44}^{\pm}\alpha_2^2 - 2\beta_{45}^{\pm}\alpha_1\alpha_2 + \beta_{55}^{\pm}\alpha_1^2,$$

$$\mathrm{P}_3^{\pm} = \beta_{14}^{\pm}\alpha_2^3 - (\beta_{15}^{\pm} + \beta_{34}^{\pm})\alpha_1\alpha_2^2 + (\beta_{24}^{\pm} + \beta_{35}^{\pm})\alpha_1^2\alpha_2 - \beta_{25}^{\pm}\alpha_1^3,$$

$$\mathrm{P}_4^{\pm} = \beta_{11}^{\pm}\alpha_2^4 - 2\beta_{13}^{\pm}\alpha_1\alpha_2^3 + (\beta_{33}^{\pm} + 2\beta_{12}^{\pm})\alpha_1^2\alpha_2^2 - 2\beta_{23}^{\pm}\alpha_1^3\alpha_2 + \beta_{22}^{\pm}\alpha_1^4,$$

$$r_{kp}^{\pm} = h_k^{\pm}\lambda_{p,l}^{\pm}, \; k = \overline{1,5}, \; p = \overline{1,8}, \; l = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, 3, \\ 2, & k = 4, 5, \end{cases} \quad \theta_1 = \begin{cases} 1, p = \overline{1,3}, \\ 0, p = \overline{4,8}, \end{cases}$$

$$\lambda_{1l}^{\pm} = \alpha_1^{-1}(g_j^{\pm}\mathrm{P}_{l+2}^{\pm} - \ell_j^{\pm}\mathrm{P}_{l+1}^{\pm}), \lambda_{jl}^{\pm} = \alpha_2^{-1}(g_5^{\pm}\mathrm{P}_{l+2}^{\pm} - \ell_5^{\pm}\mathrm{P}_{l+1}^{\pm}), j = 1, 3,$$

$$\lambda_{5l}^{\pm} = -\,\alpha_2^2\mathrm{P}_{l+1}^{\pm}, \lambda_{6l}^{\pm} = -\alpha_1\alpha_2\mathrm{P}_{l+1}^{\pm}, \;\; \lambda_{7l}^{\pm} = \alpha_2\mathrm{P}_{l+2}^{\pm}, \lambda_{8l}^{\pm} = -\alpha_1\mathrm{P}_{l+2}^{\pm}, l = 1, 2,$$

$$r_{6j}^{\pm} = \alpha_1^{-1}\alpha_2(\lambda_{j1}^{\pm}\ell_1^{\pm} - \lambda_{j2}^{\pm}g_1^{\pm}), \; r_{7j}^{\pm} = \lambda_{j1}^{\pm}\ell_2^{\pm} - \lambda_{j2}^{\pm}g_2^{\pm}, r_{8j}^{\pm} = \lambda_{j1}^{\pm}\ell_5^{\pm} - \lambda_{j2}^{\pm}g_5^{\pm},$$

$$h_1^{\pm}=\alpha_2^2,\ h_2^{\pm}=\alpha_1^2,\ h_3^{\pm}=-\alpha_1\alpha_2,\ h_4^{\pm}=-\alpha_2, h_5^{\pm}=\alpha_1, \lambda_{4l}^{\pm}=\alpha_2^2\mathrm{P}_{l+1}^{\pm},$$

$$\ell_k^{\pm}=\beta_{1k}^{\pm}\alpha_2^2-\beta_{3k}^{\pm}\alpha_1\alpha_2+\beta_{2k}^{\pm}\alpha_1^2,\ g_k^{\pm}=\beta_{4k}^{\pm}\alpha_2-\beta_{5k}^{\pm}\alpha_1,\ k=\overline{1,5}.$$

$$\{t_{kj}^{\pm}\}_{k=\overline{1,8}}=\theta(\pm x_0)e_0^*\{\delta_{kj}\}_{k=\overline{1,8}}\mp\frac{1}{2}f_0^*,\ j=\overline{1,8},$$

$$f_0^*=\{\chi_{10}(\alpha_2),\chi_{30}(\alpha_2),\chi_{40}(\alpha_2),\chi_{60}(\alpha_2),0,\chi_{70}(\alpha_2),\chi_{80}(\alpha_2),0\}.$$

Для визначення невідомих функцій $\chi_{k0}(\alpha_2)$ скористаємося умовами (9). Після обернення (11), вирази компонент фундаментальних розривних розв'язків для кусково-однорідного анізотропного простору подамо так:

$$w_{kj}(x,y,x_0,y_0)=\theta(x)w_{kj}^{+}+\theta(-x)w_{kj}^{-},\ k=\overline{1,8},\ j=\overline{1,8}, \tag{12}$$

де

$$w_{kj}^{+}=\frac{2}{\pi}Im\sum_{n=1}^{3}\{\theta(x_0)\bar{R}_{kjn}^{+}\mathrm{K}_{kj}[\bar{\xi}_n^{+}-\bar{\xi}_{n0}^{+}]+\sum_{m=1}^{3}[\theta(x_0)\beta_{kjnm}^{++}\mathrm{K}_{kj}[\bar{\xi}_n^{+}-\xi_{m0}^{+}]+$$
$$+\theta(-x_0)\beta_{kjnm}^{+-}\mathrm{K}_{kj}[\bar{\xi}_n^{+}-\bar{\xi}_{m0}^{\pm}]]\},$$

$$w_{kj}^{-}=\frac{2}{\pi}Im\sum_{n=1}^{3}\{\theta(-x_0)\bar{R}_{kjn}^{-}\mathrm{K}_{kj}[\bar{\xi}_n^{-}-\bar{\xi}_{n0}^{-}]+\sum_{m=1}^{3}[\theta(x_0)\beta_{kjnm}^{-+}\mathrm{K}_{kj}[\xi_n^{-}-\xi_{m0}^{+}]+$$
$$+\theta(-x_0)\beta_{kjnm}^{--}\mathrm{K}_{kj}[\xi_n^{-}-\bar{\xi}_{m0}^{-}]]\},$$

$$\mathrm{K}_{kj}[f]=f^{-1},(k=\overline{1,5};j=\overline{1,3})\bigcup(k=\overline{6,8};j=\overline{4,8}),\ \xi_m^{\pm}=z_m^{\pm}x+y,$$

$$\mathrm{K}_{kj}[f]=-f^{-2},(k=\overline{1,5};j=\overline{4,8}),\mathrm{K}_{kj}[f]=\ln f,(k=\overline{6,8};j=\overline{1,3}),$$

$$\alpha_{pjn}^{+}=\sum_{k=1}^{6}a_{kp}^{*}R_{kjn}^{0,+},\ \alpha_{pjn}^{-}=\sum_{k=1}^{6}a_{kp}^{*}\bar{R}_{kjn}^{0,-},\ \beta_{kjmn}^{+\pm}=\sum_{p=1}^{6}\alpha_{pjm}^{\pm}\bar{\mathrm{N}}_{kpn}^{+},\ \mathrm{R}_{kp}^{\pm}=\sum_{n=1}^{3}R_{kpn}^{\pm},$$

$$\beta_{kjnm}^{-\pm}=\sum_{p=1}^{6}\alpha_{pjn}^{\pm}\mathrm{N}_{kpm}^{-},\ \xi_{m0}^{\pm}=z_m^{\pm}x_0+y_0,\left\{R_{kjm}^{0,\pm}\right\}_{k=\overline{1,6}}=\left\{R_{kjm}^{\pm}\right\}_{k=1,3,4,6,7,8},$$

$$R_{kpn}^{\pm}=\frac{r_{kp}^{\pm}(z_n^{\pm},1)}{\beta_0^{\pm}q_n^{\pm}(z_n^{\pm})\bar{q}_n^{\pm}(z_n^{\pm})},q_n^{\pm}(z_n^{\pm})=\prod_{l=1,\,l\neq n}^{3}(z_n^{\pm}-z_l^{\pm}),\bar{q}_n^{\pm}(z_n^{\pm})=\prod_{l=1}^{3}(z_n^{\pm}-\bar{z}_l^{\pm}),$$

$$\mathrm{P}_6^{\pm}(z_n^{\pm},1)\equiv 0,\ \beta_0^{\pm}=\beta_{22}^{\pm}\beta_{55}^{\pm}-(\beta_{25}^{\pm})^2,$$

$$N^{\pm} = \left\{ \sum_{n=1}^{3} \mathrm{N}^{\pm}_{k\,pn} \right\}^{6} = \left\{ \sum_{n=1}^{3} R^{\pm}_{k\,pn} \right\}^{p=1,2,3,4,6,7}_{k=1,3,4,6,7,8}.$$

