Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

А. Е. Кононюк

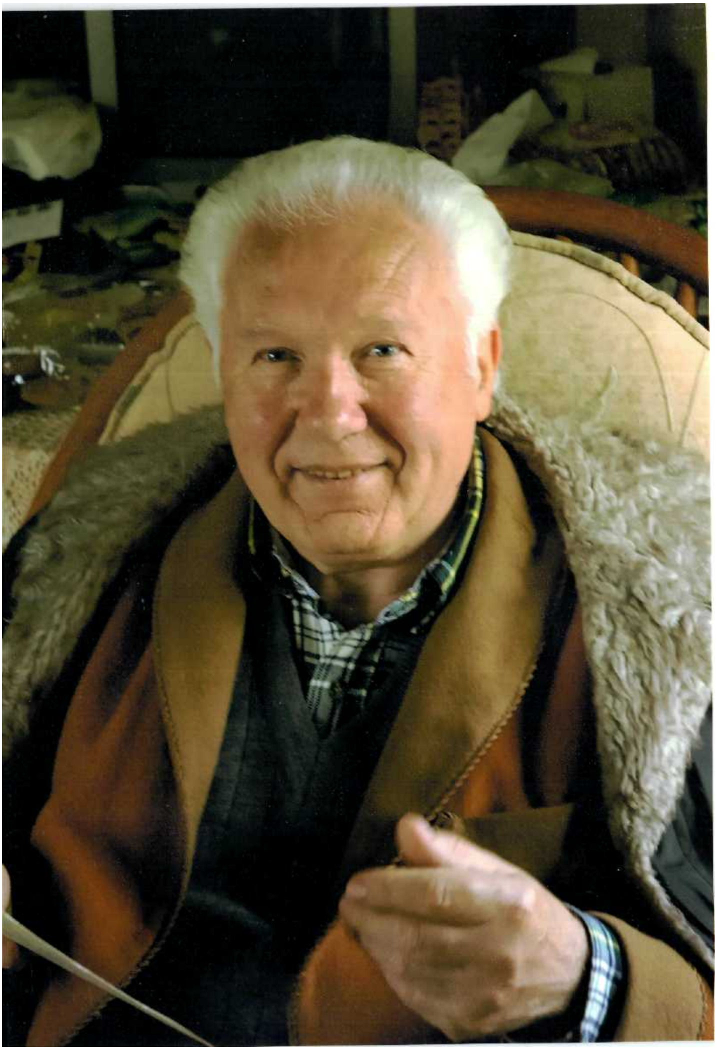
ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ МАТЕМАТИКА

Книга 4

Алгебры и дифференциалы

Часть 3

Киев
«Освіта України»
2015



Кононюк Анатолий Ефимович

Из переписки с А.П Алпатовым – ученым в области ракетостроения.

Уважаемый Анатолий Ефимович!
Я пересылаю Ваши работы своим коллегам.
Если можно, удовлетворите мое любопытство.
Вы используете энциклопедический подход к изложению материала, но в своем собственном формате, я имею ввиду, что материал изложен, с одной стороны, как образовательный, с другой - как монографический.
Вот вопросы.
Какую цель Вы преследуете?
Сколько лет Вы выполняете эту циклопическую работу?
Есть ли у Вас команда, которая Вам помогает ?
Вопросы не обязательны для ответа.

С огромным уважением к Вам и Вашему труду, А.Алпатов
16.02.2015

Уважаемый Анатолий Петрович!

Чтобы дать содержательные ответы на Ваши вопросы, мне необходимо ознакомить Вас с некоторыми «вехами» моего длительного жизненного пути (я родился в 1936г. в г.Киеве).

Свою интеллектуальную трудовую деятельность я начинал с работы конструктором (1960 г.). На этом поприще я проработал 15 лет (из них 10 лет – в должности начальника конструкторского отдела). Работая конструктором, я начал приобщаться к «техническому эпистолярному жанру», наибольшим достижением которого является «Справочник конструктора оборудования пищевых производств», опубликованный в 1981г. издательством «Техніка», г. Киев.

В 1975 г. я перешел на преподавательскую работу в Киевский Политехнический институт (который я и заканчивал, приобретя проффесию инженера-механика) на кафедру технической кибернетики. На преподавательской работе я проработал 10 лет, а, затем, 5 лет занимался “чистой” научной деятельностью на этой же кафедре. Мои научные интересы были тесно связаны с конструкторской работой, а именно: в науке я занимался вопросами анализа и синтеза систем автоматизированного проектирования в машиностроении. Результатами этой деятельности стали: написание кандидатской и докторской диссертаций, а также написание двух книг – «Справочник по САПР» (1988 г.) и «Автоматизация проектирования ГПС (на базе промышленных роботов)» (1990 г.).

В 1990 г. я перешел на работу в НПО «Файл» (зам. директора по науке), где продолжал заниматься разработкой САПР для различных отраслей машинно- и приборостроения. Но, как говорят – «недолго музыка играла», и, в связи с отсутствием заказов, НПО «Файл» приказало долго жить, а я досрочно вынужден был уйти на пенсию. Это был 1995 г. С тех пор я нигде официально не работал.

Пока я был сравнительно физически крепок (до 70 лет), то активно занимался различными видами физической деятельности, но так как после 70 лет активный физический труд стал мне «не по мышцам», то я решил возвратиться к умственному труду, который был для меня более привлекательным (умственный потенциал у меня не только сохранился, но и, как показала дальнейшая работа на этом направлении, окреп, помогая мне получать определенные результаты в области совершенствования высшего образования и развития науки).

Возвратившись в образовательно-научную деятельность (2006 г.) я долго думал с чего начать. В среде ученых исповедуется постулат: «Если хочешь досконально (глубоко) усвоить (освоить) определенную научную дисциплину, то начни писать по этой дисциплине монографический труд». У меня уже был опыт написания монографий и я решил им воспользоваться. На ум пришло исповедуемое некоторым сообществом ученых выражение: « в науке столько науки, сколько в ней математики», и я решил проверить себя в написании учебного пособия по Высшей математике. С 2006 г. по 2008 г. работал над двухтомным учебным пособием под названием «Вища математика», которому Министерство образования и науки Украины выдало «гриф» учебного пособия. В 2009 году мой труд был напечатан издательством КНТ (г.Киев).

После этого я решил не писать «чистые» методические учебные пособия и стал работать над созданием учебно-научного методолгического обеспечения науки и высшего образования , что привело, как Вы правильно заметили, к созданию «...с одной стороны, как образовательных, с другой - как монографических» работ. Дело в том, что я заметил, что учебные пособия читают в основном студенты, а ученые их не читают (мол, чему может научить учебное пособие состоявшегося ученого), а научные монографии читают в основном ученые, и, то, как правило хорошо подготовленные ученые, а студенты научные монографии не читают из-за их сложности. Вот я и взял на себя смелость и огромный труд создать такой формат изложения, который (я назвал его: «научно-учебное методическое обеспечение» студентов (аспирантов, докторантов) и состоявшихся ученых) привлекал бы и начинающих ученых (прежде всего будущих магистров) и маститых ученых, особенно тех, которые руководят аспирантами, докторантами и другими группами ученых. Такова предыстория формата изложения материала, в ней же раскрыта и цель изложения материала в предлагаемом Вам (и другим читателям) виде.

Если говорить о цели моей столь бурной умственной деятельности под конец жизни, то я отвечу словами героя одного фильма (несколько их перефразируя): «Мне стало за Державу обидно с таким высшим образованием и наукой». Первое, за что я серьезно взялся по указанным проблемам, так это за разработку «Концепции совершенствования высшего образования» (2008 г.). Данная концепция была окончательно сформирована в 2010 г. и издана издательством «Освіта України» в 2011 г. Она полностью согласуется с взглядами специалистов Всемирного банка, занимающихся вопросами совершенствования высшего образования на основании создания университетов мирового класса, а так же, с программой Всемирного банка «Построение общества знания в области третичного образования» (вопросами третичного образования Всемирный банк занимается с 1963 г.). Результатом реализации моей Концепции была разработка и создание Международного Университета подготовки Магистров (МУМ) - университета мирового класса. Мне удалось разработать идеологическое, методологическое и организационное обеспечения указанного университета. Были подготовлены все необходимые документы для регистрации такого университета (2012 г.), но преодолеть бюрократическую машину по регистрации и открытии Международного Университета Магистров мне не удалось.

Но я не опустил руки и начал работать над новой концепцией – «Концепция парадигмы развития науки», разработку которой я окончательно закончил в 2014. Основой данной концепции является «Открытая развивающаяся панмедийная систем наук». Разработана структурная схем данной системы и я осуществляю ее наполнение научно-учебными методическими работами.

Что касается команды, то она была во времена работы в КПИ и в НПО «Файл». Причем команда очень профессиональная и результативная. Мы работали над создание мощной общемашиностроительной САПР. Больших результатов мы достигли в создании базовых обеспечений САПР: методического, информационного, математического, лингвистического, программного. Особенно сильная группа была в области разработки системы трехмерной графики. Наши результаты в области трехмерной графики (особенно в анализе невидимых линий, выполнении достоверных разрезов и сечений и др.) были конкурентоспособны на мировом уровне (в некоторых вопросах мы были «впереди планеты (научной) всей». Но развал СССР угробил все, в том числе, и науку. НПП «Файл» лопнуло, а я вынужден был уйти на пенсию. Многие ведущие специалисты моей команды выехали заграницу (США, Канада) и я остался, в научном плане, одинок. Но это, как Вы видите, меня не остановило в моем увлечении наукой, и я с еще большим «остервененинем» в нее окунулся. Но работать без команды очень сложно и тяжело. Даже обсудить посещающие мысли не с кем, кроме, как с самим «любимым». Как Вы, наверное, заметили, что рецензентом моих работ является проф. Печурин Н.К. Он очень потенциально сильная научная личность, но, кроме как на рецензирование, он не соглашается принимать участие в предложенной мной «научной гонке». Поэтому я готов войти в состав научной команды, которая исповедует взаимоприемлемые подходы развития науки.

Вот такие мои обширные ответы на Ваши вопросы.

Мои интересы в науке, как Вы видите из части моих работ, полностью совпадают с Вашими. Так почему бы нам не соединить наши научные усилия и построить азы будущего в науке. Ведь, по моему (и не только моему) убеждению, современная наука пребывает, в лучшем случае, в состоянии застоя. Вы только обратите внимание, за какие научные работы последнего десятилетия присуждают Нобелевские премии. Так, например, по экономике, с интервалом в несколько лет, присудили Нобелевские премии, в переводе на общедоступный язык, за использование математического аппарата теории игр в экономике. Но, ведь, согласно теории игр, если вы принимаете участие в игре и не ошиблись или вас не «надули», то вы не в состоянии ни выиграть, ни проиграть. Тогда в чем смысл использовать такую науку в экономике? Поэтому я предлагаю стать Данками (как Вы помните, есть такой персонаж в рассказах Горького «Сказки старухи Изергиль) в науке и обсудить начальные пути движения в науку будущего (ее структуру я постарался заложить в книге «Концепция парадигмы развития науки»).

С важением, А Кононюк. 22.02.2015 kononyuka36@mail.ru

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К213

Рецензенты:

В. В. Довгай — к-т физ.-мат. наук, доц. (Национальный технический университет «КПІ»);

В. В. Гавриленко — д-р физ.-мат. наук, проф.,

О. П. Будя — к-т техн. наук, доц. (Киевский университет экономики, туризма и права);

Н. К. Печурин — д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

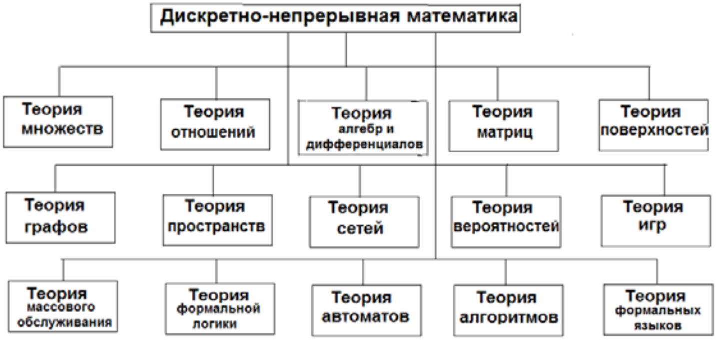
Кононюк А. Е.
К213 Дискретно-непрерывная математика. (Алгебры и дифференциалы. К.4,Ч.3 (в 7 частях)). — в 15-и кн. Кн 4,— К.: Освіта України. 2015. 596 с.

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-5 (книга 4)

Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, иссполъзуемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.
В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории вероятностей и массового обслуживания, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единную методолгически взамосвязанную математическую систему «Дискретно-непрерывная математика».
Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов и просто ученых и специалистов всех специальностей.

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7

Структура
открытой развивающейся панмедийной системы математических наук (дисциплин)
"Дискретно-непрерывная математика"



Оглавление

Предисловие

Совершенствование системы образования на современном этапе направлено на обеспечение ее качества, в соответствии с достижениями в области науки, культуры и социальной практики. Государство осуществляет перманентный мониторинг качества образования, обеспечивает его прозрачность, оказывает содействие развитию общественного контроля.

Одним из путей улучшения качества учебно-воспитательного процесса в ВУЗ есть введения модульно-рейтинговой системы обучения, которая есть неотъемлемой составной частью всего учебно-воспитательного процесса и диагностики результатов обучения. Модульно-рейтинговая система оказывает содействие созданию нормальных условий и обстоятельств для получения определенного уровня квалификации.

В отличие от настоящей дидактической системы оценивания знаний модульно-рейтинговая система сориентирована на стимулирование познавательной деятельности студентов, за счет сокращения аудиторных занятий и увеличения количества часов на самостоятельную работу и индивидуальную работу под руководством преподавателя. Студент в процессе обучения развивает в себе навыки самостоятельно оценивать свой уровень подготовки, выбирать и определять уровень усвоения знаний.

На основании общих положений в данном учебном пособии разработаны конкретные формы модульной системы организации обучения по дисциплине „Высшая математика" и учтена специфика и особенности учебного процесса. Рекомендованное количество модулей , изучаемых в семестре, составляет 2-4 модуля.

Содержание учебного пособия отвечает программе общего курса

Высшей математики для бакалавров и магистров технических и экономических высших учебных заведений и рассчитано на 600-650 часов учебного процесса

Модуль представляет собой логически завершенный раздел учебного материала. Материал учебного пособия разделен на двенадцать модулей. Каждый модуль состоит из нескольких микромодулей. Микромодуль содержит :

1) теоретическую часть,

2) практическую часть,
3) тестовые задачи.

В теоретической части изложен в полном объеме материал, овладение которым позволяет усвоить указанную в нем тему.

Практическая часть содержит примеры решения типовых задач, которые иллюстрируют теоретический материал.

В конце микромодуля помещены индивидуальные тестовые задачи, которые служат для контроля усвоенного студентами материала данного раздела.

Учитывая разное количество часов, которые отводятся по плану для изучения высшей математики студентам разных специальностей. преподаватель (лектор) может корригировать содержание модулей, количество тестовых задач, которые студент должен выполнить на протяжении срока, отведенного учебным планом.

Модуль 1

ВЕЛИЧИНА, ФУНКЦИЯ, ПРЕДЕЛ

Микромодуль 1

Величина и функция

1.1. Величина

Понятие величины. Понятие величины настолько широко и всеобъемлюще, что ему трудно дать точное определение. Массы, давления, работы, заряды, длины и объемы, целые и дробные числа— все это примеры величин. На первой стадии *величиной можно считать то, что, выраженное в определенных единицах* (например, масса—в граммах или тоннах и т. п.), *характеризуется своим численным значением.* Так, площадь круга является величиной, поскольку она, выраженная, например, в квадратных сантиметрах, полностью характеризуется своим численным значением (5, π и т. п.); сам круг, конечно, не является величиной, так как для него характерна определенная *форма,* которая не выражается каким-либо числом.

Размерность величины. *Размерностью величины называется та единица, через которую эта величина выражена.* Так, размерностью массы обычно служит грамм или килограмм; размерностью площади — квадратный сантиметр или квадратный метр и т. п. Размерность обозначается квадратными скобками; например, если *М*—масса, S—площадь, то в международной системе единиц [М] = кг (т. е. килограмм), [S] = м^2 (т. е. квадратный метр)-. Обычно размерности некоторых величин принимаются за основные, а размерности остальных величин выражаются через эти основные. Так, в механике в международной системе единиц размерности длины *(м),* массы (кг) и времени (сек) считаются основными; через них выражаются, например, размерности скорости *(м/сек)* или силы *(кг-м/сек^2).*

Складывать или вычитать можно только величины одинаковой размерности, причем размерность суммы такая же, как размерность слагаемых. Множить или делить друг на друга можно ве-

личины любой размерности; при умножении {или делении) величин их размерности тоже множатся {или соответственно делятся).

Часто рассматриваются величины *безразмерные* («отвлеченные»). Так, *отношение двух величин одинаковой размерности является безразмерным.* Численное значение величины, которое является отношением этой величины к ее выбранной единице, также безразмерно; например, численным значением массы в 5 *кг* служит «безразмерная масса» 5. Безразмерную массу можно получить также, взяв отношение изучаемой массы к некоторой *характерной* в рассматриваемом процессе массе (хорошо известной и принимаемой в данном процессе за эталон для сравнения). Подобным образом вводятся безразмерные длина, время и т. п.

В курсе математики величины обычно считаются безразмерными, Безразмерная величина полностью характеризуется своим численным значением, ее «единицей» служит число **1.**

Постоянные и переменные величины. *Величина, участвующая в некотором рассмотрении, может либо принимать различные значения, либо принимать одно определенное значение; в первом случае она называется переменной величиной, а во втором — постоянной (константой).* Так, при рассмотрении воды в бассейне давление в различных точках есть величина переменная, оно зависит от места замера, тогда как плотность в разных точках можно с достаточной точностью считать величиной постоянной. Другой пример: при рассмотрении процесса сжатия определенной порции газа при постоянной температуре давление и объем будут величинами переменными, а масса и температура — постоянными. Впрочем, надо иметь в виду, что в любом реальном процессе и эти две последние величины несколько меняются, и только если это изменение незначительно и несущественно для остального, можно условно, схематизируя процесс, принять их за постоянные. И в других случаях постоянство тех или иных величин обычно является лишь условным; об этом надо время от времени вспоминать, так как если считать постоянной величину, изменение которой невелико, но существенно для рассмотрения, то можно прийти к ошибочным выводам

Величина, постоянная в одном рассмотрении, может в другом аналогичном (похожем) рассмотрении принимать другое значение или даже быть переменной. Такие постоянные величины называются параметрами данного рассмотрения; они являются его характеристиками. Так, в процессе изотермического сжатия газа масса и температура служат параметрами. При выборе электрической лампочки ее параметрами служат сопротивление, напряжение в сети, на которое она рассчитана, и потребляемая мощность. Конечно, здесь имеются и другие параметры, которые иногда приходится принимать во внимание (например, габариты), но обычно именно эти считаются основными; и в других случаях важно уметь выделить из всевозможных параметров, характеризующих тот или иной объект или процесс, основные, наиболее важные параметры.

Действительные числа. Изображение действительных чисел точками числовой оси

Одним из основных понятий математики является число. Понятие числа возникло в древности и на протяжении длительного времени подвергалось расширению и обобщению.

Числа целые и дробные, как положительные, так и отрицательные, вместе с числом нуль называются *рациональными числами.* Каждое рациональное

число может быть представлено в виде отношения двух целых чисел p и q, например 5/7, 1,25=5/4

Рациональные числа могут быть представлены в виде конечных или бесконечных периодических, дробей. Числа, которые представляются бесконечными, но непериодическими десятичными дробями, называются *иррациональными числами:* таковы числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 5; $\sqrt{2}$ и т. д.

Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел называется множеством *действительных* (или *вещественных) чисел.* Действительные числа упорядочены по величине, т.е. для каждой пары действительных чисел x и y имеет место одно, и только одно, их соотношение

$x < y$, $x = y$, $x > y$.

Действительные числа можно изображать точками числовой оси.

Числовой осью называется бесконечная прямая, на которой выбраны:

1) некоторая точка O, называемая началом отсчета,

2) положительное направление, которое указывается стрелкой,

3) масштаб для измерения длин.

Чаще всего мы будем располагать числовую ось горизонтально и положительное направление выбирать слева направо. Если число x_1 положительно, то его изображают точкой M_1, лежащей справа от точки O на расстоянии $OM_1 = x_1$; если число x_2 отрицательно, то его изображают точкой M_2, лежащей слева от точки O на расстоянии $OM_2 = -x_2$. Точка изображает число нуль.

Очевидно, что каждое действительное число изображается определенной точкой числовой оси. Два различных действительных числа изображаются различными точками числовой оси.

Справедливо также утверждение: каждая точка числовой оси является изображением только одного действительного числа (рационального или иррационального).

Таким образом, между всеми действительными числами и всеми точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие: каждому числу соответствует единственная изображающая его точка и, наоборот, каждой точке соответствует единственное изображаемое ею число. Это дает возможность во многих рассуждениях в некотором смысле равнозначно употреблять понятие «число x и понятие «точка x». Последним обстоятельством мы будем широко пользоваться в курсе.

Укажем без доказательства следующее важное свойство совокупности действительных чисел: *между двумя произвольными действительными числами найдутся как рациональные, так и иррациональные числа.* В терминах геометрических это предложение формулируется так: *между двумя произвольными точками числовой оси найдутся как рациональные, так и иррациональные точки.*

В заключение отметим следующую теорему, представляющую в известном смысле «мостик между теорией и практикой».

Теорема. *Каждое иррациональное число а можно с любой степенью точности выразить с помощью рациональных чисел.*

В самом деле, пусть иррациональное число $a > 0$ и пусть требуется вычислить α с точностью до $1/n$(например, до 1/10, до 1/100 и т. д.).

Каково бы ни было α, оно заключается между двумя целыми числами N и $N+1$. Разделим отрезок между N и $N+1$ на n частей, тогда α окажется между рациональными числами N+m/n и N+$(m+1)/n$

Так как разность этих чисел равна $1/n$ то, следовательно, каждое из них выражает a с заданной степенью точности: первое с недостатком, а второе — с избытком.

Пример. Иррациональное число $\sqrt{2}$ выражается рациональными числами 1,4 и 1,5—с точностью до 1/10, 1,41 и 1,42 — с точностью до 1/100, 1,414 и 1,415—с точностью до 1/1000 и т. д.

Абсолютная величина действительного числа

Введем нужное для дальнейшего понятие абсолютной величины действительного числа.

Определение. *Абсолютной величиной* (или *модулем)* действительного числа x (обозначается $|x|$) называется неотрицательное действительное число, удовлетворяющее условиям $|x|=x$, если $x\geq 0$; $|x| = -x$, если $x < 0$.

Примеры: $|2|=2$, $|-5|=5$. $|0|=0$

Из определения следует, что для любого x справедливо соотношение $x\leq|x|$

Рассмотрим некоторые свойства абсолютных величин.

1. *Абсолютная величина алгебраической суммы нескольких действительных чисел не больше суммы абсолютных величин слагаемых*

$$|x+y|\leq=|x|+|y|$$

Доказательство. Пусть $x+y\geq 0$, тогда $|x\ y|=x+y\leq|x|+|y|$ (так как $x\leq|x|$ и $y\leq|y|$). Пусть $x+y<0$, тогда $|x+y|= -(x+y)=(-x)+(-y)\leq|x|+|y|$, ч.т.д.

Проведенное доказательство легко распространяется на любое число слагаемых.

Примеры:

$$|-2 + 3| < |-2| + | 3 | = 2+3 = 5 \text{ или } 1 < 5;$$

$$| -3-5|=|-3|+|-5|=3+5=8 \text{ или } 8=8$$

2. *Абсолютная величина разности не меньше разности абсолютных величин уменьшаемого и вычитаемого;*

$$|x-y| \geq|x| - |y|, \quad |x|>|y|.$$

Доказательство. Положим $x—y=z$, тогда $x=y+z$ и по доказанному

$| x | = |y +z | < |y | +|z | = |y | +|x —y|$, откуда $|x|-|y|\leq|x-y|$ ч.т .д.

3. *Абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей*

$$|xyz|=|x||y||z|$$

1.2. Приближенные значения величины

Понятие приближенного значения. Обычно говорить об абсолютно точном численном значении физической величины невозможно. Например, мы никогда не можем знать длину какого-либо реального тела абсолютно точно. Это происходит не только из-за несовершенства измерения, но также и из-за несовершенства формы самого тела, в результате чего невозможно указать точно, от какой точки и до какой надо производить отсчет (а если вспомнить, что тело состоит из молекул, которые все время движутся, то положение еще осложнится). Более того, в громадном большинстве случаев указание длины с чрезмерно большой степенью точности нецелесообразно, даже если оно возможно при современном уровне измерительной техники. Например, при обмере или проектировании жилого дома было бы нелепо указывать размеры с точностью до сотых долей миллиметра. То же можно сказать о массах, давлениях и т. п. Поэтому численные значения почти всех величин в физике и технике (например, всех непрерывных величин) задаются приближенно.

Математические действия над приближенными значениями величин называются приближенными вычисления

Выбор степени точности, с которой производится изготовление какой-либо детали, или измерение, или вычисление,—это чрезвычайно ответственное дело. При этом выборе приходится руководствоваться многими соображениями — потребностями, техническими возможностями, экономичностью и т. п.

Погрешности.Пусть точное значение какой-либо величины равной А, а приближенное равно *а. Тогда погрешность,* т. е. *отклонение точного значения от приближенного,* равна *А — а;* она может получиться как положительной, так и отрицательной. Эта погрешность обычно бывает точно неизвестна, так как неизвестно значение *А*. Поэтому обычно задаются *предельные погрешности* α_1 и α_2, между которыми содержится истинная погрешность:

$$\alpha_1 < A - a < \alpha_2, \text{ т. е. } a + \alpha_1 < A < a + \alpha_2.$$

В этом случае говорят, что задана *двусторонняя оценка* величины *А*. Таким образом, например, формула для длины $L=9_{-0,1}^{+0,2}$ *мм* означает, что истинное значение длины заключено между

9 — 0,1 = 8,9 *мм* и 9 + 0,2=9,2 *мм*.

Так как задавать две предельные погрешности не всегда удобно, то часто задастся *предельная абсолютная погрешность* α, т. е. величина, большая абсолютного значения погрешности:

$$|A - a| < \alpha, \text{ т. е. } -\alpha < A - a < \alpha \text{ или } a - \alpha < A < a + \alpha$$

Пусть, например, при измерении некоторой длины l получилось 137 *см,* причем мы можем ручаться за точность до 0,5 *см.* Это значит, что в *данном* случае α = 0,5 *см* и $136,5 < l < 137,5$ *см;* можно написать $l = (137 \pm 0,5)$ *см.*

Предельная абсолютная погрешность не полностью характеризует точность измерения: например, если она равна 1 *см,* то еще неясно, грубая это ошибка или нет, так как важно, что измеряли—длину кита или длину жука. Качество измерения больше характеризуется *предельной относительной погрешностью* δ, которая вычисляется по формуле

$$\delta = \alpha / a$$

Предельная относительная погрешность безразмерна и часто выражается в процентах, причем для упрощения ее значение обычно округляется в сторону увеличения. Скажем, в приведенном примере с вычислением длины l*предельная* относительная погрешность в процентах равна 0,5×100/137=0,36 ... < 0,4, т. е. можно сказать, что измерение произведено с предельной относительной погрешностью в 0,4% (или даже просто в 0,5%).

Дли многих прикидочных расчетов достаточна точность (т. е. предельная относительная погрешность) порядка процентов и даже десятков процентов.

Запись приближенных чисел. Запись *приближенных чисел,* т. е. приближенных численных значений величин, производится так, чтобы сам вид записи говорил о степени их точности. Обычно их записывают так, что *все цифры верны, кроме последней, сомнительной, в которой допускается ошибка не больше чем на единицу;* впрочем, если ошибка чуть больше, то особенно не придираются. Например, выражение для сопротивления R = 1,35 *Ω,* означает, что $\alpha = 0.01\Omega$, *т.* е. на самом деле 1,34 < R < 1,36 Ω. Между формулами R = 1,35Ω и *R*= 1,3500Ω огромная разница, так как эти записи говорят, что первое вычисление производилось с точностью до 0,01, а второе—до 0,0001 *Ω***.** (Иногда говорят, что во втором случае точность на два *порядка* выше, или что погрешность на два порядка меньше, чем в первом.) Если при вычислении получилось значение *R*= 2,377 Ω, но уже третья цифра сомнительна или четвертая нас не интересует, то надо произвести округление, т.е. написать R=2,38 Ω

Число знаков после запятой говорит о предельной абсолютной погрешности; о предельной же относительной погрешности говорит общее *число верных знаков,* к которым не относят передние пули: например, числа 2,57, 1,7100, 0,015, 0,00210 имеют соответственно 3, 5, 2, 3 верных знаков. Чем больше верных знаков в числе, тем меньше предельная относительная погрешность.

Следует избегать записей вида М = 1800 *г*, так как они зачастую не показывают точности измерения (или вычисления). Если вторая цифра сомнительна, следует писать $M=1{,}8\cdot10^3$ *г*, а если четвертая — то $1{,}800\cdot10^3$ *г.* Строго говоря, запись М=1800 *г* должна означать, что предельная абсолютная погрешность равна 1 *г.* Это правило не всегда соблюдается, поэтому могут возникнуть недоразумения.

Сложение и вычитание приближенных чисел. Рассмотрим пример. Пусть бутылка и пробка взвешивались раздельно, причем массы их оказались соответственно равными *М* = 323,1 *г* и *т* =5,722 *г* (пробка взвешивалась на более точных весах). Для нахождения суммарного веса бутылки с пробкой было бы неправильно считать так

$$M = 323{,}1$$

$$m = \quad 5{,}722$$

$$M+m=328{,}822\,г$$

Действительно, вес бутылки определен с точностью до 0,1*г* и потому сотые и тысячные в ответе являются не только лишними цифрами, но даже вредными: форма ответа такова, как будто *M+m определено* с точностью до 0,001, что неверно. Поэтому при сложении *m* следует округлить до 0,1, т. е. проводить вычисления так:

$$M = 323{,}1$$

$$m = \quad 5{,}7$$

$$M+m=328{,}8\ г$$

этот же ответ получится, если округлить результат, подсчитанный выше. Таким образом, в сумме берется столько знаков после запятой, сколько их имеется у слагаемого с наибольшей абсолютной погрешностью.

Если слагаемых много, то ошибки в них могут складываться и дать большую ошибку в сумме (систематический «недолив). В таких случаях рекомендуется *правило лишнего знака:* оставлять один лишний знак, а в ответе произвести его округление.

Пусть, например, надо найти сумму

$$K = 132{,}7 + 1{,}274 + 0{,}06321 + 20{,}96 + 46{,}1521$$

Самая большая абсолютная погрешность у первого слагаемого: она равна 0,1. Поэтому прочие слагаемые округляем до 0,01:

$$132{,}7+1{,}27 + 0{,}06+20{,}96 + 46{,}15 = 201{,}14,$$

т е. К=201,1. Если бы мы не воспользовались правилом лишнего знака и округляли все слагаемые до 0,1, то получили бы менее точный результат:

$$K = 132{,}7 + 1{,}3 + 0{,}1 +21{,}0 + 46{,}2 = 201{,}3.$$

Если число слагаемых весьма велико, скажем несколько сотен, следует пользоваться двумя лишними знаками.

При вычислении суммы нескольких слагаемых, заданных с одинаковым числом знаков после запятой, следует иметь в виду, что предельная абсолютная погрешность у суммы будет больше, чем у слагаемых; поэтому ответ целесообразно округлить до предыдущего знака. Например, пусть

$$L = 1{,}38 + 8{,}71 + 4{,}48 + 11{,}96 + 7{,}33.$$

Складывая, получим $L = 33{,}86$. Однако последняя цифра очень сомнительная; поэтому следует написать ответ в виде L = 33,9.

Предельная абсолютная погрешность суммы или разности нескольких величин равна сумме предельных абсолютных погрешностей этих величин. Например, если две величины определены с точностью до 0,1, то, как легко понять, сумма или разность этих величин определены с точностью до 0,2, так как ошибки могут сложиться. ЕСЛИ слагаемых много, то очень маловероятно, чтобы все ошибки сложились. В этом случае для определения погрешности суммы надо пользоваться методами теории вероятностей. Из них вытекает, что один знак в сумме надо округлять, как это было сделано при вычислении L, начиная примерно с пяти слагаемых, а дна знака — примерно с 500.

При вычитании приближенных чисел правила те же, что при сложении, но надо дополнительно иметь в виду, что при вычитании близких чисел относительная точность резко ухудшается. Например, пусть надо найти P=327,48—326,91. В вычитаемом и уменьшаемом $\alpha = 0{,}01$.

Поэтому надо стараться измерять или вычислять разности близких чисел непосредственно, без выполнения такого вычитания: не следует вычислять вес шляпы, взвесившись сначала в шляпе, а затем без нее. Формулы же, содержащие разности близких величин, надо стараться преобразовать, избавляясь от таких разностей, если они могут существенно нарушить точность вычислений.

Умножение и деление приближенных чисел. Начнем с примера. Пусть надо найти площадь S прямоугольника со сторонами $a = 5{,}2$ *см* и $b = 43{,}1$ *см.* Было бы неправильно дать такой ответ:

$$S = 5{,}2 \cdot 43{,}1 = 224{,}12 \text{ см}^2.$$

Действительно, на самом деле ***a*** заключено между 5,1 и 5,3 *см,* а b — между 43,0 и 43,2 *см* и потому площадь заключена между $S_1 = 5{,}1 \cdot 43{,}0 = 219{,}3$ *см*2 и $S_2 = 5{,}3 \cdot 43{,}2 = 228{,}96$ *см*^{2}, т.е. в найденном значении S все цифры после второй сомнительные и могут только ввести в заблуждение. Ответ следует дать такой: $S = 2{,}2 \cdot 10^2$ *см*^{2}.

Заметим, кстати, что по тому образцу, как мы вычислили S_1 и S_2, и в других примерах можно дать двусторонние оценки для ответа.

Итак, мы видим, что при умножении двух чисел с двумя и тремя верными знаками в ответе следует оставить два верных знака. Аналогичное правило справедливо в общем случае, а также при делении приближенных чисел: в ответе число верных знаков надо взять равным наименьшему (худшему) числу верных знаков в сомножителях (или в делимом и в делителе, если рассматривается частное). Дело в том, что**,** *при умножении или делении приближенных чисел предельные относительные погрешности складываются,* а число верных знаков говорит примерно о том же, о чем и предельная относительная погрешность, т. е. об относительной точности.

В приведенном примере с вычислением S предельная относительная погрешность у b была значительно меньше, чем у a, а потому $\delta_s = \delta_a + \delta_b \approx \delta_a$, т. е. и число верных знаков у S такое же, как у a.

Если множители даны с разным числом верных знаков, то перед умножением следует произвести округление, оставив один лишний знак, который надо отбросить после выполнения действий. Если множители заданы **с** одинаковым числом верных знаков, но этих множителей много, например более четырех, то верных знаков в произведении следует взять на один меньше.

Таким образом, например, при вычислении количества тепла, выделяемого электрическим током, по формуле $Q=0{,}24I^2Rt$ в ответе не может получиться более двух верных знака, так как коэффициент 0,24 имеет лишь два верных знака; при этом нет смысла брать I, R и t более чем с тремя верными знаками (да и то третий знак, если берется, является лишь запасным). Если Q требуется с большей точностью, то надо прежде всего уточнить коэффициент.

Отметим, что совершенно точные множители не влияют на выбор числа верных знаков в произведении: например, в формуле для длины окружности $L = 2\pi r$ коэффициент 2 является совершенно точным (он может быть записан в виде 2,0 или 2,00 и т. п.), так что точность, с которой можно вычислить L, зависит только от числа верных знаков, с которыми взято π и определено r

Приведем пример на применение всех этих правил. Пусть $D= 11{,}3^2\cdot 5{,}4 + 0{,}381 \cdot 9{,}1+7{,}43\cdot 21{,}1$**.** Для выяснения, насколько велики слагаемые, вычислим их, произведя округление всех чисел до одного верного знака. Получаем 500, 3,6 и 140. Значит, сумма будет содержать несколько сотен, а поскольку в первом, самом большом слагаемом один из множителей (5,4) дан только с двумя верными знаками, то и весь ответ получится с двумя верными знаками. Согласно правилу лишнего знака будем проводить вычисления с точностью до единиц, а потом ответ округлим до десятков. Получится $D = 690 + 3 + 157 = 850$, т. е. $D=8{,}5\cdot 10^2$.

Вычисления с лишними цифрами были бы не только бесплодными, но даже вредными, дающими иллюзию точности, когда ее на самом деле нет.

При выборе степени точности приближенных величин, над которыми надо производить те или иные вычисления, руководствуются *принципом равной точности,* согласно которому все эти выбираемые степени точности должны быть согласованы друг с другом и ни одна не должна быть чрезмерной или недостаточной.

Поясним этот принцип на примерах. Пусть мы вычисляем площадь прямоугольника по формуле $S=ab$. Тогда, если a измерено или вычислено, например, с тремя верными знаками, то и b следует взять с тремя верными знаками. так как четвертый знак у b все равно будет излишним, а если b взять только с двумя верными знаками, то пропадет труд, затраченный на нахождение третьего знака у a Таким образом, в произведении всегда выгодно множители (во всяком случае те, нахождение которых связано с теми или иными трудностями) брать с одним и тем же числом верных знаков. Аналогично в сумме надо брать слагаемые с одним и тем же числом знаков после запятой.

1.3. Функции и графики

При изучении различных явлений природы и решении технических задач, а следовательно, и в математике приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой. Так, например, при изучении движения пройденный путь рассматривается как переменная, изменяющаяся в зависимости от изменения времени. Здесь пройденный путь есть функция времени.

Функциональная зависимость. Часто бывает, что в одном и том же рассмотрении участвует одновременно несколько переменных величин, взаимосвязанных друг с другом таким образом, что *изменение одних величин сказывается на значениях других.* Тогда говорят, что между рассматриваемыми величинами имеется *функциональная зависимость.* Например, при изменении условий, в которых содержится какая-либо определенная порция газа, функциональная зависимость будет между объемом *V*, температурой *Т* и давлением *р* этого газа, гак как эти величины взаимосвязаны. Функциональная зависимость имеется между площадью круга и длиной его радиуса, между пройденным путем и временем в процессе движения и т. п.

Обычно среди функционально зависимых между собой величин можно указать некоторые величины *(независимые переменные),* значения которых могут выбираться более или менее произвольно, тогда как значения остальных величин *(зависимых переменных)* определяются значениями первых. Например, при рассмотрении связи между площадью S круга и длиной *R* его радиуса эту длину естественно принять за независимую переменную, так как ее значения можно задавать произвольно; при этом площадь будет зависимой переменной. При указанном выше рассмотрении порции газа за независимые переменные можно взять *V* и Т; давление *р* будет тогда зависимой переменной.

Закон (правило), по которому значениям независимых переменных отвечают (соответствуют) значения рассматриваемой зависимой переменной, называется функцией.

Таким образом, каждый раз, когда нам дан такой закон соответствия, мы можем сказать: вот функция. Функции - одно из важнейших математических понятий.

Впрочем, слово «функция» употребляется и в ином смысле. Именно, часто независимые переменные называются также *аргументами,* а зависимая переменная — *функцией* от этих аргументов. Обычно такое двоякое употребление слова «функция» не приводит к ошибкам.

Следует отметить, что если между величинами имеется функциональная зависимость, то часто выбор того, какие из этих величин считать независимыми, а какие — зависимыми, является довольно условным. Так, в приведенном примере с порцией газа за независимые переменные можно было бы принять *Т* и р, а *V*— за зависимую переменную; нетрудно привести схему опыта, в котором бы Т и *р* задавались, а объем *V* находился. Выбор того, какие переменные более естественно или более удобно принять за независимые, иногда довольно важен.

Функции могут быть от одного аргумента (как в примере площади круга) или от двух и более аргументов. В первых главах нашего курса мы будем рассматривать почти исключительно функции от одного аргумента.

Заметим, что для того, чтобы некоторая величина y могла рассматриваться как функция от независимой переменной x, нет надобности, чтобы между изменениями этих величин существовала глубокая причинная связь. Достаточно только, чтобы существовал определенный закон, по которому значениям X отвечали бы значения y, этот закон может быть нам и неизвестен. Например, температуру θ в какой-либо точке можно считать функцией времени t, так как ясно, что значениям t отвечают определенные значения θ, хотя, конечно, изменение θ объясняется не просто течением времени, но рядом глубоких физических причин.

Обозначения. Если величина y является функцией от величины x, то обычно пишут $y=f(x)$ (читается: *«игрек* есть *эф* от *икс»),* где f, начальная буква латинского слова functio, — знак функции. *Частные значения* этой функции получаются, если аргументу x придавать частные (конкретные) значения.

Пусть, например, $y=f(x)$ имеет такой вид: $y = x^2$. Тогда при $x=2$ будет $y = 4$, при $x= —0,6$ будет $y = 0,36$ и т. п. Это можно записать так: $f(2) = 4$, $f(— 0,6) = 0,36$ и т. д.

Запись вида $y=f(x)$ применяется, если конкретное выражение функции слишком громоздкое или даже нам не известно, а также дли формулировки правил и свойств, общих для всех или многих конкретных функций (как, например, в алгебре формула $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ приводится не для конкретных чисел, а для букв, вместо которых можно подставить любые конкретные числа).

Если одновременно рассматривается несколько различных функций, то, кроме f, приходится применять другие буквы F, φ, Φ и т. п. или применять *индексы* (значки): f_1, f_2 и т. п. Однако в разных рассмотрениях одной и той же буквой f можно обозначить различные функции, как в алгебре в одной и той же задаче буквой a нельзя обозначить различные величины, но в другой задаче та же буква a может означать что-либо другое. Если же разные величины связаны одинаковой зависимостью, то можно применять один и тот же знак функции, так как f означает закон зависимости одной величины от другой. Например, если $y = x^3$, $z = u^5$, $v = t^3$, то можно написать $y=f(x)$, $z = \varphi(u)$, $v=f(t)$; в данном случае знак f означает возведение аргумента в третью степень, а знак φ—в пятую.

Аналогично обозначаются функции от нескольких аргументов. Пусть, например, $z = x^2—x2^y$, x и y — независимые переменные, z—зависимая; тогда можно написать $z=f(x, y)$, запятая в данном случае является признаком функции от двух аргументов. В этом случае частные значения находятся так:
$f(2,1)$ (т. е.$z|_{x=2,y=1})=2^2$-$2·2^1=0$; $f(1, 2) = 1^2—1·2^2= —3$ и т. п.

В разобранных примерах мы образованием «функции от функции» или, как говорят, с образованием *сложной функции.* Обычно сложная функция получается следующим образом. Пусть переменная y зависит от переменной u, которая в свою очередь зависит от переменной x, т. е. $y=f(u)$, $u = \varphi(x)$. Тогда при изменении x будет меняться u, а потому будет меняться и y. Значит, y является функцией x, $y=f(\varphi(x))$, которая и называется сложной функцией; переменная ***ц*** в данном случае называется *промежуточной.* Может быть и несколько промежуточных переменных.

Если хотят только отметить, что y является функцией от x, но не производить подобные манипуляции, те пишут просто $y = y (x)$; так, $S=S(R)$, $p=p(V, T)$, $V=V(T,p)$.

Способы задания функций. Чтобы функцию, т. е. зависимость одной величины от другой, можно было изучить, она должна быть как-то задана. Имеется несколько способов задания функции.

Аналитический способ (при помощи формулы) чаще всего применяется в математике. В этом способе явно указываются математические действия, которые надо совершить над независимой переменной, чтобы получить значение функции. Например, формула $y = x^2 — 2x$ означает, что для того, чтобы получить значение функции y, нужно значение аргумента возвести в квадрат и из результата вычесть удвоенное значение этого аргумента.

Аналитический способ компактен (формула занимает мало места), легко воспроизводим (формулу легко переписать) и наиболее приспособлен к выполнению над функциями математических действий — алгебраических (сложение, умножение и т. п.), действий высшей математики (дифференцирование, интегрирование и т. п.) и других. Однако он не всегда нагляден (не всегда виден характер зависимости функции от аргумента) и для вычисления значений функции, если они требуются, необходимо произвести ряд выкладок, не всегда простых.

В табличном способе задания функции ее численные значения задаются с помощью таблицы при определенных дискретных численных значениях аргумента

Большим удобством табличного способа является то, что значения функции уже вычислены, так что ими можно немедленно пользоваться. Однако могут понадобиться значения функции при значениях аргумента, которых нет в таблице; тогда приходится производить дополнительные вычисления—*интерполяцию* (для промежуточных значений аргумента) или *экстраполяцию* (для значений аргумента, лежащих за пределами таблицы), что иногда приводит к неверным результатам.

Третьим основным способом задания функции является *графический способ* (с помощью графика). Этот способ очень нагляден, так как по графику легко детально проследить за характером изменения функции. Кроме того, по графику можно быстро находить значения функции с небольшой точностью (два-три верных знака), правда, только в изображенном диапазоне изменения аргумента.

Все эти способы задания функции как бы дополняют друг друга, так что часто возникает задача о переходе от одного способа к другому — о построении графика, о составлении таблицы (так называемое *табулирование),* о подборе формулы. В нашем курсе мы столкнемся с такими задачами.

Встречаются также и иные способы задания функций. Например, закон, по которому значения функции соответствуют значениям аргумента, иногда формулируется словесно: так, ежемесячный членский взнос может быть функцией заработной платы.

Графики функций. Графики служат для геометрического изображения функций. Напомним методику построения графиков функций, известную из курса средней школы. Пусть величина y является функцией величины x, т. е. $y=f(x)$. Для построения графика на плоскости выбираются две числовые оси: обычно ось переменной x проходит слева направо и называется *осью абсцисс,* а ось переменной y проходит перпендикулярно к оси x и называется *осью ординат.* Начало отсчета на каждой из осей часто выбирается в точке их взаимного пересечения (рис. 1. 1)

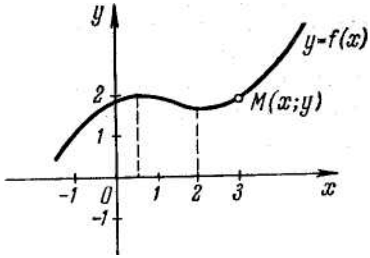


Рис.1.1

После этого придают аргументу всевозможные значения, находят соответствующие значения $y=f(x)$ и строят точки графика.

На рис. 1.1 показана произвольная «текущая» точка M графика, имеющая координаты x, y. Практически мы можем построить не очень большое число точек графика, после чего соединяем их линией; теоретически же необходимо представлять себе, как будто переменная x пробегает *всю* область своего изменения; тогда текущая точка M пробежит весь график. На рис1.1 показан пример графика. Из него видно, что в данном случае при возрастании аргумента x значение функции сначала возрастает; это продолжается примерно до значения x=0,5, после чего функция убывает, сравнительно медленно; начиная же примерно с x=2, функция вновь возрастает, причем все быстрее и быстрее.

Единицы масштаба и начала отсчета на каждой из осей выбираются так, чтобы лучше всего передать ход изменения функции на наиболее интересных интервалах изменения аргумента и функции.

Рассмотрим, например, график равноускоренного движения, протекающего по закону

$$s=98+0{,}01t^2 \quad (t\geq 0) \qquad (1.1)$$

где t выражено в *сек*, а s—в *см*. В этом случае возможно выбрать шкалы на обеих осях так, как показано на рис.1.2.

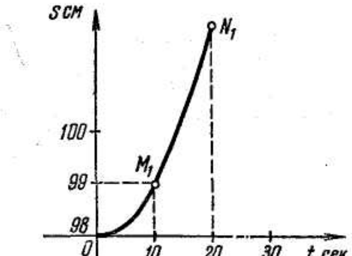


Рис.1.2

Ясно, что изменение начала отсчета на оси аргумента (или оси функции) влечет за собой перенос графика как целого параллельно оси аргумента (или соответственно оси функции). Изменение масштаба какой-либо из осей в несколько влечет за собой растяжение во столько же раз графика от другой же раз графика от другой оси (или сжатие к ней); например, на рис.1. 3 показан график той же функции (1.1) после изменения масштаба по оси *t*.

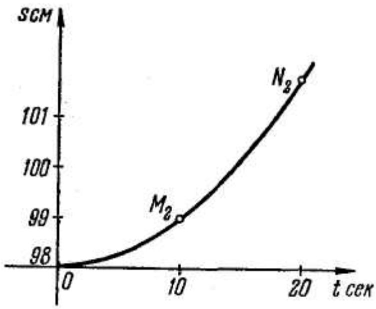


Рис.1.3

Новый график получается из старого растяжением от оси s параллельно оси *t*.Чтобы наилучшим образом передать поведение рассматриваемой функции, иногда применяются на осях неравномерные шкалы.

В дальнейшем мы будем всегда считать, если не оговорено противное, что переменные (аргументы и функция) — безразмерные. В этом случае в теории проще всего считать, как мы и будем делать, *что единицы масштаба по обеим осям одинаковые, а отсчет ведется от точки их пересечения,* которая называется *началом координат*.

Область определения функции. *Областью определения функции* называется совокупность значений независимой переменной, при которых эта функция определена, т. е. область изменении независимой переменной. Обычно эта переменная является непрерывной, и тогда, как было указано ранее, эта область определения состоит из одного или нескольких интервалов.

В некоторых случаях область определения функции выясняется из физического или геометрического смысла этой функции. Например, если рассматривается зависимость $S = \pi R^2$ площади круга от длины его радиуса, то областью определения этой функции будет интервал $0 < R < \infty$, так как по геометрическому смыслу R может принимать именно такие значения. Если рассматривается зависимость плотности ρ атмосферы над данной точкой земной поверхности от высоты h над уровнем моря, то областью определения этой функции будет интервал $h_0 \leq h \leq H$, где h_0 — высота земной поверхности, а H—условная высота, принимаемая за границу атмосферы, и т. д. Если функция задана просто формулой, то областью определения служит совокупность значений аргумента, при которых фор мула дает определенное вещественное (действительное) значение функции. (Мы пока будем рассматривать только *вещественные функции от вещественного аргумента,* т. е. функции, у которых зависимая и независимая переменные принимают лишь вещественные значения.) Например, если $y = x^3$, то x может принимать любые значения, т. е. областью определения служит вся числовая ось $-\infty < x < \infty$. Если $y = \sqrt{x^2 - 2}$, то при вычислении y встретится препятствие в извлечении корня, если окажется, что $x^2 - 2 < 0$; значит, должно быть $x^2 - 2 \geq 0$, т. е. $x^2 \geq 2$, а это будет при $x \leq -\sqrt{2}$ или $x \geq \sqrt{2}$, т. е. область определения в данном случае состоит из двух интервалов: $-\infty < x \leq -\sqrt{2}$ и $\sqrt{2} \leq x < \infty$. При нахождении области определения в аналогичных случаях надо выяснить, что может препятствовать получению значения функции, после чего выписывать неравенства (как в последнем примере $x^2 - 2 \geq 0$), гарантирующие возможность этого получения. Тогда задача сведется к решению этих неравенств.

Если независимая переменная дискретна, то область определения функции состоит из дискретных (отдельных) точек. Например, если $f(x) = x! = 1 \cdot 2 \ldots x$, то x может принимать только значения 1, 2, 3, ... Если, как в этом примере, дискретный аргумент принимает лишь целые значения, то обычно его обозначают не x, а буквами n, m, k и т. п., а вместо $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ пишут $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и говорят, что дана *последовательность;* например, последовательностью служит геометрическая прогрессия

$$a_1 = a, \quad a_2 = aq, \quad a_3 = aq^2, \ \ldots, \ a_n = aq^{n-1}, \ldots$$

и т. п. График функции от дискретного аргумента не является линией, а состоит из дискретных точек

Область изменения самой функции называется иначе *множеством значений этой функции.* Например, для функции $y = x^2$ областью определения служит интервал $-\infty < x < \infty$, а множеством значений – интервал $0 \leq y < \infty$, так как в данном случае y принимает только такие значения.

Выяснение области определения функции важно для построения ее графика, так как эта область — это та часть оси абсцисс, над или под которой пройдет график; точнее говоря, это — проекция графика на ось абсцисс. На рис. 1.4 показаны три простых графика; области определения этих функций заштрихованы. Ясно, что если область определения состоит из нескольких частей, то и график состоит из нескольких кусков.

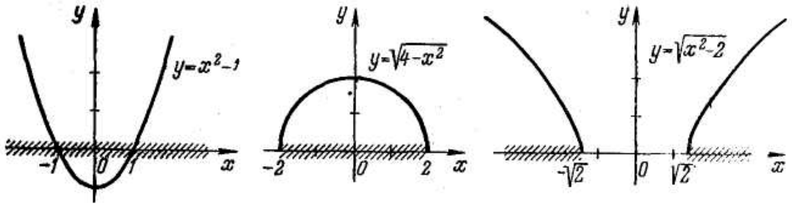


Рис.1.4.

Характеристики поведения функции

Надо научиться свободно характеризовать различные качества функции аналогично тому, как мы характеризуем качества людей: спокойный, блондин и т. п.

Всюду, где не оговорено противоположное, мы будем считать исследуемые функции *однозначными,* т. е. считать, что каждому значению независимой переменной из ее области изменения отвечает одно вполне определенное значение функции. О *многозначных*, т.е. неоднозначных будем говорить далее.

Функция называется *возрастающей* (соответственно *убывающей*), если при росте аргумента значения функции возрастают(соответственно убывают). Как возрастающие, так и убывающие функции *называются монотонными.*

Если функция не является монотонной, то на оси аргумента можно указать *интервалы монотонности,* на которых функция монотонна, иногда они чередуются с *интервалами постоянства* функции. Так, на рис.1.5 показаны графики возрастающей функции $f(x)$, убывающей функции $\varphi(x)$ и немонотонной функции $\psi(x)$; последняя функция имеет интервал возрастания $-\infty < x \leq a$, интервал убывания $a \leq x \leq b$, интервал постоянства $b \leq x \leq c$ и интервал возрастания $c \leq x < \infty$.

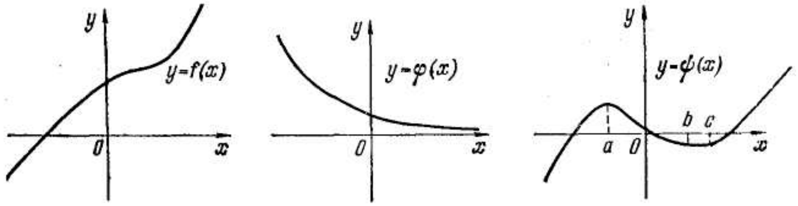


Рис.1.5.

Условие возрастания функции *f (x)* можно записать так: из $x_1 < x_2$ всегда следует, что $f(x_1) < f, (x_2)$. Это дает возможность производить одинаковые действия над обеими частями неравенства: например, зная, что $y = x^3$—возрастающая функция, мы получаем, что из неравенства $a < b$ всегда вытекает неравенство $a^3 < b^3$ и обратно. Если функция *f (x)* не является монотонной, то такие действия можно производить на интервале ее возрастания; на интервале убывания функции *f(x)* из $x_y < x_2$ вытекает, что $f (x_1) > 1(x_2)$. Например, функция $y=x^2$ — убывающая при—∞ $<x\leq 0$ и возрастающая при $0\leq x < \infty$; значит, из $a < b$ при $b<0$ вытекает $a^2 > b^2$, а при $a\geq 0$ вытекает $a^2 < b^3$.

Функция называется *непрерывной,* если при постепенном (непрерывном) изменении аргумента значения функции меняются также постепенно, без скачков. В противном случае функция называется *разрывной,* а значения аргумента, при которых непрерывность (постепенность) изменения функции нарушается, называются *точками разрыва* функции .Так (рис. 6), функция $y=x^2$ непрерывна на всей оси *x;* функция $y = 1/x$ имеет одну точку разрыва $x = 0$ (при приближении аргумента к значению $X = 0$ значения функции уходят в бесконечность), а при остальных x функция непрерывна; функция $y = \text{tg}x$; имеет бесконечное число точек разрыва $x = \pm\ 0{,}5\pi,\ \pm\ 3/2\ \pi,\ldots$ Если функция определена с обеих сторон от точки разрыва, то график этой функции также разрывен и состоит из двух или большего числа частей (кусков; см., например, рис.1.6).

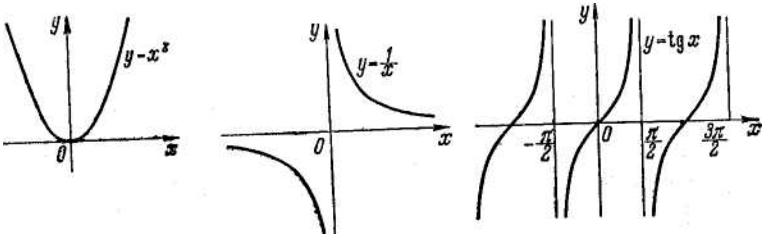


Рис.1.6

Функция $y = \sin x$ является примером периодической функции. Именно (рис.1. 7), поведение этой функции на интервалах

$\ldots;\ -4\pi\leq x\leq -2\pi;\quad -2\pi\leq x\leq 0;\quad 0\leq x\leq 2\pi;\ 2\pi\leq x\leq 4x,\ \ldots$

совершенно одинаковое.

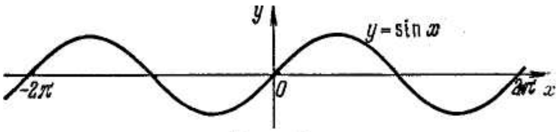


Рис.1.7

Число 2π называется периодом функции $y= \sin x$ В общем случае функция $y=f(x)$ называется *периодической* с *периодом* А>0 .Поведение такой функции на каждом из интервалов

$\ldots;\ a-2A\leq x\leq a-A;\ a-A\leq x\leq a;\ a\leq x\leq a+A;\ a+A\leq x\leq a+2A;\ \ldots$

(где a—произвольной выбранное число) совершенно одинаковое (рис.1. 8), так что достаточно рассматривать функцию на одном из таких отрезков. (На рис.1. 8 показано также равенство $f(x+A) = f(x)$ для одного из значений x.)

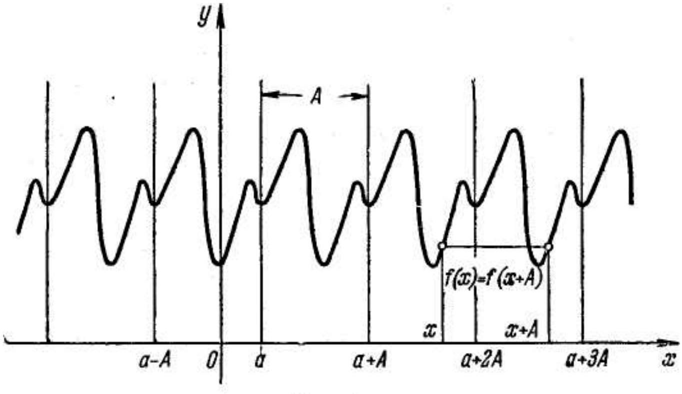


Рис.1.8

Функция f(x) называется *четной,* если она не меняется при изменении знака y аргумента. Примерами четных функций служат y=x^2, $y=x^6$, $y=cosx$ и т. д. Из рис.1.9 видно, что график четной функции симметричен относительно оси ординат. Функция $f(x)$ называется *нечетной,* если при изменении знака y аргумента она умножается на —1.

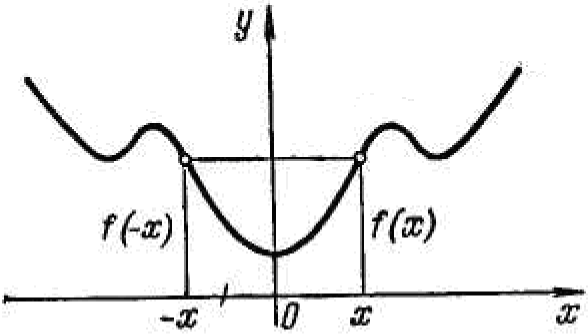


Рис1.9

Примерами могут служить $y = x$, $y = x^5$, $y = sinx$ и т. д. Из рис. 1.10 видно, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

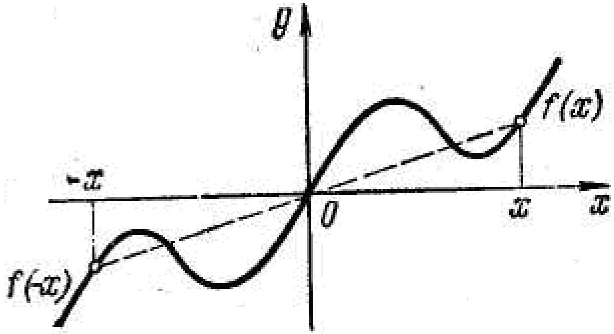


Рис.1.10

Отметим, что функция может не быть ни четной, ни нечетной; например, y=**1**+sin$x$, y=**1—*x*,** y= 2^x, $y = lgx$ и т. д.

Алгебраическая классификация функций. Функции, заданные единой формулой , классифицируются в зависимости от характера алгебраических действий, которые надо совершить над аргументом, чтобы получить значение функций. Если применяются только сложение, вычитание и умножение, а также возведение в целую положительную степень, которое является частным случаем умножения, то функция называется целой рациональной, или многочленом; при образовании многочлена могут применяться произвольные постоянные коэффициенты. Примеры многочленов: $y = x^3— 2x+3$; $y = x^2$; $y = 3$; $y=a^4x^2—2$ и т. д.

С другой стороны, функции $y = x^{-5}$, $y = x^3 + 2\sqrt{x}$ не являются многочленами в смысле приведенного определения. Каждый многочлен имеет ***степень,*** которая определяется старшей из участвующих степеней независимой переменной: так, степени приведенных многочленов равны 3, 2, 0, 3, 2.

Более широкий класс составляют *рациональные* функции, в которых допускается также и деление; при этом, если рациональная функция не является целой, то она называется дробной рациональной функцией.

После приведения к общим знаменателям по правилам элементарной алгебры *всякую дробную рациональную функцию можно представить в вида отношении двух многочленов.*

Еще более широкий класс составляют *алгебраические* функции, в которых допускается также и извлечение корня; при этом, если алгебраическая функция не является рациональной, она называется *иррациональной.* Пример иррациональной функции: $y = x^2 - 1/x + \sqrt{x^2 - 1}$.

Неалгебраические функции называются *трансцендентными.* Примеры трансцендентных функций: $y = \sin x$, $y = x^2 + \operatorname{tg} x$, $y = 2^x$, $y = \lg x$ и т. д.; отметим, что две последние функции являются трансцендентными.

Все эти определения автоматически переносятся на функции нескольких переменных. Единственным новым моментом является определение степени многочлена при помощи сложения показателей степеней аргументов в одночленах.

Так, функция $f(x, y) = x^4y - x^4y^2 - x^4y^2 + x$ является многочленом шестой степени от x и y; если же, например, в этой функции считать y зафиксированным, то она будет многочленом четвертой степени от x.

Для любого числа переменных многочлен первой степени называется *линейной* функцией, многочлен второй степени — *квадратичной* и т. д.

Элементарные функции. Перечислим основные функции, применяемые в элементарной математике: $y = x^a$ (при постоянном a) — *степенная* функция;

$y = a^x$ (при постоянном a)—*показательная* функция, она же называется *экспоненциальной* функцией или просто *экспонентой;*

$y = \log_a x$ *(при* постоянном a)— *логарифмическая* функции;

$y = \sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ — *тригонометрические* функции;

$y = \arcsin x$, $\arccos x$ и т. д. — *обратные тригонометрические* функции.

Элементарными функциями называются все функции, которые можно составить из основных элементарных функций с помощью алгебраических действий (с применением любых коэффициентов) и образовании сложных функций. Так, все алгебраические функции являются элементарными. Но элементарны и очень многие трансцендентные функции, например $x + \lg \sin x$.

Элементарные функции составляют значительную часть функций, которые рассматриваются в общем курсе высшей математики. Примером неэлементарной функции может служить, скажем, $y = x!$.

Преобразования графиков. Часто бывает, что известны графики каких-либо функций, а требуется построить графики других функций, так или иначе выражающихся через первые. Мы приведем несколько примеров таких преобразований графиков.

Пусть дан график функции $y=f(x)$ и требуется построить графики функций $z=f(x)+a$ и $u=f(x+b)$ (a и b — постоянные), причем величины z и u будем откладывать по той же оси, что и y (рис. 1.11).

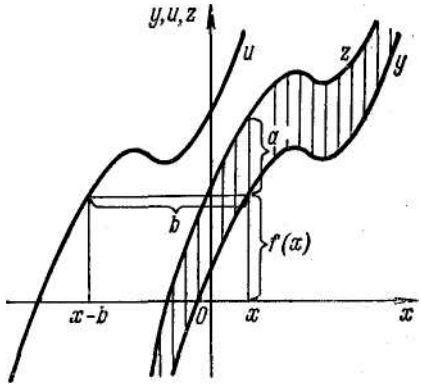


Рис.1.11.

Тогда при любом x будет $z=y+a$, т. е. график функции z (x) получается из графика функции y (x) при помощи переноса вдоль оси y на a в положительном направлении (см. рис. 11, где каждый из вертикальных отрезков имеет длину a). Что касается графика функции $u(x)$, то часто по ошибке говорят, что он получается из графика y (x) переносом на b вдоль оси x в положительном направлении. На самом деле направление переноса получается прямо противоположное. Действительно, чтобы $u=y$, надо в выражении для u взять аргумент на b меньше, чем в выражении для y, так как тогда

$$u=f[(x-b)+b]=f(x)=y.$$

Поэтому график функции $u(x)$ получается из графика функции y (x) переносом на b вдоль оси x в отрицательном направлении. Конечно, если $a<0$ и $b<0$, то перенос будет в противоположном направлении, но этого не надо особо оговаривать, так как всегда подразумевается, что перенос на «—3» вверх — это все равно, что перенос на «3» вниз.

Подобным же образом строятся графики функций

$v=kf(x)$ и $w=f(kx)$. График функции v (x) получается из графика функции y (x) путем равномерного растяжения от оси x в k раз, так как точки первого графика имеют при тех же абсциссах ординаты в k раз больше, чем у второго. График же функции $w(x)$ получается из графика функции $y(x)$ равномерным сжатием к оси y в $к$ раз, так как $w(x/k)=f(k(x/k))=f(x)=y(x)$.

Неявные функции. *Неявной функцией* называется функция, определенная из неразрешенного уравнения, связывающего аргумент и функцию. Разрешая это уравнение, мы получаем ту же функцию, но уже заданную в явной форме. Так, равенства

$x - y^3 + 2 = 0$ и $y = \sqrt[3]{x+2}$ равносильны; они определяют одну и ту же функцию $y(x)$, но первое равенство определяет ее в неявной форме, как неявную функцию, а второе — в явной. Часто бывает, что разрешить уравнение относительно функции невозможно или нецелесообразно; в этом случае уравнение так и оставляют неразрешенным, в общей форме (после переноса всех членов в левую часть)

$$F(x, y) = 0. \qquad (1.2)$$

Этого не нужно бояться, так как позже мы узнаем ряд приемов, приспособленных к изучению функций, заданных в неявной форме.

Если в уравнении (1.2), определяющем неявную функцию $y(x)$, задавать значения независимой переменной x, то для нахождения соответствующего значении y надо решать уравнение. Как известно, если в уравнение подставить его решение, то получится тождество. Поэтому можно сказать также, что неявная функция $y = y(x)$, определенная уравнением (1.2), — это такая функция, которая, будучи подставлена в уравнение (1.2), обращает его в тождество (проверьте это на приведенном выше примере).

Уравнение (1.2) при заданном x может иметь более одного решения. Тогда функция $y(x)$ будет многозначной, т. е. при заданном значении аргумента принимает более одного значения. Например, рассматривая неявную функцию $y(x)$, определенную из уравнения

$$x-y^2=0 \qquad (1.3)$$

мы получаем при любом заданном $x>0$ два значения y: $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$; *само значение радикала всегда подразумевается взятым в арифметическом смысле.* Рассмотрение многозначных функций неудобно и его стараются избежать, разбивая такую функцию на однозначные ветви, отвечающие тому или иному значению функции. Так, в нашем примере двузначная функция $y = \pm\sqrt{x}$, определенная из уравнения (1.3), имеет две однозначные ветви: $(y)_1=\sqrt{x}$ и $(y)_2=-\sqrt{x}$.

Каждая ветвь неявной функции представляет собой однозначную функцию и потому имеет график обычного вида. Все эти ветви составляют обычно единую линию, которая и является графиком функции, определенной уравнением (1.2) Так в нашем примере уравнение (1.3) можно переписать в виде $x= y^2$ откуда ясно, что графиком служит обычная «школьная» парабола, но необычно расположенная, так как оси x и y поменялись ролями по сравнению со «стандартным» уравнением $y =x^2$ (рис.1. 12).

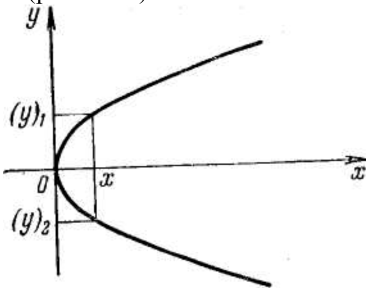


Рис.1.12.

Каждая из однозначных ветвей изображается половиной параболы, первая — верхней, вторая — нижней.

График неявной функции может иметь, например, вид, изображенный на рис.1. 13.

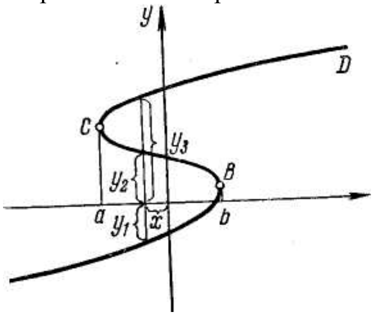


Рис.1.13.

Здесь видно, что при $x<a$ и при $x>b$ функция $y (x)$ является однозначной, а при $a<x<b$ — трехзначной; при разделении значений на ветви естественно считать дугу AB

графиком первой ветви, дугу BC—графиком второй и CD—графиком третьей ветви.

В связи с рассмотрением многозначных функций заметим, что возможны такие функции, для которых каждому значению независимой переменной отвечает целый интервал значении функции. Например, такое соотношение будет между ростом и возможным весом человека. Такие функции рассматриваются обычно в теории вероятностей .

Обратные функция. Пусть рассматривалась функция

$$y=f(x) \tag{1.4}$$

Будем придавать y различные значения и находить соответствующие значения x, т. е. примем бывшую зависимую переменную за аргумент, а бывшую независимую – за функцию. Полученная функция (зависимость) $x\ (y)$ называется *обратной* по отношению к исходной функции $y\ (x)$. Она задается тем же равенством (1.4), в котором, однако, надо рассматривать y как независимую переменную, *а* x — как зависимую. Но ранее мы обращали внимание на то, что при рассмотрении одной и той же функции можно по-разному обозначать переменные. Поэтому если мы захотели бы для обратной к (1.4) функции обозначить, как обычно, независимую переменную через x, а зависимую —через y, то надо просто подставить в (1.4) x вместо y, *а* y вместо x, т. е. равенство, определяющее обратную функцию, надо переписать в виде

$$x=f(y) \tag{1.5}$$

Таким образом, обратная функция оказывается заданной в неявной форме и поэтому оказывается, вообще говоря, многозначной. Легко указать условие однозначности обратной функции — им служит монотонность исходной функции, так как тогда, задаваясь значениями y, мы каждый раз будем получать единственное значение $x = x(y)$ (рис. 1.14).

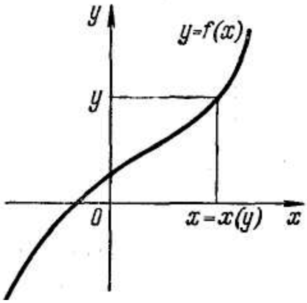


Рис.1.14.

Примеры: Обратной к $y = x^3$ служит функция, определенная из равенства $x = y^3$, т. е. $y=\sqrt[3]{x}$; обратной к $y = x^2$ служит двузначная функция $y=\pm\sqrt{x}$

Равенства (1.4) и (1.5) получаются в результате простой перестановки величин x и y, т. е. в результате перемены их ролей. Поэтому из рис. 1.15 видно, что график обратной функции получается из графика исходной функции с помощью зеркального отражения последнего относительно биссектрисы угла между осями координат, указанной на рис. 1.15 пунктиром. (Обе точки M и M' на рис. 1.15 отвечают одному и тому же равенству вида $b=f(a)$.)

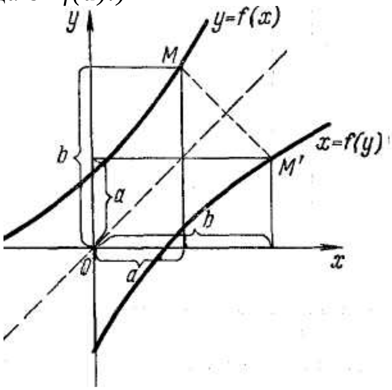


Рис.1.15

В заключение отметим, что если функция $x(y)$ обратна по отношению к функции $y\ (x)$, то, наоборот, вторая обратна по отношению к первой; эти функции являются взаимно обратными.

1.4. Обзор простейших функций

Многие из функций, которые мы здесь рассмотрим, известны из курса средней школы. Они собраны вместе из-за их большого значения.

Линейная функция. Линейная функция имеет общий вид

$$y=ax+b, \tag{1.6}$$

где a и b — постоянные коэффициенты.

Графикам линейной функции служит прямая линия (рис. 1.16).

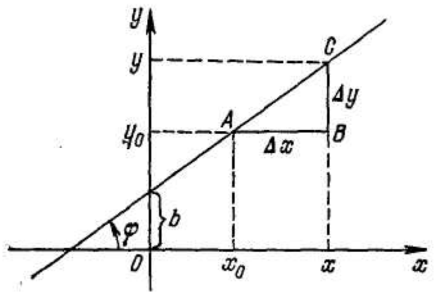


Рис.1.16

Коэффициент a называется *угловым коэффициентом* этой прямой; чем $|\ a\ |$ больше, т. е. чем a больше по абсолютному значению, тем прямая идет круче.

Если аргумент изменился от некоторого значения x_0 до значения x, получив *приращение* Δx, а функция получила соответствующее приращение Δy, то из равенств $y_o = ax_o+b$, $y — ax+b$ следует

$y — y_0 = a\ (x\ — x_0)$, т. е.

$$\Delta y\ =\ a\Delta x \text{ и } \quad \Delta y/\Delta x=a \tag{1.7}$$

Итак, для линейной функции отношение приращения функции к приращению аргумента постоянно и равно угловому коэффициенту графика; *приращение линейной функции прямо пропорционально приращению аргумента.*

На рис. 1.16 изображен случай, когда $a > 0$. Если $a < 0$, то прямая проходит направо вниз (рис.1. 17).

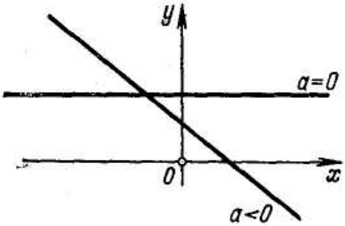


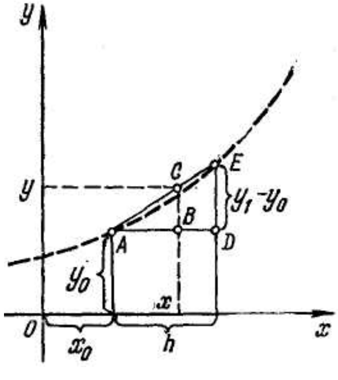
Рис.1.17

Если *а = 0,* то прямая параллельна оси *х;* в этом случае функция постоянна, т. е. получается график константы.

На свойстве приращения линейной функции основана *линейная интерполяция,* которая применяется уже в школьной практике и состоит в следующем. Пусть значения некоторой функции $y=f(x)$, график которой изображен на рис. 1.18 пунктиром, известны при $x = x_0$ и $x = x_0+h$,

$$f(x_0)=y_0,\ f(x_0+h)=y_1$$

но неизвестны при промежуточных значениях *х*.



,

Рис.1.18

Тогда мы приближенно заменяем данную функцию линейной, принимающей те же значения при $x = x_0$ и $x = x_0+h$, т. е. заменяем дугу *AE* отрезком прямой. Из подобия треугольников *ABC* и *ADE* получаем тогда

$$y\text{-}y_0 /x\text{-}x_0=y_1\text{-}y_0 /h,$$

т.е.

$$y=y_0+[(y_1\text{-}y_0) /h](x\text{-}x_0).$$

Такая замена возможна, если функция *f(x)* на рассматриваемом интервале мало отличается от линейной. Она широко применяется, в частности, для таблиц с достаточно малым шагом, когда последовательные значения функции Р мало отличаются друг от друга. Аналогично осуществляется *линейная экстраполяция*
Из формулы (1.7) и рис. 1.16 видно, что a = tg φ, т. е. *угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, под которым она наклонена к оси абсцисс.*

Квадратичная функция. Квадратичная функция в общем виде такова:

$$y = ax^2 + bx\text{-\textbackslash-}c.$$

В курсе средней школы показывается, что *графиком квадратичной функции служит парабола.* В наиболее простом случае, когда $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, т. е. $y = x^2$, график показан на рис.1. 19. Тогда функция будет четной, т. е. ось y для нее служит осью симметрии *(ось параболы).* Точка пересечения параболы с ее осью называется *вершиной параболы;* на рис.1. 19 эта вершина расположена в начале координат.

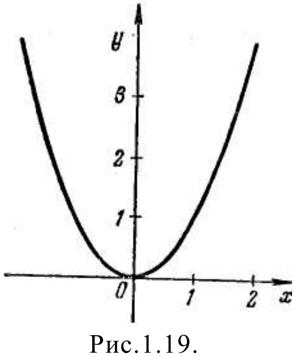


Рис.1.19.

В общем случае, при любых a, b, c, парабола получится в результате равномерного растяжения и параллельного переноса из той параболы, которая изображена на рис. 1.19. При этом выяснить положение вершины можно по методу *дополнения до полного квадрата,* который мы поясним на числовом примере. Пусть $y = 2x^2 — 3x+1$. Тогда , после совершения следующих простых преобразований:

$$y=2(x-3/4)^2-1/8$$

ТАКИМ образом требуемый график получается из параболы, изображенной на рис. 1. 19, в результате переноса вправо на 3/4 равномерного растяжения от оси **x** в два раза и последующего переноса вниз на *1/8*. Полученный график изображен на рис.1.20; для более точного его построения следует придать x несколько значений и найти соответствующие значения y, после чего построить соответствующие точки на графике (например, при x= 0,1 и 2 получается y = 1, 0 и 3; соответствующие точки на графике отмечены).

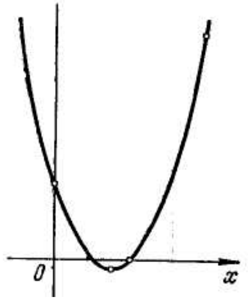


Рис.1. 20.

Вершина полученной параболы находится в точке M с координатами $x= 3/4$, $y= —1/8$. Эта парабола более узкая, чем изображенная на рис.1. 19 (при той же единице масштаба). Вообще, чем больше $|a|$, тем парабола уже. Если $a < 0$, то парабола уходит вниз, а если $a = 0$, то квадратичная функция превращается в линейную.

Степенная функция. Степенная функция меет вид

$$y=x^n$$

Если $0<x<1$, то чем больше n, тем значение функции меньше; если же $x>1$, то чем больше n, тем значение функции больше. Соответствующие графики при $n=1,2,3,4$ изображены на рис.1.21.

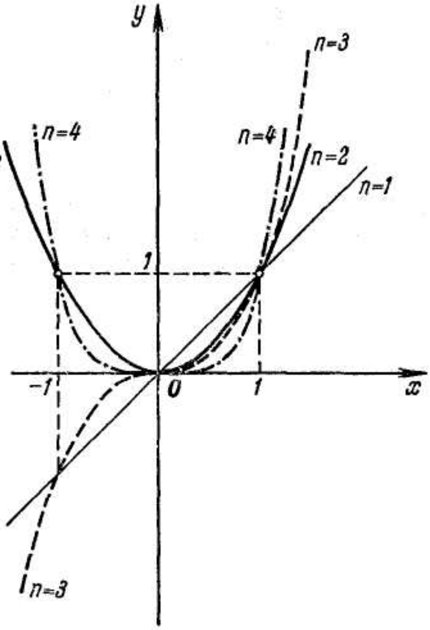


Рис.1.21

Если $0<x<1$, то чем больше n, тем значение функции меньше; если же $x>1$, то чем больше n, тем значение функции больше. Соответствующие графики при $n=1,2,3,4$ изображены на рис.1.21.

При построении графиков в сторону $x < 0$ надо учесть, что при четном n функция получается четной, а при нечетном n — нечетной. Обратим, в частности, внимание на график функции $y = x^3$*(кубическая парабола).* При $x < 0$ график *выпуклый кверху* (вогнутый книзу), т. е. лежит под касательной, проведенной в любой его точке. При $x>0$ график *выпуклый книзу.* В начале координат выпуклость в одну сторону сменяется выпуклостью в другую сторону; здесь касательной к графику служит ось x ,однако в точке касании O график переходит с одной стороны касательной на другую. Такие точки называются *точками перегиба* данной кривой линии. Таким образом, кубическая парабола имеет одну точку перегиба.

Если $0<x<1$, *то* чем больше n, *тем значение функции больше.* Соответствующие графики при n=1,2,2,4 изображены на рис.1.21.

При n нецелых графики располагаются между соответствующими графиками для целых n. Однако в этом случае при построении графика для отрицательных x надо соблюдать осторожность, так как отрицательное число в нецелой степени может дать мнимое значение; в этом случае график для $x<O$ не строится.

Рассмотрим случай $0<n<1$. Пусть, например, $n= 0,5$ т.е. $y=x^{0,5}=\sqrt{x}$

Тогда графиком будет служить верхняя половина обычной (квадратной) параболы с осью, расположенной по оси x (рис.1.22).

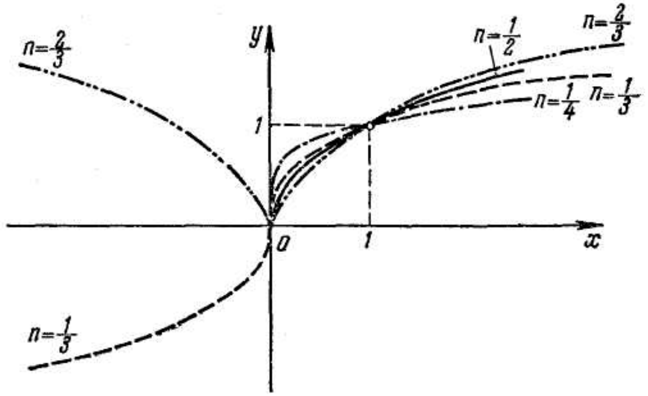


Рис.1.22

На рис.1.22 изображены графики степенных функций при некоторых других дробных n . Если дробь, представляющая n, имеет нечетный знаменатель, то график существует не только при $x>0$, но и при $x<0$, так как из отрицательных чисел возможно извлечь корень с нечетным показателем.

Рассмотрим, наконец, случай отрицательного $n=-m$. Тогда $y=1/x^m$ и потому при весьма малых $|x|$ получаются весьма большие $|y|$ и наоборот.

Соответствующие графики показаны на рис1.23 при $x > 0$.

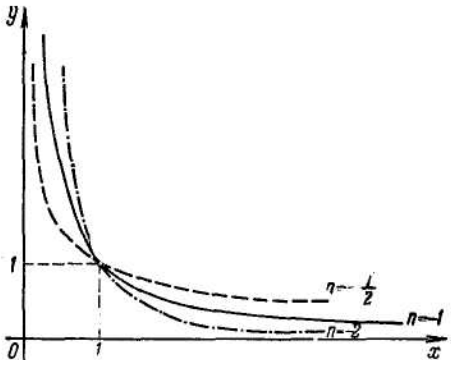


Рис. 1.23

Все эти графики при удалении в бесконечность вытягиваются вдоль координатных осей, безгранично к ним приближаясь. Если кривая и прямая расположены таким образом друг относительно друга, то прямая называется *асимптотой* этой кривой; таким образом, каждый из указанных графиков имеет по две асимптоты, которыми служат оси координат.

Не следует думать, что и в других случаях кривая не может пересекать свою асимптоту. Так, при рассмотрении затухающих колебаний получается график вида, изображенного на рис. 1.24.

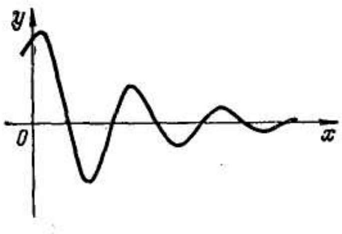


Рис.1.24

Здесь ось *x* также служит асимптотой графика.

Дробно-линейная функция. Дробно-линейная функция представляет собой отношение двух линейных функций и потому имеет общий вид

$$y=(ax+b)/(cx+d) \qquad (1.8)$$

В самом простом случае, когда $a = d = 0$, если обозначить $b/c=k$, получим $y = k/x$ т. е. обратную пропорциональную зависимость.

Соответствующий график, как известно из средней школы, называется *гиперболой.* На рис. 1.25 этот график изображен в двух случаях: когда k>0 и когда k<0. Будучи графиком нечетной функции, гипербола имеет центр симметрии, на рис. 1.25 им служит начало координат; она обладает двумя асимптотами, на рис. 1.25 ими являются оси координат.

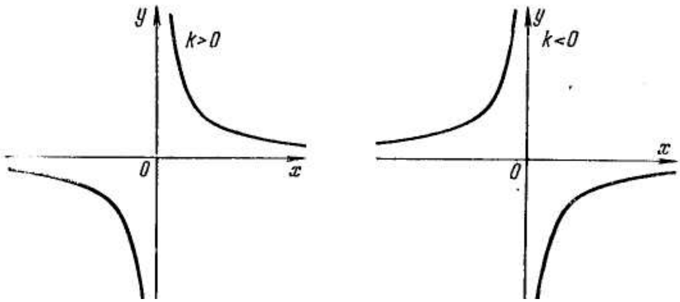


Рис. 1..25

Логарифмическая функция. Логарифмическая функция – это функция вида

$$y=log_a x \tag{1.9}$$

Она определена только при $x>0$, причем рассматривается при основаниях $a>0 (a\neq 1)$. Графики логарифмических функций при различных основаниях показаны на рис.1.26.

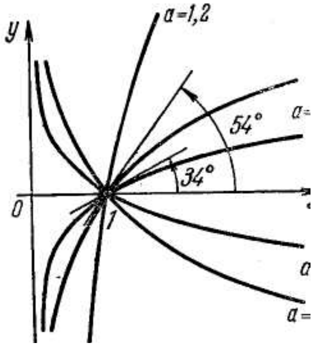


Рис.1. 26

Они не имеют ни оси симметрии ,ни центра симметрии, но обладают асимптотой, которой служит ось *y*. *Все логарифмические функции пропорциональны друг другу,* так как прологарифмировав равенство $a^{\log_a x}=x$ по основанию b, получаем

$$\log_b x=\log_a x\cdot\log_b a=k\log_a x\ (k=\log_b a=1/\log_a b) \qquad (1.10)$$

Таким образом, все графики рис.1. 26 получаются из одного путем равномерного растяжения от оси *x* или сжатия к этой оси. Для дальнейшего имеет значение тот угол, под которым эти графики пересекают ось *x;* конечно, имеется в виду угол между осью *x* и касательной к графику в точке пересечения, так как *углом между двумя линиями в точке их пересечения называется угол между касательными к ним в этой точке.* При указанном растяжении графиков касательная поворачивается, причем для очень больших *a* она наклонена весьма полого, а при *a,* близких к 1, — весьма круто. *При некотором значении a угол пересечения графика логарифмической функции* (1.9) с *осью x равен* 45°; *это значение обозначается буквой e* и играет в высшей математике, как мы увидим в дальнейшем, чрезвычайно большую роль.

На рис1.26 видно, что при *a* =2 рассматриваемый угол пересечения больше 45°, а при *a*=4 — меньше; значит, *e* заключено между *2* и 4. Точные подсчеты, о которых будет сказано дальше, показывают, что

e = 2,71828, с точностью до 10^{-5}. Обозначение числа *e* ввел Эйлер.

Логарифм по основанию e называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln x = \log_e x$. График натурального логарифма показан на рис.1. 27.

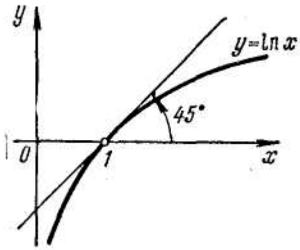


Рис.1.27.

Логарифм при любом другом основании можно выразить через натуральные логарифмы согласно формуле (1.10):

$$\log_a x = \ln x / \ln a \qquad (1.11)$$

Например, формулы для перехода от десятичных логарифмов к натуральным и обратно таковы

$$\lg x = 0{,}4343 \ln x, \quad 1\text{n}x = 2{,}303 \lg x$$

где коэффициент пропорциональности указан с четырьмя верными знаками.

Помимо натуральных логарифмов, в математике широко применяются десятичные(при численных расчетах) и двоичные (в теории информации).

Показательная функция. Показательной функций называется функция

$$y = a^x. \qquad (1.12)$$

Она определена при всех x, причем рассматривается только при основаниях a, > 0 так как для a <0 при возведении в нецелую степень результат может получиться мнимым. Равенство (1.12) получится, если формулу (1.9) разрешить относительно x, что даст $x = a^y$, а затем переставить x и y. Таким образом , показательная и логарифмическая функции обратны друг другу.

Поэтому графики показательных функций, показанные при различных основаниях на рис. 1.28, получаются из соответствующих графиков рис.1. 26 логарифмических функций с помощью зеркального отражения относительно биссектрисы угла между осями координат.

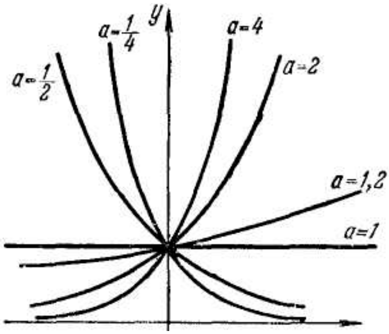


Рис. 1.28

Если $a > 1$, то показательная функция является возрастающей, причем тем быстрее, чем больше a. Если $0 < a < 1$, то показательная функция убывающая.

Обычно за основание показательной функции принимается число *e;* в этом случае показательная (экспоненциальная) функция имеет специальное обозначение $y = e^x = \exp x$.

Показательную функцию с другим основанием можно привести к основанию *e*.

Тригонометрические функции. Периодическая с периодом 2π функция $y = \sin x$ хорошо известна из курса тригонометрии; ее график *(синусоида)* показан на рис. 1.29.

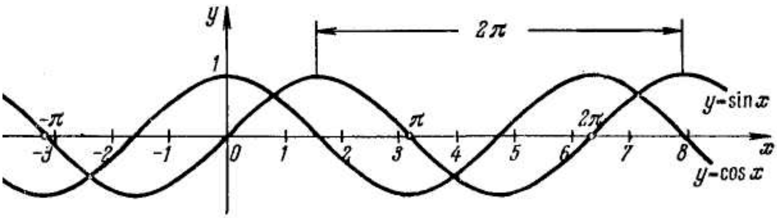


Рис. 1.29

Эта функция нечетная, не имеет точек разрыва и ограничена (заключена между—1 и +1).Так как $\cos x = \sin (x+\pi/2)$то график функции $\cos x$ - это та же синусоида, но сдвинутая на $\pi/2$ влево(1.29) Синусоидальная зависимость появляется в виде

$$y=M \sin(\omega t+\alpha) \qquad (1.13)$$

где независимая переменная t — время, постоянная М>0 называется *амплитудой,* $\omega > 0$ *частотой* (круговой), сумма $\omega t+\alpha$-фазой, постоянная α — *начальной фазой* (она получается из фазы при $t=0$). Легко выяснить, как влияют параметры *M,* ω и α на форму и расположение синусоиды. Амплитуда *M* увеличивает размах синусоиды от —*M* до *M,* частота ω делает период вместо 2π равным $T=2\pi/\omega$), а из-за наличия начальной фазы синусоида сдвигается влево на α/ω, так как $\omega t+\alpha = \omega(t+\alpha/\omega)$, т. е. к аргументу прибавляется α/ω. Получившийся график показан на рис. 1.30

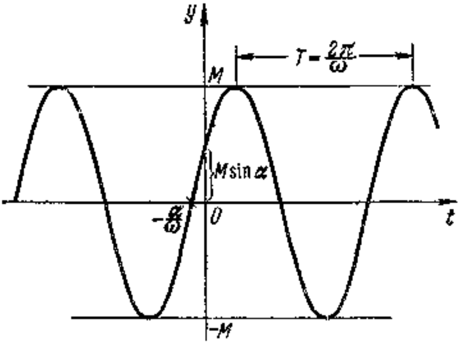


Рис. 1.30

Функция вида (1.13) получается, при преобразовании выражения $A\cos\omega t+B\sin\omega t$. Так как правую часть (1.13) можно переписать в виде М sin α X X cos ωt -|- $M\cos\alpha\sin\omega t$, то для равенства

$$A\cos\omega t+B\sin\omega t\equiv M\sin(\omega t+\alpha) \quad (1.14)$$

должно быть $A=M\sin\alpha$, $B=M\cos\alpha$. Отсюда легко найти *M* и α: $M=\sqrt{A^2+B^2}$, $\mathrm{tg}\alpha = A/B$; четверть, в которой нужно взять α, определяется знаками sin α и cos α, т. е. знаками *A* и *B*.

График этой функции *(тангенсоида)* показан на рис. 1.31; он состоит из бесконечного числа одинаковых кусков и имеет бесконечное число асимптот.

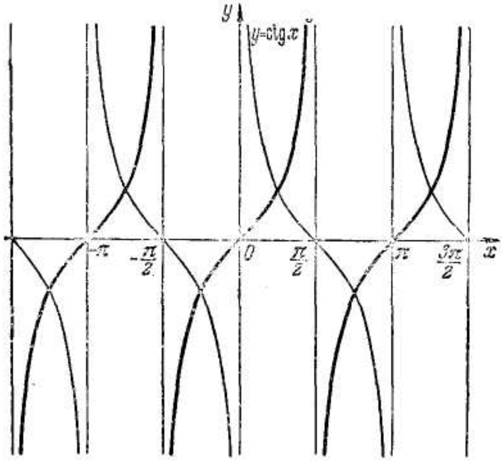


Рис. 1.31

На рис. 1.31 показан также график функции $y=ctgx$. Так как $\mathrm{ctg}x = -\mathrm{tg}(x - \pi/2)$ то линия получается та же, но иначе расположенная.

Функция y = Arcsinx обратна по отношению к функции y=sinx, поэтому график первой (рис.1.32) получается из графика второй путем зеркального отображения относительно биссектрисы угла между осями координат.

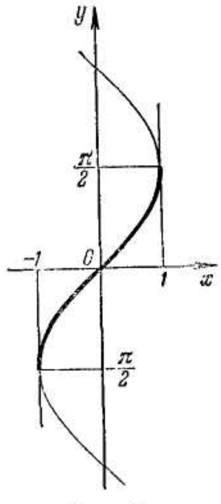


Рис. 1.32

Эта функция многозначная (точнее, бесконечнозначная) и поэтому обычно рассматривается ее главная ветвь (главное значение арксинуса), которая показана на рис.1.32 более жирно. Эта ветвь обозначается

$$y = \arcsin x, \quad -\pi/2 \le \arcsin x \le \pi/2$$

и представляет собой однозначную функцию.

В заключение отметим, что значения arcsin$x$ всегда будут браться отвлеченными (безразмерными).

Аналогичным образом sin$x$ берется от отвлеченного значении x; при этом, конечно, синус числа x — это синус угла в x радиан. Например, sin 1 = sin 57°18' = 0,8415.

Подбор эмпирической формулы. Как говорилось ранее в результате эксперимента часто интересующая нас функция $y=f(x)$ оказывается заданной в табличном виде, и тогда может возникнуть вопрос о подборе для нее приближенной *эмпирической формулы.* При этом обычно начинают с того, что изображают значения функции на миллиметровке или иной приспособленной для этого бумаге. После этого выбирают вид формулы, которой будут пользоваться. Если этот вид не вытекает из каких-либо

общих соображений, то обычно выбирают одну из функций, или простую комбинацию таких функций (сумму степенных или показательных функций и т. п.);
конечно, для этого надо хорошо представлять себе графики этих функций. При этом следят за тем, чтобы подбираемая функция φ *(x)* имела те же характерные особенности, что изучаемая функция *f(x):* скажем, если по своему физическому смыслу *f(x)* четная и *f*(0) = 0, то и функция *f (x)* должна обладать этими свойствами и т. п. Иногда не удается подобрать единую формулу на всем интервале изменения *x* и приходится разбивать этот интервал на части и на каждой подбирать свою формулу.

После выбора вида формулы нужно определить значения параметров, входящих в эту формулу.

Пусть, например, после построения точек получилась картина, изображенная на рис. 1.33.

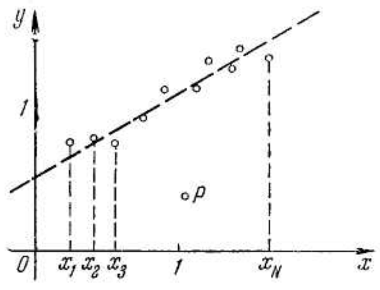


Рис. 1.33

Если при эксперименте или при вычислениях не были исключены существенные ошибки, то точки, значительно выпадающие из общего хода зависимости, как точка *P* на чертеже, отбрасываются. Впрочем, иногда такие точки свидетельствуют о каких-то важных неучтенных факторах, и тогда их надо принять во внимание.

Оставшиеся точки на рис. 1.33 напоминают о линейной зависимости вида $y = ax+b$. Чтобы найти параметры *a* и *b,* проведем на чертеже прямую, к которой экспериментальные точки лежат ближе всего; это легко сделать, наложив на чертеж прозрачную линейку и передвинув ее на глаз в нужное положение.

Так, на рис. 1.33 получаем $b = 0{,}50$, $a = \Delta y/\Delta x = 0{,}58$, т. е. $y = 0{,}58x + 0{,}50$.

Описанный подбор линейной зависимости сравнительно прост. Поэтому при выборе зависимости другого типа часто стараются так ввести новые переменные, чтобы в них зависимость стала линейной, после чего уже найти параметры, входящие в эту зависимость (это *метод выравнивания).* Конечно, так можно делать, если таких параметров не более двух, так как у линейной функции имеются два параметра.

Пусть, например, эксперимент привел к таблице значений:

x	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
y	0,00	0,01	0,03	0,08	0,17	0,29	0,45	0,66	0,91	1,22	1,57

Изображение экспериментальных точек на миллиметровке напоминают о степенной функции вида $y = ax^{\alpha}$. Чтобы найти параметры a и α , прологарифмируем это равенство

и обозначим $lg\,y = Y$, $lg\,x = X$, $lg\,a = A$, Тогда мы приходим к равенству $Y = aX + A$, т. е. в новых переменных зависимость является линейной. С помощью таблицы логарифмов построим таблицу значений новых переменных:

X	−1,0	−0,70	−0,52	−0,40	−0,30	−0,22	−0,15	−0,10	−0,05	0,00
Y	−2	−1,5	−1,1	−0,77	−0,54	−0,35	−0,18	−0,041	0,086	0,196

Полученные точки хорошо ложатся на прямую (рис.1. 34), при проведении которой надо больше ориентироваться. на последние точки, известные с лучшей точностью.

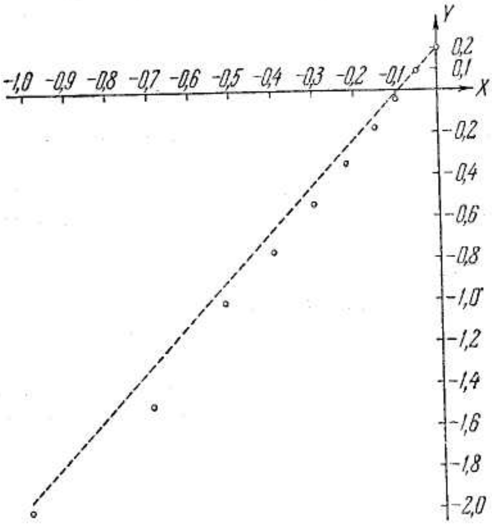


Рис. 1.34

Из чертежа получаем А=0,196, α=*2,44,* т.е. а = 1,57и окончательно получаем y=1,57$x^{2,44}$

Микромодуль 1

Индивидуальные тестовые задания

1.Дана функция $f(x) = x^2 + 6x - 4$. Проверить, что

$f(1) = 3$, $f(3) = 23$.

2. $f(x) = x^2 + 1$. Вычислить значения:

а) $f(4)$. *Отв.* 17. б) $f(\sqrt{2})$. *Отв.* 3.

в) $f(a+1)$. *Отв.* $a^2 + 2a + 2$. г) $f\ a)+1$. *Отв.* $a^2 + 2$. д) $f(a2)$. *Отв.* A^4+1. е)$[\ (a)]^2$. *Отв.* $a^4 + 2a^2+1$. ж) $f(2a)$. *Отв.* $4a^2+1$.

3. $\varphi(x) = (x-1)(3x+5)^{-1}$. Написать выражения: $\varphi\ (1/x)$ и $1/\varphi(x)$. *Отв.*$\varphi(1$-

4. $\varphi\ (x) = \sqrt{x^2} + 4$. Написать выражения; $\varphi(2x)$ и $\varphi\ (0)$.*Отв.* $\varphi(2x)=2\sqrt{x^2}+1;\ \varphi(0)=2$

5. $f(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$. Проверить равенство $f(2\alpha) = 2f(\alpha)/\{1-[f(\alpha)]^2$.

6. $f(x) = lgx$; $\varphi i(x) = x^3$. Написать выражения: а) $f[\varphi(2)]$. *Отв.* 3 lg 2.
б) $f[f(a)]$. *Отв.* 31ga. в) $\varphi[f(a)]$. *Отв.* $[\lg a]^3$.

7. Найти естественную область определения функции $y = 2x^2+1$. *Отв.* $-\infty < x < +\infty$

Построить графики функций:

8. $y = -3x + 5$. 9. $y = 0{,}5x^2+1$. 10. $y = 3 - 2x^2$.
11. $y = x^2+2x-1$.
12. $y=1/(x-1)$. 13. $y = \sin 2x$. 14. $y=\cos 3x$.
15. $y = x^2 - 4x + 6$. 16. $y=tg0{,}5x$. 17. $y=ctg(x/4)$. 17. $y = 3^x$.
18. $y=2^{-x}$. 19. $y = \log_2(1/x)$. 20. $y = x^3+1$ 21. $y=4 - x^3$.
22. $y=1/x^2$. 23. $y = x^4$. 24. $y = x^5$. 25. $y=\sqrt{x}$. 26. $y=(\sqrt{x})^{-1}$
27. $y=\sqrt[3]{x}$. 28. $y = |x|$. 29. $y=\log_2|x|$. 30. $y=\log_2(1-x)$.
31. $y = 3\sin[2x+\pi/3)$. 32. $y=4\cos(x+\pi/2)$.

33. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[-1; 1]$ следующим образом:

$f(x)=1+x$ при $-1 \le x \le 0$;

$1- f(x)=1-2x$ при $0 \le x \le 1$

34. Функция $f(x)$ определена на отрезке [0; 2] следующим образом:

$$f(x) = x^3 \quad \text{при } 0 \le x \le 1$$
$$f(x) = x \quad \text{при } 1 \le x \le 2.$$

Микромодуль 2

Предел

1. 5 . Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Бесконечно малые величины. Бесконечно малые величины— это очень важный класс переменных величин, играющий первостепенную роль в высшей математике. *Переменная величина называется бесконечно малой в некотором процессе, если она в этом процессе безгранично приближается (стремится) к нулю.* Так, в процессе безграничного расширения данной массы газа плотность и давление будут величинами бесконечно малыми; это — пример положительной, непрерывной, монотонной, бесконечно малой величины. При затухающем колебании маятника угол его отклонения от положения равновесия в процессе течения времени также является бесконечно малой величиной, но эта величина уже колеблющаяся и вновь и вновь принимает значения обоих знаков, а также нулевое значение. При рассмотрении последовательности a_1=-1/2^2, a_2=-1/2^2, a_3 =-1/3^2 … общий член $a_n=-1/n^2$ в процессе увеличения номера, n = 1, 2, 3, … является бесконечно малой

дискретной величиной, притом отрицательной, и т. д. Отметим, что при квалификации некоторой величины в качестве бесконечно малой непременно должен быть указан процесс, так как та же величина в другом процессе может уже вовсе не быть бесконечно малой.

Как мы сказали, бесконечно малая величина a должна «безгранично приближаться к нулю». Более подробно это расшифровывается так. В ходе развития процесса должен найтись момент, начиная с которого уже наверняка всегда будет $|a| < 1$; некоторый другой, более поздний момент, начиная с которого всегда будет $|a|<$. 0,1; некоторый третий, еще более поздний момент, начиная с которого всегда будет $a|<0,01$ и т. д. Это выражается такими словами: для *любого* заданного постоянного ε> 0 в ходе развития процесса должен найтись момент, начиная с которого всегда будет $|\alpha|<\varepsilon$. При этом нет надобности всегда такой момент фактически точно указывать: достаточно иметь уверенность, что он когда-либо наступит. Таким образом, бесконечно малая величина в начале своего изменении может быть вовсе не малой: существенно лишь, что она в ходе развития процесса становится *как угодно малой* (конечно, подразумевается, по абсолют-ной величине). Уточним еще понятие «момент в развитии процесса». Если процесс рассматривается развивающимся во времени, то под «моментом» понимается просто момент времени. Однако развитие процесса может характеризоваться изменением не времени, а некоторой другой переменной величины (например, в третьем из приведенных примеров процесс состоит в том, что номер n принимает значения 1, 2, 3...) ; тогда «момент» состоит в том, что эта величина принимает определенное значение.

Пользуясь уточнениями, содержащимися в последних двух абзацах, мы можем сказать, например, что общий член a_n какой-либо последовательности является бесконечно малым в процессе увеличения номера n, если для любого заданного $\varepsilon>0$ должен найтись такой номер $N=N(\varepsilon)$, что при $n>N$ будет обязательно $|a_n|<\varepsilon$

С точки зрения приведенного выше определения постоянная величина, даже весьма малая, не является бесконечно малой; только постоянное число 0 с формальной точки зрения является бесконечно малой величиной.

Надо сказать, что это определение бесконечно малой величины, которым мы будем пользоваться, при его практическом применении приводит к следующему принципиальному затруднению: ни одна реальная величина не может *безгранично* приближаться к нулю. Действительно, в ранее приведенных примерах газ безгранично расширяться не может, а реальный маятник через некоторое время остановится. Рассматривая бесконечно малую массу, мы столкнемся с тем, что если взять массу уж очень малой, придется учитывать молекулярное строение вещества, а взять массу меньше массы элементарных частиц невозможно; то же и в других примерах.

Таким образом, указанное определение бесконечно малой можно применять лишь к *математической модели* реального процесса, в которой действительная картина изменена так, чтобы сделать это применение возможным: мы рассматриваем маятник, который может затухать бесконечно долго, материальные тела «сплошного» (немолекулярного) строения и т. п. Эта совершенно необходимая замена реального процесса на его математическую модель должна проводиться так, чтобы изучаемые стороны процесса не потерпели бы существенного искажения. Но модель есть лишь модель, и забвение этого может привести к принципиальным ошибкам, например, к попыткам навязать без должного обоснования все свойства моделей реальной действительности.

Есть и другой способ истолкования возможности практического применения бесконечно малых, и мы этим способом также будем пользоваться. Именно, *практическая бесконечность* различается от *математической бесконечности.* Так, «практическая» («физическая») бесконечно малая величина это переменная или даже постоянная величина, достаточно малая по сравнению с участвующими «конечными» величинами (настолько малая, чтобы можно было без существенной ошибки применять по отношению к ней свойства «математических» бесконечно малых). В то же время эта величина не должна быть настолько малой, чтобы пришлось учитывать микроэффекты там, где это неуместно, или чтобы отрываться от реально возможных ее значений. Например, при изучении деформации упругого тела практически бесконечно малыми размерами следует считать размеры, достаточно малые по сравнению с размерами тела, но в то же время достаточно большие по сравнению с молекулярными размерами и т. п.

Ниже мы будем пользоваться определением, данным в начале этого пункта, однако время от времени будем вспоминать о высказанных здесь соображениях.

Свойства бесконечно малых. Свойства бесконечно малых сразу вытекают из их определения, данного ранее.

1. *Сумма или разность двух бесконечно малых есть также величина бесконечно малая.* Действительно, если каждое слагаемое безгранично приближается к нулю, то и сумма тоже. Аналогичным образом сумма трех, десяти и вообще любого ограниченного числа бесконечно малых есть также величина бесконечно малая. Отметим, что бывают случаи, когда в ходе рассматриваемого процесса число слагаемых в сумме безгранично растет; тогда, даже если каждое из слагаемых есть величина бесконечно малая, сумма может не быть бесконечно малой..

2. *Произведение бесконечно малой величины на величину ограниченную есть также величина бесконечно малая.* Пусть, например, первый множитель все время заключен в пределах от 0 до 1000, а второй последовательно принимает значения 1, 0,1, 0,01, 0,001 и т. д. Тогда значения произведения в эти моменты будут

последовательно меньше 1000х1=1000, 100, 10, 1, 0,1,0,01,0,001 и т. д.

Из этого свойства вытекает, в частности, что *произведение бесконечно малой на величину постоянную есть величина бесконечно малая. Произведение двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая,* так как бесконечно малая величина является, конечно, частным случаем ограниченной величины. Аналогичным образом произведение любого числа бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

Отметим, что *частное от деления двух бесконечно малых может не быть бесконечно малым.* Если, например, $\alpha=1/n$, $\beta=1/n^2$, $\gamma=1/n+1/n^2$, где n принимает последовательные значения $1, 2, 3, \ldots$, то величины α,β и γ — бесконечно малые. В то же время из их отношений $\beta/\alpha = 1/n$; $\gamma/\alpha = 1+1/n$; $1/n$; $\alpha/\beta= n$ первое является бесконечо малым, второе приближается к 1, а третье даже безгранично возрастает..

Бесконечно большие величины. *Переменная величина х называется бесконечно большой в некотором процессе, если она в этом процессе безгранично возрастает по абсолютной величине;* тогда пишут $|x|\to\infty$. Бесконечно большая величина может быть положительной ($x\to\infty$, иногда пишут $x\to+\infty$), отрицательной ($x\to-\infty$), но может также и менять знак: например, величина $x_n=(-2)^n$ при возрастании номера принимает значения —2, 4, —8, 16, ..., т. е. является бесконечно большой. Подробная расшифровка понятия «безгранично возрастает» аналогична той, которая была дана ранее для понятия «безгранично приближается к нулю», но, конечно, надо рассматривать неравенства вида $|x|>N$ Это значит, что, начиная с некоторого момента, величина должна наверняка удовлетворять неравенству $|x|> 1$, начиная с некоторого другого, более позднего момента, -,неравенству $|x|>$ 1**0,** начиная с третьего **момента, - неправенству** $|x|> 100$ и т. д.

Отметим некоторые простые свойства бесконечно больших. *Величина, обратная бесконечно большой, является бесконечно малой, а величина, обратная бесконечно малой, является бесконечна большой.* Условно это записывают так:

$$1/0=\pm\infty,\ 1/\infty=0$$

Такие записи, которыми мы будем пользоваться, надо правильно понимать. Например, первая обозначает: если в равенстве $1/x=1$и величина x безгранично возрастает, то в том же процессе величина α безгранично приближается к пулю (или, если x «практическая» бесконечно большая, то α — «практическая бесконечно малая). Аналогично расшифровываются все формулы, содержащие знак бесконечности ∞. Так, формула $tg\pi/2=\pm\infty$ является условной кратой записью следующего факта: в процессе, когда величина φ безгранично приближается к $\pi/2$, величина x= tg<φ безгранично возрастает по абсолютной величине, т. е. является бесконечно большой, и т. п. Таким путем удается во многих случаях манипулировать со знаком ∞, *как* с обычным числом, хотя, конечно, ∞ не является конкретным числом, но лишь значком для переменной бесконечно большой величины, причем в разных случаях разной.

Сумма бесконечно большой величины и величины ограниченной является величиной бесконечно большой, так как первое слагаемое «перетягивает». Сумма двух бесконечно больших одинакового знака есть также бесконечно большая. В отличие от этого сумма двух бесконечно больших противоположного знака может и не быть бесконечно большой, бесконечности могут «скомпенсироваться». Это записывают так: $\infty+\infty = \infty$; $\infty - \infty$ есть *неопределенность.* Последнее показывает, что со знаком ∞ не всегда можно действовать как с обычным числом: вовсе не всегда $\infty - \infty = 0$, так как $\infty - \infty$ — это краткая запись разности $X - Y$, где X и Y—бесконечно большие, вообще говоря, различные, а тогда в разных конкретных примерах разность будет вести себя совершенно по-разному.

Произведение двух бесконечно больших есть величина бесконечно большая. Более того, произведение бесконечно большой на величину, большую по абсолютному значению некоторой положительной постоянной, есть величина бесконечно большая. В то же время частное от деления двух бесконечно больших, подобно частному от деления двух бесконечно малых, есть неопределенность.

1. 6. Пределы

В этом разделе мы будем рассматривать упорядоченные переменные величины, изменяющиеся специальным образом, который определяется терминами «переменная величина стремится к пределу». Во всем дальнейшем курсе понятие предела переменной будет играть фундаментальную роль, так как с ним непосредственно связаны основные понятия математического анализа—производная, интеграл и др.

Определение. Говорят, *что переменная величина х в некотором процессе стремится к конечному пределу а, если величина а постоянная и х в этом процессе безгранично приближается к а.* Тогда пишут

$$x \to a \quad \text{или} \quad \lim x = a$$

(lim — от латинского «limes», что значит«предел»).

Таким образом, конечным пределом *переменной* величины, если он имеется, служит величина *постоянная.*

Согласно данному определению *бесконечно малые величины — это величины, стремящиеся к нулю,* т. е. *имеющие пределом нуль. Бесконечно же большие величины конечного предела не имеют.*

Сказать «x безгранично приближается к a» — это все равно, что сказать «разность между x и a безгранично приближается к нулю», т. е. $x - a = \alpha$ есть бесконечно малая. Последнее же равенство можно переписать в виде

$$x = a + \alpha \quad \text{или} \quad x = (\lim x) + \text{б. м.}$$

В терминах геометрических определение предела может быть формулировано следующим образом:

Постоянное число a есть *предел* переменной x, если для любой наперед заданной как угодно малой окрестности с центром в точке a
и радиусом ε найдется такое значение x, что все точки, соответствующие последующим значениям переменной, будут находиться в этой окрестности. Переменная величина x может стремиться к своему пределу a оставаясь меньше его, т. е. со стороны меньших значений; тогда условно пишут $x \to a - 0$ или $\lim x = a - 0$ (это, конечно, условная запись, так как $a - 0 = a$). Если x в процессе стремления к a остается больше a, то пишут $x \to a + 0$. Наконец, x может стремиться *к а,* становясь вновь и вновь то больше, то меньше a, как при затухающих колебаниях. Все эти случаи показаны на рис. 1.35.

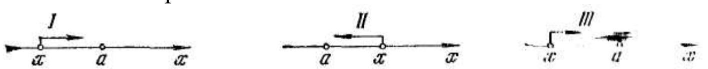


Рис. 1.35

Можно подвести итог о видах переменных величии. Переменная величина x в некотором процессе может быть одного из следующих видов:

1) Ограниченная и притом имеющая предел; частным случаем, если предел равен нулю, является величина бесконечно малая. Для противопоставления иногда ограниченную величину называют *конечной* лишь в случае, если она не является бесконечно малой; например, можно говорить о бесконечно малой и конечной массах и т. п.
2) Ограниченная, но не имеющая предела; примером может служить отклонение маятника в случае незатухающих колебаний.
Такая величина является колеблющейся (рис. 1.36)

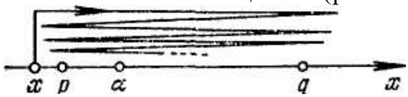


Рис. 1.36

3) Неограниченная и притом бесконечно большая. Тогда пишут $\lim x = \pm\infty$ и говорят, что x имеет *бесконечный предел.* Неограниченная, но не бесконечно большая; примером может служить отклонение колеблющегося тела от положения равновесия в случае резонанса. Такая величина также будет колеблющейся и то уходит «в бесконечность» все дальше и дальше, то возвращается на близкое расстояние от исходной точки (рис. 1.37).

Рис. 1.37

Рассмотрим несколько примеров переменных, стремящихся к пределу.

П р и м е р 1. Переменная величина x последовательно принимает значения
$x_1=1+1$, $x_2=1+1/2$, $x_3=1+1/3$, …, x_n+1/n, …

Докажем, что эта переменная величина имеет предел, равный единице. Имеем

$$|x_n-1|=|(1+1/n)-1|=1/n.$$

Для любого ε все последующие значения переменной, начиная с номера *n,* где $1/n < \varepsilon$, или $n > 1/\varepsilon$, будут удовлетворять неравенству

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ ч. т. д.}$$

Заметим, что здесь переменная величина стремится к пределу, убывая.

П р и м е р 2. Переменная величина *x* последовательно принимает значения

$$x_1=1-1/2,\ x_2=1+1/2^2,\ x_3=1-1/2^3,\ x_4=1+1/2^4,\ \ldots,\ x_n=1+(-1)^n 1/2^n,\ \ldots$$

Эта переменная имеет предел, равный единице. Действительно,

$$|x_n-1|=|(1+(-1)^n/2^n)-1|=1/2^n$$

Для любого ε, начиная с номера n, удовлетворяющего соотношению $1/2^n < \varepsilon$., из которого следует:

$$2n > 1/\varepsilon, \quad n \lg 2 > \lg(1/\varepsilon) \quad \text{или} \quad n > \lg(1/\varepsilon)/\lg 2$$

все последующие значения *x* будут удовлетворять соотношению $|x_n - 1| < \varepsilon$. Отметим, что здесь значения переменной величины то больше, то меньше предела. Переменная величина стремится к пределу, «колеблясь вокруг него».

З а м е ч а н и е 1. Как указывалось ранее, постоянную величину *c* часто рассматривают как величину переменную, все значения которой одинаковы: $x=c$.

Очевидно, что предел постоянной будет равен самой постоянной, так как всегда выполняется неравенство $|x - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ при любом ε.

З а м е ч а н и е 2. Из определения предела следует, что переменная величина не может иметь двух пределов. Действительно, если $\lim x = a$ и $\lim x = b$ ($a < b$), то *x* должен удовлетворять сразу двум неравенствам:

$$|x - a| < \varepsilon \text{ и } |x - b| < \varepsilon$$

при произвольно малом ε, а это невозможно, если $\varepsilon < (b - a)/2$.

Свойства пределов. 1. *Если рассматриваемая переменная величина имеет предел, то только один* (очевидно из определения).

2. *Предел постоянной величины равен ей самой* (очевидно).

3.Если в одном и том же процессе $x \to a$, а $y \to b$, то $x+y \to a+b$. Иначе это можно записать таким образом:

$$\lim (x+y) = \lim x + \lim y, \tag{1.15}$$

а сформулировать так: *предел суммы равен сумме пределов.* Для доказательства запишем $x = a+\alpha$; $y=b+\beta$, где α и β— бесконечно малые. Тогда $x+y = (a+b) + (\alpha + \beta)$. Значит, переменная величина $x+y$ представлена в виде постоянной $a+b$ и бесконечно малой $\alpha+\beta$.Следовательно, $(x+y)\to (a+b)$.

Полученный результат очень прост. Он говорит, по существу, что если 3,002≈3, а 2,001 ≈ 2, то 5,003 ≈ 5.

4. *Предел алгебраической суммы двух, трех и вообще определенного числа переменных равен алгебраической сумме пределов этих переменных:*

$$\lim (u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots +\lim u_k$$

5. *Предел произведения равен произведению пределов;* более полная формулировка: *если сомножители имеют пределы, то и произве*
дение имеет предел, который равен произведению пределов сомно
жителей. Действительно, при старых обозначениях $xy = ab+$
$+ (a\beta+b\alpha + \alpha\beta) \to ab$, т. е.

$$\lim (xy) = \lim x \lim y. \tag{1.16}$$

Здесь, мы взяли лишь две переменные величины, но легко проверить, что эти свойства сохраняются и для любого постоянного числа переменных величин. Например,

$$\lim (xyz) = \lim [(xy)z] = \lim (xy) \lim z = \lim x \lim y \lim z.$$

6. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е. $\lim (Cx) = C\lim x$, где C= const..

7. Предел частного равен частному от деления пределов, т. е.

$$m(x/y) = \lim x/\lim y \tag{1.17}$$

за исключением случаев, когда как числитель, так и знаменатель стремятся к нулю, т. е. в правой части получается неопределенное выражение 0/0.

Тогда $x/y=(a+\alpha)/(b+\beta)=a/b+\{(a+\alpha)/(b+\beta)-a/b)=a/b+(\alpha b-\beta a)/b(b+\beta)$
В последней дроби числитель бесконечно мал, а знаменатель $\approx b^2=\text{const}\neq 0$, поэтому и вся вторая дробь бесконечно мала, а первая постоянна откуда и вытекает наше утверждение.

Если же $\lim y=0$, а $\lim x\neq 0$, то $x/y=(1/y)\cdot x\to\pm\infty$

Поэтому с обеих сторон формулы (1.17) получается $\pm\infty$.
Формулы (1.15.), (1.16), и (1.17) справедливы не только для конечных, но для бесконечных пределов, за исключением случаев, когда в правых частях получаются неопределенные выражения вида $\infty - \infty$, $0\cdot\infty$ и ∞/∞ о которых будет разговор далее.

8. Если $x\to a$, причем $a>0$, то $x > 0$, во всяком случае, если процесс зайдет достаточно далеко, т.е. начиная с некоторого момента. Это ясно из определения предела.

9. *В неравенстве можно перейти к пределу:* если $x\leq y$, то $\lim x\leq \lim y$ (естественно, если эти пределы существуют). Действительно, обозначим $z = y - x$. Тогда $z\geq 0$, поэтому z не может безгранично приближаться к постоянной отрицательной величине. Значит, $\lim z\geq 0$, $\lim (y - x) \geq 0$, $\lim y - \lim x \geq 0$.

Заметим, что если $x < y$, то в пределе может получиться либо $\lim x < \lim y$, либо $\lim x = \lim y$, если разница между x и y в пределе сойдет на нет. Таким образом, пока не проведено дополнительное исследование, то строгое неравенство $x < y$ в пределе надо заменить на нестрогое $\lim x \leq \lim y$.

10. Если $x\leq y \leq z$ и в одном и том же процессе $x \to a$ и $z \to a$, то и $y \to a$.

11. Если величина x монотонно возрастает, то она либо возрастает безгранично, т. е. $x\to+\infty$, либо же она ограничена и тогда стремится к некоторому пределу, $x\to a - 0$. При этим, если x, ограничено сверху постоянной величиной A, то и $\lim x=a\leq A$. Аналогично ведет себя монотонно убывающая величина. Это утверждение на самом деле является очень глубоким свойством «полноты» совокупности вещественных чисел. Если бы мы пользовались только рациональными числами, то все предыдущие свойства пределов имели бы место, но не свойство 11, так как из рациональных значений в пределе можно получить иррациональное

Таким образом, *ограниченная монотонная величина обязательно имеет конечный предел;* ограниченная немонотонная величина может предела не иметь .

Заметим в заключение, что размерность величины при переходе к пределу сохраняется: если $x \to a$, то [x] = [a].

Сумма числового ряда. Идея предельного перехода непосредственно применяется к важному понятию суммы ряда. Предварительно введем полезное сокращенное обозначение:

$$a_p + a_{p+2} + \ldots + a_{q-1} + a_q = \sum_{k=p}^{q} a_k \qquad (1.18)$$

Здесь $\sum\limits_{k=p}^{q}$ *знак суммирования* который указывает, что в следующее за ним выражение надо подставить $k=p,\ p+1,\ \ldots,\ q$, а результаты сложить; a_k — *член суммы* (слагаемое), k — номер этого члена («индекс»), p и q — *нижний и верхний пределы суммирования,* указывающие границы изменения индекса. Например,

$$\sum_{k=p}^{q} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} (= 0{,}2774)$$

Отметим сразу, что *сумма не зависит от обозначения индекса суммирования, индекс суммирования является немым,* т. е. не входит в ответ и потому может быть обозначен любой буквой.

Перейдем теперь к «бесконечным суммам», точнее, к понятию числового ряда. *Числовым рядом* называется бесконечное выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (1.19)$$

при этом слагаемые a_1, a_2, a_3, . . .—числа, называемые *членами ряда.* Чтобы определить понятие суммы ряда (1.19), надо сначала составить *«частные суммы» ряда* (1.19):

$$S_1 = a_{1;}; S_2 = a_1 + a_2; S_3 = a_1 + a_2 + a_3; ...; S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k; ...$$

Если с возрастанием номера частные суммы стремятся к определенному конечному пределу, то ряд (1.19) называется *сходящимся,* а его *сумма S* полагается равной

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Для сходящегося ряда частные суммы с достаточно большими номерами практически просто равны друг другу и равны полной сумме ряда. Если конечного предела частных сумм нет, то ряд (1.19) называется *расходящимся.* В частности, если частные суммы стремятся к бесконечности, то ряд (1.19) называется *расходящимся к бесконечности.*

Расходящийся ряд конечной суммы не имеет.

Подобным образом определяется произведение бесконечного числа сомножителей и вообще результат любого бесконечного процесса: для этого сначала осуществляется конечный процесс, а затем производится предельный переход.

Отбрасывание или дописывание одного члена в ряде (1.19) не может нарушить факта сходимости или расходимости, т. е. если ряд (1.19) сходился, то он и будет сходиться, хотя сумма изменится, а если он расходился, то и будет расходиться. Действительно, если наряду с (1.19) рассмотреть ряд $a_2 + a_3 + ... + a_n + ..$. , то его частная сумма отличается от соответствующей частной суммы ряда (1.19) на постоянное число a_1 и потому если одна из этих сумм стремится к пределу, то и другая тоже. Повторяя такое отбрасывание и дописывание членов, мы придем к выводу, что *произвольное изменение конечного числа членов ряда* (1.19) *не может нарушить факта сходимости или расходимости.*

Если ряд (1.19) сходится, то и ряд $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ...$ сходится; его сумма называется остатком ряда (1.19)

Выведем необходимый признак сходимости ряда(1.19) . Так как $S_{n-1}=a_1+a_2+\ldots a_{n-1}$, $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$, *то* $a_n=S_n-S_{n-1}$, И ПОТОМУ ЕСЛИ РЯД (1.19) сходится, то

$$a_n \to_{n\to\infty} S-S=0 \tag{1.20}$$

т.е. «общий член» a_n ряда (1.19) *с возрастанием номера стремится к нулю.* Этот признак не является достаточным для сходимости; например для ряда $1+1/\sqrt{2}+1/\sqrt{3}+\ldots+1/\sqrt{n}+\ldots$ этот признак выполнен, но ряд расходится к бесконечности.

Мы будем далее изучать ряды различного вида где, в частности, будут указаны строгие признаки их сходимости. Однако отдельными рядами мы будем пользоваться раньше, поскольку для них вопрос о сходимости па практике обычно выясняют совсем просто, хотя и не совсем строго, следующим образом. Вычисляют члены одни за другим, и *если они достаточно быстро выходят за пределы принятой точности вычисления, причем нет основания ожидать, что дальнейшие члены дадут в сумме существенный вклад, то все дальнейшие члены просто отбрасывают, т.е. заменяют ряд конечным числом его членов (частной суммой).*

1.7 Сравнение бесконечных величин

Сравнение бесконечно малых. Две бесконечно малые сравниваются друг с другом при помощи исследования их отношения. Пусть в некотором процессе рассматриваются бесконечно малые величины $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Тогда

1) если $\beta/\alpha \to 0$, то говорят, что β *быстрее стремится к нулю,*

чем а, или что β *имеет высший порядок малости, чем* α, а α *имеет*
низший порядок малости, чем β, и пишут $|\beta| \ll |\alpha|$ или $|\alpha| \gg |\beta|$. Таким образом, в данном случае β не просто бесконечно мала, но составляет бесконечно малую часть другой бесконечно малой α. Например, если ω — объем бесконечно малого кубика, а σ — объем столбика с таким же основанием, с постоянной высотой a, то $\omega \ll \sigma$, так как если обозначить через h длину ребра, то $h \to 0$ и $\omega/\sigma = h^3/ah^2 = h/a \to 0$.

2) если $\beta/\alpha \to \infty$, то $\alpha/\beta = 1/(\beta/\alpha) \to 0$, т.е $|\alpha| \ll |\beta|$;

3) если отношение β/α имеет конечный предел, отличный от нуля, то говорит, что *α и* β имеют *одинаковый порядок малости;* в этом случае ни одна из величин *а,* β не может стать чрезмерно меньше другой. В частности, если указанный

предел равен единице, то величины *а* и β называются *эквивалентными;* тогда пишут $\alpha \sim \beta$. Например, если $x \to 0$, то величины x и $x+x^2$ эквивалентны; величины же $2x$ и $x+x^2$ имеют в этом процессе одинаковый порядок малости, но не эквивалентны, так как $2x/(x + x^2) \to 2$. Можно проверить следующие свойства:

1) *если* α *и* β *ИМЕЮТ один порядок малости, а* $|y| \ll |\alpha|$, *то* $|\gamma| \ll |\beta|$;

2) *если а и* β, *а также* β *и у имеют один порядок малости, то и а и у тоже;*

3) *если а и* β *имеют один порядок малости и одинаковый знак, то а +* β *имеет тот же порядок малости, что а и* β; если α и β имеют противоположные знаки, то α+β может получиться высшего порядка малости и т.п.

4) *Если* $\beta/\alpha \to \neq 0$ *и обозначить*

$\beta - k\alpha = \gamma$, *т. е.* $\beta = k\alpha + \gamma$,

то $|\gamma| \ll |\alpha|$. Другими словами, величины одного порядка малости прямо пропорциональны друг другу, с точностью до слагаемого высшего порядка малости. Это сразу следует из того, что

$\gamma/\alpha = (\beta - k\alpha)/\alpha = \beta/\alpha - k \to 0$.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

Справедливы следующие простые свойства:

1) *если* $\alpha \sim \beta$, *то* $\beta \sim \alpha$;

2) *если* $\alpha \sim \beta$ *и* $\beta \sim y$, то $\alpha \sim \gamma$;

3) *если* $a \sim \beta$, *то* $\alpha = \beta + \gamma$. г<

другими словами, *эквивалентные бесконечно малые различаются на величину высшего порядка малости.* Наоборот, *если* $\alpha = \beta + \gamma$, *где* $|\gamma| \ll |\beta|$, то $\alpha \sim \beta$; другими словами, *прибавляя к бесконечно малой величине величину высшего порядка, получим величину, эквивалентную первой;*

4) *если* $\alpha \sim \alpha_1$, и $\beta \sim \beta_1$, *то* $\lim x\alpha/y\beta = \lim x\alpha_1/y\beta_1$, *где* x *и* y — *любые величины;* другими словами, *при нахождении предела можно бесконечно малые множители, стоящие в числителе и знаменателе, заменять эквивалентными величинами.*

Важные примеры. 1. *Длины, бесконечно малой дуги и стягивающей ее хорды являются эквивалентными бесконечно малыми величинами,* т. е. $\breve{MN}/MN \to 1$ при $N \to M$ (рис. 1.37).

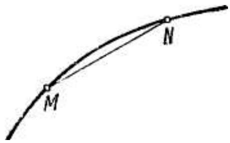


Рис. 1.37

Это объясняется тем, что малая дуга почти не успевает изменить свое направление, т. е. «искривиться». В результате весьма малая хорда, увеличенная «под микроскопом» до постоянной конечной величины, практически неотличима от стягиваемой этой хордой дуги. При более строгом исследовании это наглядное свойство иногда принимается за аксиому, на которой основано само понятие длины дуги, а иногда выводится из аналогичных аксиом.

2. Применяя этот результат к дуге окружности (рис. 1.38), получим

$$MN/M\breve{}N=2PN/2Q\breve{}N=2R\sin x/2Rx=\sin x/x\to 1$$

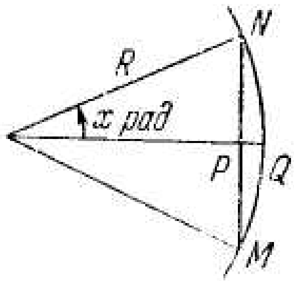


Рис. 1.38

Мы подразумевали, что $x > 0$, но при перемене знака x выражение $(\sin x)/x$ не меняется, т. е. знак x не играет роли. Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad . \tag{1.21}$$

Заодно ми видим, что $\sin x < x$ при $x>0$ (так как $MN < M\breve{}N$). Из рис.1.39 мы видим, что

$$\operatorname{tg}\beta=\ln(1+h)/h$$

Если же $h\to 0$, то $\beta\to\alpha=45^\circ$, $tg\beta\to tg\alpha$, , т. е.

$$\lim_{h\to 0} [\ln(1+h)/h]=1 \qquad (1.22)$$

На рис.1.39 принято , что $h>0$, но тот же результат получится при $h<0$.

Порядок малости. Если в одном процессе рассматриваются

две бесконечно малые α и β, причем β имеет такой же порядок малости, что и a^k, то говорят, что β имеет *k-й порядок малости, по сравнению с а.* Скорость стремления α к нулю служит как бы эталоном, с которым сравнивается скорость стремления β к нулю.

Примеры. Пусть $x\to 0$, т. е. x—бесконечно малая величина; примем ее за эталон. Тогда, если $y = 2x^2$, то y имеет второй порядок малости (по сравнению с x), так как y и x^2 имеют одинаковый порядок малости; если $z = 4x^3+x^7$, то $г$ имеет третий порядок малости, так как z и x^3 имеют одинаковый порядок малости ($z/x^3 \to 4$). *Вообще порядок, малости суммы (или разности) величин разного порядка определяется наименьшим из по рядков малости слагаемых.* Именно член наименьшего порядка малости является *главным* в такой сумме; другими словами, все остальные члены бесконечно малы и сравнении с ним, а главный член почти полностью исчерпывает всю сумму, если процесс зайдет достаточно далеко. Далее, если $u=\sqrt{x} — x^2$, то u имеет половинный порядок малости и потому является величиной низшего порядка малости, чем x, т. е. $u/x\to\infty$, $u»x$. Вообще, если порядок малости меньше единицы, то величина имеет низший порядок малости, чем эталон. При перемене эталона порядок малости может измениться, так что этот эталон необходимо указывать. Например, величина $y = X^6$ при $x \to 0$ имеет шестой порядок по сравнению с x, по лишь второй порядок по сравнению с x^3.

