Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

А. Е. Кононюк

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ МАТЕМАТИКА

Книга 9

Математическая логика

Часть 2

Киев
«Освіта України»
2017

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К213

Рецензенты:

В. В. Довгай — к-т физ.-мат. наук, доц. (Национальный технический университет «КПІ»);

В. В. Гавриленко — д-р физ.-мат. наук, проф.,

О. П. Будя — к-т техн. наук, доц. (Киевский университет экономики, туризма и права);

Н. К. Печурин — д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

Кононюк А. Е.
К213 Дискретно-непрерывная математика. (Начала). — В 12-и кн. Кн 9, ч. 2,— К.: 2017. —464с.

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-5 (книга 9, ч.2)

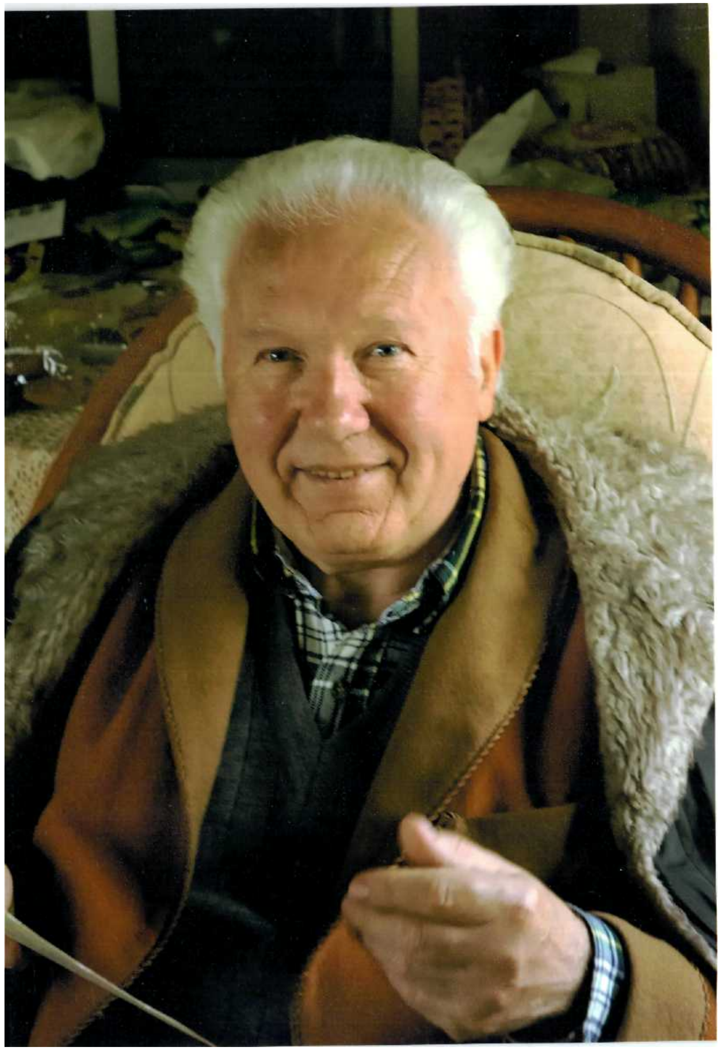
Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, используемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории вероятностей и массового обслуживания, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единную методолгически взамосвязанную математическую систему «Дискретно-непрерывная математика».

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов и просто ученых и специалистов всех специальностей.

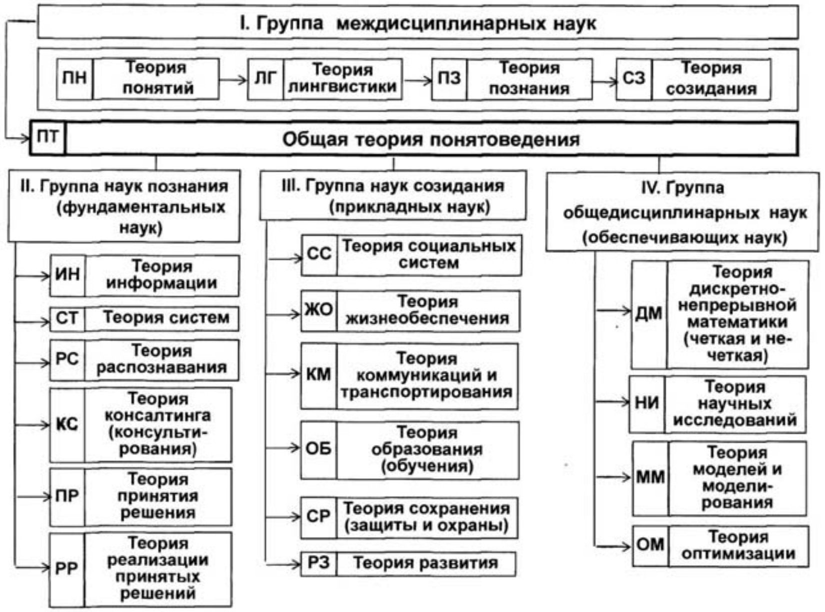
УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-5 (книга 9, ч.2)



Кононюк Анатолий Ефимович

Структурная схема развивающейся панмедийной системы наук



Структура
открытой развивающейся панмедийной системы математических наук (дисциплин)
"Дискретно-непрерывная математика"

Оглавление

Часть первая

Многозначная логика

> *С существованием систем многозначной логики мы должны сегодня считаться в такой же степени, как, например, с существованием систем неэвклидовой геометрии.*
>
> *Я.Лукасевич*

> *При взгляде на простые числа возникает ощущение, будто стоишь перед непостижимой тайной творения.*
>
> *Д.Цагер*

Предисловие

Для определенного класса конечнозначных логик существует связь между логикой и простыми числами. А существует ли связь между доктриной логического фатализма и простыми числами? Опровержение Я.Лукасевичем фаталистического аргумента, изобретенного Аристотелем, явилось основой для построения первой в мире неклассической логики, а именно трехзначной. Свойства её оказались шокирующими, а последующие обобщения на произвольный конечнозначный, а затем и на бесконечнозначный случаи показали, что моделирование конечного и бесконечного средствами многозначных логик Лукасевича приводит к результатам, дающим право говорить о формировании к концу XX века двух различных и глубоких направлений в современной символической логике, названных «Конечнозначные логики Лукасевича» и «Бесконечнозначная логика Лукасевича», которые бурно развиваются.

Многозначная логика является исключительно разветвленной областью символической логики по своему применению, развитию и проблематике. Среди различных неклассических направлений в логике многозначная логика занимает особое место по следующим причинам.

Во-первых, в силу своего применения в совершенно различных областях самой неклассической логики. В некотором смысле можно говорить об универсальности и наибольшей общности, достигнутой в многозначной логике, что обеспечивается мощным техническим аппаратом, средства которого играют важную роль в решении внутренних проблем неклассических логик. Во-вторых, особая значимость конечнозначных логик связана с применением в теории релейно-контактных схем, в исследовании проблем искусственного интеллекта и в теоретическом программировании, а также связана с тем, что они позволяют описывать работу самых различных реальных вычислительных устройств и автоматов. В-третьих, широкое использование в математике: математический анализ «нечеткости» (fuzzy) и аппроксимирующих рассуждений, построение различных моделей для теорий множеств, используя подходящие системы многозначной логики, доказательство независимости систем аксиом. Наконец, многозначная логика используется в лингвистике и философии. Найдено применение к решению различных парадоксов, пересмотрена теория истины А. Тарского. Само возникновение первой системы многозначной логики мотивировано чисто философской проблематикой, а именно опровержением фаталистического аргумента Аристотеля.

Наиболее важные применения многозначной логики рассмотрены в книге С. Готтвальда *[Gottwald 2001,*]. Большой список современного применения многозначной логики приведен в *[Baaz, Fermiiller and Saber* 2001].

Эти обстоятельства и целый ряд других факторов способствуют тому, что многозначная логика весьма интенсивно развивается, внося тем самым коррективы в само понимание предмета многозначной логики, и уже сейчас это понимание требует глубокого осмысления. Поскольку изучение матричных логик Лукасевича и Поста наряду с алгеброй логики Буля (двузначная логика) явилось основой для создания теории многозначной логики, то им будет уделено специальное внимание.

В первой главе дается элементарное изложение классической логики. Более подробно рассмотрены свойства классической логики высказываний, для того, чтобы с ними можно было сравнивать свойства многочисленных трехзначных логик.

Вторая глава посвящается интуитивному пониманию многозначной логики и ее возникновению. Рассмотрены два источника появления многозначной логики: доказательство независимости аксиом пропозициональной классической логики $\mathbf{C}_2$ и опровержение фаталистического аргумента Аристотеля.

Трехзначные логики рассматриваются в третьей главе. Основное внимание уделено существенным различиям между классической двузначной логикой и трехзначными логиками, главными из которых являются логика Я. Лукасевича, логика Д.А. Бочвара, логика А. Гейтинга, логика С. Клини и паранепротиворечивая логика Батенса-Розоноэра. Изучаются различные их взаимоотношения. Взаимоотношение некоторых паралогик представлено решеткой В.М. Попова. Специальное внимание уделено трехзначным изоморфам $\mathbf{C}_2$. Рассматривается также промежуточная регулярная логика Клини, обладающая весьма необычными свойствами. Вводится понятие *р*-логики. Обращается внимание на применение трехзначной логики для решения логико-философских проблем квантовой механики. В конце ставится важная методологическая проблема: являются ли трехзначные логики ограничением $\mathbf{C}_2$ или ее расширением? Глава завершается результатом Н.Е. Томовой, где строится *решетка* импликативных расширений регулярных логик Клини, в которой появляются совершенно *новые* трехзначные логики. Отметим, что уже трехзначные логики являются той главной лабораторией, которая позволяет погрузиться в мир многозначных логик.

В четвертой главе вводятся понятия логической матрицы, нормальной матрицы, характеристической матрицы. Вводится определение *матричной семантики.* Дается определение операции прямого умножения матриц и в качестве примера умножается матрица для классической двузначной логики сама на себя. Также вводится операции добавления к матрице нового элемента, а затем рассматривается комбинирование этих двух операций над матрицами, что приводит в итоге к построению характеристической матрицы для интуиционистской логики. В этой же главе вводятся необходимые понятия теории (логических) решеток, дающие элементарное представление об алгебраических свойствах различных многозначных логик, в алгебраической основе которых, как правило, лежат дистрибутивные решетки, алгебры де Моргана и алгебры Клини. Отдельный класс логик характеризуется квази-решетками. Дается характеризация алгебры Буля, приводятся ее примеры, наиболее важным из которых является алгебра Линденбаума, и вводятся другие, "логические" алгебры, такие как алгебры Рейтинга, алгебры Брауэра, дважды алгебры Рейтинга, симметрические алгебры Гейтинга, *р*-алгебры. Вводятся такие новые понятия как, *промежуточная* решетка, *некоммутативная* алгебра Клини, *промежуточная р*-алгебра, *слабая р*-алгебра и для двух последних их формулировки с приставкой "дважды". Поясняется, что понимается под *алгебраической семантикой* и в чем состоит развитие алгебраической логики.

Специальное внимание уделено трехэлементным алгебрам Лукасевича.

В пятой главе происходит обобщение трехзначных логик на конечнозначный случай. Интересным классом конечнозначных логик является класс логик Лукасевича $\text{Ł}_\mathbf{n}$.. Этим логикам уделяется.особое внимание (см. также гл. 7). Здесь подробно исследуются их свойства, приводится аксиоматизация и алгебраизация $\text{Ł}_\mathbf{n}$.Рассматриваются также другие конечнозначные логики: Гёделя **G**$_n$, Лукасевича-Мойсила, Бочвара **B**$_n$, паранепротиворечивые. Здесь же вводятся и исследуются логики Поста **P**$_n$, являющиеся фундаментом в различных технических приложениях. Также в этой главе систематически рассматриваются четырехзначные логики. Важным является результат Н.М. Ермолаевой и А.А. Мучника о расширениях четырехзначной классической логики и построении решетки этих расширений. Особое внимание уделяется четырехзначной логике Белнапа и ее расширениям соответствующими импликациями. В связи с логикой Белнапа дается краткий обзор по бирешеткам и их обобщениям. Предлагается пропозициональный базис (логика **Tr**) для построения новой теории истинности и устанавливается связь с проблемой логического фатализма.

Главной темой шестой главы является рассмотрение метода аксиоматизации конечнозначных (предикатных) логик, предложенного О.М. Аншаковым и С.В. Рычковым. При этом широкий класс наиболее известных многозначных логик аксиоматизируется как расширение классической логики.

Седьмая глава является центральной по своей значимости, в которой многозначная логика представлена в виде *функциональной системы.* Вначале вводится операция суперпозиции, а затем на множестве всех подмножеств множества n-значных функций определяется оператор замыкания, посредством которого вводятся понятия замкнутого класса функций, базиса, функциональной полноты и предполноты. Рассмотрен критерий функциональной полноты для конечнозначных логик, Выявлены принципиальные различия между классической (двузначной) логикой и произвольной конечнозначной логикой, главным из которых является переход от счетного множества замкнутых классов функций к континуальному множеству замкнутых классов за счёт добавления только одного нового истинностного значения. Обсуждается вопрос *критерия* счетности/континуальности для трехзначных логик. Уделено внимание функциональным свойствам конечнозначных логик Лукасевича, которые оказались связанными со свойствами простых чисел (теорема В,К. Финна). Следствия из этого открытия оказались совсем неожиданными:

структурализация простых чисел в виде корневых деревьев; построение такой логики K_{n+1} которая имеет класс тавтологий т.т.т., когда n есть простое число; штрих Шеффера для простых чисел; алгоритм порождения классов простых чисел.

Восьмая глава посвящена бесконечнозначным логикам, важнейшей из которых является логика Лукасевича Ł_∞. Кроме этого рассматриваются интуиционистская логика **Int** и некоторые супер-интуиционистские логики, например, логика Гёделя-Даммита **G**$_\infty$. Представляет интерес синтез логик Ł_∞ и $\mathbf{G}_\infty$. Кроме этого, уделено внимание основным льюисовским модальным системам, релевантной логике **R** и родственной ей логике **RM**, иерархии паранепротиворечивых логик Н. да Косты **C**$_n$. Рассматривается   алгебраизация Ł_∞, семантика Крипке для **Int** и обсуждается вопрос о переходе к неистинностно-функциональной семантике в связи с паранепротиворечивыми логиками. Отмечается тенденция развития логики, направленная на изучение целых классов логик, а также появление методов для комбинирования совершенно различных систем логик.

Девятая глава посвящена теории нечетких множеств и нечетким логикам. Обращается внимание на понятие *нечеткозначной* логики и на алгебру нечетких истинностных значений типа 2. Строится иерархия нечетких алгебр. Нечеткая логика рассматривается как в широком смысле (теория нечетких множеств), так и в узком смысле. В последнем случае выделяется родственный класс бесконечнозначных логик, основанный на **t**-нормах. Рассматривается базисная (предикатная) логика Хаека **BL** и ее расширения.

В десятой главе исследуется сложнейшая проблема теории многозначных логик, а именно проблема интерпретации истинностных значений. Обсуждается тезис Сушко о том что каждая логика является двузначной. Приводится его критика. Тем не менее, оказывается, что весьма широкий класс конечно-значных логик можно проинтерпретировать только в терминах классических истинностных значений: T (истина) и F (ложь). Рассматривается разработанная А.С. Карпенко так называемая *фактор-семантика* для таких логик и определены границы ее применения. Здесь в качестве истинностных значений высказываниям приписываются определенные подмножества T-F-последовательностей (подмножества булевых векторов). Отсюда возникла идея о *структурализации* истинностных значений. Главный вывод: ***логика есть наука об истинностных значениях***.