Знайдені вирази (12) дають змогу, скориставшись теоремою про згортку, отримати розривний розв'язок для кусково-однорідного анізотропного середовища:

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{8} w_{kj} * f_{j*} = \sum_{j=1}^{8} \iint_{\mathbb{R}^2} w_{kj}(x, y, x_0, y_0) f_{j*}(x_0, y_0) dx_0 dy_0. \tag{13}$$

Подання (13) містить шість стрибків $\tilde{\chi}^{-}_{k}$, $k = \overline{1,6}$ компонент тензора напружень та вектора переміщень, зосереджених на контурі ℓ. Частина із яких, в залежності від типу дефекту, виявляються невідомими функціями. Для їх визначення, скориставшись формулами Сохотського, отримаємо інтегральні співвідношення, що зв'язують стрибки та суми $\tilde{\chi}^{\pm} = \{\tilde{\chi}^{\pm}_{k}\}^{6}_{k=1}$ на контурі ℓ. Зокрема, якщо контур ℓ є об'єднання відрізків, розташованих вздовж прямої, яка проходить через початок координат під кутом ϕ до осі OX: $\ell = \bigcup\limits_{j=1}^{r} (a_j; b_j)$, тобто: $x = t\cos\phi$, $x_0 = \tau\cos\phi$, $y = t\sin\phi$, $y_0 = \tau\sin\phi$, $\tilde{\chi}^{\pm}_{k}(x, y) = \tilde{\chi}^{\pm}_{k}(t), (k = \overline{1,6}), \tilde{\chi}^{\pm}_{k}(t) = (\tilde{\chi}^{\pm}_{k}(t))', (k = \overline{4,6})$, вказані співвідношення подамо так:

$$\tilde{\chi}^{+}_{k}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{6} \int_{\ell} \tilde{\chi}^{-}_{j}(\tau) \left[\frac{\Upsilon_{kj}(t)}{t - \tau} + Im \sum_{n,m=1}^{3} \frac{\mathrm{B}_{kjnm}}{t e_{mn} - \tau} \right] d\tau, \quad t \in \ell, \quad k = \overline{1,6}, \tag{14}$$

де

$$\Upsilon^{\pm}_{kj} = 4Im \sum_{n=1}^{3} \frac{H^{\pm}_{jkn}}{(\bar{\beta}^{\pm}_{n})^{\delta_*}},\, B^{\pm+}_{kjmn} = \frac{b^{\pm+}_{kjnm}}{(\bar{\beta}^{\pm}_{n})^{\delta_*}},\, B^{\pm-}_{kjmn} = \frac{b^{\pm-}_{kjnm}}{(\bar{\beta}^{\pm}_{n})^{\delta_*}}, \delta_* = \begin{cases} 1, j = \overline{1,3}, \\ 2, j = \overline{4,6}, \end{cases}$$

$$B^{\pm+}_{kjnm} = \frac{b^{\pm+}_{kjnm}}{(\bar{\beta}^{\pm}_{n})^{\delta_*}}, \quad B^{\pm-}_{kjnm} = \frac{b^{\pm-}_{kjnm}}{(\bar{\beta}^{\pm}_{n})^{\delta_*}}, \{e^{++}_{nm}, e^{+-}_{nm}, e^{-+}_{nm}, e^{--}_{nm}\} = \left\{ \frac{\bar{\beta}^{+}_{n}}{\beta^{+}_{m}}, \frac{\bar{\beta}^{+}_{n}}{\bar{\beta}^{-}_{m}}, \frac{\beta^{-}_{n}}{\beta^{+}_{m}}, \frac{\beta^{-}_{n}}{\bar{\beta}^{-}_{m}} \right\},$$

$$\beta^{\pm}_{n} = z^{\pm}_{n}\cos\phi + \sin\phi, \Upsilon_{kj} = \sum_{\pm} \theta(\pm t)\Upsilon^{\pm}_{kj}, \ \mathrm{B}_{kjnm} = \sum_{\pm(\pm)} \theta(\pm t)\theta((\pm)\tau) B^{\pm(\pm)}_{kjnm},$$

$$e_{nm} = \sum_{\pm(\pm)} \theta(\pm t)\theta((\pm)\tau) e^{\pm(\pm)}_{nm}.$$

Співвідношення (14) узагальнюють співвідношення для кусково-однорідної анізотропної площини [5], і дозволяють задачі про внутрішні тунельні дефекти в кусково-однорідному анізотропному середовищі зводити безпосередньо до систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР).

2. Постановка і зведення до системи СІР задач про тунельне включення. Нехай в результаті перетину тунельного включення площиною XOY утвориться відрізок $\ell = (0; a)$. (Рис. 1)

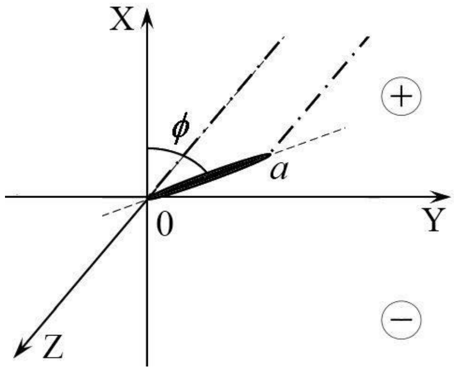

Рис. 1.

До включення прикладене довільне навантаження з рівнодійною $P = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, 0)$ і центральним моментом M, які забезпечують двовимірний стан. Розміщення граней включень після деформації описується функціями

$$\tilde{w}^{\pm}(t) = \varepsilon + \delta^* t + \tilde{w}_*^{\pm}(t),\ t \in \ell, \tag{15}$$

де функції $\tilde{w}_*^{\pm}(t)$ описують форму граней включення. Скориставшись умовами $\tilde{\chi}_j^-(t) = 0,\ t \notin \ell, j = \overline{1,6}$, і співвідношеннями (14) поставлену задачу зведемо до системи СІР r–того порядку ($r \leq 6$) відносно вектора $h = \{h_j(t)\}^r$:

$$M_0 h(t) + \frac{1}{\pi} M_{\mathrm{S}} \int_0^a \frac{h(\tau)}{t-\tau} d\tau + \frac{4}{\pi} Im \sum_{n,m=1}^{3} B_{nm} \int_0^a \frac{h(\tau) d\tau}{e_{nm}^{++} t - \tau} = q(t),\ \ t \in (0, a). \tag{16}$$

Порядок системи r, вигляд вектор функцій $q(t) = \{q_k(t)\}^r$ і матриць $M_0 = \left\{m_{kj}^0\right\}^r, M_{\mathrm{S}} = \left\{m_{kj}^{\mathrm{s}}\right\}^r, M_{nm} = \left\{m_{kj}^{nm}\right\}^r$, залежать від типу контактної взаємодії включення із середовищем. Систему (16) слід доповнити r умовами із наступних шести співвідношень

$$\int_\ell \tilde{\chi}_k^-(\tau) d\tau = \mathrm{P}_k, \quad (\mathrm{P}_3 = \mathrm{P}_4 = \mathrm{P}_5 = \mathrm{P}_6 = 0). \tag{17}$$

Умови (17) при $k = 1, 2, 3$ є умови рівноваги, а при $k = 4, 5, 6$ умови замкнутості. Для визначення кута повороту включень δ^* після деформації, скористаємося умовами моментної рівноваги

$$\int_0^a \tau \chi_1^-(\tau) d\tau = \mathrm{M}_0. \tag{18}$$

Розглянемо наступні типи контактної взаємодії включення із середовищ.