Сравнение бесконечно больших. Сравнение бесконечно больших производится аналогично сравнению бесконечно малых. Некоторая разница имеется в терминах: так, если $x/y\to 0$, где величины x и y — бесконечно большие, то говорят, что x имеет низший, порядок по сравнению с y, а у — высший порядок по сравнению с x; по пишут все равно $|x|«|y|$ или $x = 0(y)$. (Эти записи применяются во всех случаях, когда

$x/y \to 0$, даже если величины $\boldsymbol{x}$ и y и не являются бесконечно большими; отметим еще запись $x = 0\ (y)$, которая означает, что отношение x/y ограничено.)

1.8. Предел функции

В этом разделе будем рассматривать некоторые случаи изменения функции при стремлении аргумент x к некоторому пределу a или к бесконечности.

Определение 1. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a или в некоторых точках этой окрестности. *Функция $y=f(x)$ стремится к пределу b ($y \to b$) при x, стремящемся к a ($x \to a$),* если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно указать такое положительное число δ что для всех x, отличных от a и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$ имеет место неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Если b есть *предел функции $f(x)$* при $x \to a$, *то пишут*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Если $f(x) \to b$ при $x \to a$, то на графике функции $y=f(x)$ это иллюстрируется следующим образом (рис. 1.40); так как из неравенства $|x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, то это значит, что для всех точек x, отстоящих от точки a не далее чем на δ, точки M графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$.

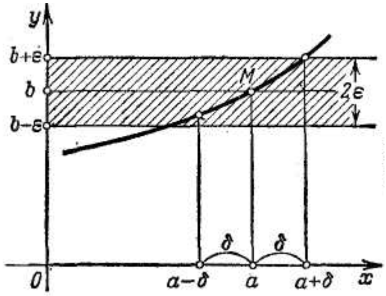


Рис. 1.40

Если $f(x)$ стремится к пределу b_1 при x, стремящемся к некоторому числу a так, что x принимает только значения, меньшие a, то пишут

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b_1$$

и называют b_1 *пределом функции* $f(x)$ *в точке а слева.* Если x принимает только значения большие, чем a, то пишут

$\lim_{x\to a+0}(x)= b_2$ и называют b_2 *пределом функции в точке а справа* (рис. 1.41).

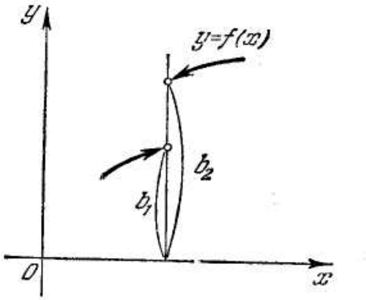


Рис. 1.41

Можно доказать, что если предел справа и предел слева существуют и равны, т. е. $b_1 = b_2$, то b и будет пределом в смысле данного выше определения предела в точке a. И обратно, если существует предел функции b в точке a, то существуют пределы функции в точке a справа и слева и они равны.

Пример 1. Докажем, что $\lim_{x\to 2}(3x+1) = 7$

Действительно, пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$; для того чтобы выполнялось неравенство

$$|(3x+1)-7| < \varepsilon,$$

необходимо выполнение следующих неравенств:

$$|3x-6| < \varepsilon, \quad |x-2| < \varepsilon/3, \quad -\varepsilon/3 < x-2 < \varepsilon/3$$

Таким образом, при любом ε для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x - 2| < \varepsilon/3 = \delta$, значение функции $3x + 1$ будет отличаться от 7 меньше чем на ε. А это и значит, что 7 есть предел функции при $x \to 2$.

Для существования предела функции при $x \to a$ не требуется, чтобы функция была определена и точке $x = a$. При нахождении предела рассматриваются значения функции в окрестности точки *a,* отличные от *a*.

Функция, стремящаяся к бесконечности.

Мы рассмотрели случаи, когда функция $f[x)$ стремится к некоторому пределу b при $x \to a$ или при $x \to \infty$.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $y=f(x)$ стремится к бесконечности при некотором способе изменения аргумента.

Определение. Функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$, т. е. является *бесконечно большой* величиной при $x \to a$, если для каждого положительного числа *M,* как бы велико оно ни было, можно найти такое $\delta > 0$, что для всех значений *x,* отличных от *a*, удовлетворяющих условию

$|x-a|<\delta$, имеет место неравенство $|f(x)|>M$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$ *, то пишут:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

или $f(x) \to \infty$ *при* $x \to a$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$ и при этом принимает только положительные или только отрицательные значения, соответственно пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ или } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Пример 1. Докажем, что

$$\lim_{x \to a} (1-x)^{-2} = +\infty$$

Действительно, при любом $M>0$ будем иметь:

$$(1-x)^{-2}>M,$$

если только

$(1-x)^2<1/M$, $|1-x|<1/\sqrt{M}=\delta$ Функция $(1-x)^{-2}$ принимает только положительные значения (рис.1.42).

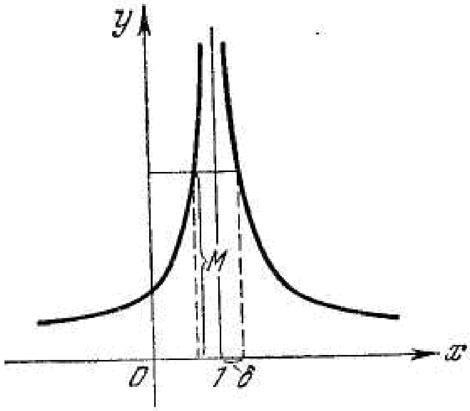


Рис. 1.42

Пример 2. Докажем, что $\lim_{x \to 0}(-1/x) = \infty$.Действительно, при любом M>0 будем иметь
| — 1/x| > *M,* если только

$$|x| = |x - 0| < 1/M = \delta$$

Здесь (-1/x) > 0 при x < 0 и (—1/x) < 0 при x>0 (рис. 1.43).

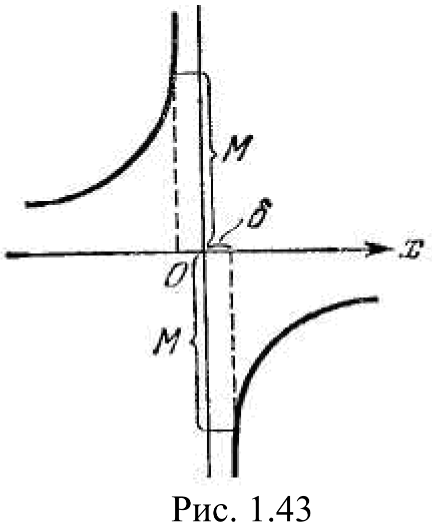


Рис. 1.43

Если функция *f(x)* стремится к бесконечности при $x\to\infty$, то пишут:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

и, в частности, может быть:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

Например,

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \text{ и т. п.}$$

Замечание. Функция $y=f(x)$ при $x\to a$ или при $x\to\infty$ может не стремиться к конечному пределу или к бесконечности.

Пример 3. Функция $y = \sin x$, определенная на бесконечном интервале $-\infty < x<+\infty$, при $x\to\infty$ не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечности (рис. 1.44).

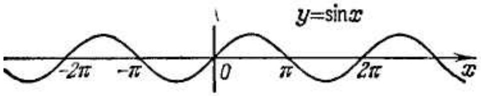


Рис. 1.44

Пример 4. Функция $f = \sin 1/x$, определенная при всех значениях *x,* кроме значения $x = 0$, не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечности при $x\to 0$. График этой функции изображен на рис. 1.45

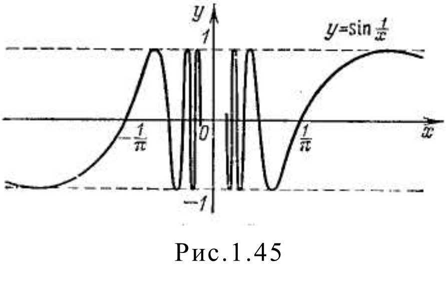


Рис.1.45

О п р е д е л е н и е 1 . Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной* в данной области изменения аргумента x, если существует положительное числи M такое, что для тех значений x , принадлежащих рассматриваемой области, будет выполнятся неравенство $|f(x)|\le M$.Если же такого числа M не существует, то функция $f(x)$ называется *неограниченной* в данной области

П р и м е р 5. Функция $y = \sin x$, определенная в бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, является ограниченной, так как при всех значениях x

$$|\sin x|\le 1=M$$

О п р е д е л е н и е 2 . Функция $f(x)$ называется *ограниченной при $x\to a$*, если существует окрестность с центром в точке a, в которой данная функция ограничена.

О п р е д е л е н и е 3 . Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной при* $x\to\infty$, если существует такое число $N>0$, что при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, функция $f(x)$ ограничена.

Вопрос об ограниченности функции, стремящейся к пределу, решается следующей теоремой.

Т е о р е м а 1. *Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, при этом b есть конечное число,то функция $f(x)$ является ограниченной при $x \to a$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из равенства $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

следует, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, что в окрестности $a - \delta < x < a + \delta$ будет выполняться неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

или

$$|f(x)| < |b| + \varepsilon.$$

А это и значит, что функция $f(x)$ ограничена при $x\to a$.

З а м е ч а н и е Из определения ограниченной функции $f(x)$ следует, что если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

или

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

т. е. если $f(x)$ есть бесконечно большая, то она является неограниченной. Обратное не верно: неограниченная функция может и не быть бесконечно большой.

Например, функция $y = x\sin x$ при $x \to\infty$ является неограниченной, так как для любого $M > 0$ можно найти такие значения x, что $|x\sin x| > M$. Но функция $y = x\sin x$ не является бесконечно большой, поскольку она обращается в нуль при $x=0,\pi, 2\pi, \ldots$ График функции $y=x\sin x$ изображен на рис. 1.42.

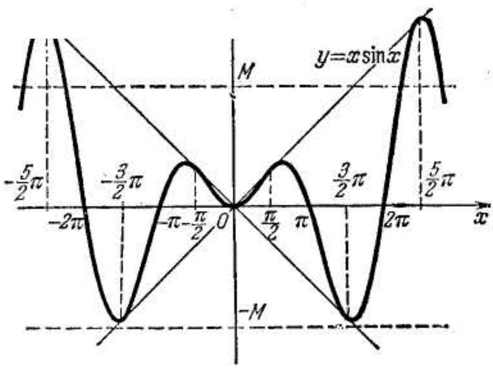


Рис.1.42

Т е о р е м а 2. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b\neq 0$, *то*

функция $y = 1/f(x)$ *есть ограниченная функция при* $x\to a$. Доказательство. Из условия теоремы следует, что при произвольном $\varepsilon>0$, в некоторой окрестности точки $x=a$ будем иметь $|f(x)-b|<\varepsilon$, или $||f(x)|-|b||<\varepsilon$, или $-\varepsilon<|f(x)|-|b|<\varepsilon$, или $|b|-\varepsilon<|f(x)|<|b|+\varepsilon$.Из последних неравенств следует $1/|b|-\varepsilon>1/|f(x)|>1/|b|+\varepsilon$; взяв, например, $\varepsilon=1/10|b|$, получаем:$10/9|b|>1/|f(x)|>10/11|b|$. А это значит, что функция $1/f(x)$ ограничена.

Функции, стремящиеся к нулю

Здесь будем рассматривать функции, стремящиеся к нулю при некотором характере изменения аргумента.

Определение. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$ или при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$.

Из определения предела следует, что если, например, $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$,

то это значит, что для любого наперед заданного произвольно МАЛОГО положительного е найдется $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| <\delta$, будет удовлетворяться условие $|\alpha(x)| <\varepsilon$.

Пример 1. Функция $\alpha=(x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x \to 1$, так как $\lim\limits_{x\to 1} \alpha= \lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2 = 0$ (рис. 1.43).

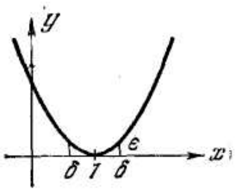


Рис. 1.43

Пример 2. Функция $\alpha=1/x$ есть бесконечно МАЛАЯ ПРИ $x \to\infty$ (рис. 1.44) .

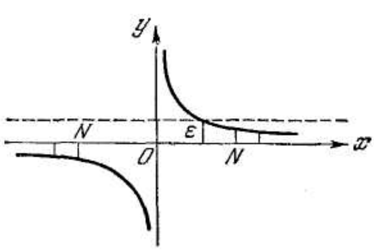


Рис. 1.44

Установим важное для дальнейшего соотношение:

Теорема 1. *Если функция $y=f(x)$ представляется в виде суммы постоянного числа b и бесконечно малой α:*

$$y=b+\alpha \qquad (1.24),$$

то $\lim y=b$ (при $x\to a$ или $x\to\infty$).

Обратно, *если $\lim y = b$, то можно написать $y = b+\alpha$, где α — бесконечно малая.*

Доказательство. Из равенства (1.24) следует $|y-b| = |\alpha|$. Но при произвольном ε все значения α, начиная с некоторого, удовлетворяют соотношению $|\alpha|<\varepsilon$, следовательно, для всех значений y, начиная с некоторого, будет выполняться неравенство $|y-b|<\varepsilon$. А это и значит, что $\lim y=b$.

Обратно: если $\lim y = b$, то при произвольном ε для всех значений y, начиная с некоторого, будет $|y - b| < \varepsilon$. Но если обозначим $y-b = \alpha$, то, следовательно, для всех значений α, начиная с некоторого, будет $|\alpha|<\varepsilon$, а это значит, что α — бесконечно малая.

Пример 3

Пусть дана функция (рис. 1.45}

$$y=1+1/x,$$

тогда

$$\lim_{x\to\infty} y = 1,$$

и наоборот, так как $\lim\limits_{x\to\infty} y=1,$

то переменную y можно представить в виде суммы предела 1 и бесконечно малой α, равной в данном случае $1/x$, т. е.

$$y=1+\alpha.$$

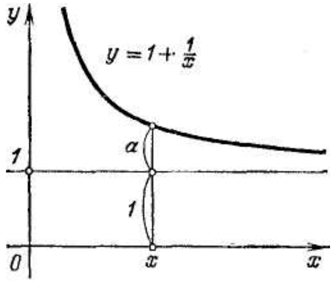


Рис. 1.45

Теорема 2. *Если* α = α*(х) стремится к нулю при х* → а *(или при х→∞) и не обращается в нуль, то у=1/*α *стремится к бесконечности.*

Доказательство. При любом как угодно большом *М* > О будет выполняться неравенство $1/|\alpha|>M$, если только будет выполняться неравенство $|\alpha|<1/M$. Последнее неравенство будет выполняться для всех значений *α,* начиная с некоторого, так как $\alpha(x)\to 0$.

Теорема 3. *Алгебраическая сума двух, трех и вообще определенного числа бесконечно малых есть функция бесконечно малая.*

Доказательство. Проведем доказательство для двух слагаемых, так как для любого числа слагаемых оно проводится аналогично. Пусть $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, где $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a}\beta(x) = 0$.

Докажемо при произвольном как угодно малом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta>0$ такое, что при удовлетворении неравенства $|x - a| < \delta$ будет выполняться неравенство $|u| < \varepsilon$. Так как α (х) есть бесконечно малая, то найдется такое δ_1, что в окрестности с центром в точке *а* и радиусом δ_1 будет $|\alpha(x)|<\varepsilon/2$.

Так как β(x) есть бесконечно малая, то найдется такое δ_2 окрестности с центром в точке *а* и радиусом δ_2 будет

$$|\beta(x)| < \varepsilon/2.$$

Возьмем δ равным меньшему из величин δ_1 и δ_2, тогда в окрестности точки *а* с радиусом δ будут выполняться неравенства $|\alpha| < \varepsilon/2$; $|\beta| < \varepsilon/2$. Следовательно, в этой окрестности будет

$$|u|=|\alpha(x)+\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

т. е. $|u| < \varepsilon$, ч.т.д.

Аналогично приводится доказательство и для случая, когда

$$\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} \beta(x) = 0.$$

Т е о р е м а 4. *Произведение функции бесконечно малой* $\alpha = \alpha(x)$ *на функцию, ограниченную* $z = z(x)$, *при* $x \to a$ (*или* $x \to \infty$) *есть величина (функция) бесконечно малая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство для случая $x \to a$. Для некоторого $M>0$ найдется такая окрестность точки $x = a$, в которой будет удовлетворяться неравенство $|z| < M$. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность, в которой будет выполниться неравенство $|\alpha| < \varepsilon/M$. В наименьшей из этих двух окрестноетей будет выполняться неравенство

$$|\alpha z| < (\varepsilon/M)M = \varepsilon$$

А это значит, что αz—бесконечно малая. Для случая $x \to \infty$ доказательство проводится аналогично. Из данной теоремы вытекают:

С л е д с т в и е 1. *Если* $\lim \alpha = 0$, $\lim \beta = 0$, *то* $\lim \alpha\beta = 0$, так как $\beta(x)$ есть величина ограниченная. Это справедливо для любого конечного числа множителей.

С л е д с т в и е 2. *Если* $\lim \alpha = 0$ *и* $c = \text{const}$, *то* $\lim c\alpha = 0$.

Т е о р е м а 5. *Частное* $\alpha(x)/z(x)$ *от деления величины бесконечно малой* $\alpha(x)$ *на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim z(x) = b \neq 0$. На основании теоремы 2 предыдущего раздела следует, что $1/z(\alpha)$ есть величина ограниченная. Поэтому дробь $\alpha(x)/z(x) = \alpha(x)(1/z(x))$ есть произведение величины бесконечно малой на величину ограниченную, т.е. величина бесконечно малая.

1.9. Основные теоремы о пределах

В этом разделе, как и в предыдущем, мы будем рассматривать совокупности функций, которые зависят от одного и того же аргу- , мента x, при этом $x \to a$ или $x \to \infty$.

Мы будем проводить доказательство для одного из этих случаев, так как для другого доказательство проводится аналогично. Иногда мы вообще не будем писать ни $x \to a$, ни $x \to \infty$, подразумевая то или другое.

Теорема. *Если между соответствующими значениями трех функций $u = u(x)$, $z = z(x)$, $v = v(x)$ выполняются неравенства $u \le z \le v$, при этом $u(x)$ и $v(x)$ при $x \to a$ (или при $x \to \infty$) стремятся к одному и тому же пределу b, то $z = z(x)$ при $x \to a$ (или при $x \to \infty$) стремится к тому же пределу.*

Доказательство. Для определенности будем рассматривать изменение функций при $x \to a$. Из неравенств $u \le z \le v$ следуют неравенства

$$u - b \le z - b \le v - b;$$

по условию

$$\lim_{x \to a} u = b, \qquad \lim_{x \to a} v = b.$$

Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ найдется некоторая окрестность с центром в точке a, в которой будет выполняться неравенство $|u - b| < \varepsilon$; так же найдется некоторая окрестность с центром в точке a, в которой будет выполняться неравенство $|v - b| < \varepsilon$. В меньшей из указанных окрестностей будут выполняться неравенства

$$-\varepsilon < u - b < \varepsilon \text{ и } -\varepsilon < v - b < \varepsilon,$$

а следовательно, будут выполняться неравенства

$$-\varepsilon < z - b < \varepsilon.$$

Т.е.

$$\lim_{x \to a} z = b.$$

Теорема *Если при $x \to a$ (или при $x \to \infty$) функция y принимает неотрицательные значения $y \ge 0$ и при этом, стремится к пределу b, то b есть неотрицательное число: $b \ge 0$.*

Доказательство. Предположим, что $b < 0$, тогда $|y - b| \ge |b|$, т. е. модуль разности $|y - b|$ больше положительного числа $|b|$ и, следовательно, не стремится к нулю при $x \to a$. Но тогда y при $x \to a$ не стремится к b, что противоречит условию теоремы. Значит, предположение, что $b < 0$, приводит к противоречию. Следовательно, $b \ge 0$.

Аналогично доказывается, что если $y \le 0$, то $\lim y \le 0$.

Т е о р е м а *Если между соответствующими значениями двух функций u = u(x) и v = v(x), стремящихся к пределам при x → a (или при x → ∞), выполняется неравенство v≥u, то имеет место* limv≥limu.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию *v—u≥0,* следовательно lim *(v — u)* ≥ 0, или lim v — limu≥0, т. е. lim v≥lim *u.*

П р и м е р 1. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

Из рис. 1.46 следует: если *OA* = 1, *x*>0, то *AC* = *sinx*, ,*AˇB*=*x*, sin *x*< *x*.

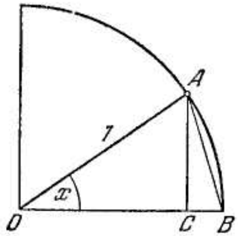


Рис. 1.46

Очевидно, что при *x* < 0 будет |sin *x* | < | *x* \. Из этих неравенств следует, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

П р и м е р 2. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x/2) = 0$.

Действительно, | sin (x/2) | < | sin *x* |. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x/2) = 0$

П р и м е р 3 . Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$;

заметим, что $\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2)$

следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}(1-2\sin^2=-2(x/2)\lim_{x\to 0}\sin^2(x/2)=1-0=1$$

В некоторых исследованиях вопроса о пределе

В некоторых исследованиях вопроса о пределе переменных приходится решать две самостоятельные задачи:

1) доказывать, что предел переменной существует, и устанавливать границы, внутри которых рассматриваемый предел находится;

2) вычислять рассматриваемый предел с нужной степенью точности.

Иногда первый вопрос решается с помощью следующей, важной для дальнейшего теоремы.

Т е о р е м а *Если переменная величина v возрастающая, т. е. всякое ее последующее значение больше предыдущего, и если она ограничена, т. е.* $v < M$, *то эта переменная величина имеет предел* $\lim v = a$, *где* $a \le M$.

Аналогичное утверждение имеет место и для убывающей ограниченной переменной величины.

1.10. Непрерывность функций

Пусть функция $y=f(x)$ определена при некотором значении x_0 и в некоторой окрестности с центром в x_0. Пусть

$$y_0=f(x_0).$$

Если x получит некоторое положительное или отрицательное — безразлично— приращение Δx; и примет значение $x=x_0+\Delta x$, то и функция y получит некоторое приращение Δy. Новое, наращенное значение функции будет $y_o+\Delta y=f(x_o+\Delta x)$ (рис. 1.47).

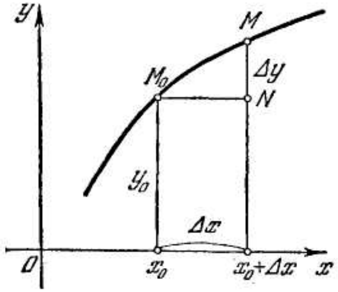


Рис.1.47

Приращение функции Δy выразится формулой

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной при значении* $x=x_0$ (или в точке x_0), если она определена в некоторой окрестности точки x_0 (очевидно, и в самой точке x_0) и если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y=0 \qquad (1.24)$$

или, что то же самое

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0 \qquad (1.25)$$

Условие непрерывности (1.25) можно записать и так

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$$

.

или $$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \qquad (1.26)$$

но $x_0=\lim\limits_{x\to x_0} x$

Следовательно равенство (1.26) можно записать так

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x), \qquad (1.27),$$

т. е. для того, чтобы найти предел непрерывной функции при $x \to_0$, достаточно в выражение функции подставить вместо аргумента x его значение x_0.

Описательно геометрически непрерывность функции в данной точке означает, что разность ординат графика функции $y=f(x)$ в точках $x_o+\Delta x$ и x_0 будет по абсолютной величине произвольно малой, если только $|\Delta x|$ будет достаточно мало.

Пример. Докажем, что функция $y = x^2$ непрерывна в произвольной точке x_0. Действительно,

$$y_o=x_0^2. \quad y_o + \Delta y = (x_o + \Delta x)^2, \qquad \Delta y = (x_o + \Delta x)^2 — x_0^2 = 2x_0 x+\Delta x2,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 \Delta x + \Delta x^2) =$$

$$=2x \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x+\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x=0$$

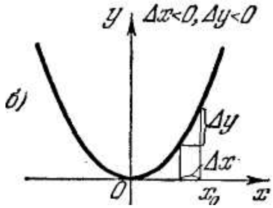


Рис. 1.48,а

при любом способе стремления Δx к нулю (рис. 1.48, *а* и б).

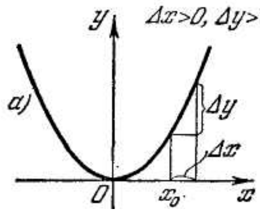


Рис. 1.48,б

Аналогичным образом, рассматривая каждую основную элементарную функцию, можно доказать, что каждая основная элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Докажем далее следующую теорему.

Т е о р е м а . *Если функции $f_1(x)$ и $f_2\{x)$ непрерывны в точке* x_0, *то сумма $\psi(x)=f_1(x)+f_2(x)$ также есть непрерывная функция в точке x_0*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны, то на основании равенства (1.26) можем написать

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=f_1(x_0) \quad и \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x)=f_2(x_0).$$

На основании теоремы о пределах можем написать

$$\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\lim_{x\to x_0}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim_{x\to x_0}f_1(x)+\lim_{x\to x_0}f_2(x)=$$
$$f_1(x_0)+f_2(x_0)=\psi(x_0)$$

Итак, сумма $\psi(x)=f_1(x)+f(x)$ есть непрерывная функция.

Как следствие отметим, что теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

Опираясь на свойства пределов, так же можно доказать следующие теоремы:

а) *Произведение двух непрерывных функций есть функция непрерывная*

б) Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная,
если знаменатель в рассматриваемой точке не обращается в нуль.

с) *Если $u=\psi(x)$ непрерывна при $x=x_0$ и $f(u)$ непрерывна в точке $u_o=\psi(x_0)$, то сложная функция $f[\psi(x)]$ непрерывна в точке x_0.*

Используя эти теоремы, можно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а . В*сякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.*

П р и м е р 1 . Функция $y=x^2$ непрерывна в любой точке x_0 *и* потому

$$\lim_{x\to x_0} x^2 = x_o^2,$$

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9.$$

П р и м е р 2 . Функция $y=\sin x$ непрерывна в любой точке и потому $\lim\limits_{x\to\pi/4} \sin x=\sin(\pi/4)=\sqrt{2}/2.$

Определение. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала (a, b), где $a < b$, то говорят, что функция *непрерывна на этом интервале.*

Если функция определена и при $x = a$, и при этом $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, то

говорят, что $f(x)$ в точке $x = a$ *непрерывна справа.*

Если $\lim_{x\to b-0} f(x) = (b)$, то говорят, что

функция $f(x)$ в точке $x = b$ *непрерывна слева.*

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и непрерывна на концах интервала, соответственно справа и слева, то говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна на замкнутом интервале* или *отрезке* $[a, b]$.

1.11.Разрывные функции

Точки разрыва. Если x_0 — точка разрыва функции f, то чаще всего само значение $f(x_0)$ бывает неопределенным, да обычно и не играет никакой роли. Важную роль играют пределы значений $f(x)$ при $x \to x_0 - 0$ и $x \to x_0 + 0$ Эти пределы обозначаются условно через $f(x0—0)$ и $f(x_0 +0)$ (рис. 1.49)

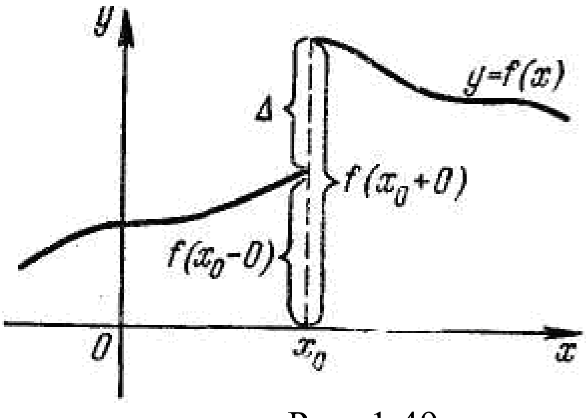


Рис. 1.49

Бывает так, что указанные пределы конечны и $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, но само значение $f(x_0)$ не определено или определено, но не совпадает с $f(x_0\pm0)$. Такой разрыв называется *устранимым, так* как если положить $f(x_o)=f(x_0\pm0)$ (это значение называется истинным *значением* функции $f(x)$ при $x=x_0$), то никакого разрыва больше не будет.

Приведем простой пример: функция $f(x)$, заданная формулой

$$f(x)=\sin x/x, \tag{1.28}$$

при всех $x\neq0$ непрерывна, но при $x=0$ не определена, так как подставить x=O в формулу (1.28) нельзя, получится неопределенное выражение 0/0. Однако если к формуле (1.28)добавить, что $f(0)=1$, то в силу формулы (1.21) полученная функция $f(x)$ будет определена **и** непрерывна для всех x без исключения; при x=0 был устранимый разрыв. Геометрически это можно представить так, что к линии *pp* (рис. 1.50) добавили одну точку *M,* после чего линия стала сплошной.

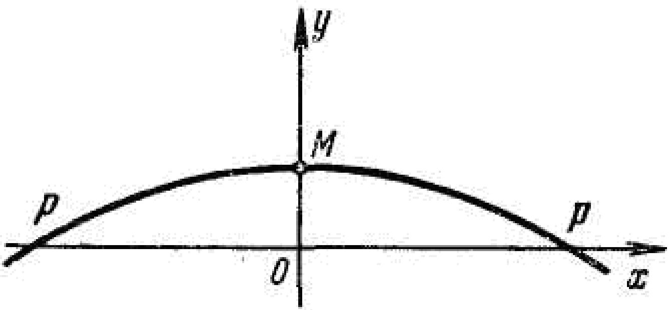


Рис. 1.50

Если значения $f(x_o-0)$ и $f(x_o+0)$ конечны, но $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то говорят, что функция f имеет в точке x_0 *разрыв 1-го рода* пли, что то же, *конечный скачок* $\Delta=f(x_o+0)-f(x_0-0)$ (см. рис. 1.49). Если из двух значений $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ по крайней мере одно обращается в бесконечность, то несколько неточно говорят, что функция f в точке x_0 *обращается в бесконечность* (уходит в бесконечность»); например, так ведет себя функция $f(x)=1/x$ при $x_o=0$.

Отметим в заключение, что бывает, хотя и очень редко, что $f(x_0-0)$ или $f(x_o+0)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного значений так как переменная величина может не иметь ни конечного, ни бесконечного пределов. Например, для функции $f(x) = \sin 1/x$ при $x \to 0$ будет $1/x \to \infty$ и $\sin 1/x$ будет вновь и вновь переходить от —1 к +1 и обратно, не имея предела (рис. 1.51).

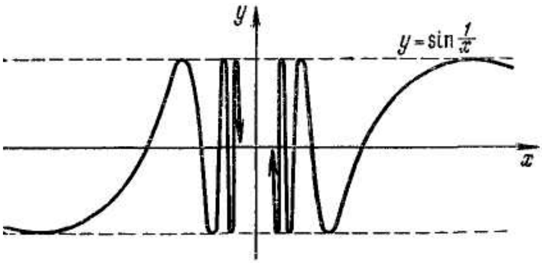


Рис. 1.51

Разрывы у физических переменных величин получаются при внезапном присоединении или отсоединении какого-либо воздействия, при переходе из одной среды в другую (на границе раздела), при внезапной перемене закона зависимости и т. п.

Так, на рис. 1.52 показано изменение тока в ЦЕПИ т. е. зависимости тока *i* от времени *t*.

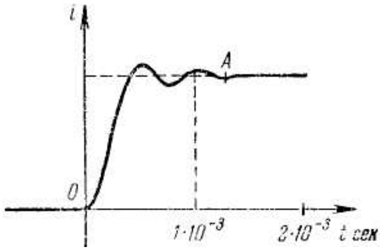


Рис.1.52

Как видим, получается функция, имеющая четыре точки разрыва, в каждой из которых она имеет конечный скачок, полученный за счет включения или отключения постоянной э. д. с. в цепи. Полезно обратить внимание на то, что более тщательный анализ (как говорят, применение «лупы времени», что сводится к значительному увеличению масштаба по оси *t)* показывает, что нарастание тока на самом деле происходит примерно так, как показано на рис. 1.53.

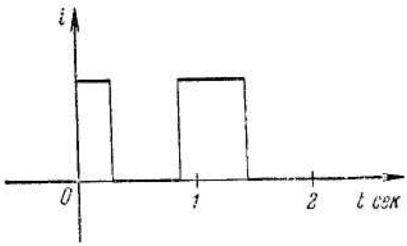


Рис.1.53

Непременное наличие индуктивности в цепи приводит к тому, что разрыва функции i (t) *на самом деле нет,* ток нарастает непрерывно, хотя и очень быстро! И в некоторых случаях, например, если продолжительность импульса очень мала, учет непрерывности этого *переходного режима* (т. е., например, участка *ОА* графика) очень важен. Однако если переходный режим значения не имеет, то проще схематизировать процесс, считая зависимость $i(t)$ разрывной в соответствии с рис. 1.52, если это не приводит к существенным ошибкам. Итак, одна и та же зависимость $i\ (t)$ является непрерывной. или разрывной в зависимости от подхода (учета или неучета переходного режима)! При переходе из одной среды в другую аналогичную роль играет учет поверхностных эффектов и т. п.

Если рассматривается элементарная функция $f(x)$, то, разрыв при $x = x_0$ может получиться только в том случае, если при подстановке $x=x_0$ где-нибудь в $f(x_0)$ получается выражение вида $a/0$, $\ln 0$ или $0°$. При этом оказывается что предельные значения $f(x_o—0)$ и $f(x_o+0)$, конечные или бесконечные, существуют, если с соответствующей стороны от x_0 функция f определена; исключением может быть только случай, когда в выражении $f(x_0)$ присутствует $\sin\infty$ или $\cos\infty$.

1.12. Некоторые свойства непрерывных функций

В этом разделе рассмотрим некоторые свойства функций, непрерывных на отрезке. Эти свойства будут сформулированы в виде теорем, которые мы приводим без доказательства.

Теорема 1. *Если функция $y=f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$ $(a \leq x \leq b)$, то на отрезке $[a, b]$ найдется по крайней мере одна точка $x = x_1$ такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению $f(x_1) \geq f(x)$, где x—любая другая точка отрезка, и найдется по крайней мере одна точка x_2 такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению $f(x_2) \leq f(x)$.*

Значение функции $f(x_1)$ будем называть *наибольшим значением* функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$, значение функции $f(x_2)$ будем называть *наименьшим значением* функции па отрезке $[a, b]$.

Коротко эту теорему формулируют так:

Непрерывная на отрезке $a \leq x \leq b$ функция достигает на этом отрезке по меньшей мере один раз наибольшего значения M и наименьшего значения m.

Смысл этой теоремы наглядно иллюстрируется на рис. 1.54.

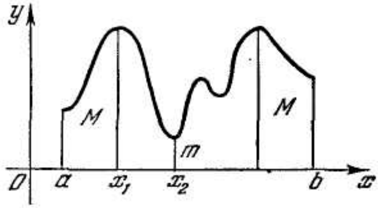


Рис. 1.54

Замечание. Утверждение теоремы о существовании наибольшего значения функции может оказаться неверным, если рассматривать значения функции на интервале $a < x < b$. Так, например, если мы будем рассматривать функцию $y=x$ на интервале $0 < x < 1$, то среди ее значений нет наибольшего и нет наименьшего. Действительно, на интервале нет ни наименьшего, ни наибольшего значений x. (Нет крайней левой точки, так как, какую бы мы ни взяли точку x^*, найдется точка левее взятой, например точка $x^*/2$; также нет крайней правой, а следовательно, нет ни наименьшего, ни наибольшего значений функции $y = x$.)

Т е о р е м а 2. *Пусть функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a, b) и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, тогда между точками a и b найдется по крайней мере одна точка x = c, в которой функция обращается в нуль* $f(c)=0, \quad a<c<b$.

Эта теорема имеет простой геометрический смысл. График непрерывной функции $y=f\{x)$, соединяющий точки $M_1[a,f(a)]$ и $M2[b,f(b)]$ где $f(a)<0$ и $f(b)>0$ (или $f(a)>0$ и $f(b)<O$), пересекает ось Ox по крайней мере *в* одной точке (рис1.55)

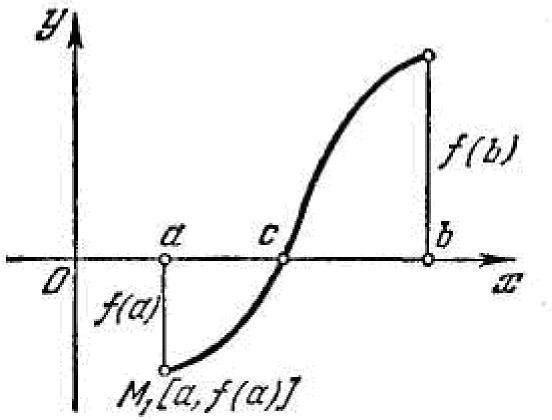


Рис. 1.55

П р и м е р. Дана функция $y=x^3 — 2; x_{x=1}=-1 \; x_{x=2}=6$
На отрезке [1, 2] она непрерывна. Следовательно, на этом отрезке существует точка, где $y=x^3 — 2$ обращается в нуль. Действительно, $y=0$ при $x=\sqrt[3]{2}$ (рис. 1.56).

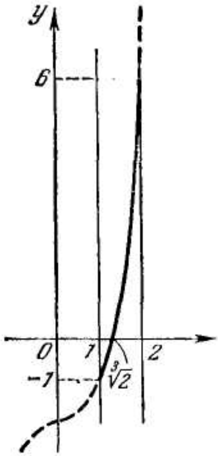


Рис. 1.56

Т е о р е м а 3. *Пусть функция* у =*f*(х) *определена* и *непрерывна на отрезке [а,* b]. *Если на концах этого отрезка функция принимает неравные значения f(a)=A, f(b)=B, то, каково бы ни было число* μ, *заключенное между числами А и В, найдется такая точка х = с, заключенная между а и* b, *что f(c)=μ* . Смысл данной теоремы отчетливо иллюстрируется на рис. 1.57.

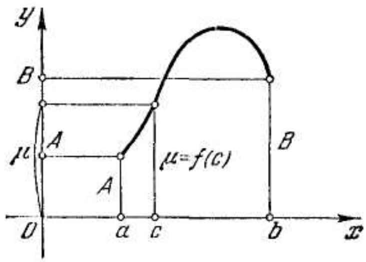


Рис. 1.57

В данном случае всякая прямая *у*=μ пересекает график функции *у= f(x).*

З а м е ч а н и е . Отметим, что теорема 2 является частным случаем этой теоремы, так КАК если *А к В* имеют разные знаки, то в качестве μ, можно взять 0 и тогда μ=0 будет заключено между числами *A* и *B*.

С л е д с т в и е т е о р е м ы 3. *Если функция $y=f(x)$ непрерывна на некотором интервале и принимает наибольшее и наименьшее значения, то на этом интервале она принимает по крайней мере один раз любое значение, заключенное между ее наименьшими и наибольшими значениями.*

Действительно, пусть $f(x_1) = M$, $f(x_2)= m$. Рассмотрим отрезок $[x_1 x_2]$. Тогда по теореме 3 на этом отрезке функция $y=f(x)$

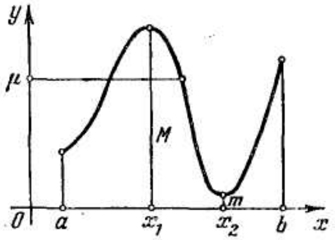


Рис. 1.58

принимает любое значение μ, заключенное между *M* и *m*. *Но* о т р е з о к $[x_1, x_2]$ заключен внутри рассматриваемого интервала, на котором определена функция $f(x)$ (рис. 1.58).

Свойства непрерывных функций

1. Сумма двух непрерывных функций является непрерывной функцией. Действительно, если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны, а $f(x) =f_1(x) +f_2(x)$, то при $x \to x_0$

$$\lim f(x) = \lim[f_1(x)+f_2(x)] =$$
$$= \lim f_1(x) + \lim f_2(x) =f_1(x_0) +f_2(x_0) =f(x0),$$

что и доказывает непрерывность функции $f(x)$. Отметим, что при этом доказательстве мы сначала воспользовались свойством пределов ,а затем непрерывностью функций f_1 и f_2. Аналогичное применение других свойств пределов показывает, что: *сумма, разность и произведение любого конечного числа непрерывных функций есть снова непрерывная функция;*

частное от деления двух непрерывных функций есть непрерывная функция всюду, где знаменатель отличен от *нуля.* В точках, где знаменатель обращается в нуль, частное или обращается в бесконечность, или становится неопределенным вида *0/0,* так что в обоих случаях непрерывность нарушается.

2. *Сложная функция, составленная из непрерывных функций, сама является непрерывной функцией.* Действительно, если функции *z (у)* и *у (х)* непрерывные и мы дадим *х* бесконечно малое приращение, то в силу непрерывности второй функции приращение *у* будет также бесконечно малым, а потому в силу непрерывности первой функции приращение *z* будет бесконечно малым; итак, сложная функция *z (х)* непрерывная.

3. Как указывалось ранее, график непрерывной функции *у=(х),* заданной на интервале $a \le x \le b$, состоит из одного куска. Рассмотрение этого графика (см., например, рис. 1.59) показывает, что *непрерывная функция, заданная на конечном интервале (включая концы), ограничена и достигает наименьшего в алгебраическом смысле* (на чертеже при *х = а) и наибольшего* (при *х = с) значений.*

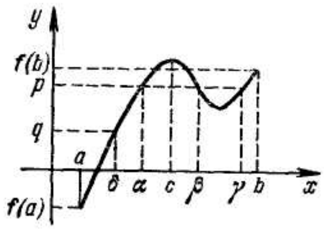


Рис.1.59

Кроме того, *она принимает все промежуточные между f (a) и f(b) значения по крайней мере по одному разу;* так, на чертеже значение y=q принимается один раз — при x=δ, а значение $y = p$ принимается три раза — при $x = \alpha$, β и ε. *Если она положительна при некотором значении* $x = x_0$, *то она положительна и при всех х, достаточно близких к* x_0. Наконец, из рис. 1.14 и 1.15 видно, что если *непрерывная функция* *монотонна, то обратная к ней функция также непрерывна* (и монотонна).

Отметим, что непрерывная функции не обязана быть *гладкий,* т.е. иметь график со всюду существующей касательной, как на рис.1.59. Она может быть *кусочно-гладкой,* как на рис. 1.60, так что график ее будет состоять из нескольких гладких дуг и иметь изломы.

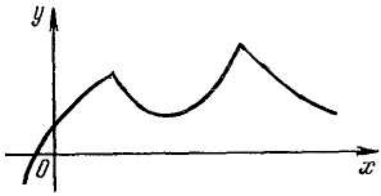


Рис.1.60

Микромодуль 2.

Индивидуальные тестовые задания

Вычислить указанные пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}$. *Отв.* 4. 2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[2\sin x-\cos x+\operatorname{ctg} x]$. *Отв.* 2.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2+x}}$. *Отв.* 0. 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$. *Отв.* 2.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$. *Отв.* $\frac{4}{3}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}$. *Отв.* 1. 7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

Отв. $\frac{1}{2}$. 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$. *Отв.* $\frac{1}{3}$.

Указание. Напишем формулу $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ для $k=0$, 1, 2, ..., n.

$$1^3=1;$$
$$2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1;$$
$$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1.$$

Складывая левые и правые части, получим:

$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3(1+2+\ldots+n)+(n+1),$$
$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1),$$

откуда

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{2x+5}$. *Отв.* ∞. 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$. *Отв.* 0.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$. *Отв.* $\frac{1}{2}$. 12. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$. *Отв.* 4. 13. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$.

Отв. 3. 14. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$ *Отв.* $\frac{1}{8}$. 15. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$. *Отв.* 1.

16. $\lim\limits_{y\to -2}\frac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}$. *Отв.* $-\frac{2}{5}$. 17. $\lim\limits_{u\to -2}\frac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u-3)}$. *Отв.* 0.

18. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$. *Отв.* $3x^2$. 19. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right]$. *Отв.* -1.

20. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$. *Отв.* n (n — целое положительное число).

21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. *Отв.* $\frac{1}{2}$. 22. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$. *Отв.* $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$. *Отв.* $\frac{q}{p}$. 24. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. *Отв.* $\frac{2}{3}$.

25. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$. *Отв.* $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{ma}$. 26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$. *Отв.* $\dfrac{1}{2}$.

27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$. *Отв.* 1. 28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. *Отв.* 1 при $x\to+\infty$, -1 при $x\to-\infty$. 29. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$. *Отв.* 0.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$. *Отв.* $\dfrac{1}{2}$ при $x\to+\infty$, $-\infty$ при $x\to-\infty$.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$. *Отв.* 1. 32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$. *Отв.* 4. 33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x/3)}{x^2}$. *Отв.* $\dfrac{1}{9}$.

34. $\lim\limits_{x\to+0}x/\sqrt{1-\cos x}$. *Отв.* $\sqrt{2}$. 35. $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}x$. *Отв.* 1.

36. $\lim\limits_{v\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos v}{\sin\left(v-\frac{\pi}{3}\right)}$. *Отв.* $\sqrt{3}$. 37. $\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\operatorname{tg}\dfrac{\pi z}{2}$. *Отв.* $\dfrac{2}{\pi}$.

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$. *Отв.* $\dfrac{2}{3}$. 39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$. *Отв.* $2\cos a$.

40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$. *Отв.* $\dfrac{1}{2}$. 41. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$. *Отв.* e^2.

42. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$. *Отв.* $\dfrac{1}{e}$. 43. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$. *Отв.* $\dfrac{1}{e}$.

44. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$. *Отв.* e. 45. $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n+1)-\ln n]\}$. *Отв.* 1.

46. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+\cos x)^{3\sec x}$. *Отв.* e^3. 47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}$. *Отв.* α.

48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. *Отв.* e. 49. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. *Отв.* e^3.

50. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^m$. *Отв.* 1. 51. $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^\alpha)}{\alpha}$. *Отв.* 1 при $\alpha\to+\infty$, 0 при $\alpha\to-\infty$. 52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$. *Отв.* $\dfrac{\alpha}{\beta}$. 53. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>1)$. *Отв.* $+\infty$ при $x\to+\infty$, 0 при $x\to-\infty$. 54. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[a^{\frac{1}{n}}-1\right]$. *Отв.* $\ln a$.

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$. *Отв.* $\alpha-\beta$. 56. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$. *Отв.* 1.

Определить точки разрыва функций:

57. $y=\dfrac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$. *Отв.* Разрывы при $x=-2;\ -1;\ 0;\ 2$.

58. $y=\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$. *Отв.* Разрывы при $x=0$ и $x=\pm\dfrac{2}{\pi}$; $\pm\dfrac{2}{3\pi}$; ...; $\pm\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$; ...

Модуль 2.

Производные и дифференциалы

Микромодуль 3

Производные

Различные задачи естествознания – такие, как определение скорости, ускорения, силы тока, плотности вещества и многие другие – приводят к одним и тем же математическим вычислениям. Отвлекаясь от конкретного содержания каждой задачи, результат соответствующих математических вычислений называют производной. В этом микромодуле изучается понятие производной и на примере некоторых задач показывается, как оно возникает и как при помощи производной и родственных понятий решаются задачи.

2. 1. Производная

1. Примеры, приводящие к понятию производной. К одному из важнейших в математике понятий, понятию производной, мы приходим при изучении скорости изменения функции.
Рассмотрим, например, понятие мгновенной скорости прямолинейного движения точки *(в физическом рассмотрении точкой называется тело, размерами которого мы в данном рассмотрении пренебрегаем;* в разных рассмотрениях точкой может считаться частица вещества, или самолет, или даже небесное тело).

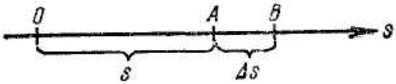


Рис.2.1

Пусть точка движется по оси s слева направо, причем неравномерно, с переменной скоростью. Тогда закон движения математически выражается зависимостью координаты s от времени: $s=f(t)$. Так как скорость переменная, то отношение пройденного пути к истекшему времени дает только *среднюю скорость*. Что же касается мгновенной скорости (скорости в данный момент времени), то она получается следующим образом. Пусть в некоторый момент t движущаяся точка занимает положение A (рис. 2.1), а через время Δt перейдет в положение B, пройдя путь Δs; таким образом,

$$s = f(t), \quad s + \Delta s = f(t + \Delta t),$$

т.е.

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Тогда отношение

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

(т.е. пройденный путь, отнесенный к единице истекшего времени) дает среднюю скорость движения за промежуток времени от t до $t+\Delta t$. *Мгновенная* же *скорость* движения в момент t *получается как предел средней скорости в процессе безграничного уменьшения промежутка времени* Δt, т. е.

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{2.1}$$

Говорят также, что мгновенная скорость —это средняя скорость за бесконечно малый промежуток времени (за *«элемент»* времени) или что мгновенная скорость — это отношение бесконечно малого пути к соответствующему бесконечно малому промежутку времени (т. е. бесконечно малый путь, отнесенный к единице истекшего времени). Оба эти определения являются сокращенными формулировками развернутого определения (2.1). Скорость процесса не всегда измеряется пройденным путем, отнесенным к единице истекшего времени. Рассмотрим, например, процесс наполнения сосуда; в данном случае законом наполнения служит зависимое $V=f(t)$ уже наполненного объема от времени. Средней скоростью наполнения за промежуток времени от t до $t+\Delta t$ служит отношение

$$w_{\text{ср}} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

тогда как мгновенной скоростью наполнения в момент t — предел

$$w_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} w_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{2.2}$$

Как видим, с формальной точки зрения получается такое же выражение, как в (2.1).

Но скорость можно понимать в еще более широком плане, относя изменение некоторой величины не к единице времени, а к единице какой-либо другой величины. Рассмотрим, например, понятие линейной плотности *материальной линии,* т. е. тела, размеры которого учитываются лишь в одном протяжении; поперечным сечением тела мы пренебрегаем, но массой не пренебрегаем. Если эта линия (нить) однородная, то линейная плотность измеряется отношением массы нити к ее длине. Если же нить неоднородная, то ее линейная плотность в разных точках различная. Будем отсчитывать расстояние от одного из концов нити (рис. 2.2), и пусть масса нити, отвечающая пройденному пути s, равна $M = f(s)$. Если теперь пройден дополнительный путь Δs, то отношение

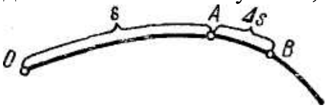


Рис.2.2

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta M}{\Delta s} = \frac{f(s+\Delta s) - f(s)}{\Delta s}$$

представляет собой среднюю линейную плотность нити на участке AB. Предел же

$$\rho = \lim_{\Delta s \to 0} \rho_{\text{ср}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(s+\Delta s) - f(s)}{\Delta s} \qquad (2.3)$$

представляет собой *линейную плотность нити в точке* (именно, в точке *A).* Можно сказать, что это — скорость изменения массы нити, отнесенная к единице пройденного пути

Пример. Найти скорость равномерно ускоренного движения в произвольный момент t и в момент t =2 *сек.*, если зависимость пути от времени выражается формулой

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Решение. В момент t имеем $s = \frac{gt^2}{2}.$ в момент $t+\Delta t$ получим

$$s + \Delta s = \frac{g(t+\Delta t)^2}{2} = \frac{g(t^2 + 2t\,\Delta t + \Delta t^2)}{2}.$$

Найдем Δs

$$\Delta s=\frac{g(t^2+2t\,\Delta t+\Delta t^2)}{2}-\frac{gt^2}{2}=gt\,\Delta t+\frac{g\,\Delta t^2}{2}.$$

Составим соотношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{gt\,\Delta t+(g\,\Delta t^2/2)}{\Delta t}=gt+\frac{1}{2}g\,\Delta t;$$

по определению , имеем

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{1}{2}g\,\Delta t\right)=gt.$$

Таким образом, скорость в любой момент времени *t* равна .
При $t=2$ имеем $(v)_{t=2}=g\cdot 2=9{,}8\cdot 2=19{,}6$ *м/сек.*

2. Определение производной. Все выражения (2.1), (2.2), (2.3) с математической точки зрения имеют одинаковую структуру и дают основание для следующего определения. Пусть дана функция $y=f(x)$. Тогда скорость ее изменения, отнесенная к единице изменения аргумента, при значении аргумента x равна

$$y'=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Эта скорость называется *производной, взятой от переменной у по переменной х;* другими словами, *производная — это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, вычисленный в процессе, когда приращение аргумента стремится к нулю.* Так как при различных значениях x указанная скорость, вообще говоря, различна, то производная представляет собой новую функцию x, которую принято обозначать штрихом: $y' = f(x)$.

Таким образом, в примерах п. 1 скорость движения — это производная от пройденного пути по времени, $v = s'_t$ (нижний индекс указывает на переменную, по которой берется производная) и т. д.

Подсчитаем, например, производную от функции $y = ax^2$. Придавая аргументу приращение Δx, получим новое значение аргумента $x+\Delta x$ и новое значение функции $y+\Delta y = a(x+\Delta x)^2$, так как в выражение функции надо вместо x подставить $x+\Delta x$. Таким образом,

$\Delta y = a(x+\Delta x)^2 - ax^2 = 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2$.

Отсюда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2ax\,\Delta x + a\,(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2ax + a\,\Delta x) = 2ax;$$

отметим, что в последнем предельном переходе изменялось $\Delta x \to 0$, а x считался зафиксированным. Полученный результат можно записать так: $(ax^2)'=2ax$.

Операция нахождения производной от функции называется *дифференцированием* этой функции.

Пример 1. Дана функция $y = x^2$; найти ее производную y':

I) в произвольной точке x,

2) при $x = 3$.

Решение. 1) При значении аргумента, равном x, имеем $y = x^2$. При значении аргумента, равном $x + \Delta x$, имеем $y+\Delta y = (x+\Delta x)^2$. Находим приращение функции:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2.$$

составляем соотношение : $\Delta y/\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Переходя к пределу, найдем производную от данной функции

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Итак, производная от функции $y = x^2$ в произвольной точке равна

2) При $x=3$ получим

$$y'\,|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

3. Геометрический смысл производной. Мы подошли к понятию производной, рассматривая скорость движущегося тела (точки) т.е. исходя из механических представлений . Теперь мы дадим не менее важное геометрическое истолкование производной.

Рассмотрим график функции $f\,(x)$ (рис. 2.3). Видно, что $\Delta y/\Delta x = PN/MP =$ tg β, т.е. это отношение равно угловому коэффициенту секущей mm. Если $\Delta x \to 0$, то секущая, поворачиваясь вокруг точки M, в пределе переходит в касательную ll, так как *касательная является предельным положением секущей, когда точки пересечения сливаются.* (Это наглядное свойство, которым мы уже пользовались, на самом деле является просто определением касательной.) Таким образом,

$$y'_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \qquad (y'_0 = f'(x_0)), \tag{2.4}$$

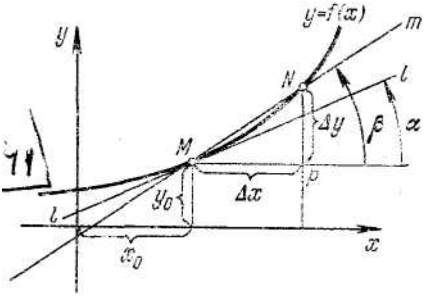


Рис. 2.3

т. е. *геометрический смысл производной состоит в том, что она равна угловому коэффициенту касательной.* Запишем уравнение касательной *ll:*

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0) \tag{2.5}$$

где x_0, y_0 — координаты точки касания, а x,y-текущие координаты точки касательной прямой.

Подобным образом уравнение *нормали* к кривой, т. е. перпендикуляра к касательной в точке касания, имеет вид

$$y - y_0 = -(1/y'_0)(x - x_0)$$

Умение находить касательную дает возможность находить *угол между линиями в точке их взаимного пересечения* . Этот угол измеряется углом между касательными к данным линиям в этой точке. Отметим, что этот угол может получиться нулевым, *если линии касаются друг друга,* т. е. если указанные касательные совпадают.

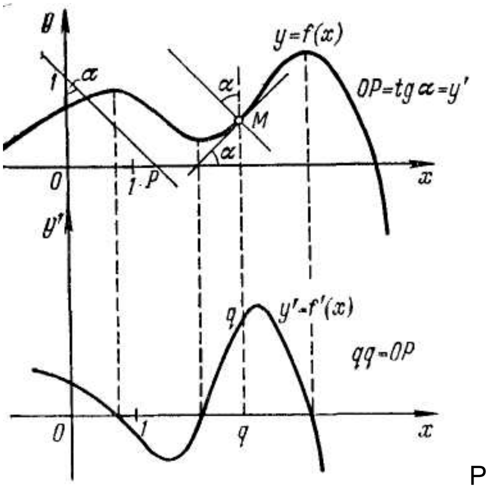


Рис.2.4.

Геометрический смысл производной дает возможность, если дан график функции $y = f(x)$, проследить за наклоном касательной к нему и сразу построить ориентировочный график производной (рис. 2.4). Для более точного *«графического вычисления производной»* надо проводить касательные к заданному графику и измерять их угловые коэффициенты. Необходимо проводить нормали к графику и измерять их угловые коэффициенты по отношению к оси *у*. На рис. 2.4 показано одно из таких построений.

При выводе геометрического смысла (2.4) производной мы пользовались тем, что переменные *х* и *у* — безразмерные, а единицы масштаба по обеим осям одинаковые. На практике это не всегда так; в общем случае следует, что $y'_0=(l_x/l_y)tga$, однако и тогда производная равна угловому коэффициенту касательной.

Отметим, что если производная y' при некотором значении *х* обращается в бесконечность (при $x = x_1$ на рис. 2.5), то в соответствующей точке графика касательная имеет угловой коэффициент, равный бесконечности, т. е. параллельна оси *у;* если производная претерпевает скачок, то и касательная поворачивается скачком, т. е. график имеет излом (при $x= x_2$); если же функция уходит и бесконечность, то и производная уходит и бесконечность (при $x= x_3$).

-

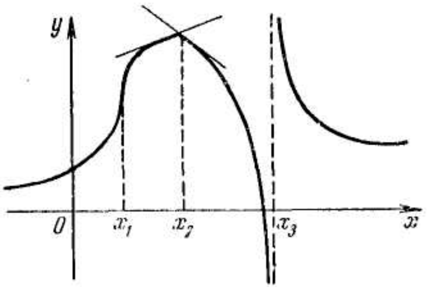


Рис.2.5

4. Дифференцируемость функций

Определение. Если функция

$$y = f(x)$$

имеет производную в точке $x=x_0$, т. е. если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

то мы говорим, что при данном значении $x = x_0$ функция *дифференцируема* или (что равносильно этому) имеет производную.

Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого отрезка $[a, b]$ или интервала (a, b), то говорят, что она *дифференцируема на отрезке* $[a, b]$ или, соответственно, *в интервале* (a, b).

Теорема. *Если функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в некоторой точке* $x = x_0$, *то она в этой точке непрерывна.*

Действительно, если

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

то

$\Delta y/\Delta x=f'(x_0)+\gamma$

где γ есть величина, стремящаяся к нулю при $\Delta x\to 0$. Но тогда

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \gamma\,\Delta x;$$

отсюда следует, что $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$, а это значит, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Таким образом, в

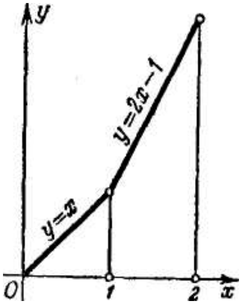


Рис.2.6

точках разрыва функция не может иметь производной. Обратное заключение неверно, т. е. из того, что в какой-нибудь точке $x=x_0$ функция $y= f(x)$ непрерывна, еще не следует, что в этой точке она дифференцируема: функция $f(x)$ может и не иметь производной в точке x_0 . Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример.

Пример . Функция $f(x)$ определена на отрезке |0, 2| следующим образом (рис. 2.6)

$f(x) = x$ при $0\le x\le 1$

$f(x) = 2x - 1$ при $1< x\le 2$

Эта функция при $x=1$ эта не имеет производной, хотя и непрерывна в этой точке.

Действительно, при $\Delta x>0$ имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2(1+\Delta x)-1]-[2\cdot 1-1]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2,$$

при $\Delta x<0$ получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[1+\Delta x]-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Таким образом, рассматриваемый предел зависит от того, коков знак Δx, а это значит, что в точке $x=1$ функция не имеет производной. Геометрически этому соответствует тот факт, что в точке $x=1$ данная «кривая» не имеет определенной касательной.

Непрерывность же функции в точке $x=1$ следует из того, что

$\Delta y=\Delta x$ при $\Delta x<0$,

$\Delta y=2\Delta x$ при $\Delta x>0$,

и следовательно, в обоих случаях $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

2.2. Основные свойства производной.

1.Производная постоянной равна нулю, так как скорость в положении покоя равна нулю. Формальное доказательство: если $y = C$= const, то

$$\Delta y = C - C = 0, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim 0 = 0.$$

2. *Производная суммы равна сумме производных.* Действительно

если $y(x) = u(x) + v(x)$, то $y(x+\Delta x) = u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)$ и

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = [u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)] - [u(x) + v(x)] = [u(x) + \Delta u + v(x) + \Delta v] - [u(x) + v(x)] = \Delta u + \Delta v,$$

т.е. *приращение суммы равно сумме приращений:* *Δ(u+v)=Δu+Δv*. Отсюда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'$$

(мы воспользовались тем, что предел суммы равен сумме пределов), что и требуется. Иначе это свойство можно записать так:

$$(u+v)' = u' + v'.$$

Мы рассмотрели сумму двух слагаемых. Ясно, что то же будет при любом числе слагаемых. Аналогичным образом *приращение разности равно разности приращений, а производная разности равна разности производных.*

Пример. $(x^3 - 3x^2 + x + 5)' = (x^3)' - (3x^2)' + (x)' + (5)' = 3x^2 - 6x + 1 + 0 = 3x^2 - 6x + 1$.

3. *Постоянный множитель можно вынести за знак производной,* т.е. $(Cu)' = Cu'$ (где C= const). Действительно, если $y = Cu$, то

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = Cu(x+\Delta x) - Cu(x) = \\ = C[u(x+\Delta x) - u(x)] = C\Delta u;$$

другими словами, *если функцию умножить на константу, то приращение умножится на ту же константу: Δ(Cu) = CΔu.*

Отсюда $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{C\,\Delta u}{\Delta x} = C \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = Cu'$.

4. *Формула для производной произведения*

Пусть $y=uv$. Тогда

$$\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = (\Delta u)\,v + u\Delta v + \Delta u\,\Delta v,$$

откуда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{(\Delta u)\,v}{\Delta x} + \lim \frac{u\Delta v}{\Delta x} + \lim \frac{\Delta u\ \Delta v}{\Delta x} = \\ = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \lim u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim \frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\,\Delta x = u'v + uv' + u'v'\cdot 0.$$

Итак

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{2.6}$$

Например

$$[(3x^2+5x)(4x^2-6)]' = (3x^2+5x)'(4x^2-6) + (3x^2+5x)(4x^2-6)' = \\ = (6x+5)(4x^2-6) + (3x^2+5x)\,8x = 48x^3 + 60x^2 - 36x - 30.$$

Из формулы (2.6) легко вывести формулу для производной от произведения нескольких функций. Например,

$(uvw)'=[(uv)w]'=(uv)'w+(uv)w'=(u'v+uv')w+uvw'=u'vw+uv'w+uvu'.$

Аналогичный вид имеет формула для произведения любого числа множителей. Отметим, что свойство 3 легко вывести из формулы (6.6), положив $v = C$.

5. *Формула для производной частного.* Пусть $y = u/v$. Тогда

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u\,v - u\Delta v}{v\,(v+\Delta v)}\,.$$

Отсюда, представляя в знаменателе в виде Δv, получим $(\Delta y/\Delta x)\Delta x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\left(v + \frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x\right)} = \frac{u'v - uv'}{v\,(v+v'\cdot 0)}\,.$$

Итак,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{2.7}$$

Например

$$\left(\frac{5x^2}{3x^2+4}\right)' = \frac{(5x^2)'(3x^2+4) - (5x^2)(3x^2+4)'}{(3x^2+4)^2} =$$
$$= \frac{10x(3x^2+4) - 5x^2 \cdot 6x}{(3x^2+4)^2} = \frac{40x}{(3x^2+4)^2}.$$

6. *Производная сложной функции.* Пусть $y=f(u)$, $u = \varphi(x)$, т. е. y является сложной функцией x. Если x получит приращение Δx, то промежуточная переменная u получит приращение Δu, а поэтому y также получит некоторое приращение Δy. При этом

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{2.8}$$

Пусть теперь $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'_x,$$

а потому

$$\Delta u = \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x \to \quad u'_x \cdot 0 = 0$$

и, значит,

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} \to y'_u.$$

Переходя в формуле (2.6) к пределу, получим

$$y'_x = y'_u u'_x. \tag{2.9}$$

Эту формулу можно записать так

$$[f(\varphi(x))]' = f'(\varphi(x))\,\varphi'(x). \tag{2.10}$$

Аналогично вычисляется производная в случае зависимостей с большим числом промежуточных ступеней. Так, если $y= y(u)$, $u= u(v)$, $v = v(x)$, то $y'_x = y'_u u'_v v'_x$.

Пусть, например, $y = (x^2 - 5x+3)^3$. Тогда можно обозначить $y=u^3$, где $u= x^2 - 5x+ 3$, и по формуле (2.9) имеем

$$y'_x = y'_u u'_x = (u^3)'_u (x^2 - 5x + 3)'_x = 3u^2(2x-5) =$$
$$= 3(x^2 - 5x + 3)^2(2x-5);$$

это, конечно, проще чем раскрывать скобки. На практике не пишут так подробно , а оформляют вычисления так

$$[(x^2 - 5x + 3)^3]' =$$
$$= 3(x^2 - 5x + 3)^2(x^2 - 5x + 3)' = 3(x^2 - 5x + 3)^2(2x-5),$$

т.е. по существу, пользуются формулой (2.10). при некотором навыке ответ можно писать непосредственно, без промежуточных преобразований. Для этого формулы для производных иногда запоминают в виде $(u^2)'=2uu'$, $(u^3)'=3u^2u'$ (производная берется по x) и т. п.

7. *Производная обратной функции.* Пусть равенство $y = y(x)$ определяет обратную зависимость $x = x(y)$, для которой мы можем найти производную x'_y . Тогда легко найти производную и от исходной функции. Действительно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x/\Delta y},$$

откуда , при $\Delta y\to 0$ и $\Delta x\to 0$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}. \tag{2.11}$$

Пусть , например,

$$y=\sqrt[3]{x},$$

откуда $x=y^2$. Тогда

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(y^3)'_y}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

8. *Производная неявной функции.* Если задана неявная функция в форме $F(X, y) = 0$, то для вычислении производной y'_x нужно просто приравнять производные от левой и правой частей заданного соотношения, имея при этом в виду, что y есть функция от x, обращающая это соотношение в тождество. Вообще *непосредственно приравнивать производные от обеих частей равенства можно только в том случае, когда это равенство является тождеством (а не уравнением).*

Пусть, например, задано соотношение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2.12}$$

Тогда

$$\left(\frac{x^2}{a^2}\right)'_x+\left(\frac{y^2}{b^2}\right)'_x=(1)'_x, \quad \text{т. е.} \quad \frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0; \tag{2.13}$$

при вычислении производной от второго слагаемого пользовались свойством 6

$$\left(\frac{y^2}{b^2}\right)'_x=\frac{1}{b^2}\,(y^2)'_y\cdot y'_x=\frac{1}{b^2}\,2yy'.$$

Из (6.13) получаем

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}. \tag{2.14}$$

9. Производная от функции $y=x^n$ при n целом и положительном

Для нахождения производной от данной функции $y=f(x)$, исходя из общего определении производной, необходимо произвести следующие действия:

1) дать аргументу x приращение Δx, вычислить наращенное значение функции:

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x);$$

2) найти соответствующее приращение функции:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x);$$

3) составить отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

4) найти предел данного отношения при $\Delta x\to 0$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Мы применим здесь и далее этот общий способ для вычисления производных от некоторых элементарных функций.

Теорема. *Производная функции $y=x^n$, где n—-целое положительное число, равна nx^{n-1}, т. е*

если $y=x^n$, *то* $y'=nx^{n-1}$. (I)

Доказательство. Имеем функцию

$$y=x^n.$$

1) Если x получает приращение , то Δx

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^n.$$

2) Пользуясь формулой бинома Ньютона, находим

или

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n-x^n$$

......

$$\Delta y=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n.$$

3) Находим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}.$$

4) Найдем предел этого отношения

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}\right] = nx^{n-1},$$

следовательно,

$$y' = nx^{n-1},$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. $y = x^5$, $y' = 5x^{5-1} = 5x^4$.

Пример 2. $y = x$, $y = 1x^{1}-^{1}$, $y' = 1$. Последний результат имеет простое геометрическое толкование: касательная к прямой $y = x$ при любом значении x совпадает с этой прямой и, следовательно, образует с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен 1.

Отметим, что формула (I) верна и в случае n дробного и отрицательного.

2.3. Производные основных элементарных функций.

1. *Производная синуса.* Пусть $y = \sin x$. Если аргумент изменится и станет равным $x+\Delta x$, то функция станет равной $\sin(x+\Delta x)$. Отсюда

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\left[2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 1\cdot\cos x$$

Итак

$$(\sin x)' = \cos x. \qquad (2.15)$$

2. Аналогично доказывается ,что

$$(\cos x)' = -\sin x. \qquad (2.16)$$

3. Производную тангенса вычисляем по формуле (2.7)

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

4. Аналогично проверяется, что

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5. *Производная арксинуса.* Пусть $y = arcsinx$. Тогда $x=siny$, и по формуле (2.11)

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

перед радикалом взят +, так как значение $arcsinx$, как известно, берется в 1 и—1-й четвертях, где $cosy>0$. Итак

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6. Аналогично проверяется, что

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{2.17}$$

при этом используется то, что $0\leq arccosx\leq\pi$. Сходство двух последних результатов объясняется формулой

$$arcsinx + arccosx \equiv \pi/2 \tag{2.18}$$

получаемой следующим образом. Обозначим $sina = x$, тогда

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = x;$$

из этих формул получаем, что

$$\alpha = \arcsin x,\ \frac{\pi}{2}-\alpha = \arccos x.$$

Складывая результаты, приходим к (2.18)

7. *Производная арктангенса.* Пусть $y=arctgx$. Тогда $x = tgy$ и, применяя формулы для производной обратной функции и для производной тангенса, получим

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

итак

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

8. *Производная логарифмической функции.* Пусть $y = \ln x$. Тогда в силу формулы (1.22), в которой надо положить $h = \Delta x/x$,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}x} = \frac{1}{x}.$$

Итак

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Применяя формулу для определения $log_a x$ и учитывая, что In a = const, получим

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

9. *Производная показательной функции.* Если $y = a^x$, то

$$x = \log_a y \quad \text{и} \quad y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a.$$

Итак

$$(a^x)' = a^x \ln a;$$

в частности

$$(e^x)' = e^x.$$

10. *Производная степенной функции.* Согласно формуле для производной сложной функции

$$(x^n)' = [(e^{\ln x})^n]' = (e^{n \ln x})' = e^{n \ln x} n \frac{1}{x} = x^n n \frac{1}{x} = nx^{n-1}.$$

Итак

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Эта формула справедлива для любого n, целого или нецелого. пример, $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1}$ $= -1x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2}$ и т. п.

11) *Производная гиперболических функций.* Имеем

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}(-x)'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;$$

аналогично

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{arsh} x)' = [\ln(x + \sqrt{x^2+1})]' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}(x + \sqrt{x^2+1})' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

И в этих формулах обнаруживается значительная аналогия с тригонометрическими функциями.

12. Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{array}\right\} t_0 \leqslant t \leqslant T.$$

(2.19)

Предположим, что эти функции имеют производные и что функция $x=\varphi(t)$ имеет обратную $t=\Phi(x)$, которая также имеет производную. Тогда определенную параметрическими уравнениями функцию $y=f(x)$ можно рассматривать как сложную функцию

$$y=\psi(t), \qquad t=\Phi(x),$$

t—промежуточный аргумент.

По правилу дифференцирования сложной функции получим:

$$y'_x=y'_t t'_x=\psi'_t(t)\,\Phi'_x(x).$$

(6.20)

На основании теоремы о дифференцировании обратной функции следует:

$$\Phi'_x(x)=\frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Подставляя последнее выражение в равенство (6.20), получаем

$$y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

или

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Выведенная формула дает возможность находить производную y'_x от функции, заданной параметрически, не находя выражения непосредственной зависимости y от x.

Пример 1. Функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \end{array}\right\} (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

Найти производную : 1) при любом значении t; 2) при $t=\pi/4$.

Решение.

1) $y'_x=\dfrac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'}=\dfrac{a\cos t}{-a\sin t}=-\operatorname{ctg} t;$

2) $(y'_x)_{t=\pi/4}=-\operatorname{ctg}(\pi/4)=-1.$

13. Выведенные формулы *(табличные производные)* нужно знать наизусть, так как они будут применяться систематически. С их

помощью, пользуясь правилами п. 4, можно вывести производную любой элементарной функции. Например

$$\left(\sqrt[3]{x}\, 2^{\operatorname{tg} 5x}\right)' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' 2^{\operatorname{tg} 5x} + \sqrt[3]{x}\left(2^{\operatorname{tg} 5x}\right)';$$

но

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

а по формуле для производной сложной функции

$$\left(2^{\operatorname{tg} 5x}\right)' = 2^{\operatorname{tg} 5x}\ln 2\,(\operatorname{tg} 5x)' = 2^{\operatorname{tg} 5x}\ln 2\,\frac{1}{\cos^2 5x}(5x)' = 2^{\operatorname{tg} 5x}\ln 2\,\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot 5.$$

Отсюда после вынесения общего множителя за скобки получим

$$\left(\sqrt[3]{x}\, 2^{\operatorname{tg} 5x}\right)' = \frac{2^{\operatorname{tg} 5x}}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(1 + 15\ln 2\,\frac{x}{\cos^2 5x}\right).$$

После некоторого навыка эти выкладки осуществляются значительно быстрее, без промежуточных преобразований.

В некоторых случаях перед вычислением производной полезно *предварительное логарифмирование.* Пусть, например надо найти производную

$$\left(x^{\sin x}\right)'.$$

Тогда пишем

$$y = x^{\sin x}; \quad \ln y = \sin x \ln x;$$

$$(\ln y)'_x = (\sin x \ln x)';$$

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \ln x + \sin x\,\frac{1}{x};$$

в левой части мы применили формулу для производной сложной функции. Отсюда окончательно

$$y' = \left(x^{\sin x}\right)' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \sin x\,\frac{1}{x}\right).$$

Этот метод иногда применяется также, если нужно найти производную произведения нескольких множителей: после логарифмирования получается сумма, от которой найти производную бывает легче.

Таблица основных формул дифференцирования

Объединим теперь в одну таблицу все основные формулы и пра-вила дифференцирования, выведенные и предыдущих разделах микромодуля .

$$y = \text{const}, \quad y' = 0.$$

Степенная функция

$y = x^{\alpha}, \qquad y' = \alpha x^{\alpha - 1};$

в частности,

$$y = \sqrt{x}, \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Тригонометрические функции

$$y = \sin x, \qquad y' = \cos x,$$

$$y = \cos x, \qquad y' = -\sin x,$$

$$y = \operatorname{tg} x, \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Обратные тригонометрические функции:

$$y = \arcsin x, \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$y = \arccos x, \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \qquad y' = \frac{1}{1 + x^2},$$

$$y = \operatorname{arcctg} x, \qquad y' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Показательная функция:

$$y = a^x, \quad y' = a^x \ln a;$$

в частности

$$y = e^x, \quad y' = e^x.$$

Логарифмическая функция:

$$y = \log_a x, \quad y' = \frac{1}{x} \log_a e;$$

в частности,

$$y = \ln x, \; y' = \frac{1}{x}.$$

Общие правила дифференцирования:

$y = Cu(x)$, $\qquad y' = Cu'(x) \qquad (C = \text{const})$,

$y = u + v - w$, $\qquad y' = u' + v' - w'$,

$y = uv$, $\qquad y' = u'v + uv'$,

$y = \dfrac{u}{v}$, $\qquad y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$,

$\left.\begin{array}{l} y = f(u), \\ u = \varphi(x), \end{array}\right\}$ $\qquad y'_x = f'_u(u)\,\varphi'_x(x)$,

$y = u^v$, $\qquad y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$.

Если $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$, где f и φ — взаимно обратные функции, то

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}, \text{ где } y = f(x).$$

Мікромодуль 3.

Индивидуальные тестовые задания

1. Найдите производные первого порядка функции $y = f(x)$.

17.1.1. а) $y = \cos^2 x + \sin(\operatorname{tg} x)$; б) $y = \ln^2 \arcsin\sqrt{x}$;

в) $y = 2^{\sin x + \cos^2 x}$; г) $y = \sqrt[5]{(2x+1)\operatorname{arcctg}\sqrt{x}}$.

17.1.2. а) $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x^2}$; б) $y = \log_3 \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $y = 10^{\sqrt{\ln x}} \cdot 3^{tgx}$; г) $y = 5\operatorname{arctg}(\ln^2 x) - 1$.

17.1.3. а) $y = \sin\sqrt{x} - 2\sin^3 x$;

б) $y = \ln\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

в) $y = e^{\operatorname{arctg} x}\cos 2^x$;

г) $y = \sqrt[4]{\log_3 \sin(x^3+1)}$.

17.1.4. а) $y = x^2/(1+\cos^2 2x)$;

б) $y = \sqrt[3]{\ln\cos\dfrac{x-2}{5}}$;

в) $y = \ln\sin(3^x x^2)$;

г) $y = 3^{\sqrt{x}}\cos^3(\operatorname{tg} x)$.

17.1.5. а) $y = \cos^5(\sin 3x)$;

б) $y = (1+\cos^2 x)^5 \sin 4x$;

в) $y = \ln(x + \arccos\sqrt{1-x^2})$;

г) $y = \ln^5 \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

17.1.6. а) $y = e^{x^2}\sqrt{x}/\sin x^2$;

б) $y = \dfrac{\operatorname{arctg}\ln x}{\ln\operatorname{arctg} x}$;

в) $y = 10^{2-\operatorname{tg}^4 x}$;

г) $y = \sqrt[6]{e^{-x}+1}\cdot\sin(4x+1)$.

17.1.7. а) $y = \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{ctg} x^2$;

б) $y = (2+\ln^2 \sin x)^3$;

в) $y = 2^{5^x}\cdot 4^{\cos x}$;

г) $y = \log_2^3 \arcsin(x^2)$.

17.1.8. а) $y = x\cos^2 x - \operatorname{ctg} 4x$;

б) $y = \arcsin^3 \ln\sin 2x$;

в) $y = \operatorname{arctg}^5(e^{2x}x)$;

г) $y = \dfrac{\sqrt{1+\ln^2 x}}{x^3+2}$.

17.1.9. а) $y = x^3/(1+\sin^4 x)$;

б) $y = \log_2 \operatorname{arctg}(1-x^2)$;

в) $y = 3^{\ln^2 \sin 5x} + \sqrt{2^x}$;

г) $y = \sqrt{1+\operatorname{sh}\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

17.1.10. а) $y = \sin\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

б) $y = \lg\dfrac{x+\sqrt{x^2-2}}{3x}$;

в) $y = e^{-x^2}\sin(3x-2)$;

г) $y = \cos(\sin^3(x\operatorname{tg} x))$.

17.1.11. а) $y = \sqrt{2+\sin\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;

б) $y = \dfrac{1-\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\ln^2 x}$;

в) $y = 2^{\sqrt[3]{\ln x}}\cdot x^3$;

г) $y = \operatorname{tg}^4(\operatorname{ch} x) - \operatorname{ch}(\operatorname{tg} x^2)$.

17.1.12. а) $y = \dfrac{5\operatorname{ctg}^2(5+1/x)}{x}$;

б) $y = \ln\arccos(2x-5)$;

в) $y = \operatorname{tg}(2^{\cos x})\ln(x3^x)$; г) $y = \operatorname{ch}^2(x^2-1) - \operatorname{ch}\sqrt{x}$.

17.1.13. а) $y = \dfrac{\sec^2(1+x^2)}{\cos x} - 1$; б) $y = \log_2^4 \arcsin(3x^3)$;

в) $y = 5^{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}\operatorname{ctg} 3^x$; г) $y = \sqrt[4]{2^{-x}+1}\cdot\cos 4\sqrt{x}$.

17.1.14. а) $y = \operatorname{tg}(\cos(5\operatorname{ctg} x))$; б) $y = \sqrt[3]{\ln\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$;

в) $y = 3^{\sin x}\sin^3 x + 3$; г) $y = \dfrac{\log_2(x+1/x)}{2x^3}$.

17.1.15. а) $y = \cos(\sin\sqrt{x\operatorname{tg} x})$; б) $y = \ln^5\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$;

в) $y = 6^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} - 2^{\operatorname{tg} x}$; г) $y = \sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{x}-1}{x+1}}$.

17.1.16. а) $y = \operatorname{tg}^2\dfrac{1}{x^2} - 5\operatorname{ctg} 3x$; б) $y = \log_3^4\sin\sqrt{1+x^3}$;

в) $y = x^3 e^{-x^2/2} - \cos 2^x$; г) $y = \operatorname{arctg}^2(x\ln x)$.

17.1.17. а) $y = (\operatorname{tg}\sqrt{3x})/\sin\sqrt{x}$; б) $y = \arcsin^4\ln\ln x$;

в) $y = 2^{\arccos x}\cos^2 x$; г) $y = \ln(x + \ln(x + \sqrt{1-x^2}))$.

17.1.18. а) $y = \sqrt[4]{\operatorname{tg}(x/4) + \operatorname{ctg} 4x}$; б) $y = \arccos^2\ln\sin x$;

в) $y = \operatorname{tg}(4^{\ln x} + 3^{tgx})$; г) $y = \dfrac{2 - \operatorname{arcctg}\sqrt{x}}{\log_3^4 x}$.

17.1.19. а) $y = \cos^3 5x - 8\sin^3 4x$; б) $y = \ln\ln\cos\ln\operatorname{tg} x$;

в) $y = 2^{x^2}/x^2$; г) $y = \sqrt[7]{\log_3^3\sin\sqrt{1+x}}$.

17.1.20. а) $y = \sqrt[5]{\sin^4 x - \cos\sqrt{x}}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{\ln(1+\ln^2 x)}}{\log_2 x}$;

в) $y = 2^{\ln\arcsin\sqrt{x}}$; г) $y = \dfrac{\operatorname{sh}^2(1+x^2)}{\operatorname{ch} x} - 2\operatorname{th} 2x$.

17.1.21. а) $y = \operatorname{ctg}^3(\sqrt[6]{2 - x\operatorname{tg}^2 x})$; б) $y = \dfrac{\sqrt{\arcsin\ln x}}{\ln(x^2+1)}$;

в) $y = e^{\sqrt[3]{\sin 5x\cdot 5\cos^2 x}}$; г) $y = \operatorname{tg}(4^{\ln x} + 7^{\operatorname{ctg} x})$.

17.1.22. а) $y=\cos\dfrac{x}{\sqrt{\sin x}}$; б) $y=\log_x 3+\log_3^4 x$;

в) $y=\cos e^{\sqrt[4]{x-1/x}}$; г) $y=\ln^5 \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$.

17.1.23. а) $y=\dfrac{x^2}{\sin^2 x-\cos(x^2)}$; б) $y=x\ln(x+\sqrt{1-x^2})$;

в) $y=2^{(x^3-2)/\sin x}$; г) $y=\operatorname{tg}^2\dfrac{1}{x^2+1}-5\operatorname{ctg}^4 2x$.

17.1.24. а) $y=\cos\dfrac{\sin x}{x+1}$; б) $y=\sin\ln\operatorname{tg}x-\ln\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;

в) $y=\cos 2x/(e^x+3^{x^2})$; г) $y=\dfrac{\sqrt{1+\ln^4 x}}{\log_5 x}$.

17.1.25. а) $y=\dfrac{\sin x}{3\cos x+\cos^3 x}$; б) $y=x^2(\cos\ln x-\sin\ln x)$;

в) $y=5^{4^x}+4^{5^x}$; г) $y=x\ln(x+\sqrt{4-x^2})$.

17.1.26. а) $y=\cos\sqrt{1+x^3}+\sqrt{\cos x}$; б) $y=\log_2^3(\ln x-\log_{\cos x}2)$;

в) $y=10^{3x-4}\cdot(3x-4)^{10}$; г) $y=\arccos\dfrac{x-1}{x}$.

17.1.27. а) $y=\sqrt[3]{\operatorname{tg}(x/3)}+\cos\sqrt{\sin x}$; б) $y=\log_3^3\log_2^2\ln(5x-2)$;

в) $y=3^{\sin^2 3x}+3^{\cos x}/x$; г) $y=\dfrac{\sqrt{\arcsin\ln x}}{x^2}$.

17.1.28. а) $y=\cos^6\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x\cos x}$; б) $y=\ln(\sin^2 x+\sqrt{\sin^3\ln x})$;

в) $y=x\cos(2^{\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}})$; г) $y=10^{2x-5}\cdot(7x^2-1)^8$.

17.1.29. а) $y=\dfrac{\cos^3(x^2-1/x^2)}{\cos x}$; б) $y=\ln\cos\log_7\operatorname{ctg}\ln x$;

в) $y=e^{\sqrt[5]{\operatorname{arcctg}\sqrt{x}}}/\ln x$; г) $y=\operatorname{tg}\sqrt{\sin 2x+x^3}$.

17.1.30. а) $y=x\sin^3 5x+\operatorname{cosec}^2 x$; б) $y=\ln^3\sin(x\cos x)$;

в) $y=\arcsin 8^{\sin x}/2^{\cos x}$; г) $y=\sqrt[3]{\dfrac{\operatorname{tg}x}{x\ln x}}$.

2. Найдите производную функции , заданой неявно

18.1.1. $x^2y + y^2x = x^3y^3$.

18.1.2. $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y$.

18.1.3. $\sin(xy) = x^2 + y^2$.

18.1.4. $y\cos x = \sin(x - y)$.

18.1.5. $3^x + 3^y = 3^{x+y}$.

18.1.6. $x^3 + y^3 - 4axy = 0$.

18.1.7. $\ln(x + y) + x^2y = 1$.

18.1.8. $x\sin y = x^2 + y^2$.

18.1.9. $x = y^3 - 4y + 1$.

18.1.10. $\sin x - \cos y = x - y$.

18.1.11. $\cos(xy) + \sin(xy) = y$.

18.1.12. $\operatorname{ctg} 2y = 2\operatorname{ctg} x$.

18.1.13. $y^3 + x^3y + xy^2 = 1$.

18.1.14. $x^4 + y^4 = x^3y^3$.

18.1.15. $y = x - \arcsin y$.

18.1.16. $x^3y + y^3x = x - y^2$.

18.1.17. $x^2y^2 + 2xy + x^3 = y^3$.

18.1.18. $\sin(x + y) = x - y$.

18.1.19. $x^3 + y^4x = x^3 - 2y$.

18.1.20. $x\operatorname{tg} y - y\operatorname{tg} x = yx$.

18.1.21. $x^3y - y^3x = (x - y)^3$.

18.1.22. $\operatorname{arctg}(x + y) = x - y^2$.

18.1.23. $5^x - 5^y = 5^{x+y}$.

18.1.24. $y\sin x + x\sin y = y$.

18.1.25. $3y\ln y = x^2(y + 5)$.

18.1.26. $y^3 - 5y + 6ax = 0$.

18.1.27. $x^3y^2 + 2^{x-y} = y$.

18.1.28. $3^{x+y} + 3^{x-y} = y^3$.

18.1.29. $y = x + e^{1+xy}$.

18.1.30. $\arcsin(x/y) + yx = y$.

3. Найдите производную функции **,** заданой параметрично

18.2.1. $y = \arccos t$, $x = \arcsin t$. **18.2.2.** $y = 1/\cos^2 t$, $x = \ln \operatorname{tg} t$.

18.2.3. $y = 5\sin^3 t$, $x = 2\cos^3 t$. **18.2.4.** $y = 1/\sin^2 t$, $x = \ln \operatorname{ctg} t$.

18.2.5. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$, $x = \operatorname{arctg} t^2$. **18.2.6.** $y = e^{-t^2}$, $x = e^{-t}$.

18.2.7. $y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $x = (\arcsin t)^2$. **18.2.8.** $y = e^t \sin t$, $x = e^t \cos t$.

18.2.9. $y = \dfrac{1}{\sin^2 t}$, $x = \ln\cos t$. **18.2.10.** $y = \dfrac{2t^2}{1+t^3}$, $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$.

18.2.11. $y = 4(1-\cos 2t)$, $x = 4(2t - \sin 2t)$.

18.2.12. $y = 3(\sin t - t\cos t)$, $x = 3(t\sin t + \cos t)$.

18.2.13. $y = \arcsin(t-1)$, $x = \sqrt{2t-t^2}$.

18.2.14. $y = t\sqrt{t^2-1}$, $x = \ln(t+\sqrt{t^2-1})$.

18.2.15. $y = \sqrt[3]{\ln \operatorname{tg} t}$, $x = \sqrt{\operatorname{arctg} t}$. **18.2.16.** $y = t - \operatorname{arctg} t$, $x = \ln \operatorname{ctg} t$.

18.2.17. $y = \dfrac{\cos t}{\sin^2 t}$, $x = (1+\cos t)^2$. **18.2.18.** $y = \dfrac{\operatorname{tg} t}{1-t^2}$, $x = \dfrac{\operatorname{ctg} 2t}{\sqrt{3}}$.

18.2.19. $y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}$, $x = \dfrac{1}{\ln^2 t}$. **18.2.20.** $y = \dfrac{t}{1+t^2}$, $x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

18.2.21. $y = 2\sin^2 t + \sin 2t$, $x = 3\operatorname{tg} 2t$.

18.2.22. $y = \ln \operatorname{ctg} e^t$, $x = \operatorname{tg}(2e^{-t})$.

18.2.23. $y = \arcsin\sqrt{1-t^2}$, $x = \operatorname{arctg}(t^2-1)$.

18.2.24. $y = \sqrt{1+\sqrt{t^2-1}}$, $x = \sqrt[3]{1-\ln t}$.

18.2.25. $y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $x = \arcsin\dfrac{t}{1+t^2}$.

18.2.26. $y = t - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{t}$, $x = t^3 - \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{t^2}$.

18.2.27. $y = (2+3\ln t)/t$, $x = 6\cos^3 t$.

18.2.28. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{1+t^2}$, $x = \arccos 1/t^2$.

18.2.29. $y = \operatorname{tg}^3 2t + \operatorname{ctg}^3 2t$, $x = \cos 2t - \sin 2t$

18.2.30. $y = \arcsin\sqrt{1-t}$, $x = \arccos\sqrt{1-t^2}$.

4. Найдите производную функции, пользуясь правилом логарифмического дифференцирования

18.3.1. $y = x^{\arcsin x}$.

18.3.2. $y = (\lg x)^{x/2}$.

18.3.3. $y = (x^3 + 1)^{\sin x}$.

18.3.4. $y = (\cos 2x)^{\ln tgx/2}$.

18.3.5. $y = (\sin\sqrt{x})^{1/x}$.

18.3.6. $y = x^{e^x}$.

18.3.7. $y = (\operatorname{ctg} 5x)^{5x-1}$.

18.3.8. $y = (x^5 + 1)^{\operatorname{ctg} x}$.

18.3.9. $y = x^{e^{-\operatorname{tg} x}}$.

18.3.10. $y = (x^8 + 1)^{tgx}$.

18.3.11. $y = \dfrac{(x-5)^2 \cdot \sqrt[3]{x^2+1}}{e^x (x+2)^5}$.

18.3.12. $y = \dfrac{3^x (2x-1)(x+1)^4}{\sqrt{x}(x-3)^6}$.

18.3.13. $y = \dfrac{(x-1)^3 \cdot \sqrt[4]{x^2+x}}{4^x (3x-2)^3}$.

18.3.14. $y = \dfrac{2^x (x-5)(x+1)^3}{\sqrt{x}(4x-3)^5}$.

18.3.15. $y = (x^3 - x)^{x^2+1}$.

18.3.16. $y = (2x-3)^{\cos x}$.

18.3.17. $y = x^{\operatorname{arctg} x}$.

18.3.18. $y = (x \sin x)^{x^2}$.

18.3.19. $y = (x \cos x)^{\ln x}$.

18.3.20. $y = x^{2^x}$.

18.3.21. $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

18.3.22. $y = (\arcsin x)^{\sin x}$.

18.3.23. $y = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$.

18.3.24. $y = x^{4^x}$.

18.3.25. $y = (4x-3)^{\arccos x}$.

18.3.26. $y = (\ln(x+1))^{\ln^2 x}$.

18.3.27. $y = (\operatorname{ctg} 2x)^{\operatorname{ctg} x}$.

18.3.28. $y = x^{\sin x} + (\sin x)^x$.

18.3.29. $y = (5x+2)^{\sin x}$.

18.3.30. $y = x^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

Микромодуль 4

Дифференциалы

2.4. Определение дифференциала и связь его с приращением

Физические примеры. Понятие дифференциала, тесно связанное с понятием производной, также является одним из важнейших в математике. Мы его проиллюстрируем на тех же примерах, что были рассмотрены нами в п. 1.

Пусть при прямолинейном движении точки по закону $s=f(t)$ она обладала в некоторый момент t скоростью $v= s'_t=f'(t)$. Если теперь пройдет дополнительное время Δt, то точка пройдет дополнительный путь Δs, который в случае неравномерности движения зависит от Δt сложным образом, так как скорость движения все время меняется. Однако если истекшее время Δt невелико, то и скорость не успеет существенно измениться и потому движение в промежутке времени от t до $t+\Delta t$ является «почти равномерным». В этом случае при подсчете пути не будет большой ошибки, если считать движение равномерным, т. е. происходящим с постоянной скоростью, именно той, которой точка обладала в момент t.

Получающийся при таком подсчете путь равен $v\Delta t= s'_t\Delta t= f'(t)\Delta t$; он прямо пропорционален истекшему времени Δt, называется *дифференциалом пути* и обозначается ds (этот символ надо понимать как единый, а не как произведение d на s), $ds= s'_t\Delta t$. Конечно, фактический путь Δs отличается от этого «примысленного» пути ds, так как за время Δt, даже малое, скорость все же успевает измениться. Однако в силу сказанного, если этот промежуток времени достаточно мал, можно приближенно считать

$$\Delta s\approx ds, \tag{2.21}$$

причем с тем большим основанием, чем меньше Δt, так как тем меньше успеет измениться скорость движения. Если же промежуток Δt бесконечно мал, то, как мы увидим далее, Δs и ds отличаются друг от друга на величину высшего порядка малости. Во многих вопросах такими величинами можно пренебрегать; тогда говорят, что *дифференциал пути*—это не что иное, как *бесконечно малый путь,* т. е. путь, пройденный за бесконечно малый промежуток времени. Впрочем, конечно, дифференциал пути может и не быть бесконечно малым, но чем он больше, тем формула (2.21) менее точна. В то же время вычислить ds как путь при равномерном движении гораздо легче, чем фактический путь Δs; этим объясняется то, что формулой (2.21) пользуются и при не очень малых Δt.

Таким же образом во втором примере дифференциал объема dV — это тот объем, который наполнился бы, если бы в промежутке времени от t до $t+ \Delta t$ скорость наполнении оставалась постоянной, равной скорости в момент t т. е. $dV= V'_t \Delta t$. В третьем примере дифференциал массы— это масса, которой обладал бы участок AB липни (см. рис. 6.2), если бы линейная плотность на этом участке была постоянной, равной плотности в точке А, т. е. $dM =\rho\Delta s= M'_s \Delta s$.

Во всех случаях замена истинного изменении какой – либо величины ее дифференциалом означает переход от неравномерных процессов, неоднородных объектов и т. п. к равномерным, однородным. Эта замена основана на том, что на протяжении малого промежутка времени всякий процесс «почти равномерен», на малой протяженности всякий объект «почти однороден» и т. п.

Определение дифференциала.

Пусть функции $y=f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$.

Производная этой функции в некоторой точке x отрезка $[a, b]$ определяется равенством

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Отношение $\Delta x/\Delta y$ при $\Delta x\to 0$ стремится к определенному числу $f'(x)$ и, следовательно, отличается от производной $f'(x)$ на величину бесконечно малую:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

где $a \to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Умножая все члены последнего равенства на Δx, получим:

$$\Delta y=f'(x)\Delta x + a\Delta x. \qquad (2.22)$$

Так как в общем случае $f'(x)\neq 0$, то при постоянном x и переменном $\Delta x\to 0$ произведение $f'(x)\Delta x$ есть бесконечно малая величина первого порядка относительно Δx. Произведение же $a\Delta x$ есть всегда величина бесконечно малая высшего порядка относительно Δx, так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Таким образом, приращение Δy функции состоит из двух слагаемых, из которых первое слагаемое есть [при $f'(x)= 0$] так называема главная часть приращения, линейная относительно Δx. Произведение $f'(x)\,\Delta x$ называют дифференциалом функции и обозначают через dy или $d(x)$.

Таким образом, если функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в точке x, то произведение производной $f'(x)$ на приращение Δx аргумента называется *дифференциалом* функции и обозначается символом dy:

$$dy=f'(x)\Delta x. \tag{2.23}$$

Найдем дифференциал функции $y= x$; в этом случае

$$y'=(x)'=1$$

и, следовательно, $dy = dx=\Delta x$ или $dx = \Delta x$. Таким образом, дифференциал dx независим переменного x совпадает с его приращением Δx. Равенство $dx = \Delta x$ можно было бы рассматривать также как определение дифференциала независимого переменного, и тогда рассмотренный пример показывал бы, что это не противоречит определению дифференциала функции. В любом случае формулу (2.23) мы можем записать так,

$$dy=f'(x)dx.$$

Но из этого соотношения следует, что

$$f'(x)= dy/ dx$$

Следовательно, производную $f'(x)$ можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.

Дадим теперь общее определение дифференциала.

Пусть $y=f(x)$, и аргумент, первоначально принимавший некоторое значение x, получил приращение Δx. Тогда *дифференциалом функции называется произведение*

$$dy = df(x)=y'\Delta x=f'(x)Ax; \tag{2.24}$$

это — то приращение, которое получила бы функция, если бы она на интервале от x до $x+\Delta x$ изменялась с той же скоростью, что и при значении x аргумента.

Вычисление дифференциала функции называется ее *дифференцированием;* оно очень просто осуществляется по формуле (2.24).

Пусть, например, $y = \sin x$; тогда $dy =(\sin x)'\Delta x= \cos x\Delta x$, т.е. $d\sin x = \cos x\, \Delta x$.

Аналогично $dtgx=1/\cos^2 x5\Delta x$; $d(x^3) = 3x^2\,\Delta x$ **и** т. п. Таким образом при дифференцировании функции надо вычислить ее производную, а результат умножить на Δx; поэтому процесс вычисления производной тоже часто называют дифференцированием. Однако *ни в коем случае нельзя путать производную и дифференциал друг с другом.* Производная функции $y=f(x)$ зависит только от x, тогда как дифференциал зависит также от Δx; в приложениях дифференциал обычно считается величиной бесконечно малой, тогда как производная— величиной конечной; если величины x и y размерные, то

$$[dy]=[\Delta y]=[y]; \quad [y'_x]=\frac{[\Delta y]}{[\Delta x]}=\frac{[y]}{[x]}.$$

Отметим , в частности, что

$$dx=x'_x\,\Delta x=1\,\Delta x=\Delta x,$$

т. е. *дифференциал независимого переменного равен его приращению.* Это дает возможность представить формулу (2.24) в виде

$$dy=f'(x)\,dx=y'\,dx \tag{2.25}$$

и, с другой стороны, записать производную в виде отношения дифференциалов

$$y'_x=\frac{dy}{dx} \quad \text{или, что то же,} \quad f'(x)=\frac{df(x)}{dx}.$$

Вернемся к выражению (2.22), которое с учетом (2.23) перепишем так:

$$\Delta y = dy + a\Delta x, \tag{2.26}$$

Таким образом, приращение функции отличается от дифференциала функции на величину бесконечно малую высшего порядка относительно Δx. Если $f'(x) \neq 0$, то $a\Delta x$ является бесконечно малой высшего порядка и относительно dy и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=1+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{f'(y)\,\Delta x}=1+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{f'(x)}=1.$$

Поэтому в приближенных вычислениях иногда пользуются приближенным равенством

$$\Delta y\approx dy \tag{2.27}$$

Задача нахождения дифференциала функции равносильна нахождению производной, так как, умножив последнюю на дифференциал аргумента, получим дифференциал функции. Следовательно, большинство теорем и формул, относящихся к производным, сохраняют свою силу и для дифференциалов. Так, например:

Дифференциал суммы двух дифференцируемых функций и и v равен сумме дифференциалов этих функций:

$d(u+v) = du + dv.$

Дифференциал произведения двух дифференцируемых функций и и v определяется формулой

$d(uv) = u\,dv + v\,du.$

Докажем, например, последнюю формулу. Если $y = uv$, то $dy=y'dx = (uv'+vu')\,dx = uv'dx+vu'dx,$

но

$v'dx= dv, \quad u'dx= du,$

поэтому

$dy = u\,dv+ v\,du.$

Аналогично доказываются и другие формулы, например формула, определяющая дифференциал частного:

$$\text{если } y = \frac{u}{v}, \text{ то } dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Решим несколько примеров на вычисление дифференциала функции

Пример 1.

$$y = \operatorname{tg}^2 x, \quad dy = 2\operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x}\,dx.$$

Пример 2.

$$y = \sqrt{1+\ln x}, \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}} \frac{1}{x}\,dx.$$

Найдем выражение дли дифференциала сложной функции. Пусть

$y=f(u), \qquad u=\varphi(x), \qquad$ или $\qquad y= f[\varphi(x)]$

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$dy/dx= f'_u(u)\,\varphi'(x)$

следовательно

$dy= f'_u(u)\,\varphi'(x)\,)\,\varphi'(x)\,dx$

но $\varphi'(x)\,dx= du$, поэтому

$dy = f'(u)\,du$

Таким образом, *дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы промежуточный аргумент и был независимой переменной.* Иначе говоря, *форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента.* Это важное свойство дифференциала, называемое *инвариантностью формы дифференциала,* будет широко использовано в дальнейшем.

Пример 3. Дана функция $y = \sin \sqrt{x}$. Найти dy.

Решение. Представив данную функцию как сложную;

$$y = \sin u, \quad u = \sqrt{x},$$

находим

$$dy = \cos u \frac{1}{2\sqrt{x}} dx;$$

но

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du,$$

поэтому можно записать

$$dy = \cos u \, du \quad \text{или} \quad dy = \cos(\sqrt{x})\, d(\sqrt{x}).$$

Геометрический смысл дифференциала функции показан на рис. 2.7: он равен приращению ординаты касательной. Таким образом, замена приращения функции на ее дифференциал геометрически означает, что график функции заменяется отрезком касательной к нему в точке *A*.

Ясно, что для такой замены имеются основания, если Δx достаточно мал.

Для выяснения связи дифференциала с приращением заметим, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} y',$$

т.е.

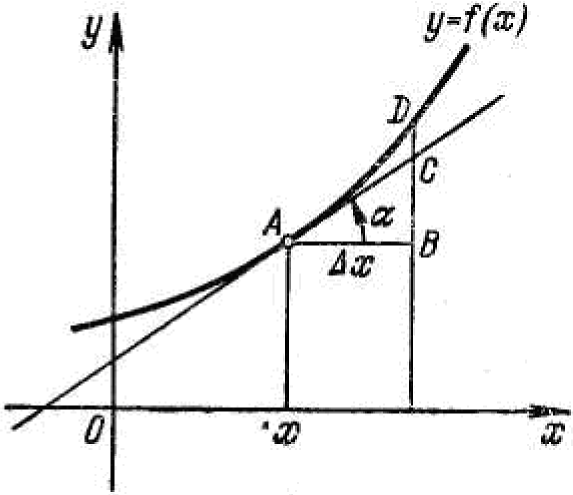
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha,$$

где $a \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x = dy + \beta, \qquad (2.28).$$

где $\beta = a\Delta x$ — величина высшего порядка малости по сравнению с Δx (на рис6.7 она изображается отрезком *CD*). Это равенство выражают словами *«дифференциал есть главная линейная часть приращения функции»:* главная — так как он отличается от приращения на величину β высшего порядка, а линейная —

потому что он прямо пропорционален Δx . Если $y'\neq 0$, то dy и $dx = \Delta x$ имеют одинаковый порядок малости, а потому β в формуле (2.28) имеет высший порядок малости, чем dy, т. е. dy и Δy— бесконечно малые эквивалентные .



$$BD=\Delta y;\quad BC=AB\ \mathrm{tg}\,\alpha=\Delta x\cdot y'=dy.$$

Рис.2.7.

Покажем на примере, какая ошибка получается при замене приращения функции ее дифференциалом. Пусть $y = x^2$ и аргумент, принимая первоначальное значение x=1, получит приращение Δx. Тогда

$$\Delta y = (1+\Delta x)^2 - 1^2 = 2\Delta x + \Delta x^2;$$
$$dy = y'\,\Delta x = 2\cdot 1\Delta x = 2\Delta x.$$

Таким образом, Δy и dy отличаются друг от друга на величину $(\Delta x)^2$ второго порядка малости (рис.2.8).

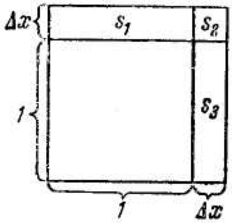


Рис.2.8

В частности,

при $\Delta x = 0{,}1$	$\Delta y = 0{,}21$;	$dy = 0{,}2$;	ошибка 5%;
при $\Delta x = 0{,}01$	$\Delta y = 0{,}0201$;	$dy = 0{,}02$;	ошибка 0,5%;
при $\Delta x = -0{,}001$	$\Delta y = -0{,}001999$;	$dy = -0{,}002$;	ошибка 0,05% и т. д.

Хорошо видно, что при замене Δy на dy относительная погрешность при уменьшении | Δx | быстро уменьшается.

Функция, обладающая дифференциалом, называется *дифференцируемой.* Другими словами, дифференцируемая функция —это функция, малое приращение которой имеет главную линейную часть, т. е. функция, которую на любом малом участке изменения аргумента можно приближенно заменить на линейную (такая замена называется *линеаризацией).*

У дифференцируемой функции производная должна быть конечной, а сама функция должна быть непрерывной при рассматриваемых значениях аргумента, так как из (2.28) видно, что при бесконечно малом Δx и Δy будет бесконечно малым. В тоже время непрерывная функция может быть не всегда дифференцируемой, например, функция, изображенная на рис.2.5, перестает быть дифференцируемой не только в точке разрыва $x=x_3$, но и в точках непрерывности $x=x_1$ и $x=x_2$.

Свойства дифференциала. Так как дифференциал функции получается в результате простого умножения ее производной на дифференциал независимого переменного, то из каждого свойства производной легко вывести соответствующее свойство дифференциала. Например, умножая обе части равенства $(u+v)' = u'+v'$ на dx, получим $(u+v)'\,dx = u'dx+v'dx$ или, что то же самое,

$d\,(u+v) = du+dv$

(дифференциал суммы равен сумме дифференциалов). Аналогично получаем формулу

$$d\,(uv) = (du)v + udv \qquad (2.29)$$

и т. п. Далее мы увидим, что эти формулы справедливы и для случая любого числа независимых переменных.

Особенно важный вывод вытекает из формулы для производной сложной функции. Пусть $y=f(x)$ и x сначала является независимой переменной. Тогда для вычисления dy можно пользоваться любой из формул (2.24) или (2.25), так как в этом случае $\Delta x=dx$. Пусть теперь x зависит от некоторой третьей величины, например $x = x(t)$. Тогда уже $\Delta x \neq dx$, но оказывается, что *формула* (2.25) *все равно остается справедливой* (а формула (2.24), вообще говоря, нарушается). Действительно,

$dy = y'_t dt = y'_x x'_t\, dt = y'_x\, dx$,

что и требуется. Поэтому при вычислении дифференциалов обычно пользуются формулой (2.25) (а не (2.24)), так как она остается справедливой, инвариантной (неизменной) во всех случаях.

Применим это свойство инвариантности для вычисления *производной от функции, заданной параметрически.* Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, (t- параметр).

Тогда

$dx = \dot{x}dt; \quad dy = \dot{y}dt$

(точкой сверху обычно обозначается производная по параметру), откуда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\,. \qquad (2.30)$$

Все эти свойства дифференциалов применяются, в частности, при линеаризации зависимостей между величинами, т. е. при переходе от общей, нелинейной зависимости к линейной зависимости между приращениями этих величин. Такая линеаризация возможна при малых изменениях рассматриваемых величин и основана на отбрасывании величин высшего порядка малости.

Так, например, уравнение (2.30) определяет нелинейную связь между координатами точки $M\ (x;\ y)$ линии второго порядка. Однако пусть точка M меняется вблизи некоторой фиксированной точки $M_o\ (x_0;\ y_0)$, т. е. приращения $x - x_0 = \xi$, $y - y_o = \eta$ малы. Дифференцируя уравнение (2.30), а затем заменяя дифференциалы приращениями, приходим к линеаризованному уравнению

$$2Ax_0\xi+2By_0\xi+2Bx_0\eta+2Cy_0\eta+D\xi+E\eta=0, \qquad (2.31)$$

которое определяет линейную зависимость между ξ и η . Так как при выводе равнения (2.31) мы заменяли дифференциалы *dx, dy* на приращения ξ, η, то этому уравнению точка *M* линии удовлетворяет лишь с точностью до величины высшего порядка малости. Точно уравнению (2.31) удовлетворяют точки касательной к линии (2.30), проведенной в точке M_0.

Линеаризация широко применяется в физике, в частности , при составлении дифференциальных уравнений .

. **Применение дифференциала в приближенных вычислениях**. Дифференциал широко применяется в приближенных вычислениях. Прежде всего *довольно часто приращение функции заменяют ее дифференциалом, который обычно вычислять проще.*

Допустим, что дана функция *y = f(x),* для которой известно некоторое значение *f (a);* пусть после этого аргумент получил малое приращение *Δx = h*. Тогда можно положить

$$f(a+h)-f(a)=\Delta y\approx dy=f'(a)\,h,$$

т.е.

$$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)\,h. \qquad (2.32)$$

Выбирая в качестве *f(x),* конкретные функции $\sqrt[n]{x},\ \sin x,\ \ln x$ и т. д. лучим приближенные формулы

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt[n]{a+h}\approx\sqrt[n]{a}+\frac{h}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}};\\&\sin(a+h)\approx\sin a+h\cos a;\\&\ln(a+h)\approx\ln a+\frac{h}{a}\end{aligned}\right\} \qquad (2.33)$$

и т. д., пригодные для достаточно малых |*h*|.

Иногда перед применением формул (2.33) требуется предварительное преобразование величины, которую нужно вычислить.. Например, начисление $\sqrt[3]{2}$ нехорошо проводить так:

$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{1+1}\approx\sqrt[3]{1}+\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}=1+\frac{1}{3}\quad 1{,}333,$$

так как значение h = l в данном случае вряд ли можно считать малым по сравнению с *a=1.* Здесь удобно положить $\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2m^3}/m$ и подобрать, целое *m* так, чтобы $2m^3$ оказалось по возможности ближе к какому-либо полному кубу. Можно взять $m = 4$, так как $2\cdot4^3=128$ близко к $125=5^3$; тогда получим, вычисляя до 0,0001,

$$\sqrt[3]{2}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{2\cdot4^3}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{128}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{125+3}\approx\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{125}+\frac{3}{3\sqrt[3]{125^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(5+\frac{1}{25}\right)=\frac{1}{4}\cdot5{,}0400=1{,}2600.$$

Дифференциалы применяются также при оценке погрешности. Допустим, что величины x и y связаны функциональной зависимостью $f=(x)$ и известно приближенное значение $\bar{x}$ величины x с предельной абсолютной погрешностью a_x. Тогда в качестве приближенного значения y надо взять, конечно, $\bar{y}=f(\bar{x})$. Для подсчета предельной абсолютной погрешности a_y заметим, что на самом деле $x=\bar{x}+h$, где $|h|<a_x$, откуда, если a_x, а следовательно и h, мало, то

$$y=\bar{y}+\Delta y\approx\bar{y}+dy=\bar{y}+f'(\bar{x})\,h,$$

т.е.

$$|y-\bar{y}|\approx|f'(\bar{x})|\,|h|<|f'(\bar{x})|\,\alpha_x.$$

Итак, можно положить

$$\alpha_y=|n|\,\bar{x}^{n-1}\alpha_x, \qquad (2.34)$$

Пусть, например, $y=x^n$. Тогда

$$\alpha_y=\frac{1}{10{,}7}\,0{,}1\approx0{,}01,$$

а соответствующие предельные относительные погрешности связаны простой формулой:

$$\delta_y=\frac{\alpha_y}{\bar{y}}=\frac{|n|\,\bar{x}^{n-1}\alpha_x}{\bar{x}^n}=\frac{|n|\,\alpha_x}{\bar{x}}=|n|\,\delta_x.$$

2.5. Производные и дифференциалы высших порядков

Производные высших порядков. Пусть $y=f(x)$. Тогда производная $y'=f'(x)$, называется *производной первого порядка.* Она в свою очередь является функцией x и потому от нее можно взять производную, которая называется *производной второго порядка* от исходной функции:

$y''=(y')'=f''(x).$

Аналогично определяется *производная третьего порядка* $y''' = (y'')' = f'''(x)$.
Например, $(x^3)'=3x^2$, $(x^3)''= (3x^2)' =6x$; $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' =(\cos x)'=-\sin x$ и т. п.
Пример 1. Дана функция
$y=e^{kx}$ $(k=\text{const})$.

Найти выражение ее производной любого порядка *n*.
Решение
$$y'=ke^{kx},\ y''=k^2e^{kx},\ \ldots,\ y^{(n)}=k^ne^{kx}.$$

Пример 2. $y = \sin x$. Найти $y^{(n)}$.
Решение.
$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{\mathrm{IV}}=\sin x=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Производная второго порядка часто имеет непосредственный физический смысл: так, производная второго порядка от пути по времени — это скорость изменения мгновенной скорости, т. е. мгновенное ускорение. О применении производных высших порядков будет сказано далее.
Формула для производной суммы очень проста. Если $y=u+v$, то $y'=u'+v'$, $y'' = (u' +v')' =u''+v''$ и т. д. Вообще
$$(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}.$$

Что касается формулы для производной произведения, то
$$\begin{aligned}(uv)' &= u'v+uv';\\ (uv)'' &= (u'v+uv')'=u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv'';\\ (uv)''' &= (u''v+2u'v'+uv'')'=u'''v+2u''v'+u'v''+u''v'+2u'v''+uv'''=\\ &= u'''v+3u''v'+3u'v''+uv''' \text{ и т д.;}\end{aligned} \tag{2.35}$$

при этом, вычисляя очередную производную, мы сначала во всех членах дифференцируем первый множитель, а затем во всех членах — второй. Эти вычисления идут по той же схеме, как при последовательном разложении выражений $(a + b)^2$, $(a+b)^3$ и т. д.:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a+b)^3=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \text{ и т. д.} \qquad (2.36)$$

Поэтому в формулах (6.35) получаются такие же коэффициенты, как и в формулах (2.36). В общем случае можно написать *(формула Лейбница)*

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+\binom{n}{1}u^{(n-1)}v'+\binom{n}{2}u^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)}, \qquad (2.37)$$

где $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ ...—это так называемые *биномиальные коэффициенты,* т.е. коэффициенты, получающиеся при разложении степени $(a+b)^n$.

Подобным образом вычисляются дальнейшие производные.

Пример 3.Дано

$$y=e^{ax}x^2.$$

Найти производную $y^{(n)}$.

Решение

$$u=e^{ax}, \qquad v=x^2,$$
$$u'=ae^{ax}, \qquad v'=2x,$$
$$u''=a^2e^{ax}, \qquad v''=2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u^{(n)}=a^ne^{ax}, \quad v'''=v^{\text{IV}}=\ldots=0,$$
$$y^{(n)}=a^ne^{ax}x^2+na^{n-1}e^{ax}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}e^{ax}\cdot 2,$$

или

$$y^{(n)}=e^{ax}[a^nx^2+2na^{n-1}x+n(n-1)a^{n-2}].$$

Дифференциалы высших порядков. Пусть $y=f(x)$. Тогда

$$dy=f'(x)dx. \qquad (2.38)$$

Это — *дифференциал первого порядка. Дифференциал второго порядка* d^2y— это дифференциал от дифференциала первого порядка; при этом, если x— независимая переменная, то при таком вторичном дифференцировании dx считается независимым от x и выносится как постоянная величина:

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)\,dx)=d(f'(x))\,dx=$$
$$=(f'(x))'\,dx\,dx=f''(x)\,dx^2, \qquad (2.39)$$

где принято обозначение

$$dx^2=(dx)^2.$$

Аналогично получим

$$d^3y = d\,(d^2y) = f'''\,(x)\,dx^3 \tag{2.40}$$

и т.д. Это дает возможность записать производные высших порядков в виде отношения дифференциалов

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{и т. д.} \tag{2.41}$$

Кроме того, видно, что если dy имел первый порядок малости в сравнении с dx, то d^2y имеет второй порядок малости, d^3y — третий и т. д.

Пример 3. Найти dy и d^2y сложной функции $y = \sin u$, $u = \sqrt{x}$.

Решение.

$$dy = \cos u \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \cos u\,du.$$

Далее, используя формулу определения дифференциала второго порядка, получаем

$$d^2y = -\sin u\,(du)^2 + \cos u\,d^2u = -\sin u\,(du)^2 + \cos u \cdot u''\,(dx)^2 =$$
$$= -\sin u\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 (dx)^2 + \cos u\left(-\frac{1}{4x^{3/2}}\right)(dx)^2.$$

Далее отметим, что

$$\boldsymbol{d^2x = d\,(dx) = d\,(1dx) = dx\,d\,(1) = 0;}$$

второй дифференциал независимой переменной равен нулю; конечно, нулю равны и дальнейшие дифференциалы независимой переменной.

Если x не является независимой переменной (или нам неизвестно, является или нет), то, как мы видели ранее, формула (2.38) все равно справедлива. Однако при ее дальнейшем дифференцировании dx уже нельзя считать постоянным, а надо пользоваться правилом дифференцирования произведения [формула (2.29)]:

$$d^2y = d\,(f'\,(x)\,dx) = d\,(f'\,(x))\,dx + f'\,(x)\,d\,(dx) = f''\,(x)\,dx^2 + f'\,(x)\,d^2x; \tag{2.42}$$

аналогично находятся

$$d^3y = f'''\,(x)\,dx^3 + 3f''\,(x)\,dx\,d^2x + f'\,(x)\,d^3x \tag{2.43}$$

и дальнейшие дифференциалы. Если теперь окажется, что x — независимая переменная, то $d^2x = d^3x = 0$ и формула (2.42) переходит в формулу (2.29), а (2.43) — в (2.30). Итак, *формулами* (2.29)—(2.31) *можно пользоваться, только если, x— независимая переменная.*

Дифференциальное исчисление имеет многочисленные приложения к исследованию изменения функций. Эти приложения будут рассмотрены в дальнейших модулях.

Производные различных порядков от неявных функций и функций, заданных параметрически

1. Покажем на примере способ нахождения производных различных порядков от неявных функций.

Пусть неявная функция *y* от *x* определяется равенством

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \qquad (2.44)$$

Дифференцируем по *x* все члены этого равенства, помня , что *y* есть функция от *x*

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0;$$

отсюда находим:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y} \qquad (6.45)$$

Последнее равенство снова дифференцируем по *x* (имея в виду, что *y* есть функция от *x*):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}.$$

Подставляем сюда вместо производной $\frac{dy}{dx}$ ее выражение из равенства (2.45), получаем:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{y+x\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}}{y^2},$$

или после упрощения

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3}.$$

Из уравнения (2.44) следует,

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

поэтому вторую производную можно представить в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}$$

Дифференцируя по *x* последнее равенство, найдем d^3y/dx^3 и т. д.

2. Рассмотрим теперь задачу о нахождении производных высших порядков от функции, заданной п а р а м е т р и ч е с к и.

Пусть функция *у* от *х* задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.46}$$

причем функция $x=\varphi(t)$ на отрезке $[t_0, T]$ имеет обратную функцию $t=\Phi(x)$ в этом случае производная dy/dx определяется равенством

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \tag{2.47}$$

Для нахождения второй производной d^2y/dx^2 дифференцируем по *х* равенство (2.47), имея в виду, что *t* есть функция от *х:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}, \tag{2.48}$$

но

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\right) = \frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

Подставляя последние выражения в формулу (2.48), получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}$$

Последней формуле можно придать следующий, более компактный вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

Аналогичным образом можно найти производные

$\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ и т.д.

Пример. Функция y от x задана параметрически

$x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Найти производную

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Решение

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a\cos t, \quad \frac{dy}{dt} = b\cos t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -b\sin t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-a\sin t)(-b\sin t)-(b\cos t)(-a\cos t)}{(-a\sin t)^3} = -\frac{b}{a^2}\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Механическое значение второй производной

Путь s, пройденный поступательно движущимся телом, в зависимости от времени t выражается формулой

$$s = f(t). \tag{2.49}$$

Как уже известно, скорость v тела в данный момент равна производной от пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{2.50}$$

Пусть в некоторый момент t скорость тела была равна v. Если движение не является равномерным, то за промежуток времени Δt, истекший с момента t, скорость изменится и получит приращение Δv

Средним ускорением за время Δt называется отношение приращения скорости Δv к приращению времени:

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Ускорением в данный момент называется предел отношения приращения скорости к приращению времени, когда последнее стремится к нулю:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t};$$

иначе говоря, ускорение (в данный момент) равно производной от скорости по времени

$$a = \frac{dv}{dt},$$

но так как

$$v = \frac{ds}{dt}$$

то, следовательно

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2},$$

т. е. *ускорение прямолинейного движения равно второй производной от пути по времени.* Исходя из равенства (2.49), получаем

$$a = f''(t).$$

Пример. Найти скорость v и ускорение a свободно падающего тела, если зависимость расстояния s от времени t дается формулой

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0, \tag{2.51}$$

где g =9,8 *м/сек*^{2} — ускорение земного тяготения, а $s_o = s_{t=0}$ — значение s при $t=0$.

Решение. Дифференцируя, находим:

$$v = \frac{ds}{dt} = gt + v_0; \tag{2.52}$$

из этой формулы следует, что $v_o = (v)_{t=0}$.

Дифференцируя еще раз, находим:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = g.$$

Заметим, что, обратно, если ускорение некоторого движения постоянно и равно g, то скорость выражается равенством (2.52), а расстояние — равенством (2.51) при условии, что $(v)_{t=0} = v_0$ и $(s)_{t=0} = s_0$.

Уравнения касательной и нормали. Длины подкасательной и поднормали

Рассмотрим кривую, уравнение которой есть

$y=f(x)$

Возьмем на этой кривой точку $M(x_1, y_1)$ (рис. 2.9) и напишем уравнение касательной к данной кривой в точке M, предполагая, что эта касательная не параллельна оси ординат.

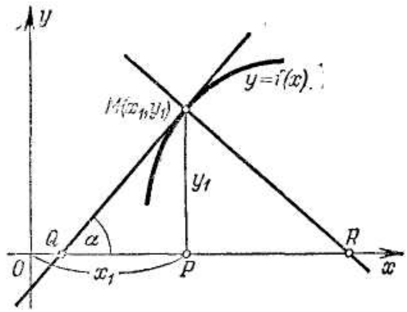


Рис.2.9.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку M, имеет вид

y-y_1 = $k(x$-$x_1)$.

Для касательной

$к=f'(x_1)$

поэтому уравнение касательной имеет вид

$$y-y_1=f'(x_1)(x-x_1).$$

Наряду с касательной к кривой в данной точке очень часто приходится рассматривать нормаль.

Определение. *Нормалью* к кривой в данной точке называется прямая, проходящая через данную точку, перпендикулярную к касательной в этой точке.

Из определения нормали следует, что ее угловой коэффициент k_n связан с угловым коэффициентом k_t касательной равенством

$$k_n=-\frac{1}{k_t},$$

т. е.

$$k_n=-\frac{1}{f'(x_1)}.$$

Следовательно . уравнение нормали к кривой $y=f(x)$ в точке $M(x_1,y_2)$ имеет вид

$$y-y_1=-\frac{1}{f'(x_1)}(x-x_1).$$

Пример 1. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y=f(x)^{3}$ в точке $M(1, 1)$.

Решение. Так как $y'=3x^2$, то угловой коэффициент касательной равен $(y')_{x=1}=3$

Следовательно, уравнение касательной:

$y—1=3\,(x—1)$ или $y = 3x— 2$.

Уравнение нормали:

$y — 1= — (x — 1\,)/3$

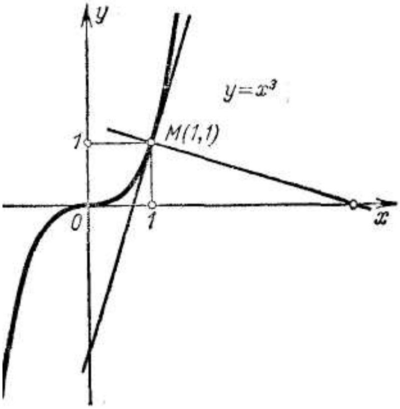


Рис.2.10

или

$y=-1/3x+4/3$ (см. рис 6.10)

Длина T отрезка QM (рис. 2.9) касательной, заключенного между точкой касании и осью Ox, называете *длиной касательной.* Проекция этого отрезка на ось Ox, т. е. отрезок QP, называется *подкасательной;* длина подкасательной обозначается через $S_т$. Длина N отрезка MR называется *длиной нормали,* а проекция RP отрезка RM на ось Ox называется *поднормалью;* длина поднормали обозначается через S_N.

Найдем величины T, $S_т$, N, S_N дли кривой $y=f(x)$ и точки $M(x_1, y_1)$.Из рис. 2.9 видно, что

$$QP=|y_1\operatorname{ctg}\alpha|=\left|\frac{y_1}{\operatorname{tg}\alpha}\right|=\left|\frac{y_1}{y_1'}\right|,$$

поэтому

$$S_T = \left| \frac{y_1}{y_1'} \right|,$$

$$T = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^2}{y_1'^2}} = \left| \frac{y_1}{y_1'} \sqrt{y_1'^2 + 1} \right|.$$

Далее, из этого же рисунки ясно, что
$$PR = |y_1 \operatorname{tg} \alpha| = |y_1 y_1'|,$$

поэтому

$$S_N = |y_1 y_1'|,$$
$$N = \sqrt{y_1^2 + (y_1 y_1')^2} = |y_1 \sqrt{1 + y_1'^2}|.$$

Эти формулы выведены в предположении, что $y_1 > 0$, $y'_1 > 0$
Однако они сохраняются и в общем случае.
Пример 2. Найти уравнение касательной и нормали, длины касательной и подкасательной, длины нормали и поднормали для эллипса:
$x = a\ cos t, y = b\ sin t$ (2.52) , в точке $M(x_1, y_1)$,для которой $t = \pi/4$ (рис. 2.11).

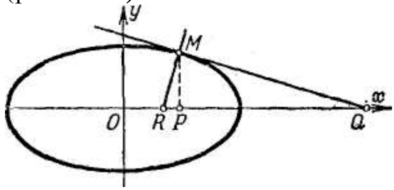


Рис. 2.11.

Решение. Из уравнений (2.52) находим:
$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\pi/4} = -\frac{b}{a}.$$

Находим координаты точки касания М
$$x_1 = (x)_{t=\pi/4} = a/\sqrt{2}, \quad y_1 = (y)_{t=\pi/4} = b/\sqrt{2}.$$

Уравнение касательной
$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{или} \quad bx + ay - ab\sqrt{2} = 0.$$

Уравнение нормали:

$$y-\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{a}{b}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{или} \quad (ax-by)\sqrt{2}-a^2+b^2=0.$$

Длины подкасательной и поднормали:

$$S_T=\left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\right|=\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad S_N=\left|\frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{b}{a}\right)\right|=\frac{b^2}{a\sqrt{2}}.$$

Длимы касательной и нормали:

$$T=\left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2+1}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2},$$

$$N=\left|\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\left(-\frac{b}{a}\right)^2}\right|=\frac{b}{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Геометрическое значение производной радиус-вектора по полярному углу

Пусть имеем уравнение кривой в полярных координатах:

$$\rho=f(0). \qquad (2.53)$$

Напишем формулы перехода от полярных координат к прямоугольным декартовым:

$x=\rho\cos\Theta$, $y=\rho\sin\Theta$.

Подставляя сюда вместо ρ его выражение черезΘ из уравнения (2.53), будем иметь:

$$x=f(\Theta)\cos\Theta, \quad y=f(\Theta)\sin\Theta. \qquad (2.54)$$

Уравнения (2.54) являются параметрическими уравнениями данной кривой, причем параметром является полярный угол Θ (рис.2.12). Если через φ обозначим угол, составленный касательной к кривой в некоторой точке $M(\rho, \Theta)$ с положительным направлением оси абсцисс, то будем иметь';

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta}{\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta}.$$

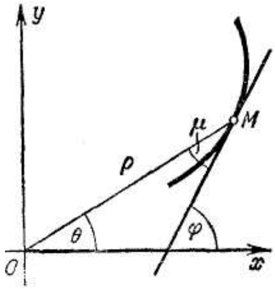


Рис. 2.12

Обозначим через μ угол между направлением радиус - вектора и касательной. Очевидно, что μ=φ-Θ,

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\theta}.$$

Подставляя сюда вместо $tg\varphi$ его выражение (2.55)и производя преобразования, получим

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{(\rho' \sin\theta + \rho\cos\theta)\cos\theta - (\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)\sin\theta}{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)\cos\theta + (\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)\sin\theta} = \frac{\rho}{\rho'},$$

или

$$\rho'_\theta = \rho \operatorname{ctg}\mu.$$

Таким образом, производная радиус-вектора по полярному углу равна длине радиус-вектора, умноженной на котангес угла между радиус-вектором и касательной к кривой в данной точке.

Пример. Показать, что касательная к логарифмической спирали $\rho = e^{a\theta}$ пересекается с радиус-вектором под постоянным углом.

Решение. Из уравнения спирали находим: $\rho' = ae^{a\theta}$. На основании формулы (2.56) получаем:

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\rho'}{\rho} = a, \text{ т. е. } \mu = \operatorname{arcctg} a = \text{const}.$$

Микромодуль 4.

Индивидуальные тестовые задания

1. Вычислите приблизительно с помощью первого дифференциала значения выражения

19.1.1. $\cos 61^\circ$.

19.1.2. $e^{0,2}$.

19.1.3. $\sin 33^\circ$.

19.1.4. $\operatorname{arctg} 1,05$.

19.1.5. $\sqrt{120}$.

19.1.6. $\sqrt[3]{340}$.

19.1.7. $\sqrt[3]{66}$.

19.1.8. $\sqrt[5]{33}$.

19.1.9. $\sqrt[6]{70}$.

19.1.10. $\cos 85^\circ$.

19.1.11. $\sin 8^\circ$.

19.1.12. $\sin 28^\circ$.

19.1.13. $\operatorname{arctg} 0,95$.

19.1.14. $\operatorname{arctg} 0,9$.

19.1.15. $e^{0,3}$.

19.1.16. $\ln 1,05$.

19.1.17. $\ln 0,97$.

19.1.18. $\ln 1,08$.

19.1.19. $\operatorname{tg} 47^\circ$.

19.1.20. $\operatorname{ctg} 50^\circ$.

19.1.21. $(1,02)^5$.

19.1.22. $\arccos 0,45$.

19.1.23. $\arcsin 0,52$.

19.1.24. $(1,97)^6$.

19.1.25. $(2,04)^4$.

19.1.26. $\ln \operatorname{tg} 48^\circ$.

19.1.27. $\ln \operatorname{tg} 43^\circ$

19.1.28. $\cos 86^\circ$.

19.1.29. $\sin 26^\circ$.

19.1.30. $\operatorname{tg} 40^\circ$.

2.Розв'яжіть задачі на складання рівняння дотичної і нормалі кривої

19.2.1. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}$ в точках, в яких кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 2.

19.2.2. Складіть рівняння дотичної і нормалі до еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ в точках, в яких кутовий коефіцієнт нормалі дорівнює $\frac{1}{2}$.

19.2.3. Складіть рівняння дотичної і нормалі до еліпса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ в точках, в яких дотична паралельна до прямої $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

19.2.4. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 3x^3 + 5x^2 + 5x + 4$ в точках, в яких дотичні паралельні до прямої $y = 4x - 2$.

19.2.5. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{2}{3}x^3+5x^2+9x+\frac{2}{3}$ в точках, в яких дотичні паралельні до прямої $y=x-2$.

19.2.6. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{1}{3}x^3+7x^2+15x+\frac{1}{3}$ в точках, в яких кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 2.

19.2.7. Складіть рівняння дотичної і нормалі кривої $y=x^3+7x^2+11x+\frac{8}{27}$ в точках, в яких дотична паралельна до прямої $y=3x-4$.

19.2.8. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{5}{3}x^3+11x^2+13x+\frac{8}{75}$ в точках, в яких кутовий коефіцієнт нормалі дорівнює $-\frac{1}{5}$.

19.2.9. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{4}{3}x^3+5x^2+3x+\frac{4}{3}$ в точках, в яких дотичні утворюють з віссю абсцис кут 135^0.

19.2.10. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3+5x^2+x+3$ в точках, в яких кутовий коефіцієнт нормалі дорівнює $\frac{1}{2}$.

19.2.11. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{1}{3}x^3+7x^2+10x+130$ в точках, в яких дотичні паралельні до прямої $y=-3x+2$.

19.2.12. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3+6x^2+\frac{2}{3}x+\frac{8}{27}$ в точках, в яких дотичні паралельні до прямої $y=-3x+1$.

19.2.13. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 3x^3 + 6x^2 - x + \frac{1}{9}$ в точках, в яких дотичні мають кутовий коефіцієнт рівний -4.

19.2.14. Складіть рівняння дотичних і нормалі до кривої $y = 3x^2 + 6x^2 - 6x + \frac{25}{9}$ в точках, в яких дотичні утворюють з віссю Ox кут 135^0.

19.2.15. Складіть рівняння дотичної і нормалі до лінії $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ в точці з абсцисою $x_0 = 3$.