В качестве Приложения представлены конечные булевы решетки наиболее важных импликативных и импликативно-негативных логик. Для их построения существенно используется аппарат многозначных логик, а именно метод доказательства независимости аксиом, рассмотренный в разделе 2.3. В. последнем разделе книги обсуждаются проблемы классификации логик. Констатируется, что современный этап развития логики характеризуется тем, что логика превращается в ***науку о конструкциях логик***.

Метод изложения материала концентрический, т. е. вначале дается интуитивное и неформальное понимание тех или иных понятий, которые впоследствии уточняются. В первую очередь это относится к самому определению многозначной логики.

Вопрос о библиографии по многозначным логикам заслуживает специального рассмотрения. Литература здесь совершенно необозрима и, по-видимому, имеет тенденцию к экспоненциальному росту.

Первой и давно ставшей классической работой по многозначной логике является монография Дж. Россера и А. Тюркетта *[Rosser and Turquette* 1952], переизданная в 1958 г. Следующая книга принадлежит А.А. Зиновьеву *[Зиновьев* I960] (переведена на английский язык в 1963 г.). В исправленном и переработанном виде вышла большой статьей в сборнике (см. *[Зиновьев* 1968]). Новый вариант остался практически неизвестным, тем более что к этому времени вышла книга Р. Аккерманна *[Ackermann* 1967], а затем весьма обстоятельная (значительно превосходящая по объему материала все три предыдущих книги вместе взятые), с философским содержанием и с хорошо разработанной библиографией, монография Н. Решера *[Rescher* 1969]. Эта книга оказала большое влияние на развитие многозначной логики во всём мире. Отметим также книгу на румынском языке *[Dwnitriu* 1971] и книгу на немецком языке *[Gottwald* 1989]. Компактным введением в многозначную логику является монография Г. Малиновского *[Malinowski* 1993] (см. также *[Malinowski* 2006]). Теория многозначных логик изложена в *[Bole and Borowik* 1992] и их формально-логическое применение в *[Bole and Borowik* 2000]. Обратим внимание на очень полезную и разностороннюю книгу С. Готтвальда *[Gottwald* 2001] (английский вариант предыдущей книги), содержащую доказательства основных результатов в многозначной логике. Имеется также книга *[Bergmann* 2008], рассматривающая в основном трехзначные и бесконечнозначные логики.

Имеется большой обзор по многозначной логике Р. Вольфа *[Wolf* 1977], где библиография Решера дополнена и доведена до 1974 г. Подробная библиография была составлена в Японии: часть I - 60-е годы *[Мгуата* 1979] и часть II - с 1970 г. по 1974 г. *[Мгуата* 1980]. Отметим также обзор А. Роуза *[Rose* 1981] и обзор А. Урквартa *[Urqiihart* 1986]. См. также *[Beziau* 1997], *[Panti* 1998] *и [Malinowski* 2002]. Нынешнее состояние дел в многозначной логике (для специалистов) представлено в обзоре Р. Хэнли *[Hahnle* 2001].

Обновленный вариант современной библиографии с указанием различных ресурсов можно найти на сайте http://www.cs.chalmers.se/~reiner/mvl-web/.

Стоит также отметить статью С. Готтвальда, написанную для известной электронной «Стэнфордской Философской Энциклопедии» *[Gottwald,* 2004] и его же обзор для фундаментального труда «Философия логики» *[Gottwald* 2007].

Важнейшим и основным источником литературы по многозначным логикам и в особенности их применению и различным приложениям служат материалы ежегодного международного симпозиума по многозначной логике *(International Symposium on Multiple-Valued Logic),* которые проводятся начиная с 1971 г. В материалах 9-го симпозиума *[Ginser and Butler J.T.* 1979] содержится библиография по многозначной логике начиная с середины 1974 г. по апрель 1978 г. Она дополняет библиографию по многозначной логике, имеющей применение в вычислительной технике *[Epstein, Frieder and Rine* 1974], и библиографию, помещенную в хронологическом обзоре по логическим функциям для цифровых вычислительных систем *[Rine* 1977]. Обзоры и литература по специальным техническим разделам применения многозначной логики к компьютерным наукам имеются в трудах 16-го *[Hurst* 1986], 18-го *[Hurst* 1988] и 21-го *[Moraga* 1991] симпозиумов. В материалах 22-го симпозиума *[Butler S. and Butler J.* 1992] дается обзор и анализ работы первых 21 симпозиумов и приводятся различные статистические данные. Указанные авторы разработали также базу данных статей, авторов и тем.

Существует своего рода справочник по теории и применению многозначной логики к компьютерным наукам *[Rine* (ed.), 1977; 1984], получивший широкое распространение. Ряд статей книги носит характер обзоров по специальным разделам самой многозначной логики. Во втором издании этой книги (1984), значительно дополненном, имеется обзор (pp. xvi-xxxiv) по применению многозначной логики к цифровым вычислительным системам. Обзор охватывает период с 1952 по 1983 г. и разбит на семь разделов. Здесь можно найти работы об использовании многозначной логики в качестве языка при проектировании нового поколения ЭВМ. См. также обзоры в *[Hurst* 1984] и *[Smith* 1988]. Хорошее введение в теорию многозначных релейно-контактных схем содержится в монографиях *[Muzio and Weselkamper* 1986] и *[Epstein* 1993]. См. также *[Sasao* 1999]. Заметим только, что уже в 1958 г. в Московском государственном университете им М.В. Ломоносова был сконструирован первый трехзначный компьютер под названием «Сетунь» (см, *[Брусеицов и др.* 1965]).

Общим вопросам теории и применения многозначной логики посвящен сборник статей *[Fitting and Orlowska* (eds.), 2003]. Современное техническое использование и применение многозначной логики рассмотрено в монографии *[Miller and Thornton* 2007].

Дедуктивным арпектам многозначной логики посвящены монографии Р. Хэнли *[Hahnle* 1994] и 3. Стачняка *[Stachniak* 1996]. Философские аспекты обсуждаются в *[Зиновьев* 1960], *[Rescher* 1969], *[Haack 191 A; Haack* 1996]. Современный подход к нечеткой логике разработан в *[Hajek* 1998]. Здесь же дается краткий исторический экскурс развития многозначной логики (гл. 10).

Стоит обратить внимание на феномен многозначных логик Лукасевича, интерес к которым по прошествии многих лет только возрастает. В монографии *[Cignoli, D'Ottaviano and Mundici* 2000] исследуются алгебраические свойства бесконечнозначной логики Лукасевича, которая представляет для этого исключительно богатый материал, а в монографии *[Карпенко* 2000] (см. также *[Karpenko* 2006]) исследуются функциональные свойства конечнозначных логик Лукасевича, следствия из которых оказались совсем неожиданными (см. ниже раздел *1.6).* Отметим также книгу «Лукасевич и современная логика» *[Baghramian and Simons* 2000x].

Стоит отметить также работы, имеющие вводный характер: *[Гиндикин* 1972, § 11] и *[Гаврилов и Сапоженко* 1977, гл. 3], а также статьи в энциклопедиях: *[Зиновьев* 1964], *[Кудрявцев* 1982] и *[Карпенко* 2001a]. Большим событием явилось переиздание работ Д.А. Бочвара, его учеников и последователей. См. *[Финн* (ред.), 2008a; 2008b].

Настоящая книга является существенно переработанным и значительно расширенным вариантом книги *[Карпенко* 1997]. Работы В.К. Финна, связанные с функциональными свойствами многозначных логик и взаимоотношением трехзначных логик, оказали решающее влияние на выбор многозначной логики, как основного направления в логических исследованиях.

Данная книга может служить справочником по многозначной логике с тщательным соблюдением хронологии ее развития и с большим списком использованной литературы. Причем в силу той особой роли, которую играет теория функциональных свойств многозначных логик в компьютерных науках и в различных приложениях, основное внимание будет уделено пропозициональным логикам. Главное здесь то, что средств пропозиционального языка часто бывает достаточно, чтобы выявить наиболее существенные и принципиальные отличия многозначной логики от классической двузначной логики. Наиболее полное рассмотрение теории предикатных многозначных логик можно найти в монографии С. Готтвальда *[Gottwald 200Y].*

---

1. Классическая логика

1.1. Логические связки. Истинностные таблицы

Логика высказываний (пропозициональная логика) является разделом современной символической логики, изучающим сложные высказывания, образованные из простых, и их взаимоотношения. В отличие от логики предикатов простые высказывания при этом выступают как целостные образования, внутренняя структура которых не рассматривается, а учитывается лишь то, с помощью каких союзов и в каком порядке простые высказывания сочленяются в сложные. **Под <u>высказыванием</u> понимается то, что выражается повествовательным предложением.**

В естественном языке существует много способов образования сложных высказываний из простых. Мы выберем пять общеизвестных грамматических связок (союзов): «не», «и», «или», «если..., то» и «тогда и только тогда, когда». Процесс символизации (формализации) естественного языка средствами логики высказываний состоит в следующем. Простые высказывания замещаются ***пропозициональными переменными*** *p, q, r, ...* с индексами или без них; указанные выше грамматические связки называются ***логическими связками*** (пропозициональными связками), которые соответственно получили следующие обозначения и названия: ¬ (отрицание), ∧ или & (конъюнкция), ∨ (дизъюнкция), ⊃ (импликация) и ≡ (эквиваленция); и, наконец, используются скобки), (для того, чтобы можно было по-разному группировать высказывания и тем самым определять порядок выполнения операций. Отрицание является одноместной связкой, а остальные четыре — двухместными. Таким образом, мы определили ***пропозициональный язык,*** который обозначим посредством $\mathcal{L}$. Как увидим далее, исходное множество логических связок может значительно варьироваться и включать в себя также пропозициональные константы, представляющие отдельные истинностные значения.

<u>Выражением языка логики высказываний</u> будем называть любую последовательность указанных выше символов. Некоторые из этих выражений являются правильно построенными. Такие выражения называются ***формулами,*** определение которых задается следующими правилами, где буквы *A, B, C, ...* с индексами или без них используются как метапеременные для обозначения произвольных формул:

(1) всякая пропозициональная переменная есть формула;

(2) если A и B — формулы, то $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ тоже формулы;

(3) никакие другие выражения не являются формулами.

Примерами формул являются p, $\neg q$, $\neg(p \vee q)$. Внешние скобки при записи формул будем опускать. Таким образом, правила задают эффективный способ распознавания, является ли выражение логики высказываний формулой. Множество всех формул обозначим посредством *For*.

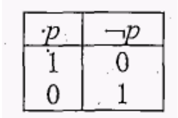
Теперь сделаем два основных допущения, на которых, основывается семантика классической логики высказываний:

(I) Каждое простое высказывание является или истинным, или ложным (принцип двузначности). «Истина» и «ложь» называются *истинностными значениями* высказывания и обозначаются соответственно И и Л или 1 и 0.

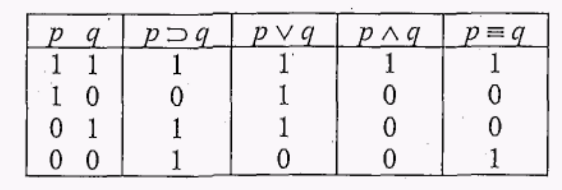
(II) Истинностное значение сложного высказывания определяется только истинностными значениями составляющих его простых высказываний (принцип экстенсиональности). Это означает, что пропозициональные связки являются знаками *истинностных функций.*

Возникает вопрос, какие истинностные функции соответствуют нашим логическим связкам?

Удобным способом задания истинностных функций является табличный, где слева указываются все возможные приписывания значений аргументам (пропозициональным переменным), а справа — значения самой функции:



p	$\neg p$
1	0
0	1



p	q	$p \supset q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \equiv q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1

Отсюда, например, следует, что высказывание $p \supset q$ ложно тогда и только тогда, когда (т.т.т., когда) p истинно и q ложно.

Приведенные выше таблицы называются ***истинностными таблицами,*** а определенные посредством их пропозициональные связки называются ***классическими связками***.

Легко определить, сколько имеется различных классических связок. Число различных строк в таблице для истинностной функции с m аргументами равно 2^m и на каждой из них значение функции можно задать двумя способами: 1 или 0. Поэтому число таких функций составляет 2 в степени 2^m. Отсюда, например, число одноместных связок равно 4, а число двухместных связок равно 16.

Каждая формула логики высказываний реализует некоторую истинностную функцию, которая графически может быть представлена истинностной таблицей. Другими словами, каждая формула может быть представлена как функция, у которой как переменные, так и сама функция, принимают значения из множества {0, 1}. Такие функции называются *булевыми функциями* в честь одного из создателей символической логики Дж. Буля (1815-1864).

1.2. Законы логики высказываний

Среди всего множества формул выделяются формулы, которые на каждой строке истинностной таблицы принимают только значение 1, т.е. соответствующие им булевы функции тождественно равны 1. Такие формулы называются , *тавтологиями* (тождественно истинными высказываниями). Таким образом, **тавтология — это формула, которая истинна независимо от того, какие значения принимают входящие в нее пропозициональные переменные.**

В формальной логике тавтологии играют важную роль. Они служат для записи ее законов, так как тавтологии являются всегда истинными высказываниями только в силу своей символической формы, независимо от содержания входящих в них исходных высказываний.

Легко установить, что формулы

(1) $p \supset p$,

(2) $p \vee \neg p$,

(3) $\neg(p \wedge \neg p)$

являются тавтологиями**. Законы, выражаемые этими формулами, называются соответственно *законом тождества, законом исключенного третьего* и *законом (не)противоречия* и были сформулированы уже Аристотелем**. Использование этих законов в качестве ограничений на допустимые способы рассуждений привело к тому, что они были названы ***основными законами мышления***.

Наиболее распространенной формулировкой закона исключенного третьего является следующая: ***одно из утверждений р или не-р должно быть истинным***. Эта формулировка получила в схоластической логике название *tertium n'on datur.* Закон непротиворечия формулируется следующим образом**:** ***два взаимно противоречащих высказывания не могут быть одновременно истинными.*** Последний закон формулируется у Аристотеля прежде всего как универсальный принцип бытия, наиболее достоверный из всех начал. Однако уже на заре XX в. еще до того, как окончательно оформилась классическая логика, оба эти закона подверглись серьезной критике, что положило начало развитию неклассических логик. В связи с трехзначной логикой Лукасевича мы к этим законам ещё вернемся, а сейчас дополним список законов классической логики:

(4) $\neg\neg p \equiv p$ *(закон двойного отрицания)*

(5) $(p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$ *(закон контрапозгиции)*

(6)- $p \supset (\neg p \supset q)$ *(закон Дунса Скота).*

Особое место среди законов занимают чисто импликативные тавтологии:

(7) $p \supset (q \supset p)$ *(закон утверждения консеквента)*

(8) $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$

(закон самодистрибутивности)

(9) $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$

(закон сильной транзитивности)

(10) $(p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)$ *(закон сокращения)*

(11) $(p \supset (q \supset r)) \supset (q \supset (p \supset r))$ *(закон перестановки)*

(12) $((p \supset q) \supset p) \supset p$ *(закон Пирса).*

Точно так же выделяются формулы, которые принимают значение 0 независимо от того, какие значения принимают входящие в нее пропозициональные переменные. Такие формулы называются *противоречиями* (тождественно-ложными формулами). Примерами противоречий являются следующие формулы:

$p \wedge\neg p$, $p\equiv \neg p$.

И вообще, из свойств связки отрицания следует, что отрицание тавтологии есть противоречие.