***З а д а ч а* А**. Включення обома гранями зчеплені із простором. Враховуючи умови

$$\tilde{\chi}_4^{\pm}(t) = \left(\tilde{w}^+(t)\right)' \pm \left(\tilde{w}^-(t)\right)', \tag{19}$$

які виконуються для усіх задач безвідривного контакту включень з середовищем, і скориставшись останніми трьома співвідношеннями із (14) відносно невідомих стрибків напружень $h = \{\tilde{\chi}_j^-(t)\}^3$, дістанемо систему СІР (16), в якій

$$M_0 = O_{3\times 3},\ M_{\mathrm{S}} = \{\Upsilon^+_{k+3,j}\}^3,$$

$$B_{nm} = \{\mathrm{B}^{++}_{kjnm}\}^3, M^*_{\mathrm{S}} = \left\{\Upsilon^+_{k+3,j+3}\right\}^3,\ M^*_{nm} = \left\{\mathrm{B}^{++}_{k+3,j+3,nm}\right\}^3,$$

$$q(t) = q^+(t) - M^*_{\mathrm{S}}\frac{1}{\pi}\int_\ell \frac{q^-(\tau)}{t-\tau}d\tau - Im\sum_{n,m=1}^{3}\frac{M^*_{nm}}{\pi}\int_\ell \frac{q^-(\tau)}{te^{++}_{nm}-\tau}d\tau, q^\pm(t) = \{\tilde{\chi}_j^\pm\}_{j=\overline{4,6}}.$$

Вказану систему слід доповнити умовами (18) і (17) при $k = \overline{1,3}$.

З а д а ч а **В.** Грані включення знаходяться в умовах гладкого контакту із середовищем. У цьому випадку стрибки та суми дотичних напружень дорівнюють нулю: $\tilde{\chi}_k^\pm(t) = 0,\ k = 2,3$, а стрибки і суми нормальних зміщень визначаються формулою (19). Використавши другу, третю та четверту рівність із співвідношень (14), відносно невідомих стрибків нормальних напружень і дотичних зміщень $\{h_j\}^3 = \{\tilde{\chi}_1^-(t),\ \tilde{\chi}_5^-(t), \tilde{\chi}_6^-(t)\}$, отримаємо систему трьох СІР (16), в якій

$$M_0 = O_{3\times 3},\ M_{\mathrm{S}} = \left\{\Upsilon^+_{kj}\right\}_{k=2,3,4;j=1,5,6},\ B_{nm} = \left\{\mathrm{B}^{++}_{kjnm}\right\}_{k=2,3,4;j=1,5,6},$$

$$q(t) = \left\{\tilde{\chi}_4^+(t)\delta_{k,4} - \frac{\Upsilon^+_{k,4}}{\pi}\int_\ell \frac{\tilde{\chi}_4^-(\tau)}{t-\tau}d\tau - Im\sum_{n,m=1}^{3}\frac{1}{\pi}\int_\ell \frac{\mathrm{B}^{++}_{k,4,nm}\tilde{\chi}_4^-(\tau)}{te_{nm}(t,\tau)-\tau}d\tau\right\}_{k=2,3,4}.$$

Додатковими для вказаної системи будуть умови (18) і (17) при $k = 1,5,6$.

3. Умови існування і асимптотики поведінки розв'язків системи СІР з нерухомою особливістю. Ядра системи (16), крім сингулярностей типу Коші, містять також нерухомі особливості, що обумовлює необхідність доведення існування і визначення асимптотики її розв'язків. Позначимо через $L^2_q(\ell_0,\omega(t))$ $(\omega(t) = t^\gamma(a-t)^\beta,\ q-1 < Re\gamma < -1+qRe\gamma,\ q-1 < Re\beta < -1+qRe\beta,$ $1 < q < \infty)$ простір Банаха функцій з нормою [13] $\|f\|_{q,\omega} = \sqrt[q]{\int_\ell \omega(t)\,|f(t)|^q\,dt}$. $\mathrm{H}^{\gamma,\beta}_\mu(\ell)$ $(-1 < Re\gamma, Re\beta \le 0)$ клас функцій $f(t)$ $(t\in\ell)$ які допускають розвинення $f = t^\gamma(1-t)^\beta f_*(t), f_*(t) \in \mathrm{H}_\mu(\ell)$, $\mathrm{H}_\mu(\ell)$ — клас Гельдерових функцій. Предсимвол [13], системи (16) подамо так:

$$\mathrm{G}^0(\eta) = \frac{\mathrm{G}(\eta)}{\sin\pi\eta} = \left\{\frac{g_{kj}(\eta)}{\sin\pi\eta}\right\}^r = \{M_0 - \mathrm{ctg}\pi\eta M_s - \\ -\frac{i}{2\sin\pi\eta}\sum_{m,n=1}^{3}(B_{nm}(-e^{++}_{nm})^{-1-\eta} - \bar{B}_{nm}(-\bar{e}^{++}_{nm})^{-1-\eta})\}. \tag{20}$$

Теорема 1. *Якщо існує таке число* γ, $\mathrm{Re}\gamma \in (-1;0]$, *яке є* $(\kappa+1)$ — *кратним коренем рівняння*

$$\Delta(\eta) = 0, \quad \Delta(\eta) = \begin{cases} \det \mathrm{G}(\eta), & \textit{при } g_{kj} \neq 0 \, (k = j), \\ tr \; \mathrm{G}(\eta), & \textit{при } g_{kj} = 0 \, (k \neq j), \end{cases} \tag{21}$$

$\mathrm{tr}\, \mathrm{G}\,(\eta)$ — *слід матриці* $\mathrm{G}\,(\eta)$, *то система (16) розв'язна в* $L^2_q\,(\ell, \omega\,(t))$, *її індекс дорівнює одиниці, і при умовах (17) та при* $q_k(t) \in \mathrm{H}^{\alpha+\varepsilon,\beta+\varepsilon}_{\mu}(\ell)$ *має единий розв'язок в* $L^2_q\,(\ell,\omega(t)) \cap \mathrm{H}^{\alpha,\beta}_{\mu}(\ell)$, $(0 \leq \alpha, \beta < 1)$, *який має асимптотичне розвинення*

$$h_j(t) \simeq h^*_j t^{\gamma} P_{\kappa j}(\ln t), \; t \to 0, \; h^*_j \neq 0, j = \overline{1,r}, \tag{22}$$