19.2.16. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = (x+1)^3 \sqrt{3-x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

19.2.17. Складіть рівняння дотичної і нормалі до астроїди $x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \quad y = 2\sqrt{2}\sin^3 t$, проведених в точці, для якої $t = \frac{\pi}{4}$.

19.2.18. Складіть рівняння дотичної і нормалі до циклоїди $x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t)$, проведених в точці, для якої $t = \frac{\pi}{2}$.

19.2.19. Складіть рівняння дотичної і нормалі до параболи $y^2 - y + 2x - 4 = 0$ в точках з абсцисою $x_0 = -4$.

19.2.20. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^2 + 2xy + 2y^4 = 5$ в точці $M_0(1;1)$.

19.2.21. Складіть рівняння дотичної і нормалі до циклоїди $x = 3(t - \sin t), \quad y = 3(1 - \cos t)$, проведених в точці, для якої $t = \frac{3}{2}\pi$.

19.2.22. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 3x^3 - 6x^2 - 6x + \frac{7}{9}$ в точках, в яких дотичні утворюють з віссю Ox кут 135^0.

19.2.23. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 3x^3 - 6x^2 - x + 1$ в точках, в яких дотичні паралельні до прямої $y = -4x + 5$.

3. Найдите дифференциал d^2y в точке x_0.

20.1.1. $y = x\sqrt{x-3}$, $x_0 = 12$. **20.1.2.** $y = x^2 \cdot \sqrt{x-5}$, $x_0 = 6$.

20.1.3. $y = x^2 \cdot \sqrt{2x+3}$, $x_0 = 11$. **20.1.4.** $y = (2x-1)^2 \cdot \sqrt{x+2}$, $x_0 = 7$.

20.1.5. $y = (\ln x) \cdot \sqrt{2x-1}$, $x_0 = 5$. **20.1.6.** $y = (\ln x) \cdot \sqrt{2x+1}$, $x_0 = 12$.

20.1.7. $y = \sin^3 x \cdot \cos^5 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$. **20.1.8.** $y = \sin^2 x \cdot \cos^4 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

20.1.9. $y = \sin^3 x \cdot \cos^7 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$. **20.1.10.** $y = \sin^4 x \cdot \cos^6 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

20.1.11. $y = \sin^3 x \cdot \operatorname{tg}^5 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$. **20.1.12.** $y = \sin^2 x \cdot \operatorname{tg}^4 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

20.1.13. $y = (x-1) \cdot \sqrt[3]{5x+2}$, $x_0 = 5$. **20.1.14.** $y = (2x-1) \cdot \sqrt[4]{3x+4}$, $x_0 = 4$.

20.1.15. $y = (x+1)^2 \cdot \sqrt[3]{3x+5}$, $x_0 = 1$. **20.1.16.** $y = (3x-1)^3 \cdot \sqrt[4]{7x+2}$, $x_0 = 2$.

20.1.17. $y = (x-1)^5 \cdot \sqrt[3]{2x-2}$, $x_0 = 5$. **20.1.18.** $y = (4x-1)^3 \cdot \sqrt[5]{x-2}$, $x_0 = 3$.

20.1.19. $y = \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}}{x^5}$, $x_0 = 2$. **20.1.20.** $y = \dfrac{\sqrt{x+5}}{(x-2)^3}$, $x_0 = 4$.

20.1.21. $y = \dfrac{\sqrt[5]{x^2-4}}{x}$, $x_0 = 6$. **20.1.22.** $y = \dfrac{\sqrt[4]{x^2-9}}{x^2}$, $x_0 = 5$.

20.1.23. $y = \dfrac{\sin^3 x}{\cos x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$. **20.1.24.** $y = \dfrac{\cos^4 x}{\sin x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

20.1.25. $y = \dfrac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$. **20.1.26.** $y = \operatorname{tg}^4 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

20.1.27. $y = \operatorname{ctg}^5 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$. **20.1.28.** $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{x+2}$, $x_0 = 6$.

20.1.29. $y = x^4 \cdot \sqrt{2x+7}$, $x_0 = 9$. **20.1.30.** $y = (2x-3)^2 \cdot \sqrt{x+3}$, $x_0 = 1$.

4. Найдите производную второго порядка $d^2y/\ dx^2$ функции, заданой параметрически:

20.2.1. $x = 5(2t - \sin 2t)$, $y = 10\sin^2 t$.

20.2.2. $x = \dfrac{1}{\cos t}$, $y = \operatorname{tg} t - t$. **20.2.3.** $x = \dfrac{1}{\sin t}$, $y = \operatorname{ctg} t + t$.

20.2.4. $x = \lg \sin t$, $y = \lg \cos t$. **20.2.5.** $x = \sin \lg t$, $y = \operatorname{tg} \lg t$.

20.2.6. $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$.

20.2.7. $x = \cos 2t + 2t \sin 2t, \quad y = \sin 2t - 2t \cos 2t.$

20.2.8. $x = \ln(1+t^2), \quad y = t - \operatorname{arctg} t.$

20.2.9. $x = \arcsin e^t, \quad y = \sqrt{1-e^{2t}}.$ **20.2.10.** $x = \sin e^t, \quad y = \cos e^t.$

20.2.11. $x = \ln \operatorname{ctg} t, \quad y = \dfrac{1}{\sin 2t}.$ **20.2.12.** $x = \ln t, \quad y = \dfrac{t-1}{t+1}.$

20.2.13. $x = \ln(1+t), \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{t}.$

20.2.14. $x = \operatorname{arctg} e^t, \quad y = \dfrac{1}{e^{2t}+1}.$

20.2.15. $x = \ln(1+4t^2), \quad y = 2t - \operatorname{arctg} 2t.$

20.2.16. $x = \sin^3 e^t, \quad y = \cos^3 e^t.$

20.2.17. $x = 3^t \cos t, \quad y = 3^t \sin t.$

20.2.18. $x = \operatorname{arc\,ctg} t, \quad y = \log_3(t^2+1).$

20.2.19. $x = \cos 2t - \ln \operatorname{ctg} t, \quad y = \sin 2t.$

20.2.20. $x = \operatorname{tg} 2^t, \quad y = \ln \cos^3 2^t.$

20.2.21. $x = \arccos 2t, \quad y = \sqrt{1-4t^2}.$ **20.2.22.** $x = \arcsin t, \quad y = \sqrt{1-t^2}.$

20.2.23. $x = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 t, \quad y = \dfrac{1}{\cos t}.$ **20.2.24.** $x = \operatorname{ctg}^2 e^t, \quad y = \dfrac{1}{\sin e^t}.$

20.2.25. $x = \sqrt{t^2+1}, \quad y = \ln(t + \sqrt{t^2+1}).$

20.2.26. $x = \ln(1+t^4), \quad y = \operatorname{arctg}(t^2).$

20.2.27. $x = \ln \operatorname{ctg}(1+t), \quad y = \dfrac{1}{\sin(1+t)}.$

20.2.28. $x = \operatorname{tg} e^t, \quad y = \ln \cos^2 e^t.$

20.2.29. $x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \log_2(t^2+1).$

20.2.30. $x = \ln(1+t^6), \quad y = \operatorname{arctg}(t^3).$

5. Найдите производную $y^{(n)}$ функции, используя формулу Лейбница:

20.3.1. $y = e^{2x-1}(x^3 - 3x + 4), \quad n=10.$

20.3.2. $y = (x^3 - 2x + 1)\sin 2x, \quad n=12.$

20.3.3. $y = 2^x(3x^3 - 7x + 5)$, n=15.

20.3.4. $y = (x^3 + 2x^2 + 3)\ln x$, n=8.

20.3.5. $y = (x^2 + 4x - 5)\ln x$, n=10.

20.3.6. $y = (x^2 + 5x - 12)\cdot 2^x$, n=9.

20.3.7. $y = (x^3 + 5x^2 - 2)\sin x$, n=11.

20.3.8. $y = (x^3 - 2x^2 - 3)\cos x$, n=9.

20.3.9. $y = (x^2 - 4x^2 - x + 3)\cos 2x$, n=8.

20.3.10. $y = (x^3 + 2x + 3)\ln x$, n=7.

20.3.11. $y = (x^2 - 5x)\ln(x+1)$, n=8.

20.3.12. $y = (2x^2 - 7x)\ln(x-2)$, n=10.

20.3.13. $y = (4x^2 - 9x)\ln(x-2)$, n=6.

20.3.14. $y = (2x^2 - 3x - 11)\cdot 3^x$, n=9.

20.3.15. $y = (4x^2 - x + 8)\cdot 4^{-x}$, n=10.

20.3.16. $y = (2x^3 - 4x^2 - 1)\cdot 5^{-x}$, n=7.

20.3.17. $y = (x^2 + 3x - 7)\cdot 6^{-x}$, n=8.

20.3.18. $y = e^{-x-1}(x^3 - x^2 + 2)$, n=10.

20.3.19. $y = 2^{-x-1}(x^3 - 6x + 3)$, n=7.

20.3.20. $y = 3^{-x}(2x^2 + x + 3)$, n=8.

20.3.21. $y = (4x^3 - x^2 - 1)\cos 2x$, n=10.

20.3.22. $y = (3x^2 - 4x + 1)\cos(x+1)$, n=12.

20.3.23. $y = (5x^2 - 3x + 2)\sin(x-2)$, n=11.

20.3.24. $y = (6x^3 - 1)\sin(x+3)$, n=15.

20.3.25. $y = (2x^3 - 4x - 1)\ln(x-3)$, n=10.

20.3.26. $y = (3x^3 + 2x + 3)\ln(x+3)$, n=8.

20.3.27. $y = (x^2 - 2x - 1)\ln(2x-1)$, n=11.

20.3.28. $y = (x^3 + 2x - 3)\ln(2x+1)$, n=10.

20.3.29. $y = e^{-2x}(x^3 - 6)$, n=8.

20.3.30. $y = 2^{-x}(x^3 - 4)$, n=10.

Модуль 3.

Применение производной и дифференциала

Микромодуль 4

Основные теоремы дифференциального исчисления

3.1. Теорема о корнях производной (теорема Ролля)

Теорема Ролля. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке$[a, b]$, дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка и на концах $x = a$ и $x=b$ обращается в нуль* $[f(a) = f(b) = 0]$, *то существует внутри отрезка $[a, b]$ по крайней мере одна точка $x = c$*, $a < c < b$, *в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е.* $f'(c) = 0$.

(Число c называется *корнем функции $\varphi(x)$,* если $\varphi(c)=0$.)

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она имеет на этом отрезке наибольшее значение M и наименьшее значение m.

Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна, т. е. при всех значениях x имеет постоянное значение $f(x) = 0$. Но тогда в любой точке отрезка будет $f'(x) = 0$, и теорема доказана.

Предположим, что $M \neq m$. Тогда по крайней мере одно из этих чисел не равно нулю.

Предположим для определенности, что $M > 0$ и что функция принимает свое наибольшее значение при $x=c$, т. е. $f(c) = M$. При этом заметим, что c не равно ни a, ни b, так как по условию $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Так как $f(c)$—наибольшее значение функции, то $f(c +\Delta x)—f(c\leq 0$ как при $\Delta x > 0$, так и при $\Delta x < 0$.

Отсюда следует, что

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leqslant 0 \text{ при } \Delta x > 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geqslant 0 \text{ при } \Delta x < 0. \tag{3.2}$$

Так как по условию теоремы производная при $x = c$ существует, то, переходя к пределу при ΔАх→0, получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leqslant 0 \text{ при } \Delta x > 0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geqslant 0 \text{ при } \Delta x < 0.$$

Но соотношения $f'(c)\leq 0$ и $f'(c)\geq 0$ совместимы лишь в том случае, если $f'(c) = 0$. Следовательно, внутри отрезка $[a, b]$ имеется точка c, в которой производная $f'(x)$ равна нулю.

Теорема о корнях производной имеет простое геометрическое истолкование: если непрерывная кривая, имеющая в каждой точке касательную, пересекает ось Ox в точках с абсциссами a и b, то на этой кривой найдется по крайней мере одна точка с абсциссой c, $a < c < b$, в которой касательная параллельна оси Ox.

Замечание 1. Доказанная теорема остается справедливой и для такой дифференцируемой функции, которая на концах отрезка $[a, b]$ не обращается в нуль, но принимает равные значения $f(a)=f(b)$ (рис.3.1). Доказательство в этом случае проводится точно так же, как и ранее.

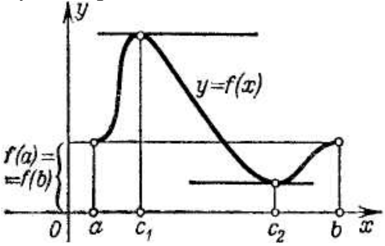


Рис.3.1

Замечание 2. Если функция $f(x)$ такова, что производная существует не во всех точках внутри отрезка $[a, b]$, то утверждение теоремы может оказаться неверным (т. е. в этом случае

на отрезке *[a, b]* может не оказаться такой точки *с*, в которой производная *f' (х)* обращается в нуль).
Так, например, функция

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

(рис. 3.2) непрерывна на отрезке [—1, 1] и обращается в нуль на концах отрезка, однако производная
$f'(x) = -(2/3\sqrt[3]{x})$
внутри промежутка в нуль не обращается. Это происходит оттого, что внутри промежутка существует точка $x=0$, в которой производная не существует (обращается в бесконечность).
График, изображенный на рис. 3.3, дает нам еще одни пример функции, производная которой не обращается в нуль на отрезке [0, 2],
Для этой функции также не выполнены условии теоремы Ролля, так как и точке $x=1$ функция не имеет производной.

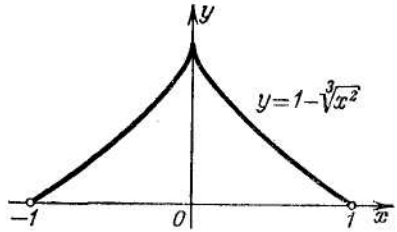


Рис.3.2

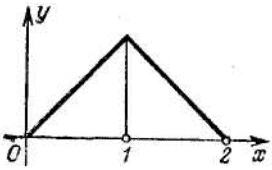


Рис.3.3

3.2. Теорема о конечных приращениях (теорема Лагранжа)

Теорема Лагранжа. *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка [a, b] найдется по крайней мере одна такая точка с, а < с < b, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{3.3}$$

Доказательство. Обозначим буквой Q число $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, т.е.положим

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{3.4}$$

и рассмотрим вспомогательную функцию *Ff(x),* определенную равен-
ством

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q. \tag{3.5}$$

Выясним геометрический смысл функции *F(x).* Для этого напишем сначала уравнение хорды *AB* (рис. 3.4), учитывая, что ее угловой коэффициент равен

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

и что она проходит через точку *(a; f(a)):*

$$y - f(a) = Q(x - a),$$

отсюда

$$y = f(a) + Q(x - a).$$

Но

$$F(x) = f(x) - [f(a) + Q(x - a)].$$

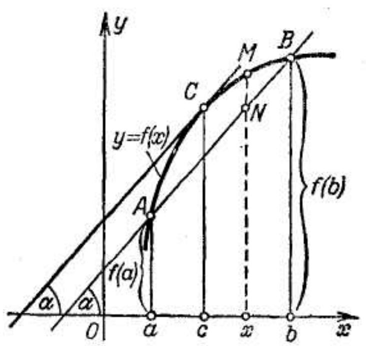


Рис. 7.4

Следовательно, *F(x)* для каждого значения *x* равняется разности ординат кривой *y=f(x)* и хорды *y=f(a)+Q(x — a)* для точек с одинаковой абсциссой.

Легко видеть, что $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема внутри этого отрезка и обращается в нуль на концах отрезка, т. е. $F(a) = 0$, $F(b) = 0$. Следовательно, к функции $F(x)$ применима теорема Ролля. Согласно этой теореме внутри отрезка существует точка $x = c$ такая, что

откуда

$$F'(c) = 0.$$

Но

$$F'(x) = f'(x) - Q.$$

Значит

$$F'(c) = f'(c) - Q = 0,$$

откуда

$$Q = f'(c).$$

Подставляя значение Q в равенство (3.2), будем иметь

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \tag{3.6}$$

откуда непосредственно следует формула (3.3). Таким образом, теорема доказана.

Чтобы выяснить геометрический смысл теоремы Лагранжа, обратимся к рис. 3.4. Из рисунка непосредственно ясно, что величина

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

представляет собой тангенс угла α наклона хорды, проходящей через точки A и B графика с абсциссами a и b.

С другой стороны, $f'(c)$ есть тангенс угла наклона касательной к кривой в точке с абсциссой c. Таким образом, геометрический смысл равенства (3.6) или равносильного ему равенства (3.3) состоит в следующем: если во всех точках дуги AB существует касательная, то на этой дуге найдется точка C между A и B, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки A и B.

Заметим, далее, следующее. Так как значение c удовлетворяет условию $a < c < b>$, то $c - a < b - a$, или $c - a = \theta(b - a)$, где θ есть некоторое число, заключенное между 0 и 1, т. е. $0 < \theta < 1$.

Но тогда $c = a + \theta(b - a)$,

и формуле (3.3) можно придать следующий вид:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'[a + \theta(b - a)], \quad 0 < \theta < 1. \tag{3.7}$$

3.3.Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)

Теорема Коши. *Если f(x) и φ(x) — две функции, непрерывные на отрезке [a, b] и дифференцируемые внутри него, причем φ'(x) нигде внутри отрезка не обращается в нуль, то внутри отрезка [a. b] найдется такая точка x = c, a < c <b, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \qquad (3.8)$$

Доказательство. Определим число *Q* равенством

$$Q=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}. \qquad (3.9)$$

Отметим, что $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, так как в противном случае $\varphi(b)$ равнялось $\varphi(a)$, и тогда по теореме Ролля производная $\varphi'(x)$ обращалась бы в нуль внутри отрезка, что противоречит условию теоремы.

Составим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-Q[\varphi(x)-\varphi(a)].$$

Очевидно, что $F(a)=0$ и $F(b) = 0$ (это вытекает из определения функции $F(x)$ и определения числа Q). Заметив, что функция $F(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ всем условиям теоремы Ролля, заключаем, что между a и b существует такое значение $x = c$ $(a<c<b)$, что $F'(c) = 0$.

Но

$$F'(x)=f'(x)-Q\varphi'(x),$$

следовательно,

$$F'(c)=f'(c)-Q\varphi'(c)=0,$$

откуда

$$Q=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Подставляя значение Q в равенство (3.4), получим равенство (3.3).

З а м е ч а н и е. Теорему Коши нельзя доказать, как это может показаться с первого взгляда, применением теоремы Лагранжа к числителю и знаменателю дроби

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

Действительно, мы получили бы в этом случае (после сокращения дроби на *b — a)* формулу

$$\frac{f(b)-f(a)}{\psi(b)-\psi(a)}=\frac{f'(c_1)}{\psi'(c_2)},$$

в которой $a < c_1 < b$, $a < c_2 < b$. Но так как, вообще говоря, $c_1 \neq c_2$, то полученный результат, очевидно, не дает еще теоремы Коши.

3. 4. Правило Лопиталя

Неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Ранее мы говорили, что при вычислении предела отношения двух бесконечно малых могут получаться различные результаты. В первом печатном учебнике по дифференциальному исчислению, было опубликовано найденное И. Бернулли простое правило для вычисления такого предела, пригодное во многих случаях. Пусть ищется предел

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}, \qquad (3.10)$$

причем

$$\varphi(t_0)=\psi(t_0)=0, \qquad (3.11)$$

т. е. мы имеем дело с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. Пусть каким-то способом найден предел

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=k, \qquad (3.12)$$

конечный или бесконечный. Тогда утверждается, что и предел (3.10) равен *k*, т. е. *для неопределенностей вида* $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

— *предел отношения функций равен пределу отношения производных.*

Для доказательства рассмотрим линию $y=\varphi(t)$, $x=\psi(t)$ на плоскости *x, y;* тогда при $t\to t_0$ согласно (3.11) эта линия приближается к началу координат. Чтобы узнать, как именно она приближается (наподобие спирали или с определенного направления и с какого именно), заметим, что согласно (3.12)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi'(t)\,dt}=$$
$$=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}\to k \qquad (\text{при } t\to t_0).$$

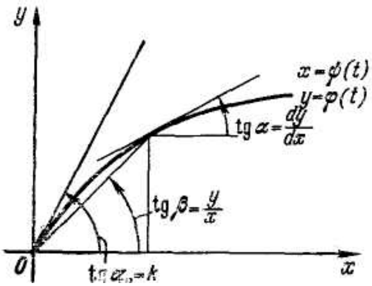


Рис. 3.5

Значит (рис. 3.5), при приближении к началу координат касательная, поворачиваясь, в пределе становится под таким углом α_0 к оси x, что $\mathrm{tg}\alpha_0 = k$. Но тогда и «угол возвышения» β(см. рис. 3.5) при приближении к началу координат стремится к α_0, т. е. что и требовалось доказать.

Иногда при применении правила Лопиталя оказывается, что отношение производных снова является неопределенностью вида $\frac{0}{0}$; тогда это правило может быть вновь применено и т. д. Например,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6};$$
$$\lim\frac{2^x-4\cdot 2^{-x}}{(x-1)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2^x\ln 2+4\cdot 2^{-x}\ln 2}{2(x-1)}=\frac{4\ln 2}{0}=\pm\infty;$$

в первом примере правило Лопиталя было применено три раза, а во втором один раз.

Рассмотрим еще несколько примеров

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3}=\frac{5}{3}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

Правило Лопиталя для неопределенности вида (7.10) всегда приводит к цели, если t_0— конечное число, а числитель или знаменатель имеют *целый* порядок малости по сравнению с $t - t_0$. Действительно, из того же правила Лопиталя можно вывести, что при каждом дифференцировании порядок малости понижается на единицу, а потому после нескольких шагов мы получим в числителе или знаменателе «нулевой порядок малости», т. е. конечный предел, не равный нулю, и неопределенности не будет.

Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Правило Лопитала (3.13) сохраняется и для неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$, т. е. когда взамен условия (3.11) ставится условие

$|\varphi(t_0)|=|\psi(t_0)|=\infty$

Доказательство аналогично проведенному ранее, однако теперь при $t\to t_0$, линия $y=\varphi(t)$, $x=\psi(t)$ не приближается к началу координат, а уходит в бесконечность (рис. 3.6).

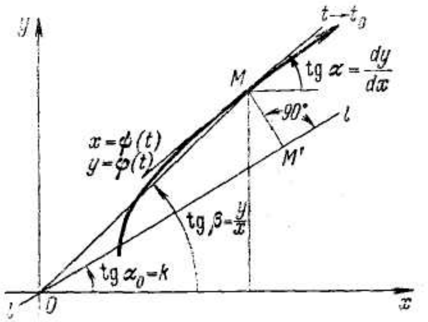


Рис. 3.6

При этом согласно условию (3.12) эта линия поворачивается так, что угол *а,* который она (т. е. ее касательная) составляет с осью *х,* стремится к a_0, где lg a_0 = *к*. Но тогда путь, пройденный точкой *М* этой линии вдоль прямой *ll* (см. рис. 3.6), будет бесконечно большой величиной более высокого порядка, чем путь поперек этого направления, точнее говоря, *ММ' «ОМ.* Значит, при удалении точки *М* на бесконечность $\angle$ *МОМ'*→ 0 и поэтому «угол возвышения» β стремится к α_0 и мы можем написать те же формулы (3.14), чем доказательство и завершается.

Приведем несколько важных примеров:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^k}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{kx^k}=\frac{1}{\infty}=0 \qquad (k>0);$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{a^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{a^x\ln a}=\frac{1}{\infty}=0 \qquad (a>1);$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{b^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{(\sqrt[k]{b})^x}\right)^k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{a^x}\right)^k=0^k=0 \qquad (k>0,\quad b>1).$$

Таким образом, при стремлении аргумента к бесконечности *логарифмическая функция стремится к бесконечности медленнее, чем любая степенная* (с положительным показателем степени), *а степенная— медленнее, чем любая показательная* (с основанием, большим единицы).

К неопределенностям другого вида правило Лопиталя применяется после преобразования их к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$

Это можно делать по схеме

$$0 \cdot \infty = 0 \frac{1}{0} = \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \frac{0-0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

(это, конечно, условная запись, говорящая только о виде рассматриваемых величин). К степенным неопределенностям можно применять правило Лопиталя после их логарифмирования.

Рассмотрим ряд примеров

Пример 1.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

Пример 2.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + b}{cx^2 - d} = \lim_{x \to \infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}.$$

Пример 3.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{2 \cdot 3 \cos 3x \sin 3x}{2 \cos x \sin x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin 3x}{\sin x} \cdot \frac{(-1)}{1} = 3 \frac{(-1)}{1} \cdot \frac{(-1)}{1} = 3.$$

Пример 4.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Вообще при любом целом $n>0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{n(n-1)\ldots 1}{e^x} = 0.$$

Пример 5.

$$\lim_{x \to 0} (x \ln x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0} x = 0,$$

Пример 6. Требуется найти

$$\lim_{x \to 0} x^x.$$

Положив $y=x^x$, находим

$$\ln \lim y = \lim \ln y = \lim \ln (x^x) = \lim (x \ln x);$$

3.5. Формула и ряд Тейлора

Формула Тейлора. Ранее мы видели, что замена приращения функции ее дифференциалом дает возможность получить многие приближенные формулы. Оказывается, что эти формулы можно значительно уточнить, если применить дифференциалы высшего порядка; об этом и будет говорить формула Тейлора.

Предположим сначала, что нам дан многочлен *P(x).* Обычно он считается разложенным по степеням *x,* но его без труда можно разложить и по степеням *x—a*, где *a* — какое угодно число.

Пусть, например, мы хотим разложить многочлен $P(x) = 5 - 3x+2x^3$ по степеням *x*—4. Для этого надо в *P (x)* подставить *x* = [4 + (*x*—4)] и затем раскрыть квадратные скобки, не раскрывая круглых:

$$P(x)=5-3[4+(x-4)]+2[4+(x-4)]^3=$$
$$=5-12-3(x-4)+128+96(x-4)+24(x-4)^2+2(x-4)^3=$$
$$=121+93(x-4)+24(x-4)^2+2(x-4)^3.$$

В общем случае для многочлена степени *n* можно написать

$$P(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\ldots+a_n(x-a)^n. \tag{3.15}$$

Коэффициенты здесь можно найти так. Положив сначала $x - a$, получим $P(a) = a_0$. Продифференцируем затем формулу (3.15):

$$P'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\ldots+na_n(x-a)^{n-1}.$$

Если здесь положить $x = a$, получим $P'(a) = a_1$. Продифференцируем еще раз

$$P''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3(x-a)+\ldots+(n-1)na_n(x-a)^{n-2};$$

отсюда

$P''(a)=1\cdot 2a_2.$

Далее аналогично получим

$P'''(a)=1\cdot 2\cdot 3a_3$

и т.д., в общем случае

$P^{(k)}(a)=k!a_k$ (где $k!=1\cdot 2\ldots k$),

откуда

$a_k=P^{(k)}(a)/k!$

Итак, формулу (3.15) можно переписать в таком виде:

$$P(x)=$$
$$=P(a)+\frac{P'(a)}{1!}(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=$$
$$=P(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \text{ (4}$$

(3.16)

Так, в приведенном примере

$$P'(x)=-3+6x^2,\quad P''(x)=12x,\quad P'''(x)=12,$$
$$P(4)=5-3\cdot4+2\cdot4^3=121,\quad \frac{P'(4)}{1!}=-3+6\cdot4^2=93,$$
$$\frac{P''(4)}{2!}=\frac{12\cdot4}{2}=24,\quad \frac{P'''(4)}{3!}=\frac{12}{6}=2,$$

т. е. получаем те же значения коэффициентов, что и выше.

Пример. Положим $P(x) = (s+x)^n$, $a = 0$ и применим формулу (3.17). Тогда

$$P'(x)=n(s+x)^{n-1};$$
$$P''(x)=n(n-1)(s+x)^{n-2};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P^{(n)}(x)=n(n-1)\ \ldots\ 1$$

и поэтому по формуле (3.16)

$$(s+x)^n=s^n+\frac{n}{1!}s^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}s^{n-2}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots2\cdot1}{n!}x^n.$$

Таким образом, мы получаем явное выражение для биномиальных коэффициентов. Если теперь вместо многочлена *P(x)* взять произвольную функцию *f(x)*, то формула (3.16) уже не будет справедлива; но если обозначить отличие левой части формулы (3.16) от правой через R_n *(x) (остаточный член),* то можно написать

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+R_2(x).$$

(3.17)

Это и есть *формула Тейлора.* Существенно, что в ней *при x→ a остаточный член имеет по крайней мере* (*n+1*)*-й порядок малости по сравнению с x — a,* т. е. более высокий порядок, чем последний из выписанных «точных» членов в формуле (3.17). Для доказательства этого положим для простоты, что, например, $n = 2$, т. е.

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x).$$

Выражая отсюда $R_2(x)$ и применяя правило Лопиталя (п. 13), получим

$$\lim_{x\to a}\frac{R_2(x)}{(x-a)^3}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2}{(x-a)^3}=$$
$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)}{3(x-a)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)-f''(a)}{3\cdot 2(x-a)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f'''(x)}{3!}=\frac{f'''(a)}{3!} \qquad (7.18)$$

(конечный предел).

Отсюда и вытекает наше утверждение о порядке малости $R_2(x)$, а аналогично—и $R_n(x)$.

Если обозначить $x = a+h$, то, обрывая формулу (3.17) все дальше и дальше, получим все более точные (при малых $|h|$) формулы:

$$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h \qquad (3.19)$$

с точностью до величины порядка h^2

$$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2 \qquad (3.20)$$

с точностью до величины порядка h^3,

$$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\frac{f'''(a)}{6}h^3 \qquad (3.21)$$

и т. д.

Многочлены (относительно $h = x - a$), стоящие в правых частях, называются *многочленами Тейлора.* Они дают в некотором смысле наилучшее приближенное выражение функции $f(x)$ в виде многочлена данной степени вблизи значения $x = a$. Именно, среди всех многочленов этой степени многочлен Тейлора отличается от $f(x)$ на величину наивысшего порядка малости при $x\to a$. Например, если в правой части формулы (3.20) изменить хотя бы один коэффициент, то отличие будет уже в величинах 0,1 или 2-го порядка малости, а не 3-го, как для многочлена Тейлора.

Ряд Тейлора. Так как ошибки формул (3.19), (3.20) , (3.21) и т. д. становятся все более высокого порядка малости, то естественно предположить, что при малых $|h|$ можно перейти к пределу и получить *точное* представление $f(a+h)$ в виде суммы бесконечного ряда

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\ldots$$
$$\ldots=f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n. \quad (3.22)$$

Этот ряд называется *рядом Тейлора*.

Далее будут систематически изучаться такие ряды , мы увидим, что это предположение оправдывается; в частности, тогда будет выяснен вопрос, для каких именно h в принципе можно пользоваться формулой (3.22). Оказывается, что это можно делать всегда, если ряд «практически сходится» (однако при этом функция, разлагаемая в ряд Тейлора, не должна задаваться различными формулами на разных участках изменения аргумента. На основании этого мы будем применять ряды Тейлора уже сейчас.

Формулу (3.22) можно переписать в виде $(a+h=x,\ h = x- a)$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots \quad (3.23)$$

(разложение по степеням $x- a$*).* В частности, если $a=0$, получим *разложение по степеням* x

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots, \quad (3.24)$$

которое иногда исторически неправильно называется *«рядом Маклорена».*

Ряд Тейлора можно переписать в другом виде, если обозначить $x - a = \Delta x$; $f(x) - f(a)= \Delta f$; $f'(a)(x - a) =$
$=f'(a)\Delta x = df$; $f''(a)(x - a)^2=f''(a)(\Delta x)^2=d^2f$ и т. д. Получим из (3.23)

$$\Delta f=df+\frac{d^2f}{2!}+\frac{d^3f}{3!}+\ldots+\frac{d^nf}{n!}+\ldots \quad (3.25)$$

Обрывая эту формулу, получим все более и более точные (при малых Δx) формулы: $\Delta f\approx df$ с точностью до величины порядка $(\Delta x)^2$;

$\Delta f\approx df+1/2\, d^2f$ точностью до величины порядка $(\Delta x)^3$ и т. д.

3.6. Разложение по формуле Тейлора функций e^x, sin x, cos x

Разложение функции $f(x) = e^x$. Находя последовательные производные от $f(x)$, получим:

$$f(x)=e^x, \qquad f(0)=1,$$
$$f'(x)=e^x, \qquad f'(0)=1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=e^x, \qquad f^{(n)}(0)=1.$$

Подставляя полученные выражения в формулу Тейлора будем иметь:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \quad 0<\theta<1.$$

Если $|x|\leq 1$, то, взяв n = 8, получим оценку остаточного члена:

$$R_8<\frac{1}{9!}3<10^{-5}.$$

При *x=1* получим формулу, позволяющую найти приближенное значение число *e*.

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{8!};$$

производя вычисления в десятичных дробях с шестью (иначе суммарная ошибка округления при расчетах может значительно превысить R_8 (например, при количестве слагаемых, равном 10 ошибка может достичь величины $5\cdot 10^{-6}$) десятичными знаками, а затем округляя результат до пяти десятичных знаков, найдем e = 2,71828.

Здесь ошибка не превосходит числа 3/9! или 0,00001. Отметим, что, каково бы ни было *x,* остаточный член

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Действительно, так как 0<1, то величина $e^{\theta x}$ при фиксированном x ограничена (она меньше, чем e^x, при $x > 0$, и меньше, чем 1, при $x < 0$).

Докажем, что, каково бы ни было фиксированное число *x,*

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Действительно,

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\left|\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{x}{n}\cdot\frac{x}{n+1}\right|.$$

Если x есть фиксированное число, то найдется такое целое положительное число N, что

$$|x|<N.$$

Введем обозначение $|x|/N=q$; тогда, заметив, что $0<q<1$, можем написать при $n = N+1$, $N+2$, $N+3$ и т. д.:

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{x}{n}\cdot\frac{x}{n+1}\right| =$$

$$= \left|\frac{x}{1}\right|\cdot\left|\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\frac{x}{3}\right|\cdot\ldots\cdot\left|\frac{x}{N-1}\right|\cdot\left|\frac{x}{N}\right|\cdot\ldots\cdot\left|\frac{x}{n}\right|\cdot\left|\frac{x}{n+1}\right| <$$

$$< \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{x}{N-1}\cdot q\cdot q\cdot\ldots\cdot q = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}\,q^{n-N+2},$$

потому что

$$\left|\frac{x}{N}\right| = q,\quad \left|\frac{x}{N+1}\right| < q,\quad \ldots,\quad \left|\frac{x}{n+1}\right| < q.$$

Но величина $(x^{N-1})/(N-1)$ постоянная, т. е. не зависит от n, а q^{n-N+2} стремится к нулю при $n\to\infty$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Следовательно, и

$$R_n(x) = e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Из предыдущего следует, что при любом x, взяв достаточное число членов, мы можем вычислить e^x с любой степенью точности.

2. Разложение функции $f(x) = \sin x$. Находим последовательные производные от $f(x) = \sin x$:

$$f(x)=\sin x, \qquad f(0)=0,$$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0)=1,$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(0)=0,$$

$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'''(0)=-1,$$

$$f^{IV}(x)=\sin x=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{IV}(0)=0,$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi n}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x)=\sin\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n+1)}(\xi)=\sin\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Подставляя полученные значения в формулу Тейлора, получим разложение функции *f(x)=sinx*:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Так как

$$\left|\sin\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1, \text{ то } \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

при всех значениях x.

Применим полученную формулу для приближенного вычисления sin 20°. Положим n = 3, т.е. ограничимся двумя первыми членами разложения:

$$\sin 20^\circ=\sin\frac{\pi}{9}\approx\frac{\pi}{9}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3=0{,}342.$$

Оценим сделанную ошибку, которая равна остаточному члену:

$$|R_3|=\left|\left(\frac{\pi}{9}\right)^4\frac{1}{4!}\sin(\xi+2\pi)\right|\leqslant\left(\frac{\pi}{9}\right)^4\frac{1}{4!}\approx 0{,}00062<0{,}001.$$

Следовательно, ошибка меньше, чем 0,001, т.е. sin 20°= 0,342 с точностью до 0,001.

На рис. 3.7 даны графики функции *f(x) = sin x* и первых трех приближений

$$S_1(x)=x, \quad S_2(x)=x-\frac{x^3}{3!}, \quad S_3(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}.$$

3. Разложение функции ***f(x) = cosx.*** Находя значения последовательных производных при *x = 0* от функции *f(x) = cosx* и

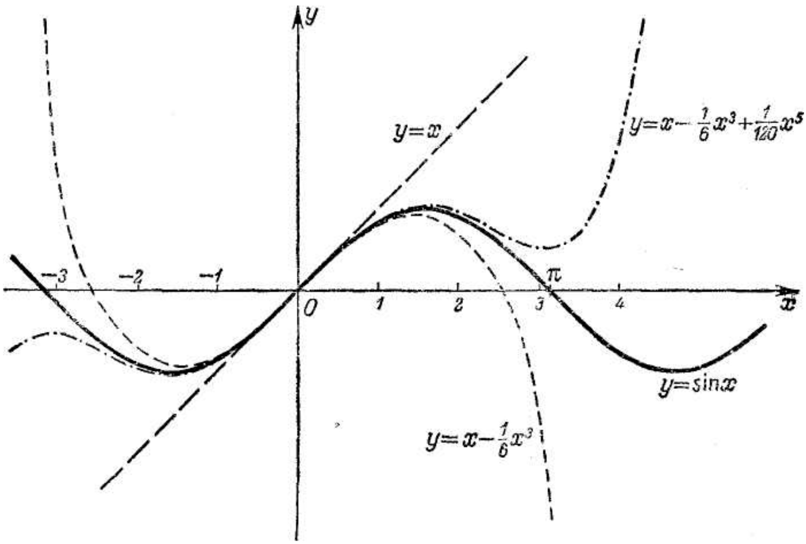


Рис. 3.7.

подставляя в формулу Маклорена, получим разложение:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$
$$|\xi| < |x|.$$

Здесь также

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

при всех значения x.

Микромодуль 4.

Индивидуальные тестовые задания

Проверить справедливость теоремы Ролля для функций: **1.** $y=x^2-3x+2$ на отрезке $[1, 2]$. **2.** $y=x^3+5x^2-6x$ на отрезке $[0, 1]$. **3.** $y=(x-1)\times$ $\times(x-2)(x-3)$ на отрезке $[1, 3]$. **4.** $y=\sin^2 x$ на отрезке $[0, \pi]$.

5. Функция $f(x)=4x^3+x^2-4x-1$ имеет корнями 1 и -1. Найти корень производной $f'(x)$, о котором говорится в теореме Ролля.

6. Проверить, что между корнями функции $y=\sqrt[3]{x^2-5x+6}$ находится корень ее производной.

7. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y=\cos^2 x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right]$.

8. Функция $y=1-\sqrt[5]{x^4}$ обращается в нуль на концах отрезка $[-1, 1]$. Убедиться в том, что производная от этой функции нигде в интервале $(-1, 1)$ в нуль не обращается. Объяснить, почему здесь неприменима теорема Ролля.

9. Составить формулу Лагранжа для функции $y=\sin x$ на отрезке $[x_1, x_2]$. *Отв.* $\sin x_2-\sin x_1=(x_2-x_1)\cos c$, $x_1 < c < x_2$.

10. Проверить справедливость формулы Лагранжа для функции $y=2x-x^2$ на отрезке $[0, 1]$.

11. В какой точке касательная к кривой $y=x^n$ параллельна хорде, стягивающей точки $M_1(0, 0)$ и $M_2(a, a^n)$? *Отв.* В точке с абсциссой $c=\frac{a}{\sqrt[n-1]{n}}$.

12. В какой точке касательная к кривой $y=\ln x$ параллельна хорде, стягивающей точки $M_1(1, 0)$ и $M_2(e, 1)$? *Отв.* В точке с абсциссой $c=e-1$.

Пользуясь теоремой Лагранжа, доказать неравенства: **13.** $e^x \geqslant 1+x$. **14.** $\ln(1+x) < x$ $(x > 0)$. **15.** $b^n-a^n < nb^{n-1}(b-a)$ при $b > a$. **16.** $\operatorname{arctg} x < x$.

17. Написать формулу Коши для функций $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=x^3$ на отрезке $[1, 2]$ и найти c. *Отв.* $c=\frac{14}{9}$.

Вычислить следующие пределы: **18.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$. *Отв.* $\frac{1}{n}$. **19.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$. *Отв.* 2. **20.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$. *Отв.* 2. **21.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$. *Отв.* -2.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$. *Отв.* Предела не существует ($\sqrt{2}$ при $x\to+0$, $-\sqrt{2}$ при $x\to-0$). **23.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$. *Отв.* $-\frac{1}{8}$. **24.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$. *Отв.* $\ln\frac{a}{b}$. **25.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$. *Отв.* $-\frac{1}{6}$. **26.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$. *Отв.* $\cos a$.

27. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y+\sin y-1}{\ln(1+y)}$. *Отв.* 2. **28.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x}{3x^2+x^5}$. *Отв.* $\frac{1}{3}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{2x+5}$. *Отв.* $\frac{3}{2}$. **30.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}$ (где $n > 0$). *Отв.* 0.

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arcctg} x}$. *Отв.* 1. **32.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\ln\frac{x-1}{x}}$. *Отв.* -1. **33.** $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{ay}}$. *Отв.* 0 при $a > 0$; ∞ при $a \leqslant 0$. **34.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. *Отв.* 1.

35. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$. *Отв.* 1. **36.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{tg} 7x}{\ln\operatorname{tg} 2x}$. *Отв.* 1. **37.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)-x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2x}}$. *Отв.* 0. **38.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$. *Отв.* $\frac{2}{\pi}$. **39.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right]$. *Отв.* $-\frac{1}{2}$. **40.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right]$. *Отв.* -1. **41.** $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi)$. *Отв.* 0.

42. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right]$. *Отв.* $\dfrac{1}{2}$. **43.** $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}2x$. *Отв.* $\dfrac{1}{2}$. **44.** $\lim\limits_{x\to 0} x^2e^{\frac{1}{x^2}}$. *Отв.* ∞. **45.** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. *Отв.* $\dfrac{1}{e}$. **46.** $\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt[t]{t^2}$. *Отв.* 1. **47.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$. *Отв.* 1. **48.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$. *Отв.* e^a. **49.** $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$. *Отв.* $\dfrac{1}{e}$.

50. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$. *Отв.* 1. **51.** $\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi^2}}$. *Отв.* $\dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}$.

52. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$. *Отв.* $\dfrac{1}{e}$.

53. Разложить по степеням $x-2$ многочлен $x^4-5x^3+5x^2+x+2$. *Отв.* $-7(x-2)-(x-2)^2+3(x-2)^3+(x-2)^4$.

54. Разложить по степеням $x+1$ многочлен $x^5+2x^4-x^2+x+1$. *Отв.* $(x+1)^2+2(x+1)^3-3(x+1)^4+(x+1)^5$.

55. Написать формулу Тейлора для функции $y=\sqrt{x}$ при $a=1$, $n=3$. *Отв.* $\sqrt{x}=1+\dfrac{x-1}{1}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{(x-1)^2}{1\cdot 2}\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{(x-1)^3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\dfrac{3}{8}-\dfrac{(x-1)^4}{4!}\cdot\dfrac{15}{16}\times$
$\times[1+\theta(x-1)]^{-\frac{7}{2}}$, $0<\theta<1$.

56. Написать формулу Маклорена для функции $y=\sqrt{1+x}$ при $n=2$. *Отв.* $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{x^3}{16(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}}$, $0<\theta<1$.

57. Пользуясь результатами предыдущего примера, оценить погрешность приближенного равенства $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2$ при $x=0{,}2$. *Отв.* Меньше $\dfrac{1}{2\cdot 10^3}$.

Выяснить происхождение приближенных равенств при небольших значениях x и оценить погрешность этих равенств: **58.** $\ln\cos x\approx-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}$. **59.** $\operatorname{tg}x\approx x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}$. **60.** $\arcsin x\approx x+\dfrac{x^3}{6}$. **61.** $\operatorname{arctg}x\approx x-\dfrac{x^3}{3}$. **62.** $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\approx 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$. **63.** $\ln(x+\sqrt{1-x^2})\approx x-x^2+\dfrac{5x^3}{6}$.

Пользуясь формулой Тейлора, вычислить пределы выражений: **64.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}$. *Отв.* 1. **65.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{-x^2}}$. *Отв.* 0.

66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\operatorname{tg}x-\sin x)-x^3}{x^5}$. *Отв.* $\dfrac{1}{4}$. **67.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$. *Отв.* 0. **68.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\operatorname{ctg}x}{x}\right)$. *Отв.* $\dfrac{1}{3}$. **69.** $\lim\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$. *Отв.* $\dfrac{2}{3}$.

Микромодуль 5.

Применение производной при исследовании функций

3.6 Постановка задачи

Изучение количественной стороны различных явлений природы приводится к установлению и изучению функциональной зависимости между участвующими в данном явлении переменными величинами. Если такую функциональную зависимость можно выразить аналитически, т. е. в виде одной или нескольких формул, то мы получаем возможность исследовать эту функциональную зависимость средствами математического анализа. Например, при исследовании явления полета снаряда в пустоте получается формула, дающая зависимость дальности полета R от угла возвышения α и начальной скорости v_0:

$$R=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$$

(g – ускорение силы тяжести)

Получив эту формулу, мы имеем возможность выяснить, при каком α дальность R будет наибольшей, при каком—наименьшей, каковы должны быть условия, чтобы при увеличении угла α увеличивалась дальность и т. д.

Рассмотрим другой пример. В результате изучения колебания груза на рессоре (вагон, автомобиль) получили формулу, показывающую, как отклонение y груза от положения равновесия зависит от времени t

$$y=e^{-kt}(A\cos\omega t+B\sin\omega t).$$

Величины k, A, B, ω, входящие в эту формулу, имеют вполне определенное значение для данной колебательной системы (они зависят от упругости рессоры, от величины груза и т. д., но не изменяются с течением времени t) и поэтому рассматриваются нами как постоянные На основании приведенной формулы можно выяснить, при каких значениях t отклонение y увеличивается с увеличением t, как меняется величина наибольшего отклонения в зависимости от времени, при каких значениях t наблюдаются эти наибольшие отклонения, при каких значениях t получаются наибольшие скорости движения груза и ряд других вопросов.

Все перечисленные вопросы входят в понятие «исследовать поведение функции». Очевидно, выяснить все эти вопросы, вычисляя значения функции в отдельных точках (подобно тому, как мы это делали ранее, весьма затруднительно. Целью настоящего микромодуля является установление более общих приемов исследования поведения функций.

3.7. Возрастание и убывание функции

Ранее было дано определение возрастающей и убывающей функций. Теперь мы применим понятие производной для исследования возрастания и убывания функции.

Теорема. 1) *Если функция f(x), имеющая производную на отрезке [a, b], возрастает на этом отрезке, то ее производная на отрезке [a, b] не отрицательна, т. е.* $f'(x) \geq 0$.

2) *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема в промежутке (a, b), причем f' (x)* > 0 *для* $a < x < b$, *то эта функция возрастает на отрезке [a, b].*

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Пусть *f(x)* возрастает на отрезке *[a, b]*. Придадим аргументу x приращение Δx и рассмотрим отношение

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (3.26).$$

Так как *f(x)*—функция возрастающая, то

$f(x+\Delta x) > f(x)$ при $\Delta x > 0$

$f(x+\Delta x) < f(x)$ при $\Delta x < 0.$

В обоих случаях

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0, \qquad (3.27)$$

а следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

т. е. $f'(x) \geq 0$, что и требовалось доказать. (Если бы было $f'(x) < 0$, то при достаточно малых значениях Δx отношение (7.26) было бы отрицательным, что противоречит соотношению (7.27).)

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $f'(x) > 0$ при всех значениях x, принадлежащих промежутку (a, b).

Рассмотрим два любых значения x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, принадлежащих отрезку $[a, b]$.

По теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), \qquad x_1<\xi<x_2.$$

По условию $f'(\xi) > 0$, следовательно, $f(x_2)- f(x_1)>0$, а это и значит, что $f(x)$—возрастающая функция.

Аналогичная теорема имеет место и для убывающей (дифференцируемой) функции, а именно.

Если $f(x)$ *убывает на отрезке* $[a, b]$, *то* $f'(x)\leq 0$ *на этом отрезке. Если* $f'(x) < 0$ *в промежутке* $[a, b]$,

то $f(x)$ *убывает на отрезке* $[a, b]$. (Конечно, мы и здесь предполагаем, что функция непрерывна во всех точках отрезка $[a, b)$ и дифференцируема всюду на (a, b).)

Замечание. Доказанная теорема выражает следующий геометрический факт. Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ возрастает, то касательная к кривой $y=f(x)$ в каждой точке на этом отрезке образует с осью Ox острый угол φ или — в отдельных точках — горизонтальна; тангенс этого угла не отрицателен: $f'(x) = \operatorname{tg}\varphi\geq 0$ (рис. 3.8, *а*).

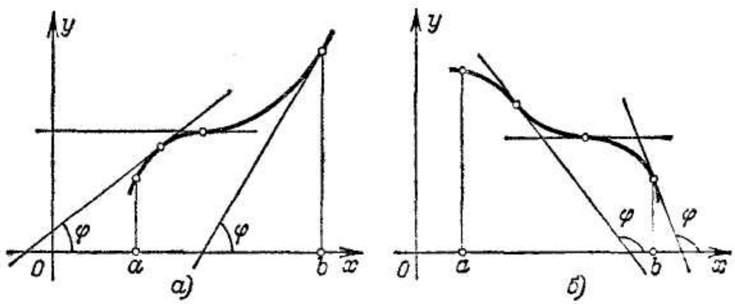


Рис. 3.8

Если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то угол наклона касательной—тупой (или — в отдельных точках—касательная горизонтальна); тангенс этого угла не положителен (рис. 7.8.б). Аналогично иллюстрируется и вторая часть теоремы. Теорема позволяет судить о возрастании или убывании функции по знаку ее производной.

Пример. Определить области возрастания и убывания функции

$$y=x^4$$

Решение. Производная равна

$y' = 4x^3$;

при $x > 0$ имеем $y' > 0$—функция возрастает; при $x < 0$ имеем $y'<0$ функция убывает (рис.3.9).

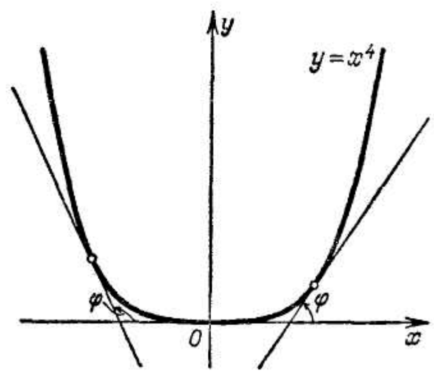


Рис.7.9

3.8. Интервалы монотонности и экстремум

Знак производной. Пусть рассматривается функция *y=f(x); в этом пункте мы будем предполагать, что как она сама, так и ее*
производная не имеют разрывов. Примерный график этой функции показан на рис. 3.10.

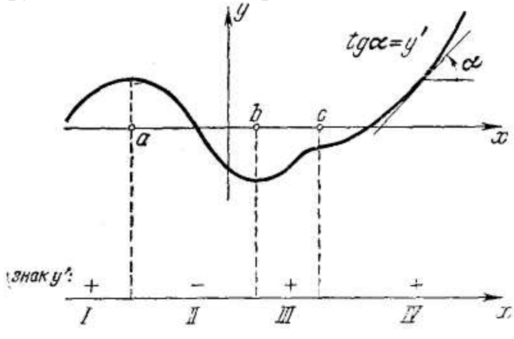


Рис.3.10

Так как $y' = tg\alpha$, то *функция возрастает в каждом интервале, в котором ее производная положительна, и убывает в каждом интервале, в котором ее производная отрицательна.* Другими словами, если скорость изменения какой-либо величины положительна, то эта величина возрастает, а если скорость отрицательна, то величина убывает.

Так как производная, переходя непрерывно от положительных значений к отрицательным, должна пройти через нулевое значение, то в точках, в которых интервал возрастания сменяется интервалом убывания, будет $y' = 0$. Точки x, в которых $f'(x) = 0$, называются *стационарными точками* функции f: в них мгновенная скорость изменения функции равна нулю, т. е. это как бы точки мгновенного покоя.

. На рис. 3.10 имеются три стационарные точки: a, b и c. Соответствующие значения функции называются ее *стационарными значениями.*

Из сказанного следует, что для нахождения интервалов монотонности функции $f(x)$ надо на ось x нанести все стационарные точки этой функции, после чего проверить знак f' на каждом из интервалов между соседними стационарными точками. Интервалы, на которых $f'>0$, будут интервалами возрастания, а интервалы, на которых $f' < 0$, будут интервалами убывания функции f. При этом если на двух соседних интервалах знак f' одинаков, то они составляют единый интервал монотонности; так, на рис. 3.10 интервалы ///и *IV* составляют единый интервал возрастания функции $f(x)$.

Очевидно также, что *интервалами постоянства функции f служат те и только те интервалы, на которых* $f(x)\equiv 0$, так как на этих интервалах функция f не может ни возрастать, ни убывать.

Точки экстремума. *Если при некотором* $x= x_0$ *значение* $f(x_0)$ *больше всех «соседних» значений функции* (т. е. значений $f(x)$ при x, достаточно близких к x_0), *то точка* $x = x_0$ *называется точкой максимума функции* f, *а значение* $f(x_0)$*—ее максимальным значением.* Аналогично определяются *точка минимума* и *минимальное значение* функции. Так, на рис. 3.10 функция имеет точку максимума при $x =a$ и точку минимума при $x — b$. В других примерах функция может иметь другое количество точек максимума и минимума, причем у непрерывной функции они обязательно чередуются. Так, на рис. 3.11 функция имеет три точки максимума и две — минимума

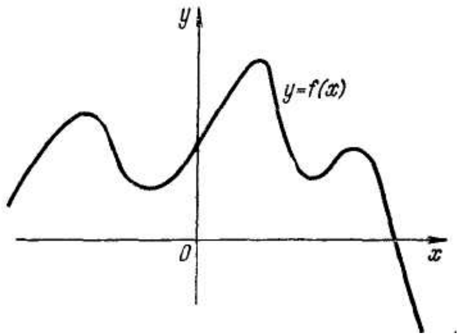


Рис.3.11

Как максимум, так и минимум объединяются словом *«экстремум»* от латинского extremus, что значит «крайний». Из предыдущего пункта следует, что *точками экстремума служат точки, при переходе через которые производная сменяет знак.* Более определенно: *если при переходе x через точку $x = a$ в положительном направлении знак $f'(x)$ сменяется с + на —, то при $x = a$ функция f имеет максимум,* так как при этом переходе функция f сменяет возрастание на убывание (см. рис. 7.10). Аналогично *при переходе через точку минимума производная сменяет знак с — на +-.*

Из предыдущего пункта следует также, что в указанных там предположениях *все точки экстремума функции будут ее стационарными точками.* Этот необходимый признак экстремума получил Ферма. Как видно из рис. 3.10, признак не является достаточным, т. е. стационарная точка может и не быть точкой экстремума.

Достаточными признаками пользуются реже, чем необходимым, так как во многих конкретных задачах часто бывает заранее ясно, что экстремум должен быть, и даже примерно, где он будет, только точное его значение неизвестно. Если при этом необходимый признак даст лишь одну возможную точку, то, значит, там и будет экстремум. Если экстремумов несколько, то их можно находить одновременно с отысканием интервалов монотонности, как об этом говорилось в предыдущем пункте.

Так как вблизи стационарной точки значения функции меняются весьма медленно, то из признака Ферма вытекает, что если точка экстремума найдена с некоторой погрешностью, то погрешность в соответствующем экстремальном значении будет высшего порядка малости. Поэтому выгодно, если только это возможно, приводить задачу о нахождении той или иной величины к задаче о нахождении экстремального или просто стационарного значения некоторой функции. Тогда даже грубое отыскание точки экстремума даст хороший окончательный результат.

Условия экстремума можно получить также с помощью формулы Тейлора. Будем исследовать точку $x = a$ для функции $f(x)$. Тогда из формулы (3.19) видим, что если $f'(a)\neq 0$, то экстремума при $x = a$ нет, так как, меняя знак у h, мы изменим знак и у $f'(a)h$, т. е. у разности $f(a+h)—f(a)$ (ибо величины порядка h^2 при малых h ничтожны по сравнению с величиной $f'(a)h$).
Если $f'(a) = 0$, $f''(a)\neq 0$, то из формулы (3.20) аналогичным образом находим, *что экстремум при x—a будет: минимум, если* $f''(a)>0$ (тогда $f(a + h)>f(a)$ при малых $|h|$), *и максимум, если* $f''(a)<0$. Если $f'(a) = 0$, $f'(a) = 0$, $f'''(a)\neq 0$, то из формулы (7.21) следует, что экстремума при $x = a$ не будет; если $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, $f'''(a) = 0$, $f^{iv}(a)\neq 0$, то экстремум будет и т. д.

Наибольшее и наименьшее значения функции. Пусть, как и выше, функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной на некотором замкнутом интервале $a\leq$^ $x \leq b$ и требуется найти на нем *наибольшее и наименьшее значения этой функции.* Тогда наряду с рассмотренными в предыдущем пункте *внутренними* экстремумами надо принять во внимание также *краевые* экстремумы: так, на рис. 3.12 функция имеет краевой минимум при $x = a$ и краевой максимум при $x = b$ наряду с двумя внутренними экстремумами. Конечно, в точках краевого экстремума производная не обязана равняться нулю.

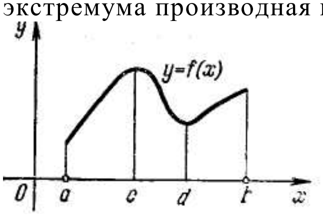


Рис.3.12

Далее, надо иметь в виду, что в предыдущем пункте рассматривались *локальные* (местные, от латинского locus — место) экстремумы, а здесь нас интересуют *тотальные* (от латинского totalis — всеобъемлющий) максимум и минимум. Поэтому для нахождения наибольшего значения функции на интервале $a\leq x\leq b$ надо найти все ее внутренние и концевые максимумы на этом интервале, а затем сравнить между собой все соответствующие максимальные значения: наибольший из максимумов и даст наибольшее значение функции. Аналогично находится наименьшее значение функции на замкнутом интервале. Для упрощения работы можно просто сравнить все стационарные и краевые значения функции: наибольшее из них даст тотальный максимум, а наименьшее— тотальный минимум.

Если функция $f(x)$ непрерывная, но f' может иметь разрывы, то смена возрастания f, на ее убывание может происходить не только в точках, где $f'=0$, но и в точках, где f' имеет разрыв. Для нахождения интервалов монотонности функции f, т. е. для выяснения знака f', надо поступать аналогично тому, как ранее выяснялся знак f,. Если при переходе через некоторое значение $x = a$ производная $f'(x)$ меняет знак, претерпевая разрыв, то при значении $x = a$ функция $f(x)$ имеет *острый экстремум*). Вблизи острого экстремума функция f, конечно, уже не будет медленно меняющейся, как вблизи стационарных экстремумов, рассмотренных в предыдущем пункте.

Итак, полная формулировка необходимого условия экстремума для непрерывной функции такова: *в точке экстремума производная обращается в нуль или терпит разрыв.*

Естественно, что для точек острого экстремума условия, основанные на применении формулы Тейлора, отпадают; остается условие, основанное на перемене знака производной.

Если сама функция $f(x)$ имеет разрывы, то точки разрыва могут служить концами интервалов монотонности этой функции, даже если по обе стороны от точки разрыва f' имеет одинаковый знак. Так, на рис. 3.13 всюду при $x \neq a$ будет $y' > 0$ и в то же время имеются два интервала возрастания f: $-\infty<x<a$ и $a<x<\infty$, которые нельзя объединить в один. Поэтому при нахождении интервалов монотонности на ось x надо нанести также все точки разрыва функции.

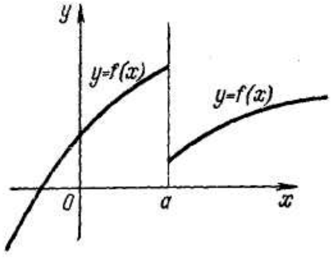


Рис.3.13

При нахождении наибольшего значения функции, имеющей разрывы, надо иметь в виду, что такая функция может получиться неограниченной сверху и тогда наибольшего значения, конечно, не будет. То же осложнение может возникнуть при рассмотрении функции, даже непрерывной, но на бесконечном интервале.

Но даже если такая ограниченность и будет, то о достижении наибольшего значения при наличии точек разрыва или в случае неограниченности интервала часто можно говорить только в предельном смысле. Так, на рис.3.13 наибольшим значением является $f(a—0)$, причем малейший переход через точку a приводит к резкому уменьшению этого значения, которое, таким образом, является «неустойчивым». В этом случае предпочитают говорить не о наибольшем значении, а о *«верхней границе»* значений функции, понимая под этим термином наибольшее из всех значений функции и из всех ее пределов.

Пример 1. Пусть функция $y = f(x) = (1 + x^2)/(1+x^4)$ рассматривается на всей оси x. Точек разрыва ни она, ни ее производная

$$y' = \frac{2x\,(1+x^4) - 4x^3\,(1+x^2)}{(1+x^4)^2} = 2x\,\frac{1-2x^2-x^4}{(1+x^4)^2}$$

не имеют, и поэтому для нахождения интервалов монотонности надо приравнять $y'=0$, что даст уравнение $x(1 —2x^2—x^4) = 0$, т. е.

$$x_1=0;\quad x^4+2x^2-1=0;\quad (x^2)^2+2x^2-1=0;\quad x^2=-1\pm\sqrt{2};$$

ГОДИТСЯ ТОЛЬКО +, т.е.

$$x^2=\sqrt{2}-1;\quad x_{2,3}=\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}=\pm\,0{,}644$$

(рис. 3.14). Таким образом, ось x разбивается на четыре интервала.

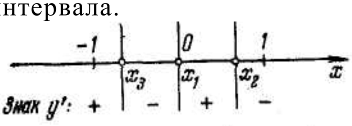


Рис.3.14

Подстановка в y' значений x = —10; —0,1; 0,1; 10 из этих интервалов дает соответственно знаки +, —, +, —. Значит, эти интервалы последовательно являются интервалами возрастания, убывания, возрастания и убывания. При $x = x_3$, x_2 функция имеет максимумы, а при $x=x_1$—минимум. Максимальные значения

$$f(x_2) = f(x_3) = \frac{1+(\sqrt{2}-1)}{1+(\sqrt{2}-1)^2} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} = 1{,}207,$$

а минимальное значение $f(x_1) = 1l$.
Кроме того, «концевые» предельные значения $f(\infty) = f(+\infty) = 0$, так как при $x \to \pm\infty$ в числителе у $f(x)$ получается бесконечно большая величина второго порядка в сравнении с x, а в знаменателе — четвертого. Значит, наибольшее значение 1,207 функции достигается при x=± 0.644, а наименьшее значение нуль—только в пределе при $x \to \pm\infty$. Примерный график функции показан на рис. 3.15.

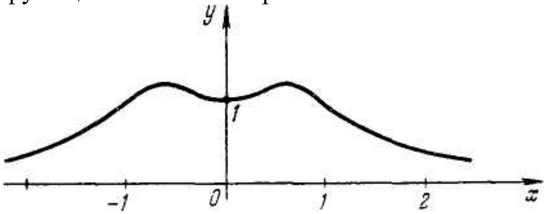


Рис.3.15

Пример 2. Пусть из квадратного листа жести со стороной a требуется выкроить коробку наибольшей вместимости. (См. рис. 3.16; линии сгиба проведены пунктиром, а линии разреза — сплошные.)

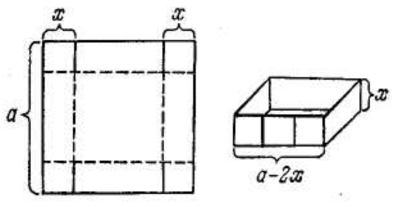


Рис.3.16

Ясно, что какое-то решение этой задачи имеется, но неясно, где проводить разрез (т. е. каково x) и какой получится объем. Если сначала принять x каким-то неопределенным, то объем
$V = (a - 2x)^2 x$, причем по смыслу задачи x должен быть между 0 и $a/2$ Применение необходимого признака экстремума дает

$$\frac{dV}{dx} = 2(a-2x)(-2)x + (a-2x)^2 1 = (a-2x)(a-6x) = 0,$$

откуда $x_1= a/2$, $x_2=a/6$. По смыслу задачи подходит только $x_2=a/6$, т.е. там и будет максимум. Максимальный объем
$$V_{\max}=\left(a-2\cdot\frac{a}{6}\right)^2\frac{a}{6}=\frac{2}{27}a^3.$$

Пример 3. Рассмотрим задачу о *преломлении света* на границе раздела двух *однородных* (т. е. одинаковых во всех своих точках) *изотропных* (т. е. одинаковых во всех направлениях) сред. Предположим сначала, что граница раздела плоская; проведем через луч света плоскость (рис. 3.17) и

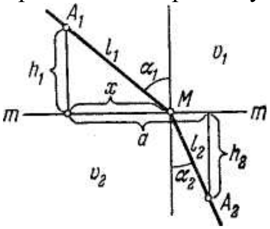


Рис. 3.17.
v_1 — скорость света в первой среде; v_2 — скорость света во второй среде; mm — граница раздела сред.

выберем на луче точки A_1 и A_2. Воспользуемся, далее, *принципом Ферми в оптике,* который гласит: из всех возможных путей, идущих из A_1 в A_2, луч света выбирает такой, который он проходит за минимальное время. Поэтому точка M при заданных A_1 и A_2 должна быть расположена так, чтобы
$$t=t_1+t_2=\frac{l_1}{v_1}+\frac{l_2}{v_2}=\frac{\sqrt{h_1^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}}{v_2}$$
было минимально возможным. Применяя необходимое условие минимума, получим
$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2+x^2}}-\frac{a-x}{v_2\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}}=0,$$
откуда
$$\frac{x}{l_1v_1}=\frac{a-x}{l_2v_2},\quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{x}{l_1}:\frac{a-x}{l_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

Итак, получаем закон преломления: отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная, равная отношению скоростей света в обеих средах. Если теперь поверхность раздела не плоская, то так как закон преломления зависит лишь от ситуации в бесконечной близости от точки преломления, а в такой близости поверхность раздела можно считать плоской, то и в этом случае закон преломления остается тем же.

Таким образом, мы видим, *что закон физики удалось с помощью решения задачи на экстремум вывести из общего физического принципа, имеющего экстремальный характер, т. е. утверждающего экстремальное значение определенной величины в реальных условиях.*

Более подробное исследование показывает, что в принципе Ферма, как и в ряде других аналогичных принципов, существенна не минимальность и даже не экстремальность времени прохождения светом пути, а стационарность этого времени. В такой форме этот принцип можно вывести из волновой теории света.

3.9. Схема исследования дифференцируемой функции на максимум и минимум с помощью первой производной

На основании предыдущих разделов можно сформулировать следующее правило для исследования дифференцируемой функции

$$y = f(x)$$

на максимум и минимум:

1. Ищем первую производную функции, т. е. $f'(x)$.
2. Находим критические значения аргумента x; для этого:

а) приравниваем первую производную нулю и находим действительные корни полученного уравнения $f'\{x)= 0$;

б) находим значения x, при которых производная $f'(x)$ терпит разрыв.

3. Исследуем знак производной слева и справа от критической точки. Так как знак производной остается постоянным в интервале между двумя критическими точками , то для исследования знака производной слева и справа, например, от критической точки x_2 (рис. 3.18) достаточно определить знак производной в точках α и β ($x_1 < \alpha < x_2$, $x_2 < \beta < x_3$, где x_1 и x_3 — ближайшие критические точки).

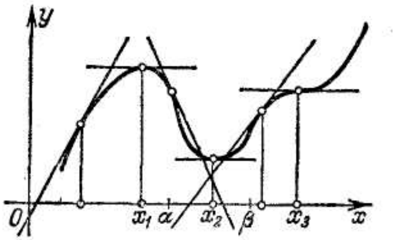


Рис.3.18 '

4. Вычисляем значение функции *f(x)* при каждом критическом значении аргумента.
Таким образом имеем следующее схематическое изображение возможных случаев

Знаки производной $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_1,			Характер критической точки
$x<x_1$	$X=x_1$	$x>x_1$	
+	$f'(x_1)=0$ или разрывна	—	Точка максимума
–	$f'(x_1)=0$ или разрывна	+	Точка минимума
+	$f'(x_1)=0$ или разрывна	+	Нет ни максимума, ни минимума (функция возрастает)
—	$f'(x_1)=0$ или разрывна	–	Нет ни максимума, ни минимума (функция убывает)

Пример 1. Исследовать на максимум и минимум функцию
$$y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1.$$

Решение. 1) Находим первую производную $y'=x^2-4x+3.$

2) Находим действительные корни производной;

$(y)_{x=1}=\frac{7}{3}$.

Следовательно,
$x_1=1$, $x_2=3$.
Производная всюду непрерывна. Значит, других критических точек нет.
3) Исследуем критические значения и результаты исследования фиксируем на рис. 3.19.

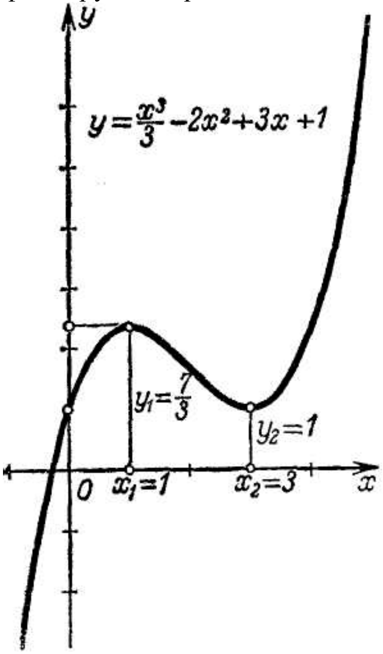


Рис.3.19

Исследуем первую критическую точку $x_1=1$. Так как $y' = (x - 1)(x-3)$, то
при $x < 1$ имеем $y' = (-)\cdot(-) > 0$;
при $x > 1$ имеем $y' = (+)\cdot(-) < 0$.
Значит, при переходе (слева направо) через значение $x_1=1$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, при $x=1$ функция имеет максимум, а именно:
$(y)_{x=1}=7/3$
Исследуем вторую критическую точку $x_2 = 3$;
при $x < 3$ имеем $y' = (+)\cdot(-) < 0$;
при $x > 3$ имеем $y' = (+)\cdot(+) > 0$.

Значит, при переходе через значение $x = 3$ производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, при $x = 3$ функция имеет минимум, а именно:

$$(y)_{x=3} = 1.$$

На основании проведенного исследования строим график функции (рис. 3.19).

Пример 2. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

Решение. 1) Находим первую производную:

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

2) Находим критические значения аргумента: а) находим точки, в которых производная обращается в нуль

$$y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0, \quad x_1 = \frac{2}{5};$$

б) находим точки, в которых производная терпит разрыв (в данном случае обращается в бесконечность). Такой точкой будет, очевидно, точка

$$x_2 = 0.$$

(Отметим, что при $x_2 = 0$ рассматриваемая функция определена и непрерывна.)

Других критических точек нет.

3) Исследуем характер полученных критических точек. Исследуем точку $x_1 = 2/5$. Заметив, что

$$(y')_{x<2/5} < 0, \quad (y')_{x>2/5} > 0,$$

заключаем, что при $x = 2/5$ функция имеет минимум. Значение функции в точке минимума равно

$$(y)_{x=2/5} = \left(\frac{2}{5} - 1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$

Исследуем вторую критическую точку $x = 0$. Заметив, что

$$(y')_{x<0} > 0, \quad (y')_{x>0} < 0,$$

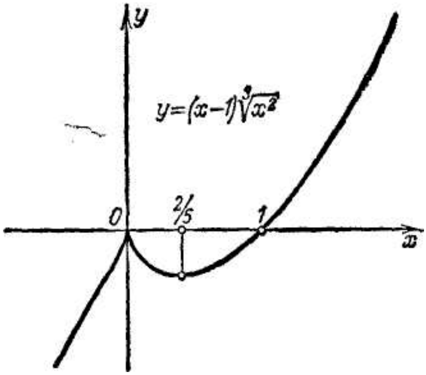


Рис. 3.20.

заключаем, что при $x = 0$ функция имеет максимум, причем $(y)_{x=0}$. График исследуемой функции изображен на рис. 3.20.

3.10. Исследование функции на максимум и минимум с помощью второй производной

Пусть при $x = x_1$ производная функции $y=f(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(x_l) = 0$. Пусть, кроме того, вторая производная $f''(x)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $f'(x_1) = 0$; *тогда при* $x= x_1$ *функция имеет максимум, если* $f''(x) < 0$, *и минимум, если* $f''(x) > 0$.

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Пусть $f'(x_1) = 0$ и $f''(x) < 0$.

Так как, по условию, $f''\{x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x = x_1$, то, очевидно, найдется некоторый малый отрезок, окружающий точку $x = x_1$ во всех точках которого вторая производная $f''(x)$ будет отрицательна.

Так как $f''(x)$ есть первая производная от первой производной, $f''(x) = (f'(x))'$, то из условия $(f'(x))' < 0$ следует, что $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку $x = x_1$. Но $f'(x_1) = 0$, следовательно, на этом отрезке при $x < x_1$ имеем $f'(x) > 0$, а при $x > x_1$ имеем $f'(x) < 0$, т. е. производная $f'(x)$ при переходе через точку $x = x_1$ меняет знак с плюса на минус, а это значит, что в точке x_1 функция $f(x)$ имеет максимум. Первая часть теоремы доказана.

Аналогичным образом доказывается вторая часть теоремы, а именно: если $f''(x_1) > 0$, то $f''(x) > 0$ во всех точках некоторого отрезка, окружающего точку x_1, но тогда на этом отрезке $f''(x) = (f'(x))' > 0$ и, следовательно, $f'(x)$ возрастает. Так как $f'(x_1)= 0$, то, значит, при переходе через точку x_1 производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, т. е. функция $f(x)$ имеет минимум при $x = x_1$.

Если в критической точке $f''(x_1) = 0$, то в этой точке может быть или максимум, или минимум или не быть ни максимума, ни минимума. В этом случае исследование нужно вести первым способом .

Схему исследования экстремумов с помощью второй производной можно изобразить в следующей таблице:

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Характер критической точки
0	–	Точка максимума
0	+	Точка минимума
0	0	Неизвестен

Пример 1. Исследовать на максимум и минимум функцию $y = 2\sin x + \cos 2x$.

Решение. Так как функция является периодической периода 2π, то достаточно исследовать функцию на отрезке $[0, 2\pi]$.

1) Находим производную:

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2(\cos x - 2\sin x\cos x) = 2\cos x(1 - 2\sin x).$$

2) Находим критические значения аргумента:

$$2\cos x(1 - 2\sin x) = 0,$$

$$x_1 = \pi/6, \quad x_2 = \pi/2, \quad x_3 = 5\pi/6, \quad x_4 = 3\pi/2.$$

3) Находим вторую производную:

$$y'' = -2\sin x - 4\cos 2x.$$

4) Исследуем характер каждой критической точки

$$(y'')_{x_1=\pi/6} = -2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Следовательно, в точке $x_1=\pi/6$ имеем максимум:

$$(y)_{x=\pi/6} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Далее

$$(y'')_{x=\pi/2}=-2\cdot 1+4\cdot 1=2>0.$$

Следовательно, в точке $x_2=\pi/2$ имеем минимум:

$$(y)_{x=\pi/2}=2\cdot 1-1=1.$$

В точке $x_3=5\pi/6$ имеем;

$$(y'')_{x=5\pi/6}=-2\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1}{2}=-3<0.$$

Следовательно, при $x_3=5\pi/6$ функция имеет максимум

$$(y)_{x_3=5\pi/6}=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Наконец

$$(y'')_{x=3\pi/2}=-2(-1)-4(-1)=6>0.$$

Следовательно, в точке $x_4=3\pi/2$ имеем минимум:

$$(y)_{x=3\pi/2}=2(-1)-1=-3.$$

График исследуемой функции изображен на рис. 3.21.

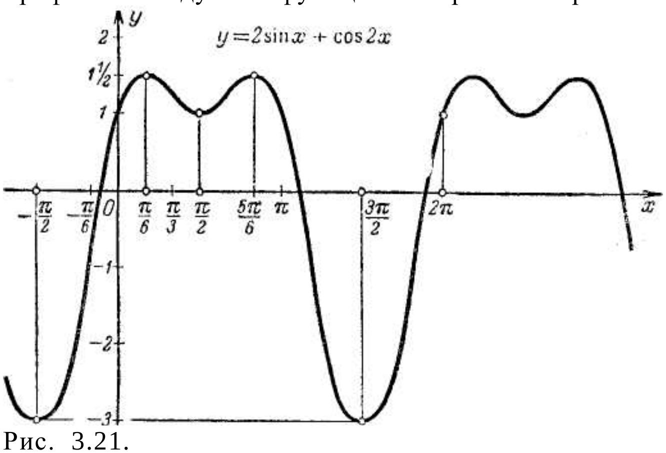


Рис. 3.21.

Покажем, далее, на примерах, что если в некоторой точке $x=x_1$ имеем $f'(x_1)=0$ и $f''(x)=0$, то в этой точке функция $f(x)$ может иметь либо максимум, либо минимум, либо не иметь ни максимума, ни минимума.

Пример 2. Исследовать на максимум и минимум функцию $y=1-x^4$.

Решение. 1) Находим критические точки:

$y'=-4x^3,\quad -4x^3=0,\quad x=0.$

2) Определяем знак второй производной при $x = 0$:

$$y'' = -12x^2, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Следовательно, выяснить характер критической точки с помощью знака второй производной в данном случае нельзя.
3) Исследуем характер критической точки первым способом

$$(y')_{x<0} > 0, \quad (y')_{x>0} < 0.$$

Следовательно, при *x = 0* функция имеет максимум, а именно:

$$(y)_{x=0} = 1.$$

График рассмотренной функции изображен на рис. 7.22.

.

Пример 3. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = x^6.$$

Решение. По второму способу находим

1) $y' = 6x^5, \quad y' = 6x^5 = 0, \quad x = 0; \quad$ 2) $y'' = 30x^4, \quad (y'')_{x=0} = 0.$

Следовательно второй способ ответа не дает. Прибегая к первому способу, получаем

$$(y')_{x<0} < 0, \quad (y')_{x>0} > 0.$$

Следовательно, при $x = 0$ функция имеет минимум (рис. 3.23).

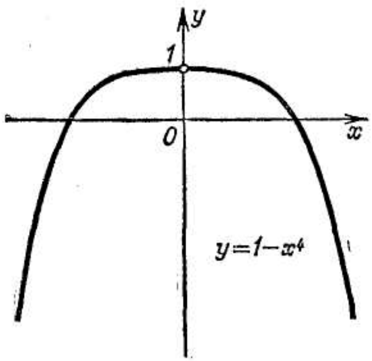


Рис.3.22

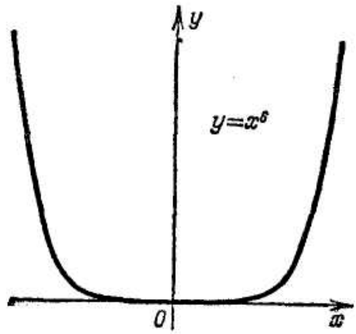


Рис.3.23

Пример 4. Исследовать на максимум и минимум функцию $y=(x-1)^3$

Решение. Второй способ:

$$y'=3(x-1)^2, \quad 3(x-1)^2=0, \quad x=1;$$

$$y''=6(x-1), \quad (y'')_{x=1}=0;$$

таким образом, второй способ ответа не дает. По первому способу находим:

$$(y')_{x<1}>0, \quad (y')_{x>1}>0.$$

Следовательно, при $x=1$ функция не имеет ни максимума, ни минимума (рис. 3.24).

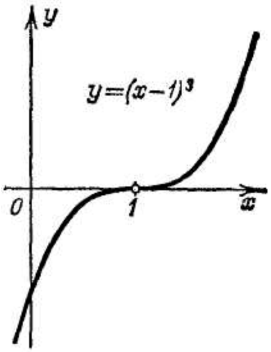


Рис.3.24.

3.11. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке функция достигает наибольшего значения . Будем предполагать, что на данном отрезке функции $f(x)$ имеет конечное число критических точек. Если наибольшее значение достигается внутри отрезка $[a, b]$, то очевидно, что это значение будет одним из максимумов функции (если имеется несколько максимумов), а именно, наибольшим максимумом. Но может случиться, что наибольшее значение будет достигаться на одном из концов отрезка.

Итак, функция на отрезке $[a, b]$ достигает своего наибольшего значения либо на одном из концов этого отрезка, либо в такой внутренней точке этого отрезка, которая является точкой максимума.

То же самое можно сказать и о наименьшем значении функции: оно достигается либо на одном из концов данного отрезка, либо в такой внутренней точке, которая является точкой минимума.

Из предыдущего вытекает следующее правило: если требуется найти наибольшее значение непрерывной функции на отрезке $[a, b]$, то надо:

1) найти все максимумы функции на отрезке;

2) определить значения функции на концах отрезка, т. е. вычислить $f(a)$ и $f(b)$;

3) из всех полученных выше значений функции выбрать наибольшее; оно и будет представлять собой наибольшее значение функции на отрезке.

Аналогичным образом следует поступать и при определении наименьшего значения функции на отрезке.

Пример. Определить на отрезке [—3; 3/2] наибольшее и наименьшее значения функции

$y = x^3 - 3x + 3$.

Решение. 1) Находим максимумы и минимумы функции на отрезке [— 3; 3/2]:

$$y' = 3x^2 - 3, \qquad 3x^2 - 3 = 0, \qquad x_1 = 1,$$

$$x_2 = -1, \qquad y'' = 6x,$$

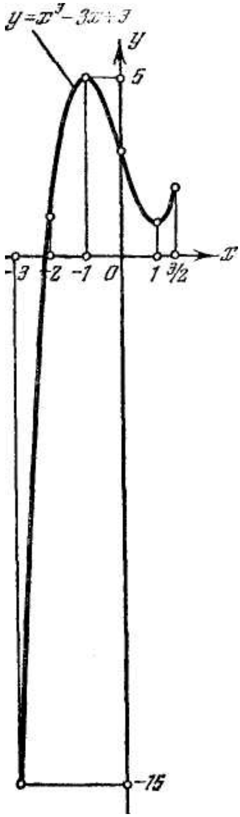


Рис.3.25

Тогда

$$(y'')_{x=1}=6>0.$$

Следовательно, в точке *x=1* имеет место минимум

$$(y)_{x=1}=1.$$

Далее

$$(y'')_{x=-1}=-6<0.$$

Следовательно, в точке *x=-1* имеет место максимум

$$(y)_{x=-1}=5.$$

2) Определим значение функции концах отрезка

$$(y)_{x=3/2}=15/8, \qquad (y)_{x=-3}=-15.$$

Таким образом , наибольшее значение рассматриваемой функции на отрезке [-3; 3/2]есть

$$(y)_{x=-1}=5,$$

а наименьшее есть

$$(y)_{x=-3}=-15.$$

График рассматриваемой функции изображен на рис. 3.25.

3.12. Применение теории максимума и минимума функций к решению задач

С помощью теории максимума и минимума решаются многие задачи геометрии, механики и т. д. Рассмотрим некоторые из таких задач.

Задача 1. Дальностью $R = OA$ (рис. 3.26) полета снаряда (в пустоте), выпущенного с начальной скоростью v_0 из орудия, наклоненного под углом φ к горизонту, определяется формулой

$$R=\frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

(g — ускорение силы тяжести). Определить угол φ, при котором дальность R будет наибольшей при данной начальной скорости v_0.

Решение. Величина R представляет собой функцию переменного угла φ. Исследуем эту функцию на максимум на отрезке $0 \le \varphi \le \pi/2$:

$$\frac{dR}{d\varphi}=\frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}, \quad \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}=0,$$

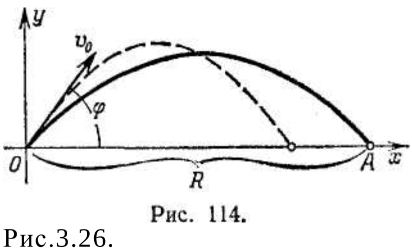


Рис. 114.

Рис.3.26.

критическое значение $\varphi = \pi/4$;

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2}=-\frac{4v_0^2 \sin 2\varphi}{g},$$

$$\left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\pi/4}=-\frac{4v_0^2}{g}<0.$$

Следовательно, при значении $\varphi = \pi/4$ дальность полета R имеет максимум

$$(R)_{\varphi=\pi/4} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Значения функции R на концах отрезка $[0; \pi/2]$ равны:

$$(R)_{\varphi=0} = 0, \qquad (R)_{\varphi=\pi/2} = 0.$$

Таким образом, найденный максимум и есть искомое наибольшее значение R.

Задача 2. Какие размеры надо придать цилиндру, чтобы при данном объеме v его полная поверхность S, была наименьшей?

Решение. Обозначим через r радиус основания цилиндра и через h высоту цилиндра, будем иметь:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Так как объем цилиндра задан, то при данном r величина h определяется формулой

$$v = \pi r^2 h,$$

откуда

$$h = \frac{v}{\pi r^2}.$$

Подставляя это выражение h в формулу для S, получим:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{v}{\pi r^2}, \text{ или } \qquad S = 2\left(\pi r^2 + \frac{v}{r}\right).$$

Здесь v—заданное число. Таким образом, мы представили S как функцию одного независимого переменного r.

Найдем наименьшее значение этой функции в промежутке $0 < r < \infty$:

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{v}{r^2}\right),$$

$$2\pi r - \frac{v}{r^2} = 0, \qquad r_1 = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}},$$

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{r=r_1} = 2\left(2\pi + \frac{2v}{r^3}\right)_{r=r_1} > 0.$$

Следовательно, в точке $r = r_1$ функция S имеет минимум. Заметив, что

$$\lim_{r\to 0} S = \infty \text{ и } \lim_{r\to\infty} S = \infty,$$

т. е. что при стремлении r к нулю или к бесконечности поверхность S неограниченно возрастает, мы приходим к выводу, что в точке $r = r_1$ функция S имеет наименьшее значение.

Но если $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, то

$$h = \frac{v}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}} = 2r.$$

Таким образом, для того чтобы при данном объеме *v* полная поверхность *S* цилиндра была наименьшей, высота цилиндра должна равняться его диаметру.

3.13. Исследование функции на максимум и минимум с помощью формулы Тейлора

Ранее было замечено, что если в некоторой точке $x = a$ имеем $f'(a) = 0$ и $f''(a) = 0$, то в этой точке может быть либо максимум, либо минимум, либо нет ни того, ни другого. При этом указывалось, что для решения вопроса в этом случае нужно вести исследование первым способом, т. е. путем исследования знака первой производной слева и справа от точки $x = a$.

Теперь мы покажем, что можно в этом случае исследование вести и с помощью формулы Тейлора.

Для большей общности предположим, что не только $f''(a)$, но и все производные до *n*-го порядка включительно от функции $f(x)$ обращаются в нуль при $x = a$:

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0, \qquad (3.28)$$

а

$$f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

Предположим, далее, что $f(x)$ имеет непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно в окрестности точки $x = a$.

Напишем формулу Тейлора для $f(x)$, принимая во внимание равенства (3.28):

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \qquad (3.29)$$

где ξ — число, заключенное между *a* и *x*.

Так как $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в окрестности точки *a* и $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, то найдется такое малое положительное число *h*, что при любом *x* удовлетворяющем неравенству $|x - a|$, будет $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. При этом если $f^{(n+1)}(a) > 0$, то и во всех точках интервала $(a-h, a+h)$

будет $f^{(n+1)}(x) > 0$; если $f^{(n+1)}(a) < 0$, то во всех точках этоп интервала будет $f^{(n+1)}(x) < 0$.
Перепишем формулу (3.29) в виде

$$f(x)-f(a)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \tag{3.30}$$

и рассмотрим различные частные случаи.

Первый случай, n— нечетное.
а) Пусть $f^{(n+1)}(a) < 0$. Тогда найдется интервал $(a — h, a+h)$, во всех точках которого $(n+1)$-я производная отрицательна. Если x есть точка этого интервала, то ξ тоже находится между $a—h$ и $a+h$ и, следовательно, $f^{(n+1)}(\xi) < 0$. Так как $n+1$—четное число, то $(x — a)^{n+1} > 0$ при $x\neq a$, и поэтому правая часть в формуле (3.30) отрицательна.

Следовательно, при $x\neq a$ во всех точках интервала $(a—h, a+h)$ имеем:

$$f(x) -f(a)< 0,$$

а это значит, что при $x = a$ функция имеет максимум.
б) Пусть $f^{(n+1)}(a) > 0$. Тогда при достаточно малом значении h во всех точках x интервала $(a — h, a+h)$ имеет место $f^{(n+1)}(\xi) > 0$. Следовательно, правая часть формулы (3.30) будет положительна, т. е. при $x\neq a$ во всех точках указанного интервала будет:

$$f(x) -f(a)> 0,$$

а это значит, что при $x= a$ функция имеет минимум.
Второй случай, n —четное.
Тогда $n+1$—нечетное и величина $(x — a)^{n+l}$ имеет разные знаки при $x < a$ и $x > a$.
Если h достаточно мало по абсолютной величине, то $(n+1)$-я производная во всех точках интервала $(a — h , a+h)$ сохраняет тот же знак, что и в точке a. Следовательно, $f(x)—f(a)$ имеет разные знаки при $x < a$ и при $x > a$. Но это значит, что при $x = a$ нет ни максимума, ни минимума.

Заметим, что если при n четном $f^{(n+1)}(a) > 0$, то $f(x) < f(a)$ для $x < a$ и $f(x) > f(a)$ для $x > a$.

Если же при n четном $f^{(n+1)}(a) < 0$, то $f(x) > f(a)$ для $x < a$ и $f(x) < f(a)$ для $x > a$.

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.
Если при $x = a$ имеем:

$$f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n)}(a)=0$$

и первая не обращающаяся в нуль производная $f^{(n+1)}(a)$ есть производная <u>четного</u> порядка, то в точке a

$f(x)$ имеет максимум, если $f^{(n+1)}(a) < 0$;

$f(x)$ имеет минимум, если $f^{(n+1)}(a) > 0$.

Если же первая не обращающаяся в нуль производная $f^{(n+1)}(a)$ есть производная <u>нечетного</u> порядка, то функция не имеет ни максимума, ни минимума в точке a. При этом

$f(x)$ возрастает, если $f^{(n+1)}(a) > 0$;

$f(x)$ убывает, если $f^{(n+1)}(a) < 0$.

Пример. Исследовать на максимум и минимум функцию

$f\,(x) = x^3—4x^3 + 6x^2 —4x+1$

. **Решение**. Найдем критические значения функции

$f'(x) = 4x^3— 12x^2+12X — 4 = 4\,(X^3 — 3X^2 + 3X — I)$.

Из уравнения

$4(x^3 — 3x^2+3x— 1) = 0$

получаем единственную критическую точку

x=1

(так как данное уравнение имеет лишь один действительный корень). Исследуем характер критической точки $x=1$:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 0 \quad \text{при} \quad x = 1,$$
$$f'''(x) = 24x - 24 = 0 \quad \text{при} \quad x = 1,$$
$$f^{IV}(x) = 24 > 0 \quad \text{при любом } x.$$

Следовательно, при $x = 1$ функция $f\,(x)$ имеет минимум.

3.14. Построение графиков

Дифференциальное исчисление дает общий метод выявления индивидуальных особенностей графика заданной функции $y=f(x)$, что позволяет строить этот график быстрее и точнее, чем «по точкам». Так, нахождение интервалов монотонности функции и точек ее экстремума, описанное ранее, существенно при этом построении. Кроме этого, полезными оказываются еще некоторые исследования; о них мы сейчас будем говорить.

Участки выпуклости графика и точки перегиба. Пусть график $y=f(x)$ таков, как показано на рис. 3.27.

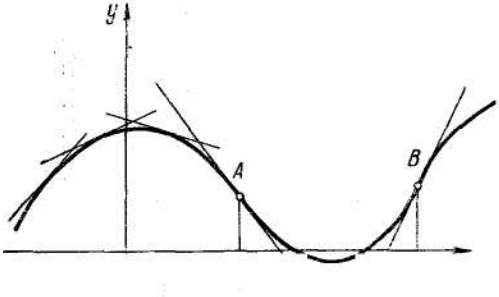


Рис.3.27

Мы видим, что левее точки A и правее точки B график выпуклый кверху, а между A и B—выпуклый книзу . Точки A и B, в которых выпуклость в одну сторону сменяется выпуклостью в другую сторону, являются точками перегиба; в них график пересекает касательную, хотя и под нулевым углом.

Для нахождения участков выпуклости кверху и книзу заметим, что на участке выпуклости кверху (например, на рис. 3.27 при $x < a$) с ростом x касательная к графику поворачивается по часовой стрелке, т. е. ее угловой коэффициент убывает. Но этот коэффициент равен y' и, таким образом, график будет выпуклым кверху и книзу для тех интервалов оси x, для которых y' соответственно убывает или возрастает. Эти интервалы находятся с помощью исследования знака y'' в точности так же, как ранее интервалы убывания и возрастания y находились с помощью исследования знака y'. Итак, *график будет выпуклым кверху и книзу для тех интервалов оси x, для которых соответственно $y''<0$ и $y''>0$; точки перегиба получаются при тех значениях x, при переходе через которые y'' меняет знак. В самой же точке перегиба производная y'' равна нулю.* При этом предполагается, что y, y' и y'' не имеют разрывов. Если такие разрывы имеются, то интервалы выпуклости кверху и книзу графика строятся после нанесения на ось x всех разрывов, поскольку они также могут служить концами названных интервалов.

Пример 1. Установить интервалы выпуклости и вогнутости кривой, заданной уравнением

$$y = 2—x^2$$

Решение. Вторая производная

$$y''=—2 < 0$$

для всех значений *x*. Следовательно, кривая всюду обращена выпуклостью вверх (рис. 3.28).

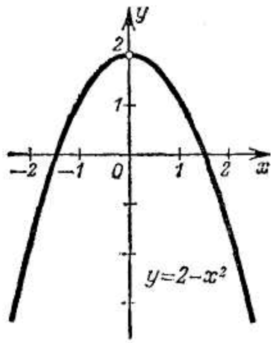


Рис.3.28

Пример 2. Кривая задана уравнением

$$y=e^x.$$

Так как

$$y''=e^x>0$$

для всех значений *x,* то, следовательно, кривая всюду вогнута, т. е. обращена выпуклостью вниз (рис. 3.29).

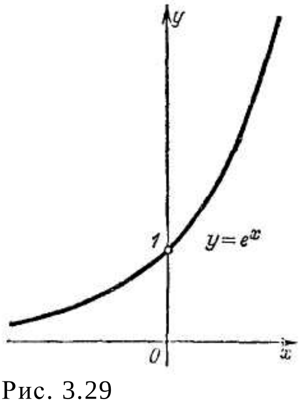


Рис. 3.29

Пример 3. Кривая определяется уравнением

$$y=x^3$$

Так как

$$y''=6x,$$

то $y'' < 0$ при $x < 0$ и $y'' > 0$ при $x > 0$. Следовательно, при $x < 0$ кривая обращена выпуклостью вверх, а при $x > 0$ — выпуклостью вниз (рис. 3.30).

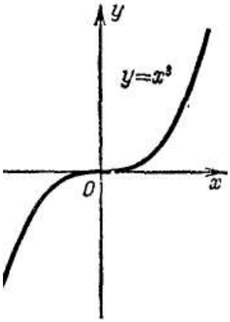


Рис.3.30

Пример 4. Найти точки перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости кривой

$y = e^{-x^2}$ *(кривая Гаусса).*

Решение. 1) Находим первую и вторую производные

$y' = -2xe^{-x^2}$,

$y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$.

2) Первая и вторая производные существуют всюду. Находим значения x, при которых $y'' = 0$:

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0,$$

$$x_1 = -1/\sqrt{2}, \quad x_2 = 1/\sqrt{2}.$$

3)Исследуем полученные значения:

при $x < -1/\sqrt{2}$ имеем $y'' > 0$,

при $x > -1/\sqrt{2}$ имеем $y'' < 0$;

вторая производная меняет знак при переходе через точку x_1 следовательно, при $x_1 = -1/\sqrt{2}$ на кривой имеется точка перегиба: ее координаты

$(1/\sqrt{2},\ e^{-1/2})$.

при $x < 1/\sqrt{2}$ имеем $y'' < 0$,

при $x > 1/\sqrt{2}$ имеем $y'' > 0$.

Следовательно, при $x_2 = 1/\sqrt{2}$ на кривой также имеется точка перегиба, ее координаты
$(-1/\sqrt{2},\ e^{-1/2})$;

Впрочем, существование второй точки перегиба вытекает непосредственно из симметрии кривой относительно оси *Oy*.

4) Из предыдущего следует, что

при $-\infty < x < -1/\sqrt{2}$ кривая вогнута,

при $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$ кривая выпукла,

при $1/\sqrt{2} < x < +\infty$ кривая вогнута.

5) Из выражения первой производной
$y' = -2xe^{-x^2}$
следует, что

$y' > 0$ при $x < 0$, т. е. функция возрастает,

$y' < 0$ при $x > 0$, т. е. функция убывает,

$y' = 0$ при $x = 0$.

В этой точке функция имеет максимум, а имение: $y=1$.

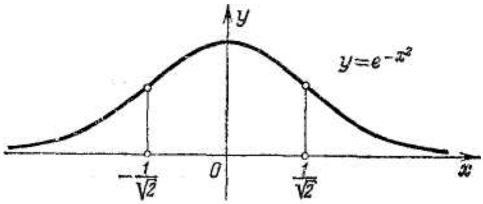


Рис. 3.31

На основании проведенного исследования легко построить график кривой (рис. 3.31).

Пример 5. Найти точки перегиба кривой

$$y = x^4.$$

Решение. 1) Находим вторую производную:

$$y'' = 12x^2.$$

2) Определяем точки, в которых $y'' = 0$:

$$12x^2=0,\ x=0$$

3) Исследуем полученное значение $x=0$:

$y'' > 0$ при $x < 0$—кривая вогнута,

$y'' > 0$ при $x > 0$—кривая вогнута.

Следовательно, кривая не имеет точек перегиба (рис. 3.32).

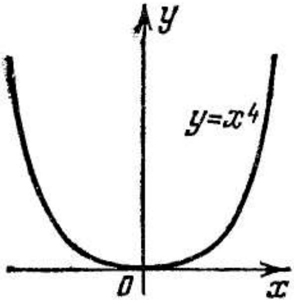


Рис.3.32

Пример 6.
Найти точки перегиба кривой
$y=(x-1)^{1/3}$.

Решение. 1) Находим первую и вторую производные:

$$y'=\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3},$$

$$y''=-\frac{2}{9}(x-1)^{-5/3}.$$

2) Вторая производная нигде не обращается в нуль, но при $x=1$ она не существует ($y''=\pm\infty$).
3) Исследуем значение x=1:

$y''>0$ при $x<1$ — кривая вогнута,

$y''<0$ при $x>1$ — кривая выпукла.

Следовательно, при $x=1$ имеется точка перегиба; это — точка (1; 0). Заметим, что $y'=\infty$ при $x=1$, т. е. кривая в этой точке имеет вертикальную касательную (рис. 3.33).

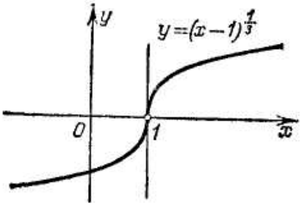


Рис.3.33.

Асимптоты графика. Асимптоты графика $y=f(x)$ могут быть вертикальные (параллельные оси y) и невертикальные (рис. 3.34). Первых может быть сколько угодно, даже бесконечное число (тангенсоида), и они находятся так: если $|y|\to\infty$ при $x\to a$ (a конечное), то прямая $x = a$ служит вертикальной асимптотой.

Невертикальных асимптот не может быть более двух (одной при $x\to\infty$ и одной при $x\to -\infty$, и они находятся так: пусть прямая $y = kx+b$ служит асимптотой графика $y=f(x)$ при $x\to\infty$. Тогда (см. рис. 7.34) разность $\delta=y_{\text{асимптоты}} - y_{\text{графика}}$ равна

$$\delta = (kx + b)-f(x) \qquad \textbf{(3.31)}$$

и стремится к нулю при $x\to\infty$.

откуда

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} - \frac{\delta}{x} \to k,$$

т.е.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Кроме того, в силу (3.31)

$$f(x) - kx = b - \delta \to b,$$

т.е.

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx].$$

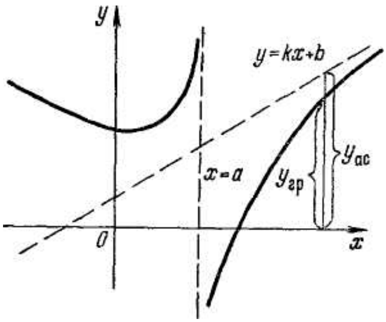


Рис. 3.34.

Каждый из этих двух пределов должен существовать и быть конечным, в противном случае асимптоты при $x\to\infty$ нет. *Если же эти конечные пределы существуют, то и асимптота существует,* так как из последнего равенства видно, что величина

$$[f(x) - kx] - b \to 0, \text{ т. е. } f(x) - (kx + b) \to 0 \quad \text{при} \quad x\to\infty.$$

Пример 1. Кривая $y = 2/(x-5)$ имеет вертикальную асимптоту $x = 5$, так как $y\to\infty$ при $x\to 5$ (рис. 3.35).

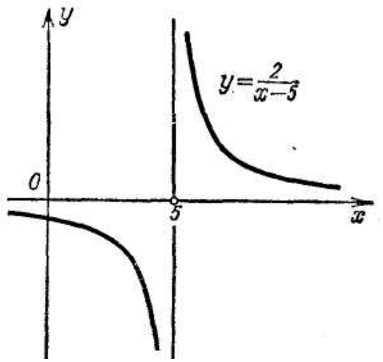


Рис.3.35

Пример 2. Кривая $y = tgx$ имеет бесконечно много вертикальных асимптот

$$x = \pm\,\pi/2,\ x = \pm\,3\pi/2,\ x = \pm\,5\pi/2,\ \ldots$$

Это следует из того, что $tg\,x\to\infty$, когда x стремится к значениям π/2, 3π/2, 5π/2, ... или —π/2, — 3π/2, —5π/2, ... (рис. 3.36).

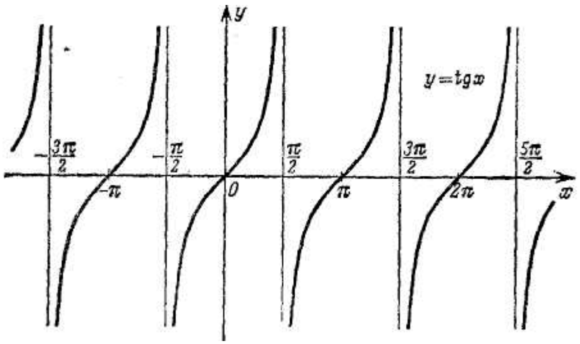


Рис.3.36

Пример 3. Кривая $y = e^{1/x}$ имеет вертикальную асимптоту $x=0$, так как

$$\lim_{x\to+0} e^{1/x} = \infty$$

(см. рис.3.37)

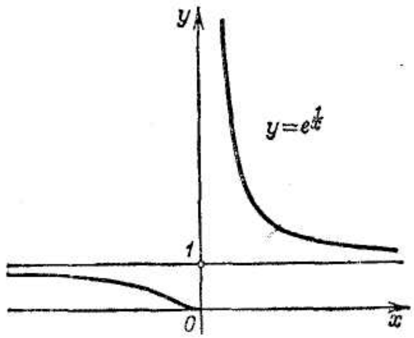


Рис 3.37

Пример 4. Найти асимптоты кривой

$$y=\frac{x^2+2x-1}{x}.$$

Решение. 1) Ищем вертикальные асимптоты:

$y\to+\infty$ при $x\to-0$,

$y\to-\infty$ при $x\to+0$.

Следовательно, прямая $x = 0$ есть вертикальная асимптота данной кривой.

2) Ищем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right]=1,$$

т.е.

$$k=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[y-x]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[2-\frac{1}{x}\right]=2,$$

т.е

$$b=2$$

Следовательно, прямая

$$y=x+2$$

есть наклонная асимптота данной кривой.

Для исследования взаимного расположения кривой и асимптоты рассмотрим разность ординат кривой и асимптоты при одном и том же значении x

$$\frac{x^2+2x-1}{x}-(x+2)=-\frac{1}{x}.$$

При $x > 0$ эта разность отрицательна, а при $x < 0$ — положительна; следовательно, при $x > 0$ кривая лежит ниже асимптоты, при $x < 0$ — выше асимптоты (рис. 3.38).

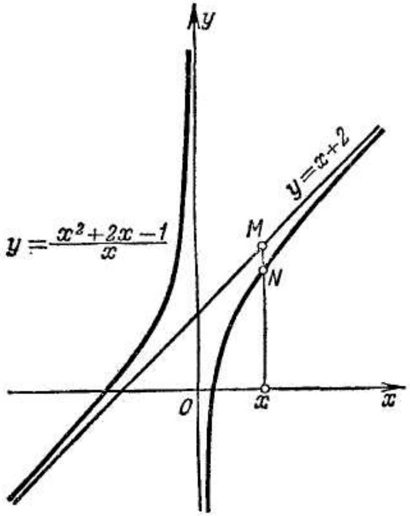


Рис.3.38

Пример 5. Найти асимптоты кривой

$$y = e^{-x}\sin x+-x.$$

Решение 1) Вертикальных асимптот, очевидно, нет.

2) Ищем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\sin x+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{-x}\sin x}{x}+1\right]=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[e^{-x}\sin x+x-x]=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\sin x=0.$$

Следовательно, прямая $y= x$ есть наклонная асимптота при $\kappa\to+\infty$.

Заданная кривая не имеет асимптоты при $x\to-\infty$. Действительно

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x}$$

не существует, так как

$$\frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \sin x + 1.$$

(Здесь первое слагаемое неограниченно возрастает при $x \to -\infty$ и следовательно, предела не имеет.)

Общая схема исследования функции и построения ее графика.

Эта схема для функции $y=f(x)$ включает следующее:

1) Ищутся область определения функции, точки разрыва и нули, после чего выясняются интервалы положительности и отрицательности функции. Выясняется поведение функции при приближении к ее точкам разрыва и к концам интервалов, на которых функция определена (в том числе поведение функции на бесконечности). Находятся асимптоты графика. Выясняется, не будет ли функция четной, нечетной, периодической и т. п.

2) Ищутся точки разрыва и нули производной, после чего выясняются интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума и экстремальные значения. Выясняется поведение производной при приближении к ее точкам разрыва, к точкам разрыва функции (если функция в них имеет конечный скачок) и к краям интервалов, на которых функция определена (если эти края конечные и функция там имеет конечное значение).

3) Ищутся точки разрыва и нули второй производной, после чего выясняются участки выпуклости кверху и книзу графика, а также точки перегиба, в которых полезно найти направление касательной.

Все найденные точки наносятся на координатную плоскость, после чего строится сам график, в поведении которого должны быть переданы все найденные индивидуальные особенности. Если из них поведение графика недостаточно ясно, то надо построить еще несколько точек графика, вычислив значения y для отдельных значений x; желательно также, вычислив значения y', найти в этих точках направление касательной.

Приведем в качестве примера исследование графика функции

$y=\sqrt[3]{x^3-2x^2}.$

В данном случае областью определения служит вся ось $-\infty < x < \infty$; точек разрыва нет. Приравнивание $y=0$ показывает, что функция имеет два нуля, $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$, т. е. получается три интервала знакопостоянства: $-\infty < x < 0$, $0 < x < 2$, $2 < x < \infty$. Подстановка произвольных значений из этих интервалов показывает, что на первом и втором функция отрицательна, а на третьем —положительна. Вертикальных асимптот нет. Вычисление невертикальных асимптот, проведенное в соответствии с правилами вычисления невертикальныхасимптот, показывает, что одна и та же прямая $y= x - 2/3$ является асимптотой графика как при $x\to\infty$, так и при $x\to-\infty$

Вычислив производную

$$y'=\frac{3x^2-4x}{3\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^2}}=\frac{3x-4}{3\sqrt[3]{(x-2)^2x}},$$

видим, что она имеет разрывы (обращается в бесконечность) при $x=0$ и $x=2$ и равна нулю при $x = 4/3$. Получается четыре интервала монотонности:

$-\infty < x < 0$; $0 < x < 4/3$; $4/3<x<2$; $2 < x <\infty$, и подстановка в y' произвольных значений из этих интервалов показывает, что интервалом убывания служит только второй, а остальные служат интервалами возрастания; поэтому третий и четвертый образуют единый интервал возрастания. Таким образом, смена характера монотонности происходит при $x = 0$ (максимум с максимальным значением $y = 0$) и при $x = 4/3$ (минимум с минимальным значением $y = -2^3\sqrt{4/3} = -1{,}058$).

Вычислив вторую производную, получим после преобразований

$$y''=-\frac{8}{9\sqrt[3]{(x-2)^5x^4}}$$

Она имеет разрыв там же, где первая производная (при $x = 0$ и $x = 2$), и совсем не имеет нулей. Получаются три участка «одинаковой выпуклости»: $-\infty < x < 0$, $0 < x < 2$, $2 < x <\infty$. Подстановка показывает, что на первом и втором участках выпуклость направлена книзу, а на третьем — кверху. Вычислим еще при $x = -1$:

$$y=-\sqrt[3]{3}=-1{,}44;\quad y'=\frac{7}{3\sqrt[3]{9}}=1{,}12;$$

при $x=1$

$$y=-1;\quad y'=-\frac{1}{3}=-0{,}33;$$

при x=3

$$y=\sqrt[3]{9}=2{,}08; \qquad y'=\frac{5}{3\sqrt[3]{3}}=1{,}16.$$

Получающийся график изображен на рис. 3.39, причем вычисленные его точки показаны кружками .

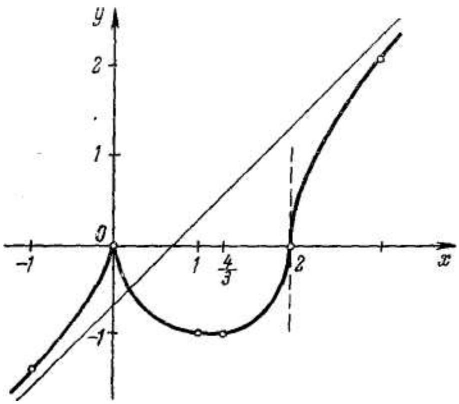


Рис.3.39

Расположение графика относительно своей асимптоты легко вывести из *асимптотического разложения* рассматриваемой функции, т. е. разложения, справедливого при достаточно больших $|x|$; это разложение в свою очередь вытекает из формулы

$$(1+x)^a=1+\binom{a}{1}x+\binom{a}{2}x^2+\binom{a}{3}x^3+\ldots \qquad (3.32)$$

а именно

$$y=\sqrt[3]{x^3-2x^2}=\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)}=x\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/3}=$$
$$=x\left[1+\frac{\frac{1}{3}}{1!}\left(-\frac{2}{x}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(-\frac{2}{x}\right)^2+\ldots\right]=$$
$$=x-\frac{2}{3}-\frac{4}{9x}+\text{члены высшего порядка малости.} \qquad (3.33)$$

Значит, при больших $x>0$ будет $y<x—2/3=y_{ac}$, а при больших $x<0$ будет $y>y_{ac}$. Кроме того, из равенства (3.33) непосредственно следует, что

$$y-\left(x-\frac{2}{3}\right)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0. \qquad (3.34)$$

Значит, если бы мы раньше не знали уравнения асимптоты $y= x—2/3$, мы вывели бы его из соотношения (3.34). Таким образом, мы получили еще один метод нахождения асимптоты.

Пример 1. Функция $y = x^2$— четная, так как $(—x)^2 = (x^2)$.

Пример 2. Функция $y=cosx$— четная, так как $cos (—x) = cosx$ **.**

Пример 3. Функция $y=x^3$—нечетная, так как $(—x)^3=—x^3$.

Пример 4. Функция $y= sinx$—нечетная, так как $\sin (—x)=—\sin x$.

Замечание . Так как знание одних свойств функции позволяет сделать вывод о других ее свойствах, то иногда порядок исследования целесообразно выбирать, исходя из конкретных особенностей данной функции. Так, например, если мы выяснили, что заданная функция непрерывна и дифференцируема, и нашли точки максимума и минимума этой функции, то тем самым мы уже определили и области возрастания и убывания функции.

Пример 5. Исследовать функцию

$$y=\frac{x}{1+x^2}$$

и построить ее график.

Решение. 1) Область существования функции — интервал $—\infty < x < +\infty$. Сразу отметим, что при $x < 0$ имеем $y < 0$, а при $x > 0$ имеем $y > 0$.

2) Функция всюду непрерывна.

3) Исследуем функцию на максимум и минимум: из равенства

$$y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0$$

находим критические точки;

$$x_1=-1, \quad x_2=1.$$

Исследуем характер критических точек:

при $x < 1$ имеем $y' > 0$;

при $x > 1$ имеем $y' < 0$.

Следовательно, при $x=—1$ функция имеет минимум:

$$y_{\min}=(y)_{x=-1}=-0{,}5.$$

Далее

при $x < -1$ имеем $y' < 0$;

при $x > -1$ имеем $y' > 0$.

Следовательно, при x=1 функция имеет максимум

$$y_{\max}=(y)_{x=1}=0{,}5.$$

4) Определим области возрастания и убывания функции

при $-\infty < x < -1$ имеем $y' < 0$—функция убывает,

при $-1 < x < 1$ имеем $y' > 0$—функция возрастает,

при $1 < x < +\infty$ имеем $y' < 0$—функция убывает.

5) Определим области выпуклости и вогнутости кривой и точки перегиба: из равенства

$$y'' = \frac{2x\,(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0$$

получим

$$x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

Исследуя y'' как функцию от x, находим:

при $-\infty < x < -\sqrt{3}$ $\quad y'' < 0$—кривая выпуклая,

при $-\sqrt{3} < x < 0$ $\quad y'' > 0$—кривая вогнутая,

при $0 < x < \sqrt{3}$ $\quad y'' < 0$—кривая выпуклая,

при $\sqrt{3} < x < +\infty$ $\quad y'' > 0$—кривая вогнутая.

Следовательно, точка с координатами $x = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}/4$ есть точка перегиба; точно так же точки (0, 0) и $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$ есть точки перегиба.

6) Определим асимптоты кривой :

при $x \to +\infty$ $\quad y \to 0$,

при $x \to -\infty$ $\quad y \to 0$.

Следовательно, прямая $y=0$ есть единственная наклонная асимптота.

Вертикальных асимптот кривая не имеет, так как ни для одного конечного значения x функция не стремится к бесконечности.

График исследуемой кривой изображен на рис. 3.40.

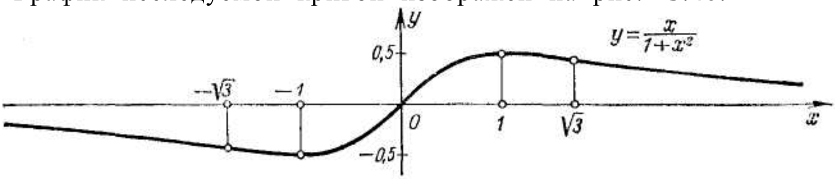


Рис.3.40

Пример 6. Исследовать функцию

$$y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$$

и построить ее график.

Решение. 1) Функция определена при всех значениях x.

2) Функция всюду непрерывна.

3) Исследуем функцию на максимум и минимум:

$$y'=\frac{4ax-3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2}}=\frac{4a-3x}{3\sqrt[3]{x(2a-x)^2}}.$$

Производная существует всюду, за исключением точек

$x_1 = 0$ и $x_2 = 2a$.

Исследуем предельные значения производной при $x\to-0$ и при $x\to+0$;

$$\lim_{x\to-0}\frac{4a-3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a-x)^2}}=-\infty,\qquad \lim_{x\to+0}\frac{4a-3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a-x)^2}}=+\infty$$

при $x < 0$ будет $y' < 0$, при $x > 0$ будет $y' > 0$.

Следовательно, при $x = 0$ функция имеет минимум. Значение функции в этой точке равно нулю.

Исследуем теперь функцию в другой критической точке $x_2 = 2a$. При $x\to 2a$ производная также стремится к бесконечности. Однако в данном случае для всех значений x, близких к $2a$ (находящихся как справа, так и слева от точки $2a$), производная отрицательна. Следовательно, в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. В точке $x_2 = 2a$, так же как и вблизи этой точки, функция убывает; касательная к кривой в этой точке вертикальна.

При $x = 4a/3$ производная обращается в нуль. Исследуем характер этой критической точки. Рассматривая выражение первой производной, замечаем, что

при $x < 4a/3$ будет $y' > 0$, при $x > 4a/3$ будет $y' < 0$.

Следовательно, при $x = 4a/3$ функция имеет максимум

$$y_{\max}=\frac{2}{3}a\sqrt[3]{4}.$$

4) На основании проведенного исследования получаем области возрастания и убывания функции:

при $-\infty < x < 0$ функция убывает,

при $0 < x < 4a/3$ функция возрастает,

при $4a/3 < x < +\infty$ функция убывает.

5) Определяем области выпуклости и вогнутости кривой и точки перегиба, вторая производная

$$y''=-\frac{8a^2}{9x^{4/3}(2a-x)^{5/3}}$$

ни в одной точке не обращается в нуль. Однако существуют две точки, в которых вторая производная терпит разрыв: это точки

$x_1=0$ и $x_2=2a$

Исследуем знак второй производной вблизи каждой из этих точек:

при $x < 0$ имеем $y'' < 0$—кривая обращена выпуклостью вверх;

при $x > 0$ имеем $y'' < 0$—кривая обращена выпуклостью вверх. Значит, точка с абсциссой $x = 0$ не является точкой перегиба.
При $x < 2a$ имеем $y'' < 0$ — кривая обращена выпуклостью
вверх; при $x > 2a$ имеем $y'' > 0$—кривая обращена выпуклостью вниз. Значит, точка $(2a; 0)$ на кривой является точкой перегиба.
6) Определяем асимптоты кривой:

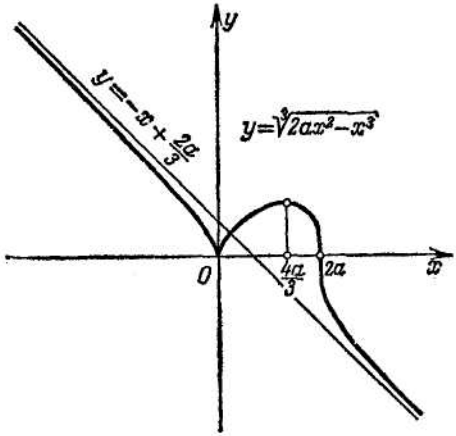


Рис.3.41

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2ax^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2a}{x} - 1} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x\right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2ax^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x^2} = \frac{2a}{3}.$$

Следовательно прямая

$$y = -x + \frac{2a}{3}$$

есть наклонная асимптота кривой

$$y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}.$$

График исследуемой функции изображен на рис. 3.41.

3.15. Исследование кривых, заданных параметрически

Пусть кривая задана параметрически и уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t). \end{aligned}\right\} \qquad (3.35)$$

В этом случае исследование и построение кривой проводятся аналогично тому, как это было сделано для кривой, заданной уравнением

$$y=f(x).$$

Вычисляем производные

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi'(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \psi'(t). \end{aligned}\right\} \qquad (3.36)$$

Для тех точек кривой, вблизи которых кривая является графиком некоторой функции $y=f(x)$, вычисляем производную

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad (3.37)$$

Находим значения параметра $t=t_1, t_2, \ldots, t_k$. при которых хотя бы одна из производных $\varphi'(t)$ или $\psi'(t)$ обращается в нуль или терпит разрыв. (Такие значения t мы будем называть критическими значениями.) По формуле (3.37) в каждом из интервалов (t_1, t_2), (t_2, t_3),... (t_{k-1}, t_k) а следовательно, и в каждом из интервалов (x_1, x_2), (x_2, x_3), ..., $(x_{k-1}\ x_k)$ (где $x_i=\varphi(t_i)$ определяем знак dy/dx, тем самым определяем области возрастания и убывания. Это дает также возможность определить характер точек, соответствующих значениям параметра $t_1\ t_2, \ldots, t_k$. Далее, вычисляем:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \qquad (3.38)$$

На основании этой формулы определяем направление выпуклости кривой в каждой точке.

Для нахождения асимптот находим такие значения t, при приближении к которым или x, или y стремятся к бесконечности, и такие значения t, при приближении к которым и x, и y стремятся к бесконечности. Затем производим исследование обычным способом.

Некоторые особенности, появляющиеся при исследовании кривых, заданных параметрически, выясним на примерах.

Пример 1. Исследовать кривую, заданную уравнениями

$$x = a\cos^3 t,$$
$$y = a\sin^3 t. \tag{3.39}$$

Решение. Величины x и y определены для всех значений t. Но так как функции $\cos^3 t$ и $\sin^3 t$ — периодические, с периодом 2π, достаточно рассмотреть изменение параметра t в пределах от 0 до 2π; при этом областью изменения x будет отрезок $[-a, a]$ и областью изменения y будет отрезок $[-a, a]$. Следовательно, рассматриваемая кривая асимптот не имеет. Далее, находим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3a\cos^2 t\sin t, \\ \frac{dy}{dt} &= 3a\sin^2 t\cos t. \end{aligned}\right\} \tag{3.40}$$

Эти производные обращаются в нуль при $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$. Определяем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t. \tag{3.41}$$

На основании формул (3.40), (3.41) составляем следующую таблицу:

Область изменения t	Соответствующая область изменения x	Соответствующая область изменения y	Знак dy/dx	Характер изменения y как функций от x ($y = f(x)$)
$0 < t < \pi/2$	$a > x > 0$	$0 < y < a$	—	Убывает
$\pi/2 < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	+	Возрастает
$\pi < t < 3\pi/2$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	—	Убывает
$3\pi/2 < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	+	Возрастает

Из таблицы следует, что уравнения (3.39) определяют две непрерывные функции вида $y=f(x)$, при $0 \le t \le \pi$, будет $y \ge 0$ (см. две первые строчки таблицы), при $\pi \le t \le 2\pi$ будет $y \le 0$ (см. две последние строчки таблицы). Из формулы (3.41) следует:

В этих точках касательная к кривой вертикальна. Далее, находим:

И этих точках касательная к кривой горизонтальна. Затем находим: Отсюда следует:

$$\lim_{t \to \pi/2} \frac{dy}{dx} = \infty$$

и

$$\lim_{x \to 3\pi/2} \frac{dy}{dx} = \infty,$$

В этих точках касательная к кривой вертикальна. Далее находим

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\pi} = 0, \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2\pi} = 0.$$

В этих точках касательная к кривой горизонтальна. Затем находим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a\cos^4 t \sin t}\ .$$

Отсюда следует

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \text{ при } 0 < t < \pi \text{— кривая вогнута,}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \text{ при } \pi < t < 2\pi \text{— кривая выпукла.}$$

На основании результатов исследования можем построить кривую (рис. 3.42). Эта кривая называется *астроидой.*

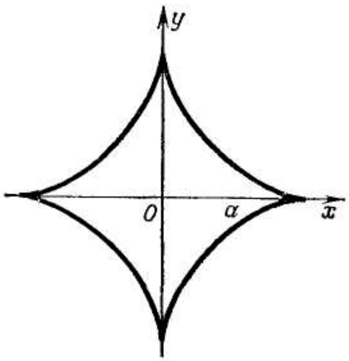


Рис.3.42

Пример 2. Построить кривую, заданную уравнениями (*декартов лист)*

$$x=\frac{3at}{1+t^3}, \quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}$$
(3.42)

Решение. Обе функции определены при всех значениях t, кроме
$t=-1$ при этом

$$\lim_{t\to -1-0} x=\lim_{t\to -1-0}\frac{3at}{1+t^3}=+\infty,$$

$$\lim_{t\to -1-0} y=\lim_{t\to -1-0}\frac{3at^2}{1+t^3}=-\infty;$$

$$\lim_{t\to -1+0} x=-\infty, \quad \lim_{t\to -1+0} y=+\infty.$$

Заметим, далее, что
$x=0, \quad y=0$ при $t=0$,
$x\to 0, \quad y\to 0$ при $t\to +\infty$,
$x\to 0, \quad y\to 0$ при $t\to -\infty$.
Найдем

$$\frac{dx}{dt} \text{ и } \frac{dy}{dt}:$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{6a\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}{(1+t^3)^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$
(3.43)

Для параметра t получаем следующие четыре критические значения:

$$t_1=-1, \quad t_2=0, \quad t_3=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad t_4=\sqrt[3]{2}.$$

Далее, находим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}.$$
(7.44)

На основании формул (3.42), (3.43), (3.44) составляем таблицу

Область изменения t	Соответствующая область изменения x	Соответствующая область изменения y	Знак dx/dy	Характер изменения y как функции от x $(y=f(x))$
$-\infty<t<-1$	$0<x<+\infty$	$0>y>-\infty$	-	Убывает
$-1<t<o$	$-\infty<x<0$	$+\infty\ y>0$	-	Убывает
$0<t<1/{}^3\sqrt{2}$	$0<x<a^3\sqrt{4}$	$0<y<a^3\sqrt{2}$	+	Возрастает
$1/{}^3\sqrt{}<t<{}^3\sqrt{2}$	$a^3\sqrt{4}>x>a\,{}^3\sqrt{2}$	$a^3\sqrt{2}<y<a\,{}^3\sqrt{4}$	-	Убывает
${}^3\sqrt{2}<t<+\infty$	$a^3\sqrt{2}>x>0$	$a^3\sqrt{4}>y>0$	+	Возрастает

Из формулы(7.44) находим

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=0\\ \left(\substack{x=0\\ y=0}\right)}}=0,\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\infty\\ \left(\substack{x=0\\ y=0}\right)}}=\infty.$$

Следовательно, начало координат кривая пересекает дважды, с касательной, параллельной оси *Ох,* и с касательной, параллельной оси *Оу.*

Далее,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\infty \quad \text{при} \quad t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad \left(x=a\sqrt[3]{4},\ y=a\sqrt[3]{2}\right).$$

В этой точке касательная к кривой вертикальна.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=0 \quad \text{при} \quad t=\sqrt[3]{2} \quad \left(x=a\sqrt[3]{2},\ y=a\sqrt[3]{4}\right).$$

В этой точке касательная к кривой горизонтальна. Исследуем вопрос о существовании асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1-0}\frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=$$

$$=\lim_{x\to-1+0}\left[\frac{3at^2}{1+t^3}-(-1)\frac{3at}{1+t^3}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-1-0}\left[\frac{3at(t+1)}{1+t^3}\right]=$$

$$=\lim_{t\to-1-0}\frac{3at}{1-t+t^2}=-a.$$

Следовательно, прямая $y = -x-a$ является асимптотой ветви кривой при $x \to +\infty$

Аналогичным образом найдем

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (y - kx) = -a.$$

Таким образом, найденная прямая является асимптотой и для ветви кривой при $x \to -\infty$.

На основании проведенного исследования строим кривую (рис. 3.43)

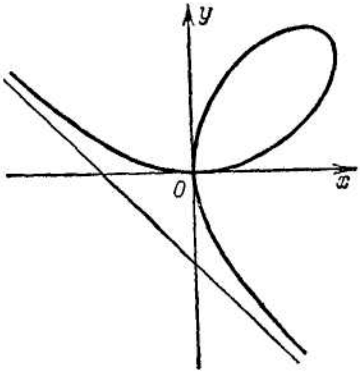


Рис. 3.43.

Микромодуль 5.

Индивидуальные тестовые задания

Найти экстремумы функций: **1.** $y = x^2 - 2x + 3$. *Отв.* $y_{\min} = 2$ при $x = 1$. **2.** $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. *Отв.* $y_{\max} = \frac{7}{2}$ при $x = 1$, $y_{\min} = 1$ при $x = 3$. **3.** $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$. *Отв.* $y_{\max} = 10$ при $x = 1$, $y_{\min} = -22$ при $x = 5$. **4.** $y = -x^4 + 2x^2$. *Отв.* $y_{\max} = 1$ при $x = \pm 1$, $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. **5.** $y = x^4 - 8x^2 + 2$. *Отв.* $y_{\max} = 2$ при $x = 0$, $y_{\min} = -14$ при $x = \pm 2$. **6.** $y = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$. *Отв.* Максимум при $x = -4$ и $x = 3$, минимум при $x = -3$ и $x = 4$. **7.** $y = 2 - (x-1)^{2/3}$. *Отв.* $y_{\max} = 2$ при $x = 1$. **8.** $y = 3 - 2(x+1)^{1/3}$.

Отв. Нет ни максимума, ни минимума. **9.** $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$. *Отв.* Минимум при $x=\sqrt{2}$, максимум при $x=-\sqrt{2}$. **10.** $y=\frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$. *Отв.* Максимум при $x=\frac{12}{5}$. **11.** $y=2e^x+e^{-x}$. *Отв.* Минимум при $x=-\frac{\ln 2}{2}$. **12.** $y=\frac{x}{\ln x}$. *Отв.* $y_{\min}=e$ при $x=e$. **13.** $y=\cos x+\sin x\ (-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2)$. *Отв.* $y_{\max}=\sqrt{2}$ при $x=\pi/4$. **14.** $y=\sin 2x-x\ \ (-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2)$. *Отв.* Максимум при $x=\pi/6$, минимум при $x=-\pi/6$. **15.** $y=x+\operatorname{tg}x$. *Отв.* Нет ни максимума, ни минимума. **16.** $y=e^x\sin x$. *Отв.* Минимум при $x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$, максимум при $x=2k\pi+\frac{3}{4}\pi$. **17.** $y=x^4-2x^2+2$. *Отв.* Максимум при $x=0$; два минимума при $x=-1$ и при $x=1$. **18.** $y=(x-2)^3(2x+1)$. *Отв.* $y_{\min}\approx-8{,}24$ при $x=1/8$. **19.** $y=x+\frac{1}{x}$. *Отв.* Минимум при $x=1$; максимум при $x=-1$. **20.** $y=x^2(a-x)^2$. *Отв.* $y_{\max}=a^4/16$ при $x=a/2$; $y_{\min}=0$ при $x=0$ и при $x=a$. **21.** $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{a-x}$. *Отв.* Максимум при $x=\frac{a^2}{a-b}$; минимум при $x=\frac{a^2}{a+b}$. **22.** $y=x+\sqrt{1-x}$. *Отв.* $y_{\max}=5/4$ при $x=3/4$; $y_{\min}=1$ при $x=1$. **23.** $y=x\sqrt{1-x}\ (x\leqslant 1)$. *Отв.* $y_{\max}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ при $x=\frac{2}{3}$. **24.** $y=\frac{x}{1+x^2}$. *Отв.* Минимум при $x=-1$; максимум при $x=1$. **25.** $y=x\ln x$. *Отв.* Минимум при $x=1/e$. **26.** $y=x\ln^2 x$. *Отв.* $y_{\max}=4e^{-2}$ при $x=e^{-2}$, $y_{\min}=0$ при $x=1$. **27.** $y=\ln x-\operatorname{arctg}x$. *Отв.* Функция возрастает. **28.** $y=\sin 3x-3\sin x$. *Отв.* Минимум при $x=\pi/2$; максимум при $x=3\pi/2$. **29.** $y=2x+\operatorname{arctg}x$. *Отв.* Нет экстремумов. **30.** $y=\sin x\cos^2 x$. *Отв.* Минимум при $x=\pi/2$; два максимума: при $x=\arccos\sqrt{2/3}$ и при $x=\arccos(-\sqrt{2/3})$. **31.** $y=\arcsin(\sin x)$. *Отв.* Максимум при $x=(4m+1)\pi/2$; минимум при $x=(4m+3)\pi/2$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функции на указанных отрезках: **32.** $y=-3x^4+6x^2-1\ (-2\leqslant x\leqslant 2)$. *Отв.* Наибольшее значение $y=2$ при $x=\pm1$, наименьшее $y=-25$ при $x=\pm2$. **33.** $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1\ (-1\leqslant x\leqslant 5)$. *Отв.* Наибольшее значение $y=23/3$ при $x=5$, наименьшее значение $y=-13/3$ при $x=-1$. **34.** $y=\frac{x-1}{x+1}\ (0\leqslant x\leqslant 4)$. *Отв.* Наибольшее значение $y=3/5$ при $x=4$, наименьшее значение $y=-1$ при $x=0$. **35.** $y=\sin 2x-x\ (-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2)$. *Отв.* Наибольшее значение $y=\pi/2$ при $x=-\pi/2$, наименьшее значение $y=-\pi/2$ при $x=\pi/2$.

36. Из квадратного жестяного листа со стороной a желают сделать открытый сверху ящик возможно большего объема, вырезая равные квадраты по углам, удаляя их и затем загибая жесть, чтобы образовать бока ящика. Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов? *Отв.* $a/6$.

37. Доказать, что из всех прямоугольников, которые могут быть вписаны в данный круг, наибольшую площадь имеет квадрат. Показать также, что у квадрата и периметр будет наибольший.

38. Показать, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.

39. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, имеющий гипотенузой отрезок h. *Отв.* Длина каждого катета равна $h/\sqrt{2}$.

40. Найти высоту прямого цилиндра с наибольшим объемом, который может быть вписан в шар радиуса R. *Отв.* Высота равна $2R/\sqrt{3}$.

41. Найти высоту прямого цилиндра с наибольшей боковой поверхностью, который может быть вписан в данный шар радиуса R. *Отв.* Высота равна $R\sqrt{2}$.

42. Найти высоту прямого конуса с наименьшим объемом, описанного около данного шара радиуса R. *Отв.* Высота равна $4R$ (объем конуса равен двум объемам шара).

43. Резервуар, который должен иметь квадратное дно и быть открытым сверху, нужно выложить внутри свинцом. Каковы должны быть размеры резервуара емкостью в 32 *л*, чтобы выкладка требовала наименьшего количества свинца? *Отв.* Высота 0,2 *м*, сторона основания 0,4 *м* (т. е. сторона основания должна быть вдвое больше высоты).

44. Кровельщик желает сделать открытый желоб наибольшей вместимости, у которого дно и бока были бы шириной 10 *см* и бока были бы одинаково наклонены ко дну. Какова должна быть ширина желоба наверху? *Отв.* 20 *см*.