Обратим внимание на исключительно важное свойство истинностных таблиц: они дают нам эффективную процедуру для решения вопроса о том, является ли данная пропозициональная формула тавтологией (противоречием). **Указанная процедура называется *разрешающей процедурой,* поэтому данная логика высказываний является *разрешимой логикой.***

Приведем некоторые важные факты о тавтологиях настолько общих, что они лежат в основании *правил вывода: modus ponens* (отделения), *подстановки и эквивалентной замены,*

1. Если A и $A \supset B$ есть тавтологии, то B - тавтология.

2. Если p переменная, то из A следует $A[p/B]$, где $A[p/B]$ есть формула, являющаяся результатом *подстановки* формулы B вместо каждого вхождения переменной p в A.

3. Если $A \equiv B$ есть тавтология, то $C(A) \equiv C(B)$ тоже тавтология, где $C(A)$ — формула, содержащая некоторую формулу A в качестве своей составной части, и $C(B)$ - формула, полученная из $C(A)$ *заменой* этой составляющей A на формулу B.

1.3. Функциональная полнота. СДНФ

Будем называть формулы A и B *эквивалентными* (равносильными), если формула $A \equiv B$ есть тавтология. Очевидно, что. если формулы A и B эквивалентны, то сопоставленные им истинностные таблицы совпадают, т.е. реализуют одну и ту же булеву функцию,

Назовем систему пропозициональных связок $\mathcal{M}$ *полной,* если всякая иртинностная функция представима некоторой формулой, в которую входят только связки из системы $\mathcal{M}$, т.е. посредством такой системы можно выразить все истинностные функции (в данном случае, все булевы функции). Используя свойства логической эквивалентности, можно показать, что в классической логике каждая логическая связка может быть определена в терминах $\neg, \wedge, \vee$, т.е. система пропозициональных связок $\{\neg, \wedge, \vee\}$ является функционально полной. Более точно, для каждой истинностной функции * можно найти такую формулу С, использующую только связки $\neg, \wedge, \vee$, что истинностные таблицы для * и C одни те же.

Теорема о функциональной полноте. *В классической логике высказываний каждая истинностно-функциональная связка может быть определена в терминах* $\neg, \wedge, \vee$.

Отметим некоторые эквивалентности, показывающие взаимовыразимость одних связок через другие:

$$p \vee q \equiv \neg p \supset q,\ \ p \vee q \equiv (p \supset q) \supset q,\ \ p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q);$$
$$p \wedge q \equiv \neg(p \supset \neg q),\ \ p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q);$$
$$p \supset q \equiv \neg p \vee q,\ \ p \supset q \equiv \neg(p \wedge \neg q);$$
$$(p \equiv q) \equiv (p \supset q) \wedge (q \supset p).$$

Тогда системы связок $\{\neg, \supset\}$, $\{\neg, \vee\}$ и $\{\neg, \wedge\}$ являются функционально полными. Это значит, что мы можем строить логику высказываний, взяв в качестве исходной (базисной) любую из указанных систем связок.

Обратим внимание, что посредством правила замены можно преобразовывать формулы, получая другие, им эквивалентные, в более простые (содержащие меньше пропозициональных связок и переменных). Также обратим внимание, что некоторые эквивалентности выражают основные свойства пропозициональных связок. Например, эквивалентности $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ и $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ выражают коммутативный закон связок конъюнкции и дизъюнкции. Важно то, что для решения определенного рода задач, например, задач о функциональной полноте или разрешимости, всегда можно привести формулу к некоторому каноническому виду, называемому *нормальной формой.* Существует несколько "нормальных форм" формул логики высказываний: Вначале рассмотрим *совершенную дизъюнктивную нормальную форму* (СДНФ).

Для пропозициональных переменных $p_1, ..., p_n$, входящих в формулу F, будем называть *элементарной конъюнкцией* $A_1 \wedge \ldots \ldots \wedge A_n$, в которой A_i есть p_i или $\neg p_i$. Формула $F(p_1, \ldots, p_n)$ находится в СДНФ, если она имеет вид дизъюнкции $B_1 \vee \ldots \vee B_m$, где каждое B_j является элементарной конъюнкцией переменных $p_1, ..., p_n$.

Например, СДНФ для формулы $p \supset q$:

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

Имеют место следующие факты, связанные с СДНФ:

a) Каждую не тождественно ложную формулу логики высказываний можно представить в виде эквивалентной ей СДНФ. Отсюда следует функциональная полнота множества связок $\{\neg, \wedge, \vee\}$;

b) Это представление в виде СДНФ единственно;

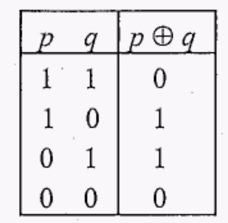
c) Если СДНФ формулы F содержит в точности n пропозициональных переменных, то формула F является тавтологией т.т.т., когда ее СДНФ состоит из 2^n дизъюнктивных членов. Отсюда следует разрешимость классической логики высказываний.

1.3.1. Полиномы Жегалкина

Представляет интерес еще один класс нормальных форм, названный *полиномами* (многочленами) *Жегалкина [Жегалкин* 1927], которые были предложены в качестве удобного средства для представления булевых функций.

Рассмотрим на множестве классических истинностных значений {0, 1} арифметические операции. Арифметическое умножение • совпадает с

конъюнкцией $\wedge$, но арифметическое сложение + выводит за пределы множества {0, 1}. Однако можно взять сложение по модулю 2 (равное остатку от деления на 2). В результате получаем булеву функцию, которую обозначим посредством $\oplus$:



p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Заметим, что $p \oplus q$ можно выразить в виде $\neg(p \equiv q)$. В свою очередь,

$$p \vee q \equiv p \oplus q \oplus (p \wedge q),$$

$$\neg p \equiv p \oplus 1.$$

Применяя эти две формулы, *любую формулу классической логики высказываний можно представить через связки* $\wedge$, $\oplus$ *и константу* 1, причем p^n есть p при $n \geq 1$ и $p \oplus p \equiv 0$ (теорема Жегалкина). .

Например, полином Жегалкина для формулы $p \supset q$:

$$(p \wedge q) \oplus p \oplus 1.$$

К СДНФ и полиному Жегалкина мы вернемся при изучении функциональных свойств и-значных логик (см. гл. 7).

Изучение свойств логических связок, их систематизация и выделение основных равносильностей приводит к формированию понятия *алгебры Буля* (см. раздел 4.4.1). Все эти и другие вопросы, включая свойства булевых функций, изучает *алгебра логики.*

1.3.2. Штрих Шеффера

В классической логике существуют две истинностно-функциональные связки, каждая из которых образует функционально полную систему. Первая из них называется *штрих* (функция) *Шеффера* и обозначается посредством | (1913 г.): высказывание *p*|*д* истинно т.т.т., когда неверно, что p и q оба истинны, т.е. $p|q \equiv \neg(p \wedge q)$ (антиконъюнкция). Тогда $\neg p \equiv p|p$, $p \wedge q \equiv (p|q) \mid (p|q)$. Другая связка называется *стрелка Пирса* и обозначается посредством ↑: высказывание $p{\uparrow}q$ истинно т.т.т., когда неистинно p и неистинно q, т.е.

$p\uparrow q \equiv \neg(p \vee q)$ (антидизъюнкция). Тогда
$\neg p \equiv p\uparrow p, p \vee q \equiv (p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q).$
Таким образом, для того чтобы показать, что какая-то связка является аналогом штриха Шеффера, надо (*i*) определить ее посредством исходных связок, а затем *(ii)* посредством ее определить сами исходные связки. Некоторые аналоги штриха Шеффера и стрелки Пирса нам понадобятся в последующем.

1.4. Логическое следование. Аксиоматизация. Адекватность

Наряду с понятием тавтологии фундаментальным для логики является понятие *логического следования,* которое является некоторым отношением, заданным на множестве формул. Говорят *«B* логически следует из *A* или является логическим следствием из *A»,* и пишут $A \vDash B,$ если в совместной таблице истинности для *A* и *B* формула *B* имеет значение 1 во всех тех строках, где *A* имеет значение 1. Отсюда следует, что $A \vDash B$ т.т.т., когда $A \supset B$ есть тавтология. Если формула *A* является тавтологией, то иногда пишут $\vDash A.$ Приведенное определение логического следования без труда может быть расширено на некоторую систему формул *Г,* и тогда пишут $\Gamma \vDash B.$ Дадим *стандартное* (классическое) определение логического следования, которое восходит к работе А. Тарского 1936 г.: *Формула B логически следует из множества формул Г т.т.т., когда при любом приписывании значений переменным в составе Г и B, при котором все формулы из Г принимают значение «истина», формула B также принимает значение «истина».*
Приведем следующий пример логического следования из посылок: $p, p \supset q \vDash q.$ Отметим также, что в силу приведенного выше табличного определения импликации получаем, что тождественно истинная формула *A* логически следует из любой системы формул, а из противоречия следует любая формула *A*.
Если определено понятие тавтологии и определено семантическое понятие логического следования (как это сделано выше), то говорят, что дано *семантическое представление* логики высказываний, а сама логика высказываний зачастую отождествляется с множеством тавтологий или с самим отношением логического следования.
Однако при этом возникает следующая серьезная проблема: **как обозреть все тавтологии, которых бесконечное множество? Для решения этой проблемы переходят к синтаксическому представлению логики высказываний,**

В рамках синтаксического подхода формальный (символический) язык логики высказываний и понятие формулы остаются прежними, а из всего множества тавтологий выбирается некоторое их конечное подмножество, элементы которого называются ***аксиомами.*** Наиболее известным является следующее множество аксиом *[Клини* 1957]:

1. $p \supset (q \supset p)$
2. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
3. $(p \wedge q) \supset p$
4. $(p \wedge q) \supset q$
5. $p \supset (q \supset (p \wedge q))$
6. $p \supset (p \vee q)$
7. $q \supset (p \vee q)$
8. $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$
9. $(p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset (\neg p))$
10. $\neg\neg p \supset p.$

Таким образом, мы задали аксиоматическое определение логических связок $\neg, \wedge, \vee, \supset$ в отличие от табличного при семантическом описании логики высказываний. Как обычно, *p* ≡*q* означает
$(p \supset q) \wedge (q \supset p).$
Переход от формулы или множества формул к формуле осуществляется с помощью следующих правил:
R1. Из *A* и $A \supset B$ следует *B (modus ponens).* Это правило Иногда обозначается посредством *MP* и записывается в виде
$A, A \supset B \vdash B.$
R2. Из $\vdash A$ следует $\vdash [A\ p/B]$ *(подстановка).*
Данное правило *подстановки* легко обобщается на случай одновременной подстановки формул $B_1, B_2, ..., B_n$ вместо различных переменных $p_1, p_2, ..., p_n$, входящих в формулу *A*.
Заметим, что каждая аксиоматическая система, которая использует правило подстановки, может быть представлена в виде *схем аксиом,* где вместо пропозициональных переменных используются символы для произвольных высказываний (метапеременные). В этом случае каждая схема аксиом представляет бесконечное множество аксиом (см. более подробно в разделе 4.2) и тогда правило подстановки оказывается излишним. Именно в таком виде дается в *[Клини* 1957] приведенная выше аксиоматизация, где вместо пропозициональных переменных *p, q, r* используются метапеременные *A, B, C.* Однако

зачастую более удобно пользоваться аксиоматизацией с правилом подстановки, особенно при анализе доказательств.

Так заданную логику высказываний обозначим посредством $\mathbf{C}_2$ и назовем *классической логикой высказываний,*

Логика, заданная посредством некоторого множества аксиом и некоторого множества правил вывода, называется ***гильбертовским исчислением*** **L**. Заметим, что существуют также другие типы логических исчислений, эквивалентные данному. Например, генценовские (секвенциальные) исчисления, семантические таблицы Бета, исчисления натурального вывода и др. (см. *[Смирнов* 1972]). Но для наших целей намного более удобными являются именно гильбертовские исчисления в силу простоты их задания, прозрачности соотношения между семантикой и синтаксисом и, главное, они являются очень удобным инструментом при рассмотрении взаимоотношений одних логик с другими.

Теперь перейдем к описанию того, что есть *доказательство* и что есть *теорема* в исчислении **L**.

Доказательством в **L** называется такая конечная последовательность формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что каждая формула этой последовательности есть либо аксиома, либо получена из некоторых предыдущих формул последовательности по одному из правил вывода. Формула *A* называется *теоремой* **L**, если существует доказательство в **L**, в котором последней формулой является *A,* Запись $\vdash A$ служит сокращением утверждения «*A* есть теорема». Если формула *A* доказуема из некоторого множества *Г* исходных формул (посылок), то запись принимает вид $\Gamma \vdash A$ с соответствующей модификацией определения доказательства.

Рассмотрим для примера доказательство в $\mathbf{C}_2$ теоремы $p \supset p.$

1. $(p \supset ((p \supset p) \supset p)) \supset ((p \supset (p \supset p)) \supset (p \supset p))$- подстановка в аксиому (2): вместо $q/p \supset p$ и вместо *r/p,*
2. $p \supset ((p \supset p) \supset p)$- подстановка в аксиому (1): вместо $q/p \supset p.$
3. $(p \supset (p \supset p)) \supset (p \supset p)$- из 1 и 2 по правилу МР.
4. $p \supset (p \supset p)$- подстановка в аксиому (1): вместо *q/p.*
5. $p \supset p$ из 3 и 4 по правилу МР.

Таким образом, $\vdash p \supset p.$

В качестве «вспомогательного» правила весьма полезной является *теорема дедукции,* когда какое-нибудь утверждение *B* доказывают в предположении верности другого утверждения *A,* после чего заключают, что верно утверждение «если *A*, то *B»:*

***Теорема дедукции**. Если Г — множество формул, A и B — формулы и* $\Gamma, A \vdash B$, *то* $\Gamma \vdash A \supset B.$ *В частности, если* $A \vdash B$, *то* $\vdash A \supset B.$

(Теорема дедукции называется *стандартной,* если для импликации выполняются свойства *утверждения консеквента* и *самодистрибутивности* (см. выше).)

Исходя из синтаксического представления логики высказываний, последняя зачастую отождествляется с множеством теорем или, что более принято, с отношением выводимости $\vdash$. Итак, при семантическом подходе формулы интерпретируются как функции на множестве из двух элементов {0, 1}, и нас интересуют тавтологии и противоречия, а при синтаксическом - как определенный набор символов, и различаются только теоремы и не теоремы. Однако, несмотря на такое различие, оба подхода к построению логики высказываний, по существу, эквивалентны и, как говорят, являются *адекватными* друг другу. Это значит, что понятия логического следования и вывода равнообъемны. Рассмотрим в связи с этим весьма примечательную теорему.

***Теорема адекватности**. Для всякой формулы* $A, \vdash A$ *т.т.т., когда* $\models A.$

(Теорема адекватности в виде: для *всякой формулы* $A, \Gamma \vdash A$ *т.т.т., когда* $\Gamma \models A$ - носит название *«строгой* теоремы адекватности».)

Доказательство в одну сторону, а именно: для всех *A,* если $\vdash A,$ то $\models A$ — носит название *теоремы о корректности.* Это минимальное условие, которое мы требуем от логического исчисления и которое состоит в том, что представленная нами семантика корректна для выбранной аксиоматизации. Для доказательства теоремы нужно проверить, что все наши аксиомы (1) — (10) являются тавтологиями, что легко устанавливается непосредственной проверкой с помощью истинностных таблиц. А наши правила вывода выбраны таким образом, что они *сохраняют тавтологию* (см. *[Чёрч* I960) в том смысле, что если посылка (или посылки) является тавтологией, то и заключение - тавтология. Поэтому все формулы последовательности, образующей вывод какой-либо теоремы исчисления $\mathbf{C}_2$, в том числе и сама доказанная теорема, являются тавтологиями, Из этой теоремы следует важнейшее свойство исчисления высказываний $\mathbf{C}_2$, свойство ***непротиворечивости****:* не существует формулы *A* такой, чтобы *A* и $\neg A$ были теоремами. Согласно теореме о корректности, каждая теорема $\mathbf{C}_2$ является тавтологией. Как уже говорилось, отрицание тавтологии не есть тавтология, Следовательно, ни формула *A,* ни формула $\neg A$ не могут быть одновременно теоремами в $\mathbf{C}_2$.