де $P_{\kappa j}(z)$ — *многочлени* κ*-тої степені.*

Доведення. При виконанні умов теореми будемо мати: $\det \mathrm{G}^0(\eta) \neq 0$ якщо $-1 < Re\eta < Re\gamma$. Отже згідно [13], система нетерова в просторі $L^2_q(\ell, \omega(t))$ а її індекс визначається формулою $\mathrm{Ind\,A} = -\mathrm{ind}(\mathrm{A}_{\xi}(\tau))$, $\mathrm{A}_{\xi}(\tau) = \det \mathrm{G}^0(\eta)$, $\eta = \xi + i\tau$. Неважко встановити, що $\mathrm{ind}(\mathrm{A}_{\xi}(\tau)) = m^0 - 1$, де $m^0 = \mathrm{ind}(\mathrm{A}^0_{\xi}(\tau))$, $\mathrm{A}^0_{\xi}(\tau) = \mathrm{tg}^n \dfrac{\eta}{2} \mathrm{A}_{\xi}(\tau)$. Якщо τ змінюється від $-\infty$ до ∞ функція $\mathrm{A}^0_{\xi}(\tau)$ при $\xi \in (Re\gamma, 1)$ опише замкнутий контур, який розташований симетрично відносно дійсної осі і не охоплює початок координат. Така поведінка має місце для поставлених задач і для комбінацій відомих матеріалів [14]. Отже $m^0 = 0$ а індекс системи (16) дорівнює одиниці і при умовах (17) існує єдиний розв'язок в просторі $L^2_q(\ell, \omega(t))$, який має інтегровану особливість при $t \to 0$. Тобто має місце подання $h_j(t) \simeq t^{\gamma} P_{rj}(\ln t) h^*_j$, $t \to 0$, $h^*_j \in \mathrm{H}_{\mu}(\ell), j = \overline{1,r}$.
Скориставшись асимптотичними властивостями операторів із нерухомими особливостями[2], для оператора

$$\mathrm{N}_{jk}[f] = m^0_{jk} f(t) + \frac{m^s_{jk}}{\pi} \int_0^a \frac{f(\tau)}{t-\tau} d\tau + \frac{4}{\pi} Im \sum_{n,m=1}^{3} b^{lm}_{jk} \int_0^a \frac{f(\tau) d\tau}{e_{nm} t - \tau}$$

отримаємо наступне розвинення ($\varepsilon > 0$):

$$\mathrm{N}_{jk}[t^{\gamma} P_{\kappa k}(\ln t) h^*_k] =$$
$$t^{\gamma} h^*_k(0) \sum_{m=0}^{\kappa} g^{(m)}_{jk}(\gamma) \frac{(-1)^{m+1}}{m!} P^{(m)}_{\kappa k}(\ln t) + \Omega^*_{jk}(t), \left|\Omega^*_{jk}\right| < C_{jk} t^{Re\gamma + \varepsilon}. \tag{22}$$

Скориставшись поданням (22) із системи (16), отримаємо співвідношення

$$t^{\gamma} \sum_{k=1}^{n} h_{k*}(0) \sum_{m=0}^{\kappa} g^{(m)}_{jk}(\gamma) \frac{(-1)^{m+1}}{m!} P^{(m)}_{\kappa j}(\ln t) + \Omega^0_j(t) = 0, \; j = \overline{1,n}. \tag{23}$$

Функція $\Omega^0_j(t)$ задовольняє оцінці $\left|\Omega^0_j(t)\right| < C t^{Re\gamma + \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Згідно, останньою рівності (23) можливі при $t \to 0$ лише при виконання співвідношень

$$\sum_{l=0}^{\kappa} \ln^l t \cdot N_{\kappa - l} = 0, \tag{24}$$

$$N_m = \sum_{p=0}^{m} (-1)^{m-p+1} \left(\begin{array}{c} \kappa \\ m-p \end{array} \right) Q_{m-p} X_{\kappa-p}, X_p = \{h_{j*}(0) a_{pj}\}_1^n,$$

$$Q_{m-p} = \{g_{jk}^{(m-p)}(\gamma)\}^n,$$

$a_{\kappa j}$ — коефіцієнти многочленів $P_{\kappa j}(z)$. Рівність (24) можлива якщо виконуються співвідношення

$$\sum_{p=0}^{m} (-1)^{m-p+1} \left(\begin{array}{c} r \\ m-p \end{array} \right) Q_{m-p} X_{\kappa-p} = 0, \ m = \overline{0, \kappa}. \tag{25}$$

Так як вектори $X_p \neq 0$, $p = \overline{0, r}$ лінійно не залежні, то останні рівності можливі тоді і тільки тоді, коли визначник системи (25), який дорівнює $\Delta^{(r)}(\gamma)$, обертається в нуль. Отже якщо має місце подання (22), то γ є $(\kappa + 1)$ — кратним коренем трансцендентного рівняння (21). Поведінка при $t \to a - 0$ розв'язків системи (16) визначається характеристичною частиною і співпадає з поведінкою розв'язків для відповідних задач, про включення в однорідному просторі [7]. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Якщо γ є простим коренем трансцендентного рівняння (21) з найбільшою дійсною частиною із смуги* $\mathrm{Re}\gamma \in [0; 1)$, *то розв'язки системи (16) допускають асимптотичне подання*

$$h_j(t) \simeq t^{\gamma} h_j^*, \ t \to 0 \ , \ \mathrm{Re}\gamma \in (-1, 0], \ j = \overline{1, r}. \tag{26}$$

Наслідок 2. *Трансцендентне рівняння (21) дозволяє виявити наступні за головною доданки до будь-якого порядку* K *в асимптотичному розвиненні розв'язків системи (16)*

$$h_j(t) \simeq \sum_{k=0}^{\mathrm{K}} h_{jk}^* t^{\gamma_k}, \ t \to 0 \ , \ j = \overline{1, r},$$

$$-1 < \mathrm{Re}\gamma_0 < \mathrm{Re}\gamma_1 < \ldots < \mathrm{Re}\gamma_{\mathrm{K}}, \ \Delta(\gamma_j) = 0, \ h_{jk}^* \neq 0.$$

Дослідження показали, що для поставлених задач A і B, для відомих комбінацій анізотропних матеріалів [10, 14] рівняння (21) має принаймні один корінь в смузі $\mathrm{Re}\gamma \in (-1; 0]$, отже, справедливе твердження:

Наслідок 3. *Система (16) при додаткових умовах (17) має единий розв'язок в просторі $L_q^2(\ell, \omega(t))$, який допускає асимптотичне подання (26).*

4. Числові результати і їх аналіз. На рисунках 2–4 наведені залежності найбільших показників особливостей для деяких комбінацій матеріалів при повороті осей анізотропії навколо осі Z і при зміні кута ϕ нахилу дефекту для задач A і B. Для *задачі* **A** на рисунках 2, 3, відповідно для комбінацій матеріалів $m1 - m2$ і $m3 - m4$ (матеріал $m1$ — стеклопластик однонаправлений, матеріал $m2$ — стеклопластик ортогонально-армований (2:1), $m3$ — стеклопластик СТЕТ, $m4$ — стеклопластик АСТТ(б) [10]), наведені залежності $\alpha_0 = -Re\gamma_0$, де γ_0 —

корінь рівняння (21) з найменшою дійсною частиною із смуги $\mathrm{Re}\gamma \in (-1;0]$, від кута φ ортогонального перетворення осей анізотропії навколо осі Z. Крива 1 відповідає значенню кута нахилу дефекту $\phi = 0$, крива 2 — $\phi = {}^{\pi}/_{6}$, крива 3 — $\phi = {}^{\pi}/_{4}$, крива 4 — $\phi = {}^{\pi}/_{3}$. Аналогічні залежності наведені для *задачі* **B** на рисунках 4, 5. Для *задачі* **A** на рисунках 6, 7, відповідно для комбінацій матеріалів $m1 - m2$ і $m3 - m4$, наведені залежності α_0 від кута нахилу дефекту ϕ. Крива 1 відповідає значенню кута повороту осей анізотропії $\varphi = 0$, навколо осі Z, крива 2 — $\varphi = {}^{\pi}/_{6}$, крива 3 — $\varphi = {}^{\pi}/_{4}$, крива 4 — $\varphi = {}^{\pi}/_{3}$. Аналогічні залежності наведені для *задачі* **B** на рисунках 8, 9.