45. Доказать, что конический шар данной вместимости требует наименьшего количества материи, когда его высота в $\sqrt{2}$ раза больше радиуса основания.

46. Требуется изготовить цилиндр, открытый сверху, стенки и дно которого имеют данную толщину. Каковы должны быть размеры цилиндра, чтобы при данной вместимости на него пошло наименьшее количество материала? *Отв.* Если R — внутренний радиус основания, v — внутренний объем цилиндра, то $R=\sqrt[3]{v/\pi}$.

47. Требуется построить котел, состоящий из цилиндра, завершенного двумя полусферами, со стенками постоянной толщины так, чтобы при данном объеме v он имел наименьшую наружную поверхность. *Отв.* Котел должен иметь форму шара с внутренним радиусом $R=\sqrt[3]{3v/4\pi}$.

48. Построить равнобочную трапецию, которая при данной площади S имела бы наименьший периметр; угол при основании трапеции равен α. *Отв.* Длина боковой стороны равна $\sqrt{S/\sin\alpha}$.

49. Вписать в данный шар радиуса R правильную треугольную призму наибольшего объема. *Отв.* Высота призмы равна $2R/\sqrt{3}$.

50. Около полушара радиуса R требуется описать конус наименьшего объема; плоскость основания конуса совпадает с плоскостью основания полушара; найти высоту конуса. *Отв.* Высота конуса равна $R\sqrt{3}$.

51. Описать около данного цилиндра радиуса r прямой конус наименьшего объема, полагая, что плоскости и центры круговых оснований цилиндра и конуса совпадают. *Отв.* Радиус основания конуса равен $3r/2$.

52. Из листа, имеющего форму круга радиуса R, вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить воронку наибольшей вместимости. *Отв.* Центральный угол сектора равен $2\pi\sqrt{2/3}$.

53. Из всех круглых цилиндров, вписанных в данный куб с ребром a таким образом, что оси их совпадают с диагональю куба, а окружности оснований касаются его граней, найти наибольший по объему. *Отв.* Высота цилиндра равна $a\sqrt{3}/3$; радиус основания равен $a/\sqrt{6}$.

54. В прямоугольной системе координат дана точка (x_0, y_0), лежащая в первом квадранте. Провести через эту точку прямую так, чтобы она образовала с положительными направлениями осей координат треугольник наименьшей площади. *Отв.* Прямая отсекает на осях отрезки $2x_0$ и $2y_0$, т. е. имеет уравнение $\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1$.

55. На оси параболы $y^2=2px$ дана точка на расстоянии a от вершины; найти абсциссу ближайшей к ней точки кривой. *Отв.* $x=a-p$.

56. Принимая, что прочность бруска с прямоугольным поперечным сечением прямо пропорциональна ширине и кубу высоты, найти ширину бруска наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна диаметром 16 *см*. *Отв.* Ширина равна 8 *см*.

57. Миноносец стоит на якоре в 9 *км* от ближайшей точки берега; с миноносца надо послать гонца в военный лагерь, расположенный в 15 *км*, считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега. Если гонец может делать пешком по 5 *км* в час, а на веслах по 4 *км* в час, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы поспеть в лагерь в кратчайшее время. *Отв.* В 3 *км* от лагеря.

58. Точка перемещается прямолинейно по плоскости в среде, расположенной вне линии MN со скоростью v_1, а по линии MN со скоростью v_2. По какому пути она переместится в наименьший промежуток времени из точки A в точку B, расположенную на линии MN? Расстояние точки A от линии MN равно h, расстояние проекции α точки A на линию MN от B равно a. *Отв.* Если ABC — путь точки, то $\frac{\alpha C}{AC}=\frac{v_1}{v_2}$ при $\frac{\alpha B}{AB}\geqslant\frac{v_1}{v_2}$ и $\alpha C=\alpha B$ при $\frac{\alpha B}{AB}<\frac{v_1}{v_2}$.

59. Груз w подымают рычагом, причем сила F приложена к одному концу, а точка опоры находится на другом конце рычага. Если груз привешен к точке, находящейся на расстоянии a сантиметров от точки опоры, а стержень рычага весит v граммов на каждый сантиметр длины, то какова должна быть длина рычага, чтобы сила, потребная для поднятия груза, была наименьшая? *Отв.* $x=\sqrt{2aw/v}$ *см*.

60. При n измерениях неизвестной величины x получены отсчеты: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Показать, что сумма квадратов погрешностей $(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\ldots+(x-x_n)^2$ будет наименьшей, если за x принять число $(x_1+x_2+\ldots+x_n)/n$.

61. Чтобы по возможности уменьшить трение жидкости о стенки канала, площадь, смачиваемая водой, должна быть возможно меньшей. Показать, что лучшей формой открытого прямоугольного канала с заданной площадью поперечного сечения является такая, при которой ширина канала превышает вдвое его высоту.

Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривых: **62.** $y=x^5$. *Отв.* При $x<0$ кривая выпукла; при $x>0$ кривая вогнута; при $x=0$ точка перегиба. **63.** $y=1-x^2$. *Отв.* Кривая всюду выпукла. **64.** $y=x^3-3x^2-9x+9$. *Отв.* При $x=1$ точка перегиба. **65.** $y=(x-b)^3$. *Отв.* При $x=b$ точка перегиба. **66.** $y=x^4$. *Отв.* Кривая всюду вогнута. **67.** $y=(x^2+1)^{-1}$. *Отв.* При $x=\pm 1/\sqrt{3}$ точки перегиба. **68.** $y=\operatorname{tg} x$. *Отв.* При $x=n\pi$ точки перегиба. **69.** $y=xe^{-x}$. *Отв.* При $x=2$ точка перегиба. **70.** $y=a-\sqrt[3]{x-b}$. *Отв.* При $x=b$ точка перегиба. **71.** $y=a-\sqrt[5]{(x-b)^2}$. *Отв.* Кривая не имеет точек перегиба.

Найти асимптоты следующих кривых: **72.** $y=\frac{1}{x-1}$. *Отв.* $x=1$; $y=0$. **73.** $y=\frac{1}{(x+2)^3}$. *Отв.* $x=-2$; $y=0$. **74.** $y=c+\frac{a^3}{(x-b)^2}$. *Отв.* $x=b$, $y=c$. **75.** $y=e^{\frac{1}{x}}-1$. *Отв.* $x=0$; $y=0$. **76.** $y=\ln x$. *Отв.* $x=0$. **77.** $y^3=6x^2+x^3$. *Отв.* $y=x+2$. **78.** $y^3=a^3-x^3$. *Отв.* $y+x=0$. **79.** $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$. *Отв.* $x=2a$. **80.** $y^2(x-2a)=x^3-a^3$. *Отв.* $x=2a$. $y=\pm(x+a)$.

Исследовать функции и построить их графики: **81.** $y=x^4-2x+10$. **82.** $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$. **83.** $y=e^{-\frac{1}{x}}$. **84.** $y=\frac{6x}{1+x^2}$. **85.** $y=\frac{4+x}{x^2}$. **86.** $y=\frac{x}{x^2-1}$. **87.** $y=\frac{x+2}{x^3}$. **88.** $y=\frac{x^2}{1+x}$. **89.** $y^2=x^3-x$. **90.** $y=\frac{x^3}{3-x^2}$. **91.** $y=\sqrt[3]{x^2}+2$. **92.** $y=x-\sqrt[3]{x^3+1}$. **93.** $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. **94.** $y=xe^{-x}$. **95.** $y=x^2e^{-x^2}$. **96.** $y=x-\ln(x+1)$. **97.** $y=\ln(x^2+1)$. **98.** $y=\sin 3x$. **99.** $y=x+\sin x$. **100.** $y=x\sin x$. **101.** $y=e^{-x}\sin x$. **102.** $y=\ln\sin x$. **103.** $y=\frac{\ln x}{x}$. **104.** $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\frac{1}{2}t. \end{cases}$ **105.** $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3. \end{cases}$ **106.** $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$ **107.** $\begin{cases} x=ae^t\cos t, \\ y=ae^t\sin t. \end{cases}$

Дополнительные задачи

Найти асимптоты линий: **108.** $y=\frac{x^2+1}{1+x}$. *Отв.* $x=-1$; $y=x-1$. **109.** $y=x+e^{-x}$. *Отв.* $y=x$. **110.** $2y(x+1)^2=x^3$. *Отв.* $x=-1$; $y=\frac{1}{2}x-1$. **111.** $y^3=a^3-x^2$. *Отв.* Асимптот нет. **112.** $y=e^{-2x}\sin x$. *Отв.* $y=0$. **113.** $y=e^{-x}\sin 2x+x$. *Отв.* $y=x$. **114.** $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$. *Отв.* $x=-\frac{1}{e}$; $y=x+\frac{1}{e}$. **115.** $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$. *Отв.* $x=0$; $y=x$. **116.** $x=\frac{2t}{1-t^2}$, $y=\frac{t^2}{1-t^2}$. *Отв.* $y=\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Исследовать функции и построить их графики: **117.** $y=|x|$. **118.** $y=\ln|x|$. **119.** $y^2=x^3-x$. **120.** $y=(x+1)^2(x-2)$. **121.** $y=x+|x|$. **122.** $y=\sqrt[3]{x^2}-x$. **123.** $y=x^3\sqrt{x+1}$. **124.** $y=\frac{x^2}{2}-\ln x$. **125.** $y=\frac{x^2}{2}\ln x$. **126.** $y=\frac{1}{e^x-1}$. **127.** $y=\frac{x}{\ln x}$. **128.** $y=x+\frac{\ln x}{x}$. **129.** $y=x\ln x$. **130.** $y=e^{\frac{1}{x}}-x$. **131.** $y=|\sin 3x|$. **132.** $y=\frac{\sin x}{x}$. **133.** $y=x\operatorname{arctg} x$. **134.** $y=x-2\operatorname{arctg} x$. **135.** $y=e^{-2x}\sin 3x$. **136.** $y=|\sin x|+x$. **137.** $y=\sin(x^2)$. **138.** $y=\cos^3 x+\sin^3 x$. **139.** $y=\frac{x+|x|}{2}$. **140.** $y=\frac{x-|x|}{2}$. **141.** $y=\sin\left(\frac{x+|x|}{2}\right)-\frac{x-|x|}{2}$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$. **142.** $y=\cos\left(\frac{x-|x|}{2}\right)-\frac{x+|x|}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)$. **143.** $y=\frac{1}{2}(3x+|x|)+1$. **144.** $y=\frac{1}{2}[3(x-1)+|x-1|]+1$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$.

Модуль 4

Интегральное исчисление

Микромодуль 6

Неопределенный интеграл

4.1. Элементарные методы интегрирования

С первых классов средней школы все привыкли к тому, что в математике все действия в основном группируются парами - прямое и обратное: сложение и вычитание (действие, обратное сложению), умножение и деление (действие, обратное умножению) и т. д. При этом именно наличие обратных действий дает возможность решать наиболее содержательные задачи. Ранее нами было введено еще одно действие – дифференцирование. Обратное дифференцированию действие называется *интегрированием.*

Что такое действие дифференцирования? При помощи дифференцирования ищется производная от заданной функции. Следовательно, обратное действие—интегрирование должно заключаться в следующем: задана производная, требуется найти функцию.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для всех x из области определения функции выполняется равенство

$$F'(x)=f(x). \qquad (4.1)$$

Например, для функции $f(x) = \cos x$ первообразной будет функция $F(x)= \sin x$, так как $F'(x)= (\sin x)' = \cos x = f(x)$ для всех x; для функции x^2 первообразной будет функция $1/3x^3$, так как $(1/3x^3)' =1/3•3x^3=x^2$ для всех x; для скорости v точки первообразной будет путь s, который прошла эта точка, так как $s'_t = v$, и так далее.

Заметим, что если для функции $F(x)$ установлено равенство

$$F(x)=f(x)dx, \qquad (4.2)$$

то $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$. Действительно, деля (4.2) на dx, получаем

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=F'(x).$$

И обратно, из (4.1), умножив обе части равенства на dx, получаем (4.2).

Так как первообразная имеет производную, то она непрерывна. Но верно и более глубокое утверждение: если функция $f(x)$ непрерывна, то она имеет первообразную. В интегральном исчислении мы будем иметь дело только с непрерывными функциями.

Основная задача дифференциального исчисления — это задача о нахождении производной и непосредственно связанная с ней задача о нахождении дифференциала заданной функции.

Основная задача интегрального исчисления — это задача о нахождении первообразной для заданной функции, т. е. о нахождении функции по заданной ее производной. Эта задача сложнее, чем задача дифференцирования. (Вообще «обратные» задачи обычно сложнее «прямых»: например, задача об извлечении корня сложнее задачи о возведении в степень.) В частности, мы увидим, что первообразная от любой элементарной функции, хотя и всегда существует, но далеко не всегда является элементарной функцией.

Первообразная у заданной функции не одна; например, не только $(x^3)'=3x^2$, но и $(x^3+5)'=3x^2$. (И в других примерах решение «обратных» задач часто бывает неоднозначным.) Вообще, если функция $f(x)$ имеет первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$, то $F_1'=f$, $F_2'=f$, т. е. $F_1'-F_2'=0$, $(F_1-F_2)'=0$, $F_1-F_2=const$, $F_1=F_2+\text{const}$. Таким образом, *любые две первообразные к одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое;* чтобы получить все первообразные для данной функции, надо взять какую-нибудь одну и прибавить к ней *произвольную постоянную.* Например, совокупность всех первообразных к функции $3x^2$ дается формулой x^3+C, где C—произвольная постоянная, придавая которой численные значения, мы получим индивидуальные первообразные:

$$x^3,\ x^3+5,\ x^3-\sqrt{2},\ x^3+\frac{5}{6}\ \text{и т. п.}$$

Естественно возникает вопрос: как найти все первообразные для заданной функции? Частично ответ дается следующей теоремой.

Теорема . *Если F (x) есть первообразная для f (x), на (a, b), то все первообразные для f (x) содержатся в формуле,*

$$F(x)+C \tag{4.3}$$

Пусть $\Phi(x)$—любая первообразная для $f(x)$. Тогда $\Phi'(x)=f(x)$, откуда

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

В силу теоремы о признаке постоянства функции отсюда следует, что $\Phi((x) - F(x) = C$, или $\Phi(x) = F(x) + C$, а так как $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ при любом С, то теорема доказана.

Определение 2. Совокупность всех первообразных для заданной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается так:

$$\int f(x)\,dx$$

(читается: «интеграл эф от икс дэ икс»); $f(x)$ называется *подынтегральной функцией,* произведение $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением,* $\int$—*знаком интеграла,* x - *переменной интегрирования.*

Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, то в силу приведенной выше теоремы

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Например

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C;$$

при этом говорят, что проинтегрированы функция cos x и функция x^2 (или взяты интегралы от функции cos x и от функции x^2). Вычисление интеграла от заданной функции называется интегрированием этой функции. Таким образом, интегрирование функции $f(x)$ — это отыскание ее первообразной $F(x)$ т. е. такой функции $F(x)$, что $F'(x)=f(x)$. Иными словами, интегрирование заключается в том . чтобы по производной $F^r(x)$ найти саму функцию $F(x)$.

Таким образом, если

$$F'(x) = f(x), \text{ то } \int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{4.4}$$

и, наоборот.

Например,

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

Другими словами, неопределенный интеграл — это *общая первообразная,* содержащая произвольную постоянную, при каждом численном значении которой получается *частная первообразная.*

Из формулы (4.4) следует, что

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)\,dx;$$

$$\int (dF(x)) = F(x) + C. \tag{4.5}$$

Таким образом, *знаки дифференциала и интеграла уничтожают друг друга. Результат вычисления неопределенного интеграла всегда можно проверить, взяв производную от ответа;* при этом должна получиться подынтегральная функция. Каждой формуле дифференциального исчисления отвечает некоторая формула интегрального исчисления.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл пред-ставляет совокупность (семейство) кривых, каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых параллельно самой себе вверх или вниз, т. е. вдоль оси *Оу*.

Естественно возникает вопрос: для всякой ли функции *f(x)* су-ществуют первообразные (а значит, и неопределенный интеграл)? Оказывается, что не для всякой. Заметим, однако, без доказательства, что *если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то для этой функции существует первообразная* (а значит, и *неопределенный интеграл)*.

Выяснению методов, с помощью которых находятся первообразные (и неопределенные интегралы) от некоторых классов элементарных функций, посвящен настоящий микромодуль.

Нахождение первообразной для данной функции *f(x)* называется *интегрированием* функции *f(x)*.

Заметим следующее: если производная от элементарной функции всегда является элементарной функцией, то первообразная от элементарной функции может оказаться и не представимой с помощью конечного числа элементарны функций.

Из определения 2 следует:

1. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е. если F' (x) =f(x), то и*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x). \tag{4.6}$$

Последнее равенство нужно понимать в том смысле, что производная от любой первообразной равна подынтегральной функции.

2. *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению*

$$d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)\,dx. \tag{4.7}$$

Это получается на основании формулы (4.6).

3. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная*

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

Справедливость последнего равенства легко проверить дифференцированием (дифференциалы от обеих частей равенства равны *dF(x)).*

Простейшие интегралы. Простейшие интегралы получаются в результате обращения формул для производных основных элементарных функций . Например, из формулы $(\sin x)' = \cos x$ получаем

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C \tag{4.8}$$

(см. формулу (4.4)). Формулу $(\cos x)' = —\sin x$: лучше переписать в виде $(— \cos x)' = \sin x$, откуда получаем

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C.$$

Аналогично

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg} x+C; \text{ пишут просто } \int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C. \tag{4.9}$$

Из формулы

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

вытекает, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\arccos x+C. \tag{4.10}$$

На первый взгляд кажется, что эта формула противоречит предыдущей. Но это не так: на основании формулы $\arcsin x+ \arccos x =\pi/2$ из (4.9) следует, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \frac{\pi}{2} + C =$$
$$= -\arccos x + C_1, \text{ где } C_1 = \frac{\pi}{2} + C.$$

Итак, дело в том, что в *правых частях формул* (4.9) *и* (4.10) *произвольные постоянные различны.* Такое различие формы ответов бывает и в других примерах неопределенных интегралов. Естественно, что из двух формул (4.9) и (4.10) надо пользоваться только одной, например (4.9).

Из дальнейших формул дифференцирования получаем

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Недостатком последней формулы является то, что функция $1/x$, от которой берется первообразная, существует как при $x>0$, так и при $x<0$, тогда как правая часть существует только при $x>0$.

Однако легко проверить формулу дифференцирования $(\ln|x|)'=1/x$; действительно, при $x > 0$ будет $|x|=x$, и потому получаем обычную производную логарифма, а при $x <$; 0 будет $|x|=—x$, т. е. $(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=(1/-x)(-1)= 1/x$. Поэтому как при $x>0$, так и при $x<0$ можно написать

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \tag{4.11}$$

Далее получаем

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad \text{в частности,} \quad \int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n} + C, \quad \text{т. е.} \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Конечно, последняя формула при $n= -1$ не годится, так как тогда знаменатель обращается в нуль. Но в этом случае интеграл приобретает вид $\int \frac{dx}{x}$ вычисляется по формуле (4.11).

Далее,

$$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C; \quad \int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C; \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$

Найденную сейчас формулу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$$

можно доказать без всяких гиперболических функций, при помощи
дифференцирования ответа. Более того, так как $(\ln|u|)' = (1/u)\, u'_x$, то

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}},$$

откуда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$$

при постоянном a любого знака.

Выведенные формулы *(табличные интегралы)* следует выписать в виде таблицы и запомнить наизусть, так как они широко применяются при вычислении интегралов. В частности, с помощью этих формул вычисляются (или, как говорят, *берутся)* некоторые «почти табличные» интегралы. Для этого исходят из табличной формулы и стараются изменить ответ так, чтобы производная от него давала подынтегральную функцию; этот метод *непосредственного интегрирования,* по существу, состоит просто в применении формулы (4.4). Например, при вычислении интеграла

$$\int \cos 3x\, dx \tag{4.12}$$

естественно вспомнить формулу (10.8). Однако ответ $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$ неправильный, так как производная от правой части равна $3\cos 3x$, а не $\cos 3x$, как должно быть. Но если правую часть разделить на 3, то и производная разделится на 3. Итак, $(1/3\sin 3x) = \cos 3x$, *т.е.*

$$\int \cos 3x\, dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

Подобным образом найдем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+5)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin(2x+5)+C, \quad \int \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3|+C,$$

$$\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{2}} = \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}+C \text{ и т. д.} \tag{4.13}$$

Вообще, если найден интеграл

$$\int f(x)\, dx = F(x)+C,$$

то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \qquad (a,\ b = \mathrm{const}).$$

Таблица интегралов

Прежде чем приступить к изложению методов интегрирования, приведем таблицу интегралов от простейших функций.

Непосредственно из таблицы производных вытекает таблица интегралов. (Справедливость написанных в ней равенств легко проверить дифференцированием, т. е. установить, что производная от правой части равняется подынтегральной функции.)

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$. (Здесь и в последующих формулах под C понимается произвольная постоянная.)

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

7. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C.$

8. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C.$

9. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

10. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

11′. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

13′. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Замечание. В таблице производных нет формул, соответствующих формулам 7, 8, 11', 12, 13' и 14. Однако справедливость последних также легко устанавливается с помощью дифференцирования.

В случае формулы 7 имеем:

$$(-\ln|\cos x|)' = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

следовательно,

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C.$$

В случае формулы 8 имеем

$$(\ln|\sin x|)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x,$$

следовательно,

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C.$$

В случае формулы 12 имеем

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)' = \frac{1}{2a}[\ln|a+x| - \ln|a-x|]' = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right]$$

следовательно,

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

В случае формулы 14 имеем

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Аналогично проверяются формулы 11' и 13'. Заметим, что эти формулы выведены из формул 11 и 13 .

Простейшие свойства неопределенного интеграла. Эти свойства вытекают из аналогичных свойств производной . Например,

$$\int [f(x) \pm \varphi(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int \varphi(x)\, dx, \tag{4.14}$$

т. е. *интеграл от суммы равен сумме интегралов.* Для доказательства надо взять производные от левой и от правой частей и заметить, что в силу первой формулы (4.5) и свойства «производная суммы равна сумме производных» результаты дифференцирования равны. Но если производные равны, то функции могут различаться лишь на постоянное слагаемое, которое в формуле (4.14) писать не нужно, так как знаки неопределенных интегралов включают в себя произвольные постоянные слагаемые.

Аналогично проверяется, что

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx \qquad (A = \text{const}), \tag{4.15}$$

т. е. *постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.* Применение формул (4.14) и (4.15) часто дает возможность представить заданный интеграл в виде суммы табличных интегралов, после чего произвести почленное интегрирование и написать общий ответ (это — так называемый *метод разложения).* Приведем несколько примеров:

$$\int (3x^3 - 2x + 5)\,dx = \int (3x^3)\,dx - \int (2x)\,dx + \int 5\,dx =$$

$$= 3\int x^3 dx - 2\int x\,dx + 5\int dx = 3\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2} + 5x + C =$$

$$= \frac{3}{4}x^4 - x^2 + 5x + C \tag{4.16}$$

(конечно, надо писать только одну постоянную, так как сумма произвольных постоянных дает произвольную постоянную);

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\,a\,\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

аналогично

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (a > 0). \tag{4.17}$$

Другие примеры:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C;$$

$$\int \frac{1}{x(x-1)} dx = \int \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx =$$
$$= \ln|x-1| - \ln|x| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C;$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \int \frac{(x+a)-(x-a)}{2a(x-a)(x+a)} dx =$$
$$= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Прием представления заданной дроби в виде суммы дробей более простого вида, примененный при вычислении двух последних интегралов, является довольно общим. Он состоит в том, что знаменатель разлагают на множители, после чего стараются представить числитель в виде комбинации множителей, стоящих в знаменателе. Если это удастся, то после разложения дроби на сумму нескольких дробей можно произвести сокращение в каждом из слагаемых.

Приведем еще полезный пример. Пусть надо вычислить $\int \sin 5x \cos 3x\, dx$. Из тригонометрии известна формула

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)].$$

Поэтому

$$\int \sin 5x \cos 3x\, dx = \int \frac{\sin 8x + \sin 2x}{2} dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

В аналогичных случаях применяются также формулы

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Например

$$\int \sin^2 3x\, dx = \int \frac{1-\cos 6x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

Отметим еще один интересный прием, основанный на применении комплексных функций от вещественного аргумента, для которых все формулы интегрирования остаются в силе. Ясно, что если такую функцию проинтегрировать, то ее вещественная и мнимая части тоже проинтегрируются, т.е.

$$\int \mathrm{Re} = \mathrm{Re} \int, \int \mathrm{Im} = \mathrm{Im} \int.$$

Это дает возможность, например, вычислить с помощью формулы Эйлера такой вещественный интеграл:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \int \mathrm{Re} \left[e^{ax} e^{ibx}\right] dx = \mathrm{Re} \int e^{(a+ib)x} \, dx =$$

$$= \mathrm{Re} \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + C = \mathrm{Re} \frac{e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)(a - ib)}{a^2+b^2} + C =$$

$$= e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2+b^2} + C.$$

Интегрирование по частям. К сожалению, не существует формулы, выражающей интеграл от произведения функций через интегралы от сомножителей. С этим связано то обстоятельство, что в отличие от производных *интеграл от элементарной функции не всегда является элементарной функцией.* Например , интегралы

$\int \sin x \, dx$ и $\int \frac{1}{x} \, dx$ — табличные, тогда как интеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx$ не выражается через основные элементарные функции («не берется в элементарных функциях»). Как быть с такими, неэлементарными функциями, мы скажем позже. Тем не менее, если проинтегрировать обе части формулы $(uv)' = u'v + uv'$, получится

$$uv = \int u'v \, dx + \int uv' dx,$$

т.е.

$$\int uv' dx = uv - \int u'v \, dx, \tag{4.18}$$

или, что то же,

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du. \tag{4.19}$$

Формула (4.18) и равносильная ей формула (4.19) называются *формулами интегрирования по частям.* При применении формулы (4.18) подынтегральная функция разлагается на два множителя (u и v'), из которых один дифференцируется, а второй интегрируется; другими словами, мы переходим к интегралу, у которого вместо u стоит u', а вместо v' стоит v. После такого преобразования иногда может получиться табличный интеграл или интеграл более простой, чем исходный.

Приведем несколько примеров. При вычислении интеграла $\int x^2 \ln x\, dx$ выгодно продифференцировать $\ln x$, так как тогда получится степенная функция, которая проще логарифмической; правда, при этом второй множитель (x^2) придется интегрировать, но он и *после* интегрирования останется степенной функцией. Итак, обозначаем

$$u=\ln x, \quad dv=x^2dx,$$

откуда

$$v=\frac{x^3}{3}$$

и

$$\int x^2 \ln x\, dx=\ln x\,\frac{x^3}{3}-\int \frac{x^3}{3}\, d(\ln x)=\frac{x^3}{3}\ln x-\int \frac{x^2}{3}\, dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C.$$

Отметим, что при вычислении v не надо было писать произвольную постоянную, т. е. писать $v = (x^3/3) + C$, так как в формуле (4.18) v является какой-то одной, индивидуальной функцией.

Аналогичным образом часто стараются продифференцировать функции arctg x и arcsin x, так как после этого получаются более простые функции.

При вычислении интеграла $\int x^2 \sin 3x dx$ следует дифференцировать степень, так как при этом показатель степени понижается на единицу (поэтому интегрировать по частям придется два раза); в то же время при дифференцировании синуса, как и при его интегрировании, он не упрощается и не усложняется:

$$\int x^2 \sin 3x\, dx=\left|\begin{matrix} u=x^2, & dv=\sin 3x dx \\ du=2xdx, & v=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{x^2}{3}\cos 3x+\int \frac{1}{3}\cos 3x\cdot 2xdx=\left|\begin{matrix} u=x, & dv=\cos 3xdx \\ du=dx, & v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{x^2}{3}\cos 3x+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}\sin 3x-\int \frac{1}{3}\sin 3xdx\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{9}x\sin 3x+\frac{2}{27}\cos 3x+C.$$

Вспомогательные записи здесь отделены вертикальными черточками.

Бывает так, что после интегрирования по частям и преобразований в правой части получается исходный интеграл, но с другим коэффициентом. Тогда, приводя подобные члены, можно этот интеграл вычислить. Например,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{vmatrix} u=\sqrt{1-x^2}, & dv=dx \\ du=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, & v=x \end{vmatrix} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \arcsin x.$$

Перенеся полученный интеграл в левую часть (отчего в правой части может остаться постоянное слагаемое, так как неопределенный интеграл известен лишь с точностью до такого слагаемого), получим

$$2\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C,$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C_1 \quad \left(C_1 = \frac{C}{2}\right).$$

Рассмотрим еще ряд примеров

Пример 1. Требуется вычислить $\int \operatorname{arctg} x\,dx$. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$; тогда

$$du = \frac{dx}{1+x^2},\ v = x.$$

Следовательно,

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C.$$

Пример 2. Требуется вычислить

$$\int x^2e^x\,dx.$$

Положим $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$; тогда

$$du = 2x\,dx,\ v = e^x,$$

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx.$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям, полагая,

$$u_1 = x, \qquad du_1 = dx,$$
$$dv_1 = e^x dx, \qquad v_1 = e^x.$$

Тогда

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Окончательно будем иметь:

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2-2x+2) + C.$$

Пример 3. Требуется вычислить

$$\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx.$$

Положим

$$u=x^2+7x-5,\ dv=\cos 2x\,dx;$$

тогда

$$du=(2x+7)\,dx,\ v=\frac{\sin 2x}{2},$$

$$\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx=(x^2+7x-5)\frac{\sin 2x}{2}-\int (2x+7)\frac{\sin 2x}{2}\,dx.$$

Применяя метод интегрирования по частям к последнему интегралу, принимая

$$u_1=\frac{2x+7}{2},\ dv_1=\sin 2x\,dx;$$

тогда

$$du_1=dx,\quad v_1=-\frac{\cos 2x}{2};$$

$$\int \frac{2x+7}{2}\sin 2x\,dx=\frac{2x+7}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)-\int\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx=$$
$$=-\frac{(2x+7)\cos 2x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

Окончательно будем иметь:

$$\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx=(x^2+7x-5)\frac{\sin 2x}{2}+(2x+7)\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+C=$$
$$=(2x^2+14x-11)\frac{\sin x}{4}+(2x+7)\frac{\cos 2x}{4}+C.$$

Пример 4.

$$I=\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=?$$

Произведем тождественные преобразования. Умножим и разделим подынтегральную функцию на $\sqrt{a^2-x^2}$:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$
$$=a^2\arcsin\frac{x}{a}-\int x\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям, полагая $u=x,\ du=dx$

$$dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\qquad v=-\sqrt{a^2-x^2};$$

тогда

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int x\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x\sqrt{a^2-x^2}+\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Подставляя последний результат в полученное ранее выражение данного интеграла, будем иметь:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Переносся интеграл справа налево и выполнив элементарные преобразования, окончательно получим:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Пример 5. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx \quad \text{и} \quad I_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Применяя метод интегрирования по частям к первому интегралу, получим:

$$u = e^{ax}, \qquad du = ae^{ax}\,dx,$$

$$dv = \cos bx\,dx, \qquad v = \frac{1}{b}\sin bx,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

К последнему интегралу снова применим метод интегрирования по частям:

$$u = e^{ax}, \qquad du = ae^{ax}\,dx,$$

$$dv = \sin bx\,dx, \quad v = -\frac{1}{b}\cos bx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Подставляя полученное выражение в предыдущее равенство, получим:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Найдем из последнего равенства I_x:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx + \frac{a}{b^2}\cos bx\right) + C\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)$$

откуда

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C.$$

Аналогично находим:

$$I_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C.$$

Замена переменной. Мы сейчас опишем один из наиболее распространенных приемов интегрального исчисления, основанный на формуле производной сложной функции . Допустим, что функция *F(x)* является первообразной к *f(x),* а *x* как-то зависит от переменной *t, x = φ(t).* Найдем производную от *F(x)* по *t:*

$$[F(x)]'_t = [F(x)]'_x \cdot x'_t = f(x)\,\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

Если проинтегрировать обе части по *t*, то получим

$$F(x) + C = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt;$$

другими словами, в силу формул (4.4)

$$\left[\int f(x)\,dx\right]\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{4.20}$$

Это и есть основная *формула замены переменной.*

Так как φ' *(t)dt=-dx,* то правую часть формулы (4.20) можно переписать в виде ∫*f(x)dx;* однако здесь в процессе интегрирования *x* не считается независимой переменной, а зависит от *t.* Поэтому формулу (4.20) можно истолковать так: *любая формула интегрирования вида*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{4.21}$$

сохраняет силу, если как в подынтегральном выражении, так и в правой части сделать произвольную замену переменной x = φ(t). В этом смысле всякая формула вида (4.21) инвариантна.

Например, из формулы (4.8) после подстановки $x = u^3$ вытекает

$$\int \cos u^3\,d(u^3) = \sin u^3 + C, \text{ т. е. } \int u^2 \cos u^3\,du = \frac{1}{3}\sin u^3 + C$$

и т. п. Однако при практическом применении формулы (4.20), конечно, не отправляются от табличной формулы, а, наоборот, стараются сделать такую подстановку, чтобы из заданного интеграла получился табличный.

Рассмотрим несколько примеров. В интеграле

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx,$$

чтобы избавиться от радикала, делаем замену переменной

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \left|\begin{matrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{matrix}\right| = \int \frac{t}{1+t^2}\cdot 2t\,dt =$$
$$= 2\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt = 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) =$$
$$= 2\,(t - \operatorname{arctg} t + C) = 2\,(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,) + C,$$

таким образом, после замены переменной и интегрирования надо выполнить обратную замену, т. е. перейти от t к x.

Формулу (4.20) часто читают «справа налево», т. е. делают замену не вида $x=\varphi(t)$, а вида $\psi(x) = u$. Например, чтобы вычислить интеграл

$$\int xe^{x^2}\,dx,$$

замечают, что подынтегральное выражение просто выражается через x^2, так как

$$xdx = \frac{1}{2}\,d\,(x^2);$$

поэтому

$$\int xe^{x^2}dx = \left|\begin{matrix} x^2=u \\ 2xdx=du \end{matrix}\right| = \int e^u\,\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\,e^u + C = \frac{1}{2}\,e^{x^2} + C.$$

Применяются также замены вида $\psi(x)=\varphi(t)$.

Интеграл (4.12) можно было бы вычислить путем замены переменной

$$\int \cos 3x\,dx = \left|\begin{matrix} 3x=t \\ 3dx=dt \end{matrix}\right| = \int \cos t\,\frac{dt}{3} =$$
$$= \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

Вычисление можно проводить, не выписывая замену явно:

$$\int \cos 3x\,dx = \int \cos 3x\,\frac{d\,(3x)}{3} = \frac{1}{3}\int \cos 3x\,d\,(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C;$$

здесь мы непосредственно использовали инвариантность формулы (4.8).

Подобным образом,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\,(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C;$$

вообще

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C. \qquad (4.22)$$

Далее,

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}\,d(x^2+1) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+1} + C;$$

вообще

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = \int [f(x)]^{-1/2}\,df(x) = \frac{[f(x)]^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{f(x)} + C. \tag{4.23}$$

С помощью формул (4.22) и (4.23) и дополнения до полного квадрата вычисляются, в частности, часто встречающиеся интегралы

$$\int \frac{ax+b}{px^2+qx+r}\,dx.$$

и

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{px^2+qx+r}}\,dx$$

Покажем, например, вычисление интеграла

$$\int \frac{2x-3}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}\,dx;$$

для этого заметим, что производная подкоренного выражения равна $-6x+2 = -6(x-1/3)$:

$$\int \frac{2x-3}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}\,dx = \int \frac{2\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\right]-3}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}\,dx =$$
$$= \int \frac{2\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}\,dx + \int \frac{-\frac{7}{3}}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{3}\int \frac{-6\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}\,dx - \frac{7}{3\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left[x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right]}} =$$
$$= -\frac{2}{3}\sqrt{-3x^2+2x+1} - \frac{7}{3\sqrt{3}}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{4}{9}-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}} =$$
$$= -\frac{2}{3}\sqrt{-3x^2+2x+1} - \frac{7}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} + C =$$
$$= -\frac{2}{3}\sqrt{-3x^2+2x+1} - \frac{7}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x-1}{2} + C \tag{4.24}$$

Вычисление интегралов — более сложное дело, чем вычисление производных; чтобы овладеть элементарными методами интегрирования, требуется проделать большое число упражнений.

4.2. Систематическое интегрирование

В этом разделе будет указано несколько классов функций, интегралы от которых можно вычислять стандартными методами. Следует иметь в виду, что эти стандартные методы не всегда являются самыми простыми; во многих случаях те или иные предварительные преобразования или непосредственное применение методов, рассмотренных в предыдущем разделе, существенно упрощают вычисления. Сознательный выбор простейшего пути вычислении интегралов можно осуществить только после необходимой практики в интегрировании.

Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

I. Рассмотрим интеграл

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Преобразуем предварительно трехчлен, стоящий в знаменателе, представив его в виде суммы или разности квадратов

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=\\&=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]=\\&=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right],\end{aligned}$$

где обозначено

$$\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2.$$

Знак плюс или минус берется в зависимости от того, будет ли выражение, стоящее слева, положительным или отрицательным, т. е. будут ли корни трехчлена ax^2+bx+c комплексными или действительными.

Таким образом, интеграл I_1 принимает вид

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]}.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменного

$$x+\frac{b}{2a}=t, \quad dx=dt.$$

Тогда получим:

$$I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}.$$

Это — табличные интегралы (см. формулы 11' и 12).

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}.$$

Решение.

$$I=\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+10}=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+4+10-4}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}.$$

Делаем замену переменного $x+2=t$, $dx = dt$. Подставляя в интеграл, получаем табличный интеграл

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+6}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}}+C.$$

Подставляя вместо t его выражение через x, окончательно находим:

$$I=\frac{1}{2\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.$$

II. Рассмотрим интеграл более общего вида

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx.$$

Произведем тождественное преобразование подынтегральной функции

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx.$$

Последний интеграл представим в виде суммы двух интегралов. Вынося постоянные множители за знак интегралов, получим:

$$I_1=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Второй интеграл есть интеграл I_1, вычислять который мы умеем . В первом интеграле сделаем замену переменного

$$ax^2+bx+c=t, \quad (2ax+b)\,dx=dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|ax^2+bx+c| + C.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$I_2 = \frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5}\,dx$$

Применим указанный прием:

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2) + \left(3 + \frac{1}{2}2\right)}{x^2-2x-5}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x-5} + 4\int \frac{dx}{x^2-2x-5} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + 2\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right| + C.$$

III. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

С помощью преобразований, рассмотренных в п. I, этот интеграл сводится, в зависимости от знака *a*, к табличным интегралам вида

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} \text{ при } a > 0 \text{ или } \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} \text{ при } a < 0,$$

которые уже рассмотрены в таблице интегралов (см. формулы 13' и 14).

IV. Интеграл вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

вычисляется с помощью следующих преобразований, аналогичных тем, которые были рассмотрены в п. II:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$
$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Применив к первому из полученных интегралов подстановку

$$ax^2+bx+c=t, \quad (2ax+b)\,dx=dt,$$

получим:

$$\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$$

Второй же интеграл был рассмотрен нами в п. III настоящего раздела.

Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

Как мы увидим ниже, далеко не всякая элементарная функция имеет интеграл, выражающийся в элементарных функциях. Поэтому очень важно выделить такие классы функций, интегралы которых выражаются через элементарные функции. Простейшим из этих классов является класс рациональных функций.

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т. е. в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n}.$$

Не ограничивая общность рассуждения, будем предполагать, что эти многочлены не имеют общих корней.

Если степень числителя ниже степени знаменателя, то дробь называется *правильной,* в противном случае дробь называется *неправильной.*

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)};$$

здесь *M(x)* — многочлен, а $\frac{F(x)}{f(x)}$ - правильная дробь.

Пример 1. Пусть дана неправильная рациональная дробь $\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}$.

Разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), получим:

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x-6}{x^2+2x+1}$$

Так как интегрирование многочленов не представляет затруднений, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей заключается в интегрировании *правильных* рациональных дробей.

Определение. Правильные рациональные дроби вида:

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (*k* — целое положительное число ≥2),

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т. е. $(p^2/4)-q<0$),

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (*k*—целое положительное число ≥ 2; корни знаменателя комплексные), называются *простейшими дробями* I, II, III *и* IV *типов.*

Далее будет доказано , что всякую рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей. Поэтому мы рассмотрим сначала интегралы от простейших дробей.

Интегрирование простейших дробей типа I, II и III не составляет большой трудности, поэтому мы проведем их интегрирование без каких-либо дополнительных пояснений:

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=$$

$$=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$$

$$\text{III. } \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$
$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$
$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \quad \text{(см.}$$

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей IV типа. Пусть нам дан интеграл такого типа:

$$\text{IV. } \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx.$$

Произведем преобразования:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}dx =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

Первый интеграл берется подстановкой
$x^2+px+q=t$, $(2x+p)\,dx=dt$:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}dt = \frac{t^{-k+1}}{1-k}+C =$$
$$= \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+C.$$

Второй интеграл — обозначим его через $I_к$ — запишем в виде

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

полагая

$$x+\frac{p}{2}=t, \qquad dx=dt, \qquad q-\frac{p^2}{4}=m^2$$

(по предположению корни знаменателя комплексные, а следовательно,

$$q-\frac{p^2}{4}>0$$

Далее поступаем следующим образом:

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt=$$
$$=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt. \quad (4.25)$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k}=\int\frac{t\cdot t\,dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{2}\int t\,\frac{d\,(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k}=$$
$$=-\frac{1}{2\,(k-1)}\int t\,d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right).$$

Интегрируя по частям, будем иметь:

$$\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k}=-\frac{1}{2\,(k-1)}\left[t\,\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right].$$

Подставляя это выражение в равенство (4.25), получим:

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=$$
$$=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}+\frac{1}{m^2}\,\frac{1}{2\,(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right]=$$
$$=\frac{t}{2m^2\,(k-1)\,(t^2+m^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2m^2\,(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

В правой части содержится интеграл того же типа, что I_k, но показатель степени знаменателя подынтегральной функции на единицу ниже $(k—1)$; таким образом, мы выразили I_k через I_{k-1}.

Продолжая идти тем же путем, дойдем до известного интеграла:

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{m}+C.$$

Подставляя затем всюду вместо t и m их значения, получим выражение интеграла IV через x и заданные числа A, B, p, q.

Пример 2.

$$\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{(x^2+2x+3)^2}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=$$
$$=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x^2+2x+3)}-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

К последнему интегралу применяем подстановку $x+1=t$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2}\, dt =$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\, dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2\, dt}{(t^2+2)^2}.$$

Рассмотрим последний интеграл:

$$\int \frac{t^2\, dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{t\, d(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2} \int t d\left(\frac{1}{t^2+2}\right) = -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} =$$
$$= -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}}$$

(произвольного постоянного пока не пишем; мы учтем его только в окончательном результате).

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}}\right].$$

Окончательно будем иметь:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\, dx = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Разложение рациональной дроби на простейшие

Покажем, далее, что всякую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей. Пусть нам дана правильная рациональная дробь

$$F(x)/f(x)$$

Будем предполагать, что коэффициенты входящих в нее многочленов—действительные числа и что данная дробь несократима (последнее означает, что числитель и знаменатель не имеют общих корней).

Т е о р е м а 1. *Пусть $x = a$ есть корень знаменателя кратности k, т. е. $f(x)=(x-a)^k f_1(x)$, где $f_1(a)\neq 0$;* *тогда данную правильную дробь $F(x)/f(x)$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \tag{4.26}$$

где A — постоянная, не равная нулю, а $F_1(x)$—многочлен, степень которого ниже степени знаменателя $(x-a)^{k-1} f_1(x)$.

Доказательство. Напишем тождество

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x)-Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \tag{4.27}$$

(справедливое при любом *A*) и определим постоянную *A* так, чтобы многочлен $F(x)—Af_1(x)$ делился на $x—a$. Для этого по теореме Безу необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$F(a)—Af_1(a)=0.$$

Так как $f_1(a) \neq 0$, $F(a)\neq 0$, то *A* однозначно определится равенством

$$A=\frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

При таком *A* будем иметь:

$$F(x)-Af_1(x)=(x-a)F_1(x),$$

где $F_1(x)$ есть многочлен, степень которого ниже степени многочлена $(x-a)^{k-1}f_1(x)$. Сокращая дробь в формуле (4.27) на $(x—a)$, получаем равенство (4.26).

Следствие. К правильной рациональной дроби

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}f_1(x)},$$

входящей в равенство (4.26), можно применять аналогичные рассуждения. Таким образом, если знаменатель имеет корень $x = a$ кратности *к*, то можно написать:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

где $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ - правильная несократимая дробь. К ней также можно применить только что доказанную теорему, если $f_1(x)$ имеет другие действительные корни.

Рассмотрим далее случай комплексных корней знаменателя. Напомним, что комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами всегда попарно сопряжены .

В разложении многочлена на действительные множители каждой паре комплексных корней многочлена соответствует выражение вида $x^{2+}+px+q$. Если же комплексные корни имеют кратность μ, то им соответствует выражение $(x^2+px+q)^{\mu}$.

Теорема 2. *Если* $f(x) = (x^2+px+q)^{\mu}\varphi_1(x)$, *где многочлен* $\varphi_1(x)$ *не делится на* x^2+px+q, *то правильную рациональную дробь -* $F(x)/f(x)$ *можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:*

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\frac{\Phi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu-1}\varphi_1(x)}, \quad (4.28)$$

где Φ_1 *(x) — многочлен, степень которого ниже степени многочлена*
$(x^2+px+q)^{\mu-1}\varphi_1(x)$.

Доказательство. Напишем тождество

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F(x)}{(x^2+px+q)^{\mu}\varphi_1(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\frac{F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu}\varphi_1(x)}, \quad (4.29)$$

справедливое при любых *M* и *N,* и определим *M* и *N* так, чтобы многочлен $F(x)$ — $(Mx+N)\varphi_1(x)$ делился на x^2+px+q. Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение
$F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)=0$ имело те же корни $\alpha\pm i\beta$, что и многочлен x^2+px+q .

Следовательно,

$$F(\alpha+i\beta)-[M(\alpha+i\beta)+N]\varphi_1(\alpha+i\beta)=0$$

или

$$M(\alpha+i\beta)+N=\frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}.$$

Но

$$\frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}$$

есть определенное комплексное число, которое можно записать в виде $K+iL$, где K и L — некоторые действительные числа. Таким образом,

$$M(\alpha+i\beta)+N=K+iL;$$

отсюда

$$M\alpha+N=K, \quad M\beta=L$$

или

$$M=\frac{L}{\beta}, \quad N=\frac{K\beta-L\alpha}{\beta}.$$

При этих значениях коэффициентов *M* и *N* многочлен $F(x)$— $(Mx+N)\varphi_1(X)$ имеет корнем число $\alpha+i\beta$, а следовательно, и сопряженное число $\alpha-i\beta$. Но в таком случае многочлен без остатка разделится на разности x — $(\alpha+i\beta)$ и x —$(\alpha-i\beta)$, а следовательно, и на их произведение, т. е. на x^2+px+q . Обозначая частное от этого деления через $\Phi_1(x)$, получим:

$$F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)=(x^2+px+q)\Phi_1(x).$$

Сокращая последнюю дробь в равенстве (4.29) на x^2+px+q , получим равенство (4.28), причем ясно, что степень $\Phi_1(x)$ меньше степени знаменателя, что и требовалось доказать.

Применяя теперь к правильной дроби $F(x)/f(x)$ результаты теорем 1 и 2, мы можем выделить последовательно все простейшие дроби, соответствующие всем корням знаменателя $f(x)$. Таким образом, из предыдущего вытекает следующий результат.

Если

$$f(x)=(x-a)^{\alpha}\ \ldots\ (x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\mu}\ \ldots\ (x^2+lk+s)^{\nu},$$

то дробь $F(x)/f(x)$ *– может быть представлена в виде*

$$\left.\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)}=&\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+\\ &+\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+\ldots+\frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q}+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\nu}}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}}+\ldots+\frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s}.\end{aligned}\right\}\qquad(4.30)$$

Коэффициенты $A,\ A_1\ \ldots\ ,\ B,\ B_1\ \ldots$ можно определить из следующих соображений. Написанное равенство есть тождество, поэтому, приведя дроби к общему знаменателю, получим тождественные многочлены в числителях справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $A,\ A_1,\ \ldots\ ,\ B,\ B_1\ .\ ..$ Этот метод нахождения коэффициентов называется *методом неопределенных коэффициентов.*

Наряду с этим для определения коэффициентов можно воспользоваться следующим замечанием: так как многочлены, получившиеся в правой и левой частях равенства, после приведения к общему знаменателю должны быть тождественно равны, то их значения равны при любых частных значениях x. Придавая x частные значения, получим уравнения для определения коэффициентов.

Таким образом, мы видим, что всякая правильная рациональная дробь представляется в виде суммы простейших рациональных дробей.

Пример. Пусть требуется разложить дробь

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$$

на простейшие дроби. На основании формулы (4.30) имеем:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3}+\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим:

$$x^2+2=A(x-2)+A_1(x+1)(x-2)+A_2(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3, \quad (4.31)$$

или

$$x^2+2=(A_2+B)x^3+(A_1+3B)x^2+$$
$$+(A-A_1-3A_2+3B)x+(-2A-2A_1-2A_2+B).$$

Приравнивая коэффициенты при x^3, x^2, x^1, x^0 (свободный член), получим систему уравнений для определения коэффициентов:

$$0=A_2+B,$$
$$1=A_1+3B,$$
$$0=A-A_1-3A_2+3B,$$
$$2=-2A-2A_1-2A_2+B.$$

Решая эту систему, найдем:

$A=-1$, $A_1=1/3$, $A_2=2/9$, $B=2/9$.

Можно было бы также определить некоторые коэффициенты из уравнений, которые получаются при некоторых частных значениях x из равенства (4.31), которое является тождеством относительно x.

Так, полагая $x=-1$, получим $3=-3A$ или $A=-1$; полагая $x=2$, получим $6=27B$; $B=2/9$.

Если к этим двум уравнениям присоединим два уравнения, получающиеся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x, то получим четыре уравнения для определения четырех неизвестных коэффициентов. В результате получаем разложение:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}.$$

Интегрирование рациональных дробей

Пусть требуется вычислить интеграл от рациональной дроби

$$\frac{Q(x)}{f(x)},$$

т.е. интеграл

$$\int \frac{Q(x)}{f(x)}\,dx.$$

Если данная дробь неправильная, то мы представляем ее в виде суммы многочлена *M(x)* и правильной рациональной дроби $F(x)/f(x)$. Последнюю же представляем по формуле (4.30) в виде суммы п р о с т е й ш и х дробей. Таким образом, интегрирование всякой рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и нескольких простейших дробей.

Из результатов предыдущего раздела следует, что вид простейших дробей определяется корнями знаменателя *f(x).* Здесь возможны следующие случаи.

I случай. *Корни знаменателя действительны, и различны, т. е.*

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-d).$$

В этом случае дробь $F(x)/f(x)$ разлагается на простейшие дроби I типа:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{D}{x-d};$$

и тогда

$$\int\frac{F(x)}{f(x)}dx=\int\frac{A}{x-a}dx+\int\frac{B}{x-b}dx+\ldots+\int\frac{D}{x-d}dx=$$
$$=A\ln|x-a|+B\ln|x-b|+\ldots+D\ln|x-d|+C.$$

II случай. *Корни знаменателя действительные, причем некоторые из них кратные:*

$$f(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-d)^{\delta}.$$

В этом случае дробь $F(x)/f(x)$ разлагается на простейшие дроби 1 и II типов.

Пример 1.

$$\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx=-\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+1}+$$
$$+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{9}\ln|x+1|+\frac{2}{9}\ln|x-2|+C=$$
$$=-\frac{2x-1}{6(x+1)^2}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.$$

III случай. *Среди корней знаменателя есть комплексные неповторяющиеся (т. е. различные):*

$$f(x)=(x^2+px+q)\ldots(x^2+lx+s)(x-a)^{\alpha}\ldots(x-d)^{\delta}.$$

В этом случае дробь $F(x)/f(x)$ разлагается на простейшие дроби I, II и III типов.

П р и м е р 2. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Разложим подынтегральную дробь на простейшие

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}.$$

Следовательно,

$$x=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1).$$

Полагая x=1, получим: 1—2C, *C*—1/2; полагая *x = 0,* получим: 0=—*B*-\-*C,* B = 1/2.

Приравнивая коэффициенты при x^2, получим 0 = A + C, откуда A = — 1/2.

Таким образом,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}=-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=$$
$$=-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

IV с л у ч а й. *Среди корней знаменателя есть комплексные кратные*

$$f(x)=(x^2+px+q)^{\mu}\ldots(x^2+lx+s)^{\nu}(x-a)^{\alpha}\ldots(x-d)^{\delta}.$$

В этом случае разложение дроби $F(x)/f(x)$ будет содержать и простейшие дроби IV типа.

П р и м е р 3. Требуется вычислить интеграл

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx.$$

Решение. Разлагаем дробь на простейшие:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)}+\frac{E}{x+1},$$

откуда

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8=$$
$$=(Ax+B)(x+1)+(Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1)+E(x^2+2x+3)^2.$$

Комбинируя указанные выше методы определения коэффициентов, находим:

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=0,\quad D=0,\quad E=1.$$

Таким образом, получаем:

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx + \int \frac{dx}{x+1} =$$
$$= -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \ln|x+1| + C.$$

Первый интеграл, стоящий справа, был рассмотрен ранее. Второй интеграл берется непосредственно.

Из всего изложенного следует, что интеграл от любой рациональной функции может быть выражен через элементарные функции в конечном виде, а именно:

1) через логарифмы —в случае простейших дробей I типа;

2) через рациональные функции — в случае простейших дробей II типа;

3) через логарифмы и арктангенсы — в случае простейших дробей III типа;

4) через рациональные функции и арктангенсы — в случае простейших дробей IV типа.

Интегралы от иррациональных функций

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В этом и следующем разделах мы рассмотрим те иррациональные функции, интегралы от которых с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций и, следовательно, до конца интегрируются.

1. Рассмотрим интеграл $\int R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{r/s})dx,$ где R – рациональная функция своих аргументов. (Запись $R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{r/s})$ указывает , что над величинами x, $x^{m/n}, \ldots x^{r/s}$ производятся только рациональные операции.

Точно также следует понимать в дальнейшем записи вида

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots\right), R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}),\quad R(\sin x,\ \cos x)$$

и т.д. Так ,например, запись $R(\sin x, \cos x)$ указывает, что над $\sin x$ и $\cos x$ производятся рациональные операции.)

Пусть k—общий знаменатель дробей $m/n, \ldots, r/s$. Сделаем подстановку:

$$x = t^k,\ dx = kt^{k-1}\,dt.$$

Тогда каждая дробная степень x выразится через целую степень t и, следовательно, подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от t.

Пример 1. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x^{1/2}dx}{x^{3/4}+1}.$$

Решение. Общий знаменатель дробей ½, 3/4 есть 4; поэтому делаем подстановку $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$; тогда

$$\int \frac{x^{1/2}\,dx}{x^{3/4}+1} = 4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,t^3\,dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,dt = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt =$$
$$= 4\int t^2\,dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,dt = 4\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + C =$$
$$= \frac{4}{3}\left[x^{3/4} - \ln\left|x^{3/4}+1\right|\right] + C.$$

II. Рассмотрим теперь интеграл вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right] dx.$$

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

где k — общий знаменатель дробей $m/n, \ldots, r/s$.

Пример 2. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx.$$

Решение. Делаем подстановку $x+4=t^2$, $x=t^2 - 4$, $dx = 2tdt$ тогда

$$\int \frac{x^{1/2}\,dx}{x^{3/4}+1} = 4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,t^3\,dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,dt = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt =$$
$$= 4\int t^2\,dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,dt = 4\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + C =$$
$$= \frac{4}{3}\left[x^{3/4} - \ln\left|x^{3/4}+1\right|\right] + C.$$

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}\,dt = 2\int \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right)dt = 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} =$$
$$= 2t + 2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C.$$

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$

Рассмотрим интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \tag{4.32}$$

где $a \neq 0$.

Такой интеграл приводится к интегралу от рациональной функции нового переменного с помощью следующих подстановок Эйлера.

1. *Первая подстановка Эйлера.* Если $a > 0$, то полагаем:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + t.$$

Перед корнем $\sqrt{a}$ возьмем для определенности знак плюс. Тогда

$$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a}\,xt+t^2,$$

откуда x определяется как рациональная функция от t

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}$$

(значит, dx тоже будет выражаться рационально через t), следовательно,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x+t = \sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}+t,$$

т.е.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

оказывается рациональной функции от t.

Так как

$$\sqrt{ax^2+bx+c},\ x \text{ и } dx$$

выражаются рационально через t, то, следовательно, данный интеграл (10.32) преобразуется в интеграл от рациональной функции от t.

Пример 1. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$$

Решение. Так как здесь $a=1 > 0$, то полагаем

$$\sqrt{x^2+c} = -x+t;$$

тогда

$$x^2+c = x^2-2xt+t^2,$$

откуда

$$x=\frac{t^2-c}{2t}.$$

Следовательно,

$$dx=\frac{t^2+c}{2t^2}\,dt,$$

$$\sqrt{x^2+c}=-x+t=-\frac{t^2-c}{2t}+t=\frac{t^2+c}{2t}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}=\int\frac{\frac{t^2+c}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+c}{2t}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C_1=\ln|x+\sqrt{x^2+c}|+C_1$$

(см. формулу 14 таблицы интегралов),

2. *Вторая подстановка Эйлера.* Если $c > 0$, то полагаем:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c};$$

тогда (перед $\sqrt{c}$ для определенности берем знак плюс)

$$ax^2+bc+c=x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c.$$

Отсюда x определяется как рациональная функция от t:

$$x=\frac{2\sqrt{c}\;t-b}{a-t^2}.$$

Так как

dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$

тоже выражаются рационально через t, то, подставляя значение x,

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ и dx

и интеграл

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

мы сведем его к интегралу от рациональной функции от t.

Пример 2. Требуется вычислить интеграл

$$\int\frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$$

Решение. Полагаем

$$\sqrt{1+x+x^2}=xt+1;$$

тогда

$$1+x+x^2=x^2t^2+2xt+1,\quad x=\frac{2t-1}{1-t^2},\quad dx=\frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}\,dt;$$

$$\sqrt{1+x+x^2}=xt+1=\frac{t^2-t+1}{1-t^2};$$

$$1-\sqrt{1+x+x^2}=\frac{-2t^2+t}{1-t^2}.$$

Подставляя полученные значения в исходный интеграл, находим:

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx=\int \frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^2}\,dt=$$
$$=2\int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt=-2t+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$
$$=-\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x}+\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right|+C=$$
$$=-\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x}+\ln|2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1|+C.$$

3 . *Третья подстановка Эйлера.* Пусть α и β— действительные корни трехчлена

$$ax^2+bx+c.$$

Полагаем:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)\,t.$$

Так как

$$ax^2+bx+c=a\,(x-\alpha)(x-\beta),$$

то

$$\sqrt{a\,(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)\,t,$$
$$a\,(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2t^2,$$
$$a\,(x-\beta)=(x-\alpha)\,t^2.$$

Отсюда находим x как рациональную функцию от t:

$$x=\frac{a\beta-at^2}{a-t^2}$$

Так как

dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$

тоже рационально зависит от t, то данный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функций от t.

Замечание 1. Третья подстановка Эйлера применима не только при $a<0$, но и при а >0—лишь бы многочлен ax^2+bx+c имел два действительных корня.

Пример 3. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

Решение. Так как

$$x^2+3x-4=(x+4)(x-1),$$

то подставляем:

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}=(x+4)\,t;$$

тогда

$$(x+4)(x-1)=(x+4)^2 t^2, \quad x-1=(x+4)t^2,$$
$$x=\frac{1+4t^2}{1-t^2}, \quad dx=\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt,$$
$$\sqrt{(x+4)(x-1)}=\left[\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right]t=\frac{5t}{1-t^2}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int\frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 5t}bt=\int\frac{2}{1-t^2}dt \quad \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$
$$=\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+C.$$

Замечание 2. Заметим, что для приведения интеграла (10.32) к интегралу от рациональной функции достаточно первой и третьей подстановок Эйлера. Рассмотрим трехчлен ax^2+bx+c. Если $b^2—4ac>0$, то корни трехчлена действительны и, следовательно, применима третья подстановка Эйлера. Если $b^2—4ac\leq 0$, то в этом случае

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]$$

и, следовательно, трехчлен имеет знак, совпадающий со знаком a

Чтобы

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

был действительным, нужно, чтобы трехчлен был положительным, а следовательно, должно быть $a>0$. В этом случае применима первая подстановка.

Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

До сих пор мы систематически изучали интегралы только от алгебраических функций (рациональных и иррациональных). В настоящем подразделе мы рассмотрим интегралы от некоторых классов неалгебраических, в первую очередь тригонометрических функций. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx. \tag{4.33}$$

Покажем, что этот интеграл с помощью подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \tag{4.34}$$

всегда сводится к интегралу от рациональной функции. Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} x/2$, а следовательно, и через t:

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Далее

$$x=2\operatorname{arctg} t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

Таким образом, $\sin x$, $\cos x$ и dx выразились рационально через t. Так как рациональная функция от рациональных функций есть функция рациональная, то, подставляя полученные выражения в интеграл (4.33), получим интеграл от рациональной функции:

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$\int\frac{dx}{\sin x}.$$

На основании написанных выше формул имеем:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Рассмотренная подстановка дает возможность проинтегрировать всякую функцию вида $R(\cos x, \sin x)$. Поэтому ее иногда называют «универсальной тригонометрической подстановкой». Однако на практике она часто приводит к слишком сложным рациональным функциям. Поэтому наряду с «универсальной» подстановкой бывает полезно знать также другие подстановки, которые в некоторых случаях быстрее приводят к цели.

1) Если интеграл имеет вид $\int R(\sin x)\cos x\,dx$, то подстановка $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$ приводит этот интеграл к виду $\int R(t)\,dt$.

2) Если интеграл имеет вид $\int R(\cos x)\sin x\, dx$, то он приводится
к интегралу от рациональной функции заменой $\cos x = t$, $\sin x\, dx = -dt$.

3) Если подынтегральная функция зависит только от tgx, то замена tgx =t, x = arctgt, $dx=d/t(1+t^2)$ приводит этот интеграл к интегралу от рациональной функции:

$$\int R(\operatorname{tg} x)\, dx = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

4) Если подынтегральная функция имеет вид $R(\sin x, \cos x)$, но $\sin x$ и $\cos x$ входят только в четных степенях, то применяется та же подстановка:

$$tgx=t, \tag{4.35}$$

так как $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ выражаются рационально через tgx:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

После подстановки мы получим интеграл от рациональной функции.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\, dx.$$

Решение. Этот интеграл легко привести к виду

$$\int R(\cos x)\sin x\, dx.$$

Действительно,

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x\, dx}{2+\cos x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\sin x\, dx.$$

Сделаем замену cos x = z. Тогда

$\sin x\, dx = -dz$:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\, dx = \int \frac{1-z^2}{2+z}(-dz) = \int \frac{z^2-1}{z+2}\, dz = \int \left(z-2+\frac{3}{z+2}\right) dz =$$

$$= \frac{z^2}{2} - 2z + 3\ln(z+2) + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x+2) + C.$$

Пример 3. Вычислить

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}.$$

Сделаем замену $tgx=t$:

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

5) Рассмотрим теперь еще один интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ — именно интеграл, под знаком которого стоит произведение $\sin^m x \cos^n x dx$ (где m и n — целые числа). Здесь рассмотрим три случая.

а) $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n таковы, что по крайней мере одно из них нечетное число. Допустим для определенности, что n нечетное. Положим $n = 2p+1$ и преобразуем интеграл:

$$\int \sin^m x \cos^{2p+1} x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x\, dx =$$

$$= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^p \cos x\, dx.$$

Сделаем замену переменного:

$$\sin x = t, \ \cos x\, dx = dt.$$

Подставляя новую переменную в данный интеграл, получим:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int t^m (1-t^2)^p\, dt,$$

а это есть интеграл от рациональной функции от t.

Пример 4.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x\, dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x\, dx}{\sin^4 x}.$$

Обозначая

$$\sin x = t, \ \cos x\, dx = dt,$$

получим:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1-t^2)\, dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C =$$

$$= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

б) $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n – числа неотрицательные и четные.

Положим $m=2p$, $n=2q$. Напишем формулы, известные из тригонометрии:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x. \tag{4.36}$$

Подставляя в интеграл, получим:

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx.$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим члены, содержащие cos $2x$ в нечетных и четных степенях. Члены с нечетными степенями интегрируются, как указано в случае а). Четные показатели степеней снова понижаем по формулам (4.36). Продолжая так, дойдем
до членов вида $\int\cos kx\, dx$, которые легко интегрируются.

Пример 5.

$$\int \sin^4 x\, dx = \frac{1}{2^2}\int (1-\cos 2x)^2\, dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x-\sin 2x+\frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\, dx\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right]+C.$$

в) Если оба показателя—четные, причем хотя бы один из них отрицателен, то предыдущий прием не приводит к цели. Здесь следует сделать замену tg $x = t$ (или ctg $x = t$).

Пример 6.

$$\int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\sin^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\cos^6 x}dx = \int \operatorname{tg}^2 x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)^2 dx.$$

Положим tg $x = t$, тогда

$$x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

и мы получаем:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int t^2(1+t^2)^2\frac{dt}{1+t^2} = \int t^2(1+t^2)\, dt =$$

$$= \frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C.$$

6) Рассмотрим в заключение интегралы вида
$\int\cos mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int\sin mx \sin nx\, dx$.
Они берутся при помощи следующих формул $(m\neq n)$:
(Эти формулы легко вынести следующим образом:
$\cos(m+n)x=\cos mx \cos nx - \sin mx\sin nx$,
$\cos(m-n)x = \cos mx \cos nx + \sin mx\sin nx$.
Складывая эти равенства почленно и деля пополам, получим первую из приведенных ниже трех формул. Вычитая почленно и деля пополам, получим третью формулу. Вторая формула выводится аналогично, если написать аналогичные равенства для $\sin(m+n)x$ и $\sin(m-n)x$ и затем почленно их сложить.)

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x].$$

Подставляя и интегрируя, получим:

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x]\, dx = \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

Аналогично вычисляются и два других интеграла.

Пример 7.

$$\int \sin 5x \sin 3x\, dx = \frac{1}{2}\int [-\cos 8x + \cos 2x]\, dx = -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Интегрирование некоторых иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок

Вернемся к интегралу,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx,$$

где

$a \neq 0$ и $c - \frac{b^2}{4a} \neq 0$

(в случае $a = 0$ интеграл имеет вид II, при

$c - \frac{b^2}{4a} = 0$

выражение

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2,$$

и мы имеем дело с рациональной функцией, если $a > 0$, при $a < 0$ функция

$\sqrt{ax^2+bx+c}$

не определена ни при каком значении x).

Покажем здесь метод преобразования этого интеграла к интегралу вида

$$\int \bar{R}(\sin z, \cos z)\, dz, \tag{4.38}$$

который рассмотрен в предыдущем подразделе.

Произведем преобразование трехчлена, стоящего под корнем

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Сделаем замену переменного, положив

$$x+\frac{b}{2a} = t, \quad dx = dt.$$

Тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Рассмотрим все возможные случаи.

1. Пусть

$$a>0,\ c-\frac{b^2}{4a}>0.$$

Введем обозначения $a = m^2$

$$c-\frac{b^2}{4a}=n^2.$$

В этом случае будем иметь:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2+n^2}.$$

2. Пусть

$$a>0,\ c-\frac{b^2}{4a}<0.$$

Тогда

$$a=m^2,\ c-\frac{b^2}{4a}=-n^2.$$

Следовательно,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2-n^2}.$$

3. Пусть

$$a<0,\ c-\frac{b^2}{4a}>0.$$

Тогда

$$a=-m^2,\ c-\frac{b^2}{4a}=n^2.$$

Следовательно,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-m^2t^2}.$$

Пусть

$$a<0,\ c-\frac{b^2}{4a}<0.$$

В этом случае

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

есть комплексное число при любом значении x.

Таким образом, интеграл (4.37) преобразуется к одному из следующих типов интегралов:

I. $$\int R\left(t,\ \sqrt{m^2t^2+n^2}\right)dt. \qquad (4.39.1)$$

II $$\int R\left(t,\ \sqrt{m^2t^2-n^2}\right)dt. \qquad (4.39.2)$$

$$\text{III} \qquad \int R\left(t, \sqrt{n^2-m^2t^2}\right) dt. \qquad (4.39.3)$$

Очевидно, что интеграл (4.39.1) приводится к интегралу вида (4.38) с помощью подстановки

$t=\frac{n}{m}\operatorname{tg} z.$

Интеграл (4.39.2) приводится к интегралу вида (4.38) с помощью подстановки

$t=\frac{n}{m}\sec z.$

Интеграл (4.39.3) приводится к интегралу вида (4.38) с помощью подстановки

$t=\frac{n}{m}\sin t.$

Пример. Вычислить интеграл

$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}.$

Решение. Это—интеграл типа III, Сделаем замену $x = a\sin z$, тогда

$$dx=a\cos z\,dz,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\int \frac{a\cos z\,dz}{\sqrt{(a^2-a^2\sin^2 z)^3}}=\int \frac{a\cos z\,dz}{a^3\cos^3 z}{}^{*)}=\frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{\cos^2 z}=$$
$$=\frac{1}{a^2}\operatorname{tg} z+C=\frac{1}{a^2}\frac{\sin z}{\cos z}+C=\frac{1}{a^2}\frac{\sin z}{\sqrt{1-\sin^2 z}}+C=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции

Ранее мы уже отмечали (без доказательства), что всякая функция *f(x)*, непрерывная на интервале *(a, b)*, имеет на этом интервале первообразную, т. е. существует такая функция *F(x)*, что *F'(x)=f(x)*, Однако не всякая первообразная, даже тогда, когда она существует, выражается в конечном виде через элементарные функции.

Таковы первообразные, выраженные интегралами

$\int e^{-x^2}dx,$

$\int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \frac{\cos x}{x}dx,\ \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx,\ \int \frac{dx}{\ln x},$

и многие другие.

Во всех подобных случаях первообразная представляет собой, очевидно, некоторую новую функцию, которая не сводится к комбинации конечного числа элементарных функций. Так, например, та из первообразных

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2}\,dx+C,$$

которая обращается в нуль при $x = 0$, называется *функцией Лапласа* и обозначается Ф (x). Таким образом,

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2}\,dx+C_1,\quad \text{если}\ \Phi(0)=0.$$

Эта функция хорошо изучена. Составлены подробные таблицы ее значений при различных значениях *x*.

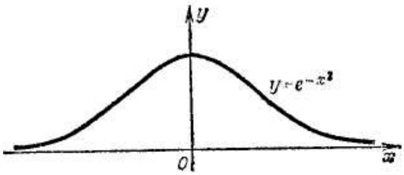


Рис. 4.1.

На рис. 4.1 и 4.2 изображены график подынтегральной функции $y=e^{-x2}$ и график функции Лапласа $y = Ф(x)$.

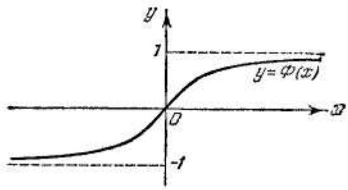


Рис.4.2

Микромодуль 6

Индивидуальные тестовые задания

I. Вычислить интегралы: **1.** $\int x^5\,dx$. *Отв.* $\frac{x^6}{6}+C$. **2.** $\int (x+\sqrt{x})\,dx$. *Отв.* $\frac{x^2}{2}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$. **3.** $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$. *Отв.* $6\sqrt{x}-\frac{1}{10}x^2\sqrt{x}+C$. **4.** $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x}}$. *Отв.* $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$. **5.** $\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+2\right)dx$. *Отв.* $-\frac{1}{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}+2x+C$. **6.** $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$. *Отв.* $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$. **7.** $\int\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx$. *Отв.* $\frac{x^5}{5}+\frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+C$.

Интегрирование методом подстановки: **8.** $\int e^{5x}\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{5}e^{5x}+C$. **9.** $\int\cos 5x\,dx$. *Отв.* $\frac{\sin 5x}{5}+C$. **10.** $\int\sin ax\,dx$. *Отв.* $-\frac{\cos ax}{a}+C$.

11. $\int \frac{\ln x}{x} dx$. *Отв.* $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$. **12.** $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$. *Отв.* $-\frac{\operatorname{ctg} 3x}{3} + C$. **13.** $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg} 7x}{7} + C$. **14.** $\int \frac{dx}{3x-7}$. *Отв.* $\frac{1}{3}\ln|3x-7| + C$. **15.** $\int \frac{dx}{1-x}$. *Отв.* $-\ln|1-x| + C$. **16.** $\int \frac{dx}{5-2x}$. *Отв.* $-\frac{1}{2}\ln|5-2x| + C$. **17.** $\int \operatorname{tg} 2x\, dx$. *Отв.* $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$. **18.** $\int \operatorname{ctg}(5x-7)\, dx$. *Отв.* $\frac{1}{5}\ln|\sin(5x-7)| + C$.
19. $\int \frac{dy}{\operatorname{ctg} 3y}$. *Отв.* $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3y| + C$. **20.** $\int \operatorname{ctg}\frac{x}{3} dx$. *Отв.* $3\ln\left|\sin\frac{x}{3}\right| + C$.
21. $\int \operatorname{tg}\varphi \cdot \sec^2\varphi\, d\varphi$. *Отв.* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi + C$. **22.** $\int (\operatorname{ctg} e^x) e^x dx$. *Отв.* $\ln|\sin e^x| + C$.
23. $\int \left(\operatorname{tg} 4S - \operatorname{ctg}\frac{S}{4}\right) dS$. *Отв.* $-\frac{1}{4}\ln|\cos 4S| - 4\ln\left|\sin\frac{S}{4}\right| + C$.
24. $\int \sin^2 x \cos x\, dx$. *Отв.* $\frac{\sin^3 x}{3} + C$. **25.** $\int \cos^3 x \sin x\, dx$. *Отв.* $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$.
26. $\int \sqrt{x^2+1}\, x\, dx$. *Отв.* $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$. **27.** $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2x^2+3}}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3} + C$. **28.** $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$. *Отв.* $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$. **29.** $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}$. *Отв.* $-\frac{1}{\sin x} + C$. **30.** $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^3 x}$. *Отв.* $\frac{1}{2\cos^2 x} + C$. **31.** $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C$. **32.** $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx$. *Отв.* $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + C$. **33.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$. *Отв.* $2\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$. **34.** $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$. *Отв.* $\frac{\ln^2(x+1)}{2} + C$.
35. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2\sin x + 1}}$. *Отв.* $\sqrt{2\sin x + 1} + C$. **36.** $\int \frac{\sin 2x\, dx}{(1+\cos 2x)^2}$. *Отв.* $\frac{1}{2(1+\cos 2x)} + C$. **37.** $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. *Отв.* $2\sqrt{1+\sin^2 x} + C$.
38. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x + 1}}{\cos^2 x} dx$. *Отв.* $\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{tg} x + 1)^3} + C$. **39.** $\int \frac{\cos 2x\, dx}{(2+3\sin 2x)^3}$. *Отв.* $-\frac{1}{12}\frac{1}{(2+3\sin 2x)^2} + C$. **40.** $\int \frac{\sin 3x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}} + C$.
41. $\int \frac{\ln^2 x\, dx}{x}$. *Отв.* $\frac{\ln^3 x}{3} + C$. **42.** $\int \frac{\arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Отв.* $\frac{\arcsin^2 x}{2} + C$.
43. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{1+x^2}$. *Отв.* $\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$. **44.** $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. *Отв.* $-\frac{\arccos^3 x}{3} + C$.
45. $\int \frac{\operatorname{arcctg} x}{1+x^2} dx$. *Отв.* $-\frac{\operatorname{arcctg}^2 x}{2} + C$. **46.** $\int \frac{x\, dx}{x^2+1}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.
47. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$. *Отв.* $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + C$. **48.** $\int \frac{\cos x\, dx}{2\sin x + 3}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\ln(2\sin x + 3) + C$. **49.** $\int \frac{dx}{x\ln x}$. *Отв.* $\ln|\ln x| + C$. **50.** $\int 2x(x^2+1)^4 dx$.

Отв. $\frac{(x^2+1)^5}{5}+C$. **51.** $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg} x+x+C$.

52. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$. *Отв.* $\ln|\operatorname{arctg} x|+C$. **53.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x\,(3\operatorname{tg} x+1)}$.

Отв. $\frac{1}{3}\ln|3\operatorname{tg} x+1|+C$. **54.** $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,dx$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$.

55. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$. *Отв.* $\ln|\arcsin x|+C$. **56.** $\int \frac{\cos 2x}{2+3\sin 2x}\,dx$.

Отв. $\frac{1}{6}\ln|2+3\sin 2x|+C$. **57.** $\int \cos(\ln x)\,\frac{dx}{x}$. *Отв.* $\sin(\ln x)+C$.

58. $\int \cos(a+bx)\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{b}\sin(a+bx)+C$. **59.** $\int e^{2x}\,dx$.

Отв. $\frac{1}{2}e^{2x}+C$. **60.** $\int e^{x/3}\,dx$. *Отв.* $3e^{x/3}+C$. **61.** $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$.

Отв. $e^{\sin x}+C$. **62.** $\int a^{x^2}x\,dx$. *Отв.* $\frac{a^{x^2}}{2\ln a}+C$. **63.** $\int e^{x/a}\,dx$. *Отв.* $ae^{x/a}+C$.

64. $\int (e^{2x})^2\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{4}e^{4x}+C$. **65.** $\int 3^x e^x\,dx$. *Отв.* $\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}+C$. **66.** $\int e^{-3x}\,dx$.

Отв. $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$. **67.** $\int (e^{5x}+a^{5x})\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{5}\left(e^{5x}+\frac{a^{5x}}{\ln a}+C\right)$.

68. $\int e^{x^2+4x+3}(x+2)\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+3}+C$. **69.** $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x}\,dx$.

Отв. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x-\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln a-\ln b}-2x+C$. **70.** $\int \frac{e^x\,dx}{3+4e^x}$. *Отв.* $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x)+C$.

71. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{2+e^{2x}}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\ln(2+e^{2x})+C$. **72.** $\int \frac{dx}{1+2x^2}$.

Отв. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x)+C$. **73.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}x)+C$.

74. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$. *Отв.* $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+C$. **75.** $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. *Отв.* $\arcsin\frac{x}{3}+C$.

76. $\int \frac{dx}{4+x^2}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **77.** $\int \frac{dx}{9x^2+4}$. *Отв.* $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$.

78. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$. *Отв.* $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+C$. **79.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$.

Отв. $\ln|x+\sqrt{x^2+9}|+C$. **80.** $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$. *Отв.* $\frac{1}{b}\ln|bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}|+C$.

81. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+a^2x^2}}$. *Отв.* $\frac{1}{a}\ln|ax+\sqrt{b^2+a^2x^2}|+C$. **82.** $\int \frac{dx}{a^2x^2-c^2}$.

Отв. $\frac{1}{2ac}\ln\left|\frac{ax-c}{ax+c}\right|+C$. **83.** $\int \frac{x^2\,dx}{5-x^6}$. *Отв.* $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right|+C$.

84. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$. **85.** $\int \frac{x\,dx}{x^4+a^4}$. *Отв.* $\frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}+C$.

86. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. *Отв.* $\arcsin e^x + C$. 87. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$.

Отв. $\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \sqrt{\frac{5}{3}}\, x + C$. 88. $\int \frac{\cos x\,dx}{a^2+\sin^2 x}$. *Отв.* $\frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{a}\right) + C$.

89. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. *Отв.* $\arcsin(\ln x) + C$. 90. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Отв. $-\frac{1}{2}(\arccos x)^2 + \sqrt{1-x^2} + C$. 91. $\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

Отв. $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C$. 92. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$. *Отв.* $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C$.

93. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$. *Отв.* $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} + C$. 94. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

Отв. $4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$. 95. $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$. *Отв.* $\operatorname{arctg} e^x + C$. 96. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

Отв. $3\sqrt[3]{\sin x} + C$. 97. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin 2x\,dx$. *Отв.* $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3} + C$.

98. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. *Отв.* $-2\sqrt{1+\cos^2 x} + C$. 99. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$.

Отв. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$. 100. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x}\,dx$. *Отв.* $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x} + C$.

101. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\operatorname{tg} x\right) + C$.

Интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$: 102. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Отв. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C$. 103. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{11}} + C$.

104. $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right| + C$. 105. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$.

Отв. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C$. 106. $\int \frac{dz}{2z^2-2z+1}$. *Отв.* $\operatorname{arctg}(2z-1) + C$.

107. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{5}} + C$. 108. $\int \frac{(6x-7)\,dx}{3x^2-7x+11}$.

Отв. $\ln|3x^2-7x+11| + C$. 109. $\int \frac{(3x-2)\,dx}{5x^2-3x+2}$. *Отв.* $\frac{3}{10}\ln(5x^2-3x+2) -$

$- \frac{11}{5\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{10x-3}{\sqrt{31}} + C$. 110. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx$. *Отв.* $\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1) +$

$+ \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$. 111. $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}\,dx$. *Отв.* $\frac{2}{3}\ln(3x-1) +$

$+ \frac{1}{2}\ln(2x+1) + C$. 112. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{5}\ln(5x^2-x+2) -$

$-\frac{8}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{39}}+C$. **113.** $\int\frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}dx$. *Отв.* $x^3-\frac{x^2}{2}+$ $+\frac{1}{4}\ln|2x^2-x+1|+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{7}}+C$. **114.** $\int\frac{dx}{2\cos^2x+\sin x\cos x+\sin^2x}$. *Отв.* $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{7}}+C$.

Интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+C}}dx$: **115.** $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$. **116.** $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$. *Отв.* $\ln|x+\frac{1}{2}+$ $+\sqrt{x^2+x+1}|+C$. **117.** $\int\frac{dS}{\sqrt{2aS+S^2}}$. *Отв.* $\ln|S+a+\sqrt{2aS+S^2}|+C$. **118.** $\int\frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x+7}{\sqrt{109}}+C$. **119.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|6x+5+\sqrt{12x(3x+5)}|+C$. **120.** $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$. *Отв.* $\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{17}}+C$. **121.** $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln|10x-1+$ $+\sqrt{20(5x^2-x-1)}|+C$. **122.** $\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. *Отв.* $2\sqrt{ax^2+bx+c}+C$. **123.** $\int\frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$. *Отв.* $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\ln|2x+1+$ $+\sqrt{4x^2+4x+3}|+C$. **124.** $\int\frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$. *Отв.* $-\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}+C$. **125.** $\int\frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$. *Отв.* $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$. **126.** $\int\frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}dx$. *Отв.* $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x}+\frac{23}{4\sqrt{2}}\ln(4x-1+\sqrt{8(2x^2-x)})+C$.

II. Интегрирование по частям: **127.** $\int xe^x\,dx$. *Отв.* $e^x(x-1)+C$. **128.** $\int x\ln x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$. **129.** $\int x\sin x\,dx$. *Отв.* $\sin x-$ $-x\cos x+C$. **130.** $\int\ln x\,dx$. *Отв.* $x(\ln x-1)+C$. **131.** $\int\arcsin x\,dx$. *Отв.* $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **132.** $\int\ln(1-x)\,dx$. *Отв.* $-x-(1-x)\ln(1-x)+C$. **133.** $\int x^n\ln x\,dx$. *Отв.* $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$. **134.** $\int x\operatorname{arctg}x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{2}[(x^2+1)\operatorname{arctg}x-x]+C$. **135.** $\int x\arcsin x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{4}[(2x^2-1)\arcsin x+$ $+x\sqrt{1-x^2}]+C$. **136.** $\int\ln(x^2+1)\,dx$. *Отв.* $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$.

137. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$. *Отв.* $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$. **138.** $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. *Отв.* $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$. **139.** $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$. *Отв.* $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$. **140.** $\int x\cos^2 x\,dx$. *Отв.* $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$. **141.** $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Отв.* $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$.

142. $\int \frac{x\operatorname{arctg}x}{(x^2+1)^2}\,dx$. *Отв.* $\frac{x}{4(1+x^2)}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}+C$.

143. $\int x\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$.

144. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$. *Отв.* $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{1}{x}\arcsin x+C$.

145. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$. *Отв.* $x\ln|x+\sqrt{1+x^2}|-\sqrt{1+x^2}+C$.

146. $\int \arcsin x\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. *Отв.* $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C$.

Применить тригонометрические подстановки в следующих примерах: **147.** $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$. *Отв.* $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$. **148.** $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$. *Отв.* $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{4}x^3\sqrt{4-x^2}+C$. **149.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. *Отв.* $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$. **150.** $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$. *Отв.* $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$

151. $\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. *Отв.* $\frac{x}{a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$.

Интегрирование рациональных дробей: **152.** $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$. *Отв.* $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+C$. **153.** $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$. *Отв.* $\frac{1}{8}\ln\frac{(x+3)^6}{|x+5|^5\,|x+1|}+C$.

154. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$. *Отв.* $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$.

155. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$. *Отв.* $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|^3}+\frac{16}{3}\ln|x+2|+C$.

156. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$. *Отв.* $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$. **157.** $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$. *Отв.* $\frac{3}{x-2}+\ln\frac{(x-2)^2}{x^2}+C$. **158.** $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$. *Отв.* $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+\ln\frac{x^2}{(x+1)^2}+C$. **159.** $\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$. *Отв.* $-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+C$. **160.** $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$. *Отв.* $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

161. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$. *Отв.* $\ln\frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

162. $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$. *Отв.* $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

163. $\int \frac{dx}{x^3+1}$. *Отв.* $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

164. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}$. *Отв.* $\ln\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **165.** $\int \frac{4dx}{x^4+1}$.

Отв. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$. **166.** $\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$.

Отв. $\frac{1}{3}[x^3+\ln(x^3-1)]+C$. **167.** $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$. *Отв.* $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+$

$+\ln(x^2+2)^{1/2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **168.** $\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$.

Отв. $\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+C$. **169.** $\int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}$.

Отв. $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}+C$.

Интегрирование иррациональных функций: **170.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$.

Отв. $\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right]+C$. **171.** $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx$. *Отв.* $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-$

$-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$. **172.** $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx$. *Отв.* $-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+$

$+2\ln x-24\ln\left(\sqrt[12]{x}+1\right)+C$. **173.** $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx$.

Отв. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-9\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+$

$+\frac{3}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x}+1\right)+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **174.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x^2}$.

Отв. $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$. **175.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$.

Отв. $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+C$. **176.** $\int \frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}\,dx$.

Отв. $14\left[\sqrt[14]{x}-\frac{1}{2}\sqrt[7]{x}+\frac{1}{3}\sqrt[14]{x^3}-\frac{1}{4}\sqrt[7]{x^2}+\frac{1}{5}\sqrt[14]{x^5}\right]+C$.

177. $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\,dx$. *Отв.* $\sqrt{3x^2-7x-6}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left(x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right)+C$.

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$: 178. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$.

Отв. $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+C$. 179. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

Отв. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|+C$. 180. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

Отв. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{x\sqrt{2}}+C$. 181. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$. *Отв.* $\sqrt{x^2+2x}+$ $+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|+C$. 182. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. *Отв.* $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+C$.

183. $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\arcsin(x-1)\right]+C$.

184. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$. *Отв.* $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$.

185. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$. *Отв.* $\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}\right|+C$.

186. $\int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}\,dx$. *Отв.* $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}+C$. 187. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$.

Отв. $\ln\left|\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right|+C$. 188. $\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}\,dx$.

Отв. $-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}}+\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x}|+C$.

Интегрирование тригонометрических функций: 189. $\int \sin^3 x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$. 190. $\int \sin^5 x\,dx$. *Отв.* $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-$ $-\frac{\cos^5 x}{5}+C$. 191. $\int \cos^4 x\sin^3 x\,dx$. *Отв.* $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C$.

192. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$. *Отв.* $\csc x-\frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x+C$. 193. $\int \cos^2 x\,dx$. *Отв.* $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$. 194. $\int \sin^4 x\,dx$. *Отв.* $\frac{3}{8}x-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$.

195. $\int \cos^6 x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{16}\left(5x+4\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}+\frac{3}{4}\sin 4x\right)+C$.

196. $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{\sin 8x}{8}\right)+C$. 197. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$. 198. $\int \operatorname{ctg}^5 x\,dx$. *Отв.* $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+$ $+\ln|\sin x|+C$. 199. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$. *Отв.* $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|+C$.

200. $\int \sec^8 x\,dx$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+\frac{3\operatorname{tg}^5 x}{5}+\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x+C$. 201 $\int \operatorname{tg}^4 x\sec^4 x\,dx$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$. 202 $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. *Отв.* $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. 203. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$.

Отв. $C-\operatorname{cosec} x$. **204.** $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$. *Отв.* $\frac{3}{5}(\cos^{5/3} x)+3(\cos^{-1/3} x)+C$.

205. $\int \sin x \sin 3x\,dx$. *Отв.* $-\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+C$. **206.** $\int \cos 4x \cos 7x\,dx$. *Отв.* $\frac{\sin 11x}{22}+\frac{\sin 3x}{6}+C$. **207.** $\int \cos 2x \sin 4x\,dx$. *Отв.* $-\frac{\cos 6x}{12}-\frac{\cos 2x}{4}+C$.

208. $\int \sin\frac{1}{4}x\cos\frac{3}{4}x\,dx$. *Отв.* $-\frac{\cos x}{2}+\cos\frac{1}{2}x+C$. **209.** $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$. *Отв.* $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+C$. **210.** $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

211. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$. *Отв.* $\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+x+C$. **212.** $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$. *Отв.* $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$.

213. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$. *Отв.* $\operatorname{arctg}(2\sin^2 x-1)+C$. **214.** $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$. *Отв.* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+C$. **215.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$. *Отв.* $-\frac{1}{2}\left[\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$. **216.** $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$. *Отв.* $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)-x+C$.

Микромодуль 7

Определенный интеграл

При решении многих важных задач приходится суммировать бесконечно большое число бесконечно малых слагаемых. Это приводит к одному из центральных понятий математики, именно, к понятию определенного интеграла.

4.3. Определение и основные свойства

I. Примеры, приводящие к понятию определенного интеграла.

Рассмотрим задачу, обратную той, которая разбиралась нами при определении понятия производной. А именно, будем считать, что нам известен закон изменения мгновенной скорости $v = v(t)$ при движении точки и нас интересует путь, пройденный за некоторый промежуток времени от $t = \alpha$ до $t = \beta$.

Поскольку движение не предполагается равномерным, мы не можем вычислять путь как произведение скорости на истекшее время. Поэтому для подсчета пути поступим следующим образом. Разобьем весь промежуток времени на большое число малых, не обязательно равных друг другу интервалов времени

$$t_0(=\alpha) \leqslant t \leqslant t_1, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \ldots, \ t_{n-1} \leqslant t \leqslant t_n(=\beta),$$

где $t_1, \ldots, t_{n-1}$ — некоторые промежуточные произвольно выбранные моменты времени. Если эти интервалы достаточно малы, то без большой ошибки на каждом из них движение можно считать равномерным, что даст приближенное выражение для пути

$$s \approx v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \ldots + v_n \Delta t_n; \quad (4.40)$$

здесь $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, а v_k — какое-либо из значений мгновенной скорости v на k-м интервале времени, т е. $v_k = v(\tau_k), t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$. (Обратим внимание на некоторое отличие этих обозначений от обозначений ранее, где было $t_k - t_{k-1} = \Delta t_{k-1}$, $v_k = v(t_k)$. Поэтому формулу (4.40) можно иначе записать так:

$$s \approx \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k) \Delta t_k \qquad (\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta; \quad t_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant t_k).$$

Эта формула тем точнее, чем мельче разбиение основного промежутка времени; чтобы получить точную формулу, *надо перейти к пределу, приняв, что это разбиение бесконечно измельчается:*

$$s = \lim \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k) \Delta t_k. \quad (4.41)$$

Подобным образом в рассмотренной нами задаче о наполнении сосуда, при известной, но переменной скорости наполнения $w—w(t)$ общий объем V, наполненный за промежуток времени от α до β, равен

$$V = \lim \sum_{k=1}^{n} w(\tau_k) \Delta t_k \quad (4.42)$$

при том же смысле обозначений. Как и для формулы (4.41), это осно-вано на том, что на протяжении малого промежутка времени скорость наполнения при подсчете наполненного объема можно считать почти постоянной; точнее говоря, на протяжении бесконечно малого промежу тка времени эту скорость можно считать постоянной.

В третьем примере, который мы рассматривали ранее, если считать заданной линейную плотность ρ нити в каждой точке s, т. е. $\rho=\rho(s)$, аналогично получим общую массу нити

$$M = \lim \sum_{k=1}^{n} \rho(\sigma_k)\,\Delta s_k \quad (\alpha = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = \beta,\ s_{k-1} \leqslant \sigma_k \leqslant s_k), \tag{4.43}$$

причем предел берется в процессе, когда воображаемое разбиение нити бесконечно измельчается; α и β —значения *s*, отвечающие концам нити.

Рассмотрим, наконец, важный геометрический пример. Пусть требуется вычислить площадь фигуры, заштрихованной на рис. 4.3 и называемой *криволинейной трапецией,* причем для простоты будем считать, что $f(x)>0$. Если разбить весь интервал $\alpha \le x \le \beta$ изменения x на малые промежутки при помощи точек деления $x_o = \alpha < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \beta$ и принять высоту на каждом

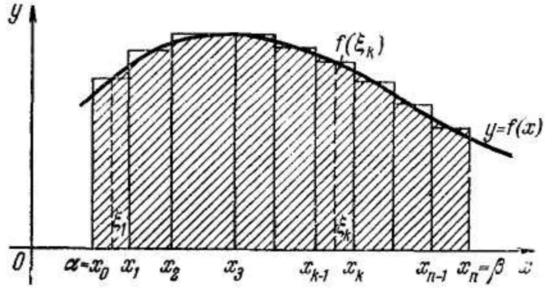


Рис.4.3

из этих малых промежутков постоянной, то получим приближенное выражение для площади криволинейной трапеции

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \qquad (\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k).$$

Геометрический смысл правой части — это площадь ступенчатой фигуры, изображенной на рис. 4.3 и полученной в результате замены каждого из *n* столбиков, на которые разбита криволинейная трапеция, прямоугольником с тем же основанием и с высотой, равной одной из высот столбика. В пределе, при бесконечном измельчении разбиения, получаем

$$S = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{4.44}$$

2. Основное определение. Выражения (4.41) — (4.44), получающиеся при решении различных задач, имеют одинаковую структуру. Аналогичные выражения получаются и во многих других задачах, что дает основание для следующего общего определения.

Пусть некоторая функция $f(x)$ задана при $\alpha \leq x \leq \beta$. Разобьем произвольно этот интервал на маленькие промежутки при помощи точек деления $x_o = \alpha < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \beta$ и образуем *интегральную сумму*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n, \tag{4.45}$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, а каждая из точек ξ_k произвольно выбрана между x_{k-1} и x_k, т. е. на k-м промежутке разбиения. *Пусть теперь разбиение бесконечно измельчается; тогда предел, к которому стремится интегральная сумма в этом процессе, называется определенным интегралом от функции f(x) по интервалу интегрирования* $\alpha \leq x \leq \beta$ и обозначается

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{4.46}$$

В примерах п. 1 получаем соответственно

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\,dt, \quad V = \int_{\alpha}^{\beta} w(t)\,dt, \quad M = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(s)\,ds, \quad S = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx. \tag{4.47}$$

Из последнего равенства ясен геометрический смысл определенного интеграла в случае, если подынтегральная функция положительна: *он равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком подынтегральной функции, осью абсцисс и прямыми, параллельными, оси ординат, построенными на концах интервала интегрирования.*
Эти концы называются *нижним* и *верхним пределами интегрирования.*

Если подынтегральная функция отрицательна или меняет знак, то в интегральную сумму (4.45) некоторые члены войдут со знаком минус. В пределе получится, что интеграл равен *алгебраической сумме площадей* участков криволинейной трапеции, причем (рис. 4.4) площади участков, лежащих выше (соответственно ниже) оси *x,* берутся со знаком + (соответственно —).

Из сравнения формул (4.47) следует также, что для получения пройденного пути при заданной на графике (рис. 4.5) зависимости скорости от времени надо просто взять площадь соответствующей кри-волинейной трапеции. И здесь,

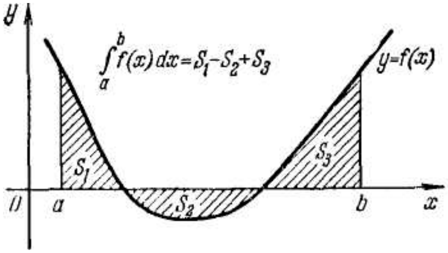


Рис. 4.4.

если v < 0, график проходит ниже оси t, а приращение координаты движущейся точки отрицательно, т.е.указанную площадь надо брать знаком —.

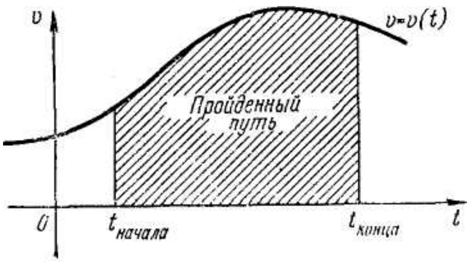


Рис.4.5.

Это *правило знаков при подсчете площадей* действует и в большом числе других примеров.

Остановимся на предельном переходе в формуле (4.46). Иногда говорят, что предел берется при $n\to\infty$; это не совсем точно, так как участки Δx_k не предполагаются равными и если потребовать только, чтобы $n\to\infty$, то может получиться, что одна часть интервала $\alpha \leq x \leq \beta$ измельчается, а другая—нет. Лучше говорить, что *предал берется при безграничном измельчении интервала интегрирования.* Степень этого измельчения можно охарактеризовать наибольшей из длин Δx_k участков данного разбиения, так как если наибольшая из этих длин мала, то и все длины малы. Поэтому можно сказать, что предельный переход в формуле (4.46) осуществляется в процессе, когда $\max\limits_k \Delta x_k \to 0$.

Приведем пример подсчета интеграла на основе его определения (4.46). 1

Пусть надо вычислить интеграл $\int_0^1 x^2\,dx$. Разобьем интервал интегрирования на пять равных частей длины 0,2 и выберем для определенности на каждой из этих частей точку в левом конце. Тогда

$$\xi_1 = 0{,}0;\quad \xi_2 = 0{,}2;\quad \xi_3 = 0{,}4;\quad \xi_4 = 0{,}6;\quad \xi_5 = 0{,}8$$

и

$$\int_0^1 x^2\,dx \approx \sum_{k=1}^{5} \xi_k^2\,\Delta x_k = (0{,}0^2 + 0{,}2^2 + 0{,}4^2 + 0{,}6^2 + 0{,}8^2)\cdot 0{,}2 = 0{,}24.$$

При аналогичном разбиении на 10 частей получилось бы значение 0,29, а при разбиении на 100 частей — значение 0,33, которое совсем близко к точному значению, равному 1/3, как ми увидим в п. 3.

Таким образом, хотя интегральная сумма (4.45) обладает высокой степенью произвола, она зависит как от выбора точек деления x_k, так и от выбора промежуточных точек $\xi_к$, но если разбиение взять достаточно мелким, то эта сумма практически просто равна своему пределу, т. е. интегралу (4.46) (который, конечно, уже не зависит ни от точек $x_к$, ни от $\xi_к$). При достаточно мелком разбиении каждое из слагаемых в сумме становится весьма малым за счет малости Δx_k, но число слагаемых столь велико, что вся сумма имеет конечное значение; грубо говоря, если число слагаемых в сумме равно n, то все Δx_k, а потому и каждое слагаемое в сумме имеют порядок $1/n$. Учитывая знак предела в формуле (4.46), можно сказать, что *определенный интеграл* — это *сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.* На практике часто можно определенный интеграл рассматривать просто как сумму весьма большого числа весьма малых однородных (т. е. одной размерности, одного характера, одного смысла) слагаемых, столь малых, что эта сумма практически равна своему пределу. Это вполне соответствует понятию о практических бесконечно больших и бесконечно малых величинах, как о величинах достаточно больших и достаточно малых, но теоретически конечных. Отметим, что не всякая сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых дает интеграл: это ясно уже из того, что, как было сказано выше, число слагаемых и их размер должны быть согласованы так, чтобы эта сумма принимала конечное значение.

Из такого истолкования интеграла как суммы проистекло его обозначение. Если считать слагаемые в сумме (4.45) практически бесконечно малыми и обозначить тогда $\Delta x_k = dx$. то всю сумму (4.45) можно переписать в виде

$$\sum_{\text{от } x=\alpha}^{\text{до } x=\beta} f(x)\,dx.$$

В заключение отметим, что подынтегральная функция на интервале интегрирования может быть либо непрерывной, либо разрывной,

т. е. иметь точки разрыва. Однако в этом разделе обязательно требуется, *чтобы интервал интегрирования был конечным и подынтегральная функция на этом интервале нигде не обращалась в бесконечность.* Тогда в более полных курсах математического анализа доказывается, без всякой ссылки на геометрический пли физический смысл, что интеграл обязательно существует, т. е. имеет определенное конечное числовое значение. Если же указанные условия нарушаются, то, как будет показано ранее, интеграл может оказаться лишенным численного значения.

3. Связь определенного интеграла с неопределенным. Начнем с простого замечания: *определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования,* т. е.

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(s)\,ds \quad \ldots \tag{4.48}$$

Это вытекает хотя бы из геометрического смысла интеграла, так как все выписанные интегралы равны одной и той же площади. Итак, *переменная интегрирования в определенном интеграле является немой,* подобно индексу суммирования, и потому может быть обозначена любой буквой.

Пусть дана некоторая функция $f(x)$, которую мы будем интегрировать. Однако только нижний предел x_0 мы будем считать зафиксированным, а верхний предел x будем считать произвольным, переменным. Тогда результат интегрирования будет зависеть от x и мы его обозначим через $\Phi(x)$. Это можно записать так:

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \quad (x_0 = \text{const})$$

или, лучше, имея в виду равенства (4.48), так:

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad (x_0 = \mathrm{const}). \tag{4.49}$$

Первая запись, хотя и допустимая, иногда приводит к недоразумениям, так как буква x в ней имеет два различных смысла (верхний предел и переменная интегрирования), о чем надо помнить.

Докажем, что построенная функция $\Phi(x)$ является первообразной для подынтегральной функции $f(x)$, т. е.

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(x):$$

производная от интеграла по верхнему пределу равна значению подынтегральной функции на верхнем пределе. Для этого сначала предположим функцию $f(x)$ непрерывной и рассмотрим рис.4.6. Из геометрического смысла интеграла вытекает, что если x получит приращение Δx, то $\Delta\Phi$ равно заштрихованной площади. Эта площадь равна произведению $\Delta x \cdot f^n$, где f^n — некоторая средняя ордината между x и $x + \Delta x$. Отсюда

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f^* = f(x^*),$$

и если

$$\Delta x \longrightarrow 0,$$

то

$x^* \to x$ и пределе получаем

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x^*) = f(x),$$

что и требовалось доказать. Мы видим, в частности, что *непрерывная функция всегда имеет первообразную*; чтобы ее получить, надо взять определенный интеграл от заданной функции при зафиксированном нижнем пределе и рассмотреть его как функцию от верхнего предела.

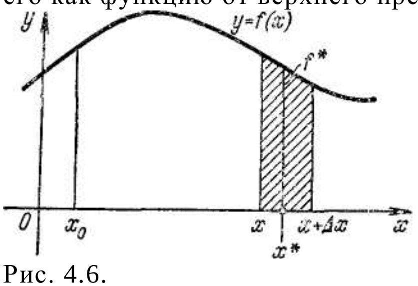


Рис. 4.6.

Если подынтегральная функция разрывна (но конечна, так как мы пока рассматриваем только конечные функции), то в ее точках разрыва функция (4.49) непрерывна, но имеет «излом» (рис. 4.7), так как производная от Ф (x) при переходе через такую точку должна претерпеть скачок. Допуская такие изломы, мы расширяем понятие первообразной функции, так как в самой точке излома единой производной нет. При этом естественном расширении получается, что и всякая всюду конечная функция имеет первообразную, которая является непрерывной функцией.

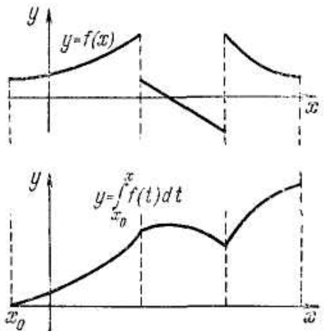


Рис.4.7.

Допустим теперь, что нам надо вычислить интеграл

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

и мы знаем *какую-то* первообразную *F(x) к* функции *f(x).* Так как функция

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$$

— тоже первообразная к *f(x),* то

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt=F(x)+C,$$

где C — некоторая постоянная. Если здесь положить x=α, то из геометрического смысла интеграла вытекает, что левая часть обратится в нуль, т. е.

$$0=F(\alpha)+C;\quad C=-F(\alpha),\ \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt=F(x)-F(\alpha).$$

Если в последней формуле положить x=β, то на основе (4.48) получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha), \tag{4.50}$$

т. е. *определенный интеграл равен приращению первообразной к подынтегральной функции, когда независимая переменная изменяется от нижнего до верхнего предела.* Правую часть равенства (4.50) записывют еще в виде

$F(x)\Big|_{\alpha}^{\beta}$, где $\Big|_{\alpha}^{\beta}$ — знак *двойной подстановки,* который означает, что в рассматриваемую функцию надо подставить вместо аргумента верхний предел, затем нижний и из первого результата вычесть второй.

Формулу (4.50) записывают еще так:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_{\alpha}^{\beta}, \tag{4.51}$$

так как

$$\left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_{\alpha}^{\beta} = (F(x)+C)\Big|_{\alpha}^{\beta} =$$
$$= [F(\beta)+C] - [F(\alpha)+C] = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Итак, *определенный интеграл равен приращению неопределенного.* Этот результат, один из важнейших в математике, называется *теоремой Ньютона — Лейбница.*

Например,

$$\int_{0}^{1} x^2\,dx = \left(\int x^2\,dx\right)\Big|_{0}^{1} = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Отметим, что здесь мы при вычислении неопределенного интеграла не писали произвольной постоянной *С,* так как выше мы видели, что члены +С и —С все равно взаимно уничтожаются. Хорошо видно, что *определенный интеграл при заданных пределах интегрирования является постоянным числом, тогда как неопределенный интеграл является функцией.*

До сих пор мы считали, что $\alpha < \beta$. *Если* $\alpha \geq \beta$, *то формула* (4.50) *принимается за определение интеграла, стоящего в левой части.*

Так как $f(x) = F'(x)$, то формулу (4.50) можно переписать так:

$$\int_{\alpha}^{\beta} F'(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha),$$

т. е. *определенный интеграл от производной равен приращению первообразной.*

Рассмотрим несколько примеров

Пример 1.

$$\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Пример 2.

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

Пример 3.

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1).$$

Пример 4.

$$\int_a^b e^x\,dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a.$$

4. Основные свойства определенного интеграла.

1. *При перестановке пределов интегрирования интеграл умножается на* —1. Действительно, в силу формулы (10.50)

$$\int_\beta^\alpha f(x)\,dx = F(\alpha) - F(\beta) = -[F(\beta) - F(\alpha)] = -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Это простое свойство, которое можно записать также в виде

$$F(x)\Big|_\alpha^\beta = -F(x)\Big|_\beta^\alpha,$$

дает возможность, изменив знак у неопределенного интеграла, подставлять пределы в обратном порядке, т. е. вычислять так:

$$\int_3^5 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_3^5 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$

Из свойства 1, в частности, вытекает правило дифференцирования интеграла по нижнему пределу:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^{x_0} f(t)\,dt\right) = -\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) = -f(x).$$

Следующее свойство уже применялось в п. 3.

2. *Если пределы интегрирования совпадают, то интеграл равен нулю,* т.е.

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0.$$

3. *«Теорема о разбиении интервала интегрирования»:*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx.$$

Действительно, левая часть равна

$$[F(\beta) - F(\alpha)] + [F(\gamma) - F(\beta)] = F(\gamma) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx.$$

4. *Интеграл от суммы равен сумме интегралов:*

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \pm \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx.$$

Для доказательства надо исходить из аналогичного свойства неопределенных интегралов и приравнять приращения левой и правой частей, когда x меняется от α до β.

5. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:*

$$\int_{\alpha}^{\beta} Mf(x)\,dx = M\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \qquad (M = \text{const}).$$

Свойства 4 и 5 совместно читаются так: *определенный интеграл линеен относительно подынтегральной функции.*

Здесь термин «линеен» понимается так. Формула

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1 \qquad (4.53)$$

при зафиксированных α, β ставит в соответствие каждой конечной функции, определенной при $\alpha \le x \le \beta$ число 1. Другими словами, формула (4.53) определяет отображение бесконечномерного линейного пространства всех таких функций в одномерное линейное пространство всех чисел, а свойства 4 и 5 означают, что это отображение линейное. (Проверьте, например, что при $\alpha = 1$, $\beta = 2$ функции $y=— x^2$ отвечает число 1=3/7, функции $y=1/x^3$ —число 3/8, а функции $y = 5x^2$ —число 5•(7/3)—3•(3/8) = 10,54.) Закон, по которому функциям ставятся в соответствие числа, называется *функционалом;* значит, формула (4.53) определяет *линейный функционал,* определенный на указанном пространстве функций.

6. *Формула интегрирования по частям*

$$\int_{\alpha}^{\beta} uv'\,dx = (uv)\Big|_{x=\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} u'v\,dx$$

также получается из соответствующей формулы для неопределенных интегралов.
Например,

$$\int_{0}^{\pi} x\,\sin x\,dx = \begin{vmatrix} u=x, & dv=\sin x\,dx \\ du=dx, & v=-\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= (-x\cos x)\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \cos x\,dx = (-x\cos x)\Big|_{0}^{\pi} + (\sin x)\Big|_{0}^{\pi} = \pi.$$

7. *Формула замены переменной для определенных интегралов* получается, если приравнять приращения обеих частей формулы (4.20), когда t меняется от α до β. Учитывая, что при этом x, равный $\varphi(t)$, изменится от φ (α) до φ(β), получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \left[\int f(x)\,dx\right]\Big|_{x=\varphi(\beta)} - \left[\int f(x)\,dx\right]\Big|_{x=\varphi(\alpha)}$$

или, учитывая формулу (4.51),

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

Таким образом, здесь надо дополнительно произнести замену пределов интегрирования, выяснив интервал, который должна пройти новая переменная, чтобы связанная с ней старая переменная интегрирования прошла первоначально заданный для нее интервал.

Если, например, при вычислении интеграла

$$\int_{0}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

мы хотим совершить подстановку $x = R\sin t$, то надо учесть, что если x менялось от 0 до R, то t уже будет меняться от 0 до π/2. Поэтому

$$\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\;R\cos t\,dt=$$

$$=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{R^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{R^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi R^2}{4}.$$

Как видим, в отличие от замены переменной в неопределенном интеграле, здесь не требуется выполнять обратную подстановку, т. е. перейти в ответе к старой переменной.

Мы вывели свойства 3—5 определенного интеграла с помощью формулы (4.50). *Однако их можно было бы вывести и на основе определения* (4.46) *интеграла как предела интегральной суммы.* Например, переходя в формуле

$$\sum_{k=1}^{n}[f_1(\xi_k)\pm f_2(\xi_k)]\,\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n} f_1(\xi_k)\,\Delta x_k\pm\sum_{k=1}^{n} f_2(\xi_k)\,\Delta x_k$$

к пределу при бесконечном измельчении разбиения интервала $\alpha\le x\le\beta$, получаем свойство 4 и т. д. Из того же определения вытекает свойство

8. Если рассматриваемые переменные размерны, то

$$\left[\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right]=[f]\cdot[x],$$

так как суммирование и переход к пределу не меняют размерности.

9. *Интегрирование в симметричных пределах часто можно упростить* по формулам (рис. 4.8):

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx,\text{ если } f(x)\text{ — четная функция,}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0,\text{ если } f(x)\text{ — нечетная функция.}$$

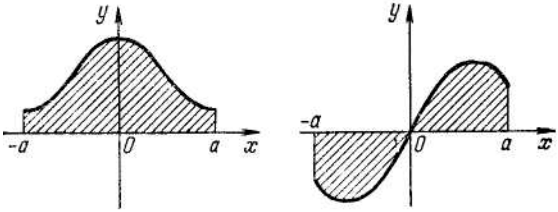


Рис.4.8.

10. *Интеграл от периодической функции по периоду не зависит от положения интервала интегрирования:* другими словами, если $f(x+A) = f(x)$, то интеграл

$$I = \int_x^{x+A} f(s)\,ds$$

не зависит от x. В самом доле, по правилу дифференцирования сложной функции и на основе формул для производной интеграла по верхнему и нижнему пределам получаем

$$\frac{dI}{dx} = f(x+A)\frac{d(x+A)}{dx} - f(x)\frac{dx}{dx} = f(x+A) - f(x) = 0.$$

Приведем в заключение несколько примеров ошибочного вычисления интегралов

$$1.\ \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = \cos t \\ \pi \leqslant t \leqslant 2\pi \end{matrix} \right| = \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t)\,dt =$$

$$= -\int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 t\,dt = -\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = -\frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{\pi}^{2\pi} = -\frac{\pi}{2};$$

этот результат заведомо ошибочный, так как *интеграл от положительной функции в положительном направлении,* т. е. от меньшего к большему, *должен быть положительным.* Ошибка состояла в том, что мы заменили $\sqrt{\sin^2 t}$ на $\sin t$, тогда как надо было на $|\sin t|$, а так как при $\pi < t < 2\pi$ будет $\sin t < 0$, то для таких t будет $\sqrt{\sin^2 t} = -\sin t$, что привело бы к правильному результату.

В аналогичных случаях иногда получаются интегралы вида

$$\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Такие интегралы можно вычислять так. Находим интервалы знакопостоянства функции $f(x)$; пусть, например, $f(x) > 0$ при $a < x < c$, $f(x) < 0$ при $c < x < d$ и $f(x) > 0$ при $d < x < b$. Тогда

$$\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^c |f(x)|\,dx+\int_c^d |f(x)|\,dx+\int_d^b |f(x)|\,dx=$$

$$=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx$$

и т. д.

2. $$\int_{-1}^{2} x^2\,dx=\left|\begin{matrix} x^2=t \\ x=\sqrt{t}\end{matrix}\right|=\int_1^4 t\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\,\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3};$$

это противоречит правильному значению 3, которое получится, если не пользоваться подстановкой. Ошибка состояла в том, что формула перехода $x = \sqrt{t}$ при $x < 0$ недействительна. Если почему-либо надо провести указанную подстановку $x^2= t$, то надо разбить

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx=\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{2}$$

и в первом интеграле положить $x = \sqrt{t}$ $(1\geq t\geq 0)$, а во втором $x=\sqrt{t}$ $(0 \leq t\leq 4)$.

3. $$\int_{-1}^{2} x^{-2}\,dx=\frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{2^{-1}-(-1)^{-1}}{-1}=-\frac{3}{2}.$$

Этот результат, как и в примере 1, заведомо ошибочный. Ошибка состояла в том, что подынтегральная функция обращается на интервале интегрирования в бесконечность при х = 0. Как быть с такими интегралами, будет сказано в п. 16.

5. Интегрирование неравенств. Из определения интеграла и из его геометрического смысла (п. 2) вытекает, что

$$\text{если } f(x)\geqslant 0 \quad \text{и} \quad \alpha<\beta, \quad \text{то} \quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx\geqslant 0. \tag{4.54}$$

Последнее неравенство может обратиться в равенство, только если $f(x)= 0$ $(\alpha\leq x\leq\beta)$. Впрочем, подынтегральная функция может быть отличной от нуля в отдельных, дискретных точках, так как такие значения не сказываются на значении интеграла.

Если дано, что

$$\varphi(x)\leqslant\psi(x) \quad \text{при} \quad \alpha\leqslant x\leqslant\beta, \tag{4.55}$$

то, обозначив $\psi(x) - \varphi(x)=f(x)$ и применяя утверждение (4.54), получим

$$\int_\alpha^\beta [\psi(x)-\varphi(x)]\,dx \geqslant 0, \quad \int_\alpha^\beta \psi(x)\,dx - \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx \geqslant 0,$$

т.е.

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx \leqslant \int_\alpha^\beta \psi(x)\,dx. \tag{4.56}$$

Итак, из неравенства (4.55) мы получили (4.56), т. е. *неравенства можно интегрировать в положительном направлении.*

Как и выше, в условиях (4.55) неравенство (4.56) может обратиться в равенство, только если $\varphi(x)\equiv \psi(x)$ при $\alpha\leq x\leq\beta$.

В качестве следствия получим *самую грубую оценку интеграла.* Пусть

$$f_{\min} \leqslant f(x) \leqslant f_{\max} \qquad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta),$$

где $f_{\min}$ и $f_{\max}$—две константы. Интегрируя эти неравенства, получим

$$f_{\min}(\beta-\alpha) \leqslant \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leqslant f_{\max}(\beta-\alpha). \tag{4.57}$$

В связи с этой оценкой находится важное понятие *среднего* (говорят также «среднего интегрального» или «среднего арифметического») *значения функции.* Если функция $f(x)$ рассматривается на интервале $\alpha\leq x\leq\beta$, то ее средним значением на этом интервале называется такая константа $\bar{f}$, интеграл от которой по интервалу $\alpha\leq x\leq\beta$ равен интегралу от функции $f(x)$ по этому интервалу. Таким образом,

$$\int_\alpha^\beta \bar{f}\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx, \quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \bar{f}\cdot(\beta-\alpha).$$

Из последней *формулы среднего значения* получаем выражение для среднего значения

$$\bar{f} = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Из неравенства (4.57) вытекает, как и следует ожидать, что

$$f_{\min} \leqslant \bar{f} \leqslant f_{\max}.$$

Геометрический смысл среднего значения функции показан на рис. 4.9: $\bar{f}$ должно быть таким, чтобы площадь прямоугольника $AB'C'D$ равнялась площади криволинейной трапеции $ABCD$. Ясно, что если функция $f(x)$ непрерывная, то она принимает где-то на интервале $\alpha<x<\beta$ значение (на рис. 4.9 при $x = \gamma$); разрывная функция может не принимать своего среднего значения.

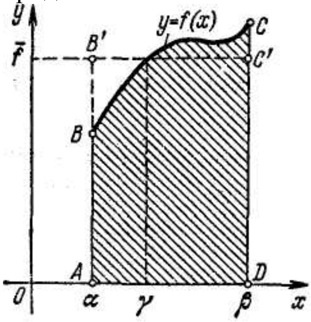


Рис.4.9.

Разумность приведенного здесь определения среднего значения функции хорошо видна, например, при рассмотрении зависимости мгновенной скорости от времени в процессе неравномерного движения точки. Так как интеграл от скорости по времени равен пути (см. первую формулу 4.47)), то получается, что среднее значение скорости за некоторый промежуток времени— это такая постоянная скорость, при которой точка за тот же промежуток времени прошла бы тот же путь, что и при рассматриваемом неравномерном движении. Другими словами, в силу (4.58) среднее значение скорости за конечный промежуток времени при неравномерном движении — это отношение пройденного пути к истекшему времени; таким образом, это понятие совпадает с хорошо известным понятием средней скорости. Применяющиеся в физике понятия средней плотности, средней мощности и т. д. также находятся в соответствии с указанным общим понятием среднего значения функции.

Если функция $f(x)$ задана на бесконечном интервале, например, при $\alpha \le x < \infty$, то ее средним значением называется

$$\bar{f} = \lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx,$$

т. е. предел среднего значения по конечному интервалу. Легко проверить, что этот предел, если он существует, не зависит от выбора значения α.

Например, в цепи переменного тока сила тока и напряжение обычно выражаются формулами $f = f_0\cos(\omega t+\alpha)$, $u=u_0\cos(\omega t+\alpha+\varphi)$, где φ—постоянный сдвиг фазы напряжения по сравнению с силой тока. Поэтому средняя потребляемая мощность равна

$$\overline{h}=\overline{ju}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T j_0\cos(\omega t+\alpha)\,u_0\cos(\omega t+\alpha+\varphi)\,dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{j_0u_0}{2T}\int_0^T[\cos(2\omega t+2\alpha+\varphi)+\cos\varphi]\,dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{j_0u_0}{4\omega}\,\frac{\sin(2\omega T+2\alpha+\varphi)-\sin(2\alpha+\varphi)}{T}+\frac{j_0u_0}{2}\cos\varphi\right\}=\frac{j_0u_0}{2}\cos\varphi.$$

Отсюда вытекает значение величины cosφ в электротехнике.

Укажем в заключение одно неравенство, которое иногда применяется. Если для интегральной суммы (4.45) записать, что абсолютное значение суммы не превосходит суммы абсолютных значений :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)\,\Delta x_k|=\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)|\,\Delta x_k,$$

а затем перейти к пределу, то мы получим

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\,dx. \tag{4.59}$$

Другими словами, *абсолютное значение интеграла не превосходит интеграла от абсолютного значения функции.*

4.4. Численное интегрирование

Общие замечания. Описанный в п. 3 основной способ вычисления определенного интеграла с помощью неопределенного на практике не всегда возможен и целесообразен. Как было указано ранее, многие неопределенные интегралы даже от элементарных функций не выражаются через элементарные функции или имеют чрезмерно громоздкие выражения. Кроме того, функция, которую надо проинтегрировать, может быть задана не формулой, а как-либо иначе. В этих случаях для вычисления интегралов применяется целый ряд способов, о которых мы сейчас дадим общее представление.

1. *Интегралы могут выражаться через хорошо изученные и зата- булированные неэлементарные «специальные» функции.*

Такими являются, например, *функция ошибок*

$$\operatorname{Erf} x = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad (-\infty < x < \infty),$$

от английского «error function»; *интегралы Френеля* (О. Френель, французский физик, создатель волновой теории света)

$$C(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt, \qquad S(x) = \int_0^x \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt \qquad (-\infty < x < \infty);$$

интегральная показательная функция

$$\operatorname{Ei} x = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,dt \qquad (-\infty < x < 0);$$

интегральный синус и *интегральный косинус*

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad (-\infty < x < \infty),$$

$$\operatorname{Ci} x = \int_\infty^x \frac{\cos t}{t}\,dt \qquad (0 < x < \infty)$$

и многие другие функции.

Например, чтобы вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx,$$

произведем интегрирование по частям

$u = \sin^2 x,\ dv = x^{-2}\,dx,$

$$I = -\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2\sin x\cos x}{x}\,dx = -\sin^2 1 + \int_0^1 \frac{\sin 2x}{x}\,dx = |\,2x = t\,| =$$

$$= -\sin^2 1 + \int_0^2 \frac{\sin t}{t}\,dt = -\sin^2 1 + \operatorname{Si} 2 = 0{,}8973;$$

2. *Иногда удается найти точное значение для определенного интеграла с теми или иными пределами, не вычисляя неопределенного интеграла.* Это часто бывает довольно трудно, хотя некоторые примеры будут даны в дальнейшем.

Например, в некоторых источниках мы можем прочитать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^p x\,dx = \frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{p\pi}{2}\right)^{-1} \quad (-1 < p < 1), \qquad \int_0^{\pi} \ln\sin x\,dx = -\pi\ln 2 \text{ и т. п.,}$$

хотя соответствующие неопределенные интегралы не являются элементарными функциями.

3. *Часто применяются разложения подынтегральной функции в ряды различного вида.* Подробное описание этого метода будет дано далее, однако простые степенные ряды можно применять уже сейчас.

Например, применяя ряд для e^x, получим

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots - 1}{x}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\right) dx = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 3!} + \ldots = 1{,}318 \text{ (с точностью до } 0{,}001).$$

Как говорилось ранее, к подобным рядам на практике надо относиться как к конечным суммам, число членов которых берется в соответствии с требуемой степенью точности.

4. *Графическое интегрирование* применяется, если подынтегральная функция задана графиком. Оно основано на геометрическом смысле определенного интеграла (п. 2), равного площади соответствующей криволинейной трапеции.

5. Наиболее универсальными методами, пригодными к интегралам от произвольных функций, заданных любым способом, в особенности таблично (это, в частности, удобно при применении вычислительных машин), являются методы численного интегрирования (п. 13).

13. Формулы численного интегрирования.

Эти формулы дают приближенные значения определенного интеграла, если известны значения подынтегральной функции в некоторых точках *(узлах)* интервала интегрирования.

Начнем с наиболее простой формулы. Пусть требуется вычислить

$$\int_a^b y\,dx, \qquad y = f(x), \tag{4.60}$$

причем предполагается, что интервал интегрирования $a \le x \le b$ разбит на некоторое число n равных частей и заданы или вычислены значения подынтегральной функции в точках деления.

Обозначим

$$\frac{b-a}{n} = h, \quad f(a) = y_0, \quad f(a+h) = y_1,$$

$$f(a+2h) = y_2, \quad \ldots, \quad f(a+nh) = f(b) = y_n.$$

Если провести ординаты для каждого из полученных узлов, то криволинейная трапеция, площадь которой равна интегралу (4.60), разбивается (рис. 4.10) на n столбиков, каждый из которых также представляет собой криволинейную трапецию. Заменим эти столбики прямолинейными («школьными») трапециями, построенными на крайних ординатах, как показано на рис. 4.10. Площади этих трапеций последовательно равны

$$\frac{y_0+y_1}{2}h, \quad \frac{y_1+y_2}{2}h, \quad \ldots, \quad \frac{y_{n-1}+y_n}{2}h.$$

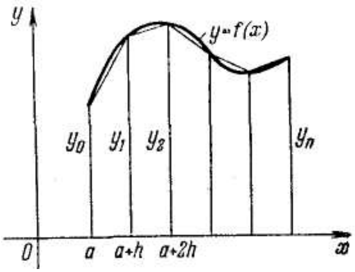


Рис. 4.10.

Сложив эти площади, мы получим площадь многоугольной фигуры, вписанной в исходную криволинейную трапецию. Если n достаточно велико, т. е. h достаточно мало, то эта площадь приближенно равна площади криволинейной трапеции, т. е. интегралу, и мы получаем

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}h + \frac{y_1+y_2}{2}h + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}h$$

или

$$\int_a^b y\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \tag{4.61}$$

Это — так называемая *формула трапеций.*

Формуле трапеций можно дать истолкование, не зависящее от ее геометрического смысла. По сути дела, мы перед интегрированием заменили на каждом из интервалов $a \leq x \leq a+h$, $a+h \leq x \leq a+2h$ и т. д. рассматриваемую функцию $y = f(x)$ на линейную, принимающую те же значения в концевых точках, т. е. произвели линейную интерполяцию, после чего уже осуществили интегрирование. Но ранее были приведены интерполяционные формулы, дающие приближение функции с гораздо большей точностью, чем при линейной интерполяции. Поэтому формулы численного интегрирования, полученные на основе этих интерполяционных формул, являются значительно более точными, чем формула (4.61).

Если применить интерполяционный многочлен второй степени, то получится *формула Симпсона*. Предположим сначала, что значения интегрируемой функции даны в трех точках

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_0+h) = y_1, \quad y(x_0+2h) = y_2.$$

Тогда интерполяционный многочлен второй степени, принимающий в этих точках такие же значения, выписывается по формуле Ньютона :

$$P(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{s}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2} \frac{s}{h}\left(\frac{s}{h} - 1\right) \qquad (s = x - x_0).$$

Отсюда для интеграла получаем выражение

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} P(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} x - x_0 = s \\ dx = ds \\ 0 \leqslant s \leqslant 2h \end{array} \right| = \int_0^{2h} \left[y_0 + \Delta y \frac{s}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2}\left(\frac{s^2}{h^2} - \frac{s}{h}\right)\right] ds =$$
$$= y_0 \cdot 2h + \Delta y_0 \cdot 2h + \frac{\Delta^2 y_0}{2} \cdot \frac{2}{3} h.$$

если, далее, подставить

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,$$
$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

то после приведения подобных членов получим

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_0+2h} P(x)\,dx = 2h\left[y_0 + (y_1 - y_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right] = h\,\frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{3}. \qquad (4.62)$$

Если теперь отрезок интегрирования $a \leq x \leq b$ разбит на 2π равных частей с помощью точек деления

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \ldots, \quad x_{2n} = a + 2nh = b$$
$$\left(h = \frac{b-a}{2n}\right),$$

то к каждой паре из этих частей можно применить формулу (4.62)

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2h} y\,dx \approx h\,\frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{3},$$

$$\int\limits_{x_0+2h}^{x_0+4h} y\,dx \approx h\,\frac{y_2 + 4y_3 + y_4}{3}, \ \ldots, \ \int\limits_{x_0+(2n-2)h}^{x_0+2nh} y\,dx \approx h\,\frac{y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}}{3}.$$

Сложив эти формулы и приведя подобные члены, получим формулу Симпсона:

$$\int\limits_a^b y\,dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + \right.$$
$$\left. + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})\right]. \qquad (4.63)$$

Перейдем теперь к оценке точности формул (4.61) и (4.63). Из формулы Ньютона видно, что при осуществлении линейной интерполяции получается ошибка порядка $\Delta^2 y$, т. е. порядка h^2. При интегрировании она множится на длину h интервала интегрирования (см. формулу (4.57)), т. е. приобретает порядок h^3. Но формула (4.61) получается в результате сложения n приближенных формул, каждая с ошибкой порядка h^3, поэтому суммарная ошибка имеет порядок

$$n \cdot h^3 = \frac{b-a}{h}\,h^3 = (b-a)\cdot h^2,$$

т. е. порядок h^2. Например, если число точек деления увеличить в два раза, то точность формулы (4.61) улучшится примерно в четыре раза.

Если рассуждать так же о формуле (4.63), то может показаться, что ее ошибка имеет порядок h^3. На самом же деле точность выше. Действительно, когда мы в формуле Ньютона отбрасываем член $\Delta^3 y$, то делаем ошибку порядка h^3; но интеграл от этого члена равен нулю

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2h} \frac{s}{h}\left(\frac{s}{h} - 1\right)\left(\frac{s}{h} - 2\right) dx = \int\limits_0^{2h} \left[\left(\frac{s}{h}\right)^3 - 3\left(\frac{s}{h}\right)^2 + 2\,\frac{s}{h}\right] ds =$$
$$= \left(\frac{s^4}{4h^3} - \frac{3s^3}{3h^2} + \frac{2s^2}{2h}\right)\Bigg|_0^{2h} = 0.$$

Поэтому после интегрирования ошибку дает только следующий член формулы Ньютона, имеющий порядок h^4. Значит, ошибка в формуле (4.62) имеет порядок h^5, а в окончательной формуле (4.63) — порядок h^4; например, если увеличить число точек деления в два раза, то точность формулы (4.63) улучшится в 16 раз. В то же время формула (4.63) для применения ненамного сложнее формулы (4.61). Рассмотрим для примера интеграл

$$I=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx=\operatorname{arctg} x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}=0{,}785.$$

Если бы мы не знали ответа, то интеграл можно было бы приближенно вычислить по формулам (4.61) или (4.63). Примем для простоты n=2, т. е.

h=0,5, x_o =0; x_1 = 0,5; x_2 =1; y_o= 1,000; y_1 = 0,800; y_2= 0,500.

Подсчет по формуле (4.61) дает

$$I\approx 0{,}5\left(\frac{1{,}000+0{,}500}{2}+0{,}800\right)=0{,}775;\quad \text{ошибка } \delta_{(38)}\approx 1{,}3\%.$$

Подсчет по формуле (4.63) дает

$$I\approx \frac{0{,}5}{3}(1{,}000+0{,}500+4\cdot 0{,}800)=0{,}783;\ \text{ошибка } \delta_{(40)}\approx 0{,}3\%.$$

Отметим, что иногда применяются формулы с *неравноотстоящими узлами.*

4.5. Несобственные интегралы

До сих пор при рассмотрении определенных интегралов мы считали, что интервал интегрирования конечен и что подынтегральная функция на нем не обращается в бесконечность; такие интегралы мы будем называть *интегралами в собственном смысле слова* или, коротко, *собственными.* Если хотя бы одно из этих двух условий не выполнено, то интеграл называется *несобственным.* Собственный интеграл (см. п. 2) всегда имеет определенное численное значение. В отличие от этого несобственные интегралы, к которым мы сейчас переходим, не все имеют такое значение.

14. Интеграл с бесконечным пределом интегрирования. Рассмотрим сначала интеграл вида

$$I=\int_a^{\infty} f(x)\,dx, \tag{4.64}$$

где нижний предел a и подынтегральная функция $f(x)$ при $a \leq x \leq \infty$ предполагаются конечными. Такой интеграл является несобственным из-за того, что его верхний предел бесконечный.

Чтобы придать точный смысл интегралу (10.64), пользуются тем же приемом, с помощью которого ранее было уточнено понятие суммы бесконечного ряда. Именно, сначала «отрезают» бесконечность, т. е. рассматривают интеграл

$$\int_a^N f(x)\,dx, \tag{4.65}$$

где N—большое, но конечное число. Интеграл (4.65) собственный и имеет определенное численное значение. Затем принимают, что N стремится к бесконечности, т. е. к тому, чему оно должно равняться для интеграла (4.64). При $N \to \infty$ интеграл (4.65) как-то меняется; если *он имеет при этом определенный конечный предел, то интеграл* (4.64)
называют сходящимся и полагают

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{N \to \infty} \int_a^N f(x)\,dx. \tag{4.66}$$

Если конечного предела нет, то интеграл (4.64) *называется расходящимся; в этом случае определенного численного значения мы ему приписывать не будем.* Итак, *мы принимаем, что несобственный интеграл имеет определенное численное значение только в случае его сходимости.*

Отметим частный случай расходимости: если интеграл (4.65) при $N \to \infty$ имеет бесконечный предел, то интеграл (4.64) называется расходящимся к бесконечности; в этом случае можно пользоваться формулой (4.66).

Рассмотрим несколько примеров. Пусть на точку T действует сила, направленная к некоторой фиксированной точке 0 и по модулю обратно пропорциональная квадрату расстояния от 0; так ведут себя, в частности, гравитационная и электростатическая силы. Пусть при этом требуется найти работу, которую надо затратить, чтобы удалить точку T из некоторого положения T_0 на бесконечность; эта работа называется *потенциалом* рассматриваемой силы.