Противоречивая логика высказываний никакой ценности не представляет. В ней истина и ложь неразличимы.

Имеет место и обратное утверждение о том, что каждая тавтология доказуема, т.е. *для всякой формулы А, если* $\vDash A$, *то* $\vdash A$.

Доказательство этой теоремы не столь тривиально и носит название *теоремы о полноте* (дедуктивной) исчисления высказываний относительно предложенной семантики. По существу здесь утверждается, что логических средств, т.е. аксиом и правил вывода исчисления высказываний $\mathbf{C}_2$ вполне достаточно для доказательства всех тавтологий. Таким образом, главная цель достигнута: используя минимальные средства, можно обозреть всё множество тавтологий.

1.5. Историческая справка

Из раздела (1.3) следует, что логику высказываний можно развивать на основе системы связок $\{\neg, \supset\}$. Именно так *впервые* и была представлена аксиоматизация $\mathbf{C}_2$ Г. Фреге в 1879 г. (см. *[Фреге* 2000]. Она была значительно упрощена Я. Лукасевичем *[Lukasiewicz and Tarski* 1930]:

1. $p \supset (q \supset p)$
2. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
3. $(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$ *(обратная контрапозиция).*

Правила вывода: МР и подстановка.

Детально эта аксиоматизация C_2 исследуется А.Чёрчем *[Чёрч* I960]. (Нам она понадобится при сравнении $\mathbf{C}_2$ с трехзначной логикой Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$. В следующей главе мы покажем, что эта аксиоматизация обладает свойством независимости аксиом, что приводит к появлению трехзначных логик.)

В терминах современного символического языка аксиоматизация $\mathbf{C}_2$ впервые появилась в *«Prmcipia Mathematica»* А. Уайтхеда и Б.Рассела *[Whitehead and Russell* 1910-1913], где в качестве исходных связок взяты $\neg$ и $\vee$.У Фреге и здесь вопрос о полноте просто не возникал. Их целью было показать, что вся логика, а в действительности вся математика, может быть развита внутри их системы, основанной на классической логике. Первая публикация доказательства функциональной и дедуктивной полноты $\mathbf{C}_2$ принадлежит Э. Посту *[Post* 1921], который исходил из системы Уайтхеда и Рассела. Для доказательства теоремы адекватности Пост использовал двузначные истинностные таблицы (приведенные выше). Основы алгебры логики заложены в 1847 г. в работах Дж. Буля и А. де Моргана. Алгебраические, аспекты $\mathbf{C}_2$ рассмотрим в гл. 4.

1.6. Логика предикатов

Изложение этой темы имеется во всех учебниках по современной логике, среди которых одним из лучших является *[Мендельсон* 1984], которому мы и будем в основном следовать. См. также работу *[Hodges* 2001], специально посвященную элементарной логике предикатов.

Мы рассмотрим логику предикатов первого порядка, которая характеризуется тем, что имеется только один вид квантифицируемых переменных - предметные (индивидные) переменные, возможными значениями которых являются индивиды (числа, люди, города и т.п.).

1.6.1. Язык логики предикатов

Существуют такие виды логических рассуждений, которые не могут быть обоснованы в рамках логики высказываний. Например, «Все люди смертны», «Сократ — человек». *Следовательно,* «Сократ смертен».

Корректность этого рассуждения покоится не только на истинностно-функциональных отношениях между входящими в них высказываниями, но и на внутренней структуре самих высказываний, а также на понимании таких выражений, как «все», «всякий», «некоторый» и т.д. Поэтому удобно ввести специальные обозначения для определенных часто встречающихся выражений. Если *P(x)* означает, что *x* обладает свойством *P*, то посредством $\forall x P(x)$, будем обозначать утверждение: «все *x* обладают свойством Р».

Запись $\exists x P(x)$ будет обозначать, что «существует предмет *x*, обладающий свойством *P*». В выражении $\forall x P(x)$ часть $\forall$ называется квантором *всеобщности,* а часть $\exists$ в выражении $\exists x P(x)$ называется квантором *существования.* Как отмечается в *[Гильберт и Бернайс* 1979, в эвристических целях лучше трактовать **всеобщность** как распространенную на всю индивидную область (быть может, бесконечную) **конъюнкцию**, а **существование** - как распространенную на всю индивидную область **дизъюнкцию**. Именно такое понимание кванторов часто используется в многозначной логике.

Пусть *s* обозначает «Сократ», *M(x)* обозначает «*x* есть человек», а *D(x)* обозначает *«x* смертен». Тогда вышеприведенное рассуждение можно записать следующим образом: **из посылок** $\forall x(M(x) \supset D(x))$ **и *M(s)* *следует D(s)*.** Заметим, что справедливость этого заключения не зависит от того, какой конкретный смысл имеют символы *s, M* и *D.*

Язык логики предикатов содержит скобки, символы логики высказываний $\neg, \ \supset, \ \wedge$ и $\vee$, кванторы $\forall$ и $\exists$, *предметные (индивидные) переменные* $x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n, \ \ldots,$ *предметные (индивидные) константы* $a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n, \ \ldots,$ предикатные буквы $P_1^1, P_1^2, \ldots, P_k^j, \ldots$ и функциональные буквы $f_1^1, f_1^2, \ldots, f_k^j, \ldots$Верхний индекс предикатной или функциональной буквы указывает число аргументов, а нижний индекс служит для различения букв с одним и тем же числом аргументов. В приведенном выше примере *s* является предметной константой, а *M* и *D* — одноместными предикатными буквами. Функциональные буквы обозначают предметные функции, аргументами и значениями которых являются индивиды, например, «+», «возраст» и т.д.

(a) всякая предметная переменная или предметная константа есть терм;

(b) если f^n_i— функциональная буква и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ есть терм;

(c) выражение является термом только в том случае, если это следует из правил (a) и (b).

Предикатные буквы, примененные к термам, порождают *элементарные формулы,* или точнее: если P^n_i- предикатная буква, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$— элементарная формула.

Формулы исчисления предикатов определяются следующим образом:

(a) всякая элементарная формула есть формула;

(b) если *A* и *B* — формулы и *x* - предметная переменная, то каждое из выражений $(\neg A), \ (A \supset B), \ (A \wedge B), \ (A \vee B), \ (\forall x A)$ и $(\exists x A)$ есть формула;

(c) выражение является формулой только в том случае, если это следует из правил (a) и (b).

Заметим, что $\exists$ можно не включать в число основных символов для квантора существования, так как $\exists x A$ можно определить как сокращенную запись для $\neg(\forall x(\neg A))$. Также мы знаем, что посредством $\neg$ и $\supset$ можно определить связки $\wedge$ и $\vee$.

В выражении $(\forall x A)$ «*A*» называется областью действия квантора $\forall$ по переменной *x*. Заметим, что *A* может и не содержать переменной *x*, в таком случае обычно считается, что содержательный смысл *A* и $(\forall x A)$ одинаков.

Введем понятия *свободного* и *связанного* вхождения переменной в формулу: вхождение переменной *x* в данную формулу называется *связанным,* если *x* является подкванторной переменной входящего в эту формулу квантора $\forall$ или находится в области действия квантора $\forall$ по переменной *x*; в противном случае вхождение переменной *x* в данную формулу называется *свободным.* Заметим, что одна и та же переменная может иметь свободные и связанные вхождения в одну и ту же формулу. Заметим также, что вхождение переменной может быть связанным в той или иной формуле *A* и в то же время свободным в некоторой подформуле формулы *A*.

Переменная называется *свободной (связанной) переменной* в данной формуле, если существуют свободные (связанные) ее вхождения в эту формулу. Таким образом, переменная может быть одновременно свободной и связанной в одной и то же формуле.

Терм *t* называется свободным для переменной x_i в формуле *A,* если никакое свободное вхождение x_i в *A* не лежит в области действия никакого квантора $\forall x_j$, где x_j - переменная, входящая в *t*.

1.6.2. Интерпретация и аксиоматизация

Формулы имеют смысл только тогда, когда имеется какая-нибудь интерпретация входящих в нее символов. Сформулируем наиболее распространенную, теоретико-множественную семантику описанного выше языка логики предикатов первого порядка.

Под *интерпретацией* понимается всякая система, состоящая из непустого множества *D,* называемого *областью* интерпретации, и какого-либо соответствия, относящего каждой предикатной букве P^n_j некоторое *n*-местное отношение в *D,* каждой функциональной букве f^n_i - некоторую *n*-местную операцию в *D* (т.е. функцию, отображающую D^n в *D)* и каждой предметной постоянной a_i — некоторый элемент из *D.*

(Всякое «-местное отношение в *D* может рассматриваться как некоторое подмножество множества D^n всех *n-ок* элементов из *D.* Например, если *D* есть множество людей, то отношение между двумя людьми, состоящее в том, что первый из них приходится отцом другому, можно отождествить с множеством всех упорядоченных пар (людей) (*x*, *y)* таких, что *x* является отцом *y.)*

При заданной интерпретации предметные переменные пробегают область *D* этой интерпретации, а связкам $\neg, \supset, \wedge, \vee$ и кванторам придается их обычный смысл.

Для данной интерпретации всякая формула без свободных переменных (или, иначе, *замкнутая формула)* представляет собой высказывание, которое истинно или ложно, а всякая формула со свободными переменными выражает некоторое отношение на области интерпретации; это отношение может быть выполнено (истинно) для одних значений переменных из области интерпретации и не выполнено (ложно) для других.

Например, если мы берем в качестве области *D* множество целых положительных чисел и интерпретируем P^2_1 *(y, Z)* как $y \le z$, то $\forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$ представляет свойство (т.е. отношение с одним аргументом) «для каждого целого положительного *y, y* ≤ z», которое выполнено только для числа 1.

Как отмечает Э. Мендельсон, понятия выполнимости и истинности интуитивно ясны, но, следуя *[Tarski* 1936], они могут быть уточнены следующим образом. Пусть дана некоторая интерпретация с областью *D,* и пусть ∑ есть множество всех счетных последовательностей элементов из *D.* Определим, что значит, что формула *A* выполнена на последовательности $s = (b_1, b_2, \dots)$ из ∑ при данной интерпретации. Предварительно определим одноместную функцию s^* со значениями из *D* и определенную на множестве всех термов.

(1) Если терм *t* есть предметная переменная x_i, то $s^*(t) = b_i$.

(2) Если терм *t* есть предметная константа, то *s (t)* совпадает с интерпретацией этой константы в *D*.

(3) Если f^n_i есть функциональная буква, интерпретируемая операцией *g* в *D,* и $t_1, \dots, t_n$ — термы, то $s^*(f_i^n(t_1, \dots, t_n)) = g(s^*(t_1)), \dots, s^*(t_n))$.

Таким образом, s^*— это функция, определяемая последовательностью *s* и отображающая множество всех термов в *D.* Если говорить неформально, то для любой последовательности $s = (b_1, b_2, \dots)$ и для любого терма *t,* $s^*(f)$ есть элемент множества *D,* который получается в результате подстановки при каждом *i* элемента b_i на места всех вхождений переменной x_i, в терм *t* и затем выполнения всех операций интерпретации, соответствующих функциональным буквам терма *t.*

Теперь, следуя индуктивным шагам определения формулы, перейдем к основному определению.

(i) Если *A* есть элементарная формула $P_i^n(t_1, \dots, t_n)$ и Q^n_j есть соответствующее ей отношение в интерпретации, то формула *A* считается выполненной на последовательности *s* в том и только в том случае, когда $Q_j^n(s^*(t_1), \dots, s^*(t_n))$,то есть если *n*-ка $(s^*(t_1), \dots, s^*(t_n))$ принадлежит отношению Q^n_j.

(ii) Формула $\neg A$ выполнена на *s* т.т.т., когда формула *A* не выполнена *s*.

(iii) Формула $A \supset B$ выполнена на *s* т.т.т., когда формула *A* не выполнена *s* или когда формула *B* выполнена на s.

(iv) Формула $\forall x_i A$ выполнена на *s* т.т.т., когда формула *A* выполнена на любой последовательности из ∑. отличающейся от *s* не более чем своей *i*-ой компонентой. Иначе говоря, формула *A* выполнена на последовательности

$s = (b_1, b_2, \dots)$ из ∑ т.т.т., когда подстановка при каждом *i* символа, представляющего b_i, на места всех свободных вхождений x_i в *A* приводит к истинному в данной интерпретации высказыванию.

Формула *A* называется *истинной* (в данной интерпретации) т.т.т., когда она выполнена на всякой последовательности из ∑.

Формула *A* называется *ложной* (в данной интерпретации), если она не выполнена ни на одной последовательности из ∑.

Данная интерпретация называется *моделью* для данного множества формул Г, если каждая формула из Г истинна в данной интерпретации.

Из этих определений, например, следует: если в данной интерпретации истинны *A* и $A \supset B$, то истинно и *B; A* истинно в данной интерпретации т.т.т., когда в этой интерпретации истинно $\forall x A$.

Формула *A* называется *логически общезначимой* (в исчислении предикатов), если она истинна в каждой интерпретации. (В дальнейшем слова «в исчислении предикатов» будем опускать.)

Формула *A* называется выполнимой, если существует интерпретация, в которой *A* выполнима хотя бы на одной последовательности из ∑.

Формула *A* называется *противоречием,* если формула $\neg A$ является логически общезначимой или, что то же самое, если формула *A* ложна во всякой интерпретации.

Говорят, что *формула A логически влечет формулу B,* если в любой интерпретации формула *B* выполнена на всякой последовательности, на которой выполнена формула *A.* (В общем случае говорят, что формула *B* является *логическим следствием* множества Г формул, если во всякой интерпретации формула *B* выполнена на каждой последовательности, на которой выполнены все формулы из Г.)

Как и в логике высказываний, формула *A* логически влечет формулу *B* т.т.т., когда формула $A \supset B$ логически общезначима.

Логически общезначимые формулы называются *законами* логики предикатов. Среди них — всякий частный случай произвольной тавтологии логики высказываний (т.е. результат замещения в ней пропозициональных переменных формулами языка логики предикатов). Приведем еще два примера общезначимых формул:

(I) $\forall x(A \supset B) \supset (A \supset \forall x B)$, если формула *A* не содержит свободных вхождений *x*;

(II) $\forall x A(x) \supset A(t)$,если терм *t* свободен для *x* в *A(x).*

Как отмечается в *[Мендельсон* 1984], аксиоматический метод был роскошью при изучении пропозиционального исчисления в силу его простоты и тривиального способа проверки, является ли данная пропозицонльная формула тавтологией, но представляется необходимым при изучении формул, содержащих кванторы. В качестве исходных логических связок возьмем $\neg$ и $\supset$, а в качестве квантора $- \ \forall$. Тогда в качестве пропозициональной части можно взять аксиоматизацию **С**$_2$, предложенную Лукасевичем (см. выше раздел 1.5). Однако в силу сложности формулировки правил подстановки для исчисления предикатов обычно берутся схемы аксиом, каждой из которых соответствует бесконечное число аксиом одного и того же типа. К этим трем схемам аксиом добавляются две только что приведенные общезначимые формулы (I) - (II) с указанными ограничениями. Правилами вывода являются (i) *modus ponens* и (ii) правило *обобщения: из А следует* $\forall x A$.