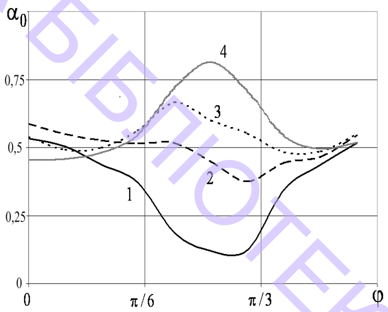

Рис. 2

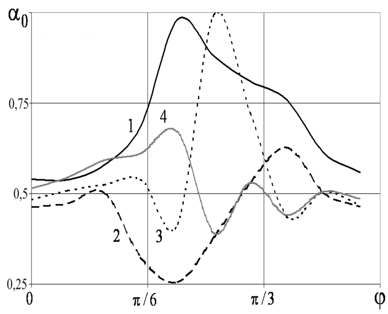

Рис. 3

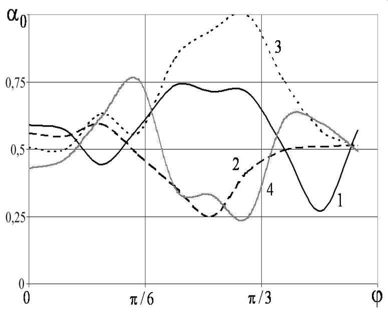

Рис. 4

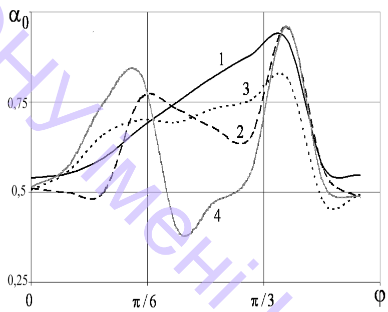

Рис. 5

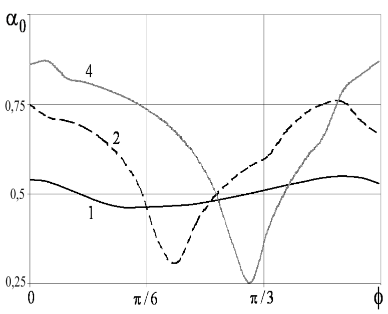

Рис. 6

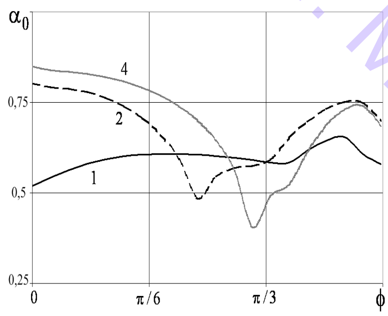

Рис. 7

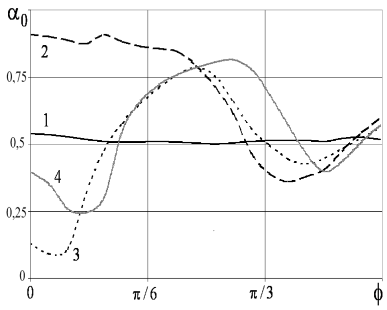

Рис. 8

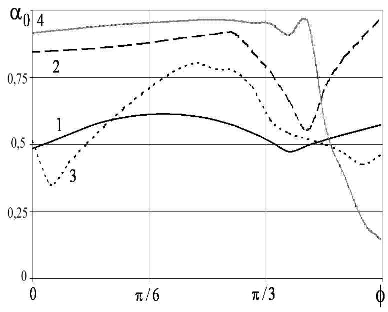

Рис. 9

Результати обчислень показують, що концентрація напружень в околі дефектів, які виходять в площину з'єднання різних півпросторів суттєво залежить від анізотропних властивостей матеріалів, типу контактної взаємодії включення із середовищем і кута нахилу включення. Зокрема, виявився суттєвим вплив орієнтації головних осей анізотропії півпростору в якому розташовано включення. Слід також відмітити, що при наближенні кута ϕ до $\dfrac{\pi}{2}$ (включення наближається до площини з'єднання півпросторів) показники особливості наближаються до показників особливостей відповідних задач про міжфазні дефекти [7].

Висновки. Отже, запропоновано методику зведення задач про тунельні включення, які одним кінцем в площину з'єднання різних анізотропних півпросторів до системи СІР з нерухомими особливостями. Досліджено їх розв'язність і виявлена асимптотика поведінки розв'язків в вершинах включень, що дає можливість до їх розв'язування застосувати ефективні числово-аналітичні методи.

Аналогічно можуть бути розглянуті задачі про тунельні дефекти інших типів (тріщини, відшаровані включення), які виходять в площину з'єднання різних анізотропних півпросторів.

1. **Кривой А. Ф.** Особенности поля напряжений возле включений в составной анизотропной плоскости [текст] / А. Ф. Кривой, М. В. Радиолло // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 3. – С. 84–92.
2. **Кривой А. Ф.** Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости [текст] / А. Ф. Кривой, Г. Я. Попов, М. В. Радиолло // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т. 50, № 4. – С. 622–632.
3. **Herrmann K. P.** On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial [text] / K. P. Herrmann K. P., V. V. Loboda // Arch. Appl. Mech. – 1999. – T. 69. – P. 317–335.
4. **Кривой А. Ф.** Произвольно ориентированные дефекты в составной анизотропной плоскости [текст] / А. Ф. Кривой // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2001. – Т. 6, Вип. 3. – С. 108–115.
5. **Кривой А. Ф.** Произвольно ориентированные трещины в неоднородной анизотропной плоскости [текст] / А. Ф. Кривой, К. Н. Архипенко // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 29–35.

6. **Кривой А. Ф.** Фундаментальное решение для четырехсоставной анизотропной плоскости [текст] / А. Ф. Кривой // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2003. – Т. 8. – Вип. 2. – С. 140–149.
7. **Кривий О. Ф.** Тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі [текст] / О. Ф. Кривий // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, № 2. – С. 55–66.
8. **Кривой А. Ф.** Межфазные туннельные трещины в составном анизотропном пространстве [текст] / А. Ф. Кривой, Г. Я. Попов // Прикл. математика и механика. – 2008. – Т. 72, № 4. – С. 689–700.
9. **Кривой А. Ф** Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве [текст] / А. Ф. Кривой, Г. Я. Попов // Прикл. механика. – 2008. – Т. 44, № 6. – С. 36–45.
10. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
11. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости [текст] / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
12. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений [текст] / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
13. **Дудучава Р. В.** Интегральные уравнения свёртки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики [текст] / Р. В. Дудучава. – Тбилиси: Мецниереба, 1979. – 136 с.
14. **Александров К. С.** Упругие свойства кристаллов. Обзор [текст] / К. С. Александров, Т. В. Рыжова // Кристаллография. – 1961. – Т. 6. – Вып. 2. – С. 289–314.

ISSN 2304–1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2012 .–Т. 17, вип. 4 (16).–С.128–134

УДК 531.395

В. П. Ольшанський*, С. В. Ольшанський**
*Харкiвський нацiональний технiчний унiверситет сiльського господарства
**Нацiональний технiчний унiверситет "Харкiвський полiтехнiчний iнститут"

РОЗВ'ЯЗОК ОДНIЄЇ ЗАДАЧI КВАЗIВЕРТИКАЛЬНОГО РУХУ КУЛI ЗМIННОГО РАДIУСА

Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Розв'язок однiєї задачi квазiвертикального руху кулi змiнного радiуса. Знайдено розв'язок системи нелiнiйних диференцiальних рiвнянь квазiвертикального руху кулi, радiус якої зменшується за дробово-лiнiйним законом. Першi iнтеграли виражено за допомогою функцiй Бесселя, а для обчислення других запропоновано наближенi асимптотичнi формули.
Ключовi слова: тiло змiнного радiуса, квазiвертикальний рух, функцiї Бесселя.

Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Решение одной задачи квазивертикального движения шара переменного радиуса. Найдено решение системы нелинейных дифференциальных уравнений квазивертикального движения шара, радиус которого уменьшается по дробно-линейному закону. Первые интегралы выражены при помощи функций Бесселя, а для вторых интегралов предложены приближённые асимптотические формулы.
Ключевые слова: тело переменного радиуса, квазивертикальное движение, функции Бесселя.