Для ее подсчета запишем силу

$$F = k/s^2 \quad (s = 0T),$$

где k — некоторый коэффициент пропорциональности, и работу

$$A = \int_{s_0}^{\infty} \frac{k}{s^2}\, ds \tag{4.67}$$

(см. п. 6). Это несобственный интеграл, и по формуле (4.66)

$$A = \lim_{N \to \infty} \int_{s_0}^{N} \frac{k}{s^2}\, ds = \lim_{N \to \infty} -\frac{k}{s}\Big|_{s=s_0}^{N} = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{k}{s_0} - \frac{k}{N}\right) = \frac{k}{s_0}.$$

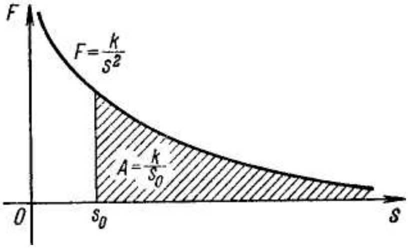


Рис.4.11.

Итак, интеграл (4.67) сходится, и мы получаем, что рассматриваемый потенциал обратно пропорционален первой степени расстояния от точки 0. Сначала может показаться странным, что при удалении на бесконечное расстояние получается конечная работа, хотя сила теоретически никогда не прекращает своего действия. Но дело в том, что эта сила при удалении так ослабевает, что затрачиваемая работа, хотя все время и нарастает, но стремится не к бесконечности, а к конечной величине. Геометрический смысл полученного результата показан на рис. 4.11: несмотря на то, что заштрихованная фигура простирается в бесконечность, ее высота убывает с такой скоростью, что общая ее площадь оказывается конечной.

Реально s изменяется не до бесконечности, так как все физические величины конечны, а до какого-то очень большого, но конечного значения S, т. е. взамен (4.67) надо рассматривать интеграл

$$\int_{s_0}^{S} \frac{k}{s^2}\, ds \tag{4.68}$$

Однако для достаточно больших S этот интеграл практически не меняется, так что его можно заменить на «предельный» интеграл

(4.67), который проще в теоретических исследованиях, тем более, что значение S точно не известно. Сходимость интеграла (4.67) и означает возможность замены «реального» интеграла (4.68) при больших S на интеграл (4.67); физически это значит, что на большом удалении от точки *0* ее действием можно практически пренебречь. При такой замене точно знать S и не нужно, важно только знать, что S велико.

В качестве второго примера рассмотрим несобственный, интеграл

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx. \tag{4.69}$$

так как

$$\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty} \ln x\Big|_1^N = \lim_{N\to\infty} \ln N = \ln\infty = \infty,$$

то интеграл (4.69) расходится к бесконечности и можно написать

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty.$$

Рассмотрим, наконец, несобственный интеграл

$$\int_0^\infty \sin x\,dx. \tag{4.70}$$

В данном случае предел

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N \sin x\,dx = \lim_{N\to\infty}(-\cos x)\Big|_0^N = \lim_{N\to\infty}(1-\cos N)$$

не существует ни конечный, ни бесконечный, так как cos N при $N\to\infty$ все время колеблется между +1 и —1. Значит интеграл (4.70) расходится, но не к бесконечности, а колеблясь между конечными значениями 0 и 2. Он не имеет ни конечного, ни бесконечного значений.

15. Основные свойства интегралов с бесконечным пределом интегрирования. На несобственные интегралы вида (4.64) непосредственно распространяются многие свойства собственных интегралов.

Прежде всего, если при $a\le x<\infty$ известна первообразная функция $F(x)$ к $f(x)$, то

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}[F(N)-F(a)] = F(\infty)-F(a),$$

так как под $F(\infty)$ как раз и понимается $\lim_{N\to\infty} F(N)$.

Значит, несобственный интеграл (4.64) можно вычислять по той же основной формуле (4.16), что и собственные интегралы. При этом само выражение $F(\infty)$ покажет, сходится интеграл или расходится.

Так, в примерах (4.64), (4.69) и (4.70) можно было вычислять просто:

$$\int_{s_0}^\infty \frac{k}{s^2}\,ds = -\frac{k}{s}\Big|_{s=s_0}^\infty = \frac{k}{s_0}-\frac{k}{\infty} = \frac{k}{s_0},$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_1^\infty = \ln\infty - \ln 1 = \infty,$$

$$\int_0^\infty \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\infty = -\cos\infty + 1 \text{ не существует,}$$

так как выражение $\cos\infty$ не имеет смысла

Все основные свойства п. 4 сохраняются и для несобственных интегралов, конечно, если иметь в виду осложнения, которые получаются в случае расходимости интегралов. В то же время формулы (4.57) и (4.58) здесь уже не действуют, так как *интеграл от константы, не равной нулю, по бесконечному интервалу всегда расходится.* Отметим еще такое простое свойство: если интеграл (4.64) сходится, то при $N\to\infty$

$$\int_N^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx - \int_a^N f(x)\,dx \to 0.$$

Если неопределенный интеграл взять затруднительно, то обычно начинают с выяснения его сходимости или расходимости на основе признаков, к которым мы сейчас переходим.

Заметим прежде всего, что факт сходимости или расходимости интеграла (4.70) зависит только от поведения функции *$f(x)$ на бесконечности,* т. е. при достаточно больших x. Другими словами, интегралы

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ и } \int_b^\infty f(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно,

если $f(x)$ между a и b не обращается в бесконечность. Действительно, эти интегралы отличаются на собственный интеграл, который имеет вполне определенное числовое значение и не может нарушить сходимость, если она была, и создать сходимость, если ее не было.

Рассмотрим сначала *интеграл от положительной функции*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \quad f(x) \geqslant 0. \tag{4.71}$$

Такой интеграл может либо сходиться, либо расходиться к бесконечности, так как интеграл, взятый от a до N, с ростом N растет, а возрастающая величина имеет конечный предел либо стремится к бесконечности. Эта сходимость или расходимость означает геометрически, что площадь бесконечной фигуры, заштрихованной на рис. 4.12, получится конечной или бесконечной. Факт сходимости или расходимости интеграла (4.71) можно записать так:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx < \infty \text{ или соответственно}$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \infty.$$

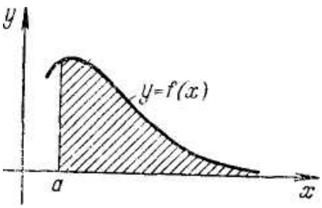


Рис. 4.12

Конечно, такую запись нельзя применять по отношению к расходящимся колеблющимся интегралам типа (4.70).

Самым простым признаком сходимости является *признак сравнения: если*

$$0 \leqslant g(x) \leqslant f(x) \qquad (a \leqslant x < \infty) \tag{4.72}$$

и

$$и \int_a^\infty f(x)\,dx < \infty,$$

т.е. этот интеграл сходится, то и

$$и \int_a^{\infty} g(x)\, dx < \infty,$$

т.е. и этот интеграл сходится.

Этот признак вытекает из интегрирования неравенства (4.72) или из геометрического смысла сходимости (см. рис.4.12). Из этого признака следует, что если в условиях (4.72) интеграл от *g(x)* расходится (равен бесконечности), то интеграл от *f (x)* тоже расходится.

Применяется также следующий признак: *если*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} k \neq 0, \quad k \neq \infty, \tag{4.73}$$

то интегралы

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx \quad \text{и} \quad \int_b^{\infty} g(x)\, dx$$

сходятся или расходятся одновременно (хотя в случае сходимости их значения могут существенно различаться, даже если k= 1 и a=b). Действительно, из условия (4.73) вытекает, что на бесконечности обе функции, $f(x)$ и $g(x)$, не могут существенно превзойти одна другую, точнее говоря, $f(x) \sim kg(x)$ при $x\to\infty$, где ~ — знак эквивалентности. Поэтому если для одной из них заштрихованная фигура на рис. 4.12 имеет конечную площадь, то и для другой тоже.

Чаще всего заданный интеграл вида (4.71) сравнивают с *интегралом от степенной функции*

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx, \tag{4.74}$$

который легко исследовать непосредственно. При $p > 1$ имеем

$$I = \int_1^{\infty} x^{-p}\, dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{(-p+1)\,x^{p-1}}\bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{-p+1} = \frac{1}{p-1} < \infty,$$

тогда как при $p < 1$

$$I = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_1^{\infty} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^{\infty} = \infty - \frac{1}{1-p} = \infty;$$

наконец, при $p = 1$

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \ln x\,\bigg|_1^{\infty} = \ln\infty - \ln 1 = \infty.$$

Итак, *интеграл* (4.74) *сходится при p>1 и расходится к бесконечности при p≤1.* Отсюда в силу признака (4.73) можно сделать то же заключение об интеграле (4.71), если

$$f(x) \sim \frac{A}{x^p} \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Например,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \infty, \quad \text{так} \quad \text{как} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+x^{-2}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}};$$

$$p = \frac{2}{3} < 1;$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} < \infty, \text{ так как } \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}; \quad p = \frac{3}{2} > 1;$$

(4.75)

$\int_0^\infty e^{-x^2} dx < \infty$, так как экспонента на бесконечности стремится к нулю быстрее любой степенной функции и можно применить признак сравнения (4.72).

Перейдем теперь к *интегралам от функции любого знака*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \qquad f(x) \gtrless 0. \tag{4.76}$$

Здесь мы докажем только один признак: *если*

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx < \infty, \tag{4.77}$$

то интеграл (4.76) *сходится;* в этом случае он называется *абсолютно сходящимся,* а функция *f(x)* называется *абсолютно интегрируемой* на интервале $a \le x < \infty$.

Для доказательства следует ввести функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$ - положительную и отрицательную части функции *f(x),* которые изображены на рис. 4.13 и определяются следующим образом:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для тех } x, \text{ для которых } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{»} \quad \text{»} \quad x \quad \text{»} \quad \text{»} \quad f(x) < 0, \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{»} \quad \text{»} \quad x \quad \text{»} \quad \text{»} \quad f(x) \geq 0, \\ |f(x)| & \text{»} \quad \text{»} \quad x \quad \text{»} \quad \text{»} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Тогда можно написать

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x),$$
$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x). \qquad (4.78)$$

Если условие (4.77) дано, то площадь, заштрихованная на рис. 4.13, *г,* конечная. Значит, конечны и площади, заштрихованные на

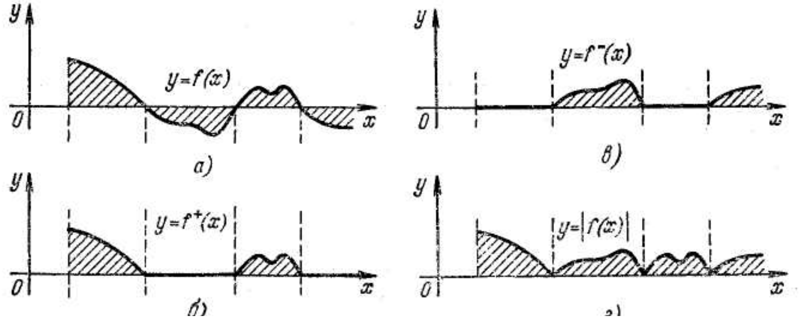


Рис.4.13.

рис. 4.13, *б* и *в*, а так как $f^+(x) \geq 0$ и $f^-(x) \geq 0$, то несобственные интегралы от этих функций сходятся. Но теперь в силу равенства (4.78) и интеграл (4.76.) сходится, что и требовалось доказать; более точно,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty f^+(x)\,dx - \int_a^\infty f^-(x)\,dx.$$

Может получиться, что интеграл (4.77) расходится, т. е. равен бесконечности, тогда как интеграл (4.76) сходится; это — *неабсолютная сходимость.* В этом случае площади, заштрихованные на рис. 4.13, *б* и *в,* бесконечны, но «сбалансированы» так, что если на рис. 4.13, *а* учитывать знак площади, то бесконечности взаимно уничтожатся и останется конечный результат. Например, интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx \qquad (4.79)$$

сходится абсолютно, так как

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2},$$

и потому интеграл от абсолютной величины можно сравнить с интегралом (4.74) при $p = 2$.

Если проделать то же с интегралом

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx, \tag{4.80}$$

то получится интеграл (4.74) при p=1, т. е. расходящийся. Тогда признак сравнения (см. неравенство (4.72)) непосредственно применить нельзя. Все же можно доказать, что

$$\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \int_1^{\infty} |\sin x| \frac{1}{x}\, dx = \infty,$$

так как первый множитель периодически колеблется около *положительного* среднего значения. В то же время интеграл (4.80) сходится, так как после интегрирования по частям

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} = u, & du = -\frac{1}{x^2}\, dx \\ \sin x\, dx = dv, & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx = \cos 1 - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx,$$

а полученный интеграл того же типа, что и (4.79), и потому сходится. Итак, интеграл (4.80) сходится неабсолютно.

Все изложенное непосредственно переносится на интегралы от комплексных функций вещественного аргумента , а также на интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx, \tag{4.81}$$

которые определяются с помощью соотношения

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{-M \to -\infty} \int_{-M}^{b} f(x)\, dx$$

(впрочем, от интеграла (4.81) легко перейти к интегралу вида (4.64) с помощью подстановки $x=-y$).

16. Несобственные интегралы иных видов.

Рассмотрим теперь несобственный интеграл вида

$$\int_a^b f(x)\, dx, \tag{4.82}$$

для которого пределы интегрирования конечны, но подынтегральная функция перестает быть конечной на одном из этих пределов, например, при $x \to a$. Чтобы придать такому интегралу смысл, опасный конец отрезают, после чего переходят к пределу:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Как и в п. 14, если конечного предела нет, то говорят, что интеграл (4.82) расходится.

Все свойства п. 15 непосредственно переносятся и на такие интегралы. Единственное отличие возникает при рассмотрении интегралов от степенных функций. Взамен интеграла (4.74) надо рассмотреть интеграл

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx. \tag{4.83}$$

Легко проверить, что *интеграл* (4.83) *сходится при* $p < 1$ и *расходится при* $p \geq 1$.

Аналогично рассматривается интеграл (4.82), для которого подынтегральная функция перестает быть конечной на верхнем пределе интегрирования.

Точки на интервале интегрирования, в которых подынтегральная функция перестает быть конечной, а также бесконечные концы интервала интегрирования, называются *особенностями* рассматриваемого несобственного интеграла. До сих пор мы говорили об интегралах с единственной особенностью, лежащей в конце интервала интегрирования. Если особенность находится внутри интервала интегрирования или если особенностей несколько, то интегралу придают смысл по следующей схеме.

Пусть рассматривается интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{4.84}$$

для которого подынтегральная функция перестает быть конечной в точках *a, c* и *d,* т. е. интеграл (4.84) имеет три особенности (на рис. 4.14 они изображены кружочками). Тогда при помощи точек
деления (на рис. 4.14 они изображены звездочками) разбивают интервал интегрирования на части так, чтобы на каждой была только одна особенность и притом в конце этой части; в рассматриваемом примере таких частей пять: $a\alpha$, αc, $c\beta$, βd, db. *Если каждый из интегралов*

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx,\quad \int_\alpha^c f(x)\,dx,\quad \int_c^\beta f(x)\,dx,\quad \int_\beta^d f(x)\,dx,\quad \int_d^b f(x)\,dx \tag{4.85}$$

сходится, то и интеграл (4.84) *считается сходящимся и равным сумме всех интегралов* (4.85). Если же хотя бы один из интегралов (4.85) расходится, то и интеграл (4.84)

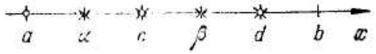


Рис.4.14.

считается расходящимся и численного значения не имеет.

По описанной схеме определяется, в частности, интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$

где функция *f(x)* конечна; здесь требуется одна точка деления.

К каждому из интегралов (4.85) можно применить признаки, описанные в п. 15 и 16. В частности, если

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty,$$

то интеграл (4.84) обязательно сходится; в этом случае он называется абсолютно сходящимся, а функция *f(x)* — *абсолютно интегрируемой на интервале* a, b.

Остановимся отдельно на интеграле с двумя особенностями, лежащими в обоих концах интервала интегрирования. Если при этом к подынтегральной функции *f (x)* удается найти первообразную *F(x*), то вычисление интеграла можно производить следующим образом:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{\alpha} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\alpha}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}[F(\alpha)-F(a+\varepsilon)] + \lim_{\varepsilon\to+0}[F(b-\varepsilon)-F(\alpha)] = F(b-0)-F(a+0).$$

Таким образом, в этом случае для вычисления определенного интеграла можно пользоваться обычной формулой (10.16), причем если подстановка пределов в первообразную даст конечный результат, то интеграл сходится.

Если интеграл (4.84) имеет особенность внутри интервала интегрирования, например в точке *х = с,* и известна первообразная *F (x),* то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = [F(c-0) - F(a)] + \\ + [F(b) - F(c+0)] = F(b) - F(a) + [F(c-0) - F(c+0)]. \quad (4.86)$$

Значит, *если первообразная не имеет разрыва,* т. е. если $F(c-0) = F(c+0)$, *то при вычислении интеграла можно пользоваться обычной формулой* (4.16). Если первообразная имеет скачки, то надо делать поправку на эти скачки подобно (4.86). Если же первообразная имеет на интервале интегрирования разрывы более сложного вида, в частности, если она обращается в бесконечность, то интеграл расходится. Эти правила справедливы при любом числе особенностей.

Например, интеграл

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

можно вычислить так:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_{-1}^{2} x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \left.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_{-1}^{2} = \frac{3}{2}\left(2^{\frac{2}{3}} - 1\right) = 0{,}881,$$

так как в данном случае первообразная, пропорциональная $x^{\frac{2}{3}}$., непрерывна и потому интеграл сходится. В то же время последний пример в п. 4 был рассчитан неверно, так как там первообразная, т. е. $-(1/x)$, обращалась в бесконечность на интервале интегрирования при $x = 0$ и потому интеграл расходился.

При вычислении несобственных интегралов широко применяются разложения в ряды различного вида. Если такое разложение хорошо действует только вблизи особенности, то заданный интеграл представляют в виде суммы собственного и несобственного, взятого по интервалу около особенности; первый вычисляют по методам раздела 4.5 , а второй разлагают в ряд. Например, для подсчета интеграла (4.75) можно поступить так:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} + \int_a^\infty x^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} + \int_a^\infty \left(x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{9}{2}} + \frac{3}{8}x^{-\frac{15}{2}} - \ldots\right) dx =$$

$$= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} + \frac{2}{\sqrt{a}} - \frac{1}{7\sqrt{a^7}} + \frac{3}{52\sqrt{a^{13}}} - \ldots = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} + S;$$

при этом для разложения подынтегральной функции мы воспользовались формулой бинома Ньютона. Здесь $a>0$— произвольное число; но если a взять слишком большим, то будет трудно подсчитывать последний интеграл, а если слишком маленьким, то будет плохо с рядом. Возьмем $a = 2$ и подсчитаем последний интеграл по формуле Симпсона (п. 13), разбив интервал интегрирования на восемь частей. Тогда получим

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = 1{,}402; \quad S = 1{,}402,$$

и тем самым интеграл (4.75) равен 2,804.

Для расходящегося интеграла, например, вида (4.64) может возникнуть вопрос о более точной характеристике поведения его «конечной части» (4.65) при «исчерпывании особенности», т. е. при $N\to\infty$. Для выяснения этого также применяются разложения в ряды. Например,

$$\int_0^N \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} + \int_a^N x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{-2})^{-\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} + \int_a^N \left(x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{8}{3}} + \frac{2}{9}x^{-\frac{14}{3}} - \ldots\right) dx =$$

$$= 3N^{\frac{1}{3}} + C + \frac{1}{5}N^{-\frac{5}{3}} - \frac{2}{33}N^{-\frac{11}{3}} + \ldots,$$

где

$$C = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} - 3a^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5}a^{-\frac{5}{3}} + \frac{2}{33}a^{-\frac{11}{3}} - \ldots$$

— постоянная, которую можно вычислить, как в предыдущем примере.

Аналогичный вопрос может возникнуть для сходящегося интеграла. Так, рассуждая, как при вычислениях (4.87), получим

$$\int_0^N \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} - \int_N^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = 2,804 - \frac{2}{\sqrt{N}} + \frac{1}{7\sqrt{N^7}} - \ldots;$$

интегрируя по частям, найдем

$$\int_0^N e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-x^2}dx - \int_N^\infty \frac{1}{2x}\cdot 2xe^{-x^2}dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2}dx + \frac{1}{2x}e^{-x^2}\Big|_N^\infty + \frac{1}{2}\int_N^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2}dx - \frac{1}{2N}e^{-N^2} + \text{величина порядка } \frac{1}{N^3}e^{-N^2}.$$

То, что полученный интеграл имеет указанный порядок, легко доказать с помощью правила Лопиталя; для уточнения разложения можно применить повторное интегрирование по частям.

17. Гамма-функция.

В качестве важного примера несобственного интеграла рассмотрим неэлементарную *«гамма-функцию»,* введенную Эйлером

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx. \tag{4.88}$$

Этот интеграл называется также *эйлеровым интегралом второго рода.*

Интеграл (4.88) несобственный уже из-за бесконечного верхнего предела. Однако так как e^{-x} при $x\to\infty$ стремится к нулю быстрее любой степени x, то на верхнем пределе интеграл (4.88) сходится. Если $p < 1$, то интеграл (4.88) имеет особенность и при $x = 0$. Так как $e^{-x}x^{p-x} \sim 1/x^{1-p}$ при $x\to\infty$, то в силу начала п. 16 интеграл (4.88) сходится при $1-p < 1$, т. е. при $p > 0$, и расходится при $1-p\geq 1$, т. е. при $p\leq 0$. Итак, *формулу* (4.88) *надо рассматривать при* $0 < p < \infty$.

Для вывода основного свойства гамма-функции произведем интегрирование по частям:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^{(p+1)-1}dx = \int_0^\infty e^{-x}x^p dx = -e^{-x}x^p\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}px^{p-1}dx.$$

Выделившийся член равен нулю на обоих пределах , и мы получаем

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p). \tag{4.89}$$

Легко подсчитать, далее,

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}x^{1-1}dx=\int_0^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1.$$

Если теперь в формулу (4.89) подставлять последовательно p=1, 2, 3, ..., мы получим Г(2)=1•Г(1)=1; Г(3)=2Г(2) = 2•1;
Г (4) = 3Г (3) = 3•2•1 и т. д.;
вообще

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{4.90}$$

Если прочитать формулу (4.90) справа налево, то мы видим, что гамма-функция дает представление факториала. В то же время она имеет смысл и для нецелых значений аргумента и тем самым продолжает факториальную функцию с дискретных значений аргумента на непрерывные. График этой функции изображен на рис. 4.15; на нем, в частности; показано равенство Г (+ 0) =+∞, вытекающее из формулы (4.89).

Из формулы (4.90) видно, в частности, что 0!=Г(1) = 1. Далее,

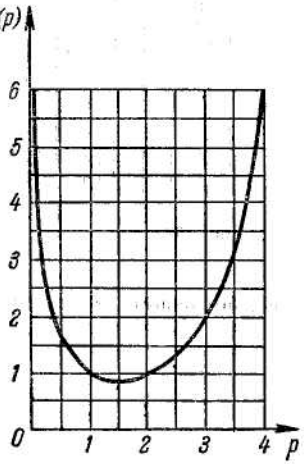


Рис.4.15.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)!=\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\sqrt{\pi}=1{,}772;$$

это значение будет выведено в п. 18 (формула (4.94)). Отсюда

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} =$$
$$= 0{,}886;\ \left(\frac{3}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) =$$
$$= \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = 1{,}329 \text{ и т. д.}$$

Гамма-функция определяется и *при отрицательных значениях аргумента.* Пользоваться формулой (4.88) при этом нельзя, так как интеграл расходится. Однако можно применить формулу (4.89), переписав ее в виде

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}. \qquad (4.91)$$

Если —1 $<p<0$, то $0 < p + 1 < 1$, и потому правая часть имеет смысл, чем и определяется значение Г (p) при таких p; отметим, что получится Г (p) < 0. Если, далее, $-2<p<-1$, то $-1 < p + 1 < 0$, и потому правая часть равенства (4.91) уже определена, чем определяется и левая, причем Г (p) > 0. Затем определяем Г (p) при $-3<p<-2$ и т. д. Тем самым Г (p) определится для p любого знака, причем для всех p имеет место формула (4.89). Из формулы (4.91) видно также последовательно, что Г (0) = ± ∞ , Г(— 1)= ±∞, Г(—2)=±∞ и т. д. График гамма-функции при отрицательных значениях аргумента показан нэ рис.4.16.

18. Бета-фуикция.

Бета- функция, или *Эйлеров интеграл первого рода,* определяется формулой

$$B(p,\ q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \qquad (4.92)$$

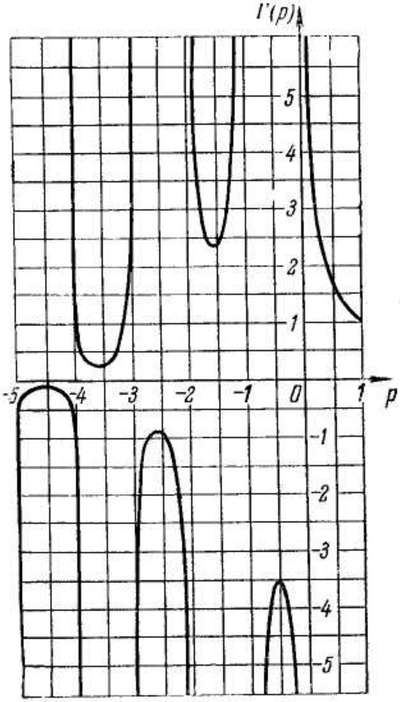


Рис.4.16.

При этом должно быть $p > 0$ и $q>0$, так как в противном случае интеграл расходится на нижнем или на верхнем пределе . Отметим, что неопределенный интеграл (4.92) берется элементарно только для специальных комбинаций показателей p и q .

Как будет выведено далее, *бета-функция выражается через гамма-функцию по формуле*

$$B(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{4.93}$$

Из этой формулы вытекает интересное следствие: положив $p= q=1/2$, получим

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}=-\arcsin(1-2x)\Big|_0^1=\pi,$$

а так как $\Gamma(p) > 0$ при $p > 0$, то

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{4.94}$$

Отсюда в свою очередь можно вывести значение важного интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \left| x = \sqrt{t} \right| = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{1}{2}-1}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{4.95}$$

Через бета- и тем самым через гамма-функцию выражаются многие определенные интегралы, для которых неопределенные интегралы при произвольных показателях не берутся в элементарных функциях, например,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx = \left| \sin x = \sqrt{t} \right| = \int_0^1 \frac{1}{2} t^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} \qquad (p > -1);$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx = \left| x = \frac{y}{1-y} \right| = \int_0^1 \frac{y^{p-1}(1-y)^{p+q}}{(1-y)^{p-1}}\frac{dy}{(1-y)^2} = \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}dy = \mathrm{B}(p,\ q) \qquad (p > 0,\ q > 0); \quad (73) \tag{4.96}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^p)^q} = \left| x = y^{\frac{1}{p}} \right| = \frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^q}dy = \frac{1}{p}\mathrm{B}\left(\frac{1}{p},\ q-\frac{1}{p}\right) \qquad (p > 0,\ qp > 1) \tag{4.97}$$

(см. (4.96)) и т. д. В частности, из (4.97) получаем значение интеграла (4.75):

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2{,}676\cdot 5{,}566}{3\sqrt{\pi}} = 2{,}804.$$

19, Главное значение расходящегося интеграла. В некоторых случаях, в частности при исследовании сплошных сред, оказывается целесообразным отдельным расходящимся интегралам приписывать в некотором условном смысле числовое значение. Это можно сделать различными способами. Коши предложил делать это так. Пусть интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{4.98}$$

имеет единственную особенность *внутри* интервала интегрирования в точке *x* = *c*. Тогда эту особенность *симметрично* вырезают, после чего переходят к пределу, т. е. полагают

$$\text{v. p.}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right]. \tag{4.99}$$

Такой предел может существовать и в том случае, если интеграл (4.98) в обычном смысле (п. 16) расходится. Тогда предел (4.99) называется *главным значением* интеграла (4.98), которое обозначается буквами v. p. (от английского value principal, главное значение) при знаке интеграла, а сам интеграл часто называют *сингулярным,* в отличие от собственных или сходящихся несобственных интегралов, которые (те и другие) называют *регулярными.* Подобным образом главным значением интеграла, взятого по всей числовой оси, называется предел

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(x)\,dx.$$

Например, интеграл

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{x}\,dx$$

расходится, так как первообразная функция, т. е. $\ln|x|$, имеет бесконечный разрыв на интервале интегрирования при *x = 0*. В то же время главное значение

$$\text{v. p.}\int_{-1}^{2}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{2}\frac{1}{x}\,dx\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{2}\right] = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln\varepsilon - \ln 1 + \ln 2 - \ln\varepsilon\right] = \ln 2 = 0{,}693$$

существует, так как опасные слагаемые $\pm\ln\varepsilon$ взаимно уничтожаются до перехода к пределу. Другой пример:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx = \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \sin x \, dx = \lim_{N \to \infty} (-\cos x)\Big|_{-N}^{N} =$$
$$= \lim_{N \to \infty} [-\cos N + \cos N] = 0,$$

т. е. и здесь главное значение интеграла существует, хотя сам интеграл расходится и потому является сингулярным.

Конечно, далеко не все расходящиеся интегралы обладают главным значением.

4.6. Интегралы, зависящие от параметра

20. Собственные интегралы. Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int_a^b f(x;\ \lambda)\, dx, \tag{4.100}$$

где под знак интеграла, помимо переменной интегрирования *x,* входит *параметр* (произвольная постоянная) λ, т. е. величина, которая в процессе интегрирования считается постоянной, но вообще может принимать различные значения. Тогда и результат интегрирования, вообще говоря, зависит от λ, т. е. $I = I(\lambda)$. Такие интегралы часто встречаются в приложениях, когда интегрируемая функция включает в себя какие-либо массы, размеры и т. п., которые в процессе интегрирования являются постоянными. Мы для простоты будем считать, что подынтегральная функция содержит только один параметр, хотя результаты получаются аналогичными при любом числе параметров. Приведем несколько формальных примеров:

$$\int_0^1 (x^2 + \lambda x)\, dx = \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{2}; \quad \int_0^\pi \sin \alpha x \, dx = \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha};$$

$$\int_0^1 (s+1)\, x^s dx = 1 \qquad (s > -1).$$

Мы будем считать здесь интеграл (4.100) собственным, т. е. пределы интегрирования и подынтегральную функцию конечными, и рассмотрим некоторые его свойства.

1. *Если подынтегральная функция при $a \le x \le b$ зависит от λ непрерывно, то и интеграл I зависит от λ непрерывно.* Это вытекает, например, из геометрического смысла интеграла как площади криволинейной трапеции: если при бесконечно малом изменении λ криволинейная сторона трапеции изменится бесконечно мало, то и площадь изменится бесконечно мало.

Отметим, что при этом функция I не обязана зависеть от x непрерывно; она может иметь конечные разрывы.

Бывает, что и пределы интегрирования зависят от параметра:

$$I(\lambda)=\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x;\ \lambda)\,dx. \tag{4.101}$$

Тогда для непрерывности $I(\lambda)$ надо дополнительно потребовать, чтобы функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ не имели разрывов.

2. *Правило Лейбница: возможно дифференцирование по параметру под знаком интеграла* (4.100); другими словами,

$$\frac{dI}{d\lambda}=\int_a^b f'_\lambda(x;\ \lambda)\,dx. \tag{4.102}$$

Дело в том, что интеграл (4.100) аналогичен сумме весьма большого числа слагаемых (п. 2), каждое из которых зависит от λ, а дифференцирование под знаком суммы возможно, так как производная суммы равна сумме производных.

Формула (4.102) понимается в простейшем смысле, если не только интеграл (4.100) собственный, но и интеграл (4.102) собственный, или несобственный, но сходящийся. Бывает, что интеграл (4.102) расходится: тогда формула (4.102) все же справедлива, но в некотором обобщенном смысле, о котором будет сказано в п. 27

При дифференцировании интеграла (4.101) надо учесть, что λ в правую часть входит трижды, так что надо пользоваться формулой для производной сложной функции, а также формулами для производной от интеграла по верхнему и нижнему пределам (п. 4). Получится

$$\frac{dI}{d\lambda}=\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f'_\lambda(x;\ \lambda)\,dx+f(b(\lambda);\ \lambda)b'(\lambda)-f(a(\lambda);\ \lambda)\,a'(\lambda). \tag{4.103}$$

3. *Возможно интегрирование по параметру под знаком интеграла* (4.100):

$$\int_\alpha^\beta I(\lambda)\,d\lambda=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x;\ \lambda)\,d\lambda\right)dx.$$

Это обосновывается так же, как свойство 2.

21. Несобственные интегралы. Мы рассмотрим интеграл вида

$$I(\lambda)=\int_a^{\infty} f(x;\ \lambda)\,dx, \tag{4.104}$$

не имеющий особенностей при конечных *x;* свойства несобственных интегралов иных видов (п. 16) аналогичны. Конечно, прежде всего надо требовать, чтобы интеграл (4.104) сходился. Однако по сравнению с п. 20 мы сталкиваемся со следующим новым обстоятельством: *даже если функция f непрерывно зависит от λ, зависимость интеграла от λ может получиться разрывной.* Это связано с тем, что бесконечно малое изменение функции на бесконечно большом участке интегрирования может привести к конечному изменению интеграла,

Например, далее будет показано, что

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда сразу следует, что при $\lambda > 0$

$$I(\lambda)=\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx=|\lambda x=s|=\int_0^{\infty}\frac{\sin s}{s}\,ds=\frac{\pi}{2}.$$

В то же время при $\lambda = 0$ получается I=0, а при $\lambda < 0$

$$I(\lambda)=\int_0^{\infty}\frac{\sin(-|\lambda|)x}{x}\,dx=-\int_0^{\infty}\frac{\sin|\lambda|x}{x}\,dx=-\frac{\pi}{2}.$$

Итак, в данном примере I*(λ)* при $\lambda = 0$ имеет скачок. Это может показаться странным, так как несобственный интеграл получается как предел собственных

$$I(\lambda)=\lim_{N\to\infty}\int_0^{N}\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx,$$

а каждый собственный интеграл зависит от *λ* непрерывно. Но дело в том, что *предел непрерывных функций,* как мы сейчас увидим, *не обязан быть непрерывной функцией.*

На рис. 4.17 показаны графики функций

$$I_N(\lambda)=\int_0^{N}\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx$$

при малом и при большом *N.* Хотя эти функции и непрерывные, но при большом *N* переход от —π/2 к +π/2 совершается на малом интервале *λ,*

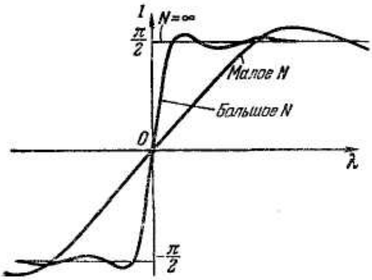


Рис.4.17.

причем чем больше N, тем этот интервал меньше. В пределе, при $N=\infty$, этот переход осуществляется на бесконечно малом интервале λ, т. е. появляется разрыв.

Возможность таких разрывов усложняет исследование интегралов вида (4.104), в частности, применение свойств 2 и 3 из п. 20. Поэтому иногда взамен (4.104) приходится рассматривать интеграл по конечному интервалу, от a до N, а затем переходить к пределу при $N\to\infty$. Тем не менее, как мы сейчас покажем, имеется важный частный случай, когда такие разрывы невозможны.

Назовем интеграл (4.104) *правильно сходящимся,* если при всех рассматриваемых значениях λ

$$|f(x;\ \lambda)| \leqslant \varphi(x) \quad (a \leqslant x < \infty), \text{ где } \int_a^\infty \varphi(x)\,dx < \infty. \tag{4.105}$$

Например, интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin \lambda x}{x^2}\,dx$$

сходится правильно, так как

$$\left|\frac{\sin \lambda x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1 < \infty.$$

Относительно *правильно сходящегося интеграла* (4.104) можно утверждать, что *если подынтегральная функция зависит от λ непрерывно, то и интеграл I зависит от λ непрерывно.* Действительно, этот интеграл можно представить в виде

$$I(\lambda) = \int_a^N f(x;\ \lambda)\,dx + \int_N^\infty f(x;\ \lambda)\,dx.$$

Здесь первое слагаемое, как собственный интеграл, зависит от λ непрерывно, тогда как второе можно оценить так:

$$\left|\int_N^\infty f(x;\ \lambda)\,dx\right| \leqslant \int_N^\infty |f(x;\ \lambda)|\,dx \leqslant \int_N^\infty \varphi(x)\,dx,$$

и в силу условия (4.105) этот интеграл при достаточно большом N будет весьма мал *сразу для всех значений* λ (п. 15). Поэтому малому изменению λ отвечает малое изменение и всей суммы I (λ), что и означает непрерывную зависимость I от λ.

Свойства правильно сходящихся интегралов полностью аналогичны свойствам собственных интегралов, описанным в п. 20.

4.7. Криволинейные интегралы

22. Интеграл по длине дуги. Третий пример п. 1 является одновременно простейшим примером криволинейного интеграла по длине дуги. В общем случае определение дается следующим образом.

Пусть в пространстве или на плоскости дана конечная линия (L) и в каждой ее точке задано значение некоторой величины u. Если отсчитывать вдоль (L) дугу s от некоторой точки, то можно считать, что u является функцией s, $u=f(s)$. Чтобы составить интегральную сумму, надо мысленно разбить линию (L) на маленькие примыкающие друг к другу дуги; эта сумма имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} f(\sigma_k)\,\Delta s_k \qquad (\alpha = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = \beta, \quad s_{k-1} \leqslant \sigma_k \leqslant s_k),$$

где значения $s=\alpha$ и $s=\beta$ отвечают концам линии (L), а n — число участков разбиения. Чтобы получить интеграл, надо перейти к пределу в процессе, когда разбиение бесконечно измельчается (ср. п. 2, но без геометрического смысла):

$$\int_{(L)} u\,ds = \int_{(L)} f(s)\,ds = \int_\alpha^\beta f(s)\,ds = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\sigma_k)\,\Delta s_k. \tag{4.106}$$

Этот интеграл и называется *криволинейным интегралом по длине дуги.* Таким образом, в упомянутом примере п. 1

$$M = \int_{(L)} \rho\,ds.$$

Подобным образом (ср. пример п. 6), если точка проходит линию *(L),* причем на нее действует сила F, вообще говоря переменная, то работа

$$A=\int\limits_{(L)} F\cos(\widehat{\mathbf{F},\ \boldsymbol{\tau}})\,ds,$$

где τ — единичный вектор («орт») касательной к *(L).*

Так как из формулы (4.106) видно, что криволинейный интеграл по длине дуги — это разновидность обычного определенного интеграла, то многие свойства определенного интеграла (см., в частности, свойства 2— 5 п. 4, а также п. 5) автоматически распространяются на криволинейный интеграл. В то же время надо иметь в виду, что Δs и потому *ds* здесь *считаются всегда положительными,* т. е.
при переходе в (4.106) к определенному интегралу интегрирование всегда идет от меньшего к большему; поэтому свойство 1 п. 4 для криволинейных интегралов по дуге лишено смысла.

Иногда величина *u* задается во всем пространстве, например, $u=f(x, y, z)$. Тогда интеграл (4.106) можно записать в виде

$$I=\int\limits_{(L)} f(x,y,z)\,ds.$$

Если линия *(L)* задана в параметрическом виде $x=x(t)$, $y = y(t)$, $z= z(t)$, то вычисление этого интеграла можно производить по формуле

$$I=\int\limits_{\gamma}^{\delta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt,$$

где значения $t=\gamma$ и $t = \delta$ отвечают концам линии (L). Интеграл по дуге иногда записывают в виде

$$\int\limits_{(L)} u\,|d\mathbf{r}|.$$

Пишут и так:

$$\int\limits_{(L)} u(M)\,ds,$$

где *M*— текущая точка линии *(L);* тогда и интегральную сумму можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} u_k\Delta s_k=\sum_{k=1}^{n} u(M_k)\,\Delta s_k,$$

где M_k — некоторая точка на *k*-й дуге разбиения.

Покажем пример применения интеграла по длине дуги. Из механики известно, что если в плоскости дана система материальных точек $M_k(x_k;\ y_k)$ массы m_k, где $k=1,\ \dots\ ,\ n$, то координаты центра тяжести этой системы определяются по формулам

$$x_{\text{ц. т.}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},\quad y_{\text{ц. т.}}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

Если теперь представить себе в плоскости материальную линию (L) с, вообще говоря, непостоянной линейной плотностью ρ, то центр тяжести этой линии можно найти следующим образом. Разобьем мысленно *(L)* на маленькие дуги Δs_k и заменим каждую из дуг материальной точкой массы $m_k=\rho_k\Delta s_k$ расположенной на этой дуге. Эта «дискретная модель» материальной линии имеет центр тяжести с координатами

$$x_{\text{ц. т.}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\rho_k\Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\rho_k\Delta s_k},\quad y_{\text{ц.т.}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}y_k\rho_k\Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\rho_k\Delta s_k}. \tag{4.107}$$

Если перейти к пределу при бесконечном измельчении разбиения, то дискретная модель перейдет в непрерывную линию, для которой в силу формул (4.107) получим

$$x_{\text{ц. т.}}=\frac{\int\limits_{(L)}\rho x\,ds}{\int\limits_{(L)}\rho\,ds},\quad y_{\text{ц. т.}}=\frac{\int\limits_{(L)}\rho y\,ds}{\int\limits_{(L)}\rho\,ds}. \tag{4.108}$$

Особенно простые формулы получатся для линии с постоянной плотностью; тогда центр тяжести называется *геометрическим.* Из формул (4.108), сокращая на ρ, выводим

$$x_{\text{г. ц. т.}}=\frac{\int\limits_{(L)}x\,ds}{L},\quad y_{\text{г. ц .т.}}=\frac{\int\limits_{(L)}y\,ds}{L}, \tag{4.109}$$

где под L понимается длина линии *(L).*

Если сравнить вторую формулу (4.109) с формулой

$$S=2\pi\int\limits_{x=a}^{b}y\,dL=2\pi\int\limits_{a}^{b}y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

для площади поверхности вращения, то мы увидим, что

$$S=2\pi\int\limits_{(L)} y\,ds=L\cdot 2\pi y_{\text{г. ц. т.}}$$

Другими словами, *если плоская линия вращается вокруг оси, лежащей в плоскости этой линии и не пересекающей ее, то площадь полученной поверхности вращения равна произведению длины этой линии на путь, пройденный ее геометрическим центром тяжести.* Эта теорема называется *«первой теоремой Гюльдена.* Ее применение особенно удобно, если положение центра тяжести легко определить. Например, из нее получаем площадь поверхности тора (рис. 4.18), полученной вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей ее.

$$S=2\pi r\cdot 2\pi R=4\pi^2 rR.$$

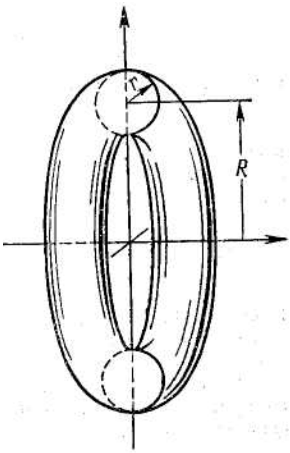


Рис.4.18.

23. Интеграл по координате. Помимо криволинейных интегралов по длине дуги, рассматриваются также *криволинейные интегралы по координате.* При составлении последнего линия *(L)* предполагается ориентированной, т. е. должно быть указано, в каком направлении она проходит; если линия разомкнутая, это значит, что надо указать, какая из граничных точек этой линии считается, ее началом, а какая — концом. Для определения интеграла надо взамен формулы (4.106) написать

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{(L)} u\,dx = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\sigma_k)\,\Delta x_k, \\ &\int\limits_{(L)} u\,dy = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\sigma_k)\,\Delta y_k, \quad \int\limits_{(L)} u\,dz = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\sigma_k)\,\Delta z_k, \end{aligned}\right\} \tag{4.110}$$

где Δx_k — приращение абсциссы x на k-й дуге разбиения и т. д. Интегралы вида (4.110) легко сводятся к обычным определенным интегралам. Так, если линия (L) задана в параметрическом виде, то и значения u вдоль (L) становятся функцией параметра t и

$$\int\limits_{(L)} u\,dx = \int\limits_{\gamma}^{\delta} u(t)\,\dot{x}(t)\,dt,$$

где значения $t=\gamma$ и $t=\delta$ отвечают концам линии *(L).* Поэтому основные свойства определенного интеграла (свойства 2— 5 п. 4) распространяются и на интегралы по координате. В то же время здесь имеет место и свойство 1 п. 4, которое можно сформулировать так: *при перемене ориентации линии* (L.) *интегралы* (4.110) *умножаются на* -1; действительно, если линию *(L)* проходить в противоположном направлении, то все Δx, а с ними и dx, поменяют знак. Возможность перемены знака у dx приводит также к тому, что на интегралы по координате не распространяются свойства, связанные с интегрированием неравенств (п. 5): так, интеграл вида (4.110) от положительной функции, и отличие от интеграла по длине дуги, не обязан быть положительным.

В теории дифференциальных уравнений и в теории векторного поля применяются *комбинации интегралов (4.109)* вида

$$\int\limits_{(L)} (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \int\limits_{(L)} u\,dx + \int\limits_{(L)} v\,dy + \int\limits_{(L)} w\,dz.$$

В дальнейшем нам понадобится также интеграл

$$\int\limits_{(L)} y\,dx,$$

распространенный по плоской замкнутой линии *(L),* произвольно расположенной в пространстве (рис.4.19). Для его вычисления спроектируем линию (L) на плоскость xOy и заметим, что

$$\int\limits_{(L)} y\,dx = \int\limits_{(L')} y\,dx, \tag{4.111}$$

так как соответствующие точки линии *(L)* и *(L')* отличаются только значениями *z*, которые никак не проявляются в интегралах (4.111). Для правого интеграла (4.111)

$$\int_{(L')} y\,dx = -S'.$$

Воспользуемся теперь тем, что *при проектировании плоской фигуры на другую плоскость площадь проекции равна произведению площади исходной*

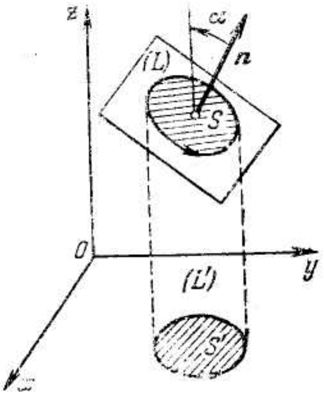


Рис.4.19.

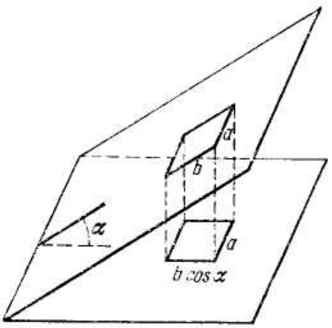


Рис.4.20.

фигуры на косинус угла между обеими плоскостями, так как при этом (рис. 4.20) размеры в одном направлении не меняются, тогда как в другом множатся на cos α. Итак,

$$\int_{(L)} y\,dx = -S\cos\alpha = -S\cos(\widehat{\mathbf{n},\ z}),$$

(4.112)

где S — площадь, ограниченная линией (L), а **n** —единичный вектор внешней нормали к плоскости линии (L), направление которого согласовано с обходом *(L)* по правилу аинта.

Аналогично можно было бы доказать формулу

$$\int_{(L)} x\,dy = S\cos(\widehat{\mathbf{n},\ x}).$$

(4.113)

Если совершить циклическую перестановку координатных осей, то из формул (4.112) и (4.113) получим также

$$\left.\begin{aligned} &\int_{(L)} z\,dy = -S\cos(\widehat{\mathbf{n},\ x}), \quad &&\int_{(L)} x\,dz = -S\cos(\widehat{\mathbf{n},\ y}),\\ &\int_{(L)} y\,dz = S\cos(\widehat{\mathbf{n},\ x}), \quad &&\int_{(L)} z\,dx = S\cos(\widehat{\mathbf{n},\ y}). \end{aligned}\right\}$$

(4.114)

Отметим в заключение, что интегралы вида

$$\oint_{(L)} f(x)\,dx, \quad \oint_{(L)} \varphi(y)\,dy, \quad \oint_{(L)} \psi(z)\,dz$$

по *замкнутой* линии *(L)* (криволинейный интеграл по замкнутому контуру принято обозначать знаком $\oint$) всегда равны нулю. В самом деле, если *F(x)* —первообразная к *f (x),* то первый из интегралов равен приращению функции *F (x),* когда точка обходит *(L)* и возвращается в исходное положение, т. е. равен нулю.

24. Условия независимости криволинейного интеграла по координатам от контура интегрирования. Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int_{(L)} [P(x,\ y,\ z)\,dx + Q(x,\ y,\ z)\,dy + R(x,\ y,\ z)\,dz],$$

(4.115)

где *P, Q* и *R* — некоторые функции, заданные во всем пространстве *x, y, z* или в некоторой его области и не обращающиеся там в бесконечность, а (L)— произвольная линия в этой области. В физических задачах иногда бывает, что интеграл (4.115) зависит только от положения начальной и конечной точек линии *(L),* но не зависит от того, как именно линия *(L)* проходит между этими точками. Другими словами (рис. 4.21),

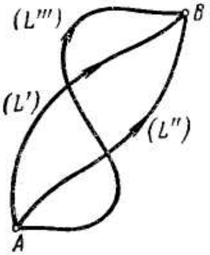


Рис.4.21.

$$\int_{(L')} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) =$$
$$= \int_{(L'')} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) =$$
$$= \int_{(L''')} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \ldots \qquad (4.116)$$

при любом расположении точек A и B. *Тогда мы будем говорить, что интеграл* (4.115) *не зависит от контура интегрирования.* Например, интеграл (4.115) может иметь смысл работы силового поля при перемещении точки; тогда условие (4.116) означает, что эта работа зависит только от начального и конечного положений точки.

Для независимости интеграла (4.115) *от контура интегрирования необходимо и достаточно, чтобы интеграл* (4.115) *по любому замкнутому контуру равнялся нулю,* т. е. чтобы

$$\oint_{(L)} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = 0 \qquad (4.117)$$

для любого замкнутого контура *(L).*

Для доказательства предположим, что условие (4.117) выполнено и даны контуры *(L')* и *(L")* с одинаковыми начальной и конечной точками (см. рис. 4.21). Построим замкнутый контур *(L),* идущий из *A* в *B* по *(L')* и из B в A по (L"), причем (L") проходится в противоположном направлении. Применим условие (4.117), разобьем интеграл (4.117) на два в силу свойства 3 п. 4 и изменим у второго интеграла направление интегрирования в силу свойства 1 п. 4. Тогда получим

$$0=\oint_{(L)}=\int_{(L')}-\int_{(L'')},\ \text{т. е.}\ \int_{(L')}=\int_{(L'')},$$

откуда и вытекает (4.116). Рассуждая в обратном порядке, легко из (4.116) вывести (4.117).

Для независимости интеграла (4.115) *от контура интегрирования необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение было полным дифференциалом некоторой (однозначной]) функции трех переменных,* т. е. чтобы

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=du \tag{4.118}$$

для некоторой функции $u=u(x,\ y,\ z)$. Для доказательства предположим сначала, что условие (4.118) выполнено. Тогда

$$\int_{(L)}(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)=\int_{(L)}du=u(B)-u(A),$$

где A и B—начало и конец линии (L). Значит, интеграл не зависит от контура интегрирования.

Пусть, обратно, интеграл (4.115) не зависит от контура интегрирования. Зафиксируем произвольно точку M_o в пространстве и для любой текущей точки $M\ (x;\ y;\ z)$ определим значение функции

$$u(M)=\int_{\cup M_0M}(P\,dx+Q\,dy+R\,dz), \tag{4.119}$$

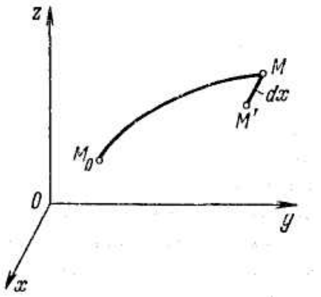


Рис.4.22.

где $\cup M_0M$ - произвольная линия, идущая из M_0 в M. По условию эта функция однозначная, т. е. принимает в каждой точке M вполне определенное значение. Чтобы найти du, придадим сначала x бесконечно малое приращение dx. Тогда точка переместится в положение M' (рис. 4.22), причем бесконечно малый отрезок MM' будет параллелен оси x. Соответствующее приращение функции u равно

$$\Delta_x u = u(M') - u(M) = \int_{\cup M_0MM'} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) - $$
$$- \int_{\cup M_0M} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \int_{MM'} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

Но так как вдоль отрезка MM' координаты y и z не меняются, то в последнем интеграле

$dy = dz = 0$ и $\Delta_x u = \int_{MM'} P\,dx.$

Так как отрезок MM' бесконечно малый, то с точностью до малых высшего порядка можно считать на нем $P=$ const, откуда, переходя от приращения к дифференциалу и тем самым отбрасывая малые высшего порядка, получим $\partial_x u = Pdx$. Аналогично проверяем, что $\partial_y u = Qdy$, $d_z z = R\,dz$, и, складывая, получаем полный дифференциал

$du = Pdx + Q\,dy + R\,dz,$

т. е. условие (4.118) выполнено.

Если вспомнить выражение для полного дифференциала, то условие (4.118) можно записать еще так:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R. \tag{4.120}$$

Отсюда легко вывести, что если *интеграл* (4.115) *не зависит от контура интегрирования,* то

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial y}. \tag{4.121}$$

Действительно, из условий (4.120) получаем

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},$$

и в силу независимости смешанной производной от порядка дифференцирования получаем первое равенство (4.121); аналогично доказываются остальные.

В теории векторного поля будет доказано обратное предложение: *если условия* (4.121) *выполнены и область, в которой рассматриваются функции P, Q, R, односвязна, то интеграл* (4.115) *не зависит от контура интегрирования.* При этом *односвязной* называется такая область, для которой любой расположенный в ней замкнутый контур можно путем непрерывной деформации стянуть в точку, не выходя за пределы области.

Например, все пространство, полупространство, двугранный или многогранный угол, внутренность или внешность сферы, внутренность конечного или бесконечного кругового цилиндров — все это одно-связные области. В отличие от этого внешность бесконечного кругового цилиндра — это *неодносвязная* (двусвязная) область, так как, например, контур (L), изображенный на рис. 4.23, нельзя путем непрерывной деформации стянуть в точку, не выходя за пределы области. Неодносвязными являются также внутренность или внешность тора, а также полное пространство, из которого выброшены все точки бесконечной прямой линии или окружности. На рис. 4.24 изображены примеры односвязной и четырехсвязной областей на плоскости. Плоскость становится двусвязной, даже если из нее выбросить одну лишь точку.

Сравнивая условия (4.118) и (4.121), мы видим, что в односвязной области условия (4.121) необходимы и достаточны для того, чтобы выражение $Pdx+Q\,dy+R\,dz$ было полным дифференциалом некоторой однозначной функции $u\,(x,\,y,\,z)$. Можно показать, что

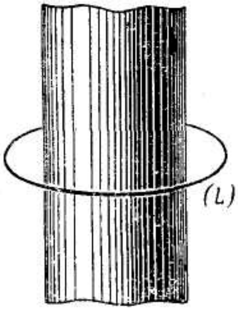


Рис.4.23.

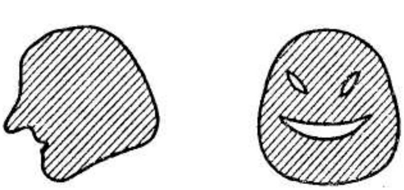


Рис.4.24.

если условия (4.121) выполнены в многосвязной области, то функция *и,* построенная по формуле (4.119), удовлетворяет соотношению (4.118), но будет, вообще говоря, многозначной.

4.8 Понятие об обобщенных функциях

25. Дельта-функция. *Дельта-функция* δ(x), широко применяемая в математике и ее приложениях, является простейшим примером *обобщенных функций.,*

Чтобы приближенно представить себе дельта-функцию, рассмотрим сначала разрывную функцию, определенную равенствами

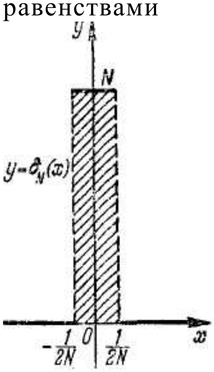


Рис.4.25.

$$y=\delta_N(x)=\begin{cases} 0 & \left(-\infty < x < -\frac{1}{2N}\right), \\ N & \left(-\frac{1}{2N} < x < \frac{1}{2N}\right), \\ 0 & \left(\frac{1}{2N} < x < \infty\right) \end{cases}$$

(4.122)

при очень большом *N;* ее график изображен на рис.4.25. Значения функции в самих точках разрыва $x = \pm (1/2N)$ здесь, как обычно, несущественны. Дельта-функция получается в пределе, когда $N\to\infty$. Она, строго говоря, не имеет графика и может быть определена так:

$$\delta(x)=\begin{cases} 0 & (-\infty < x < -0;\ +0 < x < \infty), \\ \infty & (-0 < x < +0), \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1;$$

впрочем, последнее равенство можно также записать в виде

$$\int_{-0}^{+0} \delta(x)\, dx = 1. \qquad (4.123)$$

Для приближенного изображения дельта-функции не обязательно пользоваться разрывной функцией (4.122), можно положить, например, $\delta_N(x) = (N/\pi)\,(1+N^2x^2)^{-2}$ ($-\infty < x < \infty$; проследите за графиком этой функции при $N\to\infty$) и т. п. Вообще, годится любая функция, концентрирующая свои значения около $x = 0$: более точно, достаточно только, чтобы $\delta_N(x) \geq 0$ ($-\infty < x < \infty$) и чтобы при $N\to\infty$ было

$$\int_{a}^{b} \delta_N(x)\, dx \to 0, \quad \int_{-a}^{-b} \delta_N(x)\, dx \to 0,$$

$$\int_{-a}^{b} \delta_N(x)\, dx \to 1$$

для любых постоянных положительных чисел a и b.

ЕСЛИ рассматривать массы, распределенные вдоль оси x, и их линейный плотности, то окажется, что плотность единичной точечной массы, расположенной в начале координат, как раз равна дельта-функции. Действительно, если сначала представить себе эту массу не точечной, а равномерно распределенной на отрезке $-1/2N \leq x \leq 1/2N$, то плотность будет иметь вид, изображенный на рис. 4.25. Если теперь $N\to\infty$, то в пределе масса станет точечной, а плотность — дельта-функцией.

Аналогичным образом функция $Q(x)=m\delta(x-a)$ представляет собой плотность линейной (т. е. расположенной вдоль линии, в данном случае оси x) массы m, сосредоточенной в точке a. Так же можно изобразить плотности точечного заряда, сосредоточенной нагрузки и т. п.

Иногда приходится складывать дельта-функцию и обычную функцию. Например, сумма

$$\rho(x) = \rho_0 + m_1\delta(x-a_1) + m_2\delta(x-a_2)$$

представляет собой плотность комбинации равномерно распределенной массы и двух точечных масс. Поэтому применение дельта-функции дает возможность во всех случаях распределенных, точечных и комбинированных масс применять формулы, относящиеся к распределенным массам; более того, само противопоставление распределенных масс точечным в значительной степени теряет смысл. То же относится к зарядам, нагрузкам и т. п.

При интегрировании выражений, содержащих дельта-функцию, надо иметь в виду формулу (4.123). Например, если *f (x)* — непрерывная функция и α < *a* < β, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = \int_{\alpha}^{a-0} f(x)\,\delta(x-a)\,dx + \int_{a-0}^{a+0} f(x)\,\delta(x-a)\,dx + \\ + \int_{a+0}^{\beta} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = 0 + \int_{a-0}^{a+0} f(a)\,\delta(x-a)\,dx + 0 = f(a)\cdot 1 = f(a); \tag{4.124}$$

при этом первый и третий интегралы равны нулю, так как там дельта-функция равна нулю, а во втором интеграле мы заменили *f (x)* на *f* (a), так как на бесконечно малом интервале непрерывную функцию можно считать постоянной, и воспользовались формулой (4.123).
Отметим двусмысленность интеграла вида

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\delta(x-\alpha)\,dx.$$

Здесь обязательно надо указать, захватывается или нет при интегрировании особенность дельта-функции, так как

$$\int_{\alpha-0}^{\beta} f(x)\,\delta(x-\alpha)\,dx = f(\alpha), \quad \int_{\alpha+0}^{\beta} f(x)\,\delta(x-\alpha)\,dx = 0.$$

При интегрировании дельта-функции получается *единичная функция*

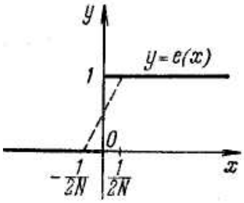
$$e(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(t)\,dt = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0), \\ 1 & (0 < x < \infty), \end{cases} \tag{4.125}$$

которая также имеет многочисленные применения. Ее график показан на рис. 4.26; она получается при внезапном подключении какого-либо постоянного воздействия, например напряжения в электрическую цепь.

Итак, если проинтегрировать дельта-функцию, то получится обычная, не обобщенная функция, хотя и разрывная. При вторичном интегрировании получилась бы даже непрерывная функция .

Если продифференцировать равенство (4.125), то получится, что

$$\delta(x) = e'(x). \tag{4.126}$$



$\delta(x) = e'(x).$

Рис.4.26.

Это равенство понимается в обобщенном смысле. Например, можно заменить на рис.4.26 вертикальный отрезок на косой, соединяющий точки (—1/2N ; 0) и (1/2N; 1) и изображенный пунктиром. Тогда разрывная функция заменится на непрерывную, производная которой имеет график, изображенный на рис. 4.25. Если теперь перейти к пределу при $N\to\infty$, мы и получим соотношение (4.126).

Таким образом, дельта-функция получается при дифференцировании разрывной функции, обладающей конечным скачком. Например, для закона движения точки, ее скорость выражается формулами

$$s'_t = \begin{cases} at & (0 \leqslant t < t^*), \\ v & (t^* < t < \infty) \end{cases}$$

и потому при $t = t^*$ имеет скачок

$$s_t(t^*+0) - s_t(t^*-0) = at^* - v.$$

Поэтому ускорение равно

$$(at^* - v)\,\delta(t - t^*) + ae(t^* - t)$$

Первый член в этой сумме описывает явление *удара.*

26. Приложение к построению функции влияния. Одним из важных приложений дельта-функции является построение *функции влияния,* называемой также *функцией Грина*. Рассмотрим сначала пример. Пусть исследуется *прогиб* $h(x)$ балки под действием внешней поперечной нагрузки, приложенной с плотностью $p(x)$ (см. рис.4.27 , где изображен график или, как говорят, *эпюр* внешней нагрузки). Будем считать нагрузки не слишком большими, так чтобы можно было воспользоваться законом линейности: при сложении внешних нагрузок прогибы складываются.

Обозначим через $y = G(x;\ \xi)$ прогиб в точке x, полученный в результате приложения в точке ξ единичной нагрузки. Эта функция G $(x;\ \xi)$ и называется функцией влияния в рассматриваемом примере. Мы сейчас покажем, что если она известна, то легко найти прогиб и от воздействия произвольной нагрузки с плотностью $p\ (x)$.

Действительно, рассмотрим нагрузку, приходящуюся на участок оси от точки ξ до точки $\xi+d\xi$. Эта нагрузка равна $p\ (\xi)\ d\xi$; поэтому прогиб от нее в точке x равен $G\ (x;\ \xi)\ p\ (\xi)\ d\xi$, так как из закона линейности вытекает, что если внешнюю нагрузку умножить на постоянный множитель, то и прогиб умножится на тот же множитель. Скла-

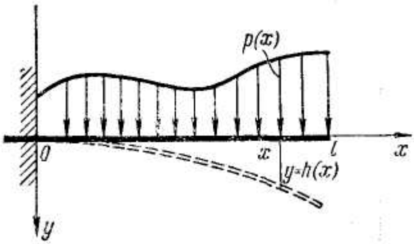


Рис.4.27

дывая все такие бесконечно малые прогибы, получаем суммарный прогиб

$$h\ (x) = \int_0^l G\ (x;\ \xi)\ p\ (\xi)\ d\xi. \tag{4.127}$$

Перейдем теперь к общей схеме построения функции влияния. Пусть внешнее воздействие на какой-либо объект описывается функцией $f(x)$ ($a \le x \le b$; в приведенном примере это была функция $p\ (x)$), а результат этого воздействия—функцией

Обозначим оператор перехода от функции внешнего воздействия *f(x)* к функции «отклику»

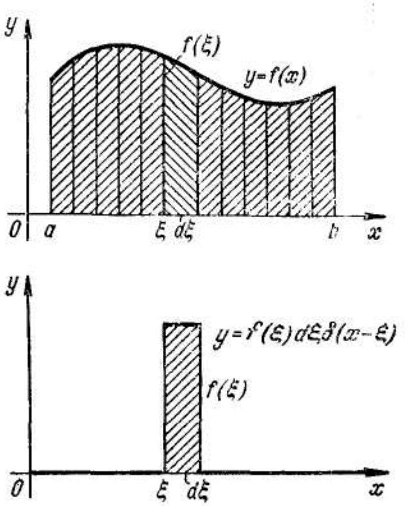


Рис.4.28.

(ср. с формулой (4.127)).

Функцию влияния можно в более простых случаях подсчитать теоретически , а в более сложных определить экспериментально, производя необходимые замеры, например измеряя деформацию системы под действием сосредоточенной силы. Центральным пунктом является проверка *линейности системы,* т. е. возможности применения принципа суперпозиции; эта возможность выводится из общетеоретических принципов, либо проверяется экспериментально. Разумеется, не нее системы являются точно или приближенно линейными.

Отметим, что функции f и

(4.128) справедлива лишь для малых (точнее, бесконечно малых) по амплитуде внешних воздействий *f (x)*.

27. Другие обобщенные функции. Если при приближенном представлении дельта-функции (п. 25) воспользоваться непрерывной моделью, а затем произвести дифференцирование, то мы получим приближенное представление о δ' *(x)*. У нее еще более «острая» особенность, чем у δ *(x),* причем δ' *(x)* принимает значения обоих знаков.

Если δ-функция описывает плотность единичного заряда, расположенного в начале координат (п. 25), то δ' *(x)* описывает плотность *диполя,* расположенного там же. В самом деле, такой диполь получится, если разместить заряды —*q* и *q* соответственно в точках *x=0* и *x = l,* а затем, оставляя *p = ql* *(момент диполя)* без изменения, устремить *l* к нулю, так что в пределе получатся два равных бесконечно больших заряда противоположного знака на бесконечно близком расстоянии. До перехода к пределу плотность заряда имеет вид

$$q\delta(x-l)-q\delta(x)=-p\,\frac{\delta(x-l)-\delta(x)}{-l};$$

поэтому после перехода к пределу при $l\to 0$ плотность заряда равна $-p\delta'(x)$.

Интегралы с участием $\delta'(x)$ вычисляются с помощью интегрирования по частям: если *f (x)* имеет непрерывную производную и $\alpha < a < \beta$, то

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\delta'(x-a)\,dx=f(x)\,\delta(x-a)\Big|_{x=a}^{\beta}-\int_\alpha^\beta \delta(x-a)\,f'(x)\,dx=-f'(a).$$

Интересно отметить, что вычисление этого интеграла по такому методу:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\delta'(x-a)\,dx=\int_{a-0}^{a+0} f(x)\,\delta'(x-a)\,dx=f(a)\int_{a-0}^{a+0}\delta'(x-a)\,dx=$$

$$=f(a)\,\delta(x-a)\Big|_{x=a-0}^{a+0}=0$$

является ошибочным, так как замена *f (x)* на *f(a)* при весьма острой особенности у δ'*(x—a*) является слишком грубой. Аналогично можно рассматривать и дальнейшие производные от дельта-функции, а также их комбинации.

Обобщенные функции можно классифицировать по числу интегрирований, после которых из заданной функции получится непрерывная функция. При такой классификации непрерывные функции можно считать обобщенными функциями нулевого порядка; функции с конечными разрывами и обычные функции с интегрируемыми особенностями на конечном расстоянии (п. 16) — обобщенными функциями первого порядка. Функция $\delta(x)$— это простейший пример функции второго порядка (см. п. 25), $\delta'(x)$ имеет третий порядок и т. д. При дифференцировании функции ее порядок повышается на единицу, а при интегрировании—понижается на единицу.

При истолковании функции с неинтегрируемой особенностью в качестве обобщенной функции надо указывать, производной от какой функции нулевого или первого порядка она является. Например, функцию $1/x$, имеющую неинтегрируемую особенность при $x = 0$, можно при $x \neq 0$ считать равной

$$(\ln|x|)', \tag{4.129}$$

либо же, скажем,

$$(\ln|x| + e(x))', \tag{4.130}$$

так как при $x \neq 0$ будет $e'(x) = 0$. Однако функции (4.129) и (4.130) различаются на $e'(x) = \delta(x)$ и потому их свойства неодинаковы. Поэтому в теории обобщенных функций вместо $1/x$ — предпочитают применять запись (4.129) или (4.130) (что, конечно, не одно и то же), так как смысл такой записи уже однозначен. Аналогично функцию $1/x^2$— можно рассматривать как $-(\ln|x|)''$ и т. п. Рост функции при $x \to \pm\infty$ не ограничивается. Оказывается, что если пользоваться обобщенными функциями, то большинство правил, связанных с дифференцированием тех или иных формул, будет справедливым без каких-либо ограничений на характер участвующих функций. Например, правило Лейбница о дифференцировании по параметру под знаком интеграла (п. 20) становится справедливым, независимо от характера сходимости рассматриваемых интегралов и т. п.

Микромодуль 6
Индивидуальные тестовые задания

1. Составляя интегральную сумму s_n и переходя к пределу, вычислить определенные интегралы $\int\limits_a^b x^2\,dx$. Указание. Отрезок $[a, b]$ разделить на n частей точками $x_i = aq^i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, где $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. *Отв.* $\frac{b^3 - a^3}{3}$.

2. $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$, где $0 < a < b$. *Отв.* $\ln\frac{b}{a}$. Указание. Деление отрезка $[a, b]$ производить так же, как и в предыдущем примере.

3. $\int\limits_a^b \sqrt{x}\,dx$. *Отв.* $\frac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})$. Указание. См. предыдущий пример.

4. $\int\limits_a^b \sin x\,dx$. *Отв.* $\cos a - \cos b$. Указание. Предварительно установить следующее тождество: $\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin[a+(n-1)h] = \frac{\cos(a-h) - \cos(a+nh)}{2\sin h}$, для этого надо умножить и разделить все члены левой части на $\sin h$ и заменить произведение синусов разностью косинусов.

5. $\int\limits_a^b \cos x\,dx$. *Отв.* $\sin b - \sin a$.

Пользуясь формулой Ньютона—Лейбница, вычислить определенные интегралы: **6.** $\int\limits_0^1 x^4\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{5}$. **7.** $\int\limits_0^1 e^x\,dx$. *Отв.* $e-1$. **8.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx$. *Отв.* 1.

9. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. *Отв.* $\frac{\pi}{4}$. **10.** $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Отв.* $\frac{\pi}{4}$. **11.** $\int\limits_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x\,dx$. *Отв.* $\ln 2$.

12. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x}$. *Отв.* 1. **13.** $\int\limits_1^x \frac{dx}{x}$. *Отв.* $\ln|x|$. **14.** $\int\limits_0^x \sin x\,dx$. *Отв.* $2\sin^2\frac{x}{2}$.

15. $\int\limits_{\sqrt[3]{a}}^x x^2\,dx$. *Отв.* $\frac{x^3 - a}{3}$. **16.** $\int\limits_1^z \frac{dx}{2x-1}$. *Отв.* $\ln(2z-1)$. **17.** $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$. *Отв.* $\frac{\pi}{4}$. **18.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$. *Отв.* $\frac{\pi}{4}$.

Вычислить значения нижеследующих интегралов, применяя указанные подстановки: **19.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\,dx$, $\cos x = t$. *Отв.* $\frac{1}{3}$. **20.** $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2\cos x}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

Отв. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. **21.** $\int\limits_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$, $2+4x=t^2$. *Отв.* $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **22.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, $x=\operatorname{tg} t$. *Отв.* $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$. **23.** $\int\limits_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$, $x-1=t^2$. *Отв.* $2\,(2-\operatorname{arctg} 2)$.

24. $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}}$, $z=\frac{1}{x}$. *Отв.* $\ln\frac{3}{2}$. **25.** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{6-5\sin\varphi+\sin^2\varphi}$, $\sin\varphi=t$. *Отв.* $\ln\frac{4}{3}$.

Доказать, что **26.** $\int\limits_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\int\limits_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ $\quad(m>0,\quad n>0)$.

27. $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^b f(a+b-x)\,dx$. **28.** $\int\limits_0^a f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a} f(x^2)\,dx$.

Вычислить следующие несобственные интегралы: **29.** $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Отв.* 1.

30. $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx$. *Отв.* 1. **31.** $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}$. *Отв.* $\frac{\pi}{2a}\,(a>0)$. **32.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Отв.* $\frac{\pi}{2}$. **33.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^5}$. *Отв.* $\frac{1}{4}$. **34.** $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$. *Отв.* -1. **35.** $\int\limits_0^\infty x\sin x\,dx$. *Отв.* Интеграл расходится. **36.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$. *Отв.* Интеграл расходится.

37. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. *Отв.* π. **38.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. *Отв.* $\frac{3}{2}$. **39.** $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^3}$. *Отв.* Интеграл расходится. **40.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. *Отв.* $\frac{\pi}{2}$. **41.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$. *Отв.* Интеграл расходится. **42.** $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$ $\quad(a>0)$. *Отв.* $\frac{b}{a^2+b^2}$.

43. $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$ $(a>0)$. *Отв.* $\frac{a}{a^2+b^2}$.

Вычислить приближенные значения интегралов: **44.** $\ln 5 = \int\limits_1^5 \frac{dx}{x}$ по формуле трапеций и по фурмуле Симпсона ($n=12$). *Отв.* 1,6182 (по формуле трапеций); 1,6098 (по формуле Симпсона). **45.** $\int\limits_1^{11} x^3\,dx$ по формуле трапеций и по формуле Симпсона ($n=10$). *Отв.* 3690; 3660. **46.** $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$ по формуле трапеций ($n=6$). *Отв.* 0,8109. **47.** $\int\limits_1^3 \frac{dx}{2x-1}$ по формуле Симпсона($n=4$). *Отв.* 0,8111. **48.** $\int\limits_4^{10} \lg_{10} x\,dx$ по формуле трапеций и по формуле Симпсона ($n=10$). *Отв.* 6,0656; 6,0896. **49.** Вычислить значение π из соотношения $\frac{\pi}{4} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, применяя формулу Симпсона ($n=10$). *Отв.* 3,14159. **50.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$ по формуле Симпсона ($n=10$). *Отв.* 1,371.

51. Исходя из равенства $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}$, где $\alpha > 0$, найти при целом $n > 0$ величину интеграла $\int\limits_0^\infty e^{-x}x^n\,dx$. *Отв.* $n!$.

52. Исходя из равенства $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, найти величину интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$. *Отв.* $\frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n\,n!}$.

53. Вычислить интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\,dx$. *Отв.* $\ln(1+\alpha)$ $(\alpha > -1)$.

54. Пользуясь равенством $\int\limits_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^{n-1}(\ln x)^k\,dx$. *Отв.* $(-1)^k \frac{k!}{n^{k+1}}$.

Микромодуль 7

Применения определенного интеграла

Две схемы применения. Имеются две основные схемы применения определенного интеграла к нахождению геометрических, физических и т. п. величин.

Первая схема основана на определении интеграла как предела интегральной суммы (см. формулу (4.46)). Изучаемая величина приближенно представляется в виде интегральной суммы, причем с измельчением разбиения это представление становится все более точным и в пределе переходит в точное. Поэтому данная величина равна пределу интегральной суммы, т. е. интегралу. Этот прием достаточно продемонстрирован на примерах п. 1, которые привели к четырем интегралам (4.47). Как указано в п. 2, эта схема основана на представлении об интеграле как о сумме бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.

Вторая схема применения интегралов состоит в том, что составляется соотношение между дифференциалами рассматриваемых величин, так называемое *дифференциальное уравнение.* От этого соотношения мы переходим к соотношению между самими величинами при помощи интегрирования на основе формулы (4.52), которую можно записать также в виде

$$\int dy = y_{\text{конечное}} - y_{\text{начальное}}.$$

Это соотношение означает просто, что сумма всех бесконечно малых приращений какой-либо величины равна полному приращению этой величины.

Рассмотрим пример. Пусть точка движется вдоль оси s, проходя отрезок от $s = a$ до $s = b$, причем на нее действует переменная сила, направленная вдоль оси и принимающая в каждой точке s значение $F(s)$. Пусть требуется вычислить общую работу $A_{общ}$, произведенную этой силой на указанном пути. Для этого заметим, что работа A, произведенная силой в процессе движения, находится в функциональной связи с пройденным путем, т. е. $A = A(s)$. Если точка проходит малый интервал от s до $s+\Delta s$, то сила не успевает существенно измениться и ее можно приближенно считать постоянной, т. е. написать по известной формуле физики

$$\Delta A \approx F(s)\,\Delta s.$$

Более точная формула имеет вид

$$\Delta A = F(s)\,\Delta s + \alpha, \text{ где } |\alpha| \ll \Delta s, \quad (4.131)$$

т. е. α имеет высший порядок малости, чем Δs. То что здесь действительно высший порядок малости, вытекает из следующего рассуждения: α получается из-за того, что F на участке Δs успевает измениться, но при бесконечно малом Δs это изменение также бесконечно мало, а при подсчете ΔA это изменение надо еще множить на Δs.

Если теперь вспомнить определение дифференциала как главной линейной части приращения, то из (4.131) можно написать

$$dA = F(s)\,ds. \quad (4.132)$$

Интегрируя, получим

$$A_{\text{общ}} = A(b) - A(a) = \int dA = \int_a^b F(s)\,ds;$$

часто пишут просто

$$A = \int F\,ds.$$

Хотя здесь пределы интегрирования не выписаны, но, конечно, это интеграл определенный, пределы подразумеваются.

На практике обычно вместо этого детального рассуждения пользуются следующим, более кратким: на протяжении бесконечно малого интервала пути ds силу можно считать постоянной, т. е. для соответствующего бесконечно малого приращения работы сразу получается формула (4.132), которую и интегрируют. Если подробно разобраться в этом верном, но кратком рассуждении, то и получится приведенное выше детальное рассуждение.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Соотношение (4.132) в общем виде можно записать так:

$$dy = f(x)\,dx, \quad (4.133)$$

где x и y— какие-то переменные, функционально связанные между собой. Интегрируя, получим

$$y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx, \quad \text{где} \quad y_0 = y(x_0), \quad \text{а} \quad y_1 = y(x_1).$$

Уравнение (4.133) — простейшее дифференциальное уравнение. Более подробно дифференциальные уравнения будут изучаться в модуле 5, однако простейшие примеры, не требующие особой теории, можно показать уже сейчас. Так, встречаются уравнения вида

$$dy = \varphi(y)\, dx. \tag{4.134}$$

Такое уравнение нельзя сразу интегрировать, так как тогда в правой части под знаком интеграла будет стоять неизвестная функция *у (х).* Требуется предварительно перенести *у* к dy, т. е. написать

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = dx,$$

откуда

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\varphi(y)} = x_1 - x_0.$$

Аналогичным образом уравнение

$$dy = f(x)\, \varphi(y)\, dx \tag{4.135}$$

интегрируется так:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\, dx, \qquad \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\varphi(y)} = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx.$$

Уравнения (4.133)—(4.135) называются *дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными, так* как в результате простейших алгебраических преобразований в них удается отделить член с dx и x от члена с dy и y, после чего интегрирование немедленно выполняется.

Рассмотрим, например, задачу об истечении жидкости из цилиндрического сосуда, в дне которого проделано отверстие площади σ (рис. 4.29). Высота h уровня жидкости зависит от времени t, т. е. $h = h(t)$. Если жидкость невязкая и силами поверхностного натяжения можно пренебречь, то скорость v истечения жидкости из сосуда с достаточной точностью описывается *законом Торичелли* .

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{4.136}$$

На основании этого закона легко составить дифференциальное уравнение задачи. Будем рассуждать кратко. За время dt

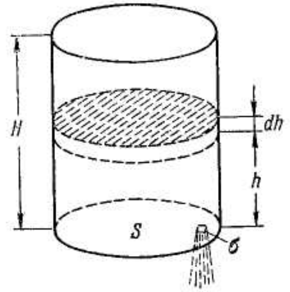


Рис.4.29.

скорость истечения можно считать постоянной; значит, в силу формулы (4.136) вытекший объем равен

$$dV = \sigma \cdot v\, dt = \sigma \sqrt{2gh}\, dt.$$

С другой стороны, тот же объем равен $dV = S \mid dh \mid = — S\, dh;$ надо учесть, что h убывает и потому $dh < 0$. Приравнивая оба выражения, получим уравнение

$$-S\, dh = \sigma \sqrt{2gh}\, dt$$

типа (4.134). Для его интегрирования отнесем h к dh:

$$-\frac{S\, dh}{\sigma \sqrt{2gh}} = dt; \quad \int_H^0 -\frac{S\, dh}{\sigma \sqrt{2gh}} = T,$$

где Т— полное время истечения жидкости. Вычисляя, получим

$$-\frac{S}{\sigma \sqrt{2g}}\, 2 \sqrt{h} \Big|_{h=H}^{0} = T, \quad T = \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Вычисление площадей плоских фигур. Применение определенного интеграла к вычислению площади криволинейной трапеции было рассмотрено ранее, а правило знаков показано на рис. 4.4.

Если надо найти всю заштрихованную на рис. 4.4 площадь в «арифметическом», а не «алгебраическом» смысле, то можно пользоваться формулой

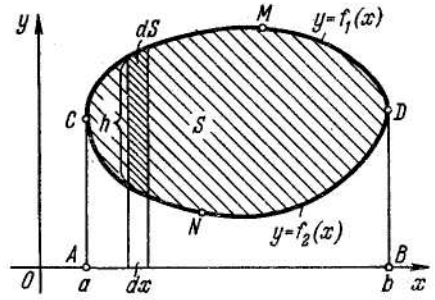


Рис.4.30.

$$S_1+S_2+S_3=\int_a^b |f(x)|\,dx;$$

последний интеграл вычисляется, как описано в примере 1 п. 4.

Вычисление площадей фигур, отличных от криволинейных трапеций, также осуществляется с помощью интегралов. Так, фигуру, изображенную на рис. 4.30, можно получить как разность двух криволинейных трапеций *ACMDBA* и *ACNDBA,* т. е.

$$S=\int_a^b f_1(x)\,dx-\int_a^b f_2(x)dx=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,dx=\int_a^b h(x)\,dx, \tag{4.138}$$

где $h(x)$ — высота сечения фигуры прямой, параллельной оси y, на данной абсциссе x.

Формулу (4.138) можно понять также следующим образом. Если рассмотреть часть фигуры, лежащую левее прямой $x=$ const, то площадь этой части зависит от x. Если x получит бесконечно малое приращение dx (см. рис. 4.30), то к площади прибавится полоска, которую с точностью до малых высшего порядка можно считать прямоугольником (ср. вывод формул (4.131) и (4.132)). Отсюда $dS = h(x)dx$ и, интегрируя, получаем формулу (4.138).

Площадь S фигуры (рис.4.31), ограниченной графиком функции $y=f(x)$ (сверху) и $y=g(x)$ (снизу) и прямыми $x=a$, $x=b$, подсчитывается по формуле

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx. \tag{4.139}$$

Действительно, в силу геометрического смысла определенного интеграла имеем (рис. 4.31)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{пл.}\ (aA_1B_1b)$$

и

$$\int_a^b g(x)\,dx = \text{пл.}\ (cBb) - \text{пл.}\ (aAc),$$

поэтому

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx =$$
$$= \text{пл.}\ (aA_1B_1b) - \text{пл.}\ (cBb) + \text{пл.}\ (aAc) = S,$$

как это видно из чертежа.

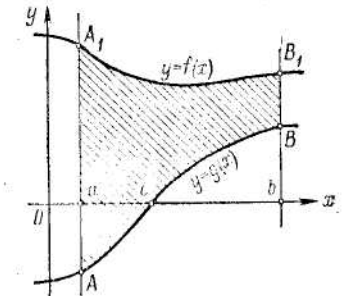


Рис.4.31.

Например, подсчитаем площадь между параболами $y= 4x—x^2$ и $y=x^2$ — 6 (рис.4.32). Сначала найдем точки пересечения парабол, для чего решим систему уравнений

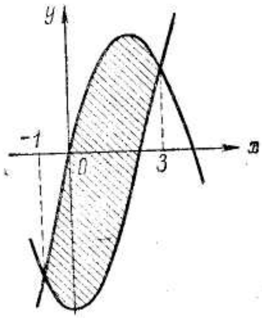


Рис.4.32

$$\begin{cases} y = 4x - x^2, \\ y = x^2 - 6, \end{cases}$$

т. е. найдем точки на плоскости, координаты которых удовлетворяют одновременно уравнениям обеих парабол. Из этой системы

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{и} \quad x_1 = -1; \; x_2 = 3.$$

Тогда по формуле (4.139) искомая площадь S будет равна

$$S = \int_{-1}^{3} [(4x - x^2) - (x^2 - 6)]\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{3} [6 + 4x - 2x^2]\, dx = \left[6x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{3} =$$

$$= \left[6 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - \frac{2}{3} \cdot 3^3\right] -$$

$$- \left[6 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)^2 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^3\right] = 21\frac{1}{3}.$$

Часто контур фигуры бывает задан *в параметрическом виде.* Тогда в рассматриваемых интегралах надо сделать замену переменных, приняв параметр за новую переменную интегрирования.

Вычислим, например, площадь, расположенную под одной из арок циклоиды, имеющей параметрические уравнения; при этом, чтобы получилась одна арка, должно быть $0 \leq \psi \leq 2\pi$:

$$S = \int_{0}^{2\pi R} y\, dx = \int_{\psi=0}^{2\pi} R(1 - \cos\psi)\, d[R(\psi - \sin\psi)] = R^2 \int_{0}^{2\pi} (1 - \cos\psi)^2\, d\psi = 3\pi R^2,$$

так как

$$\int (1 - \cos\psi)^2\, d\psi = \int (1 - 2\cos\psi + \cos^2\psi)\, d\psi = \psi - 2\sin\psi + \int \frac{1 + \cos 2\psi}{2}\, d\psi =$$

$$= \frac{3}{2}\psi - 2\sin\psi + \frac{\sin 2\psi}{4} + C.$$

Рассмотрим теперь площадь фигуры, ограниченной замкнутым контуром, заданным в параметрическом виде, $x = x(t)$, $y = y(t)$. Пусть при изменении t от α до γ контур (L) проходится один раз в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки (рис. 4.33). Тогда

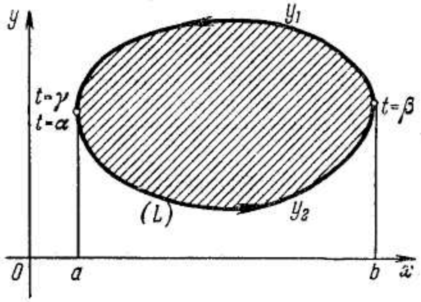


Рис.4.33.

$$S=\int_a^b y_1\,dx-\int_a^b y_2\,dx.$$

Однако первый интеграл равен

$$\int_\gamma^\beta y\dot{x}\,dt,$$

так как когда t меняется от α до γ , то x меняется от a до b, а $y = y_1$ и $xdt = dx$. Аналогично преобразуется второй интеграл, и мы получаем

$$S=\int_\gamma^\beta y\dot{x}\,dt-\int_\alpha^\beta y\dot{x}\,dt=-\int_\alpha^\beta y\dot{x}\,dt-\int_\beta^\gamma y\dot{x}\,dt=-\int_\alpha^\gamma y\dot{x}\,dt. \tag{4.140}$$

В силу свойства 10 п. 4 в окончательной формуле (4.140.) значения t=α и t =γ не обязаны отвечать крайней левой точке контура; важно только, чтобы он обходился ровно один раз.

Аналогично, проектируя контур на ось y, можно вывести формулу

$$S=\int_\alpha^\gamma x\dot{y}\,dt. \tag{4.141}$$

Если же сложить формулы (4.140) и (4.141), то получится

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\gamma (x\dot{y}-y\dot{x})\,dt. \tag{4.142}$$

Если бы с возрастанием t контур проходился в отрицательном направлении, то во всех формулах (4.140)—(4.142) надо было бы переменить знак.

Например, площадь эллипса с параметрическими уравнениями на основе формулы (4.142) равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t\,(-a\sin t)]\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab.$$

Перейдем к выражению площади в полярных координатах. Пусть линия задана полярным уравнением ρ=*f*(φ) и мы хотим вычислить

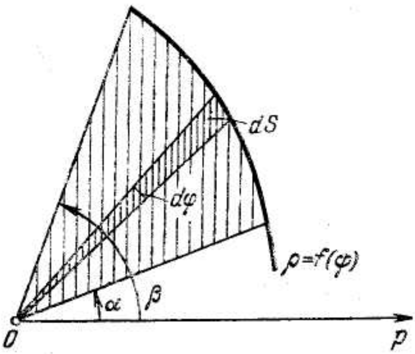


Рис.4.34.

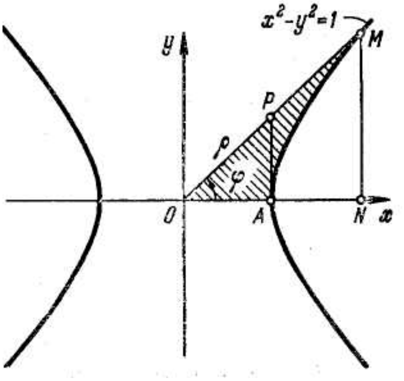


Рис.4.35

площадь «сектора» α≤φ≤β (рис. 4.34). Если угол φ увеличивается на $d\varphi$, то к площади прибавляется кусочек, который с точностью до малых высшего порядка можно принять за равнобедренный треугольник с высотой ρ и основанием ρ $d\varphi$. Значит,

$$dS = \frac{1}{2}\rho\rho\,d\varphi; \quad S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,d\varphi. \tag{4.143}$$

В качестве примера найдем площадь, заштрихованную на рис. 4.35. Переход в уравнении гиперболы к полярным координатам дает

$$\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi = 1, \quad \text{т. е.} \quad \rho^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi},$$

и по формуле (4.143) получаем

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi}.$$

Отсюда получается следующее следствие . Так как

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi} = e^{4S}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{e^{4S} - 1}{e^{4S} + 1} = \frac{e^{2S} - e^{-2S}}{e^{2S} + e^{-2S}} = \operatorname{th} 2S$$

то

$$NM = \rho \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\operatorname{th} 2S}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 2S}} = \frac{\operatorname{th} 2S}{\frac{1}{\operatorname{ch} 2S}} = \operatorname{sh} 2S.$$

Аналогично находим, что

$$ON = \rho \cos \varphi = \operatorname{ch} 2S, \quad AP = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{th} 2S.$$

Сравнение этих результатов на рис.10.36, где

$$\varphi = 2S, \; MN = \sin 2S, \; ON = \cos 2S, \; AP = \operatorname{tg} 2S,$$

показывает геометрическую причину связи тригонометрических (круговых) функций с гиперболическими и раскрывает происхождение термина «гиперболические» синус, косинус и тангенс.

Длина линии и дуги.

Перейдем теперь к следующей задаче—определению длины линии. В школьном курсе давалось определение длины окружности как предела периметров правильных вписанных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон. Теперь мы должны обобщить это определение на любые линии. Для этого выделим из приведенного выше определения самое существенное: в линию (окружность) вписывается ломаная, берется длина этой

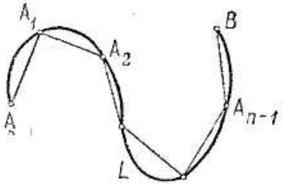


Рис.4.36

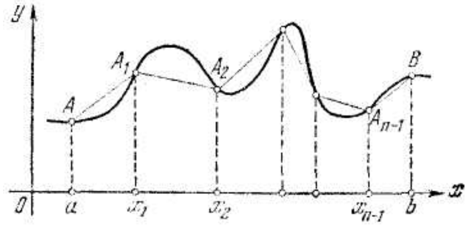


Рис.4.37.

ломаной, а затем увеличивается число звеньев ломаной так, что длины всех звеньев стремятся к нулю (удваивание числа сторон). Из этого и будем исходить.

Определение . *Длиной l линии L* называется предел

$$\lim_{\mu\to 0} \text{длина } (AA_1A_2 \ \dots \ A_{n-1}B) = l, \tag{4.144}$$

где AA_1A_2 ... $A_{n-1}B$ — вписанная в L ломаная, а μ — длина наибольшего из звеньев этой ломаной (рис. 4.36).

Покажем, что если линия L есть график функции $y=-f(x)$, $a\leq x\leq b$, имеющей непрерывную производную, то ее длина

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx. \tag{4.145}$$

Впишем в линию L ломаную AA_1A_2 ... $A_{n-1}B$ (рис. 4.37). Ее вершины имеют координаты:

$A\ (a;\ f(a))$, $A_1(x_1;f(x_1))$, $A_2(x_2;\ f(x_2))$, ..., $A_{n-1}\ (x_{n-1};\ f(x_{n-1}))$, $B(b;f(b))$. Подсчитаем длину этой ломаной.

По формуле Лагранжа

$$f(x_1)-f(a)=f'(c_1)(x_1-a), \quad a<c_1<x_1,$$

так что длина первого звена равна

$$AA_1=\sqrt{(x_1-a)^2+[f(x_1)-f(a)]^2}= \\ =\sqrt{(x_1-a)^2+[f'(c_1)(x_1-a)]^2}= \\ =\sqrt{1+[f'(c_1)]^2}\,(x_1-a), \quad a<c_1<x_1.$$

Аналогично устанавливается, что длина второго звена равна

$A_1A_2=\sqrt{1+[f'(c_2)]^2}(x_2-x_1)$, $\quad x_1<c_2<x_2$,

и т.д., и наконец, длина последнего звена

$$A_{n-1}B=\sqrt{1+[f'(c_n)]^2}\,(b-x_{n-1}), \ x_{n-1}<c_n<b.$$

Седовательно, в силу определения длины линии (формула (4.144))

$$\lim_{\mu\to 0}[\sqrt{1+[f'(c_1)]^2}(x_1-a)+\sqrt{1+[f'(c_2)]^2}(x_2-x_1)+\ldots$$
$$\ldots+\sqrt{1+[f'(c_n)]^2}(b-x_{n-1})].$$

А так как очевидно, что наибольшее звено μ ломаной и длина λ наибольшего из отрезков $[a;\ x_1]$, $[\ x_1;x_2]$, ..., $[x_{n-1};b]$ (на которые разбился отрезок *[a; b])* стремятся к нулю одновременно, то

$$\lim_{\lambda\to 0}[\sqrt{1+[f'(c_1)]^2}(x_1-a)+\sqrt{1+[f'(c_2)]^2}(x_2-x_1)+\ldots$$
$$\ldots+\sqrt{1+[f'(c_n)]^2}(b-x_{n-1})]=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

так как в квадратных скобках стоит интегральная сумма для написанного интеграла.

Найдем, например, длину линии

$$y=\frac{2}{3}x\sqrt{x},\ 0\leqslant x\leqslant 3.$$

Так как

$$y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x}=\sqrt{x},$$

то по формуле (4.145) получаем длину l линии

$$l=\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^3=\frac{2}{3}[4^{3/2}-1^{3/2}]=4\frac{2}{3}.$$

Рассмотрим линию $y = f(x)$, $a\leq x\leq b$, и точку на ней $M(x;\ f(x))$. Каждому числу x поставим в соответствие число $l=l(x)$- длину линии AM (рис. 4.38). Этим на отрезке *[a; b]* задана функция $l=l(x)$. Дифференциал этой функции dl называется *дифференциалом дуги.* Покажем, что

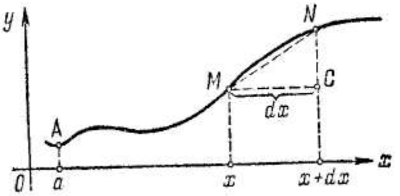


Рис.4.38.

$$dl^2=dx^2+dy^2. \tag{4.147}$$

Действительно, так как в силу формулы (4.145)

$$l(x)=\int_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt,$$

то, используя свойство определенного интеграла о том , что определенный интеграл с переменным верхним пределом есть первообразная для подынтегральной функции , имеем

$$dl=l'_x dx=\left(\int_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt\right)'_x dx=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (4.147)$$

Отсюда, возводя в квадрат и учитывая, что $f'(x)dx=dy$, получаем

$$dl^2=(1+[f'(x)]^2)\,dx^2=dx^2+[f'(x)\,dx]^2=dx^2+dy^2,$$

что и требовалось доказать.

Формула (4.146) имеет простой геометрический смысл — это теорема Пифагора «в малом». В самом деле, если воспользоваться формулой

$$\Delta y\approx dy$$

то (рис.4.38)

$$NC=\Delta y\approx dy,\ \ \breve{MN}=\Delta l\approx dl. \qquad (4.148)$$

Но по теореме Пифагора для прямоугольного $\Delta\ MNC$

$$MN^2=MC^2+NC^2,$$

откуда, пользуясь приближенными равенствами (4.148), получаем

$$dl^2=dx^2+dy^2$$

и равенство при этом точное, что гарантируется формулой (4.146).

Перейдем к задаче определения длины **дуги.** Дифференциал дуги уже встречался в нашем курсе; будем обозначать его dL:

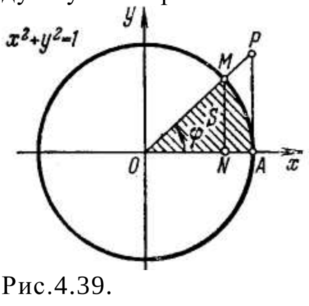


Рис.4.39.

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \\ = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

При этом мы перед корнем берем только +, считая $dL > 0$. Отсюда если дуга ограничена значениями $t = \alpha$ и $t = \beta$, то ее длина

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

Формула для длины плоской линии соответственно упрощается. Если же линия задана уравнением вида $y=f(x)$, то при $a \leq x \leq b$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Например, длина циклоиды между ее соседними точками возврата и симметрии циклоиды равна

$$L = 2\int_{0}^{\pi} R \sqrt{(\psi - \sin\psi)'^2 + (1 - \cos\psi)'^2}\, d\psi = 2R \int_{0}^{\pi} \sqrt{(1 - \cos\psi)^2 + \sin^2\psi}\, d\psi =$$

$$= 2R \int_{0}^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos\psi}\, d\psi = 4R \int_{0}^{\pi} \sin\frac{\psi}{2}\, d\psi = -8R\cos\frac{\psi}{2}\Big|_{0}^{\pi} = 8R.$$

Дифференциал дуги в полярных координатах легко получается из рис. 4.40:

$$dL = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho\, d\varphi)^2}. \qquad (4.149)$$

Отсюда если уравнение линии дано в полярных координатах в виде $\rho = f(\varphi)$, то ее длина при $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ равна

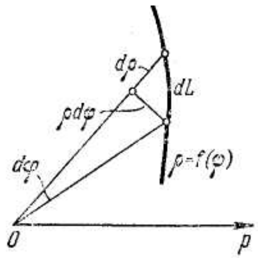


Рис.4.40.

$$L=\int_{\varphi=\alpha}^{\beta}\sqrt{d\rho^2+\rho^2\,d\varphi^2}=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2+\rho^2}\,d\varphi.$$

Выражение (4.149) можно получить также из формул

$$dL=\sqrt{dx^2+dy^2},\quad x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi.$$

Например, пользуясь полярным уравнением кардиоиды, найдем ее длину

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\varphi+4a^2(1-\cos\varphi)^2}\,d\varphi=16a$$

Объем тела. Пусть требуется найти объем тела, если известны площади сечений плоскостями, перпендикулярными к некоторой оси, которую мы примем за ось x (рис. 4.41), $S = S(x)$. Если отсчитывать объем от левого конца тела до указанной плоскости, то, когда x увеличится на $\Delta x = dx$ и эта плоскость передвинется направо, к объему прибавится «ломоть», который с точностью до малых высшего порядка можно считать цилиндром с широким основанием и маленькой высотой. Отсюда

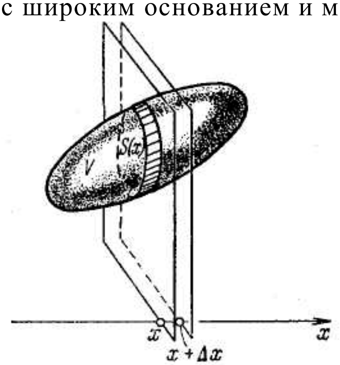


Рис.4.41.

$$\Delta V=S(x)\,\Delta x+\text{малые высшего порядка},$$

т. е.

$$dV=S(x)\,dx,$$

и если x меняется от a до b,

$$V=\int_a^b S(x)\,dx. \tag{4.150}$$

В качестве примера найдем объем *цилиндрического копыта,* отсекаемого от прямого кругового цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания (рис. 4.42), Из подобия треугольников *ABC* и *A'B'C* получаем, что площадь заштрихованного сечения равна

$$S=\frac{1}{2}RH\frac{R^2-x^2}{R^2}=\frac{R^2-x^2}{2R}H$$

и по формуле (10.150)

$$V=2\int_0^R S\,dx=2\int_0^R\frac{R^2-x^2}{2R}H\,dx=\frac{H}{R}\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R=\frac{2}{3}R^2H.$$

Рассмотрим, в частности, *объем тела вращения.* Пусть линия с уравнением *y=(x)* вращается в пространстве вокруг оси *x;*

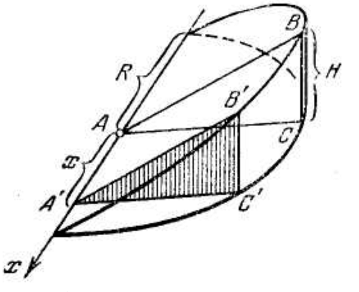


Рис.4.42.

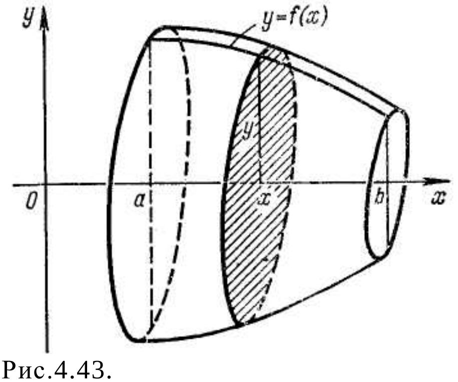


Рис.4.43.

тогда площадь поперечного сечения равна $S=\pi y^2$ (см. рис. 4.43) и по формуле (4.150)

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx.$$

(4.151)

Например, шар получается в результате вращения полуокружности с уравнением
$y=\sqrt{R^2-x^2}$;
поэтому объем шара

$$V=\pi\cdot 2\int_0^R (\sqrt{R^2-x^2})^2\,dx=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Площадь поверхности вращения. Формула для площади поверхности произвольного вида будет выведена в модуле 5. Однако вычисление площади поверхности вращения можно показать сейчас. Пусть линия $y=f(x)>0$ вращается вокруг оси x (рис.4.44); будем проводить плоскости, перпендикулярные к оси вращения, и рассматривать площадь поверхности, расположенной левее любого такого сечения.

Если плоскость переместится на dx, то к площади добавится «элементарное кольцо», заштрихованное на рис. 4.44. Разрезав это кольцо и развернув его, получим полоску ширины dL и длины $2\pi y$, так как y — радиус кольца. Отсюда

$$dS=2\pi y\,dL=2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

и тем самым

$$S=2\pi\int_{x=a}^{b} y\,dL=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

(4.152)

Вычислим, например, площадь части параболоида вращения, отсеченной плоскостью, перпендикулярной к оси вращения (рис. 4.45), если даны радиус

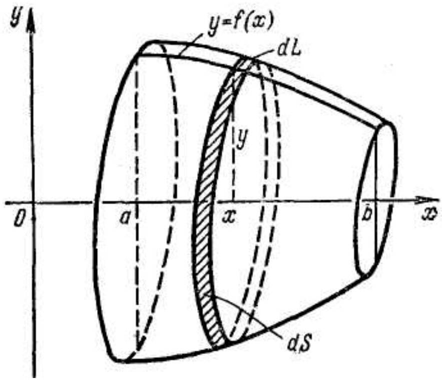


Рис.4.44.

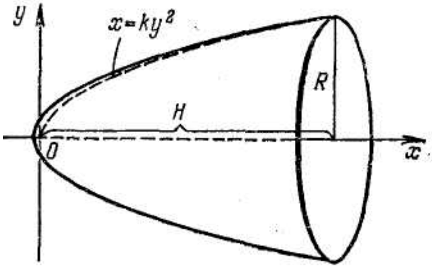


Рис.4.45.

основания R и высота H. Так как вращающейся линией служит парабола с осью по оси x, то уравнение линии имеет вид $x = ky^2$. Константу k надо подобрать так, чтобы парабола прошла через точку (H, R), т. е. $H = kR^2$.

$$k = \frac{H}{R^2},$$

и окончательно уравнение линии будет

$$x = \frac{H}{R^2} y^2, \quad \text{т. е.} \quad y = R\sqrt{\frac{x}{H}}.$$

Пользуясь формулой (4.152), получим

$$S=2\pi\int_0^H R\sqrt{\frac{x}{H}}\sqrt{1+\left[\left(R\sqrt{\frac{x}{H}}\right)'\right]^2}\,dx=$$

$$=2\pi\frac{R}{\sqrt{H}}\int_0^H\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{R^2}{H}\cdot\frac{1}{4x}}\,dx=\pi\frac{R}{H}\int_0^H\sqrt{4xH+R^2}\,dx=$$

$$=\pi\frac{R}{H}\frac{(4xH+R^2)^{3/2}}{\left(\frac{3}{2}\right)\cdot 4H}\Bigg|_0^H=\frac{\pi R}{6H^2}\left[(4H^2+R^2)^{3/2}-R^3\right].$$

Вычисление работы с помощью определенного интеграла

Пусть под действием некоторой силы F материальная точка M движется но прямой Os, примем направление силы совпадает с направлением движения. Требуется найти работу, произведенную силой F при перемещении точки M из положения $s = a$ в положение $s=b$.

1) Если сила F постоянна, то работа A выражается произведением силы F на длину пути, т. е.

$$A=F(b-a).$$

2) Предположим, что сила F непрерывно меняется в зависимости от положения материальной точки, т. е. представляет собой функцию $F(s)$, непрерывную на отрезке $a\le s\le b$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей с длинами

$$\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \ldots,\ \Delta s_n,$$

затем в каждом частичном отрезке $[s_{i-1}, s_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и заменим работу силы $F(s)$ на пути Δs_i $(i=1,2, \ldots, n)$ произведением

$$F(\xi_i)\,\Delta s_i.$$

Это значит, что в пределах каждого частичного отрезка мы принимаем силу F за постоянную, а именно полагаем $F=F(\xi_i)$. В таком случае выражение $F(\xi_i)\Delta s_i$ при достаточно малом Δs, дает нам приближенное значение работы силы F на пути Δs_i, а сумма

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)\,\Delta s_i$$

будет приближенным выражением работы силы F на всем отрезке $[a, b]$.

Очевидно, A_n представляет собой интегральную сумму, составленную для функции $F=F(s)$ на отрезке $[a, b]$. Предел этой суммы при $max\ (\Delta s_i)\to 0$ существует и выражает работу силы $F(s)$ на пути от точки $s = a$ до точки $s = b$:

$$A = \int_a^b F(s)\,ds. \tag{4.153}$$

Пример 1. Сжатие S винтовой пружины пропорционально приложенной силе *F*. Вычислить работу силы *F* при сжатии пружины на 5 *см,* если для сжатия ее на 5 *см* нужна сила в 1 *кг* (рис. 4.46).

Решение. Сила *F* и перемещение S связаны по условию зависимостью *F* = *kS*, где *k*— постоянная.

Будем выражать S в метрах, *F* — в килограммах. При S = 0,0l F=l, т. е. 1 = *k*·0,01, откуда *k*=100, F=100S.

На основании формулы (4.153) имеем:

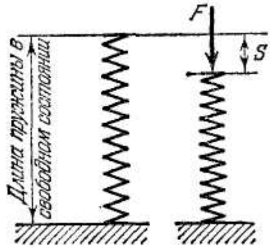


Рис.4.46.

$$A = \int_0^{0,05} 100S\,dS = 100\left.\frac{S^2}{2}\right|_0^{0,05} = 0,125 \text{ кгм.}$$

Пример 2. Сила *F,* с которой электрический заряд e_1 отталкивает заряд e_2 (того же знака), находящийся от него на расстоянии *r*, выражается формулой

$$F = k\frac{e_1e_2}{r^2},$$

где *k*—постоянная.

Определить работу силы *F* при перемещении заряда e_2 из точки A_1, отстоящей от e_1 на расстоянии r_1 в точку A_2, отстоящую от e_1 на расстоянии r_2, полагая, что заряд e_1 помещен в точке A_o, принятой за начало отсчета.

Решение. По формуле (4.153) имеем:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k\frac{e_1e_2}{r^2}\,dr = -ke_1e_2\left.\frac{1}{r}\right|_{r_1}^{r_2} = ke_1e_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

При r_2=∞ получим

$$A=\int_{r_1}^{\infty}\frac{ke_1e_2}{r^2}dr=\frac{ke_1e_2}{r_1},$$

При

$$e_2=1 \quad A=k\frac{e_1}{r}.$$

Последняя величина называется *потенциалом поля,* создаваемого зарядом e_1

Координаты центра тяжести

Пусть на плоскости Oxy дана система материальных точек

$$P_1(x_1,\ y_1),\quad P_2(x_2,\ y_2),\ \ldots,\ P_n(x_n,\ y_n)$$

с массами $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$.

Произведения x_im_i и y_im_i называются *статическими моментами* массы m_i относительно осей Oy и Ox.

Обозначим через x_c и y_c координаты центра тяжести данной системы. Тогда, как известно из курса механики, координаты центра тяжести описанной материальной системы определяются формулами:

(4.154)

$$x_c=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_im_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},$$

$$y_c=\frac{y_1m_1+y_2m_2+\ldots+y_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_im_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}.$$

(4.155)

Мы используем эти формулы при отыскании центров тяжести различных фигур и тел.

1. Центр тяжести плоской линии. Пусть дана кривая AB уравнением $y=f(x)$, $a\le x\le b$, и пусть эта кривая представляет собой материальную линию.

Предположим, что линейная плотность (линейной плотностью называется масса единицы длины данной линии. Мы предполагаем, что линейная плотность на всех участках кривой одинакова.) такой материальной кривой равна γ. Разобьем линию на n частей длины Δs_1 Δs_2, ... , Δs_n, Массы этих частей будут равняться произведению их длин на (постоянную) плотность: $\Delta m_i=\gamma\Delta s_i$. На каждой части дуги Δs_i возьмем произвольную точку с абсциссой ξ_i. Представляя теперь каждую часть дуги Δs_i материальной точкой $P_i[\xi_i, f(\xi_i)]$ с массой $\gamma\Delta s_i$ и подставляя в формулы (4.154) и (4.155) вместо x_i значение ξ_i, вместо y_i значение $f(\xi_i)$, а вместо m_i, значение $\gamma\Delta s_i$ (массы частей Δs_i), получим приближенные формулы для определения центра тяжести дуги:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}, \quad y_c \approx \frac{\sum f(\xi_i)\gamma\Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}.$$

Если функция $y=f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную, то стоящие в числителе и знаменателе каждой дроби суммы при $max\ \Delta s_i \to 0$ имеют пределы, равные пределам соответствующих интегральных сумм. Таким образом, координаты центра тяжести дуги выражаются определенными интегралами:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\,ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}, \tag{4.156}$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x)\,ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}. \tag{4.157}$$

Пример 1. Найти координаты центра тяжести полуокружности $x^2+y^2 = a^2$, расположенной над осью Ox.

Решение. Определим ординату центра тяжести:

$$y=\sqrt{a^2-x^2}, \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \quad ds=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,$$

$$y_c=\frac{\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx}{\pi a}=\frac{a\int_{-a}^{a}dx}{\pi a}=\frac{2a^2}{\pi a}=\frac{2a}{\pi},$$

$x_c = 0$ (так как полуокружность симметрична относительно оси Oy).

2. Центр тяжести плоской фигуры. Пусть данная фигура, ограниченная линиями $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, представляет собой материальную плоскую фигуру. Поверхностную плотность, т. е. массу единицы площади поверхности, мы будем считать постоянной и равной δ для всех частей фигуры.

Разобьем данную фигуру прямыми $x = a$, $x = x_1$ … , $x = x_n = b$ на полоски ширины Δx_1 Δx_2, … , Δx_n. Масса каждой полоски будет равна произведению ее площади на плотность δ. Если каждую подоску заменить прямоугольником (рис.4.47) с основанием Δx_i и высотой

$$f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i),$$

где

$$\xi_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2},$$

то масса полоски будет приближенно равна

$$\Delta m_i=\delta\left[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)\right]\Delta x_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Приближенно центр тяжести этой полоски будет находиться в центре соответствующего прямоугольника:

$$(x_i)_c=\xi_i, \qquad (y_i)_c=\frac{f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i)}{2}.$$

Заменяя теперь каждую полоску материальной точкой, масса которой равна массе соответствующей полоски и сосредоточена в центре

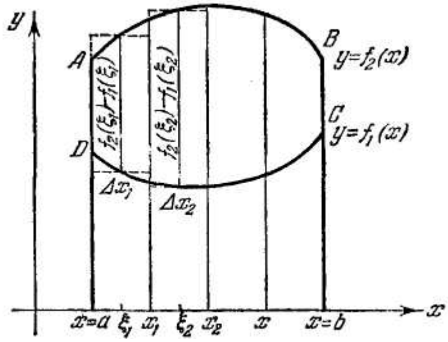


Рис.4.47.

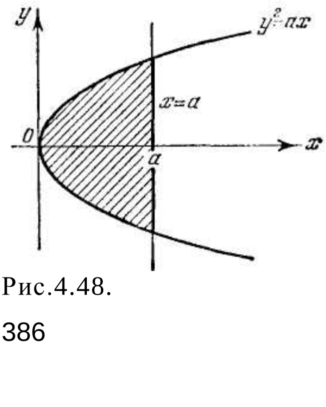


Рис.4.48.

тяжести этой полоски, найдем приближенное значение координат центра тяжести всей фигуры (по формулам (4.154) и (4.155)):

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i\, \delta\, [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\, \Delta x_i}{\sum \delta\, [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\, \Delta x_i},$$

$$y_c \approx \frac{\frac{1}{2} \sum [f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)]\, \delta\, [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\, \Delta x_i}{\sum \delta\, [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\, \Delta x_i}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x_i \to 0$, получим:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\, [f_2(x) - f_1(x)]\, dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx}, \qquad y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f_2(x) + f_1(x)]\, [f_2(x) - f_1(x)]\, dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx}.$$

Эти формулы справедливы для любой однородной (т. е. имеющей постоянную плотность во всех точках) плоской фигуры. Как мы видим, координаты центра тяжести не зависят от плотности δ фигуры (в процессе вычисления δ сократилось).

Пример 2. Определить координаты центра тяжести сегмента параболы $y^2 = ax$, отсекаемого прямой $x = a$ (рис.4.48).

Решение. В данном случае

$$f_2(x) = \sqrt{ax}, \quad f_1(x) = -\sqrt{ax},$$

поэтому

$$x_c = \frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}\, dx}{2\int_0^a \sqrt{ax}\, dx} = \frac{2\sqrt{a}\, \frac{2}{5}\, x^{5/2}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\, \frac{2}{3}\, x^{3/2}\Big|_0^a} = \frac{\frac{4}{5} a^3}{\frac{4}{3} a^2} = \frac{3}{5}\, a,$$

$y_c = 0$ (так как сегмент симметричен относительно оси *Ox).*

Вычисление момента инерции линии, круга и цилиндра с помощью определенного интеграла

Пусть на плоскости *xOy* дана система материальных точек $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ... $P_n(x_n, y_n)$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Тогда, как известно из механики, *момент инерции* системы материальных точек относительно точки *O* определяется так:

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)\, m_i, \quad \text{или} \quad I_O = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i, \tag{4.158}$$

где

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}.$$

Пусть кривая *AB* дана уравнением *y=f(x),), a≤x≤b* , где *f(x)* — непрерывная функция. Пусть эта кривая представляет собой *материальную линию.* Пусть линейная плотность линии равна γ. Снова разобьем линию на *n* частей длины Δs_1 Δs_2, ... , Δs_n , где

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2},$$

а массы этих частей $\Delta m_1 = \gamma\ \Delta s_1$, $\Delta m_2 = \gamma\ \Delta s_2$,..... $\Delta m_n = \gamma\ \Delta s_n$. На каждой части дуги возьмем произвольную точку с абсциссой ξ_i. Ордината этой точки будет $\eta_i = f(\xi_i)$. Приближенно момент инерции дуги относительно точки *O* в соответствии с формулой (4.158) будет:

$$I_O \approx \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2)\, \gamma\, \Delta s_i. \tag{4.159}$$

Если функция *y=f(x)* и ее производная *f′ (x)* непрерывны, то при $\Delta s_i \to 0$ сумма (4.159) имеет предел. Этот предел, выражающийся определенным интегралом, и определяет момент инерции материальной линии

$$I_O = \gamma \int_a^b [x^2 + f^2(x)] \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{4.160}$$

1. Момент инерции тонкого однородного стержня длины *l* относительно его конца. Совместим стержень с отрезком оси *Ox:* 0<*x*<l (рис.4.49). В этом случае $\Delta s_i = \Delta x_i$, $\Delta m_i = \gamma\ \Delta x_i$, $r^2_i = x_i^2$ и формула (4.160) принимает вид

$$I_{O_c} = \gamma \int_0^l x^2\, dx = \gamma\, \frac{l^3}{3}. \tag{4.161}$$

Если дана масса стержня *M*, то *γ=M/l* и формула (4.161) принимает вил

$$I_{O_c} = \frac{1}{3} M l^2. \tag{4.162}$$

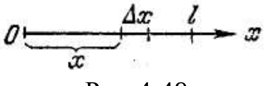


Рис.4.49.

2. Момент инерции окружности радиуса *r* относительно центра. Так как все точки окружности находятся на расстоянии *r* от центра, а его масса $m=2\pi r\cdot\gamma$, то момент инерции окружности будет:

$$I_O = mr^2 = \gamma\ 2\pi r \cdot r^2 = \gamma\ 2\pi r^3. \qquad (4.163)$$

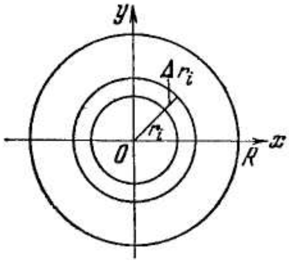


Рис.4.50.

3. Момент инерции однородного круга радиуса *R* относительно центра. Пусть δ — масса единицы площади круга. Разобьем круг на *n* колец.

Рассмотрим одно кольцо (рис. 4.50). Пусть его внутренний радиус r_i внешний $r_i + \Delta r_i$. Масса этого кольца Δm_i с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δr_i будет $\Delta m_i = \delta 2\pi r_i \Delta r_l$. Момент инерции этой массы относительно центра в соответствии с формулой (4.163) приближенно будет:

$$(\Delta I_O)_i \approx \delta 2\pi r_i \Delta r_i \cdot r_i^2 = \delta\ 2\pi r_i^3 \cdot \Delta r_i.$$

Момент инерции всего круга как система колец будет выражаться приближенной формулой

$$I_O \approx \sum_{i=1}^{n} \delta 2\pi r_i^3 \Delta r_i. \qquad (4.164)$$

Переходя к пределу при $max\ \Delta r_i \to 0$, получим момент инерции площади круга относительно центра

$$I_O = \delta\ 2\pi \int_0^R r^3\, dr = \pi\delta\ \frac{R^4}{2}. \qquad (4.165)$$

Если дана масса круга *M*, то поверхностная плотность δ определяется так:

$$\delta = \frac{M}{\pi R^2}.$$

Подставляя это значение окончательно, получаем:

$$I_O = MR^2/2. \qquad (4.166)$$

4. Очевидно, что если имеем круглый цилиндр, радиус основания которого R и масса M, то его момент инерции относительно оси выражается формулой (10.166).

Микромодуль 7

Индивидуальные тестовые задания

Вычисление площадей

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=9x$, $y = 3x$. *Отв.* 1/2.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной равнобочной гиперболой $xy = a^2$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x = 2a$. *Отв.* $a^2 \ln 2$.
3. Найти площадь фигуры, заключенной между кривой $y = 4 - x^2$ и осью Ox. *Отв.* 32/3.
5. Найти площадь фигуры, ограниченной цепной линией $y = a\,\mathrm{ch}\,(x/a)$, осью Ox, осью Oy и прямой $x = a$. *Отв.* $a^2\,\mathrm{sh}\,e$.
6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$, прямой $y = 8$ и осью Oy. *Отв.* 12.
7. Найти площадь области, ограниченной одной полуволной синусоиды и осью абсцисс. *Отв.* 2.
8. Найти площадь области, заключенной между параболами $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$. *Отв.* $4p^2/3$.
9. Найти всю площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 2x$, $y = x$. *Отв.* 3/2 .
10. Найти площадь области, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью абсцисс. *Отв.* $3\pi a^2$.
11. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. *Отв.* $3\pi a^2/8$.
12. Найти площадь фигуры всей области, ограниченной лемнискатой $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$. *Отв.* a^2.
13. Вычислить площадь области, ограниченной одной петлей кривой $\rho = a\sin 2\varphi$. *Отв.* $\pi a^2/8$
14. Вычислить полную площадь области, ограниченной кардиоидой $\rho= a(1-\cos\varphi)$. Oms. $3\pi a^2/2$.
15. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho = a\cos\varphi$. *Отв.* $\pi a^2/4$.
16. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho = a\cos 2\varphi$. *Отв.* $\pi a^2/4$.

17. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho = \cos 3\varphi$. *Отв.* $\pi/4$.
18. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho = a \cos 4\varphi$. *Отв.* $\pi a^2/4$.

Вычисление объемов

19. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

вращается вокруг оси *Ох.* Найти объем тела вращения. *Отв.* $(4/3)\pi ab^2$.

20. Отрезок прямой, соединяющей начало координат с точкой (a, b), вращается вокруг оси y. Найти объем полученного конуса. *Отв.* $(1/3)\pi a^2 b$.

21. Найти объем тора, образованного вращением круга $x^2+(y—b)^2 = a^2$ вокруг оси *Ох* (предполагается, что $b \geq a$). *Отв.* $2\pi^2 a^2 b$.

22. Площадь, ограниченная линиями $y^2 = 2px$ и $x = a$, вращается вокруг оси *Ох.* Найти объем тела вращения. *Отв.* $\pi p a^2$.

24. Фигура, ограниченная одной дугой синусоиды $y = \sin x$ и осью Ох, вращается вокруг оси *Ох.* Найти объем тела вращения. *Отв.* $\pi^2/2$.

25. Фигура, ограниченная параболой $y^2 = 4x$ и прямой $x = 4$, вращается вокруг оси Ох. Найти объем тела вращения. *Отв.* 32π.

26. Фигура, ограниченная кривой $y = xe^x$ и прямыми $y = 0$, $x=1$, вращается вокруг оси Ох. Найти объем тела вращения. *Отв.* $\pi/4(e^2 —1)$.

27. Фигура, ограниченная одной аркой циклоиды $x = a(t—\sin t)$, $y = a(1—\cos t)$ и осью Ох, вращается вокруг оси Ох. Найти объем тела вращения. *Отв.* $5\pi^2 a^3$.

28. Та же фигура, что и в задаче 27, вращается вокруг оси *Оу.* Найти объем тела вращения. *Отв.* $6\pi^2 a^3$.

29. Та же фигура, что и в задаче 27, вращается вокруг прямой, параллельной оси *Оу* и проходящей через вершину циклоиды. Найти объем тела вращения. *Отв.* $\pi a^3 (9\pi^2 —16)/6$.

30. Та же фигура, что и в задаче 27, вращается вокруг прямой, параллельной оси Ох и проходящей через вершину циклоиды. Найти объем тела вращения. *Отв.* $7\pi^2 a^3$.

31. Цилиндр радиуса R пересечен плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом α к плоскости основания. Найти объем отсеченной части.
Отв. $2/3\ R^3 tg\alpha$.
32. Найти объем, общий двум цилиндрам: $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2+z^2 = R^2$. *Отв.* $16R^3/3$.
33. Точка пересечения диагоналей квадрата перемещается вдоль диаметра круга радиуса a; при этом плоскость, в которой лежит квадрат, все время остается перпендикулярной к плоскости круга, а две противоположные вершины квадрата перемещаются по окружности (при движении величина квадрата, очевидно, меняется). Найти объем тела, образуемого этим движущимся квадратом. *Отв.* $8a^3/3$.
34. Вычислить объем сегмента, отсекаемого от эллиптического параболоида $(y^2/2p)+(z^2/2q)=x$ плоскостью $x = a$. *Отв.* $\pi a^2\sqrt{pq}$
35. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $y = 0$, цилиндрическими поверхностями $x^2 = 2py$ и $z^2=2px$ и плоскостью $x = a$
Отв

$$\frac{a^3\sqrt{2a}}{7\sqrt{p}}$$

(в первом октанте).
36. Прямая движется параллельно плоскости Oyz,пересекая два эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

лежащих в плоскостях Oxy и Oxz. Вычислить объем полученного тела. *Отв.* $8abc/3$.

Вычисление длин дуг

38. Вычислить длину дуги полукубической параболы $ay^2 = x^3$ от начала координат до точки с абсциссой $x = 5a$. *Отв.* $335a/27$.
39. Найти длину цепной линии $y = a\operatorname{ch} x/a$ от начала координат до точки (x, y). *Отв.*

$$a\operatorname{sh}\frac{x}{a}=\sqrt{y^2-a^2}.$$

40. Найти длину одной арки циклоиды $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1-\cos t)$ *Отв.* 8a.
41. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$ в пределах от $x=\sqrt{3}$ до $x=\sqrt{8}$. *Отв.* $1 + (1/2)\ln 3/2$.

42. Найти длину дуги кривой $y=1 - \ln\cos x$ в пределах от $x=0$ до $x = \pi/4$. *Отв.* $\ln \operatorname{tg}(3\pi/8)$.

43. Найти длину спирали Архимеда $\rho= a\varphi$ от полюса до конца первого

завитка. *Отв.*

$$\pi a \sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right).$$

44. Найти длину спирали $\rho = e^{\alpha\varphi}$ от полюса до точки (ρ, φ).

Отв.

$$\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}e^{\alpha\varphi}=\frac{\rho}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2}.$$

45. Найти всю длину кривой $\rho = a\sin^3(\varphi/3)$. *Отв.* $3\pi a/2$.

47. Найти длину кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$. *Отв.* $8a$.

48. Найти длину дуги эвольвенты круга $x= a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$, $y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_1$. *Отв.* $a\varphi_1^2/2$.

Вычисление площадей поверхностей тел вращения

49. Найти площадь поверхности, полученной вращением параболы, $y^2= 4ax$ вокруг оси Ox, от начала O до точки с абсциссой $x = 3a$. *Отв.* $56\pi a^2/3$.

50. Найти площадь поверхности конуса, образуемого вращением отрезка прямой $y = 2x$ от $x=0$ до $x = 2$: а) Вокруг оси Ox. *Отв.* $8\pi\sqrt{5}$.

б) Вокруг оси Oy. *Отв.* $4\pi\sqrt{5}$.

51. Найти площадь поверхности тора, полученного вращением круга $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ вокруг оси Ox $(b>a)$. *Отв.* $4\pi^2ab$.

52. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением кардиоиды вокруг оси Ox. Кардиоида задана параметрическими уравнениями $x = a(2\cos\varphi - \cos 2\varphi)$, $y = a(2\sin\varphi - \sin 2\varphi)$. *Отв.* $128\pi a^2/5$.

53. Найти площадь поверхности тела, полученного вращением одной арки циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ около оси Ox. *Отв.* $64\pi a^2/3$.

54. Арка циклоиды (см. задачу 53) вращается около оси Oy. Найти поверхность тела вращения. *Отв.* $16\pi^2a^2 +(64/3)\pi a^2$.

55. Арка циклоиды (см. задачу 53) вращается около касательной, параллельной оси Ox и проходящей через вершину. Найти поверхность тела вращения. *Отв.* $32\pi a^2/3$.

56. Астроида $x = a \sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$ вращается около оси *Ox*. Найти поверхность тела вращения. *Отв.* $12\pi a^2/5$.
57. Дуга синусоиды $y = \sin x$ от $x = 0$ до $x = 2\pi$ вращается около оси *Ox*. Найти поверхность тела вращения. *Отв.* $4\pi[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)]$.
58. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a>b)$$

вращается вокруг оси *Ox*. Найти поверхность тела вращения. *Отв.*

$$2\pi b^2+2\pi ab\,\frac{\arcsin e}{c},\ \text{где}\ e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Различные приложения определенного интеграла

59. Найти центр тяжести площади эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$(x\geq 0,\ y\geq 0)$. *Отв.* $4a/3\pi$; $4b/3\pi$.
60. Найти центр тяжести площади фигуры, ограниченной параболой $x^2+4y-16 = 0$ и осью *Ox*. *Отв.* (0; 8/5).
61. Найти центр тяжести объема полушара. *Отв.* На оси симметрии, на расстоянии $3R/8$ от основания.
62. Найти центр тяжести поверхности полушара. *Отв.* На оси симметрии, на расстоянии $R/2$ от основания.
63. Найти центр тяжести поверхности кругового прямого конуса, радиус основания которого R, а высота h. *Отв.* На оси симметрии, на расстоянии $h/3$ от основания.
64. Фигура ограничена линиями $y = \sin x$ $(0\leq x \leq\pi)$, $y = 0$. Найти центр тяжести площади этой фигуры. *Отв.* $(\pi/2, \pi/8)$.
65. Найти центр тяжести площади фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$. *Отв.* (9; 9).
66. Найти центр тяжести площади кругового сектора с центральным углом 2α и радиусом R. *Отв.* На оси симметрии, на расстоянии $(2/3)\,R(\sin\alpha/\alpha)$ от вершины сектора.
67. Найти величину давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если известно, что основание его равно 8 *м,* высота 12 *м,* верхнее основание параллельно свободной поверхности воды и находится на глубине 5 *м*. *Отв.* 1056 *т*.
68. Верхний край шлюза, имеющего форму квадрата со стороной, равной 8 *м,* лежит на поверхности воды. Определить величину давления на каждую из частей шлюза,

образуемую делением квадрата одной из его диагоналей. *Отв.* 85 333,33 кг, 170 666,67 *кг.*

69. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из полусферического сосуда, диаметр которого равен 20 *м.* *Отв.* $2{,}5 \cdot 10^6\,\pi$ *кгм.*

70. Тело движется прямолинейно по закону $x = ct^3$, где x— длина пути, проходимого за время t, c = const. Сопротивление среды пропорционально квадрату скорости, причем коэффициент пропорциональности равен k. Найти работу, производимую сопротивлением при передвижении тела от точки x=0
до точки $x = a$. *Отв.*
$\frac{27}{7} k \sqrt[3]{c^2a^7}$.

71. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость плотностью γ из резервуара, имеющего форму обращенного вершиной книзу конуса, высота которого H, а радиус основания R. *Отв.* $\pi\gamma R^2H^2/12$.

72. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь основании которого S = 4000 $см^2$, а высота H = 50 *см,* плавает на поверхности воды.
Какую работу нужно затратить, чтобы вытащить поплавок на поверхность? (Удельный вес дерева 0,8.) *Отв.*$\gamma^2H^2S/2$ = 32 *кгм.*

73. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой a=6,4м, нижнее b=4,2м, а высота H = 3 *м.* *Отв.* 22,2 *т.*

74. Найти осевую составляющую P *кг* полного давления пара на сферическое дно котла. Диаметр цилиндрической части котла D *мм,* давление пара в котле p $кг/см^2$. *Отв.* $P = \pi pD^2/400$.

75. Конец вертикального вала радиуса r поддерживается плоским подпятником. Вес вала P распределяется равномерно на всю поверхность опоры. Вычислить полную работу сил трения при одном обороте вала. Коэффициент трения μ.. *Отв.* $4\pi\mu Pr/3$.

76. Вертикальный вал оканчивается пятой, имеющей форму усеченного конуса. Удельное давление пяты на подпятник постоянно и равно P. Верхний диаметр пяты D, нижний d, угол при вершине конуса 2α. Коэффициент трения μ. Найти работу сил трения за один оборот вала. *Отв.*
$\frac{\pi^2 P\mu}{6\sin\alpha}(D^3 - d^3)$.

Модуль 5

Дифференциальные уравнения и кратные интегралы

Микромодуль 8

Дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение — это уравнение, связывающее две или более функционально зависящих друг от друга величин и их дифференциалы или, что равносильно, производные. Задача о составлении и решении (как говорят, *интегрировании)* таких уравнений часто возникает в физике и технике.

5.1 Общие понятия

1. Примеры. Простейшие дифференциальные уравнения уже встречались. Например, уравнение (4.132) в случае силы, изменяющейся по закону Ньютона, можно переписать в виде

$$dA = (k/s^2)ds \text{ или } dA/ds = k/s^2 \quad (5.1)$$

где работа $A = A(s)$ — неизвестная функция от перемещения, которая находится при помощи интегрирования.

Уравнение (4.137) можно переписать в виде

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\sigma}{S}\sqrt{2gh}, \quad (5.2)$$

где $h = h(t)$ — неизвестная функция.

Рассмотрим еще пример упругих колебаний материальной точки массы M около положения равновесия (рис.5.1). Здесь неизвестным является закон колебаний $y = y(t)$. Примем для простоты *линейный закон упругости,* т. е. будем считать силу упругости прямо пропорциональной отклонению точки от положения равновесия; тогда эта сила равна

$$F = -ky,$$

где k — *коэффициент упругости.*

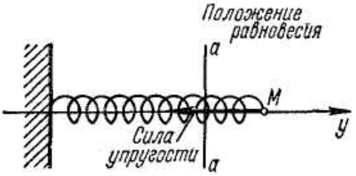


Рис.5.1.