Теорема дедукции для пропозиционального исчисления без соответствующей модификации не может быть проведена для первопорядковой логики. Например, $A \vdash \forall x_1 A$ для любой формулы *А,* но не всегда $\vdash A \supset \forall x_1 A$. Однако некоторые слабые варианты теоремы дедукции могут быть доказаны, например,

если формула А замкнута и $\Gamma, A \vdash B$, *то* $\Gamma \vdash \mathrm{A} \supset B$.

1.6.3. Основные свойства: полнота, теорема Линдстрёма, неразрешимость

Если с доказательством непротиворечивости (не *существует формулы А такой, что* $\vdash A$ и $\vdash \neg A$) трудностей не возникало, то проблема о полноте оказалась намного сложнее.

Только в 1928 г. в книге Д. Гильберта и В. Аккермана (см. русский перевод 2-го издания, значительно переработанного [*Гильберт и Аккерман* 1947]) окончательно оформилась концепция *первопорядковой логики,* или *чистой теории квантификацщи* с кванторами «все» и «некоторые» и была поставлена проблема о доказательстве ее полноты. Эта проблема была решена К. Гёделем в 1930 г., хотя к 1928 г. это доказательство уже имелось у Т. Скулема :

Во всяком исчислении предикатов первого порядка теоремами являются все те и только те формулы, которые логически общезначимы.

Пусть *Т* есть первопорядковая теория, т.е. множество предложений в языке логики предикатов, замкнутое относительно отношения выводимости. Имеют место два важнейших теоретико-модельных свойства теорий в первопорядковом языке.

Теорема компактности (для счетных языков). *Если каждое конечное множество предложений в Т имеет модель, то Т имеет модель,*

Компактность имеет место, поскольку во всех выводах используется только конечное множество посылок. Это свойство было уже выявлено К. Гёделем в работе о полноте логики предикатов. Позже

А.И.Мальцевым (1936) было дано «чисто семантическое» доказательство этой теоремы. ,

Ранее было доказано другое важное свойство первопорядковой логики (1915,1919):

Теорема Лёвенгейма-Скулема. *Если Т имеет бесконечную модель, то Т имеет модель любой бесконечной мощности τ, большей или равной мощности теории Т.*

Понадобилось продолжительное время, пока П. Линдстрём [*Lindstrom* 1969] установил, что эти свойства являются характеристическими для первопорядковой логики в следующем смысле:

Теорема Линдстрёма. *Логика первого порядка является единственной логикой, замкнутой относительно* $\wedge, \ \neg, \ \exists$ *и удовлетворяющей теоремам компактности и Лёвенгейма-Скулема*

По существу теорема Линдстрёма дает определение первопорядковой логики в терминах ее глобальных свойств и с этими свойствами она является уникальной. Не имеет значения, как мы будем расширять первопорядковую логику - в любом случае теряется или свойство компактности, или свойство Лёвенгейма-Скулема, или оба вместе. Уже второпорядковая логика, допускающая квантификацию по подмножествам, отношениям и функциям, кроме указанных свойств теряет также свойство полноты.

Первоначально результат Линдстрёма не привлек к себе особого внимания, о чём говорит издание в 1973 г. знаменитой книги Г. Кейслера и Ч.Ч. Чэна (см. русский перевод [*Кейслер и Чэн* 1977]), где эта теорема вообще не обсуждается. Не обсуждается эта теорема и в [*Мендельсон* 1984]. Только в третьем издании [*Chang and Keisler* 1990] уже в предисловии говорится, что этот результат является отправной точкой для развития *абстрактной теории моделей* и вводится новый раздел (2.5), где дается определение «абстрактной логики» как пары классов (l, $\models$), где l есть класс *предложений* и $\models_l$ есть отношение выполнимости (satisfaction), удовлетворяющее определенным условиям. Наиболее известным примером абстрактной логики как раз и является обычная первопорядковая логика, которая обозначается посредством $l_{\omega, \omega}$.

Теорий первого порядка хватает для выражения многих известных математических теорий и, более того, большинство теорий высших порядков может быть подходящим образом «погружено» в язык первого порядка. Например, *многосортная* первопорядковая логика, которая также используется при изучении многозначных логик, является переинтерпретацией второпорядковой логики или даже логики высших порядков в первопорядковую с различными видами объектов. (В отличие от однооортной первопорядковой логики,

рассмотренной здесь, где все переменные принадлежат к одному и тому же типу, в многосортной логике с каждой переменной связывается собственное множество ее возможных значений.)
Редукция к первопорядковой логике настолько сильна, что мы приходим к рекурсивно-аксиоматизируемому множеству истин.

Очень полезным является расширение первопорядковой логики введением отношения равенства между индивидами. Пусть *T* — теория первого порядка, в числе предикатных букв которой имеется P_1^2. Будем сокращенно писать $t = s$ вместо $P_1^2(t, s)$. Теория *T* называется *теорией первого порядка* с *равенством,* если следующие формулы являются теоремами *T:*

$\forall x_1 (x_1 = x_1)$ — рефлексивность равенства;

$(x = y) \supset (P(x, x) \supset P(x, y)$ — подстановочность равенства,

где *x* и *y* - предметные переменные, *P(x, x)* — произвольная формула, а *P(x, y)* получается из *P(x, x)* заменой каких-нибудь (не обязательно всех) свободных вхождений *x* вхождениями *y,* с соблюдением условия, чтобы *y* было свободно для тех вхождений *x,* которые заменяются.
Наконец, обратим внимание на еще одно фундаментальное свойство приведенного исчисления предикатов, которое относится к проблеме разрешимости, поставленной Д. Гильбертом в 1928 г. Эта проблема, по сравнению с аналогичной проблемой для исчисления высказываний, становится значительно сложнее, поскольку теперь уже приходится иметь дело с проверкой истинности общезначимой формулы в интерпретациях с областями сколь угодно большими конечными, а также бесконечными. А. Чёрч *[Church* 1936] и А. Тьюринг *[Turing* 1937] независимо друг от друга, опираясь на уточненное ими понятие вычислимой функции, доказали, что *первопорядковое исчисление предикатов неразрешимо..*
Теперь понятно, почему такое значение приобретает здесь представление данной логики в виде дедуктивного исчисления. С другой стороны, пришло осознание того, что неразрешимость является фундаментальным свойством даже таких «простых» логических исчислений, как первопорядковое исчисление предикатов. Более того, как мы увидим далее, некоторые пропозициональные логики тоже могут быть неразрешимыми, например, знаменитая релевантная логика **R**, в которой уточняется классическое понятие логического следования (см. ниже раздел 8.5.2).

2. Интуитивное понимание многозначной логики и ее возникновение

2.1. Интуитивное понимание многозначной логики

Многозначная логика в отличие от двузначной классической логики имеет дело не только с истинными и ложными высказываниями, но и с высказываниями, которые таковыми не являются. Вопрос о том, что представляют собой высказывания, которые не истинны и не ложны, — центральная философская проблема для многозначных логик. По крайней мере, как мы увидим, потребовалось введение в логику хотя бы еще одного истинностного значения, отличного от 1 (истина) и 0 (ложь). Множественность значений истинности высказываний позволяет строить из простых высказываний при помощи логических операций такие сложные высказывания, для которых нет аналогов в двузначной логике. В общем случае многозначная логика представляет собой обобщение двузначной логики, которая не может отразить всего многообразия логических построений, встречающихся на практике.

2.2. Источники многозначности в логике

Естественно возникает вопрос об источниках многозначности в логике. Один из убедительных философских аргументов в пользу принятия многозначной логики связан с указанием на недостаточность классических истинностных значений 1 и 0 для построения логических конструкций, моделирующих человеческие рассуждения. (Часто вместо цифр 1 и 0 употребляются буквы И и Л, или T и F, или t и f соответственно.) Недостаточность классических истинностных значений в первую очередь возникает из-за плюрализма нашего знания, например, в силу неопределенности поведения некоторых объектов и систем или неопределенности исходов эксперимента. Во-вторых, это **отсутствие информации достаточной, чтобы оценить каждое высказывание как истинное или ложное. Например, неполнота информации может быть следствием неточности измерений**. На современном уровне с условием неполноты информации связана разработка ДСМ-метода, в котором формализованы и программно реализованы **методы сходства и различия** Джона Стюарта Милля.

При неполной информации происходит также процесс аргументации. Наконец, имеет место принципиальная неполнота информации в некоторых математических теориях. В-третьих, существуют высказывания, могущие терять смысл, и приписывание им истинностных значений зависит от контекста их употребления. Одним из самых интересных примеров здесь служат высказывания, формулирующие логические и семантические парадоксы. В-четвертых, имеется принципиальная многозначность (или нечеткость, размытость), органически связанная с определенными множествами и свойствами этих множеств. Например, хорошо известный парадокс «куча» Эвбулида из Милета на самом деле означает, что понятие кучи является принципиально нечетким. Из подобной нечеткости, аналогами которой являются понятия «молодой», «высокий» и т. д., в общем случае следует потребность в бесконечном числе истинностных значений, поскольку быть молодым можно с различной степенью, например, со степенью из интервала [0, 1], мощность которого континуум (см. гл. 9).

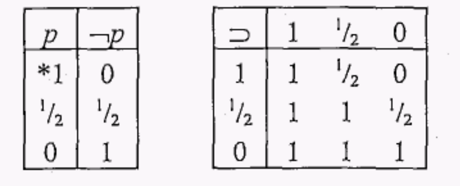
2.3. Доказательство независимости аксиом

Кроме этих основных источников многозначности существует много других мотивировок, приводящих к идее построения многозначных логик. Например, мы можем потребовать, чтобы аксиомы и правила вывода классической логики обладали свойством *независимости.* Свойство независимости аксиомы *А* заключается в том, что *А* не есть теорема в системе, получающейся исключением *А* из числа аксиом. Тогда для доказательства независимости аксиомы *А* надо подобрать такие истинностные таблицы (модель), в которых все правила вывода обладают свойством сохранять тавтологию (т.е. заключение оказывается тавтологией каждый раз, когда посылки являются тавтологиями) и все аксиомы, кроме *А,* суть тавтологии. Отсюда будет следовать, что не являющаяся тавтологией аксиома *А* независима. Правило вывода является независимым, если существует теорема, которая не может быть доказана без этого правила. Описание общего метода доказательства независимости аксиом и правил вывода дано А. Чёрчем *[Чёрч* I960].

Идея возможности формализации индуктивных методов Д.С, Милля средствами многозначных логик была высказана В.К. Финном.

Докажем независимость аксиоматизации классической пропозициональной логики **С**$_2$, приведенной нами в разделе 1.5. Начнем с аксиомы (2) $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$.

Рассмотрим следующие истинностные трехзначные таблицы для отрицания и импликации:

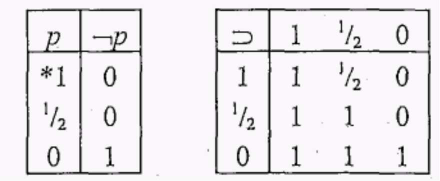


p	$\neg p$
*1	0
$^1/_2$	$^1/_2$
0	1

$\supset$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	1	$^1/_2$
0	1	1	1

Звездочкой отмечено *выделенное* значение, которое принимают тавтологии. Легко проверить, что аксиомы (1) и (3) являются тавтологиями. Однако аксиома (2) не является тавтологией, ибо она принимает значение 1/2, когда *p, q, r* получают соответственно значения $^1/_2$, $^1/_2$,и 0.

Независимость аксиомы (3) $(\neg p \supset \cdot \neg q) \supset (q \supset p)$.Рассмотрим следующие таблицы:

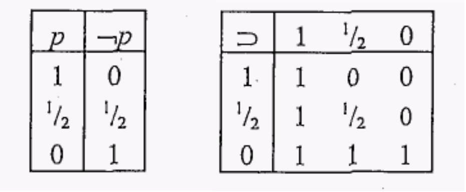


p	$\neg p$
*1	0
$^1/_2$	0
0	1

$\supset$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	1	0
0	1	1	1

Тогда аксиомы (1) и (2) являются тавтологиями, а аксиома (3) нет, ибо принимает значение1/2, когда *p* принимает значение $^1/_2$и *q* принимает значение 1,

Независимость аксиомы (1) $p \supset (q \supset p)$. Рассмотрим следующие таблицы:



p	$\neg p$
1	0
$^1/_2$	$^1/_2$
0	1

$\supset$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	1	1	1

Тогда аксиомы (2) и (3) являются тавтологиями при двух выделенных значениях 1 и 1/2, а аксиома (1) нет, ибо принимает значение 0, когда *p* принимает значение 1/2 и *q* принимает значение 1.

Понятно, что при доказательстве независимости могут быть использованы в качестве модели различные истинностные таблицы, например, при доказательстве независимости аксиомы (1) можно подобрать истинностные таблицы с одним выделенным значением. При этом надо быть внимательным при подборе соответствующей таблицы для импликации. Для того, чтобы правило МР сохраняло тавтологию, надо следить за следующим: если высказывание *p* принимает выделенное значение, а *q* принимает не выделенное значение, то импликативное высказывание $p \supset q$ не должно принимать выделенное значение. Независимость правила МР следует из того факта, что доказанная нами ранее теорема $p \supset p$ не может быть получена без применения МР, поскольку является короче любой из трех наших аксиом. Что касается правила подстановки, то оно всегда сохраняет тавтологию при любой системе истинностных значений и при любой истинностной таблице, Его независимость следует из того факта, что без него не может быть доказана никакая формула, которая была бы длиннее самой длинной аксиомы.

Метод использования многозначных истинностных таблиц (с одним или несколькими выделенными значениями) для доказательства независимости аксиом был уже известен П. Бернайсу в 1918г. Однако, как замечает Я. Лукасевич *[Lukasiewicz* 1941], этот метод был известен ему до публикаций П. Бернайса. Исследования в этой области проводились также А. Тарским *[Tarsia* 1930], согласно которому множество аксиом является независимым, если оно не эквивалентно никакому своему собственному подмножеству. Ряд логиков связывает происхождение многозначной логики именно с обобщением идеи доказательства независимости аксиом классической логики. В этом случае многозначные истинностные таблицы рассматриваются в их самостоятельном значении. Это значит, что к рассмотрению берется некий абстрактный универсум, в котором высказывания разделены на *n* категорий, в отличие от классической логики, где высказывания разделены на две категории. Отсюда в чистом виде возникает сложнейшая проблема интерпретации этого абстрактного универсума (см. гл. 10).

Данный метод доказательства независимости аксиом станет важнейшим инструментом при построении конечных булевых решеток импликативных и других логик (см. *Приложение).*

Конечно, метод доказательства независимости аксиом был распространен и на более богатые системы, включая первопорядковую логику. Особую значимость он приобрел при доказательстве независимости аксиом теории множеств. Ключевая идея была объяснена Д. Скоттом в 1967 г. и состояла в том, что множество истинностных значений образует структуру в виде булевой алгебры, а сам метод получил название *булевозначных моделей* для теории множеств (см., например, *[Rosser* 1969]).

2.4. Аристотелевский фаталистический аргумент

На самом же деле многозначная логика возникла из весьма глубоких философских предпосылок. Она появляется тогда, когда отвергается *принцип двузначности* (принцип бивалентности), согласно которому любое высказывание является или только истинным или только ложным. Однако уже в античности этот принцип был подвергнут сомнению. Аристотель в знаменитой 9-ой главе трактата «Об истолковании» *[Аристотель* 1978], пытаясь опровергнуть им же изобретенный фаталистический аргумент, ставит проблему истинностного статуса высказываний о будущих случайных событиях, например, таких, как завтрашнее морское сражение. Дело в том, что Аристотель придерживается принципа, который, видимо, был общепринят в античности, что истинность высказывания о некотором событии влечет его необходимость *(принцип необходимости).* Тогда суть аристотелевского аргумента можно выразить так.