Olshanskii V. P., Olshanskii S. V. Solution of a problem of quasivertical motion of the sphere with variable radius. The solution of the system of nonlinear differential equations of quasi-vertical motion of the sphere, the radius of which varies according to a fractional-linear was found. First integrals is found with Bessel functions, for the second integrals an approximate asymptotic formula.
Key words: body with variable radius, quasi-vertical motion, Bessel functions.

Вступ. Рух кулi змiнної маси та розмiрiв розглядають при вивченнi польоту згораючих частинок палив, дрiбнодисперсних хiмiчно активних вiдходiв виробництв, падаючих, догораючих метеоритiв та iн. Тому дослiдження особливостей балiстики тiл, у яких змiнюються розмiри в часi, вiдноситься до актуальних науково-технiчних задач. Активний розвиток механiки тiла змiнної маси пов'язаний з проектуванням реактивної технiки. Такi задачi враховують направлене вiддiлення частини маси вiд рухомого тiла, що створює реактивну силу [1, 2]. Поряд з цим у природi зустрiчаються випадки, коли пiд час руху вiдбувається не направлене, а всебiчне зменшення маси тiла. Так, зменшується маса згораючих падаючих метеоритiв, маса крапель, якi випаровуються [3], та iн. Пiд час всебiчного вiддiлення маси вiд тiла, та ще й з малою вiдносною швидкiстю, реактивна сила незначна, i її можна не враховувати при розрахунках руху.

Змiна розмiрiв тiла впливає на опiр його польоту, що призводить до змiнних коефiцiєнтiв у рiвняннях руху та ускладнює теоретичнi дослiдження. В цiй областi механiки доводиться розв'язувати нелiнiйнi диференцiальнi рiвняння зi змiнними коефiцiєнтами, якi вiдносяться до класу Рiккатi [4].

При русі тіла змінного розміру проявляється ряд особливостей. Процес руху стає нестаціонарним. Тому при падінні тіла змінної маси втрачає сенс поняття "швидкості витання", величину якої визначив М. Є. Жуковський [5]. Траєкторія тіла, маса якого зменшується, може обриватися внаслідок його повного згорання або випаровування, що неможливо при польоті тіла сталої маси. Слід також згадати про ефект відбиття легкого тіла зустрічним потоком [6], характерного тільки при русі малої частки змінної маси.

При моделюванні руху кулі використовують різні закони зміни розміру тіла [7, 8, 9], в тому числі лінійний, експонентний та закон В. Срезневського. Відомий також дробово-лінійний закон. Його розглядали В. О. Сапа та М. М. Сагітов [10] для лінійного аеродинамічного опору рухові.

Основні результати.

1. Постановка задачі та прийняті гіпотези.

Серед публікацій присвячених моделюванню польоту крапель, за наявності конвективних потоків, відзначимо [6, 11], але на відміну від них будемо враховувати дію не тільки вертикального але й бокового потоків газу. Швидкості потоків приймаємо сталими величинами. Наявність бокового потоку викривляє траєкторію центру мас. Вона стає плоскою кривою. Замість одного, доводиться розв'язувати систему двох нелінійних диференціальних рівнянь.

Орієнтуючись на швидкість польоту $\upsilon > 5$ м/с, приймаємо квадратичну залежність сил аеродинамічного опору R_c від швидкості

$$R_c = C_\nu S \upsilon^2. \tag{1}$$

Тут C_ν – коефіцієнт опору; S – площа поперечного перерізу сферичного тіла.

Припускаємо, що зміна радіуса r кулі, що падає, описується дробово-лінійною функцією часу t:

$$r = \frac{r_0}{1+\gamma t}, \tag{2}$$

де $r_0 = r(0)$; γ – параметр, який характеризує інтенсивність зменшення радіуса та маси однорідної кулі.

Процес падіння тіла, радіус якого зменшується за дробово-лінійним законом [2], у відповідності до розрахункової схеми на рис. 1., описуємо системою двох нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

$$\begin{array}{c} \ddot{z} + \frac{k}{r}(\dot{z}+V_3)\left[(\dot{z}+V_3)^2 + (\dot{x}-V_1)^2\right] = g, \\ \ddot{x} + \frac{k}{r}(\dot{x}-V_1)\left[(\dot{z}+V_3)^2 + (\dot{x}-V_1)^2\right] = 0, \end{array} \tag{3}$$

де $k = \frac{3}{4}\frac{C_\nu}{\rho}$ – зведений коефіцієнт аеродинамічного опору; ρ – щільність частки; V_1, V_3 – швидкості вертикального (висхідного) та бокового конвективних потоків.

Систему (3) будемо розв'язувати за початкових умов:

$$z(0) = x(0) = \dot{x}(0) = 0; \; \dot{z}(0) = \upsilon_3. \tag{4}$$

Тут υ_3 — початкова вертикальна швидкість центру мас кулі. Щоб побудувати аналітичні розв'язки поставленої задачі Коші, спростимо рівняння (3). Будемо вважати, що при слабкому горизонтальному потоці, швидкість обтікання тіла боковим потоком значно менша, ніж вертикальним, тобто $V_1 - \dot{x} << V_3 + \dot{z}$. Тоді, враховуючи (4), приймаємо:

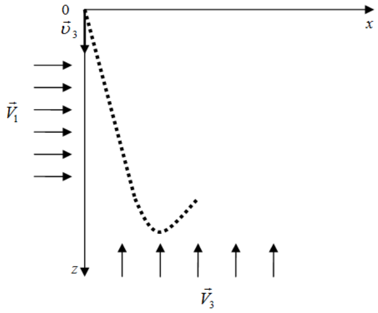

Рис. 1.: Розрахункова схема

$$\left[(\dot{z} + V_3)^2 + (\dot{x} - V_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \approx \delta(\dot{z} + V_3),$$

де $\delta = \left[1 + \left(\frac{V_1}{\upsilon_3 + V_3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

Замість системи (3) отримуємо спрощені рівняння:

$$\ddot{z} + \frac{\beta}{r}(\dot{z} + V_3)^2 = g, \;\; \ddot{x} + \frac{\beta}{r}(\dot{x} - V_1)(\dot{z} + V_3) = 0, \tag{5}$$

в яких $\beta = k\delta$.

2. Побудова розв'язку нелінійної задачі Коші. Розглянемо розв'язок першого рівняння системи (5). Враховуючи залежність (1), перетворенням

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{\gamma}{r_0} r^2 \frac{d}{dr}, \tag{6}$$

подаємо перше рівняння в (5) у вигляді

$$\frac{d\upsilon}{dr} - \beta_0 \frac{(\upsilon + V_3)^2}{r^3} = -\frac{g_0}{r^2}, \tag{7}$$

де $\dot{z} = \upsilon$; $\beta_0 = \frac{\beta r_0}{\gamma}$; $g_0 = \frac{g r_0}{\gamma}$.

Далі (7) зводимо до загального рівняння Ріккаті [12]:

$$\upsilon_r^{'} = f(r)\upsilon^2 + g(r)\upsilon + h(r), \tag{8}$$

в якому $f(r) = \frac{\beta_0}{r^3}$; $g(r) = \frac{2V_3\beta_0}{r^3}$; $h(r) = \frac{\beta_0}{r^3}V_3^2 - \frac{g_0}{r^2}$.