Согласно второму закону Ньютона, если других сил нет, получим

$$M\frac{d^2y}{dt^2}=F=-ky, \tag{5.3}$$

откуда дифференциальное уравнение для закона колебаний приобретает вид

$$M\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0, \qquad y=y(t)=? \tag{5.4}$$

Во всех случаях при выводе дифференциального уравнения в физике или технике берется за основу некоторый общий физический или какой-либо иной закон, имеющий *дифференциальный характер (дифференциальный закон),* т. е. связывающий бесконечно малые изменения рассматриваемых величин. После интегрирования уравнения получается *интегральный закон,* связывающий конечные значения этих величин. Вывод основных дифференциальных уравнений в той или иной области знания — очень ответственное дело, так как та или иная их формулировка в значительной степени определяет дальнейший ход развития этой области. Математическая зрелость физика или инженера во многом характеризуется тем, насколько правильно он может *математически формулировать* основные задачи в избранной им области.

2. Основные определения. Чаще всего *дифференциальное уравнение получается как уравнение, связывающее аргумент* или аргументы, *неизвестную функцию* (или функции) и *ее производные;* даже если первоначально было соотношение между дифференциалами, то можно перейти к соотношению между производными (см. формулы (5.1)). *Если искомая функция зависит от одного аргумента,* как в примерах п. 1, *то дифференциальное уравнение называется обыкновенным;* в противном случае оно называется *уравнением с частными производными. В этом модуле будут рассматриваться только обыкновенные дифференциальные уравнения.*

Наивысший порядок производной от искомой функции, входящий в уравнение, называется порядком этого уравнения. Так, уравнения (5.1) и (5.2) — первого порядка, тогда как уравнение (5.4) имеет второй порядок. В общем случае уравнение *n*-го порядка имеет вид

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0, \tag{5.5}$$

где $y = y\ (x)$ — искомая функция. Конечно, при этом функция F может фактически зависеть не от всех выписанных величин: например, уравнение (5.4) не включает независимую переменную и производную первого порядка.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая, будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество. Уже на простейших примерах легко убедиться в том, что *дифференциальное уравнение имеет бесконечное количество решений.* Например, из простейшего уравнения

$$y'=x^2,\quad y=y\,(x) \tag{5.6}$$

сразу найдем **с** помощью интегрирования

$$y=\frac{x^3}{3}+C. \tag{5.7}$$

Это — *общее решение* уравнения (5.6); оно включает *произвольную постоянную С* и является записью *всего многообразия решений.* Придавая произвольной постоянной конкретные численные значения, мы получим конкретные, *частные решения* уравнения (5.6):

$$y=\frac{x^3}{3},\quad y=\frac{x^3}{3}+6,\ y=\frac{x^3}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}\ \text{и т. п.}$$

В общем случае (5.5) решение находится в результате *n* последовательных интегрирований, так что *общее решение уравнения n-го порядка содержит n произвольных постоянных,* т. е. имеет вид

$$y=y\,(x;\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n). \tag{5.8}$$

Особенно часто общее решение получается в неявной форме:

$$\Phi\,(x,\ y;\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n)=0. \tag{5.9}$$

Соотношения (5.8) и (5.9) называются также *общими интегралами* уравнения (5.5). Частные решения получаются, если придать каждой произвольной постоянной C_1, C_2, . . ., C_n конкретное численное значение. График каждого частного решения называется *интегральной линией рассматриваемого* *дифференциального уравнения.* Уравнение этой линии — это уравнение (5.8) и (5.9) с конкретными *С*.

Чтобы из общего решения выделить одно частное, требуется, помимо дифференциального уравнения, поставить некоторые дополнительные условия. Чаще всего ставятся *начальные условия,* которые при исследовании процесса, развивающегося во времени, являются *математической записью начального состояния процесса.*

Например, при рассмотрении процесса колебаний в п. 1 из физических соображений ясно, что конкретное колебание полностью определяется, если заданы начальное отклонение и начальная скорость колеблющейся точки. Поэтому начальные условия для уравнения (5.5) имеют вид

$$t=t_0 \quad \text{заданы} \quad y=y_0 \ \text{ и } \ \frac{dy}{dt}=v_0. \tag{5.10}$$

В общем случае для уравнения (5.5) начальные условия имеют следующий вид:

$$\text{при } x=x_0 \text{ заданы } y=y_0, \quad y'=(y')_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}=(y^{(n-1)})_0. \tag{5.11}$$

Так как общее решение (5.9) содержит *n* произвольных постоянных, то наложенных *n* соотношений как раз достаточно, во всяком случае принципиально, для нахождения этих постоянных и тем самым для нахождения частного решения. И физически естественно, что если известны дифференциальный закон, управляющий развитием процесса, а также начальное состояние этого процесса, то сам процесс является полностью определенным.

Для уравнения первого порядка (5.6) условие (5.11) означает, что при некотором значении $x = x_0$ должно быть задано значение $y = y_0$. Пусть, например, требуется, чтобы $y(1) = 2$. Тогда из (5.7) получаем $2=(1^3)/3+C$, $C=5/3$, т. е. искомое частное решение имеет вид

$$y=\frac{x^3+5}{3}$$

Задача о нахождении частного решения дифференциального уравнения при заданном начальном условии называется *задачей Коши.*

Как мы увидим в п. 7, некоторые дифференциальные уравнения, помимо частных решений, входящих в состав общего, обладают дополнительно *особыми* решениями, которые не входят в этот состав.

5. 2. Уравнения первого порядка

3. Геометрический смысл. Общий вид дифференциального уравнения первого порядка таков:

$$F(x,\ y,\ y')=0, \tag{5.12}$$

где $y = y\ (x)$— неизвестная функция. Будем сначала для простоты считать, что уравнение разрешено относительно производной от искомой функции т. е имеет вид

$$y'=f(x,\ y). \tag{5.13}$$

Начальное условие для уравнения (5.12) согласно п. 2 таково:

при $x = x_0$ задано $y = y_0$. (5.14)

Чтобы придать геометрический смысл уравнению (5.13), рассмотрим плоскость $x,\ y;$ тогда каждое частное решение изобразится в виде линии (интегральной линии) на этой плоскости, но эти линии нам пока неизвестны. Однако, взяв любую точку $M(x;\ y)$ на плоскости, можно подсчитать значение $f(x,\ y)$, которое в силу уравнения (5.13) должно равняться угловому коэффициенту касательной к искомой линии в точке M, если эта линия пройдет через M.

Поэтому можно поступить так: в каждой точке $M(x;\ y)$ плоскости представим себе проведенным маленький отрезок с угловым коэффициентом $tg\alpha=f(x,\ y)$ (рис.5.2). Конечно, мы на практике можем провести только несколько таких отрезков, но теоретически надо представлять себе, что отрезки проведены в *каждой* точке. Полученная картина называется *полем направлений* на плоскости . Мы видим, что интегральные линии уравнения (5.13) должны проходить так, чтобы в каждой своей точке «идти вдоль поля», т. е. касаться отрезка, проведенного в этой точке.

Итак, *уравнение* (5.13) *задает на плоскости поле направлений.* С другой стороны, *начальное условие* (5.14) *задает на плоскости точку* $M_o\ (x_0;\ y_0)$, *через которую должна пройти искомая интегральная линия.* Геометрически ясно (рис. 5.3), что этим интегральная линия полностью определяется. Другими словами, *уравнение* (5.13) *при*

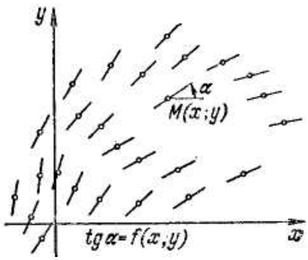


Рис.5.2.

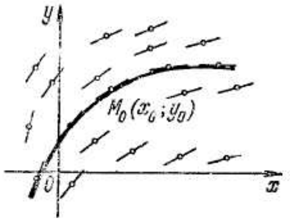


Рис.5.3.

начальном условии (5.14) *имеет вполне определенное, единственное решение.* Более подробное исследование, проведенное Коши, показало, что для этого достаточно, чтобы в точке M_0 *функция f была непрерывна, а ее производная* $\partial f/\partial y$——*конечна.* (Случаи нарушения условий этой *теоремы Коши* будут рассмотрены в п. 7.)

Приведенные рассуждения хорошо иллюстрируются на известном опыте с железными опилками, помещенными в магнитное поле. Сами опилки образуют поле направлений, а интегральными линиями этого поля служат так называемые магнитные силовые линии.

Выясненный нами геометрический смысл уравнения (5.13) дает возможность приближенно графически строить интегральные линии этого уравнения. Для этого надо изобразить поле направлений по возможности в большем числе точек плоскости, а затем строить линии, руководствуясь этими направлениями.

При построении поля на практике удобнее не выбирать произвольно точки на плоскости, а строить *изоклины,* т. е. линии, на которых поле направлено одинаково. Их уравнение получится, если правую часть уравнения (5.13) приравнять константе, т. е. написать

$$f(x, y) = k,$$

где k — угловой коэффициент поля, отвечающий данной изоклине.

Рассмотрим, например, уравнение $y'=x+y$.

Приравнивание правой части постоянным —2, —3/2 , —1, —1/2, 0, 1, 2 дает изоклины, которые в данном примере являются прямыми линиями ($x+y=-2$ и т. д.), изображенными на рис. 5.4. На каждой из этих изоклин штрихами показано направление поля; чтобы найти это направление, можно построить прямоугольный треугольник PQR с основанием PQ=1, параллельным оси x, и высотой $QR = k$, тогда сторона PR пойдет как раз по требуемому направлению. На основе этих направлений на рис. 5.4 нанесено также несколько интегральных линий. Видно, что одной из таких линий

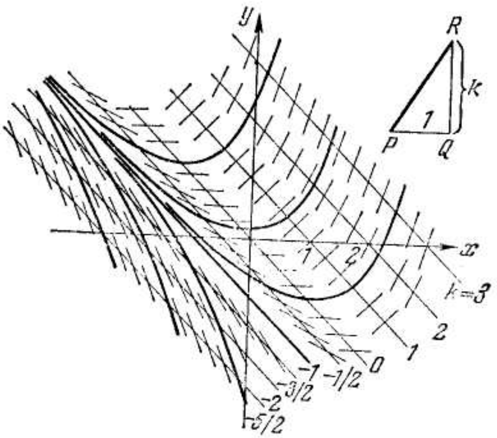


Рис.5.4.
PR — направление поля.

служит прямая $x+y=-1$, а также что геометрическим местом самых низких точек на интегральных линиях служит прямая $x+y=0$. В общем случае (5.13) для нахождения геометрического места самых низких или самых высоких точек на интегральных линиях надо построить изоклину $f(x,y)=0$.

4. Интегрируемые типы уравнений. *Дифференциальное уравнение считается проинтегрированным в квадратурах, если его общее решение получено в явной или неявной форме, которая может содержать еще не взятые интегралы от известных функций;* как быть с такими интегралами— учит интегральное исчисление (модуль 4). К сожалению, многие даже очень

простые уравнения невозможно проинтегрировать в квадратурах и их приходится исследовать иными методами, о которых в свое время будет сказано. Тем не менее имеется несколько классов уравнений, интегрируемых в квадратурах.

1. *Диференциальные уравнения с разделяющимися переменными,* уже были рассмотрены в ранее; они имеют общий вид

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y) \tag{5.15}$$

и общее решение

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)\,dx+C. \tag{5.16}$$

Мы написали в правой части произвольную постоянную С, чтобы подчеркнуть, что она входит в общее решение. Как видим, уравнение (5.15) проинтегрировано в квадратурах формулой (5.16). Рассмотрим, например, простейшее уравнение

$$\frac{dy}{dx}=2xy.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dy}{y}=2x\,dx,\quad \ln|y|=x^2+C,\quad |y|=e^{x^2+C},\quad y=\pm e^Ce^{x^2}. \tag{5.17}$$

Ответ удобнее записать в иной форме, если заметить, что $\pm e^C$ также представляет собой произвольную постоянную, т. е. $y = Ce^x$; конечно, здесь С уже иное, чем в формуле (5.17).

Чтобы избежать такого изменения обозначений, можно было при интегрировании в (5.17) написать, имея в виду дальнейшее потенцирование,

$$\ln|y|=x^2+\ln C,$$

так как ln С — тоже произвольная постоянная. После потенцирования получим

$$|y|=Ce^{x^2},\quad y=\pm Ce^{x^2},\quad y=Ce^{x^2};$$

знак можно включить в С, т. е. в последней формуле считать С любого знака. Мы будем так поступать без особого предупреждения.

Аналогично (5.16) строится общее решение уравнения

$$P(x)\,Q(y)\,dx+R(x)\,S(y)\,dy=0,$$

которое также является уравнением с разделяющимися переменными.

2. *Уравнение, однородное относительно аргумента и искомой функции.* Так называется уравнение вида (5.12), если его левая часть представляет собой однородную функцию

относительно x и y, рассматриваемых как независимые переменные, т. е. если

$$F(tx, ty, y') \equiv t^k F(x, y, y')$$

Тогда уравнение (11.12) можно переписать в виде

$$F\left(x \cdot 1,\ x \cdot \frac{y}{x},\ y'\right) = 0,\ x^k F\left(1,\ \frac{y}{x},\ y'\right) = 0,\ \text{т. е. } F\left(1,\ \frac{y}{x},\ y'\right) = 0.$$

Разрешая последнее уравнение относительно y', получим

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (5.18)$$

Это уравнение интегрируется с помощью подстановки

$$\frac{y}{x} = u, \quad y = ux, \quad y' = u'x + u,$$

где $u = u(x)$— новая, взамен y, искомая функция. Подставляя в (5.18), получим

$$u'x + u = \varphi(u), \quad \frac{du}{dx}x = \varphi(u) - u, \quad \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

т. е. переменные разделились; теперь надо выполнить интегрирование и перейти от u обратно к y.

Для интегрирования несколько более общего, чем (5.18), уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{ax + by + c}{mx + ny + p}\right),$$

где двучлены

$ax + by$ и $mx + ny$

не пропорциональны друг другу, совершают подстановку

$x = x_1 + \alpha,\ y = y_1 + \beta,$

где α и β подбираются так, чтобы после подстановки в числителе и знаменателе последней дроби не осталось свободных членов; затем заменяют $y_1/x_1 = u$.

3. *Линейные уравнения.* Так называются уравнении вида (5.12), *линейные относительно искомой функции и ее производной,* т. е. уравнения вида

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0.$$

Если это уравнение разделить на $a(x)$, получится

$$y' + p(x)y = f(x), \quad \text{где } p = \frac{b}{a},\ f = -\frac{c}{a}. \qquad (5.19)$$

Уравнение (5.19) называется *линейным неоднородным* из-за наличия в нем неоднородного члена $f(x)$. Чтобы решить это уравнение, напишем сначала вспомогательное *однородное уравнение,* отбросив неоднородный член и изменив обозначение искомой функции:

$$z' + p(x) z = 0. \tag{5.20}$$

В уравнении (5.20) переменные разделяются:

$$\frac{dz}{dx} = -p(x) z, \quad \frac{dz}{z} = -p(x)\,dx, \quad \ln|z| = -\int p(x)\,dx + \ln C,$$

$$z = C \exp\left[-\int p(x)\,dx\right] = C z_1, \tag{5.21}$$

где z_1 получается из z при C=1, т. е. z_1 есть частное решение уравнения (5.20).

Найдя z_1, ищем решение уравнения (5.19) в виде

$$y = \varphi(x) z_1, \tag{5.22}$$

где z_1 то же, что в формуле (5.21), а $\varphi(x)$ — пока неизвестная функция. Такая замена бывшей произвольной постоянной из формулы (5.21) на функцию в формуле (5.22) называется *вариацией произвольной постоянной.*

Из формулы (5.22) получим, подставляя в уравнение (5.19),

$$\varphi' z_1 + \varphi z_1' + p\varphi z_1 = f, \quad \varphi' z_1 + \varphi(z_1' + p z_1) = f.$$

Так как z_1 удовлетворяет уравнению (5.20), то последняя скобка равна нулю, т. е.

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)}{z_1(x)}, \quad \varphi(x) = \int \frac{f(x)}{z_1(x)}\,dx + C,$$

$$y = z_1(x) \int \frac{f(x)}{z_1(x)}\,dx + C z_1(x).$$

Это — общее решение уравнения (5.19). Первое слагаемое получается при C=0 и, таким образом, представляет собой частное решение того же уравнения.

Итак, *общее решение линейного неоднородного уравнения* (5.19) *равно сумме некоторого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения* (5.20), *полученного отбрасыванием неоднородного члена.* В п. 15 мы увидим, что этим свойством обладают линейные уравнения любого вида.

Уравнение

$$y' + p(x) y = t(x) y^n$$

называется *уравнением Бернулли.* Оно приводится к линейному, если разделить обе части на y'' и сделать замену $y^{1-n} = u$

Имеется еще несколько мало распространенных типов уравнений, интегрируемых в квадратурах. Кроме того, отдельные уравнения, не принадлежащие к определенным типам, иногда удается проинтегрировать в результате удачно подобранной подстановки. В то же время большинство уравнений не интегрируется в квадратурах. Например, не интегрируется в общем случае довольно распространенное *уравнение Риккати*

$$y' = y^2 + f(x)$$

и многие другие простые уравнения.

5. Уравнение для экспоненты. Остановимся на очень простом, но крайне важном уравнении

$$\frac{dy}{dx} = ky \qquad (k = \text{const}). \tag{5.23}$$

Оно означает, что скорость изменения величины *у,* взятая по отношению к величине *х,* пропорциональна текущему значению *у*. Такая пропорциональность с $k > 0$, если *у* возрастает, и с $k < 0$, если *у* убывает (мы для простоты считаем, что $y > 0$), часто принимается в первом приближении при исследовании многих процессов, а иногда она оправдывается с большой точностью.

В уравнении (5.23) разделяются переменные, откуда

$$\frac{dy}{y} = k\,dx, \quad \ln|y| = kx + \ln C, \quad y = Ce^{kx}.$$

Если имеется также начальное условие

$$y(x_0) = y_0,$$

то получаем

$$y_0 = Ce^{kx_0}, \quad C = y_0e^{-kx_0}, \quad \text{т. е.} \quad y = y_0e^{k(x-x_0)}. \tag{5.24}$$

Итак, решение уравнения (5.23) представляет собой экспоненту, т. е. показательную функцию. Для решения характерно, что если придавать *х* значения, образующие арифметическую прогрессию с разностью Δx, то соответствующие значения *у* образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{k\Delta x}$. Легко найти, каково должно быть Δx, чтобы *у* менялся (увеличивался или уменьшался) каждый раз вдвое. Для этого должно быть

$$|k\,\Delta x| = \ln 2, \qquad \text{т. е.} \qquad \Delta x = \frac{\ln 2}{|k|}. \tag{5.25}$$

Если $k > 0$, то формула 5.25 показывает *экспоненциальное нарастание* величины *у.* Так получится, например, при исследовании процесса размножения бактерий в питательной среде, пока их там не слишком много. Примем, что все они размножаются более или менее независимо друг от друга; это— так называемый *закон органического роста,* характерный для всевозможных *цепных реакций.* Тогда получаем, что скорость нарастания количества *и* этих бактерий, измеренного в каких-то единицах, пропорциональна этому количеству

т. е.

$$\frac{du}{dt}=ku; \qquad u=u_0e^{k(t-t_0)}.$$

Аналогично исследуются задача о непрерывном нарастании вклада в сберкассе и другие подобные задачи.

Если κ < 0, то формула (5.24) показывает *экспоненциальное убывание* величины *у*. Так получится, например, при исследовании процесса радиоактивного распада. Если принять, что различные участки распадаются независимо друг от друга, то получаем, что скорость убывания еще не распавшейся массы *т* радиоактивного вещества пропорциональна текущему значению этой массы, т. е.

$$\frac{dm}{dt}=-pm, \qquad m=m_0e^{-p(t-t_0)}.$$

Отметим, в частности, что в силу формулы (5.25) за время

$$\Delta t=\frac{\ln 2}{p}$$

значение *т* уменьшается наполовину; это — *период полураспада*. Так, для радия он приближенно равен $1.8\cdot10^3$ лет; другими словами, если бы

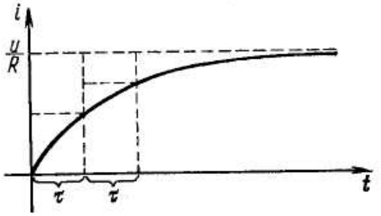


Рис.5.5.

запасы радия не пополнялись, то через $1,8\cdot10^3$ лет осталась бы половина начального запаса, еще через $1,8\cdot10^3$ лет —четверть начального запаса и т. д.

Аналогично исследуются убывание атмосферного давления с высотой, процесс разрядки конденсатора через сопротивление и многие другие задачи.

Иногда рассматриваемое уравнение можно более или менее просто преобразовать к виду (5.23). Например, при включении постоянного напряжения *и* в цепь, обладающую сопротивлением *R* и индуктивностью *L,* ток *I* удовлетворяет уравнению

$$L\frac{di}{dt}+Ri=u. \tag{5.26}$$

Это — линейное неоднородное уравнение, которое можно проинтегрировать (решить) по методу п. 4. Но проще преобразовать уравнение так:

$$L\frac{di}{dt}=-Ri+u=-R\left(i-\frac{u}{R}\right),\quad \frac{d\left(i-\frac{u}{R}\right)}{dt}=-\frac{R}{L}\left(i-\frac{u}{R}\right),$$

откуда

$$i-\frac{u}{R}=\left(i_0-\frac{u}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)},\quad i=\frac{u}{R}+\left(i_0-\frac{u}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}.$$

Особенно просто получится, если в начальный момент, за который мы примем $t = 0$, тока в цепи не было. Тогда $t_0=0$, $i_o = 0$ и

$$i=\frac{u}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{5.27}$$

График полученной зависимости показан на рис. 5.5. Мы видим, что ток при $t\to\infty$ экспоненциально приближается к предельному стационарному значению u/R. Это же значение легко найти из самого уравнения (5.26), если заметить, что в процессе установления тока, при $t\to\infty$, будет $(di/dt)\to 0$ и потому в пределе

$$Ri=u,\quad i=\frac{u}{R},$$

т. е. когда ток практически установился, все напряжение расходуется только на сопротивление R. Отклонение тока от предельного значения уменьшается в два раза за время

$$\tau=\frac{\ln 2}{\frac{R}{L}}=\frac{L}{R}\ln 2.$$

То, что в формуле (5.24) в основании получается именно число e, и есть основная причина значения этой константы в математике и ее приложениях.

6. Интегрирование полного дифференциала. Дифференциальные уравнения первого порядка часто рассматривают взамен формы (5.13) в *симметричной форме*

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0, \tag{5.28}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — заданные функции, а функциональная зависимость между x и y неизвестна. Легко перейти от одной формы к другой: например, чтобы перейти от (5.28) к форме (5.13), надо обе части (5.28) разделить на Qdx, а затем перенести P/Q в правую часть.

Форма (5.28) предпочтительнее в тех случаях, когда переменные x и y более или менее равноправны и заранее не требуется, чтобы именно y считался функцией x, а не наоборот.

В частном случае, когда левая часть уравнения (5.28) представляет собой полный дифференциал некоторой функции, т. е.

$$P\,dx+Q\,dy\equiv du\,(x,\,y), \tag{5.29}$$

это уравнение (5.28) легко проинтегрировать. Действительно, тогда его можно переписать в виде $du = 0$ и, интегрируя, получим общее решение

$$u\,(x,\,y)=C, \tag{5.30}$$

где C—как всегда, произвольная постоянная.

Вопрос о том, когда существует такая функция *u (x, y),* был рассмотрен в модуле 4 п. 24. В данном случае зависимости от *z* нет и R= 0, так что из условий (4.121) остается только одно:

$$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}\,. \tag{5.31}$$

Это условие необходимо и достаточно для того, чтобы, левая часть уравнения (5.28) *была полным дифференциалом.* При этом функция *u (x, y)* строится по формуле (4.119), где, конечно, под знаком интеграла должно быть отброшено последнее слагаемое. Как указано в модуле 5 п. 24, если область многосвязная, то функция *u* получится, вообще говоря, многозначной. Однако формула (5.30) и в атом случае дает общее решение уравнения (5.28).

Рассмотрим, например, уравнение

$$(x^2+2xy)\,dx+(x^2-y^3)\,dy=0. \tag{5.32}$$

Здесь

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\,(x^2+2xy)}{\partial y}=2x,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial\,(x^2-y^3)}{\partial x}=2x,$$

т. е. условие (5.31) выполнено. Для построения функции *u* по формуле (4.119) выберем для определенности точку M_o в начале координат, а путь, соединяющий M_o с текущей точкой *M (x; y),*—как на рис. 5.6. Получаем

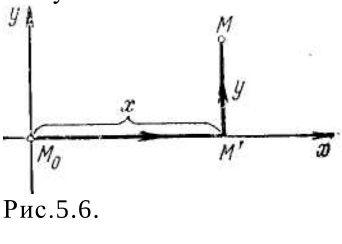


Рис.5.6.

$$u(x, y) = \int\limits_{M_0M} [(x^2 + 2xy)\,dx + (x^2 - y^3)\,dy] =$$
$$= \int\limits_{M_0M'} [(x^2 + 2xy)\,dx + (x^2 - y^3)\,dy] +$$
$$+ \int\limits_{M'M} [(x^2 + 2xy)\,dx + (x^2 - y^3)\,dy]. \quad (33)$$

(5.33)

В первом интеграле надо положить $y=0$, $dy = 0$, тогда как во втором считать $x = \text{const}$, $dx = 0$. Отсюда

$$u(x, y) = \int\limits_0^x x^2\,dx + \int\limits_0^y (x^2 - y^3)\,dy = \frac{x^3}{3} + x^2y - \frac{y^4}{4}.$$

Итак, общее решение уравнения (5.32) имеет вид

$$\frac{x^3}{3} + x^2y - \frac{y^4}{4} = C.$$

Проведем аналогичное исследование уравнения

$$-\frac{y\,dx}{x^2 + y^2} + \frac{x\,dy}{x^2 + y^2} = 0,$$

(5.35)

которое, впрочем, легко проинтегрировать непосредственно, так как переменные в нем разделяются. Это уравнение приходится рассматривать на всей плоскости, за исключением начала координат, как говорят, на плоскости с *выколотым* началом координат, так как при $x = 0$, $y = 0$ оба коэффициента, P и Q, имеют разрыв. Такая область, как указано в модуле 4 п. 24, неодносвязная (двусвязная).

Для уравнения (5.35) условие (5.31) также выполняется . Для построения функции u по формуле (4.119) выберем точку M_0 где угодно, но, конечно, не в начале координат, например $M_0(1; 0)$. Проведя выкладки, аналогичные (5.33), (5.34), и считая сначала, что $x > 0$, получим $u = \operatorname{arctg} y/x$. Эта же функция удовлетворяет соотношению (5.29) и при $x < 0$; однако если ее рассмотреть во всей плоскости x, y, то она будет иметь разрыв на прямой $x = 0$. Чтобы избавиться от него, можно положить

$$u = \operatorname{Arctg}\frac{y}{x} = \varphi \text{ (полярному углу).}$$

Правда, эта функция неоднозначна: даже если в некоторой точке $M \neq 0$ выбрать какое-либо одно значение φ, а затем заставить M обойти вокруг начала координат, то φ получит приращение 2π. Тем не менее общее решение уравнения (5.35) имеет вид

$$\operatorname{Arctg}\frac{y}{x} = C, \quad \text{т. е.} \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} C = C_1, \quad y = C_1x,$$

где C_1 — произвольная постоянная; геометрически получаем семейство всевозможных прямых, проходящих через начало координат.

Бывает так, что для уравнения (5.28) условие (5.31) не выполнено, т.е. левая часть этого уравнения не является полным дифференциалом, но становится им после умножения на некоторый известный множитель. Например, левая часть уравнения

$$-y\,dx + x\,dy = 0$$

не удовлетворяет условию (5.31), но начинает удовлетворять после умножения обеих частей на множитель

$$\frac{1}{x^2+y^2}$$

см. (5.35)).

Такой множитель называется *интегрирующим множителем* для рассматриваемого уравнения (5.28). Никаких общих способов для его нахождения нет; интегрирующий множитель используется в некоторых теоретических исследованиях.

7. Особые точки и особые решения. Бывает, что для уравнения, записанного в форме

$$y' = f(x, y) \tag{5.36}$$

(см. уравнение (5.13)) или

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{5.37}$$

(см. уравнение (5.28)), через некоторые точки на плоскости *x, y* проходит более одной интегральной линии или не проходит ни одной такой линии. Эти точки называются *особыми точками* для рассматриваемого уравнения. Они могут быть либо *изолированными,* либо заполнять целые *особые линии.*

Начнем с исследования уравнения (5.36) на простом частном примере

$$y' = y^{\alpha} \qquad (\alpha > 0), \tag{5.38}$$

причем будем считать $y \geq 0$. Уравнение (5.38) легко интегрируется:

$$\frac{dy}{y^{\alpha}} = dx, \qquad \frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} = x - C\ (\alpha \neq 1), \quad \ln y = x - C \quad (\alpha = 1); \tag{5.39}$$

мы написали —C взамен +C для удобства дальнейших рассуждений; это несущественно, так как само C может быть любого знака. Будем различать два случая.

1. $\alpha > 1$. Тогда решение (5.39) можно записать в виде

$$y = \frac{1}{(\alpha-1)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \cdot \frac{1}{(C-x)^{\frac{1}{\alpha-1}}} = \frac{\text{const}}{(C-x)^{\frac{1}{\alpha-1}}},$$

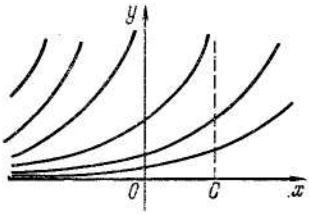


Рис. 5.7.

откуда следует, что если x меняется от — ∞ до C, то y возрастает от нуля до бесконечности. С изменением константы С график сдвигается вдоль оси x. Получающееся семейство интегральных линий изображено на рис. 5.7. Сама ось x также является интегральной линией; она получается в пределе при С→∞. Как видим, в данном случае через каждую точку верхней полуплоскости проходит единственная интегральная линия. На данном примере видно также, что решение *y (x) может существовать не на всей оси x, а лишь на некоторой ее части* — в данном примере на интервале $-\infty < x < C$.

При α = 1 получается аналогичная единственность

2. 0<α<1. Тогда решение (5.39) можно записать в виде

$$y = (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} (x-C)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \text{const}\,(x-C)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{5.40}$$

откуда следует, что если x меняется от С до ∞, то y возрастает от нуля до бесконечности. Получающееся семейство интегральных линий изображено на

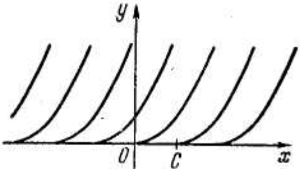


Рис.5.8

рис. 5.8. Ось x и здесь является интегральной линией, что видно из уравнения (5.38); однако она не получается из формулы (5.40) ни при каком С. Через каждую точку оси x в данном случае проходит по две интегральные линии—сама ось x и кривая, т. е. единственность решения задачи Коши, которая для уравнения первого порядка сводится к задаче о проведении интегральной линии через заданную точку плоскости, в точках оси x нарушается.

Чем «провинились» точки оси x в этом втором случае, что они стали особыми, можно увидеть, вычислив производную от правой части уравнения (5.38) в этих точках, т. е. при $y = 0$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}(y^{\alpha})\right)_{y=0} = (\alpha y^{\alpha-1})_{y=0} = 0 \text{ (при } \alpha > 1); \ = 1 \text{ (при } \alpha = 1); \ = \infty \text{ (при } \alpha < 1).$$

Поэтому для $0 < \alpha < 1$ при подходе к оси x поле поворачивается так быстро, что интегральные линии успевают дойти до нее на конечном расстоянии, а не на бесконечности, как на рис. 11.7.

Итак, мы видим, что в рассматриваемом случае не выполнены условия теоремы Коши (п. 3) о существовании и единственности решения, в которой требовалась конечность производной $\partial f/\partial y$. И в других случаях, если $(\partial f/\partial y)_{M_0}$ перестает быть конечной, через M_0 может, хоть и не обязательно, пройти более одной интегральной линии.

В частности, если $\partial f/\partial y$ обращается в бесконечность на некоторой линии (L) и сама эта линия является интегральной, то, как правило, через каждую точку (L) проходит, кроме (L), еще по крайней мере одна интегральная линия. В этом случае (L) является *особой интегральной линией,* т. е. интегральной линией, все точки которой особые, а соответствующее решение, графиком которого служит особая интегральная линия, называется *особым решением.*. Обычно оно не входит в состав общего решения, т. е. не получается из последнего ни при каком значении произвольной постоянной. Так, в примере (5.38) при $0 < \alpha < 1$ ось x служит особой интегральной линией, а функция y=0—особым решением.

К особому решению можно подойти с иных позиций. Из рис.5.8 видно, что в данном случае ось x служит огибающей семейства интегральных линий. Так и в общем случае *огибающая семейства интегральных линий,* если она имеется, *является интегральной линией,* так как она всюду идет вдоль поля, и в то же время *особой,* так как через ее точки проходят и другие интегральные линии. Поэтому если удалось найти общее решение в форме $\Phi(x, y; C) = 0$, то для нахождения особого решения надо исключить C из уравнений

$$\Phi(x, y; C) = 0, \quad \Phi'_C(x, y; C) = 0. \tag{5.41}$$

Перейдем теперь к уравнению (5.37), причем для простоты предположим, что функции P, Q непрерывны, а их частные производные первого порядка конечны. Так как уравнение (5.37) можно переписать в форме

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,\ y)}{Q(x,\ y)} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy}=-\frac{Q(x,\ y)}{P(x,\ y)}, \tag{5.42}$$

то применима только что упомянутая теорема Коши об уравнении (5.36), т. е. *через каждую точку* M_0 *(*x_0*,* y_0*), в которой* Q *(*x_0*,* y_0*)* $\neq 0$ *или* P *(*x_0*,* y_0*)*$\neq 0$*, проходит единственная интегральная линия.* (Для применения теоремы Коши достаточно обозначить через $f(x,\ y)$ ту из правых частей (5.42), у которой знаменатель не равен нулю.) Если же

$$P(x_0,\ y_0)=0, \quad Q(x_0,\ y_0)=0, \tag{5.43}$$

то в точке M_o *(*x_0*;* y_0*)* уравнение (5.37) перестает связывать dx и dy, т. е. поле направлений в такой точке не определено. Поэтому особые точки для уравнения (5.37) определяются соотношениями (5.43).

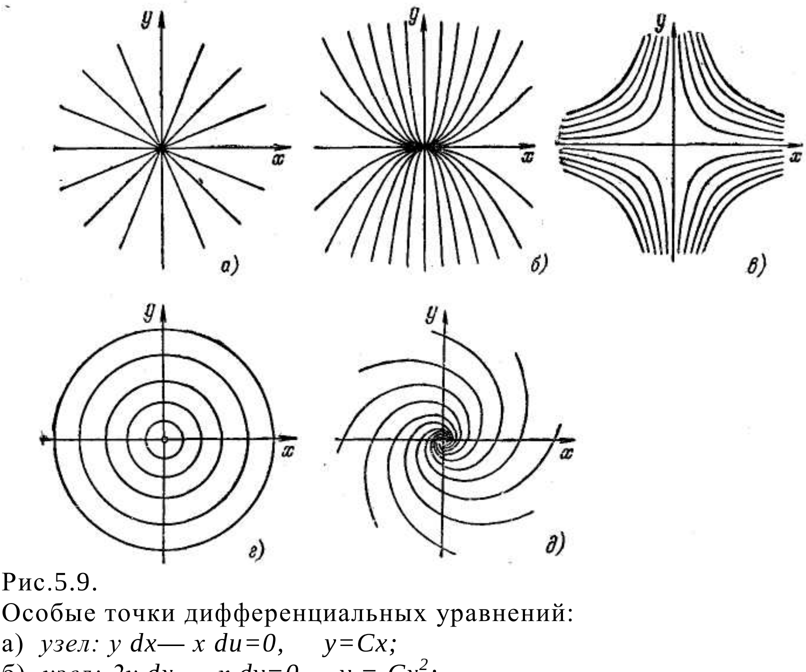


Рис.5.9.

Особые точки дифференциальных уравнений:

а) *узел:* $y\,dx — x\,du=0, \quad y=Cx;$

б) *узел:* $2y\,dx — x\,dy=0, \quad y = Cx^2;$

в) седло: $ydx+xdy=0, \quad xy = C;$

а) центр: $xdx+y\,dy=0, \quad x^2 + y^2=C;$

д) фокус: $(x + y)\,dx — (x — y)\,dy=O, \quad \rho = Ce^{\varphi}$

(в полярных координатах).

Несколько простых наиболее распространенных примеров особых точек вместе с их наименованиями показаны на рис. 5.9. (Проверьте правильность указанных там общих решений и изображения семейств интегральных линий.)
Во всех этих примерах особой точкой служит начало координат. В примерах *а, б* и *д* через особую точку проходит бесконечное количество интегральных линий, в примере *в* — две такие линии и в примере *г* — ни одной. Отметим, что в примерах *а, б* и *в* сами оси координат так же служат интегральными линиями. При интегрировании уравнения рис.5.9, *д* полезно предварительно перейти к полярным координатам

8. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Уравнение

$$F(x,\ y,\ y')=0 \tag{5.44}$$

отличается от разобранного в п. 3 уравнения (5.13) тем, что в данном случае y' является неявной функцией $x,\ y$. Характерной чертой неявных функций является то, что они, вообще говоря, многозначные. Поэтому если уравнение (5.44) разрешить относительно y' (в принципе, так как практически это может быть затруднительно), то получится несколько решений:

$$y'=f_1(x,\ y),\quad y'=f_2(x,\ y),\ \ldots,\ y'=f_k(x,\ y) \tag{5.45}$$

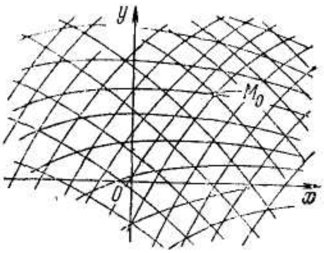


Рис.5.10.

любое из которых удовлетворяет уравнению (5.44).

Каждое из уравнений (5.45) задает на плоскости поле направлений и имеет семейство интегральных линий, заполняющие плоскость (п. 3). Поэтому в той части плоскости , где уравнение (5.44) имеет *к* решений относительно y', оно определяет k полей направлений, наложенных друг на друга, и через каждую точку проходит k интегральных линий, т.

е. начальное условие $y(x_0)=y_0$ определяет k решений (см рис. 5.10, где принято $к = 3$).

Подобно п. 7, уравнение (5.44) может иметь особые точки, особые линии и особые интегральные линии. Так как из уравнения (5.44)

$$-\frac{\partial y'}{\partial y}=-\frac{F'_y(x, y, y')}{F'_{y'}(x, y, y')}$$

то в силу теоремы Коши (п .3) такие точки и линии могут появиться, только если наряду с (5.44) имеет место равенство

$$F'_{y'}(x, y, y')=0 \qquad (5.46)$$

(конечно, если $F'_y \neq\infty$).

В частности, особое решение, если оно имеется, график которого является огибающей семейства интегральных линий, можно получить, исключая y' из равенств (5.44) и (5.46). Другой способ построения особого решения основан на формулах (5.41).

9. Метод предварительного дифференцирования. В некоторых случаях уравнение (5.44) удается проинтегрировать после его *предварительного дифференцирования.* Рассмотрим, например, уравнение

$$x=f(y'), \qquad (5.47)$$

или, как принято записывать,

$$x=f(p) \qquad (p=y'). \qquad (5.48)$$

Если продифференцировать обе части, получим

$$dx=f'(p)\,dp.$$

С помощью этого равенства и формулы

$$\frac{dy}{dx}=p$$

находим выражение для dy:

$$dy=p\,dx=pf'(p)\,dp,$$

откуда

$$y=\int pf'(p)\,dp+C. \qquad (5.49)$$

Равенства (5.48) и (5.49) вместе определяют функциональную зависимость между x и y в параметрическом виде , причем параметром служит p. Мы получили общее решение уравнения (5.47) в параметрическом виде. Аналогично решается уравнение $y=f(y')$.

Несколько более сложным является *уравнение Лагранжа*

$$y=f(y')\,x+g(y'), \quad \text{т. е.} \quad y=f(p)\,x+g(p) \qquad (p=y'). \qquad (5.50)$$

линейное относительно x и y, до нелинейное в основном значении этого слова (п. 4), После дифференцирования получаем

$$dy = p\,dx = f'(p)\,dp\,x + f(p)\,dx + g'(p)\,dp,$$

т. е.

$$[p - f(p)]\frac{dx}{dp} = f'(p)\,x + g'(p).$$

Если $f(p) \neq p$, то после деления на $p - f(p)$ получается линейное уравнение (см. уравнение (5.19)), в котором x рассматривается как функция от p. После интегрирования этого уравнения получим равенство вида $x = x(p; C)$, которое вместе с (5.50) даст общее решение исходного уравнения в параметрическом виде.

В частном случае, когда $f(p) \equiv p$, уравнение (5.50) называется *уравнением Клеро ;* оно имеет вид

$$y = xy' + g(y'),$$

т. е.

$$y = xp + g(p) \qquad (p = y'). \tag{5.51}$$

Предварительное дифференцирование дает

$$p\,dx = p\,dx + x\,dp + g'(p)\,dp$$

т. е.

$$dp\,[x + g'(p)] = 0. \tag{5.52}$$

Приравнивая нулю первый множитель, получим в силу (5.51)

$$p = C, \text{ т. е. } y = Cx + g(C). \tag{5.53}$$

Это — общее решение уравнения (5.51).

Приравнивая нулю второй множитель в левой части (5.52), получим

$$x = -g'(p), \quad y = xp + g(p) = -pg'(p) + g(p). \tag{5.54}$$

Значит, получилось еще одно, особое решение уравнения (5.51), определенное в параметрическом виде. Геометрически формула (5.53) задает семейство прямых, а формулы (5.54)—огибающую.

Например, уравнение

$$y = xy' - y'^2$$

имеет общее решение

$$y = Cx - C^2 \tag{5.55}$$

и особое решение, графиком которого служит огибающая семейства прямых (5.55). Для ее отыскания продифференцируем по C обе части (5.5l), что даст

$$0 = x - 2C.$$

Исключая С из двух последних формул, получим $C = x/2$, т. е.

$$y=\frac{x}{2}x-\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4}.$$

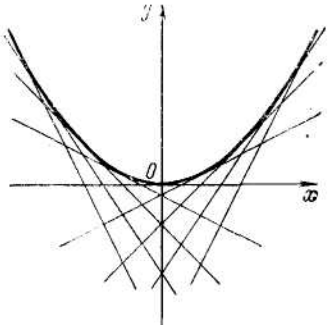


Рис.5.11.

Соответствующие интегральные линии показаны на рис. 5.11.

5.3. Уравнения высших порядков и системы уравнений

10. Уравнения высших порядков.

Общие понятия, относящиеся к таким уравнениям, были приведены в п. 2 (уравнение (5.5), общее решение (5.8) или (5.9), начальное условие (5.11)). Впрочем, как и для первого порядка, уравнение порядка *n* обычно бывает проще исследовать, если оно задано в форме, разрешенной относительно старшей производной:

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \dots,\ y^{(n-1)}).$$

В частности, на эту форму непосредственно распространяется теорема Коши (п. 3): *начальные значения* (5.11) *определяют одно и только одно решение, если при этих значениях функция f непрерывна и имеет конечные производные первого порядка по* $y, y' \ldots . y^{(n-1)}$.

Рассмотрим вопрос об интегрировании этих уравнений в квадратурах; в случае уравнений высшего порядка интегрирование удается довести до конца еще реже, чем для уравнений первого порядка. Основным способом формального интегрирования нелинейных уравнений высшего порядка (о линейных уравнениях мы будем говорить особо в 5. 4) является *метод понижения порядка,* т. е. переход к равносильному уравнению низшего порядка. Как правило, чем ниже порядок уравнения, тем оно проще. Кроме того, бывает, что после одного или нескольких понижений порядка мы переходим к уравнению первого порядка одного из интегрируемых типов (п. 4); тогда интегрирование удается довести до конца. Рассмотрим некоторые частные способы понижения порядка.

1.Пусть, например, задано уравнение второго порядка

$$y'^2+yy''=0.$$

Для его интегрирования заметим, что левую часть можно переписать в виде

$$y'^2+yy''\equiv(yy')',$$

откуда

$$(yy')'=0;\ \ yy'=C_1;\ \ ydy=C_1dx;\ \ \frac{y^2}{2}=C_1x+C_2$$

(общее решение).

Другое уравнение

$$y'^2-yy''=0$$

легко проинтегрировать аналогичным образом, если предварительно разделить обе части на y^2:

$$\frac{y'^2-yy''}{y^2}=0;\ \ -\left(\frac{y'}{y}\right)'=0;\ \ \frac{y'}{y}=C_1;\ \ \frac{dy}{y}=C_1dx;$$

$$\ln|y|=C_1x+\ln C_2;\quad y=C_2e^{C_1x}$$

(общее решение).

Как говорят, после деления на y^2 мы получили *интегрируемую комбинацию: «точная производная» приравнена к нулю.* Аналогичный прием иногда применяется и в других примерах.

Дальнейшие случаи понижения порядка мы будем для простоты излагать для уравнений второго порядка общего вида

$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0. \tag{5.56}$$

2. *Пусть в уравнении* (5.56) *не присутствует y,* а только производные от него, т. е. мы имеем уравнение вида

$$F(x,\ y',\ y'')=0. \tag{5.57}$$

Тогда вводят обозначение

$$y'=p=p(x)$$

и из (5.57) получится

$$F(x,\ p,\ p')=0,$$

т. е. уравнение первого порядка. Если нам повезет и удастся его проинтегрировать, то получим общее решение уравнения (5.57)

$$p=\varphi(x;\ C_1);\quad y'=\varphi(x;\ C_1);\quad y=\int\varphi(x;\ C_1)\,dx+C_2.$$

3. *Пусть в уравнении* (5.56) *не присутствует x,* т.е. мы имеем уравнение

$$F(y, \ y', \ y'')=0. \qquad (5.58)$$

Тогда также обозначают $y'=p$, но рассматривают p как функцию от y. При этом в (5.58) нельзя подставлять просто $y''=p'$, так как тогда p' означало бы производную от p по x, а не по y. Поэтому пишут

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}.$$

Из уравнения (5.58) получим

$$F\left(y, \ p, \ p\frac{dp}{dy}\right)=0,$$

т. е. уравнение первого порядка. Если его удастся проинтегрировать, то мы сможем найти общее решение уравнения (5.58)

$$p=\varphi(y; \ C_1); \quad \frac{dy}{dx}=\varphi(y; \ C_1); \quad \int\frac{dy}{\varphi(y; \ C_1)}=x+C_2.$$

4. *Пусть левая часть уравнения* (5.56) *однородна относительна неизвестной функции и ее производных,* т.е.

$$F(x, \ ty, \ ty', \ ty'')\equiv t^kF(x, \ y, \ y', \ y''). \qquad (5.59)$$

В этом случае порядок понижается после подстановки

$$\frac{y'}{y}=u=u(x),$$

откуда

$$y'=uy, \quad y''=u'y+uy'=u'y+u\cdot uy=(u'+u^2)y,$$

$$F(x, \ y, \ yu, \ y(u'+u^2))=0, \quad F(x, \ 1, \ u, \ u'+u^2)=0;$$

в последнем переходе мы воспользовались свойством (5.59). Если полученное уравнение первого порядка удастся проинтегрировать, то

$$u=\varphi(x; \ C_1); \quad \frac{y'}{y}=\varphi(x; \ C_1);$$

$$\ln|y|=\int\varphi(x; \ C_1)\,dx+\ln C_2; \quad y=C_2e^{\int\varphi(x; \ C_1)\,dx}.$$

11. Связь уравнений высшего порядка с системами уравнений первого порядка. От уравнения высшего порядка (5.5) всегда можно перейти к равносильной системе n уравнений первого порядка с n неизвестными функциями. Для этого надо обозначить

$$y=y_1, \ y'=y_2, \ \dots, \ y^{(n-1)}=y_n. \qquad (5.60)$$

Тогда в силу уравнения (5.5) можно написать

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_n') = 0. \end{array}\right\} \qquad (5.61)$$

Система (5.61) имеет специальный вид. Общий вид системы первого порядка, например, из трех уравнений с тремя неизвестными функциями таков:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3') = 0, \\ F_3(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3') = 0. \end{array}\right\} \qquad (5.62)$$

Обратно, из системы (5.62) можно перейти к одному уравнению (в данном случае третьего порядка) с одной неизвестной функцией, например y_1. Поэтому общее решение системы (5.62) содержит три произвольные постоянные:

$$y_1 = \varphi_1(x; C_1, C_2, C_3), \; y_2 = \varphi_2(x; C_1, C_2, C_3), \; y_3 = \varphi_3(x; C_1, C_2, C_3).$$

Для указанного перехода надо каждое из уравнений (5.62) продифференцировать два раза и из полученных девяти равенств, считая вместе с равенствами (5.62), исключить восемь величин y_2, y_3, y'_2, y'_3, y''_2, y''_3, y'''_2, y'''_3. После интегрирования получается общее решение $y_1 = \varphi_1(x; C_l, C_2, C_3)$, из которого y_2 и y_3 находятся уже без интегрирований на основе упомянутых равенств.

Систему уравнений любого порядка можно преобразовать в систему уравнений первого порядка с помощью обозначений, аналогичных (5.60). Например, система двух уравнений, третьего порядка относительно одной неизвестной функции и второго порядка относительно другой, эквивалентна системе из пяти уравнений первого порядка с пятью неизвестными функциями; общее решение в этом примере содержит пять произвольных постоянных.

12. Геометрический смысл системы уравнений первого порядка.

Рассмотрим для простоты случай системы из двух уравнений первого порядка **с** двумя неизвестными функциями $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0. \end{array}\right\} \qquad (5.63)$$

Если эту систему до интегрирования удастся разрешить относительно y' и y'_2, то она примет более простой вид

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(x,\ y_1,\ y_2), \\ y_2' &= f_2(x,\ y_1,\ y_2); \end{aligned}\right\} \tag{5.64}$$

тогда говорят, что система записана в *нормальной форме.*

Решением системы (5.63) или, что то же, (5.64) называется, конечно, *пара* функций

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \tag{5.65}$$

обращающая *оба* уравнения в тождества. В соответствии с п. 11 в *общее решение* входят две произвольные постоянные, т. е. оно имеет вид

$$y_1 = y_1(x;\ C_1,\ C_2), \quad y_2 = y_2(x;\ C_1,\ C_2).$$

Система уравнений (5.64) и ее решения (5.65) имеют простой геометрический смысл, для выяснения которого надо рассмотреть трехмерное пространство $x,\ y_1,\ y_2$. Тогда формулы (5.65) определят линию в параметрическом виде , причем здесь параметром служит сам x (можно дописать равенство $x=x$); она называется *интегральной линией* системы уравнений (5.64). Если для произвольной точки M в пространстве (рис.5.12) подсчитать значения правых частей системы (5.64), то мы будем знать направления касательных к линиям $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$, т. е. к проекциям интегральной линии, и тем самым сможем узнать направление касательной к самой интегральной линии, если она проходит через M. Значит, система (5.64) задает *поле направлений в пространстве* $x,\ y_1,\ y_2$, а интегральная линия — это линия, в каждой своей точке идущая «вдоль поля», т. е. линия, в каждой точке которой касательная имеет направление, заданное этим полем (ср. с п. 3).

В системе (5.64) переменные y_1 и y_2 равноправны, а переменная x имеет иное значение. Бывает, что все три переменные равноправны, так что любую из них можно принять за независимую; тогда систему уравнений предпочитают записывать в *симметричной форме,* например.

$$\frac{dx}{P(x,\ y,\ z)} = \frac{dy}{Q(x,\ y,\ z)} = \frac{dz}{R(x,\ y,\ z)}. \tag{5.66}$$

От формы (5.66) легко перейти к форме (5.64) и наоборот.

Грометпический смысл системы (5.66) аналогичен описанному выше. Так как вектор

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

в любой заданной точке $M\ (x;\ y;\ z)$ в силу соотношений (5.66) должен быть параллелен известному вектору

$$P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

то задача об интегрировании системы (5.66)—это задача о построении линий в пространстве, имеющих в каждой своей точке заданное направленно. Из геометрического смысла системы (5.64) вытекает, что для однозначного определения интегральной линии надо задать точку $M_0(x_0;\ y_{10};\ y_{20})$ в пространстве, через которую эта линии должна пройти. Другими словами, *начальное условие*

$$y_1(x_0)=y_{10},\quad y_2(x_0)=y_{20}$$

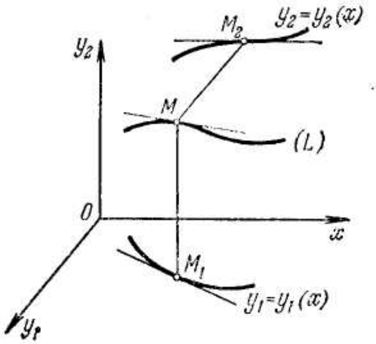


Рис.5.12.
(L) — интегральная линия.

однозначно определяет решение системы (5.64). Конечно, как и в п. 7, и здесь возможны особые точки и особые линии, которые распознаются в общем подобно п. 7. В частности, *для системы* (5.66) *особой точкой является всякая точка, в которой все три знаменателя обращаются в нуль,* т. е. вектор

$$P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$$

обращается в нуль-вектор, не имеющий определенного направления.

Система первого порядка в нормальной форме с любым числом уравнений имеет общий вид

$$\left.\begin{array}{l} y_1'=f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ y_2'=f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n'=f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n). \end{array}\right\} \tag{5.67}$$

Решение ее — это система функций

$$y_1=y_1(x),\quad y_2=y_2(x),\ \ldots,\ y_n=y_n(x). \tag{5.68}$$

Общее решение содержит *n* произвольных постоянных.

Для однозначного определения частного решения можно задать начальное условие

$$y_1(x_0)=y_{10};\quad y_2(x_0)=y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0)=y_{n0}. \tag{5.69}$$

Коши доказал, что условиям (5.69) удовлетворяет ровно одно решение системы (5.67), если при значениях $x = x_0$, $y_1= y_{10}$, ..., $y_n=y_{n0}$ правые части системы (5.67) непрерывны, а их производные по переменным y_l, y_2, ... , y_n конечны.

Геометрический смысл системы (5.67), решения (5.68) и условий (5.69) — это соответственно поле направлений, интегральная линия и точка, через которую должна пройти эта линия в (n+1)-мерном пространстве x, y_1, y_2, ..., y_n .

Если правые части системы (5.67) не содержат независимой переменной x, то эта система называется *автономной;* оказывается, что ее решения удобнее рассматривать в n-мерном пространстве y_1, y_2, ... , y_n называемом *фазовым пространством.* Мы ограничимся для простоты случаем $n = 2$, будем обозначать независимую переменную буквой t и *истолковывать ее как время,* а искомые функции взамен y_1, y_2 будем обозначать x, y, так что $x = x(t)$, $y = y(t)$. Вместо (5.67) тогда получится система уравнений

$$\frac{dx}{dt}=P(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,\ y).$$

Если умножить первое уравнение на **i**, второе — на **j**, а затем произвести почленное сложение, мы получим векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{A}(x,\ y)\quad (=\mathbf{A}(\mathbf{r})), \tag{5.70}$$

где

$$\mathbf{A}=P(x,\ y)\,\mathbf{i}+Q(x,\ y)\,\mathbf{j}\text{-}$$

-заданное векторное поле на *фазовой плоскости x, y.* Так как dr/dt — это вектор скорости , то на плоскости x, y оказывается заданным *поле скоростей,* а решение

$$\mathbf{r}(t)=x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}$$

определяет закон движения точки на плоскости, при котором эта точка в каждом своем положении имеет скорость, заданную для этого положения. Несколько вольно можно представлять себе, что уравнение (5.70) задает на фазовой плоскости поток жидкости, а решениям отвечают законы движения частиц этой жидкости. Автономность уравнения (5.70) означает, что рассматриваемый поток стационарный, а потому различные траектории не имеют друг с другом общих точек.

Запишем, например, уравнение (5.4) в виде автономной системы первого порядка

$$\frac{dy}{dt}=v, \quad M\frac{dv}{dt}=-ky; \tag{5.71}$$

здесь y и v—координата и скорость колеблющейся точки. В курсе физики выводится выражение для полной энергии колеблющейся точки

$$E=\frac{Mv^2}{2}+\frac{ky^2}{2} \tag{5.72}$$

При свободных колебаниях без трения энергия должна сохраняться. И действительно, в силу (5.71)

$$\frac{dE}{dt}=Mv\frac{dv}{dt}+ky\frac{dy}{dt}=-kyv+kyv=0;$$

это—математическое доказательство *закона сохранения энергии* в данном примере. Таким образом, E = const для любого решения системы (5.71), т. е. движения в фазовой плоскости y, v происходят по эллипсам, причем разным эллипсам отвечают колебания вокруг положения равновесия с различной амплитудой (рис.5.13).

13. Первые интегралы. Рассмотрим для определенности систему из трех уравнений первого порядка вида (5.62). Всякое соотношение вида

$$\Phi(x,\ y_1,\ y_2,\ y_3;\ C)=0, \tag{5.73}$$

обязанное тождественно удовлетворяться для любого решения системы, называется *первым интегралом* этой системы уравнений; здесь C — постоянная, вообще говоря, различная для различных решений. *Знание первого интеграла дает возможность понизить число уравнений в системе на единицу:* например, если из (5.73) выразить y_3 через все остальное и подставить результат в первые два уравнения (5.62), то получится система из двух уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями y_1 и y_2. Если ее проинтегрировать, т. е. найти $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то $y_3(x)$ можно будет найти без интегрирований из равенства (5.73),

Аналогичным образом знание двух независимых первых интегралов позволяет понизить число уравнений на два, а три независимых первых интеграла (т. е. таких, что ни один из них не является следствием остальных)

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_1(x,\ y_1,\ y_2,\ y_3;\ C_1)=0,\\&\Phi_2(x,\ y_1,\ y_2,\ y_3;\ C_2)=0,\\&\Phi_3(x,\ y_1,\ y_2,\ y_3;\ C_3)=0\end{aligned}\right\}$$

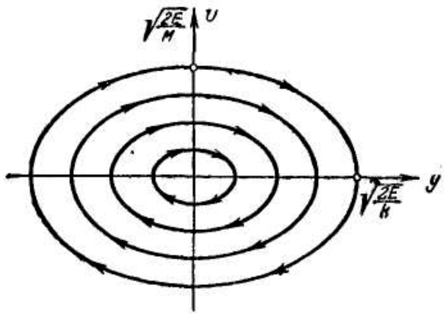


Рис.5.13.

дают общее решение системы (5.62), записанное в неявной форме.

Иногда первые интегралы удается найти, выводя из заданных уравнений системы *интегрируемые комбинации.* Например, для системы .

$$\left.\begin{array}{l} y' = y + z, \\ z' = -y + z \end{array}\right\}$$

легко получить такую комбинацию:

$$yy' + zz' = y(y + z) + z(-y + z) = y^2 + z^2,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}(y^2 + z^2)' = y^2 + z^2, \quad \frac{d(y^2 + z^2)}{y^2 + z^2} = 2dx, \quad \ln(y^2 + z^2) = 2x + \ln C,$$

и окончательно имеем первый интеграл

$$y^2 + z^2 = Ce^{2x}.$$

Из него видно, например, что при $x \to \infty$ решение уходит в бесконечность, а при $x \to -\infty$ решение стремится к нулю; и в других случаях бывает возможно сделать существенные выводы о поведении решений без полного интегрирования системы. Еще один первый интеграл для системы (5.74) можно получить, разделив одно из уравнений (5.74) на другое .

В некоторых случаях первые интегралы подсказываются физическими соображениями, чаще всего теми или иными законами сохранения.

Например, формула (5.72), в которой E играет роль произвольной постоянной С, служит первым интегралом системы (5.71). Выразив из него v через y и подставив результат в первое уравнение (5.71), легко довести интегрирование до конца .

Подчеркнем в заключение, что, как видно из предыдущего, наиболее естественно рассматривать системы, в которых число уравнений равно числу неизвестных функций; такие системы принято называть *замкнутыми.* Если уравнений меньше, чем искомых функций, то система называется *незамкнутой (недоопределенной);* у такой системы избыточное количество неизвестных функций можно задавать произвольно. Чаще всего незамкнутость системы свидетельствует о том, что просто не все необходимые соотношения выписаны. Если уравнений больше, чем неизвестных функций, то система называется *переопределенной;* такая система обычно противоречива, т. е. не имеет решений. Переопределенность системы обычно свидетельствует либо о ее зависимости, т. е. о том, что некоторые из уравнений являются следствиями остальных и потому излишни, либо об ошибке при ее составлении.

5. 4. Линейные уравнения общего вида

14. Линейные однородные уравнения. Исследование линейных уравнений любого порядка во многом аналогично исследованию линейных уравнений первого порядка (п. 4), хотя теперь уже получить решение в квадратурах в общем случае не удастся. Рассмотрим сначала для простоты уравнение второго порядка. Уравнение

$$z''+p(x)z'+q(x)z=0, \tag{5.75}$$

левая часть которого линейна относительно неизвестной функции и ее производных, называется *линейным однородным уравнением.*

Обозначим для краткости левую часть уравнения (5.75) через $L[z]$, т. е. в данном случае

$$\mathrm{L}[z]\equiv z''+p(x)z'+q(x)z$$

(по определению).

Тогда уравнение (5.75) можно переписать в виде

$$\mathrm{L}[z]=0.$$

Выражение L $[z]$ обладает следующими свойствами:

$$\mathrm{L}[z_1+z_2]=(z_1+z_2)''+p(x)(z_1+z_2)'+q(x)(z_1+z_2)=$$
$$=(z_1''+p(x)z_1'+q(x)z_1)+(z_2''+p(x)z_2'+q(x)z_2)=\mathrm{L}[z_1]+\mathrm{L}[z_2],$$
$$\mathrm{L}[Cz]=C\mathrm{L}[z] \qquad (C=\text{const})$$

(проверяется аналогично).

О таких выражениях, называемых линейными операторами, мы упоминали в модуле 4 п. 26.

Легко доказать следующие свойства уравнения (5.75).

1. *Сумма решений уравнения* (5.75) *будет решением того же уравнения.* Действительно, если z_1 и z_2—два таких решения, т. е.

$\mathrm{L}[z_1]=0$ и $\mathrm{L}[z_2]=0$, то $\mathrm{L}[z_1+z_2]=\mathrm{L}[z_1]+\mathrm{L}[z_2]=0.$

Аналогично проверяется свойство 2:

2. *Если решение уравнения* (5.75) *умножить на константу, то получится решение того же уравнения.*

Свойства 1 и 2 можно объединить так: линейная комбинация решений уравнения (5.75) будет решением того же уравнения. Например, если $z_1(x)$ и $z_2(x)$ удовлетворяют уравнению (5.75), то и

$$z=C_1z_1(x)+C_2z_2(x) \tag{5.76}$$

удовлетворяет тому же уравнению при любых постоянных C_1, C_2.

3. *Тождественно нулевая функция удовлетворяет уравнению* (11.75).

4. *Если известно ненулевое решение уравнения* (5.75), *то его порядок можно понизить на единицу.* Действительно, пусть $z_1(x)$ — такое решение; сделаем подстановку $z = z_1u$, где $u= u(x)$ — новая неизвестная функция. Получим

$$(z_1''u+2z_1'u'+z_1u'')+p(z_1'u+z_1u')+qz_1u=0,$$

т. е.

$$z_1u''+(2z_1'+pz_1)u'+(z_1''+pz_1'+qz_1)u=0.$$

Но так как $\mathrm{L}[z_1]=0$, то последний член отпадает и после подстановки $u'=v$ получаем

$$z_1v'+(2z_1'+pz_1)v=0,$$

т. е. линейное однородное уравнение на единицу низшего, чем было, порядка.

Доведем интегрирование до конца:

$$\frac{dv}{v}=-\frac{2z_1'+pz_1}{z_1}dx,\quad \ln|v|=-2\ln|z_1|-\int p(x)\,dx+\ln C_2,$$

$$v=\frac{C_2}{z_1^2}e^{-\int p(x)\,dx},\quad u=C_2\int\frac{1}{z_1^2}e^{-\int p(x)\,dx}dx+C_1,$$

$$z=C_1z_1+C_2z_1\int\frac{1}{z_1^2}e^{-\int p(x)\,dx}dx. \tag{5.77}$$

Функция, при которой стоит множитель C_2, является одним из частных решений уравнения (5.75), так как она получается из общего решения (5.77), если положить $C_1=0$, $C_2=1$. Поэтому если обозначить ее через z_2, то мы приходим к свойству 5:

5. *Общее решение уравнения* (5.75) *имеет вид* (5.76), где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а z_1 и z_2 — два частных решения этого уравнения.

В этом свойстве *в качестве* z_1, z_2 *могут быть взяты только два линейно независимых решения,* а не любая пара решений. Понятие линейной зависимости функций вводится подобно аналогичному понятию для векторов, а именно: несколько функций называются *линейно зависимыми* друг от друга, если одна из них является линейной комбинацией остальных. В частности, две функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$ линейно зависимы, если $z_2(x)\equiv Cz_1(x)$, т. е. если они пропорциональны. Тогда формула (5.76) не дает общего решения, так как

$$C_1z_1+C_2z_2\equiv C_1z_1+C_2Cz_1\equiv (C_1+C_2C)\,z_1(x)=Dz_1(x),$$

где $D = C_1+C_2C$— постоянная; значит, хотя формально справа имеются две произвольные постоянные, но они не являются существенными, т. е. их число можно уменьшить на единицу .

Все указанные свойства справедливы и для линейного однородного уравнения любого порядка

$$z^{(n)}+p(x)\,z^{(n-1)}+q(x)\,z^{(n-2)}+\ldots+s(x)\,z=0, \tag{5.78}$$

за тем исключением, что общее решение взамен (5.76), имеет вид

$$z=C_1z_1(x)+C_2z_2(x)+\ldots+C_nz_n(x). \tag{5.79}$$

Здесь все C — произвольные постоянные, а $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — какие-либо линейно независимые решения уравнения (5.78). Совокупность n линейно независимых решений уравнения (5.78) порядка n называется *фундаментальной системой решений.* Таким образом, *общее решение уравнения* (5.78) *есть линейная комбинация решений из фундаментальной системы с произвольными коэффициентами.* Можно сказать, что *совокупность всех решений уравнения* (5.78) *образует n-мерное линейное пространство; фундаментальная система решений — это базис в этом пространстве.*

Отметим в заключение, что у уравнения (5.78) можно понизить порядок на единицу по методу п. 10 (тип 4), но это делают редко, так как после понижения порядка уравнение становится нелинейным.

15. Неоднородные уравнения. Рассмотрим теперь *линейное неоднородное уравнение*

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x). \tag{5.80}$$

В соответствии с п. 14 обозначим левую часть через $L[y]$.

1. *Знание какого-либо частного решения уравнения* (5.80) *позволяет свести задачу об интегрировании этого уравнения к задаче об интегрировании соответствующего* (т. е. с отброшенной правой частью) *однородного уравнения* (5.75).

Действительно, если $Y(x)$— такое решение, то, сделав замену

$$y = Y(x) + z, \tag{5.81}$$

где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция, получим

$$\mathrm{L}[Y+z] = f(x), \quad \mathrm{L}[Y] + \mathrm{L}[z] = f(x).$$

Однако

$$[Y] = f(x)$$

и мы получаем уравнение (5.75) для z.

Итак, *общее решение линейного неоднородного уравнения* (5.80) *есть сумма какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения* (ср. с решением линейного уравнения в п. 4).

2. *Если правая часть $f(x)$ равна линейной комбинации, например двух функции, т. е.*

$$f(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \quad (\alpha,\ \beta = \mathrm{const}),$$

и известны какие-либо частные решения $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ уравнения (5.80) *с правыми частями $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то функция*

$$Y(x) = \alpha Y_1(x) + \beta Y_2(x)$$

служит частным решением уравнения (5.80) *с правой частью $f(x)$.*

3. *Если известно общее решение однородного уравнения* (5.75), *то общее решение уравнения* (5.80) *можно найти с помощью квадратур.* Это делается с помощью найденного Лагранжем *метода вариации, произвольных постоянных* следующим образом. Как мы знаем, общее решение уравнения (5.75) имеет вид (5.76). По аналогии с формулой (5.22) мы ищем решение уравнения (5.80) в виде

$$y = \varphi_1(x)\,z_1(x) + \varphi_2(x)\,z_2(x), \tag{5.82}$$

где φ_1, φ_2— некоторые неизвестные пока функции. Так как их две, а уравнение (5.80) одно, то для нахождения этих функций мы наложим на них еще одно дополнительное соотношение ((5.84)). Дифференцируя равенство (5.82), получим

$$y' = (\varphi_1 z_1' + \varphi_2 z_2') + (\varphi_1' z_1 + \varphi_2' z_2). \qquad (5.83)$$

Потребуем, чтобы вторая скобка обратилась в нуль:

$$\varphi_1' z_1 + \varphi_2' z_2 = 0. \qquad (5.84)$$

Тогда при дифференцировании равенства (5.83) надо принимать во внимание только первую скобку, т. е.

$$y'' = (\varphi_1 z_1'' + \varphi_2 z_2'') + (\varphi_1' z_1' + \varphi_2' z_2'). \qquad (5.85)$$

Подставляем все полученные результаты (5.82), (5.83) и (11.85) в уравнение (5.80), конечно, не выписывая нулевой суммы. Это даст

$$\varphi_1 (z_1'' + p z_1' + q z_1) + \varphi_2 (z_2'' + p z_2' + q z_2) + (\varphi_1' z_1' + \varphi_2' z_2') = f(x).$$

Поскольку функции z_1, z_2 удовлетворяют уравнению (5.75), то в последнем уравнении первые две скобки отпадают и оно превращается в равенство

$$\varphi_1' z_1' + \varphi_2' z_2' = f(x). \qquad (5.86)$$

Итак, для нахождения φ_1, φ_2 у нас остались два соотношения: (5.84) и (5.86). Так как z_1, z_2 и $f(x)$ считаются известными, то получается система двух алгебраических уравнений первой степени с двумя не-известными: φ'_1, φ'_2. Решая систему, мы находим эти неизвестные, а интегрируя, находим φ_1, φ_2 .

Рассмотрим, например, простейшее *уравнение вынужденных колебаний,* которое получится, если в правой части уравнения (5.3) добавить внешнюю силу $P(t)$. Разделив обе части уравнения на M, получим

$$y'' + \omega_0^2 y = f(t), \qquad (5.87)$$

где обозначено

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M}, \; f(t) = \frac{P(t)}{M}.$$

Соответствующее однородное уравнение

$$z'' + \omega_0^2 z = 0 \qquad (5.88)$$

имеет, как легко непосредственно проверить, два решения, $z_1 = \cos \omega_0 t$, $z_2 = \sin\omega_0 t$, и тем самым общее решение

$$z = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \qquad (5.89)$$

Отсюда видно, в частности, что ω_0 — это *собственная частота* колебаний рассматриваемой системы, т. е. частота колебаний при отсутствии внешних сил.

Согласно формуле (5.82) решение уравнения (5.87) ищем в виде

$$y = \varphi_1(t) \cos \omega_0 t + \varphi_2(t) \sin \omega_0 t. \qquad (5.90)$$

Тогда уравнения (5.84) и (5.86) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1' \cos \omega_0 t + \varphi_2' \sin \omega_0 t = 0, \\ &\varphi_1' (-\omega_0 \sin \omega_0 t) + \varphi_2' \omega_0 \cos \omega_0 t = f(t). \end{aligned}\right\}$$

Отсюда непосредственно находим

$$\varphi_1'(t) = -\frac{1}{\omega_0} f(t) \sin \omega_0 t, \quad \varphi_2'(t) = \frac{1}{\omega_0} f(t) \cos \omega_0 t.$$

При интегрировании здесь неудобно воспользоваться неопределенным интегралом из-за наличия в нем неуточняемой произвольной постоянной; лучше нижний предел интеграла зафиксировать, например, положив его равным моменту $t = 0$ начала отсчета времени:

$$\varphi_1(t) = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^t f(t) \sin \omega_0 t \, dt + C_1,$$

где C_1— произвольная постоянная. Поскольку в правой части t имеет два смысла — переменная интегрирования и верхний предел, то лучше воспользоваться независимостью определенного интеграла от обозначения переменной интегрирования и написать

$$\varphi_1(t) = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_0 \tau \, d\tau + C_1;$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t f(\tau) \cos \omega_0 \tau \, d\tau + C_2.$$

Подставляя в (5.90), получим

$$y = -\frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t \int_0^t f(\tau) \sin \omega_0 \tau \, d\tau +$$
$$+ \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \int_0^t f(\tau) \cos \omega_0 \tau \, d\tau + C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

Теперь внесем $\cos \omega_0 t$ и $sin\omega_0 t$ под знак интеграла (этого нельзя было бы сделать, не переменив обозначения переменной интегрирования t на τ) и объединим оба интеграла:

$$y = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t [-f(\tau) \cos \omega_0 t \sin \omega_0 \tau + f(\tau) \sin \omega_0 t \cos \omega_0 \tau] \, d\tau +$$
$$+ C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

Отсюда получаем общее решение уравнения (5.87):

$$y = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 (t - \tau) f(\tau) \, d\tau + C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \tag{5.91}$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 можно определить, например, из начальных условий

$$y(0)=y_0, \quad y'(0)=v_0. \tag{5.92}$$

Подставляя в обе части (5.91) значение $t = 0$, получим $y_0 = C_1$. Чтобы использовать второе условие (5.92), надо продифференцировать равенство (5.91) по t, после чего подставить $t = 0$. При дифференцировании интеграла надо иметь в виду, что t входит в него дважды, т. е.

$$y'=\frac{1}{\omega_0}\int_0^t \omega_0\cos\omega_0(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+$$

$$+\left[\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0(t-\tau)f(\tau)\right]_{\tau=t}-C_1\omega_0\sin\omega_0 t+C_2\omega_0\cos\omega_0 t=$$

$$=\int_0^t \cos\omega_0(t-\tau)f(\tau)\,d\tau-C_1\omega_0\sin\omega_0 t+C_2\omega_0\cos\omega_0 t;$$

$$v_0=C_2\omega_0; \quad C_2=\frac{v_0}{\omega_0}.$$

Отсюда решение уравнения (5.87) при начальных условиях (5.92)

$$y=\frac{1}{\omega_0}\int_0^t \sin\omega_0(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+y_0\cos\omega_0 t+\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

Все указанные свойства справедливы и для уравнения

$$y^{(n)}+p(x)\,y^{(n-1)}+q(x)\,y^{(n-2)}+\ldots+s(x)\,y=f(x). \tag{5.93}$$

Метод вариации произвольных постоянных будет выглядеть так: в формулу (5.79) вместо C_1, C_2, . .., C_n надо подставить $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,... ..., $\varphi_n(x)$, после чего последовательно дифференцировать эту формулу, приравнивая на каждом шаге, вплоть до (n—1)-го, получающуюся группу членов с φ'_k нулю; n-е соотношение получится из подстановки всех полученных выражений в (5.93).

4. *Любое решение уравнения* (5.78), *а также* (5.93) *можно продолжить на любой интервал, на котором коэффициенты и правая часть не обращаются в бесконечность.* Для нелинейных уравнений может получиться, что решение или его производные при таком продолжении уходят в бесконечность для конечного значения x. Простым примером этого служит уравнение (5.38) при $\alpha > 1$ (рис. 5.7): здесь с ростом y поле направлений так быстро увеличивает крутизну, что интегральная линия поднимается в бесконечность, пройдя лишь конечное расстояние вдоль оси x. В отличие от этого для линейного уравнения,

например, вида $y' = My$ решение $y = Ce^{Mx}$ не может уйти в бесконечность при конечном x.

16. Краевые задачи. До сих пор, для того чтобы выделить частное решение из общего, мы пользовались начальными условиями, согласно которым искомая функция и ее производные задаются при каком-либо одном значении аргумента. Имеются и другие способы выделения частного решения из общего, которые встречаются в практических задачах. Все эти способы объединяет то, что количество дополнительных равенств, накладываемых на искомое решение, должно равняться числу степеней свободы в общем решении рассматриваемого уравнения, т. е. порядку этого уравнения.

Эти дополнительные равенства в случае уравнения (5.5) порядка n можно записать в виде

$$G_k[y] = \alpha_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{5.94}$$

где $G_k\,[y]$— какая-либо заданная комбинация значений искомой функции $y(x)$ и ее производных при, вообще говоря, различных значениях аргумента (точнее, $G_k\,[y]$—это какой-либо заданный *функционал,* а α_k—заданные числа. Например, в случае начальных условий (5.11) $G_k\,[y]$ означает $y^{(k-1)}(x_0)$.

Если известно общее решение (5.8) заданного уравнения, то для нахождения требуемого частного решения надо выражение для общего решения подставить в условия (5.94), в результате чего получится система n уравнений с n неизвестными $C_1; C_2, \ldots, C_n$.

Если

$$G_k\,[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1G_k\,[y_1] + C_2G_k\,[y_2] \qquad (C_1,\ C_2 = \text{const}),$$

то условия (5.94) называются *линейными;* если к тому же все $\alpha_k = 0$, то они называются *линейными однородными.* Если какие-нибудь функции, не обязательно решения дифференциального уравнения, удовлетворяют линейным однородным условиям, то и их любая линейная комбинация тоже удовлетворяет этим условиям. Действительно, если, например, $G_k[y_1]=0$ и $G_k[y_2]=0$, то

$$G_k\,[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1G_k\,[y_1] + C_2G_k\,[y_2] = C_1\cdot 0 + C_2\cdot 0 = 0.$$

Разность двух функций, удовлетворяющих одинаковым неоднородным линейным условиям, удовлетворяет соответствующим однородным условиям .

В дальнейшем мы рассмотрим решение уравнения

$$y'' + p\,(x)\,y' + q\,(x)\,y = f\,(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{5.95}$$

при дополнительных условиях

$$y(a)=\alpha_1, \quad y(b)=\alpha_2, \qquad (5.96)$$

хотя *все полученные общие выводы справедливы для линейных дифференциальных уравнений любого порядка п при линейных дополнительных условиях* (5.94) *любого вида.* Интервал (a, b), а также функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ будем считать конечными, что дает возможность считать любое решение продолженным на весь этот интервал, включая концы (п. 15, свойство 4). Условия вида (5.96), наложенные на концах интервала, в котором строится решение, называются *краевыми условиями,* а задача о решении дифференциального уравнения при заданных краевых условиях называется *краевой задачей.*

Для решения краевой задачи мы исходим из вида общего решения уравнения (5.95)

$$y(x)=Y(x)+C_1z_1(x)+C_2z_2(x) \qquad (5.97)$$

(п. 15, свойство 1), где $Y(x)$ — некоторое частное решение уравнения (5.95), а z_1 и z_2— два линейно независимых решении соответствующею однородного уравнения. Подставляя формулу (5.97) в условия (5.96), получим два соотношения для нахождения C_1 и C_2:

$$\left.\begin{aligned} C_1z_1(a)+C_2z_2(a)=\alpha_1-Y(a),\\ C_1z_1(b)+C_2z_2(b)=\alpha_2-Y(b). \end{aligned}\right\} \qquad (5.98)$$

При решении этой системы двух алгебраических уравнений первой степени с двумя неизвестными могут представиться два случая .

1. *Основной случай:* определитель системы отличен от нуля. И этом случае система (5.98) имеет вполне определенное решение и потому *уравнение* (5.95) *при условиях* (5.96) *имеет одно и только одно решение при любом неоднородном члене $f(x)$ и любых числах* α_1; α_2.

2. *Особый случай:* определитель системы равен нулю. В этом случае система (5.98), как правило, противоречива, но при некоторых правых частях она имеет бесконечное количество решений. Значит, и *уравнение* (5.95) *при условиях* (5.96) *при произвольном выборе функции $f(x)$ и чисел* α_1, α_2 *как правило, не имеет ни одного решения; однако при некоторых таких выборах задача имеет бесконечное количество решений.* Например, можно проверить, что если $f(x)$ и α_1, уже выбраны, то бесконечное количество решений получится лишь при одном значении α_2, а при остальных значениях задача не будет иметь ни одного решения.

Подчеркнем, что то, какой именно случай имеет место, зависит от вида левых частей уравнения (5.95) и условий (5.96).

Для того чтобы имел место основной случай, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная задача, в которой положено $f(x)\equiv 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, *имела только нулевое решение.* В особом случае однородная задача имеет бесконечное количество решений, а если неоднородная задача имеет хотя бы одно решение, то общее решение получится, если к этому частному решению прибавить общее решение соответствующей однородной задачи.

При решении начальной задачи, т. е. задачи Коши, всегда имеет место основной случай, так как такое решение всегда существует и единственно. При решении краевой задачи может представиться и особый случай.

Например, рассмотрим задачу с параметром λ = const,

$$y'' + \lambda y = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \qquad y(0) = \alpha_1, \qquad y(l) = \alpha_2, \tag{5.99}$$

причем будем считать сначала, что $\lambda > 0$. Тогда линейно независимыми решениями соответствующего однородного дифференциального уравнения служат функции

$$z_1(x) = \cos \sqrt{\lambda}\, x, \quad z_2(x) = \sin \sqrt{\lambda}\, x$$

и определитель системы (5.98) равен

$$\begin{vmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1(l) & z_2(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\lambda}\, l & \sin \sqrt{\lambda}\, l \end{vmatrix} = \sin \sqrt{\lambda}\, l.$$

Приравнивая его нулю, получим значения

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2, \quad \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2, \quad \left(\frac{3\pi}{l}\right)^2, \ldots, \tag{5.100}$$

при которых для задачи (5.99) имеет место особый случай, т. е. нарушается либо существование, либо единственность решения.

Набор значений параметра, входящего в формулировку задачи, при которых задача в том или ином смысле вырождается, называется *спектром* этой задачи. При $\lambda \leq 0$ для задачи (5.99) всегда имеет место основной случай и тем самым набор значений (5.100) представляет собой ее спектр.

Полученный результат имеет важное приложение к исследованию устойчивости упругого стержня при его сжатии. Пусть однородный (одинаковый по всей длине) упругий невесомый стержень расположен вдоль оси *x* и сжимается вдоль нее силой *P,* причем оба конца стержня удерживаются на оси *x,* но могут свободно вращаться вокруг точек закрепления (рис, 5.14, а). Тогда при достижении силой некоторого *критического* *значения* $P_{кр}$ стержень выпучивается, принимая положение, изображенное на рис. 5.14, *б*. Если обозначить через *у* поперечное отклонение точки стержня от ее исходного положения то, как доказывается в курсах сопротивления материалов, функция *у (х)* с достаточной точностью удовлетворяет дифференциальному уравнению и краевым условиям:

$$y'' + \frac{P}{EJ} y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0; \tag{5.101}$$

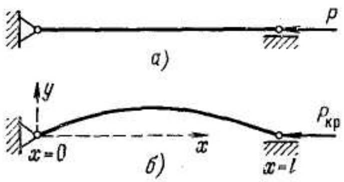


Рис.5.14.

здесь *Е* и *J*—так называемые *модуль Юнга* и *момент инерции* поперечного сечения стержня. Как вытекает из (5.100), при

$$\frac{P}{EJ} < \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \tag{5.102}$$

для задачи (5.101) имеет место основном случай, т. е. она имеет только нулевое решение; выпучивания не происходит. Как только с увеличением *Р* неравенство (5.102) переходит в равенство, то наступает особый случай и задача (5.101) наряду с нулевым решением приобретает решение вида $y = C \sin(\pi/l)x$, где *С* — произвольная постоянная. Но тогда стержень ничем не удерживается в прямолинейном состоянии и как угодно малые внешние воздействия могут привести к конечным отклонениям от этого состояния: стержень *теряет устойчивость*. Получающееся выражение для $P_{кр}$

$$P_{кр} = EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$$

было найдено Эйлером . Могло бы показаться, что при $P > P_{кр}$ стержень должен опять выпрямиться. Однако это не так. Уравнение (5.101) описывает отклонение стержня точно лишь в пределе при малых отклонениях, а анализ более точного нелинейного уравнения, справедливого при любых отклонениях, показывает, что при переходе Р через $P_{кр}$ наряду с неустойчивой прямолинейной возникает искривленная форма равновесия, которая и является устойчивой. С ростом *Р* кривизна этой формы быстро возрастает и стержень разрушается.

К решению неоднородного уравнения при однородных краевых условиях

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=f(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b),\quad y(a)=0,\quad y(b)=0, \tag{5.103}$$

в основном (неособом) случае можно применить функцию влияния . Действительно, функцию $f(x)$ можно истолковать как «внешнее воздействие», а $y(x)$ — как его результат, т. е. $y(x)=f\,(x)$. При этом имеет место принцип суперпозиции.

Если через $G(x;\xi)$ обозначить решение задачи (5.103), в которой вместо $f\ (x)$ взята дельта-функция $\delta(x\text{-}\xi)$, то при произвольной функции $f(x)$ решение задачи (5.103) получится по формуле

$$y(x)=\int_a^b f(\xi)\,G(x;\ \xi)\,d\xi. \tag{5.104}$$

Приведем простой пример. Пусть рассматривается задача

$$y''=f(x)\quad (0\leqslant x\leqslant l),\quad y(0)=y(l)=0. \tag{5.105}$$

Если взамен $f(x)$ поставить $\delta(x\ \text{-}\xi)$, то при $0\leq x<\xi$ п при $\xi<x\leq l$ получаем просто $y''=0$, т. е. решение

$$y=ax+b\quad (0\leqslant x<\xi),\quad y=cx+d\quad (\xi<x\leqslant l),$$

где $a,\ b,\ c,\ \ d$— какие-то постоянные. Применение краевых условий показывает, что $b=0$ и $cl+d=0$, т. е.

$$y=ax\quad (0\leqslant x<\xi),\quad y=c\,(x-l)\quad (\xi<x\leqslant l). \tag{5.106}$$

Если равенство

$$y''=\delta\,(x-\xi)$$

проинтегрировать от

$$x=\xi-0 \text{ до } x=\xi+0,$$

то получится, что

$$y'\,(\xi+0)-y'\,(\xi-0)=1;$$

кстати, для левой части уравнения (5.103) получился бы такой же результат, так как интегрирование конечной функции по отрезку нулевой длины дает нуль. При вторичном интегрировании дельта-функции получается уже непрерывная функция (модуль 4, п. 25), так что

$$y\,(\xi-0)=y\,(\xi+0),$$

и из (4.106) получаем

$$c-a=1,\ \ a\xi=c\,(\xi-l)$$

, откуда

$$a=-\frac{l-\xi}{l},\quad c=\frac{\xi}{l}\,.$$

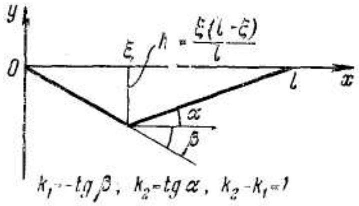


Рис.5.15.

Подставляя в (5.106), находим функцию влияния для задачи (5.105):

$$G(x,\ \xi)=\begin{cases} -\dfrac{(l-\xi)\,x}{l} & (0\le x<\xi);\\ -\dfrac{\xi\,(l-x)}{l} & (\xi<x\le l).\end{cases}$$

Эта функция изображена па рис. 5.15. В силу формулы (5.104) получаем решение задачи (5.105) при любой функции *f (x):*

$$y=\int_0^l G(x;\ \xi)\,f(\xi)\,d\xi=\int_0^x G(x;\ \xi)\,f(\xi)\,d\xi+\int_x^l G(x;\ \xi)\,f(\xi)\,d\xi=$$

$$=-\frac{(l-x)}{l}\int_0^x \xi f(\xi)\,d\xi-\frac{x}{l}\int_x^l (l-\xi)\,f(\xi)\,d\xi.$$

5.5. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами составляют важнейший класс уравнений, интегрирование которых сравнительно легко доводится до конца.

17. Однородные уравнения. Рассмотрим для определенности уравнение третьего порядка

$$z'''+a_1z''+a_2z'+a_3z=0\qquad (a_1,\ a_2,\ a_3=\text{const}). \tag{5.107}$$

Эйлер предложил искать частные решения этого уравнения в форме

$$z=e^{px}, \tag{5.108}$$

где p— постоянная, которую нужно подобрать.

Подставляя (5.108) в (5.107), получим, что

$$e^{px}\,(p^3+a_1p^2+a_2p+a_3)=0,$$

и так как первый множитель отличен от нуля, то

$$p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0. \qquad (5.109)$$

Итак, *для того чтобы функция* (5.108) *удовлетворяла уравнению* (5.107),*необходимо и достаточно, чтобы р удовлетворяло уравнению* (5.109). *Алгебраическое* относительно *р уравнение* (5.109) называется *характеристическим уравнением* для уравнения (5.107), а левая часть уравнения (5.109) называется *характеристическим многочленом* для уравнения (5.107). Степень характеристического уравнения равна порядку соответствующего дифференциального уравнения.

Уравнение (5.109) имеет три корня : p_1, p_2, p_3. При этом могут быть различные случаи.

1. *Пусть все корни вещественные и простые,* т. е. различные. Тогда в силу формулы (5.108) мы имеем три частных решения уравнения (5.107)

$$z_1 = e^{p_1x}, \quad z_2 = e^{p_2x}, \quad z_3 = e^{p_3x}.$$

Так как они являются независимыми, т. е. ни одно из них не равно линейной комбинации остальных, то на основе п. 14 общее решение уравнения (5.107) имеет вид

$$z = C_1e^{p_1x} + C_2e^{p_2x} + C_3e^{p_3x}. \qquad (5.10)$$

2. *Пусть все корни простые, но среди них имеются мнимые.* Тогда в правой части формулы (5.110) оказывается комплексная функция от вещественного аргумента. Но вся теория линейных уравнений автоматически распространяется на случай, когда все коэффициенты и решения являются такими функциями. Поэтому *и при указанных корнях уравнения* (5.109) *можно пользоваться формулой* (5.110); конечно, тогда произвольные постоянные будут, вообще говоря, комплексными.

Однако если все рассмотрения производятся над вещественными функциями, то часто предпочитают и ответ получить в вещественной форме. Для этого можно воспользоваться следующим замечанием: *если линейное однородное уравнение с вещественными коэффициентами имеет комплексное частное решение, то его вещественная и мнимая части также являются решениями того же уравнения.* Действительно, если

$$\mathrm{L}[y_1 + iy_2] = 0$$

(см. обозначение в п. 14), то

$$\mathrm{L}[y_1] + i\mathrm{L}[y_2] = 0,$$

откуда

$$[y_1] = 0 \text{ и } \mathrm{L}[y_2] = 0$$

Значит, если коэффициенты уравнения (5.107) вещественные и оно имеет частное решение

$$e^{(r+is)x} = e^{rx}\cos sx + ie^{rx}\sin sx$$

то функции

$$e^{rx}\cos sx, \quad e^{rx}\sin sx \tag{5.111}$$

также служат решениями уравнения (5.107). Если вспомнить , что у алгебраического уравнения с вещественными коэффициентами сопряженные корни присутствуют парами, то получаем, что в рассматриваемом случае 2 корни уравнения (5.109) имеют вид

$$p_1 = r + is, \quad p_2 = r - is \quad (p_3 \text{ — вещественное}),$$

и потому решение можно вместо (5.110) записать в вещественной форме:

$$z = C_1e^{rx}\cos sx + C_2e^{rx}\sin sx + C_3e^{p_3x}. \tag{5.112}$$

Например, для уравнения свободных колебаний (5.88) получаем характеристическое уравнение $p^2+\omega_0^2=0$ с корнями $p_{1,2} = \pm i\omega_0 = 0\pm i\omega_0$ и аналогично формуле (5.112) пишем общее решение

$$z = C_1e^{0t}\cos\omega_0t + C_2e^{0t}\sin\omega_0t,$$

т. е. как раз решение (5.89).

Формулу (5.112) иногда записывают в ином виде, преобразовав

$$C_1\cos sx + C_2\sin sx = M\sin(sx+\alpha),$$

для чего надо положить

$$C_1 = M\sin\alpha, \quad C_2 = M\cos\alpha, \quad M = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}$$

Тогда взамен (5.112) получим

$$z = Me^{rx}\sin(sx+\alpha) + C_3e^{p_3x}, \tag{5.113}$$

где произвольными постоянными являются уже M, α и C_3.

3. *Пусть среди корней характеристического уравнения* (5.109) *имеются кратные, например,* $p_2=p_1$, $p_3\neq p_1$ Тогда формула (5.110) не даст общего решения и в виде (5.108) мы получим лишь два решения,

$$e^{p_1x} \text{ и } e^{p_3x}.$$

Чтобы найти третье решение, рассмотрим сначала случай, когда

$$p_2 = p_1 + \Delta p,$$

причем $|\Delta p|$ мало. Тогда уравнение (5.107) наряду с решением e^{p_1x} имеет решение

$$e^{p_2x}=e^{p_1x}e^{\Delta p\cdot x}=e^{p_1x}\left(1+\Delta p\cdot x+\frac{(\Delta p)^2x^2}{2!}+\dots\right)$$

а потому служат решениями и их линейные комбинации

$$e^{p_2x}-e^{p_1x}=e^{p_1x}\left(\Delta p\cdot x+\frac{(\Delta p)^2x^2}{2!}+\dots\right),$$

$$\frac{e^{p_2x}-e^{p_1x}}{\Delta p}=e^{p_1x}\left(x+\frac{\Delta p\cdot x^2}{2!}+\dots\right). \qquad (5.114)$$

Это деление на Δp дает возможность перейти к пределу при $\Delta p\to 0$. Тогда в правой части все члены, содержащие Δp, отпадут, и потому при $\Delta p=0$, т. е. $p_2=p_1$, решением служит функция xe^{p1x}.

Значит в рассматриваемом случае решением уравнения (5.107) будет

$$z=C_1e^{p_1x}+C_2xe^{p_1x}+C_3e^{p_3x}.$$

Подобным образом в случае $p_1=p_2=p_3$ частными решениями уравнения (5.107) наряду с e^{p_1x} служат функции xe^{p_1x} и $x^2e^{p_1x}$; при доказательстве этого надо взамен (5.114) рассмотреть вторую разделенную разность. Поэтому в данном случае общее решение имеет вид

$$z=C_1e^{p_1x}+C_2xe^{p_1x}+C_3x^2e^{p_1x}.$$

Рассмотрение уравнений любого порядка проходит аналогично. Если какой-либо корень p характеристического уравнения имеет кратность k, то функции

$$e^{px},\ xe^{px},\ \dots,\ x^{k-1}e^{px}$$

будут частными решениями рассматриваемого дифференциального уравнения. Если какая-либо пара корней $r\pm is$ имеет кратность k, то частными решениями будут функции

$$e^{rx}\cos sx,\quad e^{rx}\sin sx,\quad xe^{rx}\cos sx,\quad xe^{rx}\sin sx,\ \dots$$
$$\dots,\ x^{k-1}e^{rx}\cos sx,\ x^{k-1}e^{rx}\sin sx.$$

Итак, практическая трудность при решении линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами состоит единственно в решении соответствующего характеристического уравнения.

В качестве примера рассмотрим свободные колебания материальной точки при линейном законе упругости и при дополнительном *вязком трении,* пропорциональном первой степени скорости. В этом случае в правой части уравнения (5.3) надо добавить слагаемое $-f(dy/dt)$, где f*—коэффициент трения.* После переноса всех членов налево и деления на M получим аналогично (5.88) уравнение

$$z'' + 2hz' + \omega_0^2 z = 0, \quad \text{где} \quad 2h = \frac{f}{M}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{M}. \tag{5.115}$$

При решении характеристического уравнения

$$p^2 + 2hp + \omega_0^2 = 0 \tag{5.116}$$

возникают два основных случая. Если $h < \omega_0$, т. е. если трение сравнительно мало, уравнение (5.116) имеет решение

$$p_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2} = -h \pm i\sqrt{\omega_0^2 - h^2},$$

а потому общее решение уравнения (5.115) имеет вид, подобный (5.113),

$$z(t) = Me^{-ht} \sin(\omega t + \alpha), \quad \text{где} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}.$$

Мы видим, что наличие небольшого трения делает колебания затухающими по экспоненциальному закону (множитель e^{-ht}) и уменьшает частоту (так как $\omega < \omega_0$). График решения показан на рис. 5.16. Нули решения определяются множителем sin ($\omega t + \alpha$) и потому находятся на равном расстоянии друг от друга. Через каждый промежуток времени $T = 2\pi/\omega$, когда синус повторяет свои значения, из

$$e^{-ht}$$

выделяется множитель

$$e^{-h\frac{2\pi}{\omega}},$$

из-за чего происходит затухание. Значение T часто называется «периодом» колебания, хотя $z(t)$ здесь непериодическая функция, так как на каждом следующем «периоде» колебание, не меняясь по форме, уменьшается по размаху в одно и то же число раз.

Если $h > \omega_0$, т. е. если трение сравнительно велико, то уравнение (5.116) имеет вещественные корни, а уравнение (5.115) имеет общее решение

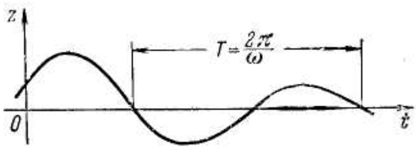


Рис.5.16.

$$z(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} = C_1 e^{-\left(h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}\right)t} + C_2 e^{-\left(h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}\right)t}.$$

При больших t здесь существенно только первое слагаемое, т. е. мы получаем затухание по экспоненциальному закону без колебаний; это — так называемое *апериодическое затухание.*

Теоретически возможен «пограничный случай» $h = \omega_0$. Тогда уравнение (5.116) имеет двойной корень.

18. Неоднородные уравнения с правыми частями специального вида. Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами, например, третьего порядка:

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x) \qquad (a_1,\ a_2,\ a_3 = \text{const}). \tag{5.117}$$

Поскольку соответствующее однородное уравнение всегда решается (п. 17), то в силу п. 15 нам остается лишь найти какое-либо частное решение уравнения (5.117). Для правой части общего вида это делается по методу вариации произвольных постоянных (п. 15). Но для важного довольно широкого класса правых частей специального вида частное решение можно найти значительно быстрее по методу неопределенных коэффициентов. Рассмотрим сначала уравнение

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = Ke^{\lambda x} \qquad (K,\ \lambda = \text{const}). \tag{5.118}$$

Естественно искать частное решение этого уравнения в форме

$$y = Ae^{\lambda x}, \tag{5.119}$$

где постоянная A пока неизвестна. Подстановка в (5.118) даст

$$A\lambda^3 e^{\lambda x} + Aa_1\lambda^2 e^{\lambda x} + Aa_2\lambda e^{\lambda x} + Aa_3 e^{\lambda x} = Ke^{\lambda x},$$

или, после сокращения,

$$A = \frac{K}{\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3}, \qquad y = \frac{K}{P(\lambda)} e^{\lambda x}, \tag{5.120}$$

где через $P(\lambda)$ обозначен характеристический многочлен.

Полученный результат годится, если $P(\lambda) \neq 0$, т. е. если λ не является корнем характеристического уравнения. Если $P(\lambda) = 0$, то функция (5.119) удовлетворяет однородному уравнению (5.107), т. е. уравнению (5.118) удовлетворить в такой форме невозможно.

Пусть

$$P(\lambda) = 0,\ P'(\lambda) \neq 0,$$

т. е. λ является простым корнем характеристического уравнения. Тогда рассуждаем подобно тому, как мы в п. 17 рассматривали случай кратных корней. Заменим в правой части (5.118) λ на

$$\lambda_1 = \lambda + \alpha,$$

где $|\alpha| \neq 0$, но мало.

Тогда в силу формулы (5.120), так как λ_1 уже не будет корнем характеристического уравнения, уравнение (5.118) будет обладать частным решением

$$\frac{K}{P(\lambda_1)}e^{\lambda_1 x}=\frac{K}{P(\lambda+\alpha)}e^{(\lambda+\alpha)x}=\frac{K}{P(\lambda+\alpha)}e^{\lambda x}\left(1+\alpha x+\frac{\alpha^2x^2}{2!}+\dots\right)=$$
$$=\frac{K}{P(\lambda+\alpha)}e^{\lambda x}+K\frac{\alpha}{P(\lambda+\alpha)}e^{\lambda x}\left(x+\frac{\alpha x^2}{2!}+\dots\right).$$

Однако первое из полученных слагаемых удовлетворяет соответствующему однородному уравнению; значит, второе слагаемое также является частным решением уравнения (5.118), в котором λ пока еще заменено на λ_1. Если в этом втором слагаемом перейти к пределу при $\alpha\to 0$, вычислив

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{P(\lambda+\alpha)}$$

по правилу Лопиталя, то мы в пределе получим частное решение уравнения (5.118) при исходном значении λ:

$$y=\frac{K}{P'(\lambda)}xe^{\lambda x}. \tag{5.121}$$

Подобным образом, если λ является двойным корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (5.118) имеет вид

$$y=\frac{K}{P''(\lambda)}x^2e^{\lambda x}$$

и т. д.

С помощью аналогичного, но более громоздкого рассуждения можно доказать, что уравнение

$$y'''+a_1y''+a_2y'+a_3y=Q_m(x)\,e^{\lambda x}, \tag{5.122}$$

где $Q_m(x)$— заданный многочлен степени m, если λ не является корнем характеристического уравнения, обладает частным решением вида

$$y=R_m(x)\,e^{\lambda x}, \tag{5.123}$$

где $R_m(x)$— некоторый другой многочлен степени m. Его можно найти по методу неопределенных коэффициентов, т. е. написать его сначала с буквенными коэффициентами, подставить в (5.122) и найти эти коэффициенты из условия тождественного равенства левой и правой частей. Если же λ является корнем характеристического уравнения кратности k, то имеется частное решение вида

$$y=x^kR_m(x)\,e^{\lambda x}.$$

При этом не исключен случай $\lambda = 0$, когда в правой части уравнения (5.122) стоит «чистый» многочлен.

Можно также рассмотреть уравнение

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = Q_m(x)\, e^{\mu x} \cos \nu x.$$

Так как правую часть можно переписать в виде

$$Q_m(x)\, e^{\mu x} \frac{e^{i\nu x} + e^{-i\nu x}}{2} = \frac{Q_m(x)}{2} e^{(\mu + i\nu)x} + \frac{Q_m(x)}{2} e^{(\mu - i\nu)x},$$

то в силу (5.123) если

$$\lambda = \mu \pm i\nu$$

не является корнем характеристического уравнения, частное решение можно искать в виде

$$y = R_m(x)\, e^{(\mu + i\nu)x} + \tilde{R}_m(x)\, e^{(\mu - i\nu)x} =$$
$$= R_m(x)\, e^{\mu x}(\cos \nu x + i \sin \nu x) + \tilde{R}_m(x)\, e^{\mu x}(\cos \nu x - i \sin \nu x) =$$
$$= [R_m(x) + \tilde{R}_m(x)]\, e^{\mu x} \cos \nu x + [iR_m(x) - i\tilde{R}_m(x)]\, e^{\mu x} \sin \nu x.$$

Вводя новые обозначения, получим частное решение вида

$$y = T_m(x)\, e^{\mu x} \cos \nu x + S_m(x)\, e^{\mu x} \sin \nu x, \tag{5.124}$$

где

$T_m(x)$ и $S_m(x)$

— многочлены степени *m,* которые можно найти по методу неопределенных коэффициентов. В виде (5.124) ищутся частные решения уравнений и с правыми частями

$$Q_m(x)\, e^{\mu x} \sin \nu x, \quad Q_m(x)\, e^{\mu x} \cos(\nu x + \alpha),$$
$$Q_m(x)\, e^{\mu x} \sin(\nu x + \alpha) \qquad (\alpha = \mathrm{const}).$$

Если

$$\lambda = \mu \pm i\nu$$

является корнем характеристического уравнения кратности k, то правую часть формулы (5.124) надо умножить еще на x^k.

Рассмотрим, например, уравнение вынужденных колебаний (5.87) при синусоидальном внешнем воздействии с частотой ω:

$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin \omega t. \tag{5.125}$$

Согласно формуле (5.124), если

$$\lambda = \pm i\omega$$

не является корнем характеристического уравнения, т. е. если $\omega \neq \omega_0$, то частное решение надо искать в виде

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Подстановка в уравнение (5.125) дает

$$-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t + A\omega_0^2 \cos \omega t + B\omega_0^2 \sin \omega t = K \sin \omega t.$$

Так как это равенство должно быть тождеством, то

$$-A\omega^2 + A\omega_0^2 = 0, \quad -B\omega^2 + B\omega_0^2 = K,$$

откуда

$$A = 0, \quad B = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad y = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t. \tag{5.126}$$

Общее решение уравнения (5.125) получится, если добавить общее решение (5.89) соответствующего однородного уравнения. Итак, если частота внешнего воздействия не равна собственной частоте колебаний, то получается наложение двух гармонических колебаний. Одно, обычно называемое *вынужденным,* происходит с частотой внешнего воздействия и имеет вполне определенные амплитуду и начальную фазу; другое происходит с собственной частотой, и его амплитуда и начальная фаза зависят от начальных данных.

Из формулы (5.126) видно, что если ω близко к ω_0, то амплитуда вынужденного колебания становится очень большой. Если же $\omega = \omega_0$, то согласно общей теории частное решение уравнения (5.125) надо искать в форме

$$y = At \cos \omega_0 t + B t \sin \omega_0 t.$$

Подсчет дает

$$y = -\frac{K}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t;$$

это можно вывести также из (5.126) аналогично формуле (5.121).

Мы видим, что если частота внешнего воздействия равна собственной частоте колебаний, то амплитуда вынужденного колебания возрастает по линейному закону. Это важное явление хорошо известно в физике и технике и называется *резонансом.*

19. Уравнение Эйлера. Так называется линейное уравнение вида

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b) y' + a_n y = f(x),$$

в котором все коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ постоянны.

Уравнение Эйлера легко приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной

$$|ax+b| = e^t, \qquad t = \ln|ax+b|.$$

Будем для простоты считать, что $ax+b > 0$, а уравнение однородно и имеет второй порядок:

$$(ax+b)^2 y'' + a_1 (ax+b) y' + a_2 y = 0. \tag{5.127}$$

После замены независимой переменной получим

$$ax+b=e^t, \qquad t=\ln(ax+b),$$
$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot ae^{-t};$$
$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}ae^{-t}-\frac{dy}{dt}ae^{-t}\right)ae^{-t}. \tag{5.128}$$

Подставим эти результаты в уравнение (5.127):

$$a^2\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+a_1a\frac{dy}{dt}+a_2y=0.$$

Это — уравнение с постоянными коэффициентами, которое надо решать по методам п.17, т.е. положить

$$y=e^{pt}, \tag{5.129}$$

решить характеристическое уравнение и т. д., после чего вернуться от t к x.

Можно не делать замены (5.128), заметив, что из (5.128) и (5.129) следует

$$y=(ax+b)^p. \tag{5.130}$$

Поэтому можно путем непосредственной подстановки в (5.127) искать частные решения вида (5.130), причем для нахождения p получится характеристическое уравнение, степень которого равна порядку уравнения (5.127). Надо только иметь в виду, что при наличии кратных корней характеристического уравнения, помимо решений вида (5.130), уравнение (5.127) будет обладать решением вида

$$y=te^{pt}=(ax+b)^p\ln(ax+b)$$

и т. д., в зависимости от кратности корня (п. 17, случай 3).

20. Операторы и операторное решение уравнений. В модуле 4 п.26 было определено понятие оператора и были приведены примеры операторов, в том числе оператор дифференцирования D; в п. 14 был введен *дифференциальный оператор* L. Другими распространенными операторами являются: *оператор сдвига* T и *оператор образования разности* Δ, действующие по формулам

$$\mathrm{T}f(x)=f(x+h); \quad \Delta f(x)=f(x+h)-f(x) \tag{5.131}$$

при заданном шаге h; оператор C умножения на заданное число C, в том числе *единичный оператор* 1, оставляющий функции без изменения, и *нулевой оператор* 0, переводящий все функции в тождественно нулевую функцию; оператор умножения на какую-либо заданную функцию и т. п.

Операторы можно складывать друг с другом и умножать на числа по естественному правилу: если A и B—операторы, а α—число, то по определению

$$(A+B)f = Af + Bf, \quad (\alpha A)f = \alpha(Af).$$

Например, из равенств (5.131) видно, что

$$\Delta = T - 1, \quad T = 1 + \Delta.$$

При этом выполняются все аксиомы линейных действий .

Операторы можно умножать друг на друга, что дает новый оператор, действующий по следующему правилу:

$$(AB)f = A(Bf),$$

т. е. на функцию *f* действует сначала оператор B, а затем на результат — оператор A. Нетрудно проверить правила

$$A(BC) = (AB)C, \quad (\alpha A + \beta B)C = \alpha AC + \beta BC \quad (\alpha,\ \beta = \text{const}). \tag{5.132}$$

Однако далеко не всегда AB = BA, т. е. результат выполнения двух операций может зависеть от порядка действий. Если все же AB = BA, то операторы A и B называются *перестановочными {коммутирующими)* друг с другом. Например, все приведенные выше операторы D, T, Δ, C перестановочны друг с другом , так как

$$DTf(x) = D(Tf(x)) = \\ = D(f(x+h)) = f'(x+h), \quad TDf(x) = T(f'(x)) = f'(x+h) \text{ и т. п.}$$

С другой стороны, операторы дифференцирования и умножения на *функцию* неперестановочны.

Первое свойство (5.132) дает возможность взамен написанных там выражений писать просто ABC; получается оператор, состоящий в последовательном применении действий C, B и A. Аналогично определяется оператор ABCD и т. д. Если взять множители равными, то получатся *степени оператора:* A^2, A^3, A^4 и т. д., которые означают результат повторения оператора A Например, $D^2f = f''$; $\Delta^2 f$— это вторая разность и т. п.

Оператор A называется *линейным* , если

$$A(f_1 + f_2) = A(f_1) + A(f_2) \quad \text{и} \quad A(\alpha f) = \alpha A(f) \quad (\alpha = \text{const}). \tag{5.133}$$

Первое свойство можно истолковать как принцип суперпозиции, а второе возможно вывести из первого (модуль 4, п. 26). Поэтому даже если явный вид оператора неизвестен, то при выполнении принципа суперпозиции можно заключить о линейности этого оператора, что дает возможность сделать некоторые полезные выводы, например построить функцию влияния (см. модуль 4, п. 26).

Оба свойства (5.133) можно написать вместе так:

$$A(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha A f_1 + \beta A f_2 \qquad (\alpha,\ \beta = \text{const}).$$

Для линейного оператора А нетрудно проверить свойство

$$A(\alpha B + \beta C) = \alpha AB + \beta AC; \tag{5.134}$$

для этого надо обе части применить к любой функции f и показать, что получится одно и то же, именно,

$$\alpha A(Bf) + \beta A(Cf).$$

Все операторы, приведенные выше в качестве примеров, линейные, так как производная суммы равна сумме производных и т. п. Нелинейными являются, например, операторы возведения функции в квадрат или образования абсолютной величины и т. п. Для линейных операторов в силу (5.132) и (5.134) при линейных действиях и умножении можно пользоваться обычными правилами школьной алгебры, следя за порядком множителей; например,

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

и т. п.

Если к тому же операторы перестановочны, то и порядок множителей несуществен, т. е.

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \text{ и т. п.}$$

Можно рассматривать и степенные ряды от операторов; например,

$$e^{A} = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \tag{5.135}$$

и т. п. Применять такой ряд можно, как и любой оператор, вообще говоря, не ко всем функциям, а только к тем, для которых он имеет смысл. В примере (5.135) это значит, что чем больше взять членов, тем точнее должен получиться результат; совершенно точный результат теоретически получается лишь в пределе, а практически — при достаточно большом числе членов ряда.

Ряд Тейлора

$$f(x + h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots$$

можно записать в виде

$$Tf = \left(1 + \frac{D}{1!}h + \frac{D^2}{2!}h^2 + \dots\right)f = e^{hD}f,$$

откуда мы видим связь между операторами T, Δ и D:

$$T = e^{hD}, \quad \Delta = e^{hD} - 1.$$

Обратная формула

$$D=\frac{1}{h}\ln T=\frac{1}{h}\ln(1+\Delta)=\frac{1}{h}\left(\Delta-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^3}{3}-\ldots\right)$$

— это не что иное, как формула для численного дифференцирования.

Можно рассматривать *операторное уравнение*

$$Ay=f, \tag{5.136}$$

где функция f задана, а функция y ищется. Если решение имеется, то его естественно обозначить $y = A^{-1}f$. Если оператор A линейный, то и уравнение (5.136) называется линейным. На линейные уравнения немедленно распространяются свойства 1—3 п. 14 и свойство 1 п. 15; однако надо иметь в виду, что бывают случаи, когда однородное уравнение имеет бесконечное количество линейно независимых решений, а также случаи, когда неоднородное уравнение не имеет ни одного решения.

Покажем применение оператора дифференцирования к решению *(операторный метод решения)* линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (5.117). Уравнение перепишем в виде

$$(D^3+a_1D^2+a_2D+a_3)\,y=f(x).$$

В левой части в скобках стоит линейный дифференциальный оператор третьего порядка с постоянными коэффициентами. По правилам алгебры разлагаем его на множители:

$$(D-p_1)(D-p_2)(D-p_3)\,y=f(x), \tag{5.137}$$

где p_1, p_2, p_3— корни характеристического уравнения (п. 17). Заметив, что

$$D(e^{-px}y)=(e^{-px}y)'=-pe^{-px}y+e^{-px}y'=e^{-px}(y'-py)=e^{-px}(D-p)\,y$$

и потому

$$(D-p)\,y=e^{px}D(e^{-px}y),$$

перепишем уравнение (5.137) в виде

$$e^{p_1x}D(e^{-p_1x}\,e^{p_2x}D(e^{-p_2x}\,e^{p_3x}D(e^{-p_3x}y)))=f(x).$$

Переноса множители из левой части в правую и пользуясь тем, что равенство Dy = z равносильно

$$y=\int z\,dx,$$

получим общее решение исходного уравнения

$$y=e^{p_3x}\int e^{(p_2-p_3)x}\left(\int e^{(p_1-p_2)x}\left(\int e^{-p_1x}f(x)\,dx\right)dx\right)dx.$$

Конечно, результат получится тот же, что в пп. 15 и 18, хотя подход здесь несколько иной; в более сложных задачах применение операторов может принести существенную пользу. Отметим, что для линейных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами и тем более для нелинейных операторов такое простое разложение *(факторизацию)* оператора на произведение нескольких операторов более низкого порядка эффективно удается осуществить лишь в очень редких случаях.

Приведем еще один простой пример. Пусть надо найти решение уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(x),$$

причем все величины считаются вещественными. Пишем

$$(D^2 + \omega^2)\, y = f(x), \quad (D - i\omega)(D + i\omega)\, y = f(x),$$

$$e^{i\omega x} D\left(e^{-i\omega x}(D + i\omega)\, y\right) = f(x);$$

$$(D + i\omega)\, y = e^{i\omega x} \int e^{-i\omega x} f(x)\, dx,$$

$$\omega y = \operatorname{Im}\left(e^{i\omega x} \int e^{-i\omega x} f(x)\, dx\right)$$

(Im означает мнимую часть). Окончательно,

$$y = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}\left(e^{i\omega x} \int e^{-i\omega x} f(x)\, dx\right).$$

5.6. Системы линейных уравнений

21. Системы линейных уравнений. Рассмотрим для определенности *линейную однородную систему* трех уравнений первого порядка с тремя искомыми функциями *y(x)*, *z(x)* и *u (x)*, разрешенных относительно производных от этих функций :

$$\left.\begin{aligned} y' &= a_1(x)\, y + b_1(x)\, z + c_1(x)\, u, \\ z' &= a_2(x)\, y + b_2(x)\, z + c_2(x)\, u, \\ u' &= a_3(x)\, y + b_3(x)\, z + c_3(x)\, u. \end{aligned}\right\} \tag{5.138}$$

Напомним, что систему уравнений любого порядка легко преобразовать в систему первого порядка (см. п. 11), а разрешение системы относительно производных осуществляется алгебраически, без решения самих дифференциальных уравнений.

Так как от системы (5.138) легко перейти к равносильному уравнению третьего порядка (п. 11), которое также получается линейным и однородным, то все свойства линейных однородных уравнений (п. 14) распространяются па систему (5.138). При этом суммой двух решений $y = y_1$, $z = z_1$, $u = u_1$ и $y = y_2$, $z = z_2$, $u = u_2$ считается решение $y = y_1 + y_2$, $z = z_1 + z_2$, $u = u_1 + u_2$, а произведением решения $y = y_1$, $z = z_1$, $u = u_1$ на число С считается решение $y = Cy_1$, $z = Cz_1$, $u = Cu_1$, т. е. линейные действия над решениями осуществляются так же, как над векторами.

В частности, *общее решение системы* (5.138) *имеет вид*

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3, \\ z &= C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3, \\ u &= C_1u_1 + C_2u_2 + C_3u_3, \end{aligned}\right\} \tag{5.139}$$

где C_1, C_2, C_3— произвольные постоянные, а (y_1, z_1, u_1), (y_2, z_2, u_2) и (y_3, z_3, u_3) - три *линейно независимых решения* системы (5.138), т. е. таких, что ни одно из них не является линейной комбинацией остальных.

Остановимся на свойстве 4, п. 14.Если известно ненулевое решение (y_1, z_1, u_1) системы (5.138), то, сделав подстановку $y = y_1\bar{y},\ z = z_1\bar{z},\ u = u_1\bar{u}$,

а затем

$\bar{y} = \bar{u} + v,\ \bar{z} = \bar{u} + w$,

нетрудно получить систему *двух* уравнений первого порядка с *двумя* неизвестными функциями, $v(x)$ и $w(x)$, из которой $\bar{u}$ находится с помощью одного интегрирования.

На *линейные неоднородные* системы вида

$$\left.\begin{aligned} y' &= a_1(x)\,y + b_1(x)\,z + c_1(x)\,u + f_1(x), \\ z' &= a_2(x)\,y + b_2(x)\,z + c_2(x)\,u + f_2(x), \\ u' &= a_3(x)\,y + b_3(x)\,z + c_3(x)\,u + f_3(x) \end{aligned}\right\} \tag{5.140}$$

также распространяются все свойства, указанные в п. 15. В частности, метод вариации произвольных постоянных (свойство 3) выглядит так. Пусть известно общее решение **(**5.139**)** соответствующей однородной системы (5.138). Тогда решение системы (5.140) ищется в виде

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi_1(x)\,y_1 + \varphi_2(x)\,y_2 + \varphi_3(x)\,y_3, \\ z &= \varphi_1(x)\,z_1 + \varphi_2(x)\,z_2 + \varphi_3(x)\,z_3, \\ u &= \varphi_1(x)\,u_1 + \varphi_2(x)\,u_2 + \varphi_3(x)\,u_3. \end{aligned}\right\}$$

После подстановки в (5.140) получается система

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1'y_1 + \varphi_2'y_2 + \varphi_3'y_3 &= f_1(x), \\ \varphi_1'z_1 + \varphi_2'z_2 + \varphi_3'z_3 &= f_2(x), \\ \varphi_1'u_1 + \varphi_2'u_2 + \varphi_3'u_3 &= f_3(x), \end{aligned}\right\}$$

из которой алгебраическим способом находим φ'_1, φ_2',φ'_3, а затем, интегрируя, находим φ_1, φ_2, φ_3 .

Особое значение имеют *линейные однородные системы с постоянными коэффициентами.* Рассмотрим, например, систему

$$\left.\begin{aligned} y' &= a_1 y + b_1 z + c_1 u, \\ z' &= a_2 y + b_2 z + c_2 u, \\ u' &= a_3 y + b_3 z + c_2 u, \end{aligned}\right\} \tag{5.141}$$

в которой все коэффициенты a_1, b_1, ..., c_3 постоянны. Она решается подобно п. 17. Именно, ненулевые частные решения ищут в виде

$$y = \lambda e^{px}, \quad z = \mu e^{px}, \quad u = \nu e^{px}, \tag{5.142}$$

где

λ, μ, ν, p

— пока неизвестные постоянные. Подстановка в (5.141) дает после сокращения на e^{px} и переноса всех членов в одну сторону:

$$\left.\begin{aligned} (a_1 - p)\lambda + b_1\mu + c_1\nu &= 0, \\ a_2\lambda + (b_2 - p)\mu + c_2\nu &= 0, \\ a_3\lambda + b_3\mu + (c_3 - p)\nu &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.143}$$

Эти равенства можно рассматривать как систему трех алгебраических однородных уравнений первой степени с тремя неизвестными λ, μ, ν . Чтобы она имела ненулевое решение, а только такое решение в силу (5.142) нас и интересует, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 - p & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - p & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - p \end{vmatrix} = 0. \tag{5.144}$$

Это — *характеристическое уравнение* для системы (5.141), из которого мы находим возможные значения p.

Так как уравнение (5.144) имеет третью степень относительно p, то оно имеет три корня, p_1, p_2, p_3. Если все эти корни простые, то можно любой из них подставить в систему (5.143), найти какое-либо ненулевое решение λ, μ, ν , и по формуле (5.142) получить соответствующее решение $y(x)$, $z(x)$, $u(x)$. Из построенных таким образом трех частных решений (при $p=p_1$, p_2 и p_3) согласно формуле (5.139) получаем общее решение системы (5.141):

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1\lambda_1 e^{p_1 x} + C_2\lambda_2 e^{p_2 x} + C_3\lambda_3 e^{p_3 x}, \\ z &= C_1\mu_1 e^{p_1 x} + C_2\mu_2 e^{p_2 x} + C_3\mu_3 e^{p_3 x}, \\ u &= C_1\nu_1 e^{p_1 x} + C_2\nu_2 e^{p_2 x} + C_3\nu_3 e^{p_3 x}, \end{aligned}\right\} \tag{5.145}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Если уравнение (5.144) имеет мнимые корни, то решение можно либо оставить в форме (5.145), либо записать в вещественной форме подобно п. 17 (случай 2).

Случай, когда уравнение (5.144) имеет кратные корни, более сложный, и мы не будем его здесь рассматривать. В конкретных примерах можно поступать так. Если, например, корень p_1 двойной, то частные решения системы (5.141) надо при $p = p_1$, взамен (5.142), искать в форме

$$y=(\lambda x+\bar{\lambda})\,e^{p_1x},\quad z=(\mu x+\bar{\mu})\,e^{p_1x},\quad u=(\nu x+\bar{\nu})\,e^{p_1x}; \tag{5.146}$$

после подстановки в (5.141) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x и из полученной системы уравнений найти *два* независимых вариантазначений

$\lambda,\ \bar{\lambda},\ \ldots,\ \bar{\nu}$

и тем самым два независимых решения вида (5.146). Если корень характеристического уравнения имеет высшую кратность, то соответственно усложнится и форма частного решения системы (5.141).

В теории систем линейных дифференциальных уравнений широко применяется матричная запись . Для этого систему (5.138) обычно переписывают в виде

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)\,y_1 + a_{12}(x)\,y_2 + a_{13}(x)\,y_3,\\ y_2' &= a_{21}(x)\,y_1 + a_{22}(x)\,y_2 + a_{23}(x)\,y_3,\\ y_3' &= a_{31}(x)\,y_1 + a_{32}(x)\,y_2 + a_{33}(x)\,y_3 \end{aligned}\right\} \tag{5.147}$$

и вводят *матрицу коэффициентов* и *векторное решение* (т. е. столбцевую матрицу)

$$\mathbf{A}(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x)\\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x)\end{pmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}.$$

Заметим для дальнейшего, что если дана некоторая матрица $\mathbf{B}(x) = (b_{ij}(x))$, то из правил линейных действий с матрицами следует, что

$$\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta x}=\left(\frac{\Delta b_{ij}}{\Delta x}\right)$$

и тем самым

$$\mathbf{B}'(x)=(b'_{ij}(x)),$$

т. е. *чтобы продифференцировать матрицу, надо продифференцировать все ее элементы.* При этом легко проверить, что основные правила дифференцирования, такие как формулы для производной суммы или произведения и т. п., остаются в силе. Отсюда

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$$

и потому систему (5.147) можно записать в *матричной форме*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{y}, \quad (5.148)$$

а линейную неоднородную систему (5.140) — в аналогичной форме

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{y} + \mathbf{f}(x).$$

Решение (5.139) можно переписать в векторном виде

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}^1 + C_2\mathbf{y}^2 + C_3\mathbf{y}^3,$$

где индексы сверху означают номера линейно независимых частных векторных решений уравнения (5.148). Система (5.141) приобретает вид

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad (5.149)$$

а решение (5.142) —вид

$$y = e^{px}\alpha \quad (5.150)$$

где

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

— некоторый постоянный вектор. Подставляя (5.150) в (5.149), получаем

$$pe^{px}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}e^{px}\boldsymbol{\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = p\boldsymbol{\alpha}.$$

Мы видим , что α и p должны быть собственным вектором и соответствующим собственным значением матрицы **A**; последнее находится из уравнения

$$\det(\mathbf{A} - p\mathbf{I}) = 0,$$

которое есть не что иное, как уравнение (5.144).

При решении систем вида (5.141) с постоянными коэффициентами, а также соответствующих неоднородных систем можно применять операторный метод (п. 20). Для этого записываем $y' = Dy$, $z' = Dz$, $u' = Du$, затем решаем полученную систему уравнений как алгебраическую относительно y, z, u, однако решение доводим лишь до вида $P(D)\,y = f(x)$, после чего применяем методы п. 20. По существу, это сводится к указанию правила перехода от системы уравнений первого порядка к одному уравнению высшего порядка.

22. Приложение к выяснению устойчивости по Ляпунову состояния равновесия. Понятие устойчивости как способности того или иного объекта, состояния или процесса сопротивляться не учитываемым заранее внешним воздействиям появилось еще в античной науке и сейчас занимает одно из центральных мест в физике и технике. Существуют различные конкретные реализации этого общего понятия в зависимости от типа рассматриваемого объекта, характера внешних воздействий и т. д. Одна из таких реализаций появлялась у нас в п. 16. Сейчас мы рассмотрим понятие *устойчивости по Ляпунову,* одно из наиболее важных, введенное и систематически изученное А. М. Ляпуновым в 1892 г.

Пусть состояние некоторого объекта описывается конечным числом параметров, для определенности тремя параметрами, x, y, z, так что изменение этого объекта во времени задается тремя функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z= z(t)$ (t—время). Пусть закон этого изменения имеет вид системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=P(x,\ y,\ z),\\ \frac{dy}{dt}&=Q(x,\ y,\ z),\\ \frac{dz}{dt}&=R(x,\ y,\ z)\end{aligned}\right\} \qquad (5.151)$$

с заданными правыми частями, не содержащими явно независимой переменной t. Последнее условие означает, что дифференциальный закон развития процесса не меняется с течением времени.

Пусть состояние *равновесия* рассматриваемого объекта, когда он не меняется с течением времени, описывается постоянными значениями $x = x_0$, $y = y_0$, $z= z_0$: тогда эта система постоянных, рассматриваемых как функции времени, также должна удовлетворять системе (5.151). Из непосредственной подстановки в (5.151) следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы одновременно

$$P(x_0,\ y_0,\ z_0)=0,\quad Q(x_0,\ y_0,\ z_0)=0,\quad R(x_0,\ y_0,\ z_0)=0. \qquad (5.152)$$

Пусть в некоторый момент t_0 объект под влиянием каких-то причин вышел из состояния равновесия, т. е. параметры x, y, z стали равными

$$x=x_0+\Delta x_0,\ y=y_0+\Delta y_0,\ z=z_0+\Delta z_0.$$

Чтобы выяснить дальнейшее изменение рассматриваемого объекта, надо решить систему уравнений (5.151) при начальных условиях

$$x(t_0)=x_0+\Delta x_0,\quad y(t_0)=y_0+\Delta y_0,\quad z(t_0)=z_0+\Delta z_0 \qquad (5.153)$$

Исследуемое состояние равновесия называется устойчивым по Ляпунову, если после бесконечно малого выхода из этого *состояния объект продолжает оставаться в бесконечной близости от него на протяжении всего дальнейшего времени.* Другими словами, при бесконечно малых Δx_0, Δy_0, Δz_0 для решения системы (5.151) при начальных условиях (5.153) разности

$$\Delta x = x(t) - x_0, \quad \Delta y = y(t) - y_0, \quad \Delta z = z(t) - z_0$$

должны быть бесконечно малыми на всем интервале времени

$$t_0 \leqslant t < \infty.$$

На первый взгляд может показаться странным рассмотрение бесконечно малых отклонений параметров и бесконечно большого промежутка времени, так как на практике все эти величины конечны. Однако полезно вспомнить различие практической и математической бесконечностей. Практической бесконечно малой является просто малая в масштабах рассматриваемого процесса реальная величина, а практически бесконечным промежутком времени является время *переходного процесса,* т. е. перехода от исследуемого состояния к состоянию иного типа (например, от одного состояния равновесия к другому или от состояния равновесия к разрушению объекта и т. п.). Таким образом, реально **устойчивость** по Ляпунову **означает, что малый выход из состояния равновесия практически не нарушает этого состояния**.

Для выяснения того, будет ли иметь место устойчивость, подставим в систему (5.151)

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y, \quad z = z_0 + \Delta z,$$

что даст

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(\Delta x)}{dt} &= P(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z) = \\ &= (P'_x)_0 \Delta x + (P'_y)_0 \Delta y + (P'_z)_0 \Delta z + \ldots, \\ \frac{d(\Delta y)}{dt} &= (Q'_x)_0 \Delta x + (Q'_y)_0 \Delta y + (Q'_z)_0 \Delta z + \ldots, \\ \frac{d(\Delta z)}{dt} &= (R'_x)_0 \Delta x + (R'_y)_0 \Delta y + (R'_z)_0 \Delta z + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5.154}$$

где обозначено

$$(P'_x)_0 = P'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)$$

и т. п. Здесь при преобразовании правых частей мы воспользовались формулой Тейлора и формулами (5.152). Многоточиями обозначены члены выше первого порядка малости.

Так как при выяснении устойчивости рассматриваются лишь малые Δx, Δy, Δz, то в правых частях системы (11.151) основную роль играют выписанные, линейные члены. Поэтому заменим систему (5.151) на *укороченную систему (систему первого приближения),* отбросив члены высшего порядка малости;

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(\Delta x)}{dt} &= (P'_x)_0\,\Delta x + (P'_y)_0\,\Delta y + (P'_z)_0\,\Delta z, \\ \frac{d(\Delta y)}{dt} &= (Q'_x)_0\,\Delta x + (Q'_y)_0\,\Delta y + (Q'_z)_0\,\Delta z, \\ \frac{d(\Delta z)}{dt} &= (R'_x)_0\,\Delta x + (R'_y)_0\,\Delta y + (R'_z)_0\,\Delta z. \end{aligned}\right\} \tag{5.155}$$

Система (5.155) — это линейная система с постоянными коэффициентами, которая решается по методу п. 21. Согласно формуле (5.145) (где, правда, были применены иные обозначения) решение системы (5.155) получается как комбинация функций вида e^{pt}, где p удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} (P'_x)_0 - p & (P'_y)_0 & (P'_z)_0 \\ (Q'_x)_0 & (Q'_y)_0 - p & (Q'_z)_0 \\ (R'_x)_0 & (R'_y)_0 & (R'_z)_0 - p \end{vmatrix} = 0. \tag{5.156}$$

При этом малым Δx_0, Δy_0, Δz_0 отвечают малые значения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3. и поэтому все дело в поведении функции e^{pt} при возрастании t. Так как при

$p = r + is$

(случай $s = 0$ не исключен) будет

$|e^{pt}| = e^{rt}$

то

$$|e^{pt}|_{t\to\infty} \to 0 \ (\text{при } r < 0), \quad |e^{pt}|_{t\to\infty} \to \infty \ (\text{при } r > 0), \tag{5.157}$$

и мы приходим к следующим выводам. *Если все корни характеристического уравнения* (5.156) *имеют отрицательную вещественную часть* (в частности, они могут быть вещественными отрицательными), *то рассматриваемое состояние равновесия x_0, y_0, z_0 устойчиво по Ляпунову.* Кроме того, в этом случае при малых Δx_0, Δy_0, Δz_0. будет $x(t) \to x_0$, $y(t) \to y_0$, $z(t) \to z_0$ при $t \to \infty$; такая устойчивость называется *асимптотической. Если же среди корней уравнения* (5.156) *имеется по крайней мере один с положительной вещественной частью, то рассматриваемое состояние равновесия неустойчиво по Ляпунову.*

Эти результаты мы вывели для системы (5.155), но согласно сказанному выше те же утверждения справедливы для полной системы (5.154). Отметим, что наличие кратных корней у уравнения (5.156) не нарушает наших утверждений, несмотря на то, что при этом в решении могут появиться степени t в качестве множителей, так как экспонента (5.157) при $r < 0$ стремится к нулю быстрее любой степени t.

Оба полученных вывода не охватывают случая, когда среди корней уравнения (5.156) нет корней с положительной вещественной частью, но имеется по крайней мере один с нулевой вещественной частью. Тогда в общем решении системы (5.155) появляются функции вида

$$e^{ist} = \cos st + i \sin st, \qquad |e^{ist}| = 1,$$

т. е. получается, будто бы рассматриваемый объект колеблется или остается неподвижным около состояния равновесия, не стремясь к нему. Но тогда из-за неограниченности времени начинают влиять отброшенные члены высшего порядка малости, которые могут нарушить устойчивость. Итак, *в рассматриваемом особом случае по корням уравнения* (5.156) *нельзя заключить об устойчивости или неустойчивости состояния равновесия;* чтобы это сделать, надо привлечь какие-либо дополнительные соображения, например привлечь дальнейшие члены разложений (5.154).

Полученные результаты приобретают особенно простой вид для случая, когда изменение объекта описывается одной функцией $x(t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \qquad (5.158)$$

Мы получаем, что если $f(x_o) = 0$, $f'(x_0) < 0$, то значению $x = x_0$ отвечает устойчивое состояние равновесия, а если $f(x_o) = 0$, $f'(x_0) > 0$, то это состояние неустойчивое.

5. 7. Приближенное и численное решение уравнений

Часто бывает невозможно осуществить точное интегрирование дифференциального уравнения в квадратурах. Тогда для построения решения приходится применять иные методы. В п. 3 был описан простейший графический метод решения уравнений первого порядка. Здесь мы укажем некоторые *методы построения приближенных формул* для решения, аналогичные описанным ранее методам решения конечных уравнений, а также *методы численного решения,* в которых искомое частное решение строится в табличном виде. Мы будем для простоты рассматривать уравнения первого порядка, но те же методы естественно переносятся на уравнения любого порядка и на системы уравнений.