Предположим, сейчас истинно, что завтра будет морское сражение. Из этого следует, что не может быть, чтобы завтра не было морского сражения, иначе не было бы истинно, что морское сражение завтра будет. Следовательно, завтрашнее морское сражение является *необходимым* событием (принцип необходимости). Подобно этому, если сейчас ложно, что завтра будет морское сражение, то *необходимо,* что морское сражение завтра не произойдет. Но сейчас истинно или ложно, что завтра будет морское сражение (принцип двузначности). Следовательно, или необходимо, что оно будет, или необходимо, что его не будет. Обобщая этот аргумент, получаем, что **все в мире происходит по необходимости, и нет ни случайных событий, ни свободы выбора.**

Логическая структура данного аргумента выглядит следующим образом. Пусть *p* есть высказывание о будущем случайном событии; *~p* — высказывание, противоречащее *p*, и читается как «не-*p*»; *T(p)* и F(*p*) обозначают соответственно «истинно, что *p»* и «ложно, что *p*»; N(*p*) обозначает «необходимо, что *p».* Тогда имеем:

(1) $\mathrm{T}(p) \to \mathrm{N}(p)$ - принцип необходимости,

(2) $\mathrm{F}(p) \to \mathrm{N}(\sim p)$ - по аналогии с (1),

(3) $\mathrm{T}(p) \vee \mathrm{F}(p)$ — принцип двузначности,

(4) $\mathrm{N}(p) \vee \mathrm{N}(\sim p)$ - из '(1), (2) и (3) по правилу классической логики, которое называется «сложная конструктивная дилемма»: из *A*→ C, *B* →*D* и *A* ∨ *B* следует *C* ∨ *D.*

Ограничивая сферу действия принципа двузначности, Аристотель тем самым разрушает свой фаталистический аргумент, лежащий в основании доктрины *логического фатализма.*

Однако фаталистический аргумент Аристотеля можно реконструировать по-другому:

(1) $\mathrm{T}(p) \to \mathrm{N}(p)$ - принцип необходимости

(2) $\mathrm{T}(\sim p) \to \mathrm{N}(\sim p)$ — подстановка в (1): $\sim p$ вместо p

(3) $\mathrm{T}(p) \vee \mathrm{T}(\sim p)$ - семантический принцип исключенного третьего,

(4) $\mathrm{N}(p) \vee \mathrm{N}(\sim p)$ -из (1), (2) и (3).

Заметим, что в силу следующего определения предиката "ложный", восходящего к Аристотелю: «ложность есть истинность отрицания (противоречивого) высказывания», т.е. $\mathrm{F}(p) \equiv \mathrm{T}(\sim p)$, принципы $\mathrm{T}(p) \vee \mathrm{F}(p)$ и $\mathrm{T}(p) \vee \mathrm{T}(\sim p)$ становятся эквивалентными.

И здесь проблем для Аристотеля не возникает, какой принцип отбрасывать. Более того, если мы к тому же принимаем конвенцию Тарского, которая утверждает, что фраза «истинно, что ...», предваряющая высказывание *р, является излишней в классической логике,* т.е. $\mathrm{T}(\mathrm{p}) \equiv p$, то закон исключенного третьего $p \vee \sim p$ и принцип двузначности $\mathrm{T}(p) \vee \mathrm{F}(p)$ эквивалентны. Как отмечает Г.Х. фон Вригт, принятие конвенции Тарского ведет к тому, что «любая попытка провести строгое разграничение между Законом Исключенного Третьего и Законом Бивалентности напрасна» *[Вригт* 1986]. Таким образом, в классической логике оба эти принципа эквивалентны, но в общем случае это не так, и на это впервые в 1922 г, обратил внимание Я. Лукасевич. Его опровержение приведенного фаталистического аргумента состоит в том, что отбрасывается принцип бивалентности и в логику вводится дополнительное, *третье,* истинностное значение (см. *[Лукасевич* 1993]).

Однако с развитием многозначной логики оказалось, что введение дополнительных истинностных значений данную проблему не решает. Можно показать на весьма упрощенной ситуации, а именно на уровне пропозиционального языка (если, следуя фон Вригту, вместо предиката "истинный" будем рассматривать пропозициональный "оператор истинности" *Тр),* что принятие конвенции Тарского приводит к тому, что в общем случае средствами многозначной логики нельзя опровергнуть фаталистический аргумент Аристотеля. Этот аспект мы рассмотрим в разделе (5.4.6.3), где будет построен пропозициональный базис для новой теории истинны.

2.5. Предыстория появления многозначной логики

Принятие принципа двузначности в античности было тесно связано с доктриной детерминизма (фатализма). Эпикурейцы, которые были индетерминистами, отрицали принцип двузначности, в то время как стоики, и прежде всего Хризипп, являющиеся последовательными детерминистами, учили, что все высказывания, в том числе и высказывания о будущих случайностях, должны быть истинными или ложными, и считали это утверждение направленным против Аристотеля. Особенно бурно проблема истинностного статуса высказываний о будущих случайных событиях обсуждалась в средневековье, поскольку решение этой проблемы нужно было совместить с теологическим обоснованием возможности божественного предвидения будущих случайных событий, - например, свободных поступков людей, - если утверждения и отрицания о таких событиях не истинны и не ложны. Дуне Скот и в особенности Уильям Оккам квалифицировали такие высказывания как *неопределенные.* Некоторые исследователи считают У. Оккама, который посвятил этой проблеме специальный трактат *[Ockham* 1983], предшественником трехзначной логики.

Только в начале XX в. исходные идеи многозначной логики начинают обсуждаться вновь, в особенности в работах шотландского философа X. Мак-Колла (1837—1909) и американского философа и логика Чарльза Пирса (1839-1914); элементы многозначной логики можно усмотреть и у русского логика Н.А. Васильева (1880-1940) после некоторой реконструкции его идей. Мак-Колл рассматривает высказывания, которые иногда истинны и иногда ложны, называя их переменными высказываниями, например, «$x = 2$», в отличие от всегда истинного высказывания «2 = 2» и от всегда ложного высказывания «2= 3». Истинностные значения переменных высказываний Мак-Колл связывает с исчислением вероятностей. Пирс подошел к идее многозначной логики с нескольких точек зрения. Одна из них - проблема будущей случайности у Аристотеля. Известно, что уже к 1909 г. Пирс владел методом истинностных таблиц для трехзначной логики, обосновывая третье истинностное значение как промежуточное между определенной истиной и определенной ложью. Н. А. Васильев в период 1910-1914 гг. опубликовал несколько работ о «воображаемой логике». Он рассматривал свои работы как попытку построения неаристотелевской логики аналогично тому, как Лобачевский построил неэвклидову геометрию. В частности, в этих логиках отсутствует закон исключенного третьего и вообще возможны логики без закона исключенного (n+1)-го.

3. Трехзначные логики

3.1. Трехзначная логика Лукасевича Ł_3

Проблема, которую Ян Лукасевич (1878-1956), основатель логического направления в Львовско-Варшавской школе (см. *[Воленъский* 2004]), стремился разрешить, прилагая необычайные усилия, — это проблема детерминизма. Анализируя аристотелевскую проблему истинностного статуса высказываний о будущих случайных событиях, Я. Лукасевич приходит к важному выводу, что принцип двузначности (бивалентности) не является универсальным и, по крайней мере, к высказываниям о будущих случайных событиях не применим. Исходя из этих соображений, Лукасевич вводит в логику третье истинностное значение, которое в отличие от 1 (истина) и 0 (ложь) обозначается 1/2 и интерпретируется как «безразлично», а позже как «возможно». Этим разрушается аристотелевский фаталистический аргумент, поскольку одна из исходных посылок, а именно принцип двузначности, отбрасывается. Однако введение дополнительного истинностного значения сразу же ставит другую серьезную проблему: переопределение логических связок.

Первая система трехзначной логики конструируется Я. Лукасевичем *[Lukasiewicz* 1920] следующим образом, В качестве исходных логических связок берутся отрицание ~ и импликация →, для которых оставляются классические значения, когда аргументы принимают значения из множества {0, 1}. В остальных случаях доопределение связок происходит следующим образом:

$$(1 \to {}^1/_2) = ({}^1/_2 \to 0) = {}^1/_2,$$
$$(0 \to {}^1/_2) = ({}^1/_2 \to {}^1/_2) = ({}^1/_2 \to 1) = 1,$$
$$\sim{}^1/_2 = {}^1/_2..$$

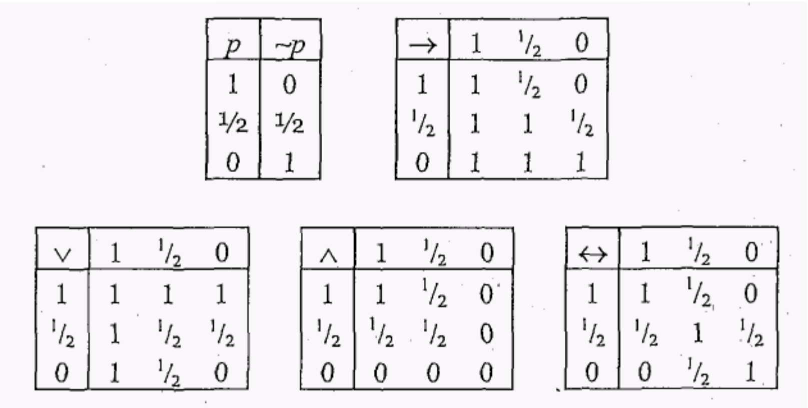
Посредством исходных связок по определению (которое будем обозначать посредством =:) вводятся другие логические связки:

$p \vee q =: (p \to q) \to q$ (дизъюнкция),

$p \wedge q =: \sim(\sim p \vee \sim q)$ (конъюнкция),

$p \leftrightarrow q =: (p \to q) \wedge (q \to p)$ (эквив аленция).

Тогда истинностные таблицы для логических связок выглядят так:



p	$\sim p$
1	0
½	½
0	1

→	1	½	0
1	1	½	0
½	1	1	½
0	1	1	1

∨	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	0

∧	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

↔	1	½	0
1	1	½	0
½	½	1	½
0	0	½	1

Истинностное значение 1 здесь и далее, если не оговорено другое, называется *выделенным* истинностным значением. Как и для классической логики $\mathbf{C}_2$, формула A называется *тавтологией,* если она принимает истинностное значение 1 независимо от того, какие значения принимают входящие в нее пропозициональные переменные. Множество данных тавтологий называется *трехзначной логикой Лукасевича* и обозначается посредством Ł_3.

Обратим внимание на то, что истинностные таблицы для ~ и → появились у нас при доказательстве независимости аксиомы самодистрибутивности (см. 2.3). Таким образом, Ł_3 может быть получена, исходя из совершенно других соображений.

Первая аксиоматизация множества тавтологий Ł_3 была приведена учеником Лукасевича М. Вайсбергом *[Wajsberg* 1931]:

W1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

W2. $p \to (q \to p)$

W3. $(\sim p \to \sim q) \to (q \to p)$

W4. $((p \to \sim p) \to p) \to p.$

Правила вывода, как и для $\mathbf{C}_2$: МР и подстановка. Аксиоматизация Вайсберга означает, что для Ł_3, как и для $\mathbf{C}_2$ (см. выше раздел 1.4), имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *Для всякой формулы* A, $\vdash A$ в Ł_3 *тогда и только тогда, когда* $\models A$ *в* Ł_3.

Таким образом, как и классическое исчисление $\mathbf{C}_2$, исчисление Ł_3 непротиворечиво и дедуктивно полно. Также тривиальным образом следует его разрешимость из трехзначности семантики.

3.1.1. Отличия трехзначной логики Лукасевича $Ł_3$ от классической C_2

Обратим внимание на одно весьма важное свойство истинностных таблиц для $Ł_3$, а именно: на классическом можестве истинностных значений, т.е. на множестве {1, 0} определение логических связок $Ł_3$ совпадает с определением связок классической двузначной логики **C**₂. Отсюда следует, что любая тавтология $Ł_3$ есть тавтология **C**₂, но *не наоборот.*

Например, легко проверить, что закон сокращения

$$(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$$

не есть тавтология в $Ł_3$. Заметим, что если в аксиоматизации Вайсберга аксиому (W4) заменить на закон сокращения, то получим аксиоматизацию **C**₂. Это следует из того факта, что из аксиом Вайсберга Wl, W2 и закона сокращения выводима *самодистрибутивность,* т.е в аксиоматизации **C**₂, представленной Лукасевичем (см. 1.5), самодистрибутивность можно заменить на транзитивность и сокращение. Тогда аксиоматизацию $Ł_3$ Вайсбергом можно представить как замену в новой аксиоматизации **C**₂ закона сокращения на аксиому W4.

Введение Лукасевичем в логику третьего истинностного значения, промежуточного между истиной и ложью, имело радикальные последствия для самой логики, самым главным из которых оказалось то, что не все законы классической логики имеют место в $Ł_3$. В первую очередь обращает на себя внимание тот факт, что ни *закон исключенного третьего* $p \vee {\sim}p$ и, главное, ни *закон непротиворечия* ${\sim}(p \wedge {\sim}p)$ не являются законами $Ł_3$: эти формулы принимают значение 1/2, когда *p* имеет значение 1/2. Реакция на подобную ревизию классической логики была весьма неоднозначной (и для многих логиков отбрасывание этих законов было неприемлемо*),* а сам Лукасевич неоднократно подчеркивал, что построенная им трехзначная система логики отличается от двузначной логики, единственно тогда известной, настолько сильно, насколько неэвклидовы системы геометрии отличаются от эвклидовой геометрии.

Заметим, что Лукасевич определяет дизъюнкцию $p \vee q$ и конъюнкцию $p \wedge q$ таким образом, чтобы они имели свойства классических логических связок, т.е. как и в классической логике **C**₂ значение $p \vee q$ является максимальным, а значение $p \wedge q$ — минимальным. Но можно определить $p \vee q$ по-другому, а именно $p \vee q =: {\sim}p \to q$, т. е. теперь $^1/_2 \vee {}^1/_2 = 1$. Тогда закон исключенного третьего $p \vee {\sim}p$ будет законом $Ł_3$, но не будет законом формула $(p \vee p) \to p$. Такую дизъюнкцию обозначим посредством $p \oplus q$; она появится у нас в гл. 8. Эти примеры указывают на другую особенность $Ł_3$, которая заключается в том, что уже в трехзначной логике становится возможным обобщать свойства классических связок по-разному, в результате чего и получаем, например, различные дизъюнкции, в то время как в C_2: $p \vee q \equiv \neg p \supset q \equiv (p \supset q) \supset q$, где $\neg$ и $\supset$ есть классические связки отрицания и импликации соответственно.