Підстановкою:

$$\upsilon = \exp(-\int f(r)u(r)dr), \tag{9}$$

перетворюємо (8) у лінійне диференціальне рівняння другого порядку:

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2} + \left(3r - \frac{2\beta_0 V_3}{r}\right)\frac{du}{dr} + \frac{\beta_0}{r^3}\left(\frac{\beta_0 V_3^2}{r} - g_0\right)u = 0. \tag{10}$$

Вираз (10) відноситься до рівнянь типу Бесселя та його загальним розв'язком є:

$$u(r) = \frac{1}{r\exp(0,5\beta_0 V_3 r^{-2})}[c_1 I_{2/3}(\xi) + c_2 K_{2/3}(\xi)]. \tag{11}$$

Тут $\xi = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{\beta_0 g_0}}{r^{3/2}}$; c_1, c_2 – довільні сталі; $I_{2/3}, K_{2/3}$ – відповідно модифікована функція Бесселя та функція Макдональда індексу $2/3$.

Зворотне перетворення, для знаходження розв'язку рівняння Ріккаті має вигляд:

$$\upsilon = -\frac{u_r^{'}}{uf(r)}. \tag{12}$$

Для знаходження похідних використовуємо формули [13]:

$$\frac{d}{d\xi}I_{2/3}(\xi) = I_{-1/3}(\xi) - \frac{2}{3\xi}I_{2/3}(\xi),\ \ \frac{d}{d\xi}K_{2/3}(\xi) = -K_{-1/3}(\xi) - \frac{2}{3\xi}K_{2/3}(\xi).$$

У підсумку отримуємо інтеграл першого рівняння системи (5):

$$\dot{z} = \upsilon = \sqrt{\frac{rg_0}{\beta_0}}\frac{cI_{-1/3}(\xi) - K_{-1/3}(\xi)}{cI_{2/3}(\xi) + K_{2/3}(\xi)} - V_3. \tag{13}$$

Тут $c = c_1 c_2^{-1}$; $I_{-1/3}(\xi)$, $K_{1/3}(\xi)$ – відповідно модифікована функція Бесселя та функція Макдональда індексу $\mp 1/3$.

Розв'язок (12) задовольняє останній початковій умові в (4), коли

$$c = \frac{bK_{2/3}(\xi_0) + K_{1/3}(\xi_0)}{I_{-1/3}(\xi_0) - bI_{2/3}(\xi_0)}, \tag{14}$$

де $\xi_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\beta_0 g_0}{r_0^3}}$; $b = (\upsilon_3 + V_3)\sqrt{\frac{\beta_0}{r_0 g_0}}$.

Друге рівняння системи (5), з урахуванням (11), отримує вигляд:

$$\int\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\int\frac{du}{u} + V_1.$$

Виконавши інтегрування, знаходимо його загальний розв'язок:

$$\dot{x} = c_3[u(r)]^{-1}_{V_3=0} + V_1.$$

Довільну сталу c_3 визначаємо з початкових умов (4), що, з урахуванням (12), дає:

$$\dot{x}(t) = V_1 - V_1\frac{r(cI_{2/3}(\xi_0) + K_{2/3}(\xi_0))}{r_0(cI_{2/3}(\xi) + K_{2/3}(\xi))}. \tag{15}$$

Константа c зберігає попереднє значення (14).

Визначення координат центру мас тіла $z(t)$ і $x(t)$ зводиться до обчислення квадратур:

$$z(t) = \int\limits_0^t \dot{z}(t)dt;\ x(t) = \int\limits_0^t \dot{x}(t)dt.$$

Вони не виражаються за допомогою спеціальних функцій.

Для отримання наближених розрахункових формул виділяємо головну частину, використовуючи асимптотику:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) \xrightarrow[g\to 0]{} \dot{z}_a(t) &= \tfrac{r_0}{\beta t(1+0{,}5\gamma t)+r_0/(\upsilon_3+V_3)} - V_3, \\ \dot{x}(t) \xrightarrow[g\to 0]{} \dot{x}_a(t) &= V_1 - \tfrac{V_1}{\upsilon_3+V_3}\dot{z}_a(t). \end{aligned} \qquad (16)$$

Інтеграл від $\dot{z}_a(t)$ виражається через елементарні функції:

$$\begin{aligned} S_3(t) &= \int_0^t \dot{z}_a(t) = \tfrac{r_0}{\gamma\beta a}\ln\frac{\left|t+\frac{1}{\gamma}-a\right|\left|\frac{1}{\gamma}+a\right|}{\left|t+\frac{1}{\gamma}+a\right|\left|\frac{1}{\gamma}-a\right|} - V_3 t, \\ S_1(t) &= \int_0^t \dot{x}_a(t)dt = V_1 t - \tfrac{V_1}{\upsilon_3+V_3}S_3, \end{aligned} \qquad (17)$$

де $a = \frac{1}{\gamma}\sqrt{1-\frac{2r_0\gamma}{\beta(\upsilon_3+V_3)}}$.

Інтеграли від різниці похідних

$$F_3(t) = \int_0^t [\dot{z}(t)-\dot{z}_a(t)]dt, \;\; F_1(t) = \int_0^t [\dot{x}_a(t)-\dot{x}(t)]dt$$

додатні та задовольняють нерівностям:

$$F_3(t) < t[\dot{z}(t)-\dot{z}_a(t)]; \;\; F_1(t) < t[\dot{x}_a(t)-\dot{x}(t)].$$

Значення $F_3(t)$ і $F_1(t)$ при малих t можна наближено розраховувати за формулами методу трапеції:

$$F_3(t) \approx \frac{1}{2}t[\dot{z}(t)-\dot{z}_a(t)]; \;\; F_1(t) \approx \frac{1}{2}t[\dot{x}_a(t)-\dot{x}(t)]. \qquad (18)$$

Враховуючи викладене, аналітичний розрахунок координат центру мас на траєкторії польоту зводимо до формул:

$$z(t) \approx S_3(t) + F_3(t); \;\; x(t) \approx S_1(t) - F_1(t), \qquad (19)$$

що зручно проводити за допомогою спеціальних функцій.

3. Результати розрахунку та їх аналіз. Проведемо розрахунки для сферичної краплі вогнегасної рідини при $r_0 = 5\cdot 10^{-4}$м; $\gamma = 3$с$^{-1}$; $k = 3\cdot 10^{-5}$; $\upsilon_3 = 100$м/с. Результати обчислень координат центру мас на траєкторії в різні моменти часу при швидкостях газових потоків $V_1 = 4$м/с; $V_3 = 10$м/с представлено в табл.

Таблиця. Розраховані двома способами значення проекцій швидкості та координат центру мас тіла на траєкторії польоту

t, c	$\dot{z}, m/s$	$\dot{x}, m/s$	z, m	x, m
0,05	$\frac{71{,}55}{71{,}55}$	$\frac{1{,}05}{1{,}05}$	$\frac{4{,}23}{4{,}23}$	$\frac{0{,}03}{0{,}04}$
0,10	$\frac{53{,}12}{53{,}12}$	$\frac{1{,}73}{1{,}73}$	$\frac{7{,}32}{7{,}32}$	$\frac{0{,}10}{0{,}11}$
0,20	$\frac{31{,}40}{31{,}40}$	$\frac{2{,}54}{2{,}54}$	$\frac{11{,}43}{11{,}41}$	$\frac{0{,}32}{0{,}35}$
0,30	$\frac{19{,}56}{19{,}55}$	$\frac{2{,}99}{2{,}99}$	$\frac{13{,}92}{13{,}88}$	$\frac{0{,}60}{0{,}65}$
0,40	$\frac{12{,}41}{12{,}41}$	$\frac{3{,}26}{3{,}26}$	$\frac{15{,}49}{15{,}42}$	$\frac{0{,}91}{0{,}98}$
0,50	$\frac{7{,}78}{7{,}78}$	$\frac{3{,}44}{3{,}44}$	$\frac{16{,}48}{16{,}39}$	$\frac{1{,}24}{1{,}33}$
0,60	$\frac{4{,}64}{4{,}63}$	$\frac{3{,}57}{3{,}57}$	$\frac{17{,}10}{16{,}97}$	$\frac{1{,}60}{1{,}70}$
0,70	$\frac{2{,}41}{2{,}41}$	$\frac{3{,}66}{3{,}66}$	$\frac{17{,}44}{17{,}28}$	$\frac{1{,}96}{2{,}08}$
0,80	$\frac{0{,}79}{0{,}78}$	$\frac{3{,}73}{3{,}73}$	$\frac{17{,}60}{17{,}39}$	$\frac{2{,}33}{2{,}47}$

На рис. 2 показано як змінюється форма траєкторії центру мас в залежності від її початкової швидкості вилітання. Криві 1, 2, 3, 4 отримано відповідно при $\upsilon =$ $= 60, 80, 100, 120$ м/с і попередніх значеннях інших параметрів. Зі зростанням υ_3 збільшується дальність польоту тіла, але ця залежність має нелінійний характер.