23. Метод итераций. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка с заданным начальным условием

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{5.159}$$

Если взять интегралы от обеих частей уравнения, получим

$$\int_{x_0}^{x} y'\,dx = y - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx.$$

изменяя обозначение переменной интегрирования, напишем

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds. \tag{5.160}$$

Уравнение (5.160) равносильно сразу обоим равенствам (5.159), так как после его дифференцирования получится первое равенство, а после подстановки $x = x_0$— второе. Уравнение (5.160) является *интегральным уравнением,* так как в нем неизвестная функция стоит под знаком интеграла.

Вид уравнения (5.160) удобен для применения метода итераций. Выбрав некоторую функцию $y_0(x)$ в качестве нулевого приближения (желательно, чтобы она была по возможности ближе к искомому решению; если о последнем ничего не известно, то можно положить хотя бы $y_o(x) \equiv y_o$), находим первое приближение по формуле

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))\,ds.$$

Подставляя результат в правую часть (5.160), находим второе приближение и т. д.; вообще

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\,ds \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.161}$$

Если процесс итераций сходится, т. е. если последовательные приближения стремятся с ростом n к некоторой предельной функции, то она удовлетворяет уравнению (5.160); для проверки этого надо в равенстве (5.161) перейти к пределу при $n \to \infty$.

Метод итераций для уравнения (5.160), *как правило, сходится для всех x, достаточно близких к x_0;* так будет, во всяком случае, если выполнены условия теоремы Коши из п. 3. Это связано с тем, что при вычислении последующих приближений надо интегрировать предыдущие, а при последовательном интегрировании функции в целом «сглаживаются» и всякие неправильности, происходящие из-за выбора нулевого приближения, погрешностей округления и т. п., постепенно устраняются. В отличие от этого при последовательном дифференцировании функции, как правило, ухудшаются, первоначальные неправильности разрастаются и поэтому итерационный метод, основанный на последовательном дифференцировании, не дал бы сходимости.

Различие между интегрированием и дифференцированием показано на рис. 5.17. Нарисованный «горбик», добавленный к какой-либо функции, значительно портит ее производную, не говоря уже о последующих производных и почти не сказывается на интеграле.

Рассмотрим, например, частный вид уравнения Риккати (см. конец п. 4)

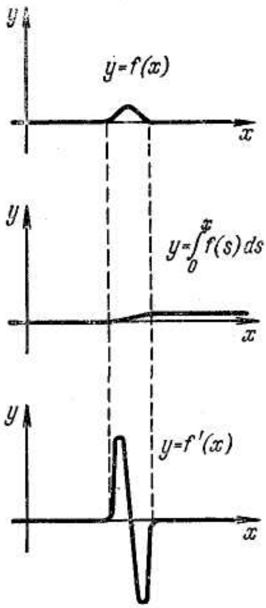


Рис.5.17

$$y' = x^2 + y^2$$

при начальном условии $y(0) = 0$. После интегрирования получим

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x y^2(s)\,ds.$$

Выберем в качестве нулевого приближения для искомого решения, о котором мы пока ничего не знаем, нулевую функцию $y_0(x) = 0$, так как она удовлетворяет хотя бы начальному условию. Тогда получим

$$y_1(x)=\frac{x^3}{3},\quad y_2(x)=\frac{x^3}{3}+\int_0^x\left(\frac{s^3}{3}\right)^2 dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59535}$$

и т. д. Видно, что при небольших x, например при $|x| < 1$, процесс хорошо сходится; так, с точностью до 0,001 при $|x| < 1$ можно положить $y=(x^3/3)+(x^7/63)$, а при $|x|<1/2$ даже просто $y=x^3/3$. Как обычно на практике, вопрос о том, на каком приближении нужно остановиться, решается с помощью сравнения последующих приближений с предыдущими.

24. Применение ряда Тейлора. Из уравнения и начального условия (5.159) можно с помощью дифференцирования найти значения $y'(x_0)$, $y''(x_0)$ и т. д., после чего составить разложение решения в степенной ряд Тейлора. Необходимое количество членов определяется с помощью их последовательного вычисления и сравнения с выбранной степенью точности.

Рассмотрим, например, задачу

$$y'=x^2+y^2,\quad y(0)=1.$$

Подстановкой в правую часть уравнения находим, что

$$y'(0)=0^2+1^2=1.$$

Если продифференцировать обе части уравнения, получим

$$y''=2x+2yy'$$

и, подставив $x=0$, найдем

$$y''(0)=2\cdot 0+2\cdot 1\cdot 1=2.$$

Аналогично находим

$$y'''=2+2y'^2+2yy'';\quad y'''(0)=8;\quad y^{\mathrm{IV}}=6y'y''+2yy''',\quad y^{\mathrm{IV}}(0)=28$$

и т. д. Подставляя это в формулу Маклорена , получим

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots=1+x+x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{7}{6}x^4+\ldots$$

Этой формулой можно пользоваться для небольших $|x|$.

25. Применение степенных рядов с неопределенными коэффициентами. Этот метод тесно связан с п. 24 и состоит в том, что решение уравнения ищется в форме ряда с неизвестными коэффициентами

$$y = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^3 + \ldots, \quad (5.162)$$

которые находятся с помощью подстановки в уравнение и последующего приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x (и применения начального условия, если оно задано).

Рассмотрим, например, уравнение второго порядка

$$y'' + xy = 0. \quad (5.163)$$

Будем искать решение разложенным по степеням x:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \quad (5.164)$$

После дифференцирования и подстановки в уравнение получим

$$(1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + \ldots) + x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = 0.$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x дает

$$1 \cdot 2a_2 = 0; \quad 2 \cdot 3a_3 + a_0 = 0; \quad 3 \cdot 4a_4 + a_1 = 0;$$
$$4 \cdot 5a_5 + a_2 = 0; \quad 5 \cdot 6a_6 + a_3 = 0, \ \ldots,$$

откуда последовательно находим

$$a_2 = 0; \quad a_3 = -\frac{a_0}{2 \cdot 3}; \quad a_4 = -\frac{a_1}{3 \cdot 4}; \quad a_5 = -\frac{a_2}{4 \cdot 5} = 0;$$
$$a_6 = -\frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}; \quad a_7 = -\frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}; \quad a_8 = -\frac{a_5}{7 \cdot 8} = 0;$$
$$a_9 = -\frac{a_6}{8 \cdot 9} = -\frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \text{ и т. д.}$$

Подстановка этих результатов в формулу (5.164) дает общее решение уравнения (5.163):

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2 \cdot 3}x^3 - \frac{a_1}{3 \cdot 4}x^4 + \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}x^6 +$$
$$+ \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 - \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}x^9 - \ldots =$$
$$= a_0\left(1 - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \ldots\right) +$$
$$+ a_1\left(x - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{x^{10}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} + \ldots\right).$$

Константы a_0 и a_1 остаются в качестве произвольных постоянных (в свойстве 5 п. 14 они были обозначены через C_1 и C_2). Ряды, стоящие в скобках, представляют два линейно независимых частных решения уравнения (5.163).

Описанный прием всегда применим, в частности, к линейным уравнениям

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \quad (5.165)$$

если все функции $a_0\ (x),\ a_1(x),\ \ldots,\ f(x)$ представляют собой многочлены относительно x или, в более общем случае, суммы рядов по степеням $x - x_0$, причем $a_0\ (x_0) \neq 0$.
Если $a_0(x_0) = 0$, то значение x_0 называется *особой точкой* для уравнения (5.165); тогда найти решение в форме (5.162) возможно не всегда. В этом случае иногда удается найти решение в форме

$$y = (x - x_0)^\rho\,[a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2 + d\,(x - x_0)^3 + \ldots], \tag{5.166}$$

где постоянная ρ также подбирается. При этом можно считать, что $a \neq 0$, так как в противном случае можно вынести за скобку некоторую степень $x - x_0$, так что дело сведется к изменению ρ.
26. Функции Бесселя. Рассмотрим важный пример уравнения Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)\,y = 0 \qquad (p = \mathrm{const} \geqslant 0;\ 0 < x < \infty). \tag{5.167}$$

Решения этого уравнения называются *функциями Бесселя* . Эти функции называются также *цилиндрическими* функциями, так как они широко применяются при решении уравнений математической физики в круглом цилиндре.

Значение $x = 0$ является для уравнения (5.167) особой точкой, поэтому в силу формулы (5.166), в которой надо положить $x_0 = 0$, его решение можно искать в виде

$$y = ax^\rho + bx^{\rho+1} + cx^{\rho+2} + \ldots \tag{5.168}$$

Дифференцирование и подстановка в уравнение (5.167) дают

$$\begin{aligned} &x^2\,[a\rho\,(\rho - 1)\,x^{\rho-2} + b\,(\rho + 1)\,\rho x^{\rho-1} + c\,(\rho + 2)\,(\rho + 1)\,x^\rho + \ldots] + \\ &\quad + x\,[a\rho x^{\rho-1} + b\,(\rho + 1)\,x^\rho + c\,(\rho + 2)\,x^{\rho+1} + \ldots] + \\ &\quad + x^2\,(ax^\rho + bx^{\rho+1} + cx^{\rho+2} + \ldots) - p^2\,(ax^\rho + bx^{\rho+1} + cx^{\rho+2} + \ldots) = 0. \end{aligned}$$

После приравнивания нулю коэффициентов при одинаковых степенях x получим цепочки равенств:

$$a\rho\,(\rho - 1) + a\rho - ap^2 = 0, \text{ т. е. } a\,(\rho^2 - p^2) = 0;$$
$$b\,(\rho + 1)\,\rho + b\,(\rho + 1) - bp^2 = 0, \text{ т. е. } b\,(\rho^2 + 2\rho + 1 - p^2) = 0;$$

$$c\,(\rho + 2)\,(\rho + 1) + c\,(\rho + 2) + a - cp^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad c\,(\rho^2 + 4\rho + 4 - p^2) + a = 0;$$
$$d\,(\rho + 3)\,(\rho + 2) + d\,(\rho + 3) + b - dp^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad d\,(\rho^2 + 6\rho + 9 - p^2) + b = 0;$$
$$e\,(\rho + 4)\,(\rho + 3) + e\,(\rho + 4) + c - ep^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad e\,(\rho^2 + 8\rho + 16 - p^2) + c = 0$$

и т. д. Из первого равенства, поскольку $a \neq 0$, мы видим, что $\rho^2 = p^2$, т. е. $\rho = \pm p$. Подставляя этот результат в остальные равенства, получим последовательно

$$b=0,\quad c=\frac{-a}{4\rho+4}=-\frac{a}{2^2(\rho+1)},\quad d=0,$$

$$e=-\frac{c}{8\rho+16}=\frac{a}{2^4\cdot 2(\rho+1)(\rho+2)},\quad f=0,$$

$$g=-\frac{a}{2^6\cdot 2\cdot 3(\rho+1)(\rho+2)(\rho+3)},\quad i=0,$$

$$j=\frac{a}{2^8\cdot 2\cdot 3\cdot 4(\rho+1)(\rho+2)(\rho+3)(\rho+4)}\quad \text{и т. д.}$$

Отсюда в силу формулы (5.168) находим решение

$$y=ax^\rho-\frac{a}{2^2(\rho+1)}x^{\rho+2}+\frac{a}{2^4\cdot 2!(\rho+1)(\rho+2)}x^{\rho+4}-$$
$$-\frac{a}{2^6\cdot 3!(\rho+1)(\rho+2)(\rho+3)}x^{\rho+6}+\ldots, \tag{5.169}$$

где a — произвольная постоянная. Удобно выбрать

$$a=\frac{1}{2^\rho\Gamma(\rho+1)}$$

Если учесть, что в силу формулы (10.89)

$$\Gamma(\rho+1)(\rho+1)=\Gamma(\rho+2);\quad \Gamma(\rho+1)(\rho+1)(\rho+2)=$$
$$=\Gamma(\rho+2)(\rho+2)=\Gamma(\rho+3)\quad \text{и т. д.,}$$

то формула (11.169) при таком a даст

$$y=\frac{1}{\Gamma(\rho+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\rho-\frac{1}{1!\Gamma(\rho+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+2}+\frac{1}{2!\Gamma(\rho+3)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+4}-$$
$$-\frac{1}{3!\Gamma(\rho+4)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+6}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\rho+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+2n}. \tag{5.170}$$

Эта сумма называется *функцией Бесселя* 1- *го рода порядка* ρ и обозначается $J_\rho(x)$. Так как $\rho=\pm p$, то общее решение уравнения (5.167) (п.14, свойство 5) можно записать в виде

$$y=C_1J_p(x)+C_2J_{-p}(x). \tag{5.171}$$

Решение (5.171) не годится при целом p = 0, 1, 2, 3, ... Действительно, для таких p при ρ= —p будет

$$\Gamma(-p+1)=\Gamma(-p+2)=\ldots=\Gamma(-p+p)=\pm\infty,$$

и потому формула (5.170) даст

$$J_{-p}(x)=\sum_{n=p}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(-p+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2n}=|n-p=n'|=$$
$$=\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(-1)^{n'}}{(p+n')!(n')!}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2n'}=(-1)^pJ_p(x)\quad (p=0,1,2,\ldots).$$

Значит, в этом случае решения

$J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$

линейно зависимые (п. 14), а потому формула (5.171) не дает общего решения.

Чтобы получить общее решение уравнения (5.167), пригодное для всех p, поступают аналогично случаю 3 п. 17. Именно, сначала считают, что p не целое, и образуют функцию

$$Y_p(x) = \operatorname{ctg} p\pi J_p(x) - \frac{1}{\sin p\pi} J_{-p}(x) = \frac{\cos p\pi J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}.$$

Как линейная комбинация решений она также является решением уравнения (5.167) и называется *функцией Бесселя 2-го рода порядка* p; она иногда обозначается также через $N_p(x)$. Если p становится целым, то в правой части получается неопределенность. Ее можно раскрыть по правилу Лопиталя. Отметим , что в итоге получится сумма, для которой при $x\to\infty$ старшим членом будет

$$-\frac{(p-1)!\,2^p}{\pi x^p} \quad (p=1,\,2,\,3,\,\ldots); \qquad \frac{2}{\pi}\ln x \quad (p=0).$$

Итак, формула

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x) \tag{5.172}$$

дает общее решение уравнения (5.167) для всех $p\geq 0$, нецелых или целых, при $0<x<\infty$. При этом $J_p(+0)$ конечно, тогда как $Y_p(+0)=-\infty$. Поэтому если $y(+0)$ по условиям задачи должно быть конечным, то в правой части формулы (5.172) надо оставить лишь первое слагаемое.

Наибольшее значение для приложений имеют

$$\left.\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \frac{x^2}{1!^2 2^2} + \frac{x^4}{2!^2 2^4} - \frac{x^6}{3!^2 2^6} + \ldots, \\ J_1(x) &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{1!2!2^3} + \frac{x^5}{2!3!2^5} - \frac{x^7}{3!4!2^7} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5.173}$$

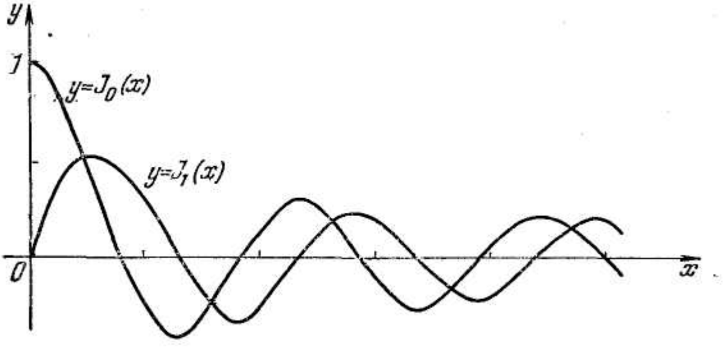


Рис.5.18.

Примерные графики этих функции показаны па рис. 5.18. Эти функции, как и все функции Бесселя 1-го и 2-го рода, при возрастании x бесконечное число раз меняют знак и стремятся к нулю. Из формул (5.173) легко вывести, что $J'_0(x) = -J_1(x)$. Имеются и другие соотношения между функциями Бесселя.

27. Метод малого параметра. Этот метод применяется и при решении дифференциальных уравнений. Приведем простые примеры.

Задача

$$y' = \frac{x}{1+0{,}1xy}, \qquad y(0) = 0 \tag{5.174}$$

не содержит параметров. Однако можно рассмотреть более общую задачу

$$y' = \frac{x}{1+\alpha xy}, \qquad y(0) = 0, \tag{5.175}$$

из которой (5.174) получается при $\alpha = 0{,}1$. Задача (5.175) легко решается при $\alpha = 0$: тогда получается $y = x^2/2$. Поэтому ищем решение задачи разложенным в ряд по степеням α, т. е.

$$y = \frac{x^2}{2} + \alpha u + \alpha^2 v + \alpha^3 w + \ldots, \tag{5.176}$$

где

$u = u(x), \ v = v(x)$

и т. д.—пока неизвестные функции x.

Подстановка (5.176) в (5.175) дает после умножения на знаменатель

$$(x + \alpha u' + \alpha^2 v' + \alpha^3 w' + \ldots)\left(1 + \frac{\alpha}{2}x^3 + \alpha^2 xu + \alpha^3 xv + \ldots\right) = x; \tag{5.177}$$

$$\alpha u(0) + \alpha^2 v(0) + \ldots = 0, \quad \text{т. е.} \quad u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad w(0) = 0, \ \ldots \tag{5.178}$$

Раскрывая скобки в (5.177) и приравнивая нулю коэффициенты при степенях α, получим последовательно

$$u' + \frac{1}{2}x^4 = 0, \quad v' + \frac{x^3}{2}u' + x^2 u = 0, \quad w' + \frac{x^3}{2}v' + xuu' + x^2 v = 0 \ \text{ и т. д.},$$

откуда с учетом равенств (5.178) найдем

$$u = -\frac{x^5}{10}, \quad v = \frac{7}{160}x^8, \quad w = \frac{71}{1760}x^{11} \ \text{ и т. д.}$$

Поэтому формула (5.176) даст

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{\alpha}{10}x^5 + \frac{7\alpha^2}{160}x^8 - \frac{71\alpha^3}{1760}x^{11} + \ldots$$

В частности, для уравнения (5.174) получим

$$y=\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{100}+\frac{7x^8}{16\,000}-\frac{71x^{11}}{1\,760\,000}+\dots$$

Этот ряд прекрасно сходится при $|x|< 1$ и неплохо при $1<|x| < 2$.

Рассмотрим в качестве другого примера задачу

$$y'=\sin(xy), \qquad y(0)=\alpha. \tag{5.179}$$

В отличие от предыдущего примера здесь параметр входит в начальное условие. При α =0 задача (5.179) имеет, очевидно, решение $y\equiv0$. Поэтому при малых | α | ищем решение в форме

$$y=\alpha u+\alpha^2 v+\alpha^3 w+\dots \qquad (u=u(x),\ v=v(x),\ \dots). \tag{5.180}$$

Подстановка значения $x = 0$ дает

$$u(0)=1, \qquad v(0)=0, \qquad w(0)=0, \ \dots \tag{5.181}$$

С другой стороны, подставив (5.180) в дифференциальное уравнение (5.179), получим с учетом степенного ряда для синуса :

$$\alpha u'+\alpha^2 v'+\alpha^3 w'+\dots=$$
$$=\frac{(\alpha xu+\alpha^2 xv+\alpha^3 xw+\dots)}{1!}-\frac{(\alpha xu+\alpha^2 xv+\alpha^3 xw+\dots)^3}{3!}+\dots$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях α дает

$$u'=xu, \qquad v'=xv, \qquad w'=xw-\frac{x^3u^3}{3!}, \ \dots$$

Интегрируя эти уже *линейные* уравнения с учетом начальных условий (5.181), найдем

$$u=e^{\frac{x^2}{2}}, \qquad v=0, \qquad w=\frac{1}{12}(1-x^2)\,e^{\frac{3}{2}x^2}-\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Подстановка этих выражений в (5.180) дает разложение искомого решения, пригодное для небольших $|x|$ и $|\alpha|$.

В более сложных случаях при применении метода малого параметра часто бывает полезно найти хотя бы первый содержащий параметр член разложения.

28. Общие замечания о зависимости решения от параметра. В связи с предыдущим пунктом выскажем несколько общих соображений. Часто бывает, что изучаемое дифференциальное уравнение или система таких уравнений содержат один или несколько параметров, которые могут принимать различные постоянные значения. Рассмотрим для простоты уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y;\ \lambda) \tag{5.182}$$

(λ — параметр) при определенных начальных условиях $x = x_0$, $y= y_0$.

Будем считать, что точка $(x_0; y_0)$—неособая (п. 7), т. е. при заданных условиях существует единственное решение уравнения (5.182). Тогда из геометрического смысла уравнения (5.182) (п. 3) следует, что если его правая часть зависит от λ непрерывно, то при малом изменении λ поле направлений будет меняться мало, а потому и решение $y\ (x;\ \lambda)$ будет зависеть от λ непрерывно. Аналогичный вывод получается, если от λ зависит не только уравнение, но и начальное условие, т. е. если $x_o = x_0(\lambda)$, $y_o = y_0\ (\lambda)$.

Пусть решение $y\ (x;\ \lambda)$ уравнения (5.182) известно при некотором, как говорят, «невозмущенном» значении λ; пусть, далее, значение параметра изменилось и стало равным $\lambda+\Delta\lambda$, где $|\Delta\lambda|$ мало. Тогда и y изменится и получит приращение $\Delta_\lambda y$, главную линейную часть, т. е. дифференциал которого мы обозначим через δy н назовем *вариацией* решения.

Таким образом, вариация—это частный дифференциал, взятый по параметру; новое название и новое обозначение применяются, чтобы отличить дифференциал по независимой переменной от дифференциала по параметру. В тех случаях, когда малыми высшего порядка можно пренебречь, можно сказать просто, что вариация решения—это бесконечно малое его изменение, полученное за счет изменения параметра. При выбранном значении λ величина δy, как и y, зависит от x, т. е. $\delta y = \delta y(x)$ и прямо пропорциональна $\Delta\lambda$.

Чтобы составить дифференциальное уравнение для δy, надо приравнять дифференциалы обеих частей равенства (5.182) по λ:

$$\delta \frac{dy}{dx} = \delta\,(f\,(x,\ y;\ \lambda)) = \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\,\delta\lambda \qquad (\delta\lambda = \Delta\lambda),$$

т.е.

$$\frac{d\,(\delta y)}{dx} = f'_y\,(x,\ y;\ \lambda)\,\delta y + f'_\lambda\,(x,\ y;\ \lambda)\,\delta\lambda. \tag{5.183}$$

При этом в левой части мы переставили знаки d и δ, как знаки дифференциалов по разным переменным, а в правой части воспользовались формулой для производной сложной функции. Уравнение (5.183) называется *уравнением в вариациях* для исходного уравнения (5.182). Так как в правой части взамен y надо подставить «невозмущенное решение» $y\ (x;\ \lambda)$, то уравнение (5.183) линейное и потому легко интегрируется (п. 4). Для уравнений высших порядков и для систем уравнений соответствующие уравнения в вариациях в общем случае не интегрируются в квадратурах, но они *всегда являются линейными.*

Выведем *начальное условие для* δy. В общем случае, когда $x_o = x_0(\lambda)$, $y_o = y_o(\lambda)$, получаем при значении параметра $\lambda + \delta\lambda$, отбрасывая малые высшего порядка, что при

$$x = x_0(\lambda + \delta\lambda) = x_0 + x_0'\delta\lambda$$

будет $y_o = y_o(\lambda + \delta\lambda) = y_o + y'_o\,\delta\lambda$, где

$$x_0' = x_0'(\lambda),\quad y_0' = y_0'(\lambda).$$

Отсюда при значении параметра $\lambda + \delta\lambda$ и при $x = x_0$ будет

$$y\,|_{x=x_0} = y\,|_{x=x_0+x_0'\delta\lambda} - \partial_x y\,|_{dx=x_0'}\delta\lambda = y_0 + y_0'\delta\lambda - \frac{dy}{dx}x_0'\delta\lambda = y_0 + y_0'\delta\lambda - f_0 x_0'\delta\lambda,$$

где $f_o = f(x_o, y_0; \lambda)$. Но то же значение y равно

$$(y\,|_\lambda + \delta y)_{x=x_0} = y_0 + (\delta y)_{x=x_0}.$$

Значит, начальное условие для δy таково:

$$(\delta y)_{x=x_0} = (y_0' - f_0 x_0')\,\delta\lambda.$$

В том частном случае, когда x_0 и y_0 не зависят от λ, будет $x'_o = y'_o = 0$ и потому начальное условие имеет вид $(\delta y)_{x=x0}=0$.

Иногда параметр входит в дифференциальное уравнение таким способом, что при некоторых значениях этого параметра уравнение понижает свой порядок, т. е. вырождается, при этом возникают новые обстоятельства, которые мы поясним на примере.

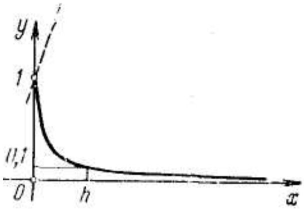


Рис.5.19.

Рассмотрим задачу

$$\lambda y' + y = 0, \quad y\,|_{x=0} = 1 \tag{5.184}$$

с решением

$$y = e^{-\frac{x}{\lambda}}.$$

При $\lambda = 0$ получается вырождение. Пусть решение рассматривается при $x \geq 0$ и $\lambda \to +0$; это решение показано на рис. 5.19. Уравнение (5.184) в пределе переходит в равенство $y = 0$, но мы видим, что при малом λ решение близко к нулю не сразу от $x = 0$, а только от некоторого $x = h$. Промежуток $0 < x < h$, называемый *пограничным слоем,* нужен решению для того, чтобы от единичного начального значения (5.184) перейти к значению, близкому к нулю.

Ширина пограничного слоя условна, так как теоретически решение нигде не становится точно равным нулю. Если, например, принять за ширину пограничного слоя значение $x = h$, при котором решение уменьшается в 10 раз по сравнению с исходным значением, то для задачи (5.184) мы получим

$$e^{-h/\lambda} = 0{,}1; \qquad h = \ln 10 \cdot \lambda,$$

т. е. *ширина пограничного слоя прямо пропорциональна значению* λ.

Если $\lambda \to -0$, то получающееся решение, изображенное на рис. 5.19 пунктиром, стремится к бесконечности при любом $x > 0$.

В более сложных случаях часто наблюдается аналогичное явление. Пусть, например, рассматривается решение уравнения второго порядка, удовлетворяющее двум начальным или краевым (п. 16) условиям, причем при некотором значении параметра $\lambda = \lambda_0$ порядок уравнения понижается до первого. Тогда бывает, что если решение $y_0(x)$ при $\lambda = \lambda_0$ остается конечным, то оно, как решение уравнения первого порядка, удовлетворяет только одному условию, а другому не обязательно. При λ, близком к λ_0, для решения $y(x)$ имеется «пограничный слой» (ширина которого пропорциональна $|\lambda - \lambda_0|$), на протяжении которого $y(x)$ переходит от этого другого условия к $y_0(x)$. Подобная ситуация может возникнуть и для систем дифференциальных уравнений.

29. Методы улучшения невязки. Эти методы основаны на том, что неизвестная функция ищется в виде, включающем несколько параметров, т. е. в виде

$$y = \varphi(x;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m). \tag{5.185}$$

При этом правая часть обычно выбирается так, чтобы для любых значений этих параметров удовлетворялись поставленные начальные или граничные условия. После подстановки выражения (5.185) в заданное дифференциальное уравнение невязка h, т е. разность между левой и правой частями, будет содержать эти параметры:

$$h = h(x;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m).$$

Если бы решение (5.185) было точным, то невязка h тождественно равнялась бы нулю. Поэтому для нахождения параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ на невязку накладывают m условий, которые заведомо выполняются для тождественно нулевой функции. Например, можно приравнять $h = 0$ при m значениях x — это *метод коллокации.* Можно минимизировать интеграл

$\int h^2\, dx$ на том интервале $a \le x \le b$, на котором строится решение, - это метод *наименьших квадратов.* Можно приравнять нулю интегралы

$$\int_a^b h\psi_1(x)\,dx,\quad \int_a^b h\psi_2(x)\,dx,\ \ldots$$

$$\ldots,\ \int_a^b h\psi_m(x)\,dx,\ \text{где}\quad \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_m(x)$$

-какая-либо выбранная система функций, — это *метод моментов,* так как подобные интегралы называются *моментами.*

Чем больше введено параметров λ_i, тем более «гибкой» является формула (5.185), т. е. тем точнее можно представить этой формулой искомое решение, но тем сложнее получаются вычисления. Большое искусство заключается в том, чтобы правильно предугадать вид искомого решения с помощью формулы, содержащей небольшое число параметров. О правильности результата можно судить, сравнивая результаты повторных вычислений по разным методам или с разным числом параметров и т. п.

Если правая часть формулы (5.185) удовлетворяет не всем поставленным начальным или граничным условиям, то требование, чтобы эти условия удовлетворялись, соответственно уменьшает число условий, накладываемых на невязку.

Рассмотрим простой пример, в котором возможно сравнение с точным решением. Пусть надо решить краевую задачу

$$y' + y = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Будем искать решение в виде

$$y = \lambda x + \mu x^2. \tag{5.186}$$

При этом первое граничное условие удовлетворяется автоматически, а второе дает

$$\lambda + \mu = 1,$$

откуда

$$y = \lambda x + (1 - \lambda)\, x^2,$$

и у нас остается всего одна степень свободы, т. е. возможность поставить лишь одно условие для улучшения невязки, которая равна

$$h = y'' + y = 2(1 - \lambda) + \lambda x + (1 - \lambda)\, x^2.$$

Коллокация при $x=1/2$ дает значение $\lambda=9/7$; метод наименьших квадратов для интервала $0 \le x \le 1$ дает значение $\lambda = 257/202$; метод моментов с функцией $\psi(x)=1$ дает значение $\lambda = 14/11$.

Подстановка этих значений в формулу (5.186) дает приближенные решения, которые неплохо аппроксимируют точное $y=(\sin x)/(\sin 1)$: например, при x = 0,5 оно равно 0,5699, тогда как приближенные решения равны соответственно 0,5714, 0,5681 и 0,5682, ошибка ±0,3%.

30. Метод упрощения. Этот метод широко применяется на практике, особенно при грубых прикидочных расчетах. Он состоит в том, что само исходное уравнение упрощается путем отбрасывания сравнительно малых членов, замены медленно меняющихся коэффициентов постоянными и т. п. После такого упрощения может получиться уравнение одного из интегрируемых типов и, интегрируя, мы получим функцию, которая может считаться приближенным решением исходного, полного уравнения; во всяком случае, она часто правильно передает характер поведения точного решения. Найдя это «нулевое приближение», иногда удается с его помощью внести поправки, учитывающие упрощение, и тем самым найти «первое приближение» и т. д.

Если уравнение содержит параметры (например, массы, линейные размеры исследуемых объектов и т. п.), то нужно иметь в виду, что при одних значениях этих параметров относительно малыми могут быть одни члены уравнения, а при других значениях — другие, так что упрощение будет при разных значениях параметров производиться по разному. Кроме того, иногда приходится разбивать интервал изменения независимой переменной на части, в каждой из которых упрощение проводится по-своему.

Особенно полезно такое упрощение уравнения в случаях, когда при самом выводе (написании) дифференциального уравнения делались существенные упрощающие предположении или когда точность, с которой известны рассматриваемые величины, невелика. Так, члены уравнения, меньшие допускаемой погрешности в других его членах, надо безусловно отбросить.

Рассмотрим, например, задачу

$$y''+\frac{1}{1+0{,}1x}\,y+0{,}2y^3=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0;\qquad 0\leqslant x\leqslant 2. \tag{5.187}$$

Так как коэффициент при y меняется медленно, заменим этот коэффициент его средним значением :

$$\frac{1}{2-0}\int\limits_0^2\frac{1}{1+0{,}1x}\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{\ln(1+0{,}1x)}{0{,}1}\Big|_0^2=\frac{\ln 1{,}2}{0{,}2}=0{,}911.$$

Кроме того, сравнительно малое третье слагаемое отбросим.

Получим уравнение $y'' + 0{,}911y = 0$ с решением при данных начальных условиях

$$y = \cos 0{,}954x. \tag{5.188}$$

Вид этого приближенного решения подтверждает правомерность отбрасывания последнего слагаемого в уравнении, поскольку отношение третьего члена ко второму порядка $0{,}2y^2 < 0{,}2$, и потому первый член должен «почти взаимно уничтожиться» со вторым. Внесем поправку на последнее слагаемое, для чего подставим в него приближенное решение (5.188), оставив коэффициент осредненным:

$$y'' + 0{,}911y = -0{,}2\cos^3 0{,}954x = -0{,}05\cos 2{,}86x - 0{,}15\cos 0{,}954x$$

По методам п. 18 получаем при заданном начальном условии

$$y = 0{,}993\cos 0{,}954x - 0{,}079x\sin 0{,}954x + 0{,}007\cos 2{,}86x.$$

Разница по сравнению с нулевым приближением (5.188) невелика, так что вывод о значении отдельных слагаемых в уравнении (5.187) остается в силе; в то же время третий член уравнения (5.187) внес свой вклад в решение.

Подобные рассуждения зачастую не блещут строгостью и иногда приводят к ошибкам; однако если они проводятся в соответствии со здравым смыслом, то все же, и притом довольно часто, дают решение, которым можно пользоваться на практике.

31. Метод Эйлера. Мы переходим к изложению некоторых методов численного интегрирования дифференциальных уравнений. Эти методы применяются, если ни один из описанных выше методов «приближенного интегрирования», т. е. получения приближенных формул для решения, не является достаточно эффективным, в частности, если решение требуется с большой точностью на большом интервале изменения аргумента. Кроме того, эти методы применяются в работе электронных вычислительных машин.

Часто целесообразно комбинировать методы приближенного и численного интегрирования. Например, для уравнения

$$y'' + (1 + e^{-x})\,y = 0$$

при каком-либо заданном начальном условии можно для малых x применить формулу Тейлора (п. 24), при средних x в зависимости от требуемой точности— один из методов численного интегрирования, а при больших x — просто отбросить член e^{-x}.

Мы изложим четыре наиболее известных метода численного интегрирования уравнений первого порядка; эти методы очень просто переносятся на системы уравнений первого порядка, к которым приводятся и уравнения высших порядков.

Метод Эйлера прост и нагляден, хотя и недостаточно практически эффективен. Однако его надо хорошо понять, так как многие важные и эффективные методы в различных разделах математики являются, по существу, его развитием.

Метод Эйлера состоит в непосредственной замене производной в дифференциальном уравнении разностным отношением . Пусть рассматривается начальная задача

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0. \tag{5.189}$$

Будем считать для простоты шаг h по x постоянным и обозначим

$$x_0+h=x_1,\quad x_0+2h=x_2,\quad x_0+3h=x_3,\ \ldots,$$

а приближенные значения $y\ (x_k)$ обозначим y_k. Чтобы найти эти значения, заменим в уравнении производную отношением

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x}=f(x_k,\ y_k),\ \text{т. е.}\ \frac{y_{k+1}-y_k}{h}=f(x_k,\ y_k)$$

и

$$y_{k+1}=y_k+f(x_k,\ y_k)\,h. \tag{5.190}$$

По последней формуле можно, начиная от y_0 и полагая последовательно $к = 0,\ 1,\ 2.....$найти значения

$$y_1=y_0+f(x_0,\ y_0)\,h,\quad y_2=y_1+f(x_1,\ y_1)\,h,\ \ldots$$

Метод Эйлера имеет простой геометрический смысл, показанный на рис. 5.20, где изображены также интегральные линии. Он состоит в том, что через заданную точку M_0 мы проводим не искомую интегральную линию, которая нам не известна, а отрезок M_OM_1 касательной к этой линии, руководствуясь направлением поля в точке $M_о$. Через M_1 мы проводим отрезок, руководствуясь направлением поля в M_1, и т. д. Полученная *ломаная Эйлера* приближенно изображает требуемую интегральную линию, которая получилась бы, если бы шаг h был бесконечно малым, т. е. если бы мы непрерывно подправляли направление ломаной.

Легко оценить порядок ошибки в методе Эйлера. Пользуясь фор-

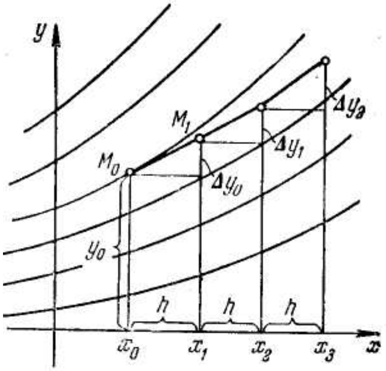


Рис.5.20.

мулой (5.190) мы заменяем приращение решения его дифференциалом
$y'_k \& x = f(x_k, y_k)h$.
При этом делается ошибка порядка h^2 . Если мы строим решение на некотором интервале x_0, x и разбиваем его на n частей, то
$$h = \frac{x - x_0}{n},$$
и суммарная ошибка будет иметь порядок
$$nh^2 = \frac{(x - x_0)^2}{n}.$$
Значит, для повышения точности в 10 раз, т. е. для вычисления одного дополнительного десятичного знака, требуется увеличить число точек деления также в 10 раз, что значительно увеличит объем вычислительной работы. В этом недостаток метода.

Отметим еще одну особенность метода Эйлера, свойственную и другим методам численного интегрирования дифференциальных уравнений. Мы уже отмечали в п. 7, что решение такого уравнения может, при своем продолжении, обратиться в бесконечность при конечном значении x. В то же время ясно, что решение, построенное по методу Эйлера, остается конечным при всех значениях x. Чтобы правильно передать поведение решения в таких случаях, можно поступить следующим образом: если в результате численного интегрирования будет обнаружено значительное возрастание решения $y(x)$ по абсолютной величине, совершить в дифференциальном уравнении замену вида $y=1/z$. Если тогда при дальнейшем интегрировании окажется, что z переходит через нулевое значение при некотором $x=\alpha$, это и будет означать, что $|y(\alpha)|=\infty$.

32. Метод Рунге — Кутта. Покажем сначала этот метод, уточняющий метод Эйлера в более простом варианте. Пусть $y_к$, т. е. приближенное значение решения при $x = x_к$, уже построено; тогда y_{k+1} можно найти с помощью следующего вычисления:

$$f_k=f(x_k,\ y_k),\quad \alpha_k=f\left(x_k+\frac{h}{2},\quad y_k+\frac{f_kh}{2}\right),\quad y_{k+1}=y_k+\alpha_kh. \tag{5.191}$$

Геометрический смысл этого вычисления показан на рис.5.21. Именно каждое очередное звено M_kM_{k+1} ломаной, аппроксимирующей интегральную линию, строится так. Сначала проводим отрезок $M_кM'_{к+1}$, руководствуясь направлением $f_к$ поля в точке $M_к$. Не ограничиваясь этим (как в методе Эйлера), определяем направление α_k поля в середине N_k этого отрезка и проводим отрезок M_kM_{k+l} именно под этим новым направлением. Таким образом, мы производим *пересчет,* уточнение углового коэффициента звеньев ломаной, аппроксимирующей интегральную кривую.

Уже из геометрического смысла ясно, что данный метод точнее метода Эйлера, так как здесь учитывается поворот поля на интервале
$x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}$.

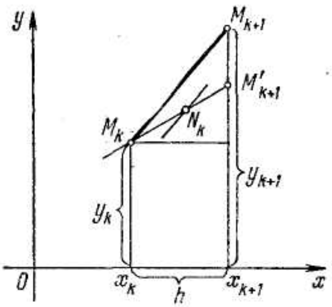


Рис.5.21.

Это можно подтвердить и вычислением. По формуле Тейлора

$$\alpha_k=f(x_k,\ y_k)+f'_x(x_k,\ y_k)\frac{h}{2}+f'_y(x_k\ \ y_k)\frac{f_kh}{2}+O(h^2)$$

(под $0(h^2)$ понимается величина, ограниченная по сравнению с h^2). Подобно п. 24 находим

$$y'_k = f(x_k, y_k) = f_k; \quad y''_k = f'_x(x_k, y_k) + f'_y(x_k, y_k)\, y'_k;$$

$$y_{k+1} = y_k + \alpha_k h = y_k + f(x_k, y_k)\, h + f'_x(x_k, y_k)\frac{h^2}{2} +$$
$$+ f'_y(x_k, y_k)\, f_k \frac{h^2}{2} + O(h^3) = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 + O(h^3). \quad (5.192)$$

Но точное значение решения при условии $y(x_k) = y_k$ равняется

$$y(x_k + h) = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 + O(h^3) \quad (5.193)$$

. Сравнивая формулы (5.192) и (5.193), видим, что значения $y(x_k + h)$ и $y_{к+1}$ могут различаться только в величинах порядка не менее h^3. Отсюда, как в конце п. 31, легко заключить, что суммарная ошибка метода имеет порядок $1/n^2$ или, что то же, порядок h^2. Значит, если число точек деления увеличить в 10 раз, то точность повысится в 100 раз.

Еще более точный результат получится, если вычислять по схеме:

$$f_k = f(x_k, y_k),\ \alpha_k = f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{f_k h}{2}\right),\ \beta_k = f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{\alpha_k h}{2}\right),$$

$$\gamma_k = f(x_k + h,\ y_k + \beta_k h),\ y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(f_k + 2\alpha_k + 2\beta_k + \gamma_k)\, h.$$

Вычисления, подобные (5.192), показывают, что ошибка на каждом шаге здесь имеет порядок h^5, а потому суммарная ошибка — порядок h^4. Значит, если число точек деления увеличится в 10 раз, то точность повысится в 10 000 раз.

33. Метод Адамса. Этот метод основан на второй интерполяционной формуле Ньютона, которую мы применим для производной $y'(x)$ от решения, начинам от некоторого значения

$x_k = x_0 + kh$:

$$y'(x) = y'_k + \Delta y'_{k-1}\frac{x - x_k}{h} + \frac{\Delta^2 y'_{k-2}}{2!}\frac{x - x_k}{h}\left(\frac{x - x_k}{h} + 1\right) +$$
$$+ \frac{\Delta^3 y'_{k-3}}{3!}\frac{x - x_k}{h}\left(\frac{x - x_k}{h} + 1\right)\left(\frac{x - x_k}{h} + 2\right). \quad (5.194)$$

При этом в указанной формуле мы вместо $t = x_{k+1} - x$ подставили $x_к - x = -(x - x_к)$ и соответственно вместо $y_{к+1}$ — значение $y'_к$; кроме того, мы заменили знак приближенного равенства знаком точного равенства, хотя, конечно, формула (5.194) приближенная и ее ошибка имеет порядок $\Delta^4 y'$, т. е. h^4. Интегрирование формулы (5.194) от

x_k до $x_{k+1} = x_k + h$

дает после подстановки

$$\frac{x - x_k}{h} = s$$

$$y_{k+1}=y_k+\left(y'_k+\frac{1}{2}\Delta y'_{k-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 y'_{k-2}+\frac{3}{8}\Delta^3 y'_{k-3}\right)h. \tag{5.195}$$

Погрешность формулы (5.195) получается в результате интегрирования погрешности формулы (5.194), т. е. имеет порядок h^5 .

Применяется формула (5.195) следующим образом, Сначала каким-либо способом, например с помощью формулы Тейлора, п. 24, или с помощью метода Рунге —Кутта. п. 32, находим значения

$$y_1=y(x_0+h),\quad y_2=y(x_0+2h)\quad \text{и}\quad y_3=y(x_0+3h).$$

Затем вычисляем соответствующие значения

$$y'_0=f(x_0,\ y_0),\quad y'_1=f(x_1,\ y_1),\quad y'_2=f(x_2,\ y_2),\quad y'_3=f(x_3,\ y_3),$$

с помощью которых находим

$$\Delta y'_0=y'_1-y'_0,\ \Delta y'_1,\ \Delta y'_2,\ \Delta^2 y'_0=\Delta y'_1-\Delta y'_0,\ \Delta^2 y'_1,\ \Delta^3 y'_0=\Delta^2 y'_1-\Delta^2 y'_0.$$

Далее, полагая в формуле (5.195) $к = 3$, вычисляем y_4,, а с его помощью

$$y'_4=f(x_4,\ y_4),\ \Delta y'_3=y'_4-y'_3,\ \Delta^2 y'_2,\ \Delta^3 y'_1.$$

Затем, полагая в формуле (5.195) $k = 4$, вычисляем y_5, далее с его помощью $y'_5 = f(x_5, y_5)$ и т. д. Вычисления проходят по схеме

x	y	$y'=f(x,y)$	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	$\Delta^3 y'$
x_{k-3}	y_{k-3}	y'_{k-3}	$\Delta y'_{k-3}$	$\Delta^2 y'_{k-3}$	$\Delta^3 y'_{k-3}$
x_{k-2}	y_{k-2}	y'_{k-2}	$\Delta y'_{k-2}$	$\Delta^2 y'_{k-2}$	$\Delta^3 y'_{k-2}$
x_{k-1}	y_{k-1}	y'_{k-1}	$\Delta y'_{k-1}$	$\Delta^2 y'_{k-1}$	
x_k	y_k	y'_k	$\Delta y'_k$		
x_{k+1}	y_{k+1} →	y'_{k+1}			

34. Метод Милна. С помощью первой интерполяционной формулы Ньютона можно получить еще один метод, который является одним из наиболее эффективных. Мы приведем лишь окончательный результат.

Вычисления в методе Милна проходят по формулам

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y}_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}\,(2y'_{k-2} - y'_{k-1} + 2y'_k) \\ \qquad\qquad\qquad (\text{где } y'_i = f(x_i,\ y_i)), \\ \bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1},\ \bar{y}_{k+1}), \\ y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}\,(y'_{k-1} + 4y'_k + \bar{y}'_{k+1}) \end{array}\right\} (k = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots). \tag{5.196}$$

При этом, как и в методе Адамса, значения $y_O,\ y_1,\ y_2,\ y_3$ должны быть найдены каким-либо иным способом. После этого, полагая в формулах (5.196) $k = 3$, находим последовательно $\bar{y}_4$, $\bar{y}'_4$, y_4. Затем, полагая $k = 4$, находим $\bar{y}_5$, $\bar{y}'_5$, y_5 и т. д. Найденные значения $y_4,\ y_5,\ y_6,\ \ldots$ и являются приближенными значениями решения $y\ (x)$ при $x = x_4,\ x_5,\ x_6,\ \ldots$, где $x_i = x_o + ih$.

Оказывается, что абсолютная погрешность, получающаяся при вычислении $y_{\kappa+1}$ по данному методу, приблизительно равна

$$\frac{|y_{k+1} - \bar{y}_{k+1}|}{29}.$$

Поэтому при вычислениях можно попутно проверять, не выходит ли эта погрешность за рамки принятой степени точности вычислений. Если это где-либо произойдет, то, начиная с соответствующего значения x, надо уменьшить шаг, имея в виду, что суммарная ошибка данного метода имеет порядок h^4.

Микромодуль 8
Индивидуальные тестовые задания

Показать, что указанные функции, зависящие от произвольных постоянных, удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

Функции Дифференциальные уравнения

1. $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$.	$\frac{dy}{dx} + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.
2. $y = Cx + C - C^2$.	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$.
3. $y^2 = 2Cx + C^2$.	$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$.
4. $y^2 = Cx^2 - \frac{a^2C}{1+C}$.	$xy\left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = (x^2 - y^2 - a^2)\frac{dy}{dx}$.
5. $y = C_1x + \frac{C_2}{x} + C_3$.	$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{3}{x}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.
6. $y = (C_1 + C_2x)e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}$.	$\frac{d^2y}{dx^2} - 2k\frac{dy}{dx} + k^2y = e^x$.
7. $y = C_1e^{a\arcsin x} + C_2e^{-a\arcsin x}$.	$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$.
8. $y = \frac{C_1}{x} + C_2$.	$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = 0$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

9. $y\,dx - x\,dy = 0$. *Отв.* $y = Cx$. **10.** $(1+u)v\,du + (1-v)u\,dv = 0$. *Отв.* $\ln uv + u - v = C$. **11.** $(1+y)\,dx - (1-x)\,dy = 0$. *Отв.* $(1+y)(1-x) = C$. **12.** $(t^2 - xt^2)\frac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$. *Отв.* $\frac{t+x}{tx} + \ln\frac{x}{t} = C$. **13.** $(y-a)\,dx + x^2\,dy = 0$. *Отв.* $(y-a) = Ce^{\frac{1}{x}}$. **14.** $z\,dt - (t^2 - a^2)\,dz = 0$. *Отв.* $z^{2a} = C\frac{t-a}{t+a}$. **15.** $\frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$. *Отв.* $x = \frac{y+C}{1-Cy}$. **16.** $(1+s^2)\,dt - \sqrt{t}\,ds = 0$. *Отв.* $2\sqrt{t} - \operatorname{arctg} s = C$. **17.** $d\rho + \rho\operatorname{tg}\theta\,d\theta = 0$. *Отв.* $\rho = C\cos\theta$. **18.** $\sin\theta\cos\varphi\,d\theta - \cos\theta\sin\varphi\,d\varphi = 0$. *Отв.* $\cos\varphi = C\cos\theta$. **19.** $\mathrm{sc}^2\theta\operatorname{tg}\varphi\,d\theta + \mathrm{sc}^2\varphi\operatorname{tg}\theta\,d\varphi = 0$. *Отв.* $\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi = C$. **20.** $\mathrm{sc}^2\theta\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi + \mathrm{sc}^2\varphi\operatorname{tg}\theta\,d\theta = 0$. *Отв.* $\sin^2\theta + \sin^2\varphi = C$. **21.** $(1+x^2)\,dy - \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$. *Отв.* $\arcsin y - \operatorname{arctg} x = C$. **22.** $\sqrt{1-x^2}\,dy - \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$. *Отв.* $y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2} = C$. **23.** $3e^x\operatorname{tg} y\,dx + (1-e^x)\,\mathrm{sc}^2 y\,dy = 0$. *Отв.* $\operatorname{tg} y = C(1-e^x)^3$. **24.** $(x - y^2x)\,dx + (y - x^2y)\,dy = 0$. *Отв.* $x^2 + y^2 = x^2y^2 + C$.

Задачи на составление дифференциальных уравнений

25. Доказать, что кривая, у которой угловой коэффициент касательной в любой точке пропорционален абсциссе точки касания, есть парабола. *Отв.* $y = ax^2 + C$.

26. Найти такую кривую, проходящую через точку (0, —2), чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной на три единицы. *Отв.* $y = e^x - 3$.

27. Найти кривую, проходящую через точку (1, 1), чтобы угловой коэффициент касательной к кривой в любой точке был пропорционален квадрату ординаты этой точки. *Отв.* $k(x-1)y - y + 1 = 0$.

28. Найти кривую, для которой угловой коэффициент касательной в любой точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат. *Отв.* $y = Cx^n$.
29. Через точку (2, 1) провести кривую, для которой касательная в любой точке совпадает с направлением радиуса-вектора, проведенного из начала координат в ту же точку. *Отв.* $y =(1/2)x$.
30. Найти в полярных координатах уравнение такой кривой, в каждой точке которой тангенс угла между радиусом-вектором и касательной равен обратной величине радиуса-вектора, взятой с обратным знаком. *Отв.* $r(\theta + C)= 1$.
31. Найти в полярных координатах уравнение такой кривой, в каждой точке которой тангенс угла, образуемого радиусом-вектором с касательной, равен квадрату радиуса-вектора. *Отв.* $r^2 = (\theta+ C) 2$.
32. Доказать, что кривая, обладающая тем свойством, что все ее нормали проходят через постоянную точку, есть окружность.
33. Найти такую кривую, чтобы в каждой ее точке длина подкасательной равнялась удвоенной абсциссе. *Отв.* $y=C\sqrt{x}$.
34. Найти кривую, для которой радиус-вектор равен длине касательной между точкой касания и осью x.

Решение. По условиям задачи

$$\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{x^2+y^2},$$

откуда

$$\frac{dy}{y}=\pm\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем два семейства кривых: $y = Cx$ и $y=C/x$.

35. По закону Ньютона скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Если температура воздуха равна 20° С и тело в течение 20 мин. охлаждается со 100° до 60° С, то через сколько времени его температура понизится до 30° С?

Решение. Дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{dT}{dt}=k(T-20).$$

Интегрируя, находим:

$T-20=Ce^{kt}$; $T=100$ при $t=0$; $T=60$ при $t=20$;

поэтому

$$C=80;\ 40=Ce^{20k},\ e^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$$

следовательно

$$T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}.$$

Полагая $T=30$, найдем $t = 60$ мин.

36. В какое время T вода вытечет через отверстие 0,5 *см*^{2} на дне конической воронки высотой 10 *см* с углом при вершине d = 60°?

Решение. Подсчитаем двумя способами объем воды, вытекшей за время между моментами t и $t+\Delta t$. При постоянной скорости v за 1 *сек* через отверстие вытекает цилиндр воды с основанием 0,5 *см*^{2} и высотой v, а за время Δt вытекает объем воды dv, равный

$$-dv=-0{,}5v\,dt=-0{,}3\sqrt{2gh}\,dt$$

(Скорость v истечения воды из отверстия, находящегося на расстоянии h от свободной поверхности, дается формулой

$$v=0{,}6\sqrt{2gh},$$

где g—ускорение силы тяжести.)

С другой стороны, вследствие утечки высота воды получает отрицательное «приращение» dh, и дифференциал объема вытекшей воды равен

$$-dv=\pi r^2\,dh=\frac{\pi}{3}(h+0{,}7)^2\,dh.$$

Таким образом,

$$\frac{\pi}{3}(h+0{,}7)^2\,dh=-0{,}3\sqrt{2gh}\,dt,$$

отсюда

$$t=0{,}0315\,(10^{5/2}-h^{5/2})+0{,}0732\,(10^{3/2}-h^{3/2})+0{,}078\,(\sqrt{10}-\sqrt{h}).$$

Полагая $h = 0$, получаем время истечения Т = 12,5 сек.

37. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения ω. Найти зависимость этой угловой скорости от времени, если известно, что диск, начав вращаться со скоростью 100 об/мин, по истечении 1 мин. вращается со скоростью 60 об/мин. *Отв.* $\omega = 100\,(^3/_5)^t$ об/мин.

38. Допустим, что в вертикальном воздушном столбе давление на каждом уровне обусловлено давлением вышележащих слоев. Найти зависимость давления от высоты, если известно, что на уровне моря это давление равно 1 *кг* на 1 *см*^{2}, а на высоте 500 *м* 0,92 *кг* на 1 *см*^{2}.

Указание. Воспользоваться законом Бойля — Мариотта, в силу которого плотность газа пропорциональна давлению. Дифференциальное уравнение задачи

$dp=-kp\,dh$, откуда $p=e^{-0{,}00017h}$. *Отв.* $p=e^{-0{,}00017h}$.

Проинтегрировать следующие однородные дифференциальные уравнения:
39. $(y-x)\,dx+(y+x)\,dy=0$. *Отв.* $y^2+2xy-x^2=C$. **40.** $(x+y)\,dx+x\,dy=0$. *Отв.* $x^2+2xy=C$. **41.** $(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0$. *Отв.* $\ln(x^2+y^2)^{1/2}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$. **42.** $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$. *Отв.* $1+2Cy-C^2x^2=0$. **43.** $(8y+10x)\,dx+(5y+7x)\,dy=0$. *Отв.* $(x+y)^2\times(2x+y)^3=C$. **44.** $(2\sqrt{st}-s)\,dt+t\,ds=0$. *Отв.* $te^{\sqrt{\frac{s}{t}}}=C$ или $s=t\ln^2\frac{C}{t}$. **45.** $(t-s)\,dt+t\,ds=0$. *Отв.* $te^{\frac{s}{t}}=C$ или $s=t\ln\frac{C}{t}$. **46.** $xy^2\,dy=(x^3+y^3)\,dx$. *Отв.* $y=x\sqrt[3]{3\ln Cx}$. **47.** $x\cos\frac{y}{x}(y\,dx+x\,dy)=y\sin\frac{y}{x}(x\,dy-y\,dx)$. *Отв.* $xy\cos\frac{y}{x}=C$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным: **48.** $(3y-7x+7)\,dx-(3x-7y-3)\,dy=0$. *Отв.* $(x+y-1)^5\times(x-y-1)^2=C$. **49.** $(x+2y+1)\,dx-(2x+4y+3)\,dy=0$. *Отв.* $\ln(4x+8y+5)+8y-4x=C$. **50.** $(x+2y+1)\,dx-(2x-3)\,dy=0$. *Отв.* $\ln(2x-3)-\frac{4y+5}{2x-3}=C$.

51. Определить кривую, поднормаль которой есть среднее арифметическое между абсциссой и ординатой. *Отв.* $(x-y)^2(x+2y)=C$.

52. Определить кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого, касательной на оси *Оу,* к радиусу-вектору равно постоянной величине.

Решение. По условиям задачи

$$\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=m,$$

откуда

$$\left(\frac{x}{C}\right)^m-\left(\frac{C}{x}\right)^m=\frac{2y}{x}.$$

53. Определить кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого нормалью на оси *Ох,* к радиусу-вектору равно постоянной величине.

Решение. По условию задачи

$$\frac{x+y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=m,$$

откуда $x^2+y^2=m^2(x-C)^2$.

54. Определить кривую, у которой отрезок, отсекаемой касательной на оси *Оу,* равен *a* sc θ, где θ — угол между радиусом-вектором и осью *x*.

Решение. Так как tg 0=y/x и по условию задачи y — $xdy/dx=a$ sc 0, то получаем:

$$y-x\frac{dy}{dx}=a\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x},$$

откуда

$$y=\frac{x}{2}\left[e^{\frac{a}{x}+b}-e^{-\left(\frac{a}{x}+b\right)}\right].$$

55. Определить кривую, для которой отрезок, отсекаемый на оси ординат нормалью, проведенной в какой-нибудь точке кривой, ранен расстоянию этой точки от начала координат.

Решение. Отрезок, отсекаемый нормалью на оси Oy, равен $y+x/y;$ поэтому, по условию задачи, имеем:

$$y+\frac{x}{y'}=\sqrt{x^2-y^2},\quad \text{откуда}\quad x^2=C\,(2y+C).$$

56. Найти форму зеркала, которое все лучи, выходящие из одной и той же точки 0, отражало бы параллельно данному направлению.

Решение. За ось x принимаем данное направление, точку 0 — за начало координат. Пусть $0M$ — падающий луч, MP — отраженный, MQ — нормаль к искомой кривой:

$$\alpha=\beta;\quad OM=OQ,\quad NM=y,$$

$$NQ=NO+OQ=-x+\sqrt{x^2+y^2}=y\operatorname{ctg}\beta=y\frac{dy}{dx},$$

откуда

$$y\,dy=(-x+\sqrt{x^2+y^2})\,dx;$$

интегрируя, имеем: y^2 = C^2+2Cx.

Проинтегрировать следующие линейные дифференциальные уравнения:

57. $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$. *Отв.* $2y=(x+1)^4+C\,(x+1)^2$. **58.** $y'-a\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}$. *Отв.* $y=Cx^a+\frac{x}{1-a}-\frac{1}{a}$. **59.** $(x-x^3)\,y'+(2x^2-1)\,y-ax^3=0$. *Отв.* $y=ax+Cx\sqrt{1-x^2}$. **60.** $\frac{ds}{dt}\cos t+s\sin t=1$. *Отв.* $s=\sin t+C\cos t$. **61.** $\frac{ds}{dt}+s\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$. *Отв.* $s=\sin t-1+Ce^{-\sin t}$. **62.** $y'-\frac{n}{x}y=e^xx^n$. *Отв.* $y=x^n\,(e^x+C)$. **63.** $y'+\frac{n}{x}y=\frac{a}{x^n}$. *Отв.* $x^ny=ax+C$. **64.** $y'+y=\frac{1}{e^x}$. *Отв.* $e^xy=x+C$. **65.** $y'+\frac{1-2x}{x^2}y-1=0$. *Отв.* $y=x^2\left(1+Ce^{\frac{1}{x}}\right)$.

Проинтегрировать уравнения Бернулли:

66. $y'+xy=x^3y^3$. *Отв.* $y^2(x^2+1+Ce^{x^2})=1$. **67.** $(1-x^2)y'-xy-axy^2=0$. *Отв.* $(C\sqrt{1-x^2}-a)y=1$. **68.** $3y^2y'-ay^3-x-1=0$. *Отв.* $a^2y^3=Ce^{ax}-a(x+1)-1$. **69.** $y'(x^2y^3+xy)=1$. *Отв.* $x\left[(2-y^2)e^{\frac{1}{2}y^2}+C\right]=e^{\frac{1}{2}y^2}$. **70.** $(y\ln x-2)y\,dx=x\,dy$. *Отв.* $y(Cx+\ln x+1)=1$. **71.** $y-y'\cos x=y^2\cos x(1-\sin x)$. *Отв.* $y=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{sc} x}{\sin x+C}$.

Проинтегрировать следующие уравнения в полных дифференциалах:

72. $(x^2+y)\,dx+(x-2y)\,dy=0$. *Отв.* $\dfrac{x^3}{3}+yx-y^2=C$. **73.** $(y-3x^2)\,dx-(4y-x)\,dy=0$. *Отв.* $2y^2-xy+x^3=C$. **74.** $(y^3-x)y'=y$. *Отв.* $y^4=4xy+C$. **75.** $\left[\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}\right]dx+\left[\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy=0$. *Отв.* $\ln\dfrac{y}{x}-\dfrac{xy}{x-y}=C$.

76. $2(3xy^2+2x^3)\,dx+3(2x^2y+y^2)\,dy=0$. *Отв.* $x^4+3x^2y^2+y^3=C$.

77. $\dfrac{x\,dx+(2x+y)\,dy}{(x+y)^2}=0$. *Отв.* $\ln(x+y)-\dfrac{x}{x+y}=C$. **78.** $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx=\dfrac{2y\,dy}{x^3}$. *Отв.* $x^2+y^2=Cx^3$. **79.** $\dfrac{x^2\,dy-y^2\,dx}{(x-y)^2}=0$. *Отв.* $\dfrac{xy}{x-y}=C$.

80. $x\,dx+y\,dy=\dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$. *Отв.* $x^2+y^2-2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=C$.

81. Определить кривую, обладающую тем свойством, что произведение квадрата расстояния любой ее точки от начала координат на отрезок, отсекаемый на оси абсцисс нормалью в этой точке, равно кубу абсциссы этой точки. *Отв.* $y^2(2x^2+y^2)=C$.

82. Найти огибающую следующих семейств линий:
a) $y=Cx+C^2$.
Отв. $x^2+4y=0$. b) $y=\dfrac{x}{C}+C^2$. *Отв.* $27x^2=4y^3$. c) $\dfrac{x}{C}-\dfrac{y}{C^3}=2$. *Отв.* $27y=x^3$. d) $C^2x+Cy-1=0$. *Отв.* $y^2+4x=0$. e) $(x-C)^3+(y-C)^2=C^3$. *Отв.* $x=0$; $y=0$. f) $(x-C)^2+y^2=4C$. *Отв.* $y^2=4x+4$. g) $(x-C)^2+(y-C)^2=4$. *Отв.* $(x-y)^2=8$. h) $Cx^2+C^2y=1$. *Отв.* $x^4+4y=0$.

83. Прямая перемещается так, что сумма отрезков, отсекаемых ею на осях координат, сохраняет постоянную величину *a*. Составить уравнение огибающей всех положений прямой.

Отв. $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ (парабола).

85. Найти огибающую семейства прямых, на которых оси координат отсекают отрезок постоянной длины *a*.
Отв. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

85. Найти огибающую семейства окружностей, диаметрами которых служат удвоенные ординаты параболы
$y^2=2px$. *Отв.* $y^2=2p\left(x+\dfrac{p}{2}\right)$.

86. Найти огибающую семейства окружностей, центры которых лежат на параболе $y^2 = 2px$, причем все окружности семейства проходят через вершину этой параболы.

Отв. Циссоида $x^3+y^2(x+2p)=0$.

87. Найти огибающую семейства окружностей, диаметрами которых служат перпендикулярные к оси x хорды эллипса $b^2x^2 + a^2y^3 = a^2b^2$.

Отв. $\frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

88.Найти эволюту эллипса

$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$

как огибающую его нормалей.

Отв. $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$.

Проинтегрировать следующие уравнения (уравнения Лагранжа):

89. $y=2xy'+y'^2$. *Отв.* $x=\frac{C}{3p^2}-\frac{2}{3}p$; $y=\frac{2C-p^3}{3p}$. **90.** $y=xy'^2+y'^2$. *Отв.* $y=(\sqrt{x+1}+C)^2$. Особое решение: $y=0$. **91.** $y=x(1+y')+(y')^2$. *Отв.* $x=Ce^{-p}-2p+2$; $y=C(p+1)e^{-p}-p^2+2$. **92.** $y=yy'^2+2xy'$. *Отв.* $4Cx = 4C^2- y^2$. 93. Найти кривую, имеющую постоянную нормаль. *Отв.* $(x - C)^2+y^2 = a^2$. Особое решение: $y=\pm a$.

Проинтегрировать данные уравнения Клеро:

94. $y=xy'+y'-y'^2$.

Отв. $y=Cx+C-C^2$. Особое решение: $4y=(x+1)^2$. **95.** $y=xy'+\sqrt{1-y'^2}$. *Отв.* $y=Cx+\sqrt{1-C^2}$. Особое решение: $y^2-x^2=1$. **96.** $y=xy'+y'$. *Отв.* $y=Cx+C$. **97.** $y=xy'+\frac{1}{y'}$. *Отв.* $y=Cx+\frac{1}{C}$. Особое решение: $y^2=4x$. **98.** $y=xy'-\frac{1}{y'^2}$. *Отв.* $y=Cx-\frac{1}{C^2}$. Особое решение: $y^3=\frac{27}{4}x^2$.

99. Площадь треугольника, образованного касательной к искомой кривой и осями координат, есть величина постоянная. Найти кривую. *Отв.* Равнобокая гипербола $4xy = \pm a^2$. Кроме того, любая прямая семейства $y=Cx\pm a\sqrt{C}$.

100. Найти такую кривую, чтобы отрезок ее касательной между координатными осями имел постоянную длину a.

Отв. $y=Cx\pm\frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$.

Особое решение:

$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

101. Найти кривую, касательные к которой образуют на осях отрезки, сумма которых равна $2a$.

Отв. $y=Cx-\frac{2aC}{1-C}$.

Особое решение: $(y-x-2a)^2=8ax$.

102. Найти кривые, для которых произведение расстояния любой касательной до двух данных точек постоянно. *Отв.* Эллипсы и гиперболы. (Ортогональные и изогональные траектории.)

103. Найти ортогональные траектории семейства кривых $y=ax^n$. *Отв.* $x^2+ny^2=C$.

104. Найти ортогональные траектории семейства парабол $y^2=2p(x-\alpha)$ (α—параметр семейства).

Отв. $y=Ce^{-\frac{x}{p}}$.

105. Найти ортогональные траектории семейства кривых $x^2-y^2=\alpha$ (α —параметр). *Отв.* $y=C/x$.

106. Найти ортогональные траектории семейства окружностей $x^2+y^2=2ax$. *Отв.* Окружности: $y=C(x^2+y^2)$.

107. Найти ортогональные траектории равных парабол, касающихся в вершине данной прямой. *Отв.* Если $2p$— параметр парабол и данная прямая взята за ось *Oy,* то уравнение траектории будет

$$y+C=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{p}}\,x^{\frac{3}{2}}.$$

108. Найти ортогональные траектории циссоид

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x}.$$

Отв. $(x^2+y^2)^2=C(y^2+2x^2)$

109. Найти ортогональные траектории лемнискат

$$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)a^2.$$

Отв. $(x^2+y^2)^2=Cxy$.

110. Найти изогональные траектории семейства кривых: $x^2=2a(x-y\sqrt{3})$, где a—переменный параметр, если постоянный угол, который образует траектории с линиями семейства, равен $\omega=60^\circ$.

Р е ш е н и е. Находим дифференциальное уравнение семейства

$$y'=\frac{2y}{x}-\sqrt{3}$$

и заменяем y' выражением

$$q=\frac{y'-\operatorname{tg}\omega}{1+y'\operatorname{tg}\omega}.$$

Если $\omega=60^\circ$, то

$$q=\frac{y'-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}y'},$$

и мы получаем дифференциальное выражение

$$\frac{y'-\sqrt{3}}{1+y'\sqrt{3}}=\frac{2y}{x}-\sqrt{3}.$$

Общий интеграл

$$y^2=C\,(x-y\sqrt{3})$$

дает искомое семейство траекторий.

111. Найти изогональные траектории семейства парабол $y^2 = 4Cx$,

когда ω =45°

Отв. $y^2-xy+2x^2=Ce^{\frac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2y-x}{x\sqrt{7}}}$.

112. Найти изогональные траектории семейства прямых $y = Cx$ для случая

ω = 30°, 45°. *Отв.* Логарифмические спирали

$$\begin{cases} x^2+y^2=e^{2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}; \\ x^2+y^2=e^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}. \end{cases}$$

113. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

Исключить C_1 и C_2. *Отв.* $y''-y = 0$.

114. Написать дифференциальное уравнение всех окружностей, лежащих в одной плоскости. *Отв.* $(1+y'^2)y'''-3y'y''^2 = 0$.

115. Написать дифференциальное уравнение всех центральных кривых второго порядка, главные оси которых совпадают с осями Ox, Oy. *Отв.* $x\,(yy'' + y'^2) - y'y = 0$.

116. Даны дифференциальное уравнение $y'''-2y'' - y' + 2y = 0$ и его общее решение

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}.$$

Требуется: 1) проверить, что данное семейство кривых действительно является общим решением; 2) найти частное решение, если при $x = 0$ имеем

y =1, $y' = 0$, $y'' = -1$.

Отв. $y=\frac{1}{6}(9e^x+e^{-x}-4e^{2x})$.

117. Даны дифференциальные уравнения $y'' =1/2y'$ и его общее решение

$$y=\pm\frac{2}{3}(x+C_1)^{\frac{3}{2}}+C_2.$$

Требуется: 1) проверить, что данное семейство кривых действительно является общим решением; 2) найти интегральную кривую, проходящую через точку (1, 2), если касательная в этой точке составляет с положительным направлением оси Ox угол 45°.

Отв. $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{4}{3}$.

Проинтегрировать некоторые простейшие типы дифференциальных уравнений второго порядка, приводящиеся к уравнениям первого порядка.

118. $xy'''=2$. *Отв.* $y=x^2\ln x+C_1x^2+C_2x+C_3$;

выделить частное решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $x=1$ $y=1$; $y'=1$; $y''=3$.

19. $y^{(n)}=x^m$. *Отв.* $y=\frac{m!\,x^{m+n}}{(m+n)!}+C_1x^{n-1}+\ldots+C_{n-1}x+C_n$.

120. $y''=a^2y$. *Отв.* $ax=\ln(ay+\sqrt{a^2y^2+C_1})+C_2$ или $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$.

121. $y''=\frac{a}{y^3}$. *Отв.* $(C_1x+C_2)^2=C_1y^2-a$.

В примерах 122—125 выделить частное решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $x=0$, $y=-1$; $y'=0$.

122. $xy''-y'=x^2e^x$.
Отв. $y=e^x(x-1)+C_1x^2+C_2$. Частное решение: $y=e^x(x-1)$.
123. $yy''-(y')^2+(y')^3=0$. *Отв.* $y+C_1\ln y=x+C_2$. Частное решение: $y=-1$.

124. $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$. *Отв.* $y=C_2+C_1\sin x-x-\frac{1}{2}\sin 2x$. Частное решение: $y=2\sin x-\sin x\cos x-x-1$. **125.** $(y'')^2+(y')^2=a^2$. *Отв.* $y=C_2-a\cos(x+C_1)$. Частные решения: $y=a-1-a\cos x$; $y=a\cos x-(a+1)$. (Указание. Параметрическая форма $y''=a\cos t$, $y'=a\sin t$.) **126.** $y''=\frac{1}{2y'}$. *Отв.* $y=\pm\frac{2}{3}(x+C_1)^{3/2}+C_2$. **127.** $y'''=y''^2$. *Отв.* $y=(C_1-x)[\ln(C_1-x)-1]+C_2x+C_3$. **128.** $y'y'''-3y''^2=0$. *Отв.* $x=C_1y^2+C_2y+C_3$.

Проинтегрировать следующие линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

129. $y''=9y$. *Отв.* $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$.
130. $y''+y=0$. *Отв.* $y=A\cos x+B\sin x$. **131.** $y''-y'=0$.

Отв. $y=C_1+C_2e^x$. **132.** $y''+12y=7y'$. *Отв.* $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$. **133.** $y''-4y'+4y=0$. *Отв.* $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$. **134.** $y''+2y'+10y=0$. *Отв.* $y=e^{-x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$. **135.** $y''+3y'-2y=0$.

Отв. $y=C_1e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}x}+C_2e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}x}$. **136.** $4y''-12y'+9y=0$.

Отв. $y=(C_1+C_2x)e^{3/2x}$. **137.** $y''+y'+y=0$. *Отв.* $y=e^{-\frac{1}{2}x}\times$ $\times\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$.

138. Два одинаковых груза подвешены к концу пружины. Найти движение, которое получит один груз, если другой оборвется. *Отв.* $x=a\cos[\sqrt{(g/a)}t]$. Где a есть увеличение длины пружины под действием одного груза в состоянии покоя.

139. Материальная точка массы m притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию. Множитель пропорциональности равен k. Расстояние между центрами равно $2c$. В начальный момент точка находится на линии соединения центров, на расстоянии a от ее середины. Начальная скорость равна нулю. Найти закон движения точки.

Отв. $x=a\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)$.

140. $y^{IV}-5y''+4y=0$. *Отв.* $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$. **141.** $y'''-2y''-y'+2y=0$. *Отв.* $y=C_1e^{2x}+C_2e^x+C_3e^{-x}$. **142.** $y'''-3ay''+3a^2y'-a^3y=0$. *Отв.* $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{ax}$. **143.** $y^V-4y'''=0$. *Отв.* $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{2x}+C_5e^{-2x}$. **144.** $y^{IV}+2y''+9y=0$. *Отв.* $y=(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)e^{-x}+(C_3\cos\sqrt{2}x+C_4\sin\sqrt{2}x)e^x$.

145. $y^{IV}-8y''+16y=0$. *Отв.* $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3xe^{2x}+C_4xe^{-2x}$.

146. $y^{IV}+y=0$.

Отв. $y=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

147. $y^{IV}-a^4y=0$.

Найти общее решение и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям при $x_0=0$, $y=1$, $y'=0$, $y''=-a^2$, $y'''=0$

Отв. Общее решение: $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax$.

Частное решение: $y_0=\cos ax$.

Проинтегрировать следующие неоднородные линейные дифференциальные уравнения (найти общее решение):

148. $y''-7y'+12y=x$.

Отв. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+\frac{12x+7}{144}$. **149.** $s''-a^2s=t+1$. *Отв.* $s=C_1e^{at}+C_2e^{-at}-\frac{t+1}{a^2}$. **150.** $y''+y'-2y=8\sin 2x$. *Отв.* $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}-\frac{1}{5}(6\sin 2x+2\cos 2x)$. **151.** $y''-y=5x+2$. *Отв.* $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-5x-2$.

152. $s''-2as'+a^2s=e^t$ $(a\neq 1)$. *Отв.* $s=C_1e^{at}+C_2te^{at}+\frac{e^t}{(a-1)^2}$.

153. $y''+6y'+5y=e^{2x}$. *Отв.* $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-5x}+\frac{1}{21}e^{2x}$.

154. $y''+9y=6e^{3x}$. *Отв.* $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{3}e^{3x}$. **155.** $y''-3y'=2-6x$. *Отв.* $y=C_1+C_2e^{3x}+x^2$. **156.** $y''-2y'+3y=e^{-x}\cos x$. *Отв.* $y=e^{x}(A\cos\sqrt{2}x+B\sin\sqrt{2}x)+\frac{e^{-x}}{41}(5\cos x-4\sin x)$. **157.** $y''+4y=2\sin 2x$. *Отв.* $y=A\sin 2x+B\cos 2x-\frac{x}{2}\cos 2x$. **158.** $y'''-4y''+5y'-2y=2x+3$. *Отв.* $y=(C_1+C_2x)e^{x}+C_3e^{2x}-x-4$. **159.** $y^{\text{IV}}-a^4y=5a^4e^{ax}\sin ax$. *Отв.* $y=(C_1-\sin ax)e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax$. **160.** $y^{\text{IV}}+2a^2y''+a^4y=8\cos ax$. *Отв.* $y=(C_1+C_2x)\cos ax+(C_3+C_4x)\sin ax-\frac{x^2}{a^2}\cos ax$.

161. Найти интегральную кривую уравнения $y''+k^2y=0$, проходящую через точку $M(x_0, y_0)$ и касающуюся в точке прямой $y=ax$. *Отв.*

$$y=y_0\cos k(x-x_0)+\frac{a}{k}\sin k(x-x_0).$$

162. Найти решение уравнения $y''+2hy'+n^2y=0$, удовлетворяющее условиям $y=a$, $y'=C$ при $x=0$. *Отв.* При $h<n$

$$y=e^{-hx}\left(a\cos\sqrt{n^2-h^2}\,x+\frac{C+ah}{\sqrt{n^2-h^2}}\sin\sqrt{n^2-h^2}\,x\right);$$

при $h=n$

$y=e^{-hx}[(C+ah)x+a]$; при $h>n$ $y=\frac{C+a(h+\sqrt{h^2-n^2})}{2\sqrt{h^2-n^2}}e^{-(h-\sqrt{h^2-n^2})x}-\frac{C+a(h-\sqrt{h^2-n^2})}{2\sqrt{h^2-n^2}}e^{-(h+\sqrt{h^2-n^2})x}$.

163. Найти решение уравнения

$$y''+n^2y=h\sin px\quad (p\neq n),$$

удовлетворяющее условиям: $y=a$, $y'=C$ при $x=0$.

Отв. $y=a\cos nx+\frac{C(n^2-p^2)-hp}{n(n^2-p^2)}\sin nx+\frac{h}{n^2-p^2}\sin px$.

164. Груз весом 4 *кг* привешен к пружине и увеличивает ее длину на 1 *см*. Найти закон движения этого груза, полагая, что верхний конец пружины совершает гармоническое колебание, закон которого

$$y=\sin\sqrt{100g}t,$$

где y измеряется по вертикали.

Решение. Обозначая через x вертикальную координату груза, считаемую от положения покоя, имеем:

$$\frac{4}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-k(x-y-l),$$

где l— длина пружины в свободном состоянии и k =400, как легко видеть из начальных условий. Отсюда

$$\frac{d^2x}{dt^2}+100gx=100g\sin\sqrt{100g}t+100lg.$$

Частный интеграл этого уравнения мы должны искать в виде

$$t(C_1\cos\sqrt{100g}t+C_2\sin\sqrt{100g}t)+g,$$

так как первый член правой части уравнения входит в решение однородного уравнения.

165. В условиях задачи 139 начальная скорость равна v_0 и направление перпендикулярно к прямой, соединяющей центры. Найти траектории.

Решение. Если начало координат взять в середине расстояния между центрами, то дифференциальные уравнения движения будут иметь следующий вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=k(C-x)-k(C+x)=-2kx,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-2ky.$$

Начальные данные при t = 0:

$x=a,\ dx/dt=0,\ y=0,\ dy/dt=v_0$

Интегрируя, находим:

$$x=a\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right),\quad y=v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right).$$

Отсюда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2 2k}{mv_0^2}=1$$

(эллипс).

166. Горизонтальная трубка вращается около вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Шар, помещенный внутри трубки, скользит по ней без трения. Найти закон движения шара, если в начальный момент он находится на оси вращения и имеет скорость v_0 (вдоль трубки).

Указание. Дифференциальное уравнение движения есть

$d^2r/dt^2=\omega^2 r$

Начальные данные:

$$r=0,\quad \frac{dr}{dt}=v_0$$

при $t = 0$.

Интегрируя, находим

$r=\frac{v_0}{2\omega}\left[e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right]$.

Применяя метод вариации произвольных постоянных, проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

167. $y''-7y'+6y=\sin x$. *Отв.* $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\frac{5\sin x+7\cos x}{74}$.

168. $y''+y=\operatorname{sc} x$. *Отв.* $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln\cos x$.

169. $y''+y=\frac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$. *Отв.* $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sqrt{\cos 2x}$.

Проинтегрировать следующие уравнения различных типов :

170 $yy''=y'^2+1$. *Отв.* $y=\frac{1}{2C_1}\left[e^{C_1(x-C_2)}+e^{-C_1(x-C_2)}\right]$.

171 (182). $\frac{x^2\,dy-y^2\,dx}{(x-y)^2}=0$. *Отв.* $\frac{xy}{x-y}=C$. **172 (183).** $y=xy'^2+y'^2$. *Отв.* $y=(\sqrt{x+1}+C)^2$. Особые решения: $y=0$; $x+1=0$.

173 (184). $y''+y=\operatorname{sc} x$. *Отв.* $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln\cos x$.

174 (185). $(1+x^2)\,y'-xy-a=0$. *Отв.* $y=ax+C\sqrt{1+x^2}$.

175 (186). $x\cos\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=y\cos\frac{y}{x}-x$. *Отв.* $xe^{\sin\frac{y}{x}}=C$. **176(187).** $y''-4y=e^{2x}\sin 2x$. *Отв.* $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{e^{2x}}{20}(\sin 2x+2\cos 2x)$. **177 (188).** $xy'+y-y^2\ln x=0$. *Отв.* $(\ln x+1+Cx)\,y=1$. **178 (189).** $(2x+2y-1)\,dx+(x+y-2)\,dy=0$. *Отв.* $2x+y-3\ln(x+y+1)=C$. **179 (190).** $3e^x\operatorname{tg} y\,dx+(1-e^x)\operatorname{sc}^2 y\,dy=0$. *Отв.* $\operatorname{tg} y=C(1-e^x)^3$.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

5.8. Определение и основные свойства кратных интегралов

1. Примеры, приводящие к понятию кратного интеграла. Рассмотрим тело (Ω), плотность ρ которого известна, но переменна, т. е. в разных точках различна, и предположим, что нам требуется подсчитать массу m этого тела. Аналогичная задача для линейного распределения массы была решена в микромодуле 20 пп. 1—2, которые мы советуем сейчас просмотреть. Пространственный случай исследуется совершенно аналогично линейному. Для этого разобьем мысленно (Ω) на кусочки—объемчики $(\Delta\Omega_1)$, $(\Delta\Omega_2)$, ..., $(\Delta\Omega_n)$ и выберем в каждом по точке соответственно M_1, M_2, ..., M_n (см. рис. 5.22, где картину надо представлять себе пространственной; нумерация кусочков производится в произвольном порядке). Если кусочки достаточно малые, то в каждом из них плотность можно без большой ошибки считать постоянной. Тогда массу первого кусочка $m_{(\Delta\Omega 1)}$ можно подсчитать как произведение плотности на объем, т. е. $\rho\ (M_1)\Delta\Omega_1$, масса второго кусочка находится аналогично и т. д. В целом получаем

$$m_{(\Omega)} \approx \rho\,(M_1)\,\Delta\Omega_1 + \rho\,(M_2)\,\Delta\Omega_2 + \ldots + \rho\,(M_n)\,\Delta\Omega_n = \sum_{k=1}^{n} \rho\,(M_k)\,\Delta\Omega_k,$$

где под $\Delta\Omega_к$ понимается объем кусочка ($\Delta\Omega_к$).

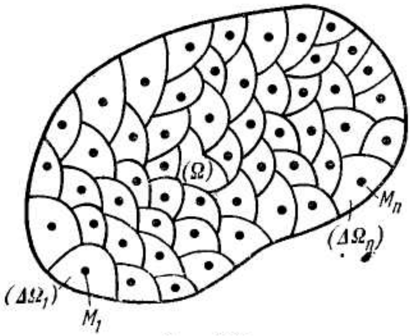


Рис.5.22.

Это равенство приближенное, так как плотность кусочков все же непостоянная; однако оно тем точнее, чем мельче разбиение, и в пределе получаем точное равенство

$$m_{(\Omega)} = \lim \sum_{k=1}^{n} \rho\,(M_k)\,\Delta\Omega_k. \tag{5.197}$$

Здесь предел берется в процессе безграничного измельчения рассматриваемого разбиения, когда линейные размеры всех кусочков (не просто их объемы) стремятся к нулю.

Рассуждая аналогичным образом, можно заключить, что если в теле *(Ω)* распределен заряд с плотностью σ, то сам заряд q можно подсчитать по формуле

$$q = \lim \sum_{k=1}^{n} \sigma\,(M_k)\,\Delta\Omega_k \tag{5.198}$$

при таком же смысле обозначений.

Масса или заряд могут быть распределены не по объему, а по поверхности или по линии. Конечно, реально распределение по поверхности означает, что одно из измерений части пространства, занятой массой или зарядом, значительно меньше двух других; аналогично расшифровывается распределение по линии. В этом случае формулы (5.197) и (5.198) остаются в силе, если под плотностью понимать поверхностную (т. е. отнесенную к единице площади) или линейную (т. е. отнесенную к единице длины) плотность, а под $\Delta\Omega_к$ понимать соответственно площадь или длину кусочка ($\Delta\Omega_к$). В общем случае говорят, что $\Delta\Omega_к$ есть *мера области*($\Delta\Omega_к$), понимая под этим объем, площадь или длину в зависимости от того, рассматриваются объемные, поверхностные или линейные области.

2. Определение кратных интегралов. Единообразие формул (5.197) и (5.198) дает основание для общего определения понятия кратного интеграла. Рассмотрим для определенности объемные интегралы, т. е. под областями будем понимать объемные части пространства, а в качестве меры такой области будем брать ее объем.

Пусть в пространстве задана *конечная* область (Ω) и на ней, т. е. в каждой ее точке *M,* задана функции *u=f(M)*, принимающая *конечные* значения. Тогда для составления интегральной суммы область (Ω) разбивается на кусочки ($\Delta\Omega_1$) , ($\Delta\Omega_2$), ..., ($\Delta\Omega_n$) и в каждой произвольно выбирается точка, соответственно M_1, $M_2,\ldots, M_n$. Затем составляется сумма

$$\sum_{k=1}^{n} u_k\Delta\Omega_k = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\,\Delta\Omega_k, \tag{5.199}$$

где под $\Delta\Omega_к$ понимается объем кусочка ($\Delta\Omega_к$) . *Предел этой интегральной суммы в процессе, когда разбиение области* (Ω) *бесконечно измельчается, называется интегралом* (объемным) от *функции f по области*(Ω) :

$$\int\limits_{(\Omega)} u\,d\Omega = \int\limits_{(\Omega)} f(M)\,d\Omega = \lim\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\,\Delta\Omega_k \tag{5.200}$$

Таким образом, формулы (5.197) и (5.198) можно записать

$$m = \int\limits_{(\Omega)} \rho\,d\Omega, \quad q = \int\limits_{(\Omega)} \sigma\,d\Omega.$$

Интегрировать можно как непрерывные, так и разрывные функции. При этом существование предела (5.200) для конечной функции, заданной на конечной области, может быть доказано математически, без ссылки на физический смысл интеграла. (Существенна даже не конечность области, а конечность ее меры, так как нетрудно представить себе область конечной меры, простирающуюся в бесконечность, рис. 4.11)

Совершенно аналогично дается определение интеграла по поверхности, плоской или кривой, а также интеграла по линии; конечно, при этом взамен объема кусочка надо взять его площадь или длину. В частности, интеграл по линии — это тот самый криволинейный интеграл по длине дуги. Объемные и поверхностные интегралы называются *кратными* по причинам, которые будут ясны из 5.10, причем поверхностные интегралы называются *двойными,* а объемные — *тройными.*

3. Основные свойства интегралов. Поскольку основные свойства определенного интеграла можно вывести из определения интеграла как предела интегральной суммы, то эти свойства распространяются и на кратные интегралы. Перечислим эти основные свойства.

1. *Интеграл от суммы равен сумме интегралов:*

$$\int\limits_{(\Omega)} (u_1 \pm u_2)\, d\Omega = \int\limits_{(\Omega)} u_1 d\Omega \pm \int\limits_{(\Omega)} u_2 d\Omega.$$

2. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\int\limits_{(\Omega)} Cu\, d\Omega = C \int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega \qquad (C = \text{const}).$$

3. *Теорема о разбиении области интегрирования:* при любом разбиении области (Ω) на части, скажем, (Ω_1) и (Ω_2), будет

$$\int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega = \int\limits_{(\Omega_1)} u\, d\Omega + \int\limits_{(\Omega_2)} u\, d\Omega.$$

4. *Интеграл от единицы равен мере области интегрирования:*

$$\int\limits_{(\Omega)} d\Omega = \Omega.$$

5. *Если область интегрирования вырождается, так что ее мера становится равной нулю, то и интеграл становится равным нулю.*

В свойствах 4 и 5 мы говорим о мере области (п. 1), понимая под мерой объем, площадь или длину в зависимости от того, рассматриваются объемные, поверхностные или линейные интегралы.

6. Если рассматриваемые переменные размерны, то

$$\left[\int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega\right] = [u] \cdot [\Omega].$$

7. *Случай симметрии.* Если область интегрирования можно разбить на две равные части и если подынтегральная функция в одинаково расположенных точках этих частей принимает равные значения, то интеграл по всей области равен удвоенному интегралу по каждой из этих частей; если же при переходе из одной части в другую подынтегральная функция множится на —1, то интеграл по всей области равен нулю.

Иногда бывает возможно произвести аналогичное разбиение области интегрирования на большее число равных частей, чтобы свести заданный интеграл к интегралу по области более простого вида, чем исходная.

8. *Неравенства можно интегрировать:* если $u_1 \leq u_2$, то

$$\int\limits_{(\Omega)} u_1\, d\Omega \leqslant \int\limits_{(\Omega)} u_2\, d\Omega. \tag{5.201}$$

При этом последнее неравенство может обратиться в равенство, только если $u_1 \equiv u_2$ Впрочем, если это тождество нарушено в точках вырожденной области, имеющем нулевую меру, то интегралы (5.201) все равно совпадают, так как такое нарушение не влияет на значение интеграла (сравните свойство 5)

9. *Самая грубая оценка интеграла:*

$$u_{\min}\Omega \leqslant \int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega \leqslant u_{\max}\Omega. \tag{5.202}$$

10. В связи с оценкой (5.202) находится понятие *среднего* («среднего интегрального», «среднего арифметического») *значения функции и по области* **(Ω)** , которое вводится подобно по формуле

$$\int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega = \int\limits_{(\Omega)} \bar{u}\, d\Omega \quad (\bar{u} = \text{const}),$$

т.е.

$$\bar{u} = \frac{1}{\Omega} \int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega, \quad \int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega = \bar{u}\Omega.$$

из формулы (11.202) вытекает, что

$$u_{\min} \leqslant \bar{u} \leqslant u_{\max}.$$

Все эти свойства легко иллюстрировать, если под *и* понимать плотность распределенной массы, а под интегралом — саму массу.

11. *Имеет место неравенство*

$$\left|\int_{(\Omega)} u\,d\Omega\right| \leq \int_{(\Omega)} |u|\,d\Omega.$$

4. Основные методы применения кратных интегралов. Имеются две основные схемы применения кратных интегралов . Первая основана на приближенном представлении рассматриваемой величины в виде интегральной суммы (5.199) с последующим переходом к пределу, как мы это сделали в п. 1. Вторая схема основана на составлении «элемента» (дифференциала) рассматриваемой величины. Остановимся кратко на второй схеме, отложив ее более подробное обоснование до 5.9.

Пусть нас интересует значение некоторой величины q, отвечающее (для определенности, объемной) области (Ω), подобно тому как в п. 1 области (Ω) отвечало значение массы или заряда. Тогда мы составляем выражение $dq = \varphi(M)d\Omega$, отвечающее бесконечно малому объему $d\Omega$, расположенному в произвольной точке M, которое 1) прямо пропорционально объему $d\Omega$ и 2) отличается от истинного значения Δq на величину высшего порядка малости. Далее, суммируя значения dq по всем «элементам объема» $d\Omega$ в пределах области (Ω) получаем

$$q = q_{(\Omega)} = \int_{(\Omega)} \varphi(M)\,d\Omega. \tag{5.203}$$

Рассмотрим, например, выражение для *статического момента* материального тела относительно некоторой плоскости *(Р).* Из механики известно, что для конечной системы материальных точек статический момент подсчитываете» по формуле

$$S_{(P)} = \sum_k m_k z_k,$$

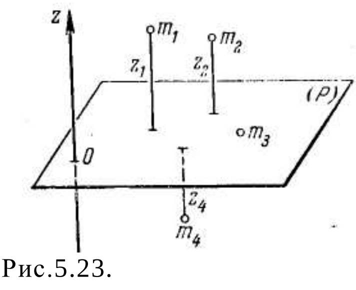


Рис.5.23.

где m_k — масса к-й точки, а z_k — ее координата, отсчитываемая по оси, перпендикулярной к плоскости *(Р)* (рис.11.23).

Если масса распределена по объему (Ω), то, разбив его на частички

$(\Delta\Omega_1),\ (\Delta\Omega_2),\ \ldots,\ (\Delta\Omega_n),$

можно приближенно принять, что масса каждой сосредоточена в одной из ее точек. Отсюда получаем приближенное выражение

$$S_{(P)} \approx \sum_{k=1}^{n} \rho_k z_k \Delta\Omega_k \quad \text{(более подробно } \sum_{k=1}^{n} \rho\,(M_k)\, z\,(M_k)\, \Delta\Omega_k);$$

переходя к пределу, получим

$$S_{(P)} = \int\limits_{(\Omega)} \rho z\, d\Omega. \tag{5.204}$$

По второму методу надо было бы написать выражение элементарного статического момента

$dS_{(P)} = \rho z\, d\Omega,$

откуда, суммируя, мы получили бы ту же формулу (5.204).

Зная статический момент, легко найти координату z *центра тяжести* рассматриваемого тела:

$$z_{\text{ц.т}} = \frac{S_{(P)}}{m} = \frac{\int\limits_{(\Omega)} \rho z\, d\Omega}{\int\limits_{(\Omega)} \rho\, d\Omega}.$$

Выражение упрощается, если тело однородное, т. е. $\rho = \text{const}$; тогда центр тяжести называется *геометрическим:*

$$z_{\text{ц.т}} = \frac{\rho \int\limits_{(\Omega)} z\, d\Omega}{\rho \int\limits_{(\Omega)} d\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int\limits_{(\Omega)} z\, d\Omega. \tag{5.205}$$

Аналогично находятся другие координаты центра тяжести тела *(Ω),* а также статические моменты и координаты центра тяжести плоских фигур относительно прямых линий.

5. Геометрический смысл интеграла, взятого по плоской фигуре. Такой интеграл, в отличие от других интегралов имеет непосредственный геометрический смысл, подобный смыслу простого определенного интеграла. Пусть дан интеграл

$$I = \int\limits_{(\Omega)} u \, d\Omega, \tag{5.206}$$

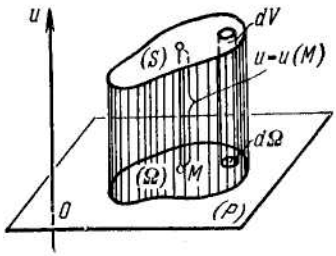


Рис.5.24.

где (Ω) — область в некоторой плоскости (P) (рис. 5.24). Выберем ось u перпендикулярно к плоскости (P) и отложим в каждой точке M области (Ω) значение $u(M)$ подобно тому, как строится график функции двух переменных (рис.8.27), причем для простоты будем считать сначала, что $u > 0$. Тогда в пространстве получится поверхность (S) (график подынтегральной функции), которая вместе с областью интегрирования (Ω) и цилиндрической поверхностью, проведенной через контур области (Ω) параллельно оси u, ограничивает некоторое *цилиндрическое тело.*

Геометрический смысл интеграла (5.206) *состоит в том, что он равен объему указанного цилиндрического тела.* Действительно, элементу $d\Omega$ области (Ω) отвечает объем, который с точностью до малых высшего порядка можно считать цилиндром (рис.5.24),т. е.

$$dV = u \, d\Omega.$$

Суммируя эти элементарные объемы, т. е. производя интегрирование, получим, что

$$V = \int\limits_{(\Omega)} u \, d\Omega = I,$$

что и утверждалось.

Если u может принимать и отрицательные значения, то, объемы, лежащие ниже плоскости (P), войдут в итог со знаком минус.

Аналогично формуле (4.138), от объемов цилиндрических тел можно перейти к объему тела произвольной формы

$$V = \int_{(\Omega)} h\, d\Omega,$$

где (Ω) — проекция рассматриваемого тела на некоторую плоскость *(P),* а $h = h(M)$ — высота сечения этого тела прямой, перпендикулярной к *(P)* и проходящей через текущую точку M области (Ω).

5.9. Два типа физических величин

6. Основном пример. **Масса и плотность**. Рассмотрим материальное тело, вообще говоря, переменном плотности, Причем пока не будем принимать во внимание молекулярное строение, а будем считать массу непрерывно распределенной в пространстве. Такое тело имеет в каждой своей точке M определенную плотность ρ, которая является, таким образом, *функцией, точки* $\rho = \rho(M)$. В отличие от этого *масса не является функцией точки,* так как масса каждой отдельно взятой точки равна нулю. Масса является величиной, *распределенной по пространству;* другими словами, каждой мысленно выделенной области (Ω) отвечает значение массы $m_{(\Omega)}$, при этом под (Ω) понимается сама область, т. е. часть пространства, а не просто ее объем.

Связь между массой и плотностью следующая. Пусть для каждой области (Ω) известно соответствующее значение массы $m_{(\Omega)}$. Тогда отношение

$$\frac{m_{(\Omega)}}{\Omega}$$

называется *средней плотностью в* (Ω); здесь под Ω, как и в п. 1, понимается объем области (Ω), т. е. соответствующая размерная величина (можно слово «объем» употреблять и для (Ω) и для Ω, если твердо помнить, о чем идет речь).

Чтобы получить *плотность* в некоторой *точке М,* надо перейти к пределу , заставив (Ω) стягиваться к точке M:

$$\rho(M) = \lim_{(\Omega)\to M} \rho_{\text{ср}} = \lim_{(\Omega)\to M} \frac{m_{(\Omega)}}{\Omega}; \tag{5.207}$$

этот процесс аналогичен вычислению производной. Здесь под $\Omega\to M$ понимается процесс безграничного стягивания (Ω) к точке M; конечно, при этом $\Omega\to 0$, но требование $(\Omega)\to M$ более сильное, чем требование $\Omega \to 0$. Итак, плотность в точке —это масса в бесконечно малом объеме, отнесенная к единице этого объема.

Если, обратно, в каждой точке M известно соответствующее значение плотности $\rho(M)$, то массу $m_{(\Omega)}$ отвечающую любой части (Ω) пространства, можно на основании пп. 1—2 найти как интеграл

$$m_{(\Omega)} = \int\limits_{(\Omega)} \rho \, d\Omega.$$

Если учитывать дискретное, молекулярное строение вещества, то в формуле (5.207) объем (Ω) нельзя даже мысленно «безгранично» стягивать в точку. Взамен формулы (5.207) надо написать

$$\rho(M) = \frac{m_{(\Delta\Omega)}}{\Delta\Omega},$$

где ($\Delta\Omega$) — практически бесконечно малый объем , содержащий точку M. Таким образом, плотность реального тела в точке—это средняя плотность по объему, достаточно малому по сравнению с размерами этого тела и в то же время достаточно большому по сравнению с молекулярными размерами. Здесь мы как бы переходим от дискретной картины материального тела к его непрерывной модели, плотность которой получается в результате *осреднения,* т. е. вычисления средней плотности исходной картины по объемам указанных размеров.

Впредь при рассмотрении сплошном среды мы будем рассматривать именно эту непрерывную модель, отвлекаясь от дискретного строения материи.

7. Величины, распределенные по пространству. Имеется ряд физических величин, во многом аналогичных разобранному примеру массы: заряд в диэлектрике, количество тепла, энергия электромагнитного поля и т. п. Их объединяет то, что эти величины *распределены по пространству.* В общем случае мы будем говорить, что *некоторая величина q распределена по пространству, если каждой мысленно выделенной части* (Ω) *пространства отвечает значение* $q_{(\Omega)}$ *этой величины.* При этом требуется лишь выполнение *закона сложения (закона аддитивности):* при любом разбиении (Ω) на куски, скажем, (Ω_1) и (Ω_2) должно быть $q_{(\Omega)} = q_{(\Omega 1)} + q_{(\Omega 2)}$, т.е. *целое должно равняться снмме частей.*

Величина, распределенная по пространству, имеет в каждой точка определенную плотность: плотность заряда, плотность энергии поля и т.д. В общем случае эта *плотность* φ вводится аналогично формуле (5.207):

$$\varphi(M) = \lim_{(\Omega) \to M} \frac{q_{(\Omega)}}{\Omega};\qquad(5.208)$$

отношение, стоящее за знаком предела, является *средней плотностью* величины q в объеме (Ω). Плотность $\varphi = \varphi(M)$ является уже *функцией точки.* Плотность величины q равна значению q, отвечающему бесконечно малой области, «расположенной в точке M», и отнесенному к единице объема. Обратно, если известна плотность $\varphi(M)$ величины q, то сама величина q находится по методам пп. 1—2:

$$q_{(\Omega)} = \lim \sum_{k=1}^{n} \varphi(M_k)\, \Delta\Omega_k = \int\limits_{(\Omega)} \varphi(M)\, d\Omega, \tag{5.209}$$

где предел берется в процессе безграничного измельчения разбиения области Ω.

В общем случае q и φ могут принимать значения любого знака.

Перепишем формулу (5.208), написав ($\Delta\Omega$) вместо Ω, чтобы подчеркнуть малость этого объема:

$$\frac{q_{(\Delta\Omega)}}{\Delta\Omega} \longrightarrow \varphi(M), \qquad \frac{q_{(\Delta\Omega)}}{\Delta\Omega} = \varphi(M) + \alpha,$$

где α бесконечно мало при
$(\Delta\Omega) \longrightarrow M$.
Отсюда получаем

$$q_{(\Delta\Omega)} = \varphi(M)\, \Delta\Omega + \alpha\Delta\Omega.$$

Таким образом, значение q, отвечающее малому объему ($\Delta\Omega$), разбито на две части: одна прямо пропорциональна объему $\Delta\Omega$, а другая имеет высший порядок малости. Поэтому первое слагаемое называется *дифференциалом* или *элементом* величины q:

$$dq = \varphi(M)\, \Delta\Omega. \tag{5.210}$$

Отсюда виден физический смысл dq: это—значение q, которое отвечало бы объему ($\Delta\Omega$), если бы в нем плотность была постоянной, равной плотности в точке M. На деле Δq, т. е. $q_{(\Delta\Omega)}$, не равно dq, а отличается от него на бесконечно малую высшего порядка, т. е. Δq и dq — эквивалентные бесконечно малые . Если такими малыми высшего порядка можно пренебречь, то говорят просто, что dq — это значение q, отвечающее бесконечно малому объему ($\Delta\Omega$), или, просто, бесконечно малая масса, бесконечно малый заряд и т. п.

Если в качестве q рассмотреть саму величину объема, т. е. $q_{(\Omega)}=\Omega$, то соответствующая плотность («объем, отнесенный к единице объема») равна единице, а потому по формуле (5.210)

$$d\Omega = \Delta\Omega.$$

Поэтому формулу (5.210) можно записать в виде

$$dq = \varphi(M)\,d\Omega, \tag{5.211}$$

что предпочтительнее.

Итак, основные формулы, связывающие величину $q = q_{(\Omega)}$, распределенную в пространстве, и соответствующую функцию точки $\varphi = \varphi(M)$, таковы:

$$\varphi(M) = \frac{dq}{d\Omega}\bigg|_M, \quad q_{(\Omega)} = \int\limits_{(\Omega)} \varphi(M)\,d\Omega.$$

По этим формулам всегда можно переходить от одной функции к другой. С помощью дифференцирования мы находим плотность, с помощью интегрирования находим распределенную величину по ее плотности.

Отметим, что для того чтобы некоторую величину можно было считать распределенной по пространству, или по поверхности, или по линии, не требуется, чтобы эта величина была «размазана» наподобие массы или заряда. Например, статический момент или момент инерции материального тела удовлетворяют определению, помещенному в начале п. 7, и потому могут считаться величинами, распределенными по объему, хотя они не являются непосредственно «размазанными», а зависят от выбора плоскости или оси отсчета. Поэтому на практике обычно вообще не размышляют на эту тему, а составляют выражение для dq, руководствуясь соображениями, приведенными в п. 4, а затем, опираясь на закон сложения, проводят суммирование (интегрирование) элементов и получают выражение (5.203).

Величина может быть распределена не по объему, а по поверхности (плоской или кривой) или по линии. В этом случае все результаты этого пункта остаются в силе, если под (Ω) понимать не объемную часть пространства, а часть поверхности (т. е. область на поверхности) или часть линии, а под Ω понимать соответственно площадь или длину этой части т. е. ее меру (п. 1).

5.10. Вычисление кратных интегралов в декартовых координатах

8. Интеграл по прямоугольнику. Пусть рассматривается интеграл

$$I = \int\limits_{(\Omega)} u\,d\Omega,$$

где (Ω)—«координатный» прямоугольник, который в декартовой системе координат описывается неравенствами $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ (рис. 5.25). При составлении интегральной суммы S для интеграла (5.212) в декартовой системе координат наиболее естественно разбить (Ω) прямыми, параллельными осям координат, после чего применить двойную нумерацию, так что u_{ik} будет значение функции $u = u(x,y)$ в некоторой точке прямоугольника, стоящего в i-м столбце и k-й строке. (Обращаем внимание на то, что эта нумерация не совпадает с той, которая была применена в теории матриц)

Тогда можно написать, что

$$I \approx S = \sum_{i,k} u_{ik} \Delta x_i \Delta y_k, \quad (5.213)$$

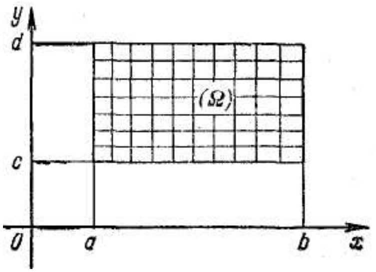


Рис.5.25.

где сумма распространена по всем прямоугольничкам, т. е. по всем значениям i и $к$, например $i = 1, 2, \ldots, m$, а $к = 1, 2, \ldots, n$.

Сумма вида (5.213) с двумя индексами суммирования называется *двойной суммой.* Для ее вычисления можно сначала произвести суммирование по k при зафиксированном i, т. е. сложить слагаемые, отвечающие одному (любому) столбцу, а затем результаты просуммировать по i. Тогда получится

$$S = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} u_{ik} \Delta x_i \Delta y_k \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} u_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i; \quad (5.214)$$

здесь мы из *внутренней суммы* вынесли общий множитель $x\Delta_i$ за скобки. Конечно, такой *переход от двойной суммы к повторной, двукратной,* т. е. от (5.213) к (5.214), можно было осуществить и вторым способом: первое, внутреннее, суммирование произвести по i, а второе, внешнее, — по k.

Если рассматриваемое разбиение достаточно мелкое, то последняя скобка в (5.214) близка к интегралу

$$\sum_{k=1}^{n} u_{ik}\Delta y_k \approx \left(\int_c^d u\,dy\right)_i, \tag{5.215}$$

где значок i указывает на то, что значение x берется для i-го столбца. Отсюда

$$S \approx \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d u\,dy\right)_i \Delta x_i.$$

Но эта сумма — также интегральная сумма, т. е. она близка к интегралу

$$S \approx \int_a^b \left(\int_c^d u(x,\ y)\,dy\right) dx. \tag{5.216}$$

С измельчением разбиения равенства (5.213) и (5.216) становятся все точнее и точнее и в пределе переходят в точные, так что

$$I = \int_{(\Omega)} u\,d\Omega = \int_a^b \left(\int_c^d u(x,\ y)\,dy\right) dx. \tag{5.217}$$

Итак, *для вычисления интеграла по координатному прямоугольнику надо сначала произвести интегрирование по у при фиксированном х в пределах прямоугольника* («внутреннее интегрирование»), *а затем результат, зависящий только от х, проинтегрировать по х в пределах его изменения* («внешнее интегрирование»).

При втором способе перехода от двойной суммы (5.213) к повторной (см. выше) после перехода к пределу мы получили бы

$$\int_{(\Omega)} u\,d\Omega = \int_c^d \left(\int_a^b u(x,\ y)\,dx\right) dy. \tag{5.218}$$

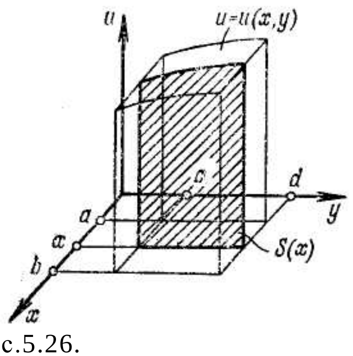


Рис.5.26.

Итак, в декартовых координатах, равно как и в любых других (см. 5.11), от двойного интеграла можно двумя способами перейти к повторному, двукратному. Об этом следует помнить, так как иногда один способ оказывается более трудным для практического вычисления, а другой —более легким. Переход от одного способа к другому называется *перестановкой порядка интегрирования.*

Формула (5.217) имеет простой геометрический смысл, показанный на рис. 5.26. Так как интеграл (5.212) в силу п. 5 равен объему тела, изображенного на этом рисунке, а объем можно подсчитывать, интегрируя площадь поперечного сечения, заштрихованного на рисунке, то мы получаем

$$\int\limits_{(\Omega)} u\,d\Omega = V = \int\limits_a^b S(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d u\,dy\right) dx.$$

Аналогичный смысл имеет формула (5.218). Мы привели более сложный вывод этих формул, так как он автоматически распространяется на интегралы любой кратности.

Из-за формул (5.217) и (5.218) иногда исходный интеграл (5.212) обозначают так:

$$I = \iint\limits_{(\Omega)} u\,d\Omega, \quad I = \iint\limits_{(\Omega)} u\,dx\,dy,$$

имея в виду, что при бесконечно густом разбиении по способу, указанному на рис.5.25, будет $d\Omega = dx\,dy$.

Особенно просто вычислить повторный интеграл вида (5.217) с постоянными пределами интегрирования, если подынтегральная функция представляет собой произведение множителей, каждый из которых зависит только от одной переменной интегрирования: именно, если $u(x, y) = f_1(x)\,f_2(y)$, то

$$I = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f_1(x)\,f_2(y)\,dy\right) dx = \int\limits_a^b f_1(x) \left(\int\limits_c^d f_2(y)\,dy\right) dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \cdot \int\limits_c^d f_2(y)\,dy.$$

Мы получаем произведение однократных интегралов.

9. Интеграл по произвольной плоской фигуре. Пусть (Ω) в интеграле (5.212)—произвольная фигура в плоскости x, y, например.

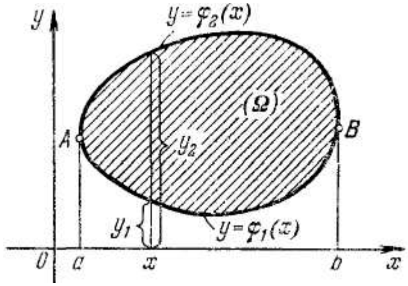


Рис.5.27.

изображенная на рис. 5.27. Тогда вывод п. 8 переносится с небольшим изменением: именно, взамен интеграла (5.215) получится интеграл

$$\int_{y_1}^{y_2} u(x,\ y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} u(x,\ y)\,dy$$

(рис.5.27); здесь $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ — уравнения нижней и верхней частей контура области (Ω), на которые он делится точками A и B. Соответственно и окончательный результат взамен (5.217) запишется в виде

$$I = \int_{(\Omega)} u\,d\Omega = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} u(x,\ y)\,dy \right) dx. \tag{5.219}$$

Таким образом, пределы интегрирования во внутреннем интеграле в общем случае переменные: они зависят от внешней переменной интегрирования (в данном случае x), причем эта зависимость определяется формой контура. Пределы же у внешнего интеграла постоянные: они определяются общим диапазоном изменения x. Правило, указанное после формулы (5.217), остается в силе, как видим, и для области (Ω) общего вида.

Можно интегрировать и в другом порядке, сначала по x, а затем по y. Тогда взамен (5.218) получается формула вида

$$\int_{(\Omega)} u\,d\Omega = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} u(x,\ y)\,dx \right) dy \tag{5.220}$$

Иногда перед расстановкой пределов приходится разбить область интегрирования на части.

Пусть, например, надо переставить порядок интегрирования в интеграле

$$I=\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2x} f(x,\ y)\,dy,$$

т.е.

$$I=\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{2x} f(x,\ y)\,dy\right) dx. \qquad (5.221)$$

Для этого нужно восстановить область интегрирования. В данном случае она ограничена линиями $x=0,\ x=1,\ y=x^2$ и $y=-2x$ (рис.5.28), причем первое, внутреннее интегрирование осуществляется по отрезкам, параллельным оси y и показанным на рис.5.28 сплошными линиями.

После перестановки порядка интегрирования внутреннее интегрирование будет проводиться по отрезкам, параллельным оси x и показанным на рис.5.28 пунктиром. Видно, что при $y < 1$ интегрирование происходит от прямой до параболы, а при $y > 1$—от прямой до прямой; критическое значение $y = 1$ получается из пересечения параболы $y = x^2$ с прямой x=1. Поэтому после перестановки порядка интегрирования взамен (5.221) получим

$$I=\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,\ y)\,dx+\int\limits_1^2 dy \int\limits_{y/2}^{1} f(x,\ y)\,dx.$$

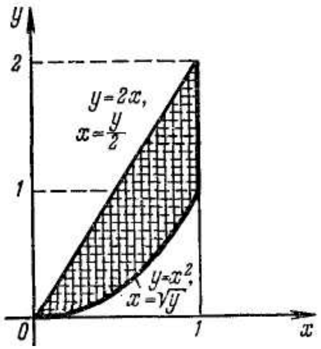


Рис.5.28.

В более сложных случаях приходится разбивать область интегрирования на большее число частей. Например, для области, изображенной на рис.5.29, при расстановке пределов в декартовых координатах ее пришлось бы разбить на пять частей .

Приведем простое приложение двукратного интегрирования. Наподобие формулы (5.205) легко вывести формулы для координат геометрического центра тяжести плоской фигуры (σ):

$$x_{\text{г.ц.т}}=\frac{\iint\limits_{(\sigma)} x\,dx\,dy}{\sigma};\quad y_{\text{г.ц.т}}=\frac{\iint\limits_{(\sigma)} y\,dx\,dy}{\sigma},$$

где под σ понимается площадь фигуры *(σ)*. Пусть фигура (σ) расположена

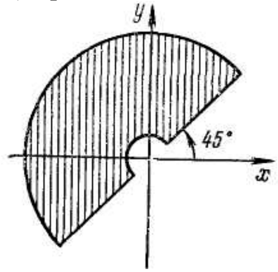


Рис.5.29.

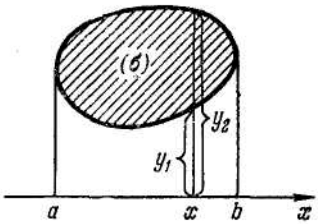


Рис.5.30

по одну сторону от оси *x* (рис. 5.30). Тогда вторую формулу (5.222) можно переписать в виде

$$\sigma\cdot y_{\text{г.ц.т}}=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1}^{y_2} y\,dy=\int\limits_a^b dx\left(\frac{y_2^2}{2}-\frac{y_1^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\int\limits_a^b y_2^2dx-\frac{1}{2}\int\limits_a^b y_1^2dx.$$

Умножив обе части на 2π и вспомнив формулу (4.151) для объема тела вращения, придем ко *второй теореме Гюльдена: если плоская фигура вращается вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры и не пересекающей ее, то объем полученного тела вращения равен произведению площади этой фигуры на путь, пройденный ее геометрическим центром* *тяжести,* На основе этой теоремы легко найти, например, геометрический центр тяжести полукруга (рис. 5.31):

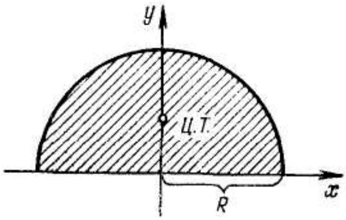


Рис.5.31.

$$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\pi R^2}{2}\cdot 2\pi y_{\text{ц. т}},$$

т.е.

$$y_{\text{ц. т}}=\frac{4}{3\pi}R=0{,}425R.$$

10. Интеграл по произвольной поверхности. Рассмотрим интеграл

$$I=\int_{(\Omega)} u\,d\Omega, \tag{5.223}$$

распространенный по произвольной (вообще говоря, кривой) поверхности *(*Ω*)* (рис. 5.32). Для его вычисления в декартовых координатах надо перейти от фигуры *(*Ω*)* к ее проекции на одну из координатных плоскостей, например к проекции (Ω') на плоскости *x, y*.

Так как элемент (бесконечно малый участок) кривой поверхности можно с точностью до малых высшего порядка считать плоским, то

$$d\Omega'=d\Omega\cos\alpha=d\Omega\cos\widehat{(\mathbf{n},\ z)},$$

где **n**—вектор, нормальный к поверхности. Отсюда

$$I=\int_{(\Omega)} u\,d\Omega=\int_{(\Omega')} u\,\frac{d\Omega'}{\cos\widehat{(\mathbf{n},\ z)}}. \tag{5.224}$$

Последний интеграл, распространенный по плоской фигуре *(*Ω'*),* вычисляется по методам п. 9.

Пусть рассматриваемая поверхность задана уравнением $z=f(x,\ y)$. Тогда вектор

$$\mathbf{n}=-\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}-\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

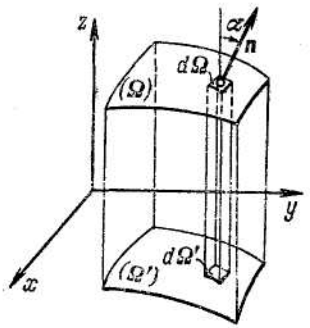


Рис.5.32.

направлен по нормали к поверхности в любой ее точке *x; y; z*. Значит ,

$$\cos(\widehat{\mathbf{n}, z}) = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{n}||\mathbf{k}|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Поэтому если интеграл (5.223) задан в форме

$$I = \int_{(\Omega)} u(x, y, z)\, d\Omega,$$

то на основании формулы (5.224) получаем

$$I = \iint_{(\Omega')} u(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx\, dy.$$

В частности, на основе свойства 4 п. 3 получаем формулу для *площади* Ω *произвольной поверхности* (Ω)*:*

$$\Omega = \iint_{(\Omega)} d\Omega = \iint_{(\Omega')} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy,$$

где, как и выше, (Ω') — это проекция поверхности (Ω) на плоскость *x, y*.

Иногда при проектировании поверхность (Ω) приходится разбивать на части. Аналогично осуществляется проектирование на плоскости *y, z* и *x, z,* если это окажется удобнее.

11. Интеграл по объему. Рассмотрим теперь интеграл

$$I = \int_{(\Omega)} u\, d\Omega,$$

где (Ω)—некоторое тело, т. е. область в пространстве. Он преобразуется совершенно аналогично тому, как в пп. 8 и 9 преобразовывались интегралы по плоским фигурам. Интегральную сумму, которая оказывается теперь *тройной,* мы представляем в виде *трехкратной.* В самом простом случае, когда (Ω) представляет собой прямоугольный параллелепипед, определенный неравенствами $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, $e \le z \le f$, после перехода в интегральной сумме к пределу получим

$$I = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f u(x,\ y,\ z)\, dz,$$

т.е.

$$I = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f u(x,\ y,\ z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

Впрочем, возможно произвести интегрирование в пяти других порядках, так как последовательность дифференциалов *dx, du, dz* допускает шесть перестановок.

Если область (Ω) интегрирования имеет более общий вид, то и пределы интегрирования будут более сложными. Пусть мы хотим расставить пределы в таком порядке:

$$I = \int_{(\Omega)} u\, d\Omega = \int dx \int dy \int u(x,\ y,\ z)\, dz, \qquad (5.225)$$

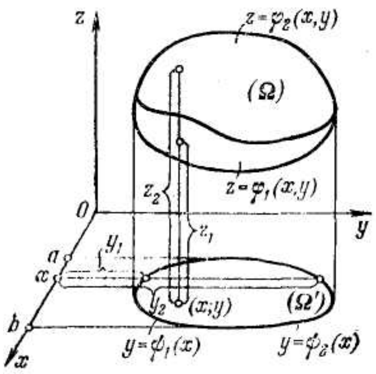


Рис.5.33.

причем область интегрирования имеет вид, изображенный на рис.5.33 . Поскольку *внутреннее* интегрирование

$$\int u(x,\ y,\ z)\, dz,$$

которое осуществляется первым, производится по z в пределах области (Ω) при зафиксированных x и y, то пределами для него служат z_1 и z_2 (рис. 5.33), т.е. $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$, где $z = \varphi_1(x,y)$ и $z = \varphi_2(x, y)$ — уравнения нижней и верхней частей поверхности тела (Ω).

После интегрирования по z и подстановки пределов результат будет зависеть только от x, y и мы переходим от тела (Ω) к его проекции (Ω') на плоскость x, y. Теперь надо произвести интегрирование по y (это — *среднее* интегрирование) при зафиксированном x в пределах этой проекции, т. е. от $y_1 = \psi_1(x)$ до $y_2 = \psi_2(x)$, как это описано в п. 9. Наконец, результат этого второго интегрирования, зависящий уже только от x, надо проинтегрировать в пределах изменения x, т. е. от a до b; это — *внешнее,* последнее интегрирование. Итак, интеграл (5.225) после расстановки пределов приобретает вид

$$\int\limits_{(\Omega)} u\,d\Omega = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x,\, y)}^{\varphi_2(x,\, y)} u(x,\ y,\ z)\,dz.$$

Обратите внимание на то, что у каждого из интегралов пределы могут зависеть только от тех переменных, по которым еще не произведено интегрирование. В частности, пределы внешнего интеграла вообще не могут зависеть от переменных интегрирования.

Подобным образом расставляются пределы и при интегрировании в других порядках. Как и в п. 9, при расстановке пределов для тела (Ω) более сложной формы его иногда приходится разбить на части, чтобы расставить для каждой из них пределы по своему закону.

5.11. Замена переменных в кратных интегралах

12. Переход к полярным координатам на плоскости. Как и для однократных интегралов, при вычислении двойных интегралов можно вводить различные переменные интегрирования. Мы разберем здесь типичный пример вычисления двойного интеграла в полярных координатах. Пусть рассматривается интеграл

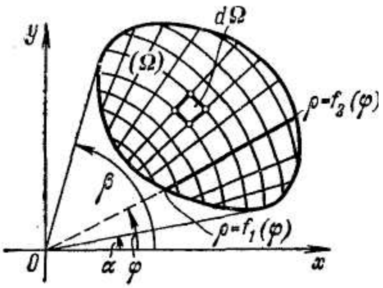


Рис.5.34.

$$I=\int\limits_{(\Omega)} u\,d\Omega,$$

где (Ω)— область на плоскости, изображенная на рис. 5.34. Если требуется произвести интегрирование с помощью полярных координат, то разбиение области надо осуществить посредством координатных линий полярной системы, т. е. линий ρ = const и φ = const , как на рис. 5.34. Тогда каждую элементарную площадку с точностью до малых высшего порядка можно считать прямоугольником со сторонами $d\rho$ и $\rho d\varphi$, т. е.

$$d\Omega=\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Произведя суммирование по всем площадкам, получим

$$I=\iint\limits_{(\Omega)} u\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

причем, конечно, подынтегральная функция u должна быть выражена через ρ и φ. Расставляя пределы подобно п. 9, получим

$$\int\limits_{(\Omega)} u\,d\Omega=\int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi\int\limits_{f_1(\varphi)}^{f_2(\varphi)} u\rho\,d\rho; \qquad (5.226)$$

смысл пределов интегрирования показан на рис.5.34.

Расстановка пределов в полярных координатах особенно удобна для областей, ограниченных координатными линиями полярной системы, так как тогда пределы не только внешнего, но и внутреннего интеграла будут постоянными. Например, для области, изображенной на рис.5.29, после расстановки пределов интеграл приобретет вид

$$\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi\int\limits_{r_1}^{r_2} u\rho\,d\rho.$$

13. Переход к цилиндрическим и сферическим координатам в пространстве. Пусть рассматривается интеграл

$$I=\int\limits_{(\Omega)} u\,d\Omega, \tag{5.227}$$

где (Ω)—область в пространстве. Если требуется произвести интегрирование с помощью цилиндрических координат , то разбиение области надо осуществить посредством координатных поверхностей цилиндрической системы, т. е. поверхностей ρ = const, φ = const и z = const. Тогда каждый элементарный объемчик, изображенный на рис. 5.35, с точностью до малых высшего порядка можно считать прямоугольным параллелепипедом с объемом

$$d\Omega=d\rho\cdot\rho\,d\varphi\cdot dz=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

Поэтому интеграл (5.227) примет вид

$$I=\iiint\limits_{(\Omega)} u\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz,$$

где еще надо расставить пределы подобно тому , как в п. 11 мы расставили пределы в декартовых координатах.

Если применяются сферические координаты , то элементарный объемчик, изображенный на рис. 5.36, и здесь с точностью до малых высшего порядка можно принять за прямоугольный параллелепипед с объемом

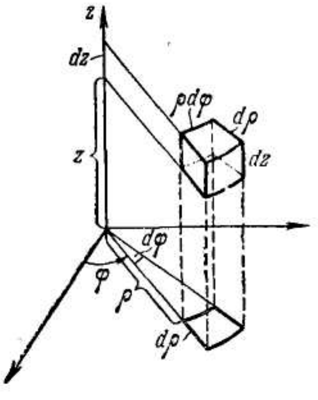


Рис.5.35.

$$d\Omega=dr\cdot r\,d\vartheta\cdot r\sin\vartheta\,d\varphi=r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Поэтому интеграл (5.227) примет вид

$$I=\iiint\limits_{(\Omega)} ur^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi. \tag{5.228}$$

Для этих систем координат, как и для любых других, наиболее просто расставлять пределы, если область (Ω) ограничена координатными поверхностями, так как в этом случае пределы внутреннего и среднего интегралов будут постоянными.

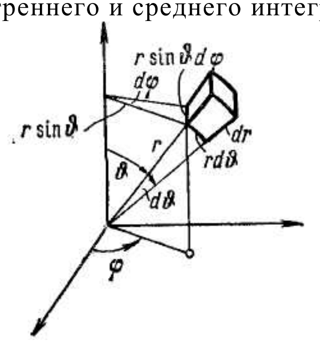


Рис.5.36.

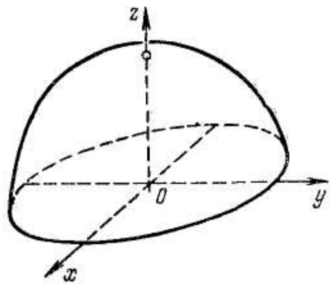


Рис.5.37.

Найдем для примера расположение геометрического центра тяжести полушара радиуса R. Для этого расположим полушар, как показано на рис. 5.37; тогда из симметрии тела ясно, что центр тяжести будет расположен па оси z. Воспользуемся формулой (5.205) и перейдем к сферическим координатам по формуле (5.228), заметив, что

$z = r\cos\vartheta$:

$$z_{ц.т} = \frac{1}{{}^2/_3\pi R^3} \times$$

$$\times \iiint\limits_{(\Omega)} r\cos\vartheta \cdot r^2 \cdot \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\vartheta \int\limits_0^R r^3 \sin\vartheta \times$$

$$\times \cos\vartheta\, dr = \frac{3}{8} R \quad \text{(проверьте!).}$$

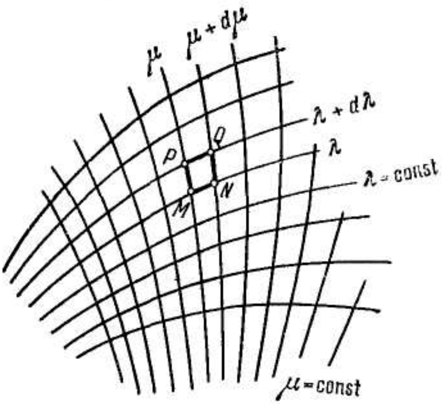


Рис.5.38.

14. Общие криволинейные координаты на плоскости. Помимо декартовых и полярных, на плоскости можно ввести много других систем координат. Их общей чертой является то, что *точка на плоскости всегда характеризуется двумя координатами* .

Рассмотрим какую-то общую систему координат λ, μ, для которой координатные линии λ= const и μ = const изображены на рис. 5.38. Если эта сеть нанесена достаточно густо, то плоскость разобьется на фигурки, которые с точностью до малых высшего порядка можно считать параллелограммами.

Пусть линии λ = const проведены через интервал $d\lambda$, а линии μ= const — через интервал $d\mu$. Тогда если пренебрегать малыми высшего порядка и обозначить стороны какого-нибудь из «координатных параллелограммчиков» через

$ds_\lambda = MP$ и $ds_\mu = MN$

(рис. 5.38), то эти стороны будут пропорциональны

$d\lambda$ и $d\mu$,

т.е.

$$ds_\lambda = l_\lambda\, d\lambda, \qquad ds_\mu = l_\mu\, d\mu. \tag{5.229}$$

Коэффициенты l_λ и l_μназываются *масштабными коэффициентами* или *коэффициентами Ламе* по имени французского математика и инженера Г. Ламе (1795—1870); они дают возможность перейти от координат к линейным размерам. Коэффициенты Ламе для заданной системы координат имеют в различных точках плоскости, вообще говоря, различные значения: например, на рис. 5.38 они внизу меньше, чем наверху.

Если требуется найти длину конечной дуги координатной линии, то соответствующее равенство (5.229) нужно проинтегрировать.

Если ввести на плоскости радиус-вектор

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda, \mu) = \overrightarrow{OM},$$

отсчитываемый от некоторой фиксированной точки *O,* то стороны

$$\overrightarrow{MP} \text{ и } \overrightarrow{MN}$$

элементарного параллелограмма на рис.5.38 с точностью до малых высшего порядка равны

$$\partial_\lambda \mathbf{r} = \mathbf{r}'_\lambda\, d\lambda \quad \text{и} \quad \partial_\mu \mathbf{r} = \mathbf{r}'_\mu\, d\mu,$$

так как эти приращения радиуса-вектора получаются за счет изменения лишь одной координаты. Отсюда $|\partial_\lambda r| = |r'_\lambda|\, d\lambda;$ но так как

$$|d\mathbf{r}| = ds$$

и потому $|\partial_\lambda r| = ds_\lambda$ то с помощью (5.229) получаем

$$l_\lambda = |\mathbf{r}'_\lambda|, \quad l_\mu = |\mathbf{r}'_\mu|.$$

Если на плоскости, помимо криволинейных координат λ, μ, рассматриваются декартовы координаты *x, y,* то

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

и потому

$$l_\lambda = \left| \frac{\partial x}{\partial \lambda}\, \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\, \mathbf{j} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2},$$

$$l_\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2}.$$

Площадь $d\sigma$ любого из элементарных параллелограммов, изображенных на рис. 5.38, пропорциональна как $d\lambda$, так и $d\mu$, т. е.

$$d\sigma = k\, d\lambda\, d\mu, \tag{5.230}$$

где k—*площадной коэффициент,* также, вообще говоря, различный в разных точках плоскости. Применяя формулу для площади параллелограмма, получим

$$k = \frac{d\sigma}{d\lambda\, d\mu} = \frac{ds_\lambda\, ds_\mu \sin\alpha}{d\lambda\, d\mu} = l_\lambda l_\mu \sin\alpha, \tag{5.231}$$

где α— угол между координатными линиями.

В частности, *для ортогональных систем координат,* т. е. для систем координат, у которых координатные линии пересекаются под прямым углом.

$$k = l_\lambda \cdot l_\mu. \tag{5.232}$$

В общем случае из (5.230) можно также вывести, что

$$k = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \frac{\partial y}{\partial\lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial\mu} & \frac{\partial y}{\partial\mu} \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{D(x,\ y)}{D(\lambda,\ \mu)} \right|; \tag{5.233}$$

При этом мы использовали возможность транспонирования определителей .

Тот же результат можно получить, если заметить, что k в формуле (5.230) — это коэффициент изменения площадей при переходе от плоскости переменных λ, μ к плоскости переменных *x, y,* определяемых формулами $x=x(\lambda,\ \mu)$, $y=y(\lambda,\ \mu)$. А этот коэффициент как раз равен абсолютной величине соответствующего якобиана, т. е. (5.233).

Если рассматривается интеграл вида

$$I = \int\limits_{(\sigma)} u\, d\sigma,$$

взятый по некоторой плоской области (σ), то на основе формулы (5.230) получаем

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} uk\, d\lambda\, d\mu,$$

где пределы надо расставить наподобие того, как это было сделано для интегралов (5.219), (5.220) и (5.226). Наиболее просто расставлять пределы для области, ограниченной координатными линиями.

15. Общие криволинейные координаты в пространстве. Рассмотрение общих криволинейных координат λ, μ , ν в пространстве проходит совершенно аналогично. Поверхности λ, = const, μ = const и ν = const образуют три семейства координатных поверхностей, попарные пересечения которых дают три семейства координатных линий. Координатные поверхности, отвечающие

значениям координат

$$\lambda,\ \lambda + d\lambda;\quad \mu,\ \mu + d\mu;\quad \nu,\ \nu + d\nu$$

ограничивают в пространстве объемчик, который с точностью до малых высшего порядка можно принять за параллелепипед, в общем случае косоугольный; для конкретных систем координат он показан на рис. 5.35 и 5.36. Одно из ребер этого бесконечно малого параллелепипеда равно

$$ds_\lambda = |\partial_\lambda \mathbf{r}| = |\mathbf{r}'_\lambda|\, d\lambda = l_\lambda\, d\lambda,$$

где

$$l_\lambda = |\mathbf{r}'_\lambda| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2}$$

называется *масштабным коэффициентом* или *коэффициентом Ламе.* Аналогично выражаются два других ребра параллелепипеда. Его объем выражается по формуле

$$d\Omega = k\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

где k—*объемный коэффициент.* Поэтому замена переменных в тройном интеграле происходит по формуле

$$\int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega = \iiint\limits_{(\Omega)} uk\, d\lambda\, d\mu\, d\nu. \qquad (5.235)$$

Для ортогональной системы координат $к = l_\lambda$, l_μ, l_ν, тогда как в общем случае вычисление k основано на геометрическом смысле векторно-скалярного произведения :

$$k = \frac{d\Omega}{d\lambda\, d\mu\, d\nu} = \frac{|(\partial_\lambda \mathbf{r} \times \partial_\mu \mathbf{r}) \cdot \partial_\nu \mathbf{r}|}{d\lambda d\mu\, d\nu} = \frac{\left|\left(\mathbf{r}'_\lambda\, d\lambda \times \mathbf{r}'_\mu\, d\mu\right) \cdot \mathbf{r}'_\nu\, d\nu\right|}{d\lambda\, d\mu\, d\nu} =$$

$$= \left|\left(\mathbf{r}'_\lambda \times \mathbf{r}'_\mu\right) \cdot \mathbf{r}'_\nu\right| = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \\ \frac{\partial x}{\partial \nu} & \frac{\partial y}{\partial \nu} & \frac{\partial z}{\partial \nu} \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(\lambda,\ \mu,\ \nu)}\right|.$$

16. Координаты на поверхности. На произвольной поверхности можно ввести систему координат. Будем обозначать эти координаты буквами λ, μ. Тогда подобно п. 14 стороны и площадь бесконечно малого координатного параллелограмма с точностью до малых высшего порядка вычисляются по формулам:

$$ds_\lambda = |\partial_\lambda \mathbf{r}| = l_\lambda\, d\lambda.$$

где

$$l_\lambda = |\mathbf{r}'_\lambda| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2}; \qquad ds_\mu = \text{(аналогично)};$$

$d\sigma = k\, d\lambda\, d\mu$, где $k = l_\lambda l_\mu$ для ортогональной системы координат и

$$k = |\mathbf{r}'_\lambda \times \mathbf{r}'_\mu| = \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu} - \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu} - \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2}$$

в общем случае. Переход в интеграле по поверхности к переменным λ, μ осуществляется по формуле (5.234).