Отметим также, поскольку закон сокращения не есть тавтология в $Ł_3$, то немедленным следствием этого является то, что стандартная теорема дедукции не имеет места в $Ł_3$. Например, при стандартном определении логического следования $\vDash$:

$$p \wedge {\sim}p \vDash q, \text{ но } \nvDash (p \wedge {\sim}p) \to q \text{ в } Ł_3.$$

Подходящей логической связкой для *стандартной* формы теоремы дедукции может быть следующая:

$$p \to_1 q =: p \to (p \to q).$$

Ее истинностной таблицей является

$\to_1$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	1	1
0	1	1	1

Истинностная таблица для $\to_1$ независимо друг от друга была предложена в *[Slupechi, Bryll andPrucnal* 1967] и *[Monteiro A.* 1967]. Также независимым образом она вводится в *[Avron* 1991], как обладающая многими желательными свойствами. Эта импликация верифицирует импликативный фрагмент классической логики. Теперь мы можем взять в качестве исходных связок $Ł_3$ другое множество связок, например, $\{\sim, \to_1, \wedge,\}$. Но тогда нужно показать, что логики с множествами связок $\{\sim, \to\}$ и $\{\sim, \to_1, \wedge,\}$ эквивалентны, т.е. показать, что посредством множества связок $\{\sim, \to\}$ определимы связки из множества $\{\sim, \wedge, \to_1\}$, и наоборот. В одну сторону мы уже показали. Остается только определить посредством нового множества связок импликацию →:.

$$p \to q =: (p \to_1 q) \wedge ({\sim}q \to_1 {\sim}p).$$

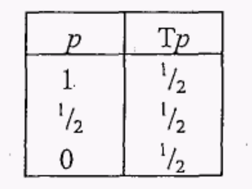
Такую эквивалентность множеств логических связок Н. Решер назвал *D-эквивалентностъю [Rescher* 1969]. Обычно говорят, что в этом случае имеет место *функциональная эквивалентность* (см. подробно в гл. 7).

Обратим внимание на трехзначную логику **BL** *[Blau* 1978], предназначенную для анализа естественного языка и явившуюся следствием дискуссии в области философии языка. Третье истинностное значение $u = 1/2$ интерпретируется как *неопределено (undetermined)* и его появление вызвано или использованием нечетких предикатов, или использованием имен, не имеющих денотатов. На пропозициональном уровне логика **BL** содержит три исходные связки: отрицание ~ и конъюнкцию $\wedge$ Лукасевича и еще одно отрицание ≈ (у нас оно появится в разделе 3.2.1 под обозначением $\lceil$). Теперь вводится связка импликации$\to_{BL}$:

$p \to_{BL} q =: \lceil p \vee q$

и утверждается, что только эта импликация является подходящей для трехзначного моделирования предложений вида «Все *A* есть В» в естественном языке. Обратим внимание, что импликация $\to_{BL}$ есть не что иное, как импликация $\to_1$, рассмотренная чуть выше, а значит логика **BL** по своим функциональным свойствам есть на самом деле трехзначная логика Лукасевича $Ł_3$. Ключевым моментом использования логики **BL** является идея, что естественный язык использует только связки, которые удовлетворяют *нормальному условию.* Условие нормальности (см. *[Gottwald* 2001]) для некоторой связки φ заключается в том, что ограничение φр на множестве истинностных значений {0, 1} есть классическая связка. Логика **BL** рассматривается в *[Gottwald* 2001] (без указания, что она есть $Ł_3$), где доказывается, что каждая трехзначная связка, которая удовлетворяет условию нормальности, может быть определена посредством исходных связок **BL**. Аналогичные теоремы периодически появляются в литературе, однако, заметим, что данное утверждение является следствием теоремы В.К. Финна *[Финн* 1969] о *функциональной предполноте* $Ł_3$. Последнее означает, что добавление к $Ł_3$ связки, не содержащейся в ней, превращает $Ł_3$ с этой связкой в трехзначную функционально полную логику.

Отсюда можно перейти к еще одному существенному отличию $Ł_3$ от **C**$_2$, которое состоит в следующем. Как известно, классическая двузначная логика является функционально полной, т.е. любая булева функция может быть выражена, например, посредством импликации и отрицания. В $Ł_3$ это не так, например, нельзя посредством связок Лукасевича ~ и → выразить связку Слупецкого Т*p*, которая переводит любое значение *p* в $^1/_2$:



p	Тp
1	$^1/_2$
$^1/_2$	$^1/_2$
0	$^1/_2$

Однако если к $Ł_3$ добавим эту связку, то получим функционально полную трехзначную логику, которую обозначим посредством $Ł_3^T$. Теперь, если к аксиомам Вайсберга для $Ł_3$ добавим две аксиомы, содержащие связку Слупецкого Т*p*:

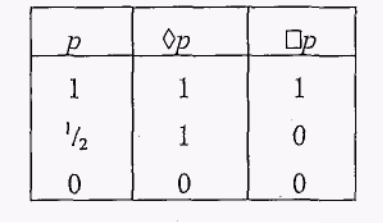
5. $Тp \to {\sim}Тp$

6. ${\sim}Тp \to Тp,$

то получим аксиоматизацию трехзначной логики $Ł_3^T$, представленную Е. Слупецким *[Shipecki* 1936]. Заметим, что в классической логике никакие формулы вида $A \supset \neg A$ и $\neg A \supset A$ не являются тавтологиями.

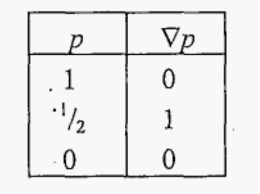
3.1.2. Трехзначная модальная логика Лукасевича

Обратим внимание на еще одну особенность $Ł_3$ (и в целом любой многозначной логики), которая состоит в том, что теперь мы можем конструировать новые логические связки, не существующие в **C**$_2$. Этот факт для Лукасевича является весьма важным, поскольку он показал, что в рамках двузначной логики нельзя построить модальную логику, но теперь, введя в логику третье истинностное значение, Лукасевич ставит задачу дать такое определение связки *возможности* $\Diamond p$, чтобы для всех теорем о модальных предложениях, идущих от Аристотеля и вплоть до Лейбница, существовала интерпретация в трехзначной логике $Ł_3$, посредством которой каждая такая теорема была бы истинной. Искомое определение было дано в 1921 г. А.Тарским: $\Diamond p =: \ {\sim}p \to p$, т.е. «возможно, что *p*» означает «если не-*p*, то *p*». Связка *необходимости* $\Box p$ определяется через исходную связку $\Diamond p$ обычным образом: $\Box p =: \ {\sim}\Diamond{\sim}p$. Исходя из этих определений строятся истинностные таблицы для $\Diamond p$ и $\Box p$:



p	$\Diamond p$	$\Box p$
1	1	1
$^1/_2$	1	0
0	0	0

Обратим внимание, что можно ввести и другие модальные логические связки, наиболее интересной из которых является связка *случайности:* $\nabla p =: \Diamond p \wedge \Diamond{\sim}p$ [*Prior* 1953]:



p	∇p
1	0
$^1/_2$	1
0	0

Эта связка интерпретируется как «неопределено, что...», обозначаетсяпосредством «Ip» и определяется:

$Ip =: p \leftrightarrow {\sim}p.$

Связка эта, как мы увидим, окажется довольно востребованной. Заметим только, что впервые она была введена Д.А. Бочваром в 1938 г., обозначена как $\downarrow p$ и интерпретирована как «*p* не имеет смысла» (см. ниже раздел 3.3.1).

Уже А. Прайор обратил внимание на то, что между свойствами модальных операторов $Ł_3$и модальных операторов системы Льюиса S5 (см. гл. 8) имеется некоторое сходство, которое нашло свое точное выражение в работе Р. Вудруффа [*Woodruff* 1974], где дан перевод $Ł_3$ в S5 такой, что только те формулы есть теоремы в $Ł_3$, чей перевод есть теоремы S5. Таким образом, $Ł_3$ можно проинтерпретировать посредством S5. Более того, в [*Minari* 2003] дана аксиоматизация $Ł_3$ с помощью характеристических модальных аксиом для S5 и значительно упрощено доказательство теоремы полноты для $Ł_3$, предложенное Вайсбергом. Однако заметим, что, как и во всякой модальной логике, в $Ł_3$ не имеет места $p \rightarrow \Box p$,но, к сожалению, формула $p \rightarrow (p \rightarrow \Box p)$ оказывается тавтологией.

Напомним, что исходными логическими связками в $Ł_3$ являются отрицание ~ и импликация→, через которые и определяются дизъюнкция $\vee$, конъюнкция $\wedge$ и модальные операторы $\Diamond$ и $\Box$. Но легко видеть, что посредством отрицания, дизъюнкции и конъюнкции нельзя определить импликацию в $Ł_3$. Более того, при выделенном значении «1» множество тавтологий в системе с исходными связками $\{\sim, \vee, \wedge\}$ будет пусто. Однако если к этой системе добавить модальные операторы Тарского, как это делает Е. Слупецкий в статье, посвященной интуитивной интерпретации $Ł_3$ [*Shtpecki, Bryll andPrucnal* 1967] (см. также [*Слупецкий* 1974]), то получим логику, функционально эквивалентную $Ł_3$.Чтобы это показать, достаточно через множество связок этой логики определить импликацию $p \rightarrow q$ из $Ł_3$. Слупецкий это делает следующим образом:

$p \rightarrow q =: ({\sim}p \vee q) \vee \Diamond({\sim}p \wedge q)$,

замечая по этому поводу, что смысл данного выражения, т.е. смысл импликации Лукасевича, довольно-таки неуловим. И поэтому в указанной работе решается проблема, поставленная Слупецким, об аксиоматизации трехзначной логики Лукасевича $Ł_3$ со множествами исходных связок $\{\vee, \sim, \Box\}, \{\vee, \sim, \Diamond\}, \{\wedge, \sim, \Box\}, \{\wedge, \sim, \Diamond,\}$. В итоге дается аксиоматизация $Ł_3$со множеством связок $\{\vee, \sim, \Box\}$[12], а в качестве импликации принимается связка $\rightarrow_1$, которая вводится по определению:

$p \rightarrow_1 q =: {\sim}(\Box p) \vee q.$

Определение импликации $p \rightarrow q$ посредством этих же связок имеется уже у Г. Мойсила [*Moisil* 1940], но значительно сложнее. Отметим также, что В.И. Шестаковым [*Шестаков* 1964] предложено следующее определение импликации Лукасевича:

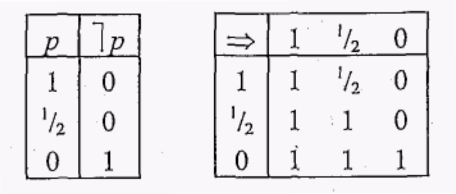
$p \rightarrow q =: ({\sim}p \vee q) \vee (\downarrow p \wedge \downarrow q).$

3.2. Трехзначная логика Гейтинга Ga

Трехзначная матричная интуиционистская логика **G**3 появилась в работе А. Гейтинга, где впервые было сформулировано пропозициональное (и предикатное) интуиционистское исчисление **Int** (о некоторых свойствах последнего см. в гл. 8.2.2). (Аксиоматизация **Int** получается из аксиоматизации **C**2, приведенной С.К. Клнни (см. выше раздел 1.4), посредством замены закона снятия двойного отрицания ${\sim}{\sim}p \supset p$ на закон Дунса Скота $p \supset ({\sim}p \supset q).$)

Отрицание, импликацию, дизъюнкцию и конъюнкцию в **G**3 обозначим посредством $\rceil, \Rightarrow, \vee$ и $\wedge$соответственно.

Истинностные таблицы для **G**3 впервые были использованы Гейтингом при доказательстве независимости аксиом **Int** и выглядят следующим образом:



p	$\rceil p$
1	0
$^1/_2$	0
0	1

$\Rightarrow$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	1	0
0	1	1	1

Заметим, что это как раз те истинностные таблицы, которые появились у нас при доказательстве независимости аксиомы обратной контрапозиции (см. 2.3).

Таблицы для $\vee$ и $\wedge$ в **G**$_3$ в точности совпадают с таблицами для этих связок в $Ł_3$. Заметим, что истинностная таблица для $\Rightarrow$ была использована нами при доказательстве независимости аксиомы контрапозиции(см. 2.3.) Разница между системами связок $Ł_3$ и **G**$_3$ весьма существенна, поскольку в **G**$_3$ через $\urcorner p$ и $p \Rightarrow q$ нельзя определить $p \vee q$ и $p \wedge q$. Но

$$p \vee q =: ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \wedge ((q \Rightarrow p) \Rightarrow p).$$

Отсюда следует, что в качестве исходных связок в **G**$_3$ можно взять связки $\urcorner$, $\wedge$ и $\Rightarrow$. Легко убедиться, что ни $\urcorner\urcorner p \Rightarrow p$, ни $p \vee \urcorner p$ не являются здесь тавтологиями, но первая есть тавтология в $Ł_3$.
Истинностные таблицы для **G**$_3$ появляются также в работе К. Гёделя *[Godel* 1932] при построении последовательности *n*-значных *логических матриц,* каждая из которых не является *характеристической* для **Int,** а также в работе С. Яськовского *[Jaskowski* 1936], построившего бесконечную последовательность матриц, которая *финитно аппроксимирует* **Int.** Эти понятия объясняются в следующей главе,
Впервые **G**$_3$ была аксиоматизирована Я. Лукасевичем *[Lukasiewicz* 1941]. Она получается за счет добавления к.аксиомам интуиционистского пропозиционального исчисления **Int** аксиомы

$$(\urcorner p \Rightarrow q) \Rightarrow (((q \Rightarrow p) \Rightarrow q) \Rightarrow q)$$

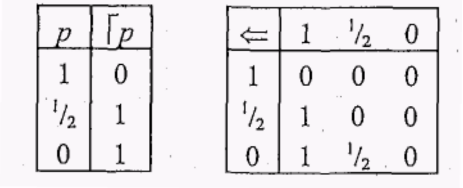
К логике **G**$_3$ мы еще вернемся, когда будем изучать функциональные свойства многозначных логик.

3.2.1. Трехзначная логика Брауэра G$_3^*$ (дуальная к G$_3$)

Представляет интерес рассмотреть логику, дуальную к G$_3$, которую назовем трехзначной логикой Брауэра G$_3^*$. Импликацию $\Leftarrow$, дуальную к $\Rightarrow$, определим следующим образом:

$$p \Leftarrow q =: \sim(\sim p \Rightarrow \sim q).$$

Отрицание $\ulcorner$, дуальное к $\urcorner$, определяется как $\ulcorner p =: p \Leftarrow 1.$
Тогда истинностные таблицы для $p \Leftarrow q$ и $\ulcorner p$ выглядят следующим образом:



p	$\ulcorner p$
1	0
$^1/_2$	1
0	1

$\Leftarrow$	1	$^1/_2$	0
1	0	0	0
$^1/_2$	1	0	0
0	1	$^1/_2$	0

Дизъюнкция $\vee$ и конъюнкция $\wedge$ те же самые, что и в **G**$_3$.
Легко убедиться, что здесь, в отличие от **G**$_3$, закон исключенного третьего $p \vee \ulcorner p$ является тавтологией, а закон Дунса Скота $p \Leftarrow (\ulcorner p \Leftarrow q)$ — тождественно ложной формулой. Последнее говорит о том, что **G**$_3$ является *паранепротиворечивой логикой* (см. раздел 3.5).

3.2.2. Взаимоотношение G$_3$ с $Ł_3$

Впервые определимость связок из **G**$_3$ посредством $Ł_3$ была представлена Г. Мойсилом *[Moisil* 1963]. В несколько упрощенном виде это выглядит так:

$\urcorner p =: \sim(\sim p \to p)$, т.е. $\urcorner p$ есть $\sim\Diamond p$ или $\Box\sim p$

$p \Rightarrow q =: \urcorner(\sim(p \to q)) \vee q$.