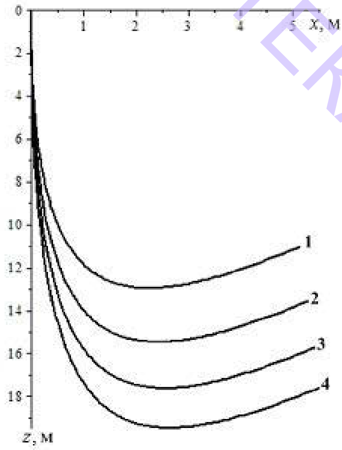

Рис. 2.: Траєкторії центру мас при різних швидкостях вилітання

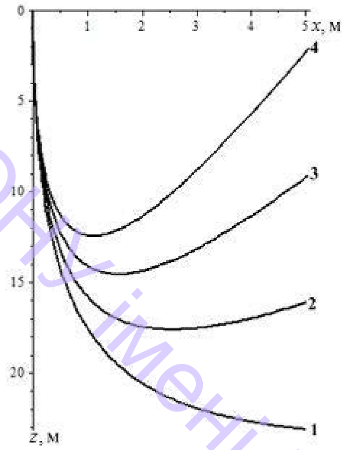

Рис. 3.: Траєкторії центру мас при різних швидкостях зустрічного потоку

Настає такий стан, коли збільшення швидкості центру мас стає недоцільним, тому що воно вже не дає суттєвого приросту дальності польоту.

На рис. 3 нанесено траєкторії, розраховані при $\upsilon_3 = 100$ м/с та різних швидкостях зустрічного потоку газу. Криві 1, 2, 3, 4 отримано відповідно при $V_3 = 5; 10; 15; 20$м/с. Збільшення швидкості висхідного зустрічного потоку газу значно зменшує дальність польоту тіла. На певному інтервалі починає проявлятися ефект відбиття тіла газовим потоком, внаслідок чого тіло, яке падає, захоплене висхідним потоком, міняє напрям руху.

Висновки. Таким чином, проведене дослідження свідчить, що розв'язок спрощених рівнянь, при квазівертикальному падінні тіла з урахуванням конвективних потоків, можна виразити за допомогою функцій Бесселя в аналітичній формі. Отримані наближені формули придатні для розрахунку параметрів траєкторії квазівертикального падіння сферичного тіла, яке зменшує радіус за дробово-лінійним законом, і розрахунок може проводитись за допомогою спеціальних функцій.

1. **Гантмахер Ф. Р.** Теория полёта неуправляемых ракет [текст] / Ф. Р. Гантмахер, Л. М. Левин. – М.: Физматгиз, 1959. – 360 с.
2. **Циолковский К. Э.** Собрание сочинений. Т. II [текст] / Циолковский К. Э. – М.: АН СССР, 1954. – 455 с.
3. **Балістика крапель, які випаровуються при польоті** [текст] / С. І. Кучеренко, В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, Л. М. Тіщенко. – Харків.: ХНТУСГ, 2007. – 304 с.
4. **Мещерский И. В.** Работы по механике тел переменной массы [текст] / Мещерский И. В. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с.
5. **Жуковский Н. Е.** Сочинения. Т. III [текст] / Жуковский Н. Е. – М.: ОНТИ–НКТП, 1936. – 380 с.
6. **Olshanskii V. P.** A peculiar feature the vertical motion of a particle with variable mass in upward flow [text] / V. P. Ol'shanskii, S. V. Ol'shanskii // International Applied Mechanics. – 2012. – Vol. 48. – № 2. – P. 188–194.
7. **Ольшанский В. П.** Замкнутые решения уравнения Мещерского при различных законах уменьшения радиуса летящего шара [текст] / В. П. Ольшанский, К. В. Аврамов, С. В. Ольшанский // Механика твёрдого тела. – 2009. – № 39. – P. 207–214.
8. **Ольшанский В. П.** О вертикальном движении вверх сферического тела возрастающей массы [текст] / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Изв. РАН. МТТ. – 2009. – № 5. – С. 18–24.
9. **Ol'shanskii V. P.** On the maximum of the vertical fall velocity of a homogeneous sphere whose radius changes by the exponential law [text] / V. P. Ol'shanskii, S. V. Ol'shanskii // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2009. – V. 82. – № 4. – P. 732–736.
10. **Сагитов М. Н.** Некоторые случаи движения вращающегося шара переменной массы, ось которого горизонтальна [текст] / Сагитов М. Н. // Изв. АН Казахской ССР. Серия физ.-мат. наук. Математика и механика. – 1963. – № 15. – С. 88–99.
11. **Ольшанский В. П.** Эффект отражения мелкодисперсных испаряющихся капель встречным потоком газа [текст] / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: Динамика и прочность машин. – 2006. – № 21. – С. 143–148.
12. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [текст] / Камке Э. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
13. **Абрамовиц А.** Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) [текст] / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
(скорочений варіант)

Журнал "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка" має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті та короткі повідомлення, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень і огляди з актуальних проблем за тематикою видання.

Журнал структуровано за такими напрямами:
1. Математика.
2. Механіка.
3. Короткі повідомлення.
4. Хроніка (ювілеї, знаменні дати та події тощо).

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Авторський оригінал складається із двох друкованих примірників, підписаних авторами, та електронної версії на будь-якому електронному носії.

Електронна версія містить анкетні дані авторів: прізвище, ім'я, по-батькові, місце роботи, адресу для листування та телефон.

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LaTeX у відповідності до вимог, які викладено на сайті журналу www.visnyk_math.onu.edu.ua або які можна отримати в редакційній колегії журналу. Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 20 сторінок, а короткого повідомлення — 5–6 сторінок.

Структура статті:

— УДК;

— Mathematical Subject Classification (2010)

— назва статті;

— список авторів;

— анотації українською, російською та англійською мовами, які містять назву, список авторів, резюме та список ключових слів відповідною мовою;

— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України "Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України" від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером в квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформляється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 "Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання" та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008).

Усі надіслані статті проходять рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка".

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, в тому числі у співавторстві.

Статті слід подавати до редакційної колегії журналу або надсилати за адресою:

Редакційна колегія журналу
"Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка"
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2,
м. Одеса, 65082

Текст статті можна надіслати електронною поштою за адресою:

visnyk_math@onu.edu.ua

Рукописи статей та електронні носії авторам не повертаються.

Електронну версію журналу можна знайти на сайті:

www.visnyk_math.onu.edu.ua

Українською російською та англійською мовами

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації:
серія КВ № 11456-329Р від 07.07.2006 р.

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова
Протокол № 3 від 27 листопада 2012 р.

Адреса редколегії:
65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Адреса редколегії серії:
65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Тираж 100 прим. Зам. № 926.

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-24-26, 33-07-17, 37-14-25
www.astroprint.odessa.ua; www.fotoalbom-odessa.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

ISSN 2304–1579. Вісник ОНУ ім. І. І. Мечникова. Математика і механіка. 2012. Т. 17. Вип. 4(16). 1–130.