Например, на сфере (т. е. поверхности шара) фиксированного радиуса R можно ввести сферические координаты φ,υ; получаются как бы обычные сферические координаты в пространстве с зафиксированным значением $r=R$. Эта система координат ортогональна, и из рис. 5.36 легко вывести, что

$$ds_\varphi = R \sin\vartheta\, d\varphi, \quad ds_\vartheta = R\, d\vartheta,$$

т.е.

$$l_\varphi = R \sin\vartheta, \qquad l_\vartheta = R,$$

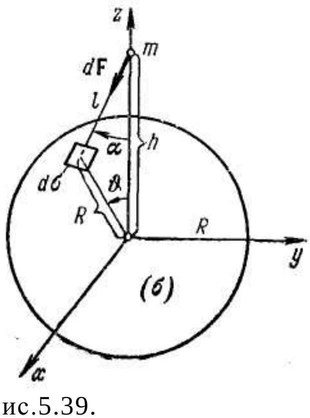


Рис.5.39.

и площадной коэффициент κ ранен $\kappa = l_\varphi, l_\upsilon = R^2 \sin \upsilon$ Поэтому интеграл по фигуре (σ), расположенной на сфере, можно вычислять по формуле

$$\int\limits_{(\sigma)} u\, d\sigma = R^2 \iint\limits_{(\sigma)} u \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta. \qquad (5.236)$$

Подсчитаем, например, силу притяжения материальной точки массы m материальной сферой (σ) постоянной поверхностной плотности ρ. В силу симметрии задачи можно ограничиться расположением, показанным на рис. 5.39. Каждая элементарная площадка $d\sigma$ притягивает массу m с силой d**F**, которую можно подсчитать по закону Ньютона:

$$|d\mathbf{F}| = \varkappa \frac{m\rho \, d\sigma}{l^2} = \varkappa \frac{m\rho}{R^2 + h^2 - 2Rh\cos\vartheta} \, d\sigma,$$

где κ—гравитационная постоянная.

При суммировании этих элементарных сил надо суммировать не их модули, так как силы направлены в разные стороны, а проекции этих сил на определенную ось. Из соображений симметрии ясно, что результирующая сила пойдет по оси z, а потому надо просуммировать проекции всех элементарных сил на ось z:

$$F = \int\limits_{(\sigma)} (d\mathbf{F})_z = \int\limits_{(\sigma)} |d\mathbf{F}| \cos\alpha = \int\limits_{(\sigma)} \varkappa \frac{m\rho}{R^2 + h^2 - 2Rh\cos\vartheta} \, d\sigma \, \frac{l^2 + h^2 - R^2}{2hl} \, ;$$

выражение для cos α мы нашли по теореме косинусов:

$$R^2 = l^2 + h^2 - 2lh\cos\alpha.$$

Подставляя в последнем интеграле

$$l = \sqrt{R^2 + h^2 - 2Rh\cos\alpha}$$

и переходя к сферическим координатам по формуле (5.236), получим

$$F=\varkappa m\rho\int\limits_{(\sigma)}\frac{h-R\cos\vartheta}{(R^2+h^2-2Rh\cos\vartheta)^{3/2}}\,d\sigma=$$

$$=\varkappa m\rho\int\limits_0^{\pi}d\vartheta\int\limits_0^{2\pi}\frac{h-R\cos\vartheta}{(R^2+h^2-2Rh\cos\vartheta)^{3/2}}\,R^2\sin\vartheta\,d\varphi=$$

$$=R^2\varkappa m\rho\int\limits_0^{\pi}\frac{h-R\cos\vartheta}{(R^2+h^2-2Rh\cos\vartheta)^{3/2}}\sin\vartheta\,d\vartheta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$=-2\pi R^2\varkappa m\rho\int\limits_0^{\pi}\frac{h-R\cos\vartheta}{(R^2+h^2-2Rh\cos\vartheta)^{3/2}}\,d\cos\vartheta=$$

$$=2\pi R^2\varkappa m\rho\int\limits_{-1}^{1}\frac{h-Rt}{(R^2+h^2-2Rht)^{3/2}}\,dt\quad\left|\begin{array}{c}R^2+h^2-2Rht=l^2\\ l>0\\ -2Rh\,dt=2l\,dl\end{array}\right|=$$

$$=2\pi R^2\varkappa m\rho\int\limits_{R+h}^{|R-h|}\frac{h+\dfrac{l^2-R^2-h^2}{2h}}{l^3}\left(-\frac{2l\,dl}{2Rh}\right)=$$

$$=\frac{\pi R\varkappa m\rho}{h^2}\int\limits_{|R-h|}^{R+h}\left(1+\frac{h^2-R^2}{l^2}\right)dl=$$

$$=\frac{\pi R\varkappa m\rho}{h^2}\left[(R+h)-|R-h|+(h^2-R^2)\left(\frac{1}{|R-h|}-\frac{1}{R+h}\right)\right].\qquad(5.238)$$

Если

$h>R$, то $|R-h|=h-R$,

и после подстановки этого выражения в (5.238) и преобразований получаем

$$F=\varkappa\frac{m4\pi R^2\rho}{h^2}=\varkappa\frac{mM}{h^2}\qquad(h>R),$$

где M – общая масса сферы. Если же

$h<R$, то $|R-h|=R-h$,

и аналогично получаем

$$F=0\qquad(h<R).$$

Итак, однородная сфера притягивает точки, расположенные вне ее, с такой силой, как будто вся масса сферы сосредоточена в ее центре, и совсем не притягивает точки, расположенные внутри нее. Пусть теперь дан материальный шар (объемное тело), в котором масса распределена *сферически симметрично,* т. е. плотность зависит лишь от расстояния до центра шара. Такой шар можно представить себе как сумму концентрических бесконечно тонких «пузырей» и для каждого из них применить только что доказанный результат. Тогда мы получим, что этот шар притягивает точку, находящуюся вне его, с такой силой, как будто вся масса шара сосредоточена в его центре; точка же, находящаяся внутри шара, притягивается только его частью, расположенной от центра ближе, чем эта точка.

5.12. Варианты кратных интегралов

17. Несобственные интегралы. Теория несобственных кратных интегралов строится подобно тому, как это делалось для однократных интегралов. Рассмотрим сначала интеграл

$$I = \int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega, \tag{5.239}$$

в котором функция *u* конечная, а область интегрирования бесконечная (неограниченная). Он определяется как предел

$$\int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega = \lim_{(\Omega')\to(\Omega)} \int\limits_{(\Omega')} u\, d\Omega', \tag{5.240}$$

причем в правой части область (Ω') уже конечная и, расширяясь, стремится исчерпать всю область *(*Ω*)* (рис.5.40). Если предел (5.240) существует и конечен, независимо от способа расширения области (Ω′), то интеграл (5.239) называется сходящимся, в противном случае — расходящимся. Если предел (5.240) равен бесконечности, то и интеграл (5.239) расходится к бесконечности.

Если $u \geq 0$, то интеграл (5.239) либо сходится, либо расходится к $+\infty$. В этом случае для его вычисления можно расставить пределы в любой удобной системе координат по правилам 5.10—5.11, причем результат вычисления сам покажет, будет ли интеграл сходящимся (если этот результат конечен) или расходящимся (если он равен бесконечности). Признаки сравнения (4.72) и (4.73) сохраняют силу. При этом для сравнения применяются как интегралы (4.74), так и другие интегралы. Например, если *(*Ω*)* — полная плоскость, то часто применяется сравнение с функцией r^{-p}, где

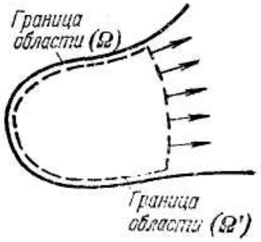


Рис.5.40.

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

— длина радиуса-вектора. Так как для сходимости существенно поведение подынтегральной функции лишь для больших r, то надо исследовать интеграл

$$\iint\limits_{(r>r_0)} r^{-p}dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_{r_0}^{\infty} r^{-p}r\,dr=2\pi\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{1}{r^{p-1}}\,dr \qquad (r_0>0).$$

Согласно формуле (4.74) этот интеграл конечен при $p > 2$ и бесконечен при $p\le 2$. Аналогично в трехмерной пространстве интеграл от r^{-p} на бесконечности сходится только при $p > 3$.

В качестве примера применения несобственных кратных интегралов выведем формулу. Для этого надо исходить из интеграла

$$I=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} x^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(x+1)y}\,dx\,dy \qquad (p>0,\ q>0),$$

распространенного по первому квадранту плоскости x, y. Так как подынтегральная функция положительна, то интегрирование можно выполнять в любом порядке, что даст

$$1)\ I=\int\limits_0^{\infty}dy\int\limits_0^{\infty} x^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(x+1)y}\,dx=\left|x=\frac{s}{y}\right|=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}dy\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{s}{y}\right)^{p-1}y^{p+q-1}e^{-\left(\frac{s}{y}+1\right)y}\,\frac{ds}{y}=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}s^{p-1}e^{-s}\,ds\cdot\int\limits_0^{\infty}y^{q-1}e^{-y}\,dy=\Gamma(p)\,\Gamma(q);$$

$$2)\ I=\int\limits_0^{\infty}dx\int\limits_0^{\infty} x^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(x+1)y}\,dy=\left|y=\frac{t}{x+1}\right|=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}dx\int\limits_0^{\infty}x^{p-1}\left(\frac{t}{x+1}\right)^{p+q-1}e^{-t}\,\frac{dt}{x+1}=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{(x+1)^{p+q}}\,dx\cdot\int\limits_0^{\infty}t^{p+q-1}e^{-t}\,dt=B(p,q)\,\Gamma(p+q)$$

Сравнивая результаты, выводим требуемую формулу.

Если

$u\gtreqless 0$

и

$$\int\limits_{(\Omega)} |u|\, d\Omega < \infty, \tag{5.241}$$

то интеграл (5.239) называется *абсолютно сходящимся* и для его вычисления можно расставить пределы в любой удобной системе координат. Если же условие (5.241) нарушено, то можно проверить, что и интеграл (5.239) будет расходящимся. Тогда может получиться, что предел (5.240) будет зависеть от способа расширения области (Ω'), а при расстановке пределов может оказаться, что в одной системе координат результат интегрирования получится конечный, в другой —бесконечный, в третьей — конечный, но отличный от первого, в четвертой получится расходимость колебательного типа и т. д. В этом случае возможность замены переменных и перестановки порядка интегрирования требует специального исследования. Никаких этих проблем не возникает для абсолютно сходящихся интегралов. Рассмотрение несобственных интегралов иных видов проводится аналогично. Именно, если в области интегрирования имеется точка, или линия и т. д., в которой подынтегральная функция обращается в бесконечность, то эта особенность (точка, линия и т. д.) вырезается из области, после чего вырез произвольным образом стягивается к особенности. Для положительной подынтегральной функции или для функции, положительной всюду вблизи своих особенностей, можно проводить интегрирование в любой системе координат; для функции произвольного знака это можно делать в случае абсолютной сходимости интеграла. При исследовании *изолированной особенности,* т. е. точки, в которой подынтегральная функция обращается в бесконечность, часто проводится сравнение с интегралами

$$\iint\limits_{r \leqslant r_0} r^{-p}\, dx\, dy$$

на плоскости и

$$\iiint\limits_{r \leqslant r_0} r^{-p}\, dx\, dy\, dz$$

в пространстве. Легко проверить, что первый сходится только при $p < 2$, а второй — при $p < 3$. Если особенность не изолированная, то условие сходимости можно получить, выбирая систему координат так, чтобы координатные линии шли вдоль особенности.

18. Интегралы, зависящие от параметра. Теория интегралов вида

$$I(\lambda)=\int\limits_{(\Omega)} f(M;\ \lambda)\, d\Omega,$$

где M—точка области (Ω), по которой проводится интегрирование, а λ в процессе интегрирования постоянно развивается; все основные утверждения, доказанные ранее, остаются справедливыми и здесь. Некоторое затруднение вызывает случай, когда от параметра зависит также область интегрирования. Тогда часто делают предварительную замену переменных в интеграле, после которой область уже остается постоянной; впрочем, можно такие интегралы изучать и непосредственно.

Пусть, например, рассматривается объемный интеграл вида

$$I(\lambda)=\int\limits_{(\varphi_\lambda\leqslant 0)} f(M)\, d\Omega,$$

где заданная функция φ_λ (x, y, z) зависит от параметра λ, а интеграл распространен по области, в которой $\varphi_\lambda \le 0$, и требуется подсчитать $dI/d\lambda$. Здесь

$$dI=I(\lambda+d\lambda)-I(\lambda)$$

(с точностью до малых высшего порядка) представляет собой интеграл, взятый по тонкой «пленке», ограниченной поверхностью (S_λ) с уравнением $\varphi_\lambda = 0$ и поверхностью $(S_{\lambda+d\lambda})$ с уравнением $\varphi_{\lambda+d\lambda}=0$. Выберем какую-либо точку A на (S_λ), проведем в A нормаль к (S_λ) и будем вдоль этой нормали отсчитывать от A расстояние, считая его положительным в сторону $\varphi_\lambda > 0$, т. е. наружу от области интегрирования. Кроме того, обозначим через $\bar{A}$ точку пересечения указанной нормали с $(S_{\lambda+d\lambda})$ и $dn = A\bar{A}$;(dn равно ширине «пленки» в точке A. Тогда $\varphi_\lambda(A) = 0$ и $\varphi_{\lambda+d\lambda}(\bar{A})=0$. Но с точностью до малых высшего порядка

$$\varphi_{\lambda+d\lambda}(\bar{A})=\varphi_\lambda(\bar{A})+\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}d\lambda=\varphi_\lambda(A)+|\operatorname{grad}\varphi_\lambda|\cdot dn+\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}d\lambda,$$

откуда

$$|\operatorname{grad}\varphi_\lambda|\, dn+\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}d\lambda=0, \quad \text{т. е.} \quad dn=-\frac{\partial\varphi/\partial\lambda}{|\operatorname{grad}\varphi_\lambda|}d\lambda.$$

Однако для указанной пленки

$$d\Omega=dS\,dn=-\frac{\partial\varphi/\partial\lambda}{|\operatorname{grad}\varphi|}dS\,d\lambda;$$

знак dn учитывает, прибавляется эта пленка к исходной области интегрирования или отнимается от нее. Отсюда

$$dI=\int f\cdot\left(-\frac{\partial\varphi/\partial\lambda}{|\operatorname{grad}\varphi|}dS\,d\lambda\right), \quad \text{т. е.} \quad \frac{dI}{d\lambda}=-\int f(M)\frac{\partial\varphi/\partial\lambda}{|\operatorname{grad}\varphi|}dS.$$

Интеграл может зависеть и от нескольких параметров. В качестве параметра может фигурировать некоторая точка, меняющаяся в пределах какой-либо области. Тогда получаются интегралы вида

$$I(N)=\int\limits_{(\Omega)} f(M;\ N)\,d\Omega_M,$$

где буквы $d\Omega_M$ означают, что при интегрировании точка M является переменной (п. 2), а точка N—постоянной. На такие интегралы распространяются основные свойства интегралов , рассмотренных модуле 4.

При интегрировании интегралов по параметру получаются интегралы высшей кратности. Рассмотрим, например, задачу о вычислении силы F взаимного притяжения двух материальных тел: (Ω_1) с, вообще говоря, переменной плотностью ρ_1 и (Ω_2) с плотностью ρ_2. Для этого напишем сначала на основе закона Ньютона силу, с которой элемент $d\Omega_1$ расположенный в точке M_1 притягивает элемент $d\Omega_2$, расположенный в точке M_2:

$$d\,d\mathbf{F}=\varkappa\frac{\rho_1\,d\Omega_1\cdot\rho_2\,d\Omega_2}{M_1M_2^2}\,\overrightarrow{M_2M_1^0}=\varkappa\frac{\rho_1\rho_2\overrightarrow{M_2M_1}}{M_1M_2^3}\,d\Omega_1\,d\Omega_2.$$

Интегрируя по (Ω_1), получаем силу, с которой все тело (Ω_1) притягивает элемент $d\Omega_2$:

$$d\mathbf{F}=\varkappa\left(\int\limits_{(\Omega_1)}\frac{\rho_1\overrightarrow{M_2M_1}}{M_1M_2^3}\,d\Omega_1\right)\rho_2\,d\Omega_2.$$

В выписанном интеграле интегрирование производится по M_1 в пределах (Ω_1), фиксированная точка M_2 играет роль параметра. Чтобы получить полную силу притяжения, надо еще проинтегрировать по M_2:

$$\mathbf{F}=\varkappa\int\limits_{(\Omega_2)}\rho_2\,d\Omega_2\int\limits_{(\Omega_1)}\frac{\rho_1\overrightarrow{M_2M_1}}{M_1M_2^3}\,d\Omega_1.$$

Если здесь расставить пределы, то получится *шестикратный* интеграл. Например, в декартовых координатах

$$\mathbf{F}=\varkappa\iiint\limits_{(\Omega_2)}\rho_2(x_2,\ y_2,\ z_2)\,dx_2\,dy_2\,dz_2\times$$
$$\times\iiint\limits_{(\Omega_1)}\frac{\rho_1(x_1,\ y_1,\ z_1)\,[(x_1-x_2)\,\mathbf{i}+(y_1-y_2)\,\mathbf{j}+(z_1-z_2)\,\mathbf{k}]}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{3/2}}\,dx_1\,dy_1\,dz_1;$$

здесь еще надо расставить пределы, руководствуясь формой областей (Ω_1) и (Ω_2)

19. Интеграл по общей мере и обобщенные функции. Рассмотрим для определенности объемные интегралы. В п. 1 мы назвали мерой пространственной области ее объем; однако это— лишь простейший пример меры, называемый иногда *мерой Лебега* по имени французского математика А. Лебега (1875 — 1941), который исследовал ее наиболее полно. Возможны и другие меры, по которым также можно проводить интегрирование.

Рассмотрим сначала пример. Пусть в пространстве распределена масса *m* (п. 6). Подобно п. 18 легко вывести, что сила, с которой эта масса действует на точечную массу m_0, расположенную в точке *N,* равна

$$\mathbf{F} = \varkappa m_0 \int \frac{\overrightarrow{NM}}{NM^3}\, dm, \tag{5.242}$$

где *М* — переменная точка интегрирования, а интегрирование распространяется по всей части пространства, занятой массой *m.*

Если масса *m* распределена «объемно», т. е. масса каждой поверхности, линии, точки равна нулю, то можно ввести плотность (п. 6) и от интеграла (5.242) перейти к обычному объемному интегралу

$$\int \frac{\overrightarrow{NM}}{NM^3}\, \rho\, d\Omega. \tag{5.243}$$

Однако иногда масса концентрируется на отдельных поверхностях, линиях, точках. Тогда при обычном понимании объемной плотности перейти к интегралу (5.243) нельзя и интеграл (5.242) надо рассматривать как интеграл «по мере *m».*

В общем случае определение меры *(общей меры)* μ в пространстве аналогично основному определению п. 7: каждой мысленно выделенной части пространства (т. е. каждому телу, поверхности, линии, точке) (Ω) должно отвечать значение $\mu_{(\Omega)}$, причем требуется выполнение закона сложения. При этом мера поверхности, линии, точки уже не обязательно равна нулю. Обычно предпочитают меры μ≥0, но иногда приходится от этого отказаться; тогда меру лучше представлять себе не как «массу», а как «электрический заряд». Мера может быть определена не только в пространстве, но также и на поверхности или линии.

Определение *интеграла по мере* (он также называется *интегралом Стилтьеса)* также аналогично обычному (п. 2). Если в области (Ω) задана мера μ, а также функция *u (M) (M*— произвольная точка (Ω)), то по определению

$$\int\limits_{(\Omega)} u\, d\mu = \lim \sum_{k=1}^{n} u\,(M_k)\,\mu_{(\Delta\Omega_k)} \tag{5.244}$$

при естественном смысле обозначении. Такой интеграл всегда существует, если функция *u* конечна в (Ω) и мера области *(Ω)* конечна (если $\mu \gtrless 0$, надо требовать, чтобы были конечными положительная и отрицательная составляющие меры (Ω), т. е. чтобы

$$\int\limits_{(\Omega)} |d\mu| < \infty)$$

Впрочем, если функция *и* разрывная, то приходится уточнить вид применяемых в (5.244) интегральных сумм. Несобственные интегралы по мере определяются, как в п. 17. Свойства интеграла (5.244) аналогичны свойствам, разобранным в п. 3; в свойствах, связанных с интегрированием неравенств, надо требовать, чтобы μ≥0.

Если мера каждой поверхности, линии, точки равна нулю, то от интеграла (5.244) можно перейти к интегралу по объему

$$\int\limits_{(\Omega)} u\,d\mu = \int\limits_{(\Omega)} u\frac{d\mu}{d\Omega}\,d\Omega = \int\limits_{(\Omega)} u\rho\,d\Omega \quad \left(\rho = \frac{d\mu}{d\Omega}\right). \tag{5.245}$$

Такой переход можно совершить и при любой мере, но тогда ρ будет, вообще говоря, *обобщенной функцией.*

Простейшей обобщенной функцией в пространстве является дельта-функция

$$\delta(x-a)\,\delta(y-b)\,\delta(z-c) \tag{5.246}$$

, описывающая плотность единичной массы, расположенной в точке (*a*; *b; c).* Функция *δ(y — b)δ(z—c)* описывает плотность линейной массы, расположенной на прямой *y* = *b, z=c* с единичной линейной плотностью. Функция δ(z—c) описывает плотность массы, расположенной в плоскости *z=c* с единичной поверхностной плотностью. С помощью этих и аналогичных функций, в частности, дельта-функций в криволинейных системах координат, возможно осуществить переход (5.245) в общем случае.

Свойства обобщенных функций от нескольких переменных аналогичны свойствам обобщенных функций от одной переменной. Обобщенную функцию (5.246) можно применить для построения функции влияния, которая имеет вид

$$G(M;\ N) = G(x,\ y,\ z;\ \xi,\ \eta,\ \zeta),$$

где *(x, y, z)* — координаты *точки наблюдения M,* а

$$(\xi,\ \eta,\ \zeta)$$

—координаты *источника воздействия N.* При рассмотрении процессов, развивающихся во времени, применяется также дельта-функция

$$\delta(x-a)\,\delta(y-b)\,\delta(z-c)\,\delta(t-\tau),$$

которая приводит к функции влияния вида G *(M, t; N,* τ).

20. Сведения из теории меры Жордана

Ограничимся рассмотрением двумерных множеств. В плоскости зададим прямоугольную систему координат *x, y*.

Зададим натуральное число *N* и две системы прямых

$$x = kh, \quad y = lh \quad (k,\ l = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),\quad h = 2^{-N},$$

определяющих в плоскости прямоугольную сетку, состоящую из квадратов со стороной *h*. Такую сетку мы будем называть *h*-сеткой (рис. 5.41).

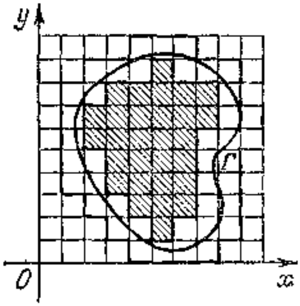


Рис. 5.41

Ясно, что при переходе от *N* к *N*+1*l* каждый квадрат *h*-сетки ($h = 2^{-N}$) разрезается на четыре равных квадратика. Последние образуют уже $h = 2^{-N-1}$ -сетку.

В плоскости зададим произвольное ограниченное множество Ω и для данного *N* введем два множества $\underline{\Omega}_N$ и $\overline{\Omega}_N$. Первое из них $\underline{\Omega}_N$ есть сумма (теоретико-множественная) квадратиков *h*-сетки ($h = 2^{-N}$), каждый из которых полностью принадлежит к Ω (на рис. 5.41 заштрихованная часть). Будем называть Ω_N *внутренней фигурой множества* $\overline{\Omega}$ (определяемой данной *h*-сеткой). Может случиться, что $\underline{\Omega}_N$ есть пустое множество, т. е. нет ни одного квадратика, который бы полностью принадлежал к Ω. Это имеет место, например, если *Ω* есть множество, состоящее из конечного числа точек, или если это есть кусок гладкой кривой.

Второе множество $\overline{\Omega}_N$ мы называем *внешней фигурой множества* Ω (определяемой дайной *h*-сеткой). Оно есть сумма квадратиков *h*-сетки, каждый из которых содержит в себе хотя бы одну точку Ω.

Очевидно,

$$\underline{\Omega}_N \subset \Omega \subset \overline{\Omega}_N,$$

и площади фигур $\underline{\Omega}_N$, $\overline{\Omega}_N$,которые мы будем обозначать через

$|\underline{\Omega}_N|$, $|\overline{\Omega}_N|$, удовлетворяют неравенству

$$|\underline{\Omega}_N| \leqslant |\overline{\Omega}_N| \qquad (N=1,\ 2,\ \ldots).$$

Если $\underline{\Omega}_N$ —пустое множество, то считают $|\underline{\Omega}_N|=0$. Нетрудно видеть, что

$$\underline{\Omega}_1 \subset \underline{\Omega}_2 \subset \underline{\Omega}_3 \subset \ldots \subset \Omega \subset \ldots \subset \overline{\Omega}_3 \subset \overline{\Omega}_2 \subset \overline{\Omega}_1,$$

откуда

$$|\underline{\Omega}_1| \leqslant |\underline{\Omega}_2| \leqslant |\underline{\Omega}_3| \leqslant \ldots \leqslant |\overline{\Omega}_3| \leqslant |\overline{\Omega}_2| \leqslant |\overline{\Omega}_1|.$$

Таким образом,

$$|\underline{\Omega}_N| \leqslant |\overline{\Omega}_M|,$$

каковы бы ни были натуральные числа *N* и *M*.

Если зафиксировать *M,* то получится, что числа $|\underline{\Omega}_N|$ при неограниченном возрастании *N* не убывают, оставаясь не большими числа $|\overline{\Omega}_M|$. Это показывает, что существует предел

$$\lim_{N\to\infty} |\underline{\Omega}_N| \leqslant |\overline{\Omega}_M|.$$

Его называют *внутренней мерой множества* Ω и обозначают так:

$$\lim_{N\to\infty} |\underline{\Omega}_N| = m_i\Omega.$$

Это вполне определенное число, не зависящее от *N*. Мы получили неравенство

$$m_i\Omega \leqslant |\overline{\Omega}_M| \qquad (M=1,\ 2,\ \ldots),$$

где числа $|\overline{\Omega}_M|$ монотонно не возрастают при неограниченном возрастании *M.* Но тогда существует предел

$$\lim_{M\to\infty} |\overline{\Omega}_M| \geqslant m_i\Omega,$$

который называют *внешней мерой Жордана* множества Ω и обозначают через $m_e\,\Omega$.

Итак, *произвольное ограниченное множество Ω плоскости имеет внутреннюю и внешнюю меры* $m_i\Omega$ *и* $m_e\Omega$. *Это неотрицательные числа, удовлетворяющие неравенству* $m_i\Omega \le m_e\Omega$.

Если на самом деле имеет место равенство, то Ω называют *измеримым по Жордану в двумерном смысле* и число

$$m\Omega = m_i\Omega = m_e\Omega$$

называют *двумерной мерой Ω по Жордану*

Меру Жордана мы будем называть также и просто *мерой.* Итак, множество Ω измеримо (по Жордану), если для него

$$\lim_{N\to\infty}|\underline{\Omega}_N| = \lim_{N\to\infty}|\overline{\Omega}_N|. \qquad (5.247)$$

Обозначим через Г границу множества Ω (Г = ∂Ω). Чтобы получить совокупность квадратиков сетки, покрывающих Г или, как мы будем говорить, чтобы получить фигуру, покрывающую Г (см. рис. 5.41), надо из фигуры $\overline{\Omega}_N$ вычесть в теоретико-множественном смысле фигуру $\underline{\Omega}_N$ и замкнуть полученное множество

$$\overline{\Gamma}_N = \overline{\overline{\Omega}_N \setminus \underline{\Omega}_N}.$$

Очевидно, площадь (двумерная мера) $\overline{\Gamma}_N$ равна

$$|\overline{\Gamma}_N| = |\overline{\Omega}_N| - |\underline{\Omega}_N|.$$

Из (5.247) следует:

$$\lim_{N\to\infty}|\overline{\Gamma}_N| = \lim_{N\to\infty}|\overline{\Omega}_N| - \lim_{N\to\infty}|\underline{\Omega}_N| = 0. \qquad (5.248)$$

Обратно, из равенства

$$\lim_{N\to\infty}|\overline{\Gamma}_N| = 0, \qquad (5.249)$$

учитывая, что пределы

$$\lim_{N\to\infty}|\overline{\Omega}_N| \text{ и } \lim_{N\to\infty}|\underline{\Omega}_N|$$

существуют следует равенство (5.247), т. е. измеримость Ω.
Заметим, что предел (5.249) есть внешняя мера Г, т, е,

$$m_e\Gamma = 0.$$

Но $0 \leqslant m_i\Gamma \leqslant m_e\Gamma$, поэтому и

$$m_i\Gamma = m_e\Gamma = 0.$$

Мы доказали важное утверждение: *для того чтобы множество* Ω *плоскости было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы мера его границы равнялась нулю* ($m\Gamma = 0$).
Ниже будет показано, что *кусочно-гладкая кривая имеет двумерную меру нуль.* Но тогда *область* Ω*, имеющая кусочно-гладкую границу, измерима в двумерном смысле по Жордану.*
Рассмотрим примеры.
Пример 1. Множество Ω, состоящее из одной точки, имеет днумерную меру нуль ($m\Omega = 0$). Точка может принадлежать самое большее к четырем квадратикам h-сетки, их общая площадь стремится к нулю при $N\to\infty$ и, следовательно, $m_e\Omega=0$, но $0\leq m_i\Omega\leq m_e\Omega$, поэтому $m_i\Omega = m_e\Omega = m\Omega = 0$.
Пример 2. *Непрерывная кривая* Г (рис. 5.42) $y=f(x)$ $(a<x<b)$ *имеет двумерную меру нуль* ($m\Gamma=0$).

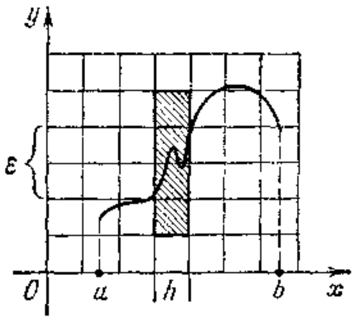


Рис. 5.42

В самом деле, вследствие равномерной непрерывности f на $[a, b]$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $| f(x'') - f(x') | < \varepsilon$ для всех $x', x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta$. Найденное $\delta > 0$ можно уменьшить, как мы хотим. Будем считать, что $\delta < \varepsilon$, Зададим h -сетку с

$$h = 2^{-N} < \delta$$

и рассмотрим какой-либо столбик из квадратов сетки, содержащих в себе точки Г. Его высота не превышает $\varepsilon + 2h$ (на рис. 5.42 при $\varepsilon = 2h$ выделенный столбик включает четыре квадратика h-сетки, содержащих точки Г и $\varepsilon + 2h = 4h$), а площадь не превышает $(\varepsilon + 2h)\,h$. Общая площадь столбиков, покрывающих Г, не превышает

$$(\varepsilon + 2h)\,h \cdot \frac{K}{h} = (\varepsilon + 2h)\,K \leqslant 3\varepsilon K,$$

где K— длина некоторого отрезка, содержащего в себе отрезок $[a, b]$.

Это показывает, что общая площадь $|\overline{\Gamma}_N|$ квадратиков, покрывающих кривую Г, при достаточно большом N может быть сделана меньшей наперед заданного как угодно малого положительного числа, и, следовательно, внешняя мера Г, тем более внутренняя, равна нулю. Но тогда

$$m\Gamma = 0.$$

Так как *сумма конечного числа множеств, имеющих меру нуль,* очевидно, *имеет меру нуль,* то из примера 1 следует, что *двумерная мера множества, состоящего из конечного числа точек, равна нулю.*

А из примера 2 следует, что *гладкая кривая*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{5.250}$$

имеет двумерную меру нуль (рис. 5.43).

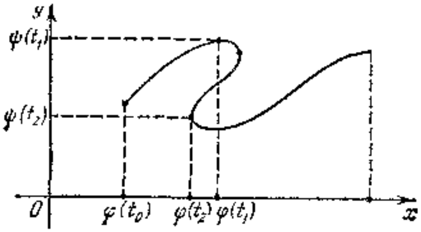


Рис. 5.43.

Дело в том, что если Г—гладкая кривая на $[a, b]$, то отрезок $[a, b]$ можно разделить на конечное число отрезков точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

так, что на каждом частичном отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ одно из двух уравнений (5.250) можно разрешить относительно t и подставить во второе. В результат получим, что соответствующий кусок Γ_j кривой Г описывается либо уравнением вида

$$y = f(x) \qquad (x \in [c, d]),$$

либо уравнением вида

$$x = g(y) \qquad (y \in [p, q]),$$

где функции f и g непрерывны на соответствующих отрезках. Но тогда, как мы знаем из примера 2,

$$m\Gamma_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, r).$$

Поэтому, так как Г есть сумма конечного числа кусков Γ_j,

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{r} \Gamma_j,$$

каждый из которых имеет меру нуль, то mF = 0.

Отметим, что если *два множества* Ω_1 *и* Ω_2 *измеримы, то измеримы также их сумма* $\Omega_1+\Omega_2$, *разность* $\Omega_1 \backslash \Omega_2$ *и пересечение* $\Omega_1\Omega_2 = \Omega_1 \cap \Omega_2$.

В самом деле, обозначим через Г (E) границу множества E. На рис. 5.44 изображены два множества Ω_1 и Ω_2. Очевидно,

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(\Omega_1 + \Omega_2) &\subset \Gamma(\Omega_1) + \Gamma(\Omega_2), \\ \Gamma(\Omega_1 \setminus \Omega_2) &\subset \Gamma(\Omega_1) + \Gamma(\Omega_2), \\ \Gamma(\Omega_1 \Omega_2) &\subset \Gamma(\Omega_1) + \Gamma(\Omega_2). \end{aligned}\right\} \qquad (5.251)$$

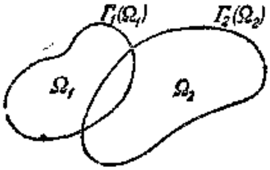


Рис. 5.44.

Если Ω_1 и Ω_2 измеримы, то $m\Gamma(\Omega_1)=0$, $m\Gamma(\Omega_2)=0$, но тогда и меры левых частей (5.251) равны нулю, что показывает, что множества $\Omega_1+\Omega_2$, $\Omega_1\diagdown\Omega_2$, $\Omega_1\Omega_2$ измеримн.

Здесь мы воспользовались очевидным свойством меры. Если множество ω имеет меру нуль, то и любое его подмножество также имеет меру нуль.

Наконец, если Ω_1 и Ω_2 — измеримые множества, пересекающиеся разве что по своим границам, то

$$m(\Omega^1+\Omega^2)=m\Omega^1+m\Omega^2. \qquad (5.252)$$

В самом деле, очевидно (рис. 5.45)

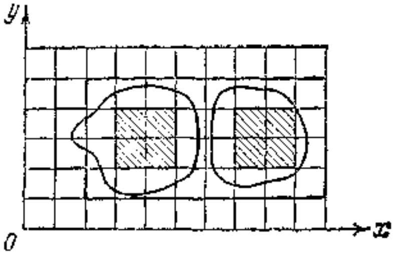


Рис. 5.45.

$$\underline{\Omega}_N^1+\underline{\Omega}_N^2\subset\underline{(\Omega^1+\Omega^2)}_N\subset\overline{(\Omega^1+\Omega^2)}_N\subset\overline{\Omega}_N^1+\overline{\Omega}_N^2,$$

и так как

$$\lim_{N\to\infty}|\underline{\Omega}_N^1|=\lim_{N\to\infty}|\overline{\Omega}_N^1|=m\Omega^1,$$
$$\lim_{N\to\infty}|\underline{\Omega}_N^2|=\lim_{N\to\infty}|\overline{\Omega}_N^2|=m\Omega^2,$$

то, очевидно,

$$\lim_{N\to\infty}|\underline{(\Omega^1+\Omega^2)}_N|=\lim_{N\to\infty}|\overline{(\Omega^1+\Omega^2)}_N|=m\Omega^1+m\Omega^2,$$

что доказывает (5.252).

Отметим, что если область Ω измерима, то ее мера Жордана равна мере ее замыкания:

$$m\Omega = m\overline{\Omega}.$$

В самом деле, $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$, где Γ —граница Ω и $m\overline{\Omega} = m\Omega + m\Gamma$, где $m\Gamma = 0$.

Пример 3. Множество ω, состоящее из всех рациональных чисел отрезка [0, 1], не измеримо по Жордану: $m_i\omega = 0$, $m_e\omega = 1$.

В трехмерном случае теория меры Жордана аналогична. Теперь вводится прямоугольная система координат *x, y, z* и три семейства параллельных плоскостей

$$\begin{aligned} x &= kh \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \\ y &= lh \qquad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \\ z &= mh \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \end{aligned}$$

делящих пространство на кубики с ребром $h = 2^{-N}$ (N=1,2, ...). Такое разбиение пространства мы снова называем h-сеткой (трехмерной).

Пусть Ω есть ограниченное множество точек, принадлежащих пространству. Обозначим через $\underline{\Omega}_N$ *внутреннюю фигуру множества* Ω — совокупность кубиков сетки, полностью принадлежащих Ω, и через $\overline{\Omega}_N$ —*внешнюю фигуру множества* Ω — совокупность кубиков сетки, каждый из которых содержит хотя бы одну точку Ω.

Снова заключаем, что

$$\underline{\Omega}_1 \subset \underline{\Omega}_2 \subset \underline{\Omega}_3 \subset \ldots \subset \Omega,$$
$$\overline{\Omega}_1 \supset \overline{\Omega}_2 \supset \overline{\Omega}_3 \supset \ldots \supset \Omega,$$

откуда следует:

$$|\underline{\Omega}_1| \leqslant |\underline{\Omega}_2| \leqslant |\underline{\Omega}_3| \leqslant \ldots,$$
$$|\overline{\Omega}_1| \geqslant |\overline{\Omega}_2| \geqslant |\overline{\Omega}_3| \geqslant \ldots$$

и

$$|\underline{\Omega}_N| \leqslant |\overline{\Omega}_M|,$$

каковы бы ни были натуральные N и M Отсюда вытекает существование пределов

$$\lim_{N \to \infty} |\underline{\Omega}_N| \leqslant \lim_{N \to \infty} |\overline{\Omega}_N|.$$

Перрый предел в этом неравенстве называют *внутренней* (трехмерной) *мерой* Ω*:*

$$m_i\Omega = \lim_{N \to \infty} |\underline{\Omega}_N|,$$

а второй—внешней *мерой* Ω*:*

$$m_e\Omega = \lim_{N \to \infty} |\overline{\Omega}_N|.$$

Таким образом,

$$m_i\Omega \leqslant m_e\Omega.$$

Если

$$m_i\Omega = m_e\Omega = m\Omega,$$

то множество Ω начинают *измеримым в трехмерном смысле по Жордану* и число $m\Omega$ называют его *трехмерной мерой.*

1'лссужлемиями, подобными тем, которые велись в связи о равенствами (5.247), (5.248), (5.249), доказывается, что множество измеримо в трехмерном смысле тогда и только тогда когда его граница имеет трехмерную меру нуль.

Мы не будем формулировать дальнейшие свойства измеримых в трехмерном смысле множеств. Они аналогичны отмеченным выше свойствам множеств, измеримых в двумерном смысле.

Остановимся только на объяснении того, что кусочно-гладкая поверхность имеет трехмерную меру нуль. Такая поверхность состоит из конечного числа кусков S, пересекающихся разве что по своим краям, каждый из которых при соответствующем переобозначении координат определяется уравнением

$$z = f(x, y) \qquad ((x, y) \in \overline{g}),$$

где $\overline{g}$ —замыкание некоторой ограниченной в плоскости *x, y* области. Зададим ε > 0 и подберем δ > 0 так, чтобы

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$$

для всех точек $(x', y'),\ (x'', y'') \in \overline{g},$ находящихся на расстоянии друг от друга

$$|(x', y') - (x'', y'')| < \delta.$$

Считаем δ < ε и берем h-сетку с $h = 2^{-N} < \delta$. Рассматриваем какой-либо столбик из кубиков сетки, содержащих в себе точки S. Его высота не превышает $\varepsilon + 2h$, а объем не превышает $(\varepsilon + 2h)\, h^2$. Общий объем всех таких столбиков, покрывающих S, не превышает

$$(\varepsilon + 2h)\, h^2 \cdot \frac{K}{h^2} = (\varepsilon + 2h)\, K < 3\varepsilon K. \tag{5.253}$$

Злесь K есть площадь квадрата Δ, покрывающего множество $\overline{g}$. Правая часть (5.253) может быть взята как угодно малой, что доказывает, что трехмерная мера $mS = 0$.

Можно ввести по аналогии понятие n-мерной меры для множеств пространства R_n и показать, что гладкая поверхность в R_n имеет n-мерную меру нуль.

21. Многомерные интегралы. Меру можно задать и в обобщенном k-мерном пространстве или, как говорят иначе, в k-*мерном многообразии.* Определение интеграла (5.244) и его основные свойства полностью сохраняются. Чтобы перейти к повторному интегралу, нужно ввести в пространстве обобщенные координаты t_l .... t_k, после чего выразить подынтегральную функцию в виде $u = u(t_l t, \ldots t_k)$ и элемент меры

$$d\mu = \rho(t_1, \ldots, t_k)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_k,$$

отвечающий бесконечно малому *обобщенному координатному параллелепипеду* со сторонами dt_l ..., dt_k, расположенному в точке $(t_1 \ldots t_k)$. Тогда интеграл (5.244) примет вид

$$\int\limits_{(\Omega)} u\, d\mu = \underbrace{\int\int \ldots \int}_{k \text{ раз}} u(t_1, t_2, \ldots, t_k)\, \rho(t_1, t_2, \ldots, t_k)\, dt_1 \ldots dt_k, \tag{5.254}$$

где в правой части надо расставить пределы, руководствуясь изменением координат t в области (Ω).

В формуле (5.254) ρ, т. е. «плотность меры», понимается как обычная функция, если мера μ каждого многообразия размерности, меньшей k (определенного одним или несколькими уравнениями, связывающими координаты t), равна нулю; так будет, в частности, если плотность меры всюду конечна.

В противном случае ρ надо понимать как обобщенную функцию .

Если в рассматриваемом пространстве введено понятие объема, то возможно и интегрирование по объему, который является частным случаем меры. Тогда должен быть известен объем бесконечно малого обобщенного координатного параллелепипеда

$$d\Omega = h(t_1, \ldots, t_k)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_k, \tag{5.255}$$

после чего интеграл

$$\int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega$$

преобразуется подобно (5.254).

Аналогично вводится понятие интеграла (по мере или по объему) по любому многообразию размерности меньше $к$ в основном $к$-мерном пространстве. Если в обычном трехмерном пространстве возможны криволинейные, поверхностные и объемные интегралы, то в $к$-мерном пространстве имеется k типов интегралов .

В $к$-мерном числовом пространстве E_k в формуле (5.255) полагают $h \equiv 1$, т. е. за единицу объема принимают объем «единичногоk-мерного куба» со сторонами, равными 1. Интегралы низшей кратности в этом пространстве определяют, исходя из того, что p-мерный объем ($1 \leq p < к$) p-мерного прямоугольного параллелепипеда, конечного или бесконечно малого, равен произведению его сторон (это — *мера Лебега).*

Можно рассматривать *интегралы по координатам,* распространенные по p-мерному ($l<p<k$) многообразию (S) в E_k. При этом (S) должно быть *ориентированным.* Это понятие при $p > 1$ не совсем наглядное и требует уточнения, которое мы сейчас сделаем.

Введем сначала понятие *р-мерного тетраэдра.* По определению одномерным тетраэдром считается отрезок, двумерным—треугольник, трехмерным — треугольная пирамида; чтобы получить четырехмерный тетраэдр, выбирают точку вне трехмерного пространства, в котором расположен трехмерный тетраэдр, и соединяют ее отрезками со всеми точками последнего и т. д. Рассмотрим теперь какой-либо p-мерный тетраэдр с вершинами A_1, A_2, ..., A_{p+1}. Ориентация его задается перечислением этих вершин в определенном порядке; при этом считается, что перестановка порядка двух вершин меняет ориентацию на противоположную. Например, для трехмерного тетраэдра с вершинами *A, B, C, D* порядки *ABCD* и *DBAC* определяют одну и ту же ориентацию, а порядок *CBAD* — противоположную. Каждый тетраэдр можно ориентировать двумя способами.

Если на многообразии (S) произвольно выбрать малый p-мерный тетраэдр, произвольно ориентировать его, а затем перемещать по (S), не меняя его ориентации, то исходная ориентация индуцирует ориентацию всех малых p-мерных тетраэдров на *(S),* т. е. *(S)* будет ориентировано. При $p = 1$ многообразие (S) является линией и указанный способ равносилен заданию на ней определенного направления; при $p = 2$ многообразие (S) является двумерной поверхностью и ориентация равносильна указанию направления обхода контура любой малой фигуры на *(S).* Если (S) состоит из нескольких кусков, то их ориентацию можно проводить независимо друг от друга.

Следует иметь в виду, что при $p \geq 2i$ некоторые многообразия ориентировать невозможно. Простейшей неориентируемой поверхностью является *лист Мёбиуса*
(рис. 5.46).

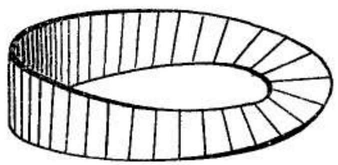


Рис. 5.46

p-мерный интеграл по координатам, взятый по p-мерному ориентированному многообразию *(S)* в E_k, определяется так:

$$\int_{(S)}\cdots\int u(t_1, \ldots, t_k)\,dt_{m_1}dt_{m_2}\ldots dt_{m_p} = \lim \sum_{k=1}^{n} u(M_k)\,\Delta S_k', \tag{5.256}$$

где в правой части *(S)* считается разбитым на малые тетраэдры (ΔS_k), ориентированные в соответствии с ориентацией *(S)*,а под $\Delta S_k'$ понимается p-мерный объем проекции (ΔS_k) па плоскость координат t_{m1} , t_{m2} , ..., t_{mp} , взятый со знаком + или- в зависимости от того, совпадает или нет ориентация этого спроектированного тетраэдра с ориентацией тетраэдра $OC_{m1}C_{m2}\ldots C_{mp}$, где C_m — единичная точка на оси t_m. При этом все индексы m_1, m_2, ..., m_p должны быть различными, так как в противном случае интеграл (5.256) считается равным нулю.

Свойства интеграла (5.256) аналогичны свойствам интегралов, описанным в п. 3, за исключением свойств, связанных с интегрированием неравенств. При перемене ориентации *(S)* или при перестановке двух дифференциалов под знаком интеграла он множится на —1 . Рассматривают также суммы интегралов вида

$$\int_{(S)}\cdots\int \sum_{m_1, \ldots, m_p=1}^{k} u_{m_1, \ldots, m_p}(t_1, \ldots, t_k)\,dt_{m_1}dt_{m_2}\ldots dt_{m_p}. \tag{5.257}$$

Частным случаем такого интеграла является интеграл по координатам, взятый по обычной ориентированной двумерной поверхности в обычном трехмерном пространстве *x, y, z;*

$$\iint_{(S)} P(x, y, z)\,dx\,dy + Q(x, y, z)\,dy\,dz + R(x, y, z)\,dx\,dz.$$

При расстановке пределов в интеграле (5.256) можно выразить в подынтегральной функции через $t_{m_1}, \ldots, t_{m_p}$ значения остальных координат t для точек многообразия (S); затем разбить (S) на части, проекции которых на плоскость t_{m1}..... t_{mp} ориентированы одинаково, после чего расставить пределы по каждой из этих проекций, как в обычном p-мерном интеграле по объему (одни из этих интегралов войдут в итог со знаком + , а другие со знаком —). Можно также перейти на (S) к каким-либо подходящим криволинейным координатам $s_1 .... s_p$, заменив под интегралом

$$dt_{m_1} \dots dt_{m_p}$$

на

$$\frac{D(t_{m_1}, \dots, t_{m_p})}{D(s_1, \dots, s_p)} ds_1 \dots ds_p.$$

5.13. Операционное исчисление

5.13.1. Изображение Лапласа

Здесь мы, как правило, будем рассматривать функции *f(t)* действительного переменного *t,* заданные на [0, ∞). Иногда будем считать, что *f (t)* определена на (—∞,∞), но при $t<0$ функция $f(t) \equiv 0$. Кроме того, будем предполагать, что функция *f(t)* кусочно-непрерывна и на каждом конечном промежутке имеет конечное число точек разрыва первого рода. Пусть $p=a+ib$ — комплексное число.

Рассмотрим функцию

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt. \tag{1}$$

Если

$$|f(t)| \leqslant M \exp(s_0 t), \tag{2}$$

где $a > s_0$, то функция *F (p)* аналитическая в полуплоскости Re $p > s_0$ (рис. 1).

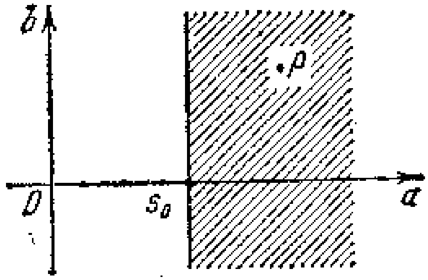


Рис. 1

В самом деле,

$$|F'(p)| = \left|\int_0^\infty t\exp(-at-ibt)f(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^\infty t\exp(-at)|f(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \exp(-at)\cdot tM\exp(s_0t)\,dt =$$

$$= M\int_0^\infty t\exp(-(a-s_0)t)\,dt < \infty, \qquad (3)$$

так как $a > s_0$. Законность дифференцирования по p под знаком интеграла следует из неравенства (3) и того факта, что функция $tf(t)\exp(-pt)$ кусочно-непрерывна.

Функция $F(p)$ называется *изображением Лапласа* функции f, L-*изображением* или *преобразованием Лапласа.*

Мы будем употреблять обозначения

$$F(p) = L(f(t);p), \quad f(t) \risingdotseq F(p), \quad F(p) \fallingdotseq f(t).$$

Функцию $f(t)$ в этом случае называют *начальной функцией* или *оригиналом.* Число $s_0\ (s_0 = s_0(f))$ называется *показателем роста функции* $f(t)$ (ниже, если особо не оговорено, то мы считаем, что показатель роста f равен s_0).

Процесс нахождения изображения для заданного оригинала и обратно, нахождение оригинала по известному изображению называется ***операционным исчислением***, начало которому положил Хевисайд. Разработав операционное исчисление, Хевисайд не дал ему обоснования. Отметим, что он рассматривал преобразование

$$\tilde{F}(p) = p\int_0^\infty \exp(-pt)f(t)\,dt,$$

т. е. $\tilde{F}(p) = pF(p)$.

В одних вопросах удобным является преобразование Лапласа, в других — преобразование Хевисайда. Мы будем рассматривать преобразование Лапласа.

Обоснование операционного исчисления было дано в двадцатых годах прошлого века в работах ряда математиков.

Теорема 1 (единственности). *Если две непрерывные функции f(t) и g(t) имеют одно и то же L-изображение F(p), то они тождественно равны.*

На основании теоремы 1 мы можем сказать, что для непрерывной функции *f(t),* тождественно не равной нулю, изображение не может быть периодической функцией.

В самом деле, если $\forall p \quad F(p) = F(p+\omega)$, где $\omega \neq 0$, то

$$\int_0^\infty \exp(-pt) f(t)\, dt = \int_0^\infty \exp(-(p+\omega)t) f(t)\, dt.$$

По теореме1

$$f(t) = \exp(-\omega t) f(t),$$

т. е. $\exp(-\omega t) \equiv 1 \quad (\omega \neq 0)$, чего быть не может.

5.13.2. Изображение простейших функций и свойства изображений

Единичной функцией или *функцией Хевисайда* называется функция

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что показатель роста этой функции $s_0=0$. Найдем *L*-изображение этой функции в области $\operatorname{Re} p > 0$:

$$L(\sigma_0(t);\ p) = \int_0^\infty \exp(-pt)\, dt = -\frac{1}{p}\exp(-pt)\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Таким образом,

$$\sigma_0(t) \risingdotseq 1/p. \tag{1}$$

Аналогично для функции $f(t)=\cos t$ интегрированием по частям находим

$$L(\cos t;\ p) = \int_0^\infty \exp(-pt)\cos t\,dt =$$

$$= \exp(-pt)\sin t\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty \exp(-pt)\sin t\,dt =$$

$$= p\int_0^\infty \exp(-pt)\sin t\,dt = p\Bigg[-\exp(-pt)\cos t\Big|_0^\infty -$$

$$-\,p\int_0^\infty \exp(-pt)\cos t\,dt\Bigg] = p - p^2L[\cos t;\ p].$$

Отсюда

$$L(\cos t;\ p) = \frac{p}{1+p^2} \quad (\operatorname{Re} p > \theta),\ \text{т. е.}$$
$$\cos t \risingdotseq p/(1+p^2). \tag{2}$$

Попутно мы доказали, что

$$L(\cos t;\ p) = pL(\sin t;\ p),$$

откуда

$$\sin t \risingdotseq 1/(1+p^2). \tag{3}$$

Теорема1 (подобия)

$$\risingdotseq \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (\alpha > 0,\ \operatorname{Re} p > \max\{s_0,\ \alpha s_0\}).$$

В самом леле,

$$L[f(\alpha t);\ p] = \int_0^\infty \exp(-pt)f(\alpha t)\,dt = \left\{\alpha t = u,\ dt = \frac{du}{\alpha}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{p}{\alpha}u\right)f(u)\,du = \frac{1}{\alpha}L\left[f(u);\ \frac{p}{\alpha}\right].$$

На основании теоремы 1 получаем

$$\cos\alpha t \risingdotseq \frac{1}{\alpha}\frac{p/\alpha}{1+(p/\alpha)^2} = \frac{p}{p^2+\alpha^2}; \tag{4}$$

$$\sin\alpha t \risingdotseq \frac{1}{\alpha}\frac{1}{1+(p/\alpha)^2} = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}. \tag{5}$$

Теорема 2 (свойство линейности). *Имеет место равенство*

$$L[Af(t)+Bg(t);\ p] = AL[f(t);\ p] + BL[g(t);\ p],$$

где A, B—постоянные числа.

Это свойство вытекает из соответствующего свойства несобственного интеграла. Отметим, что если показатели роста функций f и g соответственно равны s_0 и $\overline{s_0}$, то изображение $Af+Bg$ существует в полуплоскости

$$\operatorname{Re} p > \max\{s_0, \overline{s_0}\}.$$

Пример 1. Найти изображение функции

$$f(t)=3\sigma_0(t)+2\cos 3t.$$

В силу (1), (4) и теоремы 2 имеем

$$L[f(t);\ p]=3L[\sigma_0(t);\ p]+2L[\cos 3t;\ p]=\frac{3}{p}+2\frac{p}{p^2+9}.$$

Пример 2. Найти оригинал изображения

$$F(p)=\frac{2}{p}+\frac{2}{p^2+16}.$$

Представим изображение *F(p)* в виде

$$F(p)=2\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\frac{4}{p^2+4^2}.$$

Имеем

$$1/p \doteqdot \sigma_0(t), \qquad 4/(p^2+4^2) \doteqdot \sin 4t.$$

Следовательно, оригинал (по теореме 1 п. 5.13.1)

$$f(t)=2\sigma_0(t)+\frac{1}{2}\sin 4t.$$

Теорема 3 (смещение изображения).

$$L[f(t)\exp(-\alpha t);\ p]=L[f(t);\ p+\alpha], \quad \operatorname{Re}(p+\alpha)>s_0.$$

Пример 3. Найти изображение функций

$$e^{-\alpha t}\cos\beta t,$$
$$e^{-\alpha t}\sin\beta t,\ e^{-\alpha t}.$$

Так как $\cos\beta t \doteqdot p/(p^2+\beta^2)$, то по теореме 3

$$L[\exp(-\alpha t)\cos\beta t;\ p]=\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}. \tag{6}$$

Совершенно аналогично, используя формулы (5) и (1), имеем

$$L[\exp(-\alpha t)\sin\beta t;\ p]=\beta/((p+\alpha)^2+\beta^2), \tag{7}$$

$$L[\exp(-\alpha t);\ p]=L[\sigma_0(t);\ p+\alpha]=1/(p+\alpha). \tag{8}$$

Пример 4. Найти $L[\operatorname{ch}\alpha t;\ p]$, $L[\operatorname{sh}\alpha t;\ p]$.

Используя теорему 2 и равенство (8), имеем

$$L[\operatorname{ch}\alpha t;\ p]=\frac{1}{2}L[e^{\alpha t};\ p]+\frac{1}{2}L[e^{-\alpha t};\ p]=\frac{p}{p^2-\alpha^2}.$$

Аналогично $L[\operatorname{sh}\alpha t;\ p]=\alpha/(p^2-\alpha^2)$.

Пример 5. Найти оригинал для изображения

$$F(p)=1/(p^2+2p+5)$$

Имеем

$$F(p)=\frac{2}{2[(p+1)^2+2^2]},\quad \frac{2}{p^2+2^2}\doteqdot\sin 2t,$$

$$\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\doteqdot e^{-t}\sin 2t,\quad f(t)=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t.$$

Теорема 4 (дифференцирование изображения).

$$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}L[f(t);\ \ p]=L[t^nf(t);\ \ p].$$

Доказательство. Если Re $p>s_0$, где s_0 — показатель роста функции $f(t)$, то интеграл

$$\int_0^\infty t^nf(t)\exp(-pt)\,dt$$

существует при любом n = 1, 2, ... Далее, очевидно, что

$$\frac{d^n}{dp^n}\int_0^\infty \exp(-pt)f(t)\,dt=\int_0^\infty(-t)^n\exp(-pt)f(t)\,dt.$$

Отсюда

$$(-1)^nL[f(t)t^n;\ p]=\frac{d^n}{dp^n}L[f(t);\ p].$$

Пример 6. Так как

$$1/p\doteqdot\sigma_0(t),$$

то в силу теоремы 4 получаем

$$(-1)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right)\doteqdot 1\cdot t,\qquad \text{т. е. } t\doteqdot\frac{1}{p^2}.$$

Продолжая дифференцирование, получим

$$t^n\doteqdot n!/p^{n+1}\qquad(n=1,2,\ \ldots).\tag{9}$$

Если n не целое, то

$$t^n\doteqdot\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}},$$

где $\Gamma(a+1)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^a\,dt=L[t^a;\ 1]$.

При натуральном n имеем $\Gamma(n+1) = n!$.

Пример 7. Найти изображение функции $t\cos\alpha t$. Имеем

$$\frac{p}{p^2+\alpha^2}\doteqdot\cos\alpha t,\quad -\left(\frac{p}{p^2+\alpha^2}\right)'\doteqdot t\cos\alpha t$$

или

$$\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}\doteqdot t\cos\alpha t. \tag{10}$$

Теорема 5 (о дифференцировании оригинала). *Справедлива формула*

$$L[f'(t);\ p]=pL[f(t);\ p]-f(0)\qquad(\operatorname{Re}p>s_0) \tag{11}$$

в предположении, что функция f(t) непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную f (t) на [0, ∞) *с разрывами первого рода и показатели роста f(t) и f '(t) равны* s_0.

(Бывают случаи, когда функция *f(t)*, о которой говорится в теореме, задана на интервале (0, оо) и существует предел справа

$$f(0+0)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t).$$

Тогда в формуле (11) надо заменить *f*(0) на *f*(0+0))

Доказательство. Имеем ($\operatorname{Re}p > s_0$)

$$L[f'(t);\ p]=\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^N \exp(-pt)f'(t)\,dt=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[e^{-pt}f(t)\Big|_0^N+p\int\limits_0^N e^{-pt}f(t)\,dt\right]=-f(0)+pL[f(t);\ p],$$

потому что

$$|e^{-pN}f(N)|\leqslant e^{-aN}Me^{s_0N}=Me^{-(a-s_0)N}\xrightarrow[N\to\infty]{}0$$

Следствие 1. *Справедлива формула* ($\operatorname{Re}p > s_0$)

$$L[f^{(n)}(t);\ p]=$$
$$=p^nL[f(t);\ p]-p^{n-1}f(0)-\ldots-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0) \tag{12}$$

при условии, что $f(t),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(t)$ *непрерывны,* $f^{(n)}$ *кусочно-непрерывна на* [0, ∞), *а показатель роста функции f вместе с ее производными до порядка n включительно равен* s_0.

В частности, при

$$f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0 \qquad (13)$$

имеет место

$$L[f^{(n)}(t);\ p]=p^n L[f(t);\ p]. \qquad (14)$$

Пример 8. Найти изображение функции $f(t) = \cos^2 t$
Пусть $F(p) \doteqdot \cos^2 t = f(t)$. Тогда $f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0)$.
Но $f(0) = \cos^2 0 = 1, \quad f'(t) = -\sin 2t \doteqdot -2/(p^2+4)$
Следовательно, $pF(p) - 1 = -2/(p^2+4)$, откуда

$$F(p)=\frac{1}{p}\times\left[1-\frac{2}{p^2+4}\right]=\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.$$

Этот же результат мы получим, если воспользуемся равенством

$$\cos^2 t=\frac{1}{2}+\frac{\cos 2t}{2},\quad L[\cos^2 t;\ p]=\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}=\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.$$

Теорема 6 (интегрирование оригинала).

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}.$$

В самом деле, изменяя порядок интегрирования, имеем

$$\int_0^\infty e^{-pt}\int_0^t f(\tau)\,d\tau\,dt=\int_0^\infty\int_\tau^\infty e^{-pt}f(\tau)\,d\tau\,dt=\int_0^\infty f(\tau)\frac{-e^{-pt}}{p}\Big|_\tau^\infty d\tau=$$

$$=\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau)\,d\tau=\frac{1}{p}L[f(\tau);\ p]=\frac{F(p)}{p}.$$

По определению полагаем $(p=\alpha+i\beta)$

$$\int_p^\infty F(q)\,dq=\int_\alpha^\infty F(\xi+i\beta)\,d\xi=\lim_{N\to\infty}\int_\alpha^N F(\xi+i\beta)\,d\xi.$$

Теорема 7 (интегрирование изображения). *Пусть заданная на* $(0, \infty)$ *кусочно-непрерывная функция f(t) удовлетворяет условию* (2) п.5.13.1, $f(t) \doteqdot F(p), \quad p=\alpha+i\beta,$

$\alpha > s_0$ *и* $\int_0^1 \frac{f(t)}{t}dt$ *сходится. Тогда, если* $\int_p^\infty F(q)\,dq$ *сходится, то*

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^\infty F(q)\,dq.$$

Доказательство. Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\int_p^\infty F(q)\,dq = \lim_{N\to\infty}\int_\alpha^N\left(\int_0^\infty f(t)\,e^{-(\xi+i\beta)t}dt\right)d\xi =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty f(t)\left(\int_\alpha^N e^{-(\xi+i\beta)t}\,d\xi\right)dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty f(t)\,\frac{-e^{-(\xi+i\beta)t}}{t}\Bigg|_{\xi=\alpha}^{\xi=N}dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,e^{-(\alpha+i\beta)t}\,dt = L\left[\frac{f(t)}{t};\ p\right],$$

потому что

$$I_N = \left|\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-(N+i\beta)t}dt\right| \longrightarrow 0, \qquad N\longrightarrow\infty.$$

В самом деле, пусть s_0 — показатель роста функции f и N — достаточно большое число $(N > s_0)$, тогда в силу (2) из п.5.13.1

$$I_N \leqslant \left|\int_0^\eta \frac{f(t)}{t}e^{-(N+i\beta)t}dt\right| + \frac{M}{\eta}\int_\eta^\infty e^{-(N-s_0)t}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_0^\eta \frac{f(t)}{t}e^{-(N+i\beta)t}dt\right| + \frac{M}{\eta(N-s_0)},$$

где число $\eta > 0$, которое мы определим ниже, пока произвольно. Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi.$$

В силу условий теоремы функция $\varphi(t)\to 0$ при $t\to 0$; $\varphi(t)$ непрерывна на $(0, 1]$; $\varphi(t)$ дифференцируема на $(0, 1)$ за исключением конечного числа точек; $|\varphi(t)| \leqslant K \quad \forall 0 < t \leqslant 1.$

Интегрируя по частям, имеем

$$\Lambda_N = \int_0^\eta \frac{f(t)}{t}\,e^{-(N+i\beta)t}\,dt =$$

$$= \varphi(t)\,e^{-(N+i\beta)t}\Big|_0^\eta + \int_0^\eta (N+i\beta)\,\varphi(t)\,e^{-(N+i\beta)t}\,dt =$$

$$= \varphi(\eta)\,e^{-(N+i\beta)\eta} + (N+i\beta)\int_0^\eta \varphi(t)\,e^{-(N+i\beta)t}\,dt.$$

Зададим теперь произвольное число $\varepsilon > 0$ и подберем числа $\eta > 0$ так, чтобы $|\varphi(t)| < \varepsilon$ при $0 < t \leq \eta$). Тогда при $N > \beta$

$$|\Lambda_N| \leqslant \varepsilon + \varepsilon \sqrt{N^2+\beta^2}\int_0^\eta e^{-Nt}\,dt \leqslant \varepsilon\left(1+\sqrt{1+\frac{\beta^2}{N^2}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant (1+\sqrt{2})\,\varepsilon.$$

Отсюда, для интеграла f_N, мы получаем следующую оценку:

$$I_N \leqslant (1+\sqrt{2})\,\varepsilon + \frac{M}{\eta(N-s_0)}$$

и в силу произвольности ε > 0 заключаем, что

$$\lim_{N\to\infty} I_N = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Мы применяем здесь и ниже изменение порядка интегрирования. Согласно теореме Фубини, которую мы здесь не доказываем, эта операция законна, если полученный после изменения кратный интеграл абсолютно сходится.

Следствие 2. *Пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы 7 при* $s_0 = 0$ *(т. е.* $|f(t)| \leq M$ *для всех* $t \geq 0$*) и пусть дополнительно несобственный интеграл* $\int_1^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt$ *сходится. Тогда, если интеграл* $\int_0^\infty F(q)\,dq$ *сходится, то*

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(q)\,dq.$$

Пример 9. Найти изображение функции $\int_0^t \sin 2\tau\,d\tau.$

Имеем $\sin 2\tau \risingdotseq 2/(p^2+4)$. По теореме 6

$$\int_0^t \sin 2\tau\,d\tau \risingdotseq \frac{2}{p(p^2+4)}.$$

Пример 10. Найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$.

Нам известно, что

$$\sin t \risingdotseq 1/(p^2+1).$$

Поэтому по теореме 7

$$\frac{\sin t}{t} \doteqdot \int_p^\infty \frac{dq}{q^2+1} = \operatorname{arctg} q \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Пример 11. Найти интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$.

Используя пример 10 и следствие 2, получаем

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty \frac{dq}{q^2+1} = \operatorname{arctg} q \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Теорема 8 (запаздывание оригинала). *Пусть* $f(t) = 0$ *при* $t < 0$, *тогда*

$$L[f(t-t_0);\ p] = e^{-pt_0} L[f(t);\ p],$$

где t_0*—некоторая точка* ($t_0 \geq 0$).

Доказательство. Имеем

$$L[f(t-t_0);\ p] = \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t-t_0)\, dt + \int_{t_0}^\infty e^{-pt} f(t-t_0)\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^\infty e^{-pt} f(t-t_0)\, dt = \{t - t_0 = u,\ dt = du\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-p(u+t_0)} f(u)\, du = e^{-pt_0} L[f(u);\ p].$$

Пример 12. Так как $L[\sigma_0(t);\ p] = \frac{1}{p}$, то (рис. 2)

$$L[\sigma_0(t-h);\ p] = e^{-ph} \frac{1}{p}.$$

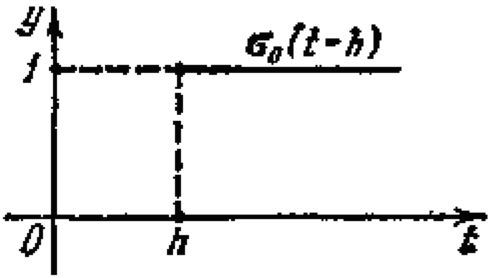


Рис. 2

Пример 13. Пусть (рис. 3)

$$f(t) = \sigma_0(t-h) - \sigma_0(t-h_1) \qquad (h < h_1).$$

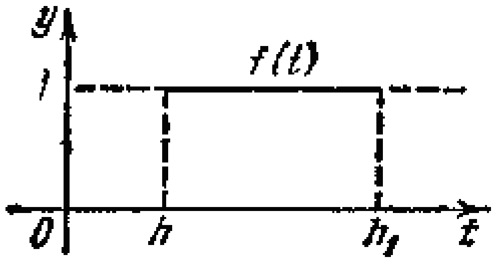


Рис. 3

По теореме 2 и теореме 8 имеем

$$L[f(t);\ p] = L[\sigma_0(t-h);\ p] - L[\sigma_0(t-h_1);\ p] = \frac{e^{-ph} - e^{-ph_1}}{p}.$$

Пример 14. Найти изображение функции $f(t)$ (рис. 4), определенной на отрезке $[0, 2a]$ равенствами

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 \leqslant t \leqslant a, \\ 0, & a < t < 2a \end{cases}$$

и продолженной затем на весь луч $t > 0$ с периодом $2a$.

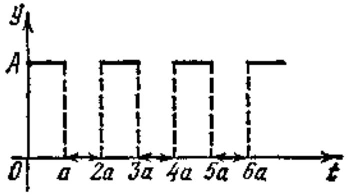


Рис. 4

Имеем

$$L[f(t);\ p]=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{ka}^{(k+1)a}e^{-pt}f(t)\,dt=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2ka}^{(2k+1)a}e^{-pt}A\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A}{p}\left[e^{-p2ka}-e^{-p(2k+1)a}\right]=$$
$$=\frac{A(1-e^{-pa})}{p}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2kpa}=\frac{A(1-e^{-pa})}{p(1-e^{-2pa})}=\frac{A}{p(1+e^{-pa})}.$$

Выражение

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$$

называется *сверткой функций* $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается символом $f_1 * f_2$.

Легко проверить, что

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau$$

(надо сделать замену переменной $t-\tau=u$).

Теорема 9. *Преобразование Лапласа от свертки равно произведению преобразований Лапласа от функций* $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$ $(s_0(f_1)=s_0(f_2))$:

$$L\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau;\ p\right]=$$
$$=L[f_1(t);\ p]\cdot L[f_2(t);\ p].$$

Доказательство. Напомним, что мы считаем, что $f_1(t)=f_2(t)=0$ при $t<0$.

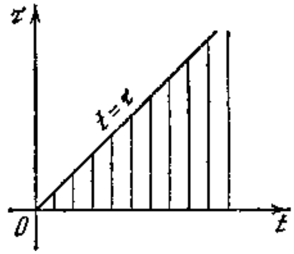


Рис. 5

Изменяя порядок интегрирования, (рис. 5) и учитывая, что $F_2(t-\tau)=0$ для $0<t<\tau$, имеем

$$L[f_1 * f_2;\ p] = \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, dt\, d\tau =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau) \left(\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\, dt \right) d\tau = \{t-\tau = z,\ dt = dz\} =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau) \left(\int_0^\infty e^{-p(z+\tau)} f_2(z)\, dz \right) d\tau =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau}\, d\tau \int_0^\infty f_2(z) e^{-pz}\, dz = L[f_1(\tau);\ p] \cdot L[f_2(z);\ p].$$

Отметим, что двойной интеграл по бесконечному сектору $\{0 < \tau \leqslant t,\ 0 < t < \infty\}$ от функции

$$e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t-\tau)$$

абсолютно сходится при Re $p > s_0$.

Пример 15.

$$L\left[\int_0^t e^{t-\tau} \operatorname{ch} \alpha\tau\, d\tau;\ p\right] = L[e^t;\ p]\, L[\operatorname{ch} \alpha t;\ p] = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{p}{p^2 - \alpha^2}.$$

Следствие 3. *Пусть* $F(p) \doteqdot f(t), \quad G(p) \doteqdot g(t)$, *тогда имеет место формула Дюамеля*

$$pF(p)\, G(p) \doteqdot f(t)\, g(0) + \int_0^t f(\tau)\, g'(t-\tau)\, d\tau. \tag{15}$$

Доказательство. Имеем

$$F(p)\, G(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau.$$

Отсюда, по теореме 5 о дифференцировании оригинала, получаем

$$pF(p)\, G(p) \doteqdot$$

$$\doteqdot \left(\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \right)_t' = f(t)\, g(0) + \int_0^t f(\tau)\, g'(t-\tau)\, d\tau.$$

Теорема 10. *Если* $\mathscr{F}(f(x);\ y)$ *и* $L[f(x);\ p]$ — *соответственно преобразования Фурье и Лапласа функции* f ($s_0(f)<0$), *то*

$$2\pi\mathscr{F}(f(x);\ y)=L[f(x);\ iy]+L[f(-x);\ -iy]. \tag{16}$$

В самом деле,

$$2\pi\mathscr{F}(f(x);\ y)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixy}f(x)\,dx=\int_{0}^{\infty}e^{-ixy}f(x)\,dx+\int_{-\infty}^{0}e^{-ixy}f(x)\,dx=$$
$$=L[f(x);\ iy]+\int_{0}^{\infty}e^{ixy}f(-x)\,dx=$$
$$=L[f(x);\ iy]+L[f(-x);\ -iy].$$

По формуле (16) легко найти изображение Фурье, если известно преобразование Лапласа функции f.

Пример 16. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\alpha x}\cos\beta x, & x\geqslant 0,\quad \alpha>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Найти преобразование Фурье этой функции.

Преобразование Лапласа функции f существует ($s_0(f)$ = — α), поэтому

$$2\pi\mathscr{F}(f(x);\ y)=L[f(x);\ iy]=L[e^{-\alpha x}\cos\beta x;\ iy]=\frac{iy+\alpha}{(iy+\alpha)^2+\beta^2}.$$

Приведем без доказательства ряд теорем о нахождении оригинала по известному изображению.

Теорема 11. *Пусть F(p) — аналитическая функция на расширенной комплексной плоскости и точка p* = ∞ *правильная и* $F(\infty)=0$, *т. е. ее ряд Лорана имеет, вид*

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}.$$

Тогда оригинал этого изображения дается формулой

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}c_{n+1}\dfrac{t^n}{n!}, & t>0.\end{cases} \tag{17}$$

В самом деле,

$$\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-pt}t^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n+1}}{p^{n+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k},$$

В силу теоремы 1 п. 5.13.1 (единственности) теорема доказана.

Теорема 12. *Пусть F (p) — дробно-рациональная функция с полюсами* $p_1, p_2, \ldots, p_m$. *Тогда*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{m}\underset{p=p_k}{\text{Выч}}[F(p)\,e^{pt}]. \tag{18}$$

Если $p_к$ *— простые полюсы и* $F(p) = A(p)/B(p)$, *где* $A(p)$, $B(p)$ *—многочлены без общих корней, то*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}. \tag{19}$$

Теорема 13 (формула Меллина)). *Если F (p) — аналитическая функция в* $\operatorname{Re} p > s_0$, $F(p)\to 0$ *равномерно относительно* arg *p*, *при* $|p|\to\infty$, $\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}|F(p)|\,dy<M$, *то F (p) является изображением функции*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{pt}F(p)\,dp \qquad (x>s_0). \tag{20}$$

Пример 17. Найти оригинал функции

$$F(p)=1/(p-1)(p^2+1).$$

Будем пользоваться теоремой 12. Здесь $A(p)\equiv 1$, $B(p)=(p-1)(p^2+1)$. Точки $p= 1$, $p = \pm i$ являются простыми полюсами функции *F (p).* По формуле (19) имеем

$$(B'(p)=3p^2-2p+1)$$

$$f(t)=\frac{e^t}{2}-\frac{e^{it}}{2(1+i)}+\frac{e^{-it}}{2(i-1)}=\frac{1}{2}[e^t-\cos t-\sin t].$$

Пример 18. Найти оригинал $f(t)$, если $F(p)= \sin(1/p)$. Имеем

$$\sin\frac{1}{p}=\frac{1}{p}-\frac{1}{3!p^3}+\frac{1}{5!p^5}-\ldots,$$

т. е. *F (p)* удовлетворяет условию теоремы 11. Поэтому

$$f(t) = 1 - \frac{1}{3!}\frac{t^2}{2!} + \frac{1}{5!}\frac{t^4}{4!} - \dots .$$

Для удобства пользования сведем все полученные изображения элементарных функций в единую таблицу.

Номер по порядку	Оригинал	Изображение
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
3	$\cos \alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$
4	$\cos \alpha (t - t_0)$	$\frac{pe^{-pt_0}}{p^2+\alpha^2}$
5	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
6	$\operatorname{sh} \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$

Продолжение

Номер по порядка	Оригинал	Изображение
7	$\operatorname{ch} \alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
8	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
9	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
10	t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$
11	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$
12	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
13	$t \sin \alpha t$	$\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$
14	$t \cos \alpha t$	$\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$
15	$f^{(n)}(t)$, $f(0)=\ldots$ $\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$	$p^n F(p)$
16	$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{p} F(p)$
17	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_p^\infty F(q)\,dq$
18	$f(t-t_0)$	$e^{-pt_0} F(p)$
19	$\sigma_0(t-h)$	$e^{-ph} \frac{1}{p}$
20	$f_1 * f_2$	$L[f_1;\, p] \cdot L[f_2;\, p]$
21	$f(t)\, g(0) + \int\limits_0^t f(\tau)\, g'(t-\tau)\,d\tau$	$pL[f;\, p] \cdot L[g;\, p]$
22	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{k+1} \frac{t^k}{k!} \quad (t>0)$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$

5.13.3. Приложения операционного исчисления

5.13.3.1. Операторное уравнение.

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t). \tag{1}$$

Требуется найти решение уравнения (1) для $t \geq 0$ при начальных условиях

$$x(0) = x_0,\; x'(0) = x_0',\; \ldots,\; x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

Пусть $x(t)$ является решением (1), удовлетворяющее начальным условиям (2). Тогда после подстановки этой функции в (1) мы получим тождество. Значит, функция, стоящая в левой части (1), и функция $f(t)$ имеют одно и то же L-изображение:

$$L\left[\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k x}{dt^k};\; p\right] = L\,[f\,(t);\; p].$$

В силу следствия 1 п.5.13.2

$$L\left[\frac{d^k x}{dt^k};\, p\right] = p^k L\,[x;\, p] - p^{k-1} x(0) - \ldots$$
$$\ldots - p x^{(k-2)}(0) - x^{(k-1)}(0).$$

Поэтому, используя свойство линейности изображения, получаем

$$a_n L\left[\frac{d^n x}{dt^n};\, p\right] + \ldots + a_0 L\,[x;\, p] = L\,[f;\, p];$$

$$a_n\,[p^n L\,[x;\; p] - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} x_0' - \ldots - p x_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}] +$$
$$+ a_{n-1}\,[p^{n-1} L\,[x;\, p] - p^{n-2} x_0 - \ldots - p x_0^{n-3} - x_0^{(n-2)}] + \ldots$$
$$\ldots + a_1\,[L\,[x;\, p] - x_0] + a_0 L\,[x;\, p] = L\,[f;\, p].$$

Для краткости записи обозначим $L\,[x;\, p] = \bar{x}(p)$, $L\,[f;\, p] = F(p)$. Тогда

$$\bar{x}(p) \cdot [a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0] =$$
$$= a_n\,[p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_0' + \ldots + x_0^{(n-1)}] +$$
$$+ a_{n-1}\,[p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}] + \ldots$$
$$\ldots + a_2\,[p x_0 + x_0'] + a_1 x_0 + F(p). \tag{3}$$

Уравнение (3) будем называть *вспомогательным уравнением* или *изображающим уравнением,* или *операторным уравнением.*

Отметим, что коэффициент при $\overline{x}(p)$ в (3) получается из левой части (1) формальной заменой производных $\frac{d^k x}{dt^k}$ на степени p^k. Обозначим этот коэффициент через

$$R_n(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0.$$

Легко видеть, что этот коэффициент является левой частью характеристического уравнения для дифференциального уравнения (1). Тогда изображение решения находим в виде

$$\overline{x}(p) = \frac{F(p)}{R_n(p)} + \frac{\psi_{n-1}(p)}{R_n(p)}, \tag{4}$$

где

$$\psi_{n-1}(p) = a_1 x_0 + a_2(px_0 + x_0') + a_3(p^2 x_0 + px_0' + x_0'') + \ldots$$
$$\ldots + a_n[p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \ldots + px_0^{(n-2)} + x_0^{(n-1)}].$$

Если начальные условия нулевые, т. е. $x_0 = \ldots = x_0^{(n-1)} = 0$, то формула (4) запишется

$$\overline{x}(p) = \frac{F(p)}{R_n(p)}. \tag{4'}$$

Если теперь по изображению (4) или (4') мы найдем оригинал, то в силу теоремы единственности это и будет искомое решение *x(t).*

Пример 1. Решить уравнение

$$\ddot{x} + 4x = 2, \qquad x_0 = x_0' = 0.$$

По формуле (4') имеем

$$\overline{x}(p) = \frac{2}{p(p^2+4)},$$

так как

$$2 \risingdotseq 2/p.$$

Разложим изображение на простейшие дроби

$$\overline{x}(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right].$$

Отсюда

$$x(t) = \frac{1}{2}\sigma_0(t) - \frac{1}{2}\cos 2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Мы получили решение $(1—\cos 2t)/2$ только для $t \geq 0$. Легко проверить, что оно удовлетворяет нашему уравнению и при $t < 0$. Впрочем, этот факт следует из общих соображений, на которых мы не останавливаемся. Это замечание относится и к примерам 2—4.

Можно также воспользоваться теоремой 12 п.5.13.2 ($A \equiv 2$, $B = p(p^2+4)$, $B' = 3p^2+4$; $0, \pm 2i$ — простые нули многочлена $B(p)$):

$$x(t) = 2\left[\frac{e^{0t}}{B'(0)} + \frac{e^{2it}}{B'(2i)} + \frac{e^{-2it}}{B'(-2i)}\right] =$$

$$= 2\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{-8}e^{2it} + \frac{1}{-8}e^{-2it}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Пример 2. $y'' + 2y' + 5y = \sin x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

Составим вспомогательное уравнение:

$$[p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0)] + 2[p\bar{y}(p) - y(0)] + 5\bar{y}(p) = \frac{1}{p^2+1},$$

$$\bar{y}(p)(p^2+2p+5) = \frac{1}{p^2+1} + 1.$$

Отсюда

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)} + \frac{1}{p^2+2p+5} = \frac{p^2+2}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}.$$

Многочлен $B(p) = (p^2+1)(p^2+2p+5)$ имеет простые нули $p = \pm i,\ p = -1 \pm 2i$. На основании теоремы 12 п.11.2

$$(A = p^2+2,\ B'(p) = 2p(p^2+2p+5) + 2(p+1)(p^2+1))$$

имеем:

$$A(\pm i) = 1,\quad B'(i) = 4i(2+i),\quad B'(-i) = -4i(2-i),$$

$$A(-1+2i) = -1-4i,\quad B'(-1+2i) = -8i(2i+1),$$

$$A(-1-2i) = 4i-1,\quad B'(-1-2i) = -8i(2i-1),$$

$$y(x) = \frac{e^{ix}}{4i(2+i)} + \frac{e^{-ix}}{-4i(2-i)} + \frac{-(1+4i)e^{(-1+2i)x}}{-8i(2i+1)} +$$

$$+ \frac{(4i-1)e^{-(1+2i)x}}{-8i(2i-1)} = \frac{\sin x}{5} - \frac{\cos x}{10} + e^{-x}\left[\frac{\cos 2x}{10} + \frac{9}{20}\sin 2x\right].$$

При решении дифференциального уравнения иногда удобно использование формулы Дюамеля.

Будем рассматривать уравнение (1) при нулевых начальных условиях: $x(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$. К этому случаю всегда можно свести задачу заменой искомой функции по формуле

$$x(t) = y(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0).$$

Допустим, известно решение уравнения (1) при правой части, равной единице, и нулевых начальных условиях. Операторное уравнение для данной задачи имеет вид

$$R_n(p)\,\bar{x}_1(p) = \frac{1}{p}, \tag{5}$$

где $\bar{x}_1(p)$ — изображение решения $x_1(t)$ указанной задачи. Из равенств (4') и (5) находим

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{R_n(p)} = p\bar{x}_1(p)\,F(p). \tag{6}$$

Согласно формуле Дюамеля

$$pF(p)\,\bar{x}_1(p) \doteqdot f(t)\,x_1(0) + \int_0^t f(\tau)\,x_1'(t-\tau)\,d\tau$$

или учитывая, что $x_1(0)=0$, получаем

$$\bar{x}(p) = pF(p)\,\bar{x}_1(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau)\,x_1'(t-\tau)\,d\tau.$$

Отсюда решение уравнения (1) при нулевых начальных условиях будет иметь вид

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\,x_1'(t-\tau)\,d\tau, \tag{7}$$

где $x_1(t)$ — решение уравнения (1) при $f(t)\equiv 1$ и нулевых начальных условиях.

Пример 3. Решить уравнение

$$x'' - x = \frac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Решим вначале задачу Коши для уравнения

$$x_1'' - x_1 = 1, \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0.$$

Составим операторное уравнение:

$$p^2\bar{x}_1(p) - \bar{x}_1(p) = \frac{1}{p}, \quad \bar{x}_1(p) = \frac{1}{p(p^2-1)} = \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{p}.$$

Отсюда

$$x_1(t) = \operatorname{ch} t - 1.$$

Замечание. Так как правая часть уравнения $x_1'' - x_1' = 1$ имеет специальный вид, то решение этого уравнения можно проводить и обычным образом.

По формуле (7)

$$x(t)=\int_0^t \frac{1}{1+e^\tau}\operatorname{sh}(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t \frac{e^{t-\tau}-e^{-t+\tau}}{2(1+e^\tau)}\,d\tau=$$

$$=\frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{e^{-\tau}\,d\tau}{1+e^\tau}-\frac{e^{-t}}{2}\int_0^t \frac{d(e^\tau+1)}{1+e^\tau}=$$

$$=-\frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{e^t+1}{2}-\frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{e^{-\tau}de^{-\tau}}{e^{-\tau}+1}=$$

$$=-\frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{e^t+1}{2}-\frac{e^t}{2}(e^{-t}-1)+\frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{d(e^{-\tau}+1)}{e^{-\tau}+1}=$$

$$=-\frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{e^t+1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{e^t}{2}+\frac{e^t}{2}\ln\frac{e^{-t}+1}{2}=$$

$$=\operatorname{sh} t\ln\frac{e^t+1}{2}+\frac{1}{2}\left[-te^t+e^t-1\right].$$

5.13.3.2. Решение систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим этот вопрос на конкретном примере.

Пример 4. Пусть требуется найти решение линейной системы

$$\left.\begin{aligned}2\dot{x}+\dot{y}+x&=1,\\ \dot{x}+3\dot{y}+2y&=0\end{aligned}\right\}$$

при начальных условиях $y(0) = x(0) = 0$.

Обозначим $\bar{x}(p)$, $\bar{y}(p)$ изображения искомых функций. Составим вспомогательные уравнения:

$$\left.\begin{aligned}2p\bar{x}(p)+p\bar{y}(p)+\bar{x}(p)&=\frac{1}{p},\\ p\bar{x}(p)+3p\bar{y}(p)+2\bar{y}(p)&=0.\end{aligned}\right\}$$

Таким образом, для изображений мы получили линейную систему алгебраических уравнений. Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}2p+1 & p\\ p & 3p+2\end{vmatrix}=5p^2+7p+2.$$

Решая систему алгебраических уравнений, находим

$$\bar{x}(p)=\frac{3p+2}{p(5p^2+7p+2)},\quad \bar{y}(p)=\frac{-1}{5p^2+7p+2}.$$

Изображение $\bar{y}(p)$ запишем в виде

$$\bar{y}(p) = -\frac{1}{5}\frac{1}{(p+0,7)^2-0,09} = -\frac{2}{3}\frac{0,3}{(p+0,7)^2-(0,3)^2},$$

откуда

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{-0,7t}\,\mathrm{sh}(0,3)\,t.$$

Далее

$$\bar{x}(p) = \frac{3}{5\,[(p+0,7)^2-(0,3)^2]} + \frac{1}{p} - \frac{5p+7}{5p^2+7p+2} =$$
$$= 2\,\frac{0,3}{(p+0,7)^2-(0,3)^2} + \frac{1}{p} - \frac{p+0,7}{(p+0,7)^2-(0,3)^2} -$$
$$-\frac{0,7}{(p+0,7)^2-(0,3)^2},$$

т. е.

$$x(t) =$$
$$= 2e^{-0,7t}\,\mathrm{sh}\,(0,3t) + 1 - e^{-0,7t}\,\mathrm{ch}\,(0,3t) - \frac{7}{3}e^{-0,7t}\,\mathrm{sh}\,(0,3t) =$$
$$= 1 - \frac{1}{3}e^{-0,7t}\,\mathrm{sh}\,(0,3t) - e^{-0,7t}\,\mathrm{ch}\,(0,3t).$$

5.13.3.3. Вычисление интегралов

Пример 5. Вычислить интеграл $I(x) = \int\limits_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2}\,dt.$

Найдем изображение этого интеграла:

$$L\,[I(x);\,p] =$$
$$= \int\limits_0^\infty e^{-px}\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2}\,dt\,dx = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-px}\,(1-\cos xt)\,dx\,\frac{dt}{t^2} =$$
$$= \int\limits_0^\infty L\,[1-\cos xt;\;p]\,\frac{dt}{t^2} = \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+t^2}\right]\frac{dt}{t^2} =$$
$$= \int\limits_0^\infty \frac{dt}{p\,(p^2+t^2)} = \frac{1}{p^2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{p}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2p^2}.$$

Таким образом,

$$I(x) = \frac{\pi}{2}x.$$

5.14. Обобщенные функции

5.14.1. Понятие обобщенной функции

В математике и ее приложениях получили большое применение обобщенные функции. Само понятие обобщенная функция возникло в работах П. Дирака.

Общая математическая теория обобщенных функций заложена в работах С. Л. Соболева и Л. Шварца.

Ниже излагаются элементарные сведения из теории обобщенных функций, заданных на всей бесконечной действительной оси $(-\infty,\infty)$.

В основе этой теории лежит пространство S, состоящее из функций $\varphi(x)$, вообще говоря комплекснозначных ($\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$. φ_1 и φ_2 — действительные функции). Каждая функция $\varphi \in S$ обладает следующими свойствами:

1) $\varphi(x)$ непрерывная на оси $(-\infty,\infty)$ бесконечно дифференцируемая функция;

2) для любого неотрицательного целого числа k и любого мно-члена произвольной степени n

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

произведение k-й производной от $\varphi(x)$ на многочлен $P_n(x)$ стремится к нулю при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \varphi^{(k)}(x)\, P_n(x) = 0.$$

Из этих свойств вытекает, что для каждой функции $\varphi \in S$ существует конечный несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{(k)}(x)|\, dx < \infty \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

В самом деле, по условию, например, существует предел

$$\lim_{x\to\infty} [(1+x^2)^m \varphi^{(k)}(x)] = 0,$$

где m — любое натуральное число. Следовательно, для числа $\varepsilon = 1$ существует такое число $N > 0$, что

$$|(1+x^2)^m \varphi^{(k)}(x)| < 1 \tag{2}$$

для $\forall x$ с $|x| > N$. И так как функция $(1+x^2)^m \varphi^{(k)}(x)$ непрерывна на отрезке $[-N, N]$, то по теореме Вейерштрасса (ее модуль ограничен на $[-N, N]$ некоторым числом М;

$$|(1+x^2)^m \varphi^{(k)}(x)| \leq M \quad (x \in [-N, N]).$$

Но тогда

$$|(1+x^2)^m \varphi^{(k)}(x)| \leq M+1 \quad (\forall x \in (-\infty, \infty))$$

и, следовательно,

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq \frac{M+1}{(1+x^2)^m} \quad (x \in (-\infty, \infty)), \tag{3}$$

откуда, на основании признака сравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{(k)}(x)|\, dx \leq (M+1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^m} < \infty.$$

Этим мы доказали, что всякая функция $\varphi \in S$, вместе со своими производными $\varphi^k(x)$, принадлежит пространству $L' = L'(-\infty, \infty)$.

Примером функции $\varphi \in S$ может служить функция $\varphi(x) = \exp(-x^2)$. Это бесконечно дифференцируемая на $(-\infty,\infty)$ функция. Ее производные соответственно равны:

$$\varphi'(x) = -2x \exp(-x^2), \quad \varphi''(x) = (4x^2-2)\exp(-x^2),$$
$$\varphi'''(x) = (-8x^3+12x)\exp(-x^2).$$

По индукции нетрудно показать, что

$$\varphi^{(k)}(x) = Q_k(x)\exp(-x^2),$$

где $Q_k(x)$ есть некоторый многочлен степени k.

Если тепеоь $P_n(x)$ есть произвольный многочлен степени n, то произведение $P_n(x)\, Q_k(x) = R_{n+k}(x)$ есть, очевидно, некоторый многочлен степени $n+k$ и

$$\lim_{x\to\infty} \varphi^{(k)}(x) P_n(x) = \lim_{x\to\infty} R_{n+k}(x)\exp(-x^2) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} (c_0 x^{n+k} + \ldots + c_{n+k-1}x + c_{n+k})\exp(-x^2) = 0,$$

так как при любом $l > 0$

$$\lim_{x\to\infty} x^l \exp(-x^2) = 0$$

Вторым примером функции $\varphi \in S$ является так называемая *финитная на* $(-\infty,\infty)$ *функция.* Это бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю вне некоторого отрезка $[a, b]$ (рис. 1).

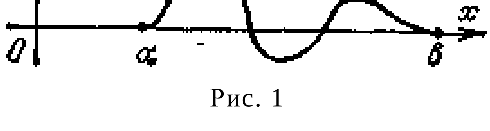


Рис. 1

Любая ее производная тоже равна нулю вне [*a*, *b*] и, следовательно, для любого многочлена $P_n(x)$ степени *n*

$$\lim_{x\to\infty} \varphi^{(k)}(x)\,P_n(x)=0.$$

Во множестве *S* вводится понятие предельного перехода.

Последовательность $\{\varphi_k(x)\}$ функций из *S* называется *сходящейся к функции* $\varphi\in S$ *в смысле S*, если для любого неотрицательного целого числа *l* и любого многочлена $P_n(x)$ имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} (\varphi_k^{(l)}(x)-\varphi^{(l)}(x))\,P_n(x)=0$$

равномерно относительно всех $x\in(-\infty,\infty)$. Иначе говоря, для любого неотрицательного целого числа *l*, любого многочлена $P_n(x)$ и любого ε > 0 найдется число k_0 такое, что $|\varphi_k^{(l)}(x)-\varphi^{(l)}(x)|\cdot|P_n(x)|<\varepsilon$, для $\forall k>k_0$ и $\forall x\in(-\infty,\ \infty)$.

Если последовательность $\{\varphi_k\}$ сходится к φ в смысле *S*, то пишут

$$\varphi_k(x)\longrightarrow\varphi(x)\quad(S)\quad\text{или}\quad \lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x)\quad(S).$$

Множество функций $\varphi\in S$ обладает следующим свойством: если $\varphi\in S$, $\psi\in S$ и α, β — произвольные числа, вообще комплексные, то

$$\alpha\varphi+\beta\psi\in S.$$

Благодаря этому свойству множество *S* называется *линейным множеством* (или *пространством)*.

Введем определение: *если каждой функции* $\varphi\in S$, *в силу некоторого закона, приведено в соответствие число у, то говорят, что на S определен функционал F и пишут*

$$y=F\varphi=(F,\ \varphi).$$

Функционал F называется *линейным,* если он обладает свойством: каковы бы ни были функциии

$$\varphi\in S\ \text{ и }\ \psi\in S$$

и комплексные числа α, β, справедливо равенство

$$F(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha F\varphi+\beta F\psi$$

или, в другой записи, $(F,\ \alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha(F,\ \varphi)+\beta(F,\ \psi)$.

Функционал F называется *непрерывным,* если для любой последовательности $\{\varphi_k\}$ функций $\varphi_k\in S$, сходящейся в смысле *S* к некоторой функции φ, имеет место равенство

$$\lim_{\varphi_k\to\varphi\,(S)} F(\varphi_k)=F(\varphi).$$

Линейный и непрерывный функционал, определенный на S,

$$F(\varphi) = (F, \varphi) \quad (\varphi \in S)$$

называется обобщенной функцией над S.

Совокупность всех обобщенных функций над S обозначается через S'. Приведем примеры обобщенных функций.

Пусть *F(x)* есть кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$|F(x)| \leqslant c(1+x^2)^l, \tag{4}$$

где l — некоторое натуральное число. Покажем, что интеграл

$$(F, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\varphi(x)\,dx \quad (\varphi \in S)$$

есть обобщенная функция $F \in S'$, т. е. *линейный непрерывный функционал над S*. В самом деле, на основании неравенства (4) и неравенства (3), в котором надо положить $k=0$, $m=l+1$, интеграл (5) сходится, и притом абсолютно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^l \frac{M+1}{(1+x^2)^{l+1}}\,dx = c(M+1)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} < \infty.$$

Линейность функционала (5) очевидна. Функционал (5) является также непрерывным в смысле S. В самом деле, пусть

$$\varphi_n \to \varphi \quad (S).$$

Тогда, в частности, стремится к нулю величина

$$\max_x (1+x^2)^{l+1}|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N > 0$ такое, что при $n>N$

$$\max_x (1+x^2)^{l+1}|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Но тогда, в силу (4) и (6),

$$|(F, \varphi_n) - (F, \varphi)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} F(x)[\varphi_n(x) - \varphi(x)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{l+1}|\varphi_n(x) - \varphi(x)|\frac{dx}{1+x^2} \leqslant c\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = c_1\varepsilon \ (n > N),$$

и мы доказали непрерывность функционала *(F,* φ).

Важно отметить, что *для того чтобы две кусочно-непрерывные функции F_1 (x) и F_2 (x), удовлетворяющие при некотором l неравенству* (4), *представляли при помощи равенства* (5) *равные обобщенные функции* $F_1=F_2 \in S'$, *необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $F_1(x) = F_2(x)$ во всех точках непрерывности $F_1(x)$ и $F_2(x)$.*

Достаточность условия очевидна, так как величина интеграла не изменится, если подынтегральную функцию изменить в конечном числе точек. Но можно доказать, что это условие является также и необходимым.

В связи со сказанным обобщенную функцию, представимую при помощи интеграла (5) кусочно-непрерывной функцией $F(x)$, отождествляют с этой обычной функцией. Например, $\sin x$, $\frac{\sin x}{x}$,

$$\exp(-x^2), \quad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad \sigma_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

— функция Хевисайда,

обычные функции, но также и обобщенные, принадлежащие S'. Для них справедливы неравенства типа (4):

$$|\sin x| \leqslant 1, \quad \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1, \quad \exp(-x^2) \leqslant 1,$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| \leqslant c(1+x^2)^n, \quad |\sigma_0(x)| \leqslant 1.$$

Имеется много и других обычных функций *F (x),* которые определяют при помощи равенства (5) обобщенную функцию $F\,(F \in S')$, хотя они и не удовлетворяют неравенству (4). Например, нетрудно показать, что функция $\psi(x) = \ln |x|$, хотя и не удовлетворяет неравенству (4), все же порождает обобщенную функцию $(\psi \in S')$.

Однако существуют элементарные функции *F(x),* для которых интеграл (5) не является линейным непрерывным функционалом над *S*. Функция $F(x) = \exp(x^2)$ является примером такой функции. Ведь

$\varphi(x) = \exp(-x^2) \in S$, но

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(x^2)\exp(-x^2)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1\,dx = \infty.$$

Обобщенную функцию $F \in S'$, порожденную обычной функцией $F(x)$ в виде интеграла (5), называют *регулярной обобщенной функцией.*

Однако в S' входят также и другие обобщенные функции.

Важным примером обобщенной нерегулярной функции является *дельта-функция Дирака,* обозначаемая через $\delta(x)$.

Функция $\delta(x)$ есть функционал, определенный на функциях $\varphi \in S$ при помощи равенства $(\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad (\varphi \in S)$.

δ -функция приводит в соответствие каждой функции $\varphi \in S$ ее значение в точке x=0. Можно доказать, что не существует обычной функции $F(x)$, которая представляла бы δ -функцию в виде интерала (5), т. е. функция Дирака — это подлинно обобщенная функция.

5.13.2. Операции над обобщенными функциями

Производная от обобщенной функции $F \in S'$ по определению есть обобщенная функция F', определяемая равенством

$$(F', \varphi) = -(F, \varphi') \quad (\varphi \in S). \tag{1}$$

Так как из того, что $\varphi \in S$, следует, что $\varphi' \in S$, и из того, что $\varphi_n \to \varphi$ (S), следует, что $\varphi'_n \to \varphi'$ (S), то функционал (F, φ') является непрерывным функционалом над S. Линейность его очевидна. Определение (1) естественно, потому что, если, например, обычная функция $F(x) \in S$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'(x)\,\varphi(x)\,dx = F(x)\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Ведь всякая функция из S стремится к нулю при $x \to \infty$. Очевидно, что любая обобщенная функция $F \in S'$ имеет производную (обобщенную) какого угодно порядка, определяемую по индукции $F^{(k)} = (F^{(k-1)})'$. Таким образом,

$$(F^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (F, \varphi^{(k)}).$$

Например,

$$(\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (\delta, \varphi^{(k)}) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0);$$

$$(\sigma_0', \varphi) = -(\sigma_0, \varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_0(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)\Big|_0^{\infty} = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

Таким образом, производная от регулярной обобщенной функции Хевисайда $\sigma_0(x)$ равна $\delta(x)$, т. е. подлинно обобщенной функции

$$(\sigma_0'(x) = \delta(x)).$$

По определению *последовательность обобщенных функций* $F_n \in S'$ *сходится к функции* $F \in S'$ $(F_n \longrightarrow F\ (S'))$, если

$$\lim_{n \to \infty} (F_n, \varphi) = (F, \varphi) \quad (\forall \varphi \in S).$$

Отсюда автоматически также следует, что последовательность производных F'_n сходится к производной F', потому что

$$(F'_n, \varphi) = -(F_n, \varphi') \longrightarrow -(F, \varphi') = (F', \varphi) \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Можно рассматривать ряд

$$F = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{2}$$

функций $u_k \in S'$, имеющий своей суммой функцию $F \in S'$, что надо понимать в том смысле, что

$$\sum_{k=1}^{N} u_k \longrightarrow F\ (S') \quad (N \longrightarrow \infty).$$

Из сказанного, очевидно, следует, что ряд (2) можно почленно дифференцировать

$$F' = u_1' + u_2' + u_3' + \ldots, \tag{3}$$

т. е. ряд (3) сходится в смысле (S'). Но тогда его можно тоже почленно дифференцировать:

$$F'' = u_1'' + u_2'' + u_3'' + \ldots$$

Для обобщенной функции F по определению вводится операция умножения на бесконечно дифференцируемую функцию $X(x)$ с помощью равенства $(\lambda F, \varphi) = (F, \lambda\varphi)$.

Отметим еще, что если $F(x) \in S'$, $\mu \neq 0$ — действительное число, то обобщенные функции

$$F(\mu - x),\ F(\mu x)$$

определяются при помощи равенств

$$(F(\mu - x),\ \varphi(x)) = (F(x),\ \varphi(\mu - x)),$$

$$(F(\mu x),\ \varphi(x)) = |\mu|^{-1}\left(F(x),\ \varphi\left(\frac{x}{\mu}\right)\right).$$

Естественность данных определений легко выясняется на обычных функциях из пространства S.

5.14.3. Преобразование Фурье обобщенных функций

Отметим, что если функция φ принадлежит S, то ее преобразование Фурье

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-ixt}\, dt$$

также принадлежит S.

При этом преобразование $\varphi = \tilde{\varphi}$ отображает S на S линейно и непрерывно.

Непрерывность заключается в том, что если какая-либо последовательность функций $\varphi_n \in S$ сходится в смысле S к функции φ, то и $\tilde{\varphi}_n$ сходится к $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi}_n \to \tilde{\varphi} \quad (S) \quad \text{при} \quad \varphi_n \to \varphi \quad (S).$$

Подобные факты имеют место и для обратного преобразования

Фурье $\hat{\varphi}$ функции $\varphi \in S$ $\left(\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{ixt}\, dt\right)$.

После сделанных замечаний естественно определить *преобразование Фурье обобщенной функции* $F \in S'$ с помощью следующих равенств.

$$(\tilde{F},\ \varphi) = (F,\ \tilde{\varphi}),\quad (\hat{F},\ \varphi) = (F,\ \hat{\varphi}). \tag{1}$$

Так как для функции $\varphi \in S$ имеет место равенство

$$\hat{\tilde{\varphi}} = \tilde{\hat{\varphi}} = \varphi,$$

то подобные равенства верны также для обобщенных функций: $\hat{\tilde{F}} = \tilde{\hat{F}} = F,\quad F \in S'$. В самом деле, например, $(\hat{\tilde{F}},\ \varphi) = (\tilde{F},\ \hat{\varphi}) = (F,\ \tilde{\hat{\varphi}}) = (F,\ \varphi)$, откуда следует, что $\hat{\tilde{F}} = F$.

Отметим еще, что если $\varphi(t) \in S$, то

$$\tilde{\varphi}(t), \quad t\tilde{\varphi}(t), \quad \varphi'(t)$$

также принадлежат S, и имеет место равенство

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} it\tilde{\varphi}(t)\,e^{itx}\,dt$$

$$\left(\varphi'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} -it\,\hat{\varphi}(t)\,e^{-itx}\,dt\right)$$

или, коротко,

$$\varphi'=\widehat{it\varphi} \qquad (\varphi'=-\widetilde{it\varphi}). \tag{2}$$

Для обобщенных функций имеет место подобный факт:

$$F'=\widehat{ix\tilde{F}}=-\widetilde{ix\hat{F}}. \tag{3}$$

В самом деле, например з силу (1) и (2), получаем

$$(-\widetilde{ix\hat{F}},\ \varphi)=(-ix\hat{F},\ \tilde{\varphi})=(\hat{F},\ -ix\tilde{\varphi})=(F,\ -\widehat{ix\tilde{\varphi}})=$$
$$=-(F,\ \varphi')=(F',\ \varphi),$$

т. е. $F'=-\widetilde{ix\hat{F}}$ и (3) доказано.

По индукции легко выводим, что

$$F^{(k)}=\widehat{(ix)^k\tilde{F}}=(-\widetilde{ix)^k\hat{F}} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Пример. Найти преобразование Фурье обобщенной функции Дирака.

Р е ш е н и е. По определению имеем

$$(\tilde{\delta},\varphi)=(\delta,\ \tilde{\varphi})=\tilde{\varphi}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,e^{-ixt}\,dt\Big|_{x=0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,dt.$$

Отсюда $\tilde{\delta}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Аналогично можно получить, что $\hat{\delta}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Преобразование Фурье обобщенных функций обладает свойствами преобразований Фурье обычных функций. Например, если

$$F \in S', \text{ то } \widehat{e^{i\mu t}\tilde{F}}=F(x+\mu)$$

при любом действительном $\mu\neq 0$.

В самом деле, на основании подобного свойства для функций из S имеем

$$(\widehat{e^{i\mu t}\tilde{F}}, \varphi) = (e^{i\mu t}\tilde{F}, \hat{\varphi}) = (\tilde{F}, e^{i\mu t}\hat{\varphi}) =$$
$$= (F, \widetilde{e^{i\mu t}\hat{\varphi}}) = (F, \varphi(x-\mu)) = (F(x+\mu), \varphi),$$

откуда $\widehat{e^{i\mu t}\tilde{F}} = F(x+\mu)$.

Микромодуль 8

Индивидуальные тестовые задания

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Примеры. 1) Вычислить интеграл, распространенный на прямоугольник *(P)* =[3, 4; 1, 2]:

$$\iint\limits_{(P)} \frac{dx\,dy}{(x+y)^2} = \int\limits_1^2 \int\limits_3^4 \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}.$$

Отв. ln(25/24)

2) Вычислить интегралы

а)
$$I_1 = \int\limits_1^3 \int\limits_2^5 (5x^2y - 2y^3)\,dx\,dy,$$

Отв. 660.

б)
$$I_2 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx\,dy}{1+y^2},$$

Отв.π/12.

$$I_3 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

в)

$$\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

Отв. ln(2+√2)/(1+√3)

3)Найти объем тела, ограниченного снизу плоскостью *xy*, с боков плоскостями *x=0, x=a. y=0. y=b*, а сверху эллиптическим параболоидом

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}.$$

Отв.

$$\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right).$$

4) То же для тела, ограниченного плоскостью *xy,* поверхностью $x^2 + z^2 = R^2$ (z>0) и плоскостями $y = 0$ и $y = H$.
Отв.

$$\frac{\pi R^2 H}{2}.$$

5) То же для тела, ограниченного плоскостями z = 0, $x = a$, $x = b$, $y = c$, y=d(b>a>0, d>c>0) и гиперболическим параболоидом $z = xy/m$ ($m > 0$).
Отв.

$$V=\frac{(d^2-c^2)(b^2-a^2)}{4m}.$$

6) Вычислить двойной интеграл

$$I=\iint\limits_{(P)} y^2\sqrt{R^2-x^2}\,dP,$$

где (P) есть круг радиуса R с центром в начале координат (рис. 11.53).

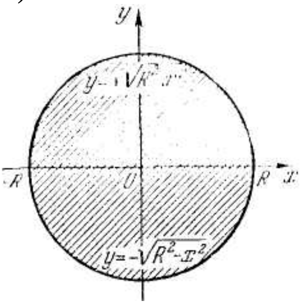


Рис.11.53
Отв. I=(32/45)R^2
7) Вычислить

$$K=\iint\limits_{(A)} (x^2+y)\,dx\,dy,$$

если область *(A)* ограничена двумя параболами: $y = x^2$ и $y^2 = x$. (рис.11.54)

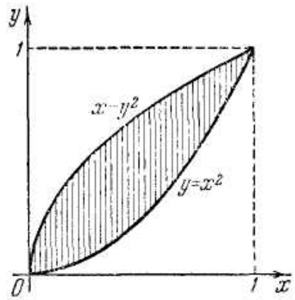


Рис.11.54.

Отв. К=33/ 140

8) Вычислить интеграл

$$J=\iint\limits_{(D)} xy\,dx\,dy,$$

где (D) есть область, ограниченная осями координат и параболой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ (рис.11.55).

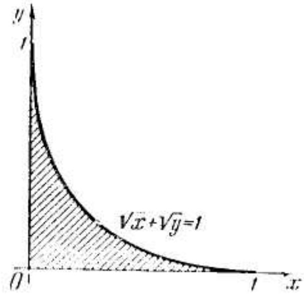


Рис.11.55.

Отв. J=1/280.

9) Вычислить интеграл

$$I=\iint\limits_{(C)} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy,$$

где *(C)* есть область, ограниченная прямыми $x=2, y=x$ и гиперболой $xy=1$(рис.11.56)

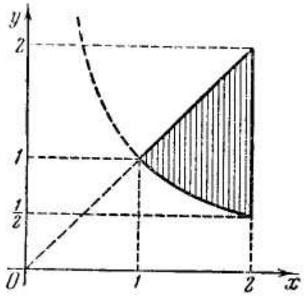


Рис.11.56.
Отв. I=9/4

10) Вычислить интеграл

(а) $I_1 = \iint\limits_{(Q_1)} \cos(x+y)\, dx\, dy,$

(б) $I_2 = \iint\limits_{(Q_2)} (2x+y)\, dx\, dy,$

(в) $I_3 = \iint\limits_{(Q_3)} (x+6y)\, dx\, dy,$

где (Q_1) есть треугольник, ограниченный прямыми
$x=0,\ y=x,\ y=\pi,$

(Q_2) — треугольник, ограниченный осями координат и прямой
x+-y=C, а (Q_3) — треугольник, ограниченный прямыми
$y=x,\ y=5x,\ x=1.$

Отв. (а) I_1=-2; (б) I_2=27/2; (в) I_3 =25(1/3)

$I=\iint \sqrt{4x^2-y^2}\, dx\, dy,$

распространенный на треугольник, который образован прямыми
$y = 0$, x=1, $y = x$.

$$I=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right).$$

11) Переменить порядок интегрировании в повторном интеграле

(а) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x, y)\, dy,$

б) $\int\limits_{-7}^{1} dy \int\limits_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x, y)\, dx,$

(в) $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y)\,dy$,

(г) $\int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y)\,dx$,

считая $f(x, y)$ непрерывной функцией.

а)

Ответ. $\int_0^{48} dy \int_{\frac{1}{12}y}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f dx.$

б)

Ответ. $\int_{-2}^{6} dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f dy.$

в)

Ответ. Получаем сумму двух повторных интегралов:

$$\int_0^2 dy \int_{\frac{1}{3}y}^{\frac{1}{2}y} f\,dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{1}{3}y}^{1} f\,dx \text{ (Ср. 4) и 5) (в)).}$$

г)

Ответ. Получаем сумму трех повторных интегралов:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f\,dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f\,dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f\,dy.$$

12) Найти объем тела , ограниченного

(а) плоскостями $x=0$, $y=0$,$z=0$, цилиндром $x^2+y^2=R^2$ и гиперболическим параболоидом $z=xy$ (в первом октанте);

(б) плоскостями $x=0$, $y=0$,$z=0$, $x+2y=1$ и поверхностью $z=x^2+y+1$;

(в) плоскостями $y=1$,$z=0$, параболическим цилиндром $y = x^2$ и параболоидом $z= x^2+y^2$, (г) плоскостями $y=0$,$z=0$, $y=(b/a)x$ и эллиптическим цилиндром

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Ответ. (а) $V=\int\limits_0^R x\,dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy=\frac{1}{8}R^4;$

(б) $V=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dy\int\limits_0^{1-2y}(x^2+y+1)\,dx=\frac{1}{3};$

(в) $V=\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_{x^2}^{1}(x^2+y^2)\,dy=\frac{88}{105};$

(г) $V=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\frac{b}{a}x}\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dy=\frac{abc}{3}.$

13) То же для тела, ограниченного:

(а) эллиптическим цилиндром

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

и плоскостями $z=0$ и $z=\lambda x+\mu y+h$ ($h>0$);

(б) цилиндрами

$$az=y^2,\ x^2+y^2=r^2$$

и плоскостью $z=0$;

Ответ. (а) $V=\int\limits_{-a}^{a} dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}$

$(\lambda x+\mu y+h)\,dy=\pi abh=Ph,$

(если P есть площадь эллипса, результат геометрически очевиден);

б) $V=\frac{4}{a}\int\limits_0^r dy\int\limits_0^{\sqrt{r^2-y^2}} y^2\,dx=\frac{4}{a}\int\limits_0^r y^2\sqrt{r^2-y^2}\,dy=\frac{\pi r^4}{4a};$

14) Найти объем *V* тела, вырезанного цилиндром

$$x^2+y^2=2ax$$

из параболоида вращения

$$y^2+z^2=4ax.$$

Отв.

$$V=4\left(\frac{\pi a^3}{2}+\frac{4}{3}a^3\right)=a^3\left(2\pi+\frac{16}{3}\right).$$

15) Найти объем V тела, вырезанного цилиндром $x^2+y^2=Rx$ из сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ (*рис.11.57*).

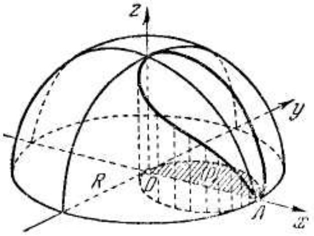


Рис.11.57.

Отв.

$$V=4\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}\right)R^3=\frac{2}{3}\pi R^3-\frac{8}{9}R^3$$

16) Вычислить интегралы

$$I_1=\iint\limits_{(A)} y\,dx\,dy,\quad I_2=\iint\limits_{(A)} x\,dx\,dy,$$

где (A) есть область, ограниченная аркой циклоиды

$$x=a\,(t-\sin t),\quad y=a\,(1-\cos t)\quad (0\leq t\leq 2\pi)$$

и осью x.

Отв. $I_1=(5/2)\pi a^3$, $I_2=3\pi^2a^3$

17) Вычислить интеграл

$$K=\iint\limits_{(B)} xy\,dx\,dy,$$

где область (B) ограничена осями координат и частью астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\leq t\leq\pi/2)$

Ответ. $K=\frac{1}{80}R^4.$

18) Пусть фигура (P) представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную кривой $y=f(x)$, отрезком оси x и двумя ординатами $x=a$ и $x=b$, и пусть плотность распределенных по этой фигуре масс будет 1. Определить статические моменты M_x и M_y.

Отв.

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx,\ M_y=\int_a^b xy\,dx,$$

19) Цилиндрический брус (V) имеет в основании плоскую фигуру (P), а сверху ограничен произвольной плоскостью (K). Доказать, что объем V тела равен произведению площади P

основания на длину k перпендикуляра к основанию, проходящего через центр тяжести тела до пересечения с плоскостью (*К*). (Рис.11.58)

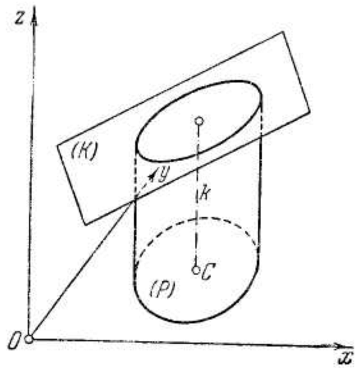


Рис.11.58

Отв.

$V = Pk.$

20) Доказать, что если в плоскости фигуры (Р) взяты две параллельные оси x и x' на расстоянии h, причем первая из них проходит через центр тяжести фигуры, то моменты инерции фигуры относительно этих осей связаны соотношением

$$I_{x'} = I_x + h^2 m,$$

где m — масса фигуры.

21) Пусть плоская фигура (Р) (рис.11.59), по которой непрерывным образом расположены массы, вращается с угловой скоростью ω вокруг оси y. Определить общую величину развивающейся при этом центробежной силы F и ее момент $\boldsymbol{M}$ относительно оси z . (Моменты относительно других осей равны 0).

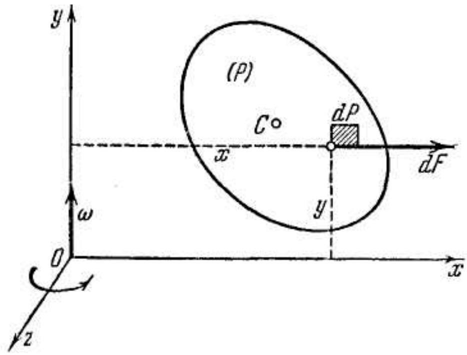


Рис.11.59.

Отв.

$F=\omega^2 M_y,$

$\boldsymbol{M}=\omega^2 K_{xy}$

22) Найти координаты центра тяжести ц и л и н д р и че г с к о г о отрезка (рис.11.60)

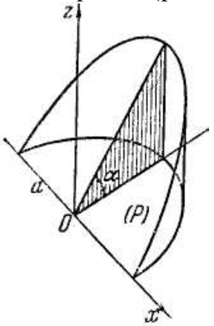


Рис.11.60.

Отв.

$$\xi=0,\ \eta=\frac{3}{16}\pi a,\quad \zeta=\frac{3}{32}\pi ka.$$

23) То же для части эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,$$

содержащейся в первом октанте (рис. 11.61),

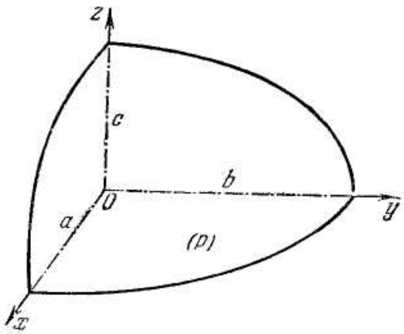


Рис.11.61

Отв.

$$\xi=\frac{3}{8}a,\quad \eta=\frac{3}{8}b,\quad \zeta=\frac{3}{8}c.$$

24) Для кругового цилиндра высоты h и радиуса a найти момент инерции относительно любой плоскости, проходящей через его ось (рис11. 62).

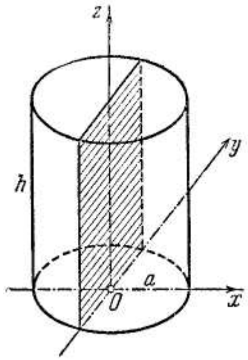


Рис.11.62.

Отв.

$I_{xz}=(\pi/4)ha^4$.

25) Найти момент инерции L для эллипсоида (рис.11.61)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1.$$

Отв.

$I_z=(4/15)\pi\, abc(a^2+b^2)$

26)Вычислить площади фигур в полярных координатах, ограниченных кривыми:

(а) $(a^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ (лемниската),(рис.11.63)

(б) $(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$, (рис.11.64)

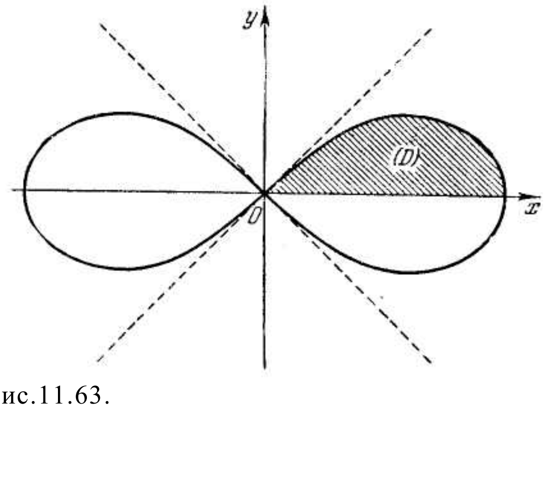


Рис.11.63.

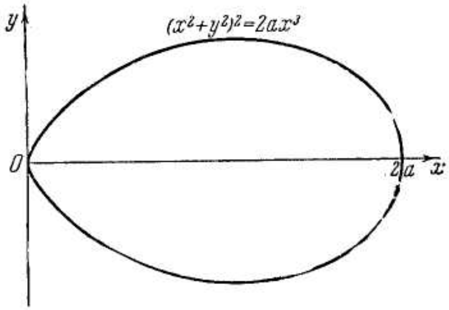


Рис. 71.

Рис.11.64.

Отв.
(а) S=$a^2/2$
(б) S=$(5/8)\pi a^2$
27) Найти объем тела, ограниченного параболоидом вращения
$az=x^2+y^2$
и плоскости $z=a$
Отв.
$V=\pi a^3/2$
28) Найти массу круга (радиуса R), плотность которого в каждой точке равна расстоянию этой точки от контура круга.
Отв.
$m=(\pi/3)R^3$
29)Установить условия сходимости интегралов ($m > 0$):

$$\text{(а)} \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m}, \qquad \text{(б)} \iint\limits_{x^2+y^2\geq 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m},$$

$$\text{(в)} \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^m}.$$

Отв.

(а) $m<1$, (б) $m>1$, (в) $m<1$.

30)Установить условия сходимости интегралов (α, β , $m > 0$):

$$(а)\ \iint\limits_{\substack{x\geq 0,\ y\geq 0\\ x^\alpha+y^\beta\leq 1}} \frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^m},\qquad (б)\ \iint\limits_{\substack{x\geq 0,\ y\geq 0\\ x^\alpha+y^\beta\geq 1}} \frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^m},$$

$$(в)\ \iint\limits_{\substack{x\geq 0,\ y\geq 0\\ x^\alpha+y^\beta\leq 1}} \frac{dx\,dy}{(1-x^\alpha-y^\beta)^m}.$$

Указание. Прибегнуть к подстановке

$$x=r^{\frac{2}{\alpha}}\cos^{\frac{2}{\alpha}}\theta,\quad y=r^{\frac{2}{\beta}}\sin^{\frac{2}{\beta}}\theta.$$

Отв.

$$(а)\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}>m;\quad (б)\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<m;\qquad (в)\ m<1.$$

31) Вычислить интеграл

$$I=\iiint\frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3},$$

распространенный на тетраедр (V), ограничиваемый плоскостями $x=0$, $y=0$, z = 0 и $x+y+z=1$ (рис. 11.65).

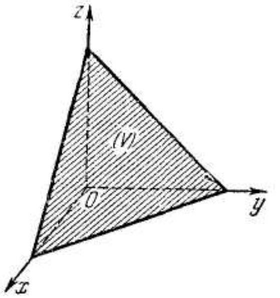


Рис.11.65.

Отв.

I=1/2[ln2-(5/8)]

32) Вычислить интеграл

$$K=\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz,$$

где *(V)* есть верхняя половина эллипсоида $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2)\leq 1$.

Отв.

$K=\pi abc^2/4$

33) Вычислить интеграл

$$L=\iiint\limits_{(T)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz,$$

где (T) есть весь эллипсоид $(x^2/a^2)+(y^2+b^2)+(z^2+c^2)\leq 1$.

Отв.

L=(4/5)πabc

33) Вычислить интеграл

$$I=\iiint\limits_{(A)} z\,dx\,dy\,dz,$$

где тело (A) ограничено конической поверхностью

$$z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$$

и плоскостью $z=h$ (рис. 11.66).

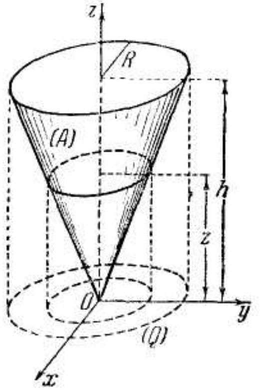


Рис.11.66.

Отв.

I=$(\pi R^2h^2)/4$

34) Вычислить интеграл

$$K=\iiint\limits_{(V)} x\,dx\,dy\,dz,$$

где (V) есть призма, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, z = 0, $y=h$ и $x+z=a$.

Отв.

K=$(a^3h)/6$

35) Найти значение интеграла

$$J=\iiint\limits_{(T)} z^2\,dx\,dy\,dz,$$

где (T) есть общая часть двух сфер (рис. 11.67):

$$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2 \text{ и } x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz.$$

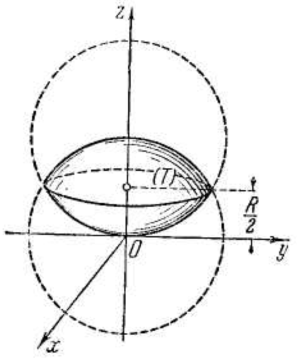


Рис.11.67

36) Вычислить интеграл

$$S=\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz,$$

где *(V)* есть общая часть параболоида $x^2+y^2=\leq 2az$ и сферы $x^2+y^2+z^2\leq 3a^2$.

Отв.

I=$(\pi a^5/5)[(18\sqrt{3}-(97/6)]$

37) Вычислить интеграл

$$I=\iiint\limits_{(T)}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

где (T) есть общая часть конуса $y^2+z^2\leq x^2$ и сферы

$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\ (x\geqslant 0)$.

Отв.

$$I=\frac{\pi R^5}{5}(2-\sqrt{2}).$$

38) Вычислить интеграл

$$H=\iiint\limits_{\substack{x,\,y,\,z\geqslant 0\\ x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}}\frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2}}\quad(\alpha>\beta>\gamma>0).$$

Отв.

$$H=\frac{R^5}{15}\,\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}.$$

39) Показать, что употребительные формулы для вычисления (а) объема цилиндрического бруса, ограниченного поверхностью $z=z(x,\,y)$,

$$V=\iint\limits_{(P)}z\,dx\,dy$$

и (б) объема тела по поперечным сечениям:

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx$$

суть следствия основной формулы:

$$V = \iiint_{(V)} dV = \iiint_{(V)} dx\,dy\,dz.$$

40) Найти центр тяжести тела, ограниченного поверхностями параболоида

$x^2 + y^2 = 2az$

и сферы

$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2.$

Отв.

$\zeta = \frac{5}{83}(6\sqrt{3} + 5)\,a.$

По соображениям симметрии: ξ=η=0.

41) Найти массу и определить положение центра тяжести сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az,$$

если плотность в точках сферы обратно пропорциональна расстоянию этих точек от начала координат:

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Отв.

$$m = \frac{4}{3}\pi k a^2.$$

$$\zeta = \frac{4}{5}a.$$

Остальные две координаты центра тяжести, очевидно, равны 0.

42) Найти притяжение центра основания цилиндра всей массой цилиндра (рис.11.68).

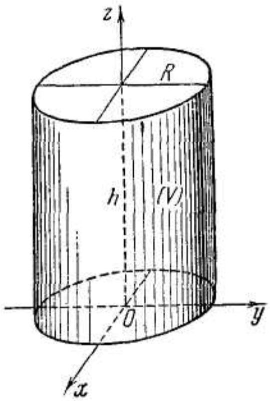


Рис.11.68.

Отв.

$$F_z = 2\pi\rho\,(R + h - \sqrt{R^2 + h^2})$$

остальные две слагающие притяжения равны 0, так что притяжение направлено вертикально вверх.

43) Найти притяжение конусом его вершины (рис. 11.69).

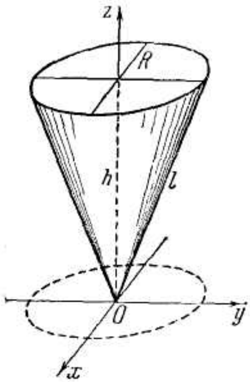


Рис.11.69)

Отв.

$$F = F_z = \frac{2\pi h\rho}{l}\,(l - h).$$

44) Найти притяжение, испытываемое любой точкой *A* (массы 1) со стороны сферы (рис. 11.70).

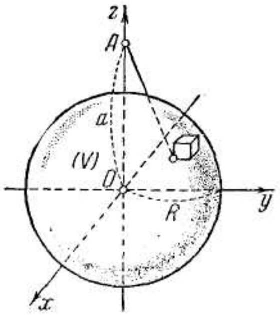


Рис.11.70.

Отв.

$$F_z=\begin{cases} -\frac{4}{3}\pi R^3\rho\cdot\frac{1}{a^2}, & \text{если } a\geqslant R,\\ -\frac{4}{3}\pi a\rho, & \text{если } a\leqslant R.\end{cases}$$

В то же время, очевидно, $F_x= F_y = 0$. Итак, во всех случаях притяжение направлено к центру сферы.

45)Вычислить объем тела в криволинейных (сферических) координатах , ограниченного поверхностью

(а) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$

(б)$(x^2+y^2+z^2)^3=a^3xyz$

(в)$(x^2+y^2+z^2)^n=a^{2n-1}$

Отв.

(а)V=(1/3)πa^3

(б)$V=a^3/6$

(в)V=π/3(3n-1)

46)Вычислить объем тела в криволинейных (сферических) координатах , ограниченного поверхностью

(а) $(x^2+y^2)^2+ z^4=y$

(б)$(x^2+y^2)^3+z^6=3 z^3$

Отв.

(а) V=$\pi\sqrt{2}/3$

(б)V=$2\pi^2/3\sqrt{3}$

47)Вычислить интеграл в сферических координатах, заменой переменных в тройном интеграле

$$I=\iiint\limits_{(V)}\frac{xyz}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где(V) есть тело, ограниченное сверху поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2xy,$$

а снизу плоскостью z =0

Отв.

I=$a^4/144$

48) Вычислить интеграл

$$K = \iiint\limits_{(V)} \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{x^2 + y^2 + z^2},$$

где *(V)* есть трехосный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Отв.

$$K = \frac{a^2b^2c^2}{8(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)} \left\{ b^2c^2 \ln\frac{c}{b} + c^2a^2 \ln\frac{a}{c} + a^2b^2 \ln\frac{b}{a} \right\}.$$

Литература

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М: Наука, 1976 -352 с.
2. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Харьков. Издательство Харьковского университета. - 1972. - 256 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. К: А.С К , 2001.-648 с.
4. Дюженкова Л.И., Дюженкова О.Ю., Михалш Г.О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. К: Видавничий центр "Академія", 2002,— 624 с. (Альма-матер).
5. Денисюк В.П., Репета В.К. Вища математика (модульна технолопя навчання). К: НАУ, 2004. - 276 с.
6. Козлов В.Н., Максимов Ю.Д., Хватов Ю.А. Математика. Структурированная программа (базис). Типовые задачи для контроля, требования к знаниям и умениям студентов / для студентов технических направлений бакалаврата/: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. - 56с.
7. Кононюк А.Ю. Вища математика. Навчальний посібник. У 2 ч. 1 К.: КНТ, 2008. - 636 с.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М: Наука, 1971 - 432 с.
9. Мовчан В.Т., Репета В.К., Бойко О.М., Шчкуров О.В. Диференціальне числення функцій одного змінного: Задачник-практикум. К: НАУ, 2001. - 96 с.
10. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М: Наука, 1969.-640 с.
11. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. - К: Техніка, 2000.-592 с.
12. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика: Підручник. - Д.: Сталкер, 2003. - 496 с.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М: Наука, 1985. - Т. 1. - 456 с.
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М: Наука, 1966. - Т. 3. - 656 с.