(Эта "упрощенная" формула в 2009 г. была упрощена студенткой 4-го курса философского факультета МГУ (кафедра логики) Н. А. Знаменской:

$p \Rightarrow q =: ((p \to q) \to p) \to q.$)

Это позволяет дать аксиоматизацию $Ł_3$ на основе интуиционистской импликации $\Rightarrow$, что и было сделано Л. Итурриоз *[Ititrrioz* 1977].
Очевидно, что **G**$_3$ не эквивалентна $Ł_3$, поскольку *~p* нельзя выразить связками из **G**$_3$. Однако если добавить связку ~к **G**$_3$, то, как показал Мойсил *[Moisil* 1963], получим $Ł_3$:

$$p \to q =: (p \Rightarrow q) \vee (\sim q \Rightarrow \sim p).$$

В *[Cignoli* 1982] имеется упрощение:

$$p \to q =: (p \Rightarrow q) \vee \sim p.$$

3.3. Трехзначная логика Бочвара Вз

Другая известная трехзначная логика была построена русским логиком Д.А. Бочваром *[Бочвар* 1938] в связи с проблемой разрешения логических антиномий, в первую очередь парадокса Рассела. В данной системе третье истинностное значение предлагается интерпретировать не столько как промежуточное между истиной и ложью, сколько как парадоксальное значение или даже как «бессмыслица». Анализ логических и семантических парадоксов состоит в доказательстве бессмысленности парадоксальных высказываний. Поэтому логика Бочвара **B**$_3$ и называются логикой бессмысленности,
Логика **B**$_3$ имеет следующие исходные связки: $\sim$, $\vdash$ и $\cap$, где *~p*

есть отрицание Лукасевича, $\vdash p$ имеет истинностную таблицу точно такую же, как $\Box p$ в $Ł_3$, и называется внешним утверждением. Поскольку посредством связок ~, $\vee$ и $\wedge$ из $Ł_3$ определима связка $\cap$:

$$p \cap q =: (p \wedge q) \vee (p \wedge {\sim} p) \vee (q \wedge {\sim} q),$$

то $\mathbf{B}_3$ есть подсистема $Ł_3$. Но $\mathbf{B}_3$ есть собственная подсистема $Ł_3$, так как из построения "нормальных форм" для $\mathbf{B}_3$ в *[Финн* 1971; 1974] следует, что импликация Лукасевича → не определима в $\mathbf{B}_3$ (точно так же, как неопределимы связки $\vee$ и $\wedge$). Таким образом, $\mathbf{B}_3$ не является подсистемой **G**3, а $\mathbf{G}_3$ не является подсистемой $\mathbf{B}_3$.

Через $p \cap q$ и ${\sim}p$ обычным образом определяются другие связки (Д.А. Бочвар называет их *внутренними* связками):

$$p \cup q =: {\sim}({\sim}p \cap {\sim}q),$$
$$p \supset q =: {\sim}p \cup q,$$
$$p \equiv q =: (p \supset q) \cap (q \supset p).$$

Тогда истинностные таблицы для внутренних связок выглядят следующим образом:

p	${\sim}p$
1	0
1/2	1/2
0	1

$\cup$	1	1/2	0
1	1	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\cap$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1/2	0

$\supset$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1/2	1

$\equiv$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1/2	1

Обратим внимание на особенность внутренних связок, которая заключается в том, что приписывание хотя бы одному из аргументов значения 1/2 оказывается достаточным для того, чтобы вся формула имела значение 1/2. Такое свойство внутренних связок является следствием интерпретации 1/2 как «бессмысленность», т. е. бессмысленность влечет за собой бессмысленность.

3.3.1. Два уровня B_3: внешние логические связки

Особую роль в $\mathbf{B}_3$ играет связка $\vdash$ (будем обозначать ее как $\Box$), посредством которой следующим образом определяется отрицание ${\sim}^{\Box}$, дизъюнкция $\cup^{\Box}$, конъюнкция $\cap^{\Box}$, импликация $\supset^{\Box}$ и эквиваления $\equiv^{\Box}$:

$${\sim}^{\Box}p =: {\sim}\Box p \text{ есть } \ulcorner p,$$
$$p \cup^{\Box} q =: \Box p \cup \Box q,$$
$$p \cap^{\Box} q =: \Box p \cap \Box q,$$
$$p \supset^{\Box} q =: \Box p \supset \Box q,$$
$$p \equiv^{\Box} q =: \Box p \equiv \Box q.$$

Эти связки Д.А. Бочвар называет *внешними* и они задаются следующими истинностными таблицами:

p	${\sim}^{\Box}p$
1	0
1/2	1
0	1

$\cup^{\Box}$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	0	0
0	1	0	0

$\cap^{\Box}$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	0	0	0
0	0	0	0

$\supset^{\Box}$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1	1
0	1	1	1

$\equiv^{\Box}$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	0	1	1
0	0	1	1

Отметим важную особенность приведенных истинностных таблиц, которая состоит в том, что внутри них имеются только истинностные значения 1 и 0. Обозначим логику, основанную на этих связках, посредством $\mathbf{B}_3^{\Box}$.

Под *фрагментом* некоторой логики **L** с множеством связок *F* будем понимать логику $\mathbf{L}'$ с множеством связок F' такую, что посредством *F* определимы связки из множества F', но не наоборот. Отсюда следует, что $\mathbf{B}_3^{\Box}$ есть фрагмент логики $\mathbf{B}_3$. Этот фрагмент оказался необычным. Адаптируя терминологию Д.А. Бочвара к языку настоящей работы, можно сказать, что $\mathbf{B}_3^{\Box}$ является *изоморфом* классической пропозициональной логики $\mathbf{C}_2$. Последнее означает, что истинностные таблицы для логических связок $\mathbf{B}_3^{\Box}$ верифицируют аксиомы $\mathbf{C}_2$ (см. аксиоматизацию $\mathbf{C}_2$ посредством $\supset$ и $\neg$ в разделе 1.4), а правило *modus ponens* сохраняет классическое отношение логического следования, Такие изоморфы будем называть *нормальными изоморфами.* Таким образом, логика $\mathbf{B}_3$ содержит фрагмент, изоморфный $\mathbf{C}_2$.

В итоге, логика $\mathbf{B}_3$ имеет два уровня. Первый уровень образуют формулы с внутренними связками, второй уровень образуют формулы с внешними связками $\mathbf{B}_3^{\square}$. Внутренние формулы суть выразительные средства и представляют язык-объект, в котором рассматриваемые факты не могут быть доказаны; внешние формулы суть дедуктивные средства, с помощью которых доказываются утверждения о внутренних формулах, и в этом смысле внешние формулы представляют метаязык. Логикой внешнего уровня, как мы видели, является классическая логика $\mathbf{C}_2$. Понятие «бессмысленность» в этом языке относится к формулам внутреннего уровня: бессмысленность некоторой формулы *A* означает, что приведено доказательство формулы *«A* не имеет смысла».

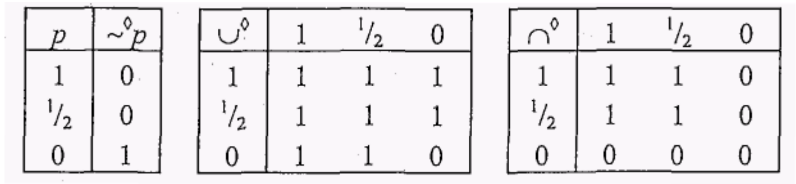
Пусть $\downarrow p$ представляет собой внешнюю связку с таблицей истинности, приведенной выше для ∇p (см. 3.1.2). Здесь содержательно $\downarrow p$_ обозначает *«p* не имеет смысла» и определяется через исходные связки $\mathbf{B}_3$ так:

$$\downarrow p =: \sim(\square p \cup \square{\sim}p), \text{ или } \downarrow p =: \ p \equiv^{\square} {\sim}p.$$

Легко видеть, что в $\mathbf{B}_3$ формулы вида $\downarrow A$ не могут быть доказуемы, так как в $\mathbf{B}_3$ не может быть получена формула *A,* которая принимает значение 1/2 при любом приписывании значений входящих в нее переменных. Только в этом случае *A* была бы доказуема. Но формулы, вида $\downarrow A$ доказуемы в расширенном исчислении предикатов, в основе которого лежит пропозициональное исчисление $\mathbf{B}_3$. Именно в получении доказательств формул вида $\downarrow A$ и заключается анализ парадоксов, предложенный Д.А. Бочваром.

3.3.1.1. Трехзначные изоморфы $\mathbf{C}_2$

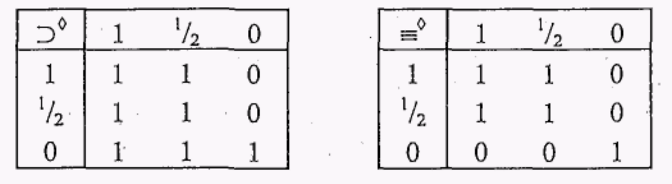
Оказывается, $\mathbf{B}_3$ имеет еще один изоморф $\mathbf{C}_2$. Поскольку, как уже говорилось, оператор $\vdash p$ есть $\square p$, то имеем также оператор $\lozenge p$, который определяется стандартным образом: $\lozenge p =: \sim\square{\sim}p.$ Теперь определим *внешние* связки $\sim^{\lozenge}$, $(\,|)$, $\cup^{\lozenge}$, $\cap^{\lozenge}$, $\supset^{\lozenge}$ и $\equiv^{\lozenge}$ аналогично тому, как определялись внешние связки в $\mathbf{B}_3^{\square}$, т.е; вместо оператора $\square p$ перед каждой пропозициональной переменной ставится оператор $\lozenge p$. В результате имеем:



p	$\sim^{\lozenge}p$
1	0
1/2	0
0	1

$\cup^{\lozenge}$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1	1
0	1	1	0

$\cap^{\lozenge}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	0
0	0	0	0



$\supset^{\lozenge}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	0
0	1	1	1

$\equiv^{\lozenge}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	0
0	0	0	1

Обозначим логику, основанную на этих связках, посредством $\mathbf{B}_3^{\lozenge}$. Пусть выделенными значениями здесь являются 1 и 1/2. Легко проверить, что $\mathbf{B}_3^{\lozenge}$ является нормальным трехзначным изоморфом $\mathbf{C}_2$. Таким образом, трехзначная логика Бочвара $\mathbf{B}_3$ имеет два нормальных изоморфа классической двузначной логики $\mathbf{C}_2$, в которых правило *modus ponens* сохраняет классическое отношение логического следования. Обратим внимание, что изоморфы $\mathbf{B}_3^{\square}$ и $\mathbf{B}_3^{\lozenge}$ отличаются друг от друга соответственно тем, что в $\mathbf{B}_3^{\square}$ истинностное значение 1/2 отождествляется с 0, а в $\mathbf{B}_3^{\lozenge}$ с 1. При таком отождествлении свойства связок остаются классическими, что является подтверждением того, что верифицируются аксиомы $\mathbf{C}_2$.

Такой путь доказательства "эквивалентности" $\mathbf{B}_3^{\square}$ и $\mathbf{C}_2$ был предложен Н. Решером *[Rescher* 1969]. При этом он отмечает, что $\mathbf{Ł}_3$ содержит фрагмент $\mathbf{B}_3^{\lozenge}$. Таким образом, возникает вопрос о фрагментах, изоморфных $\mathbf{C}_2$, в других трехзначных логиках. Прорыв в этой области был совершен В.Е. Комендантским в дипломной работе *[Комендантский* 2000], где посредством компьютерной программы было вычислено, что $\mathbf{Ł}_3$ имеет 18 нормальных изоморфов $\mathbf{C}_2$, 2 из которых с одним выделенным значением и 16 с двумя выделенными значениями. Более того, в *[Девяткин* 2004] вычислено, что трехзначная функционально полная логика (например, $\mathbf{Ł}_3$, обогащенная функтором Слупецкого Т*p)* имеет 264 нормальных изоморфа, 8 из которых с одним выделенным значением и 256 с двумя выделенными значениями. Здесь же рассматривается вопрос о необходимых и достаточных условиях существования в трехзначной логике определенного вида изоморфа $\mathbf{C}_2$. См, также *[Девяткин* 2007; 2009]. Имеет смысл обобщить понятие изоморфа, введенного Д.А. Бочваром, а именно считать *обобщенным* изоморфом некоторый фрагмент трехзначной логики, в котором верифицируются аксиомы $\mathbf{C}_2$, но не обязательно правило *modus ponens* сохраняет классическое отношение логического следования. Примерами таких . изоморфов являются $\mathbf{B}_3^{\square}$ с двумя выделенными значениями и $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$ с одним выделенным значением. Именно такие истинностные таблицы были представлены в *[Malinowski* 1997], где констатируется тот факт, что здесь верифицируются все аксиомы $\mathbf{C}_2$, но правило modus ponens не сохраняет классическое отношение логического следования. Заметим, что уже таковой является логика Клини $\mathbf{K}_3$ с двумя выделенными значениями (см. 3.4.1). Изучению подобных изоморфов, но с одним выделенным значением, посвящена работа Л.Ю. Девяткина *Щевяткин* 2007].

Интересно, что в *[Девяткин, Карпенко и Попов* 2007] доказано, что *логические матрицы* для этих логик (с одним или двумя выделенными значениями) являются *характеристическими* для $\mathbf{C}_2$. Метод доказательства предложен В.М. Поповым.

Естественно возникает более общий вопрос: при каких условиях произвольные (конечные) истинностные таблицы равны, т.е. имеют одно и то же множество тавтологий? Наверное, впервые эта проблема обсуждается в *[Los* 1949] и независимо от него в *[Kalicki* 1950; 1952]. Роль изоморфов $\mathbf{C}_2$ еще полностью не изучена. По-видимому, самое интересное в том, что некоторая логика **L**, содержащая нормальный изоморф $\mathbf{C}_2$, может быть аксиоматизирована как расширение $\mathbf{C}_2$ (развитие этой темы см. в разделах б.3 и 7.5.3).

3.3.2. Аксиоматизация $\mathbf{B}_3$

В итоге можно констатировать, что логика $\mathbf{B}_3$ есть объединение внутренних и внешних логических связок. Как это выглядит в аксиоматической форме, впервые было показано В.К. Финном в *[Финн* 1971] (расширенный вариант этой статьи см. в *[Финн* 1974]). Для этого при аксиоматизации $\mathbf{B}_3$ вводятся переменные двух сортов. Пусть *p, q, r, ...* — пропозициональные переменные, принимающие значения из множества $\{1, {}^1\!/_2, 0\}$; а *u, v, w, ...* — сентенциональные переменные, принимающие значения из множества {1, 0}.
Посредством *A, B,* С, ... обозначаются произвольные формулы из $\mathbf{B}_3$, посредством же $A^0, B^0, C^0, \ldots$ обозначаются внешние формулы из $\mathbf{B}_3$. Исходными связками исчисления $\mathbf{B}_3$ являются $\sim, \cap, \cup$ и $\rightarrow$ (в наших обозначениях последняя связка есть $\supset^{\square}$).

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r))$
3. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
4. $p \cap q \rightarrow p$
5. $p \cap q \rightarrow q \cap p$
6. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \cap r))$
7. $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \cup q \rightarrow r))$
8. $p \cup q \rightarrow q \cup p$
9. $(p \cup q) \cup r \leftrightarrow p \cup (q \cup r)$
10. $p \cup q \rightarrow q \cup p$
11. $(p \cup q) \cap r \leftrightarrow (p \cap r) \cup (q \cap r)$
12. $r \cap (p \cup q) \leftrightarrow (r \cap p) \cup (r \cap q)$
13. $p \leftrightarrow \sim\sim p$
14. $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$
15. $\mathrm{p} \rightarrow (\sim q \rightarrow (\sim(p \rightarrow q)))$
16. $\sim p \rightarrow (p \cup q \leftrightarrow q)$
17. $\sim p \cap \sim q \leftrightarrow \sim(p \cup q)$
18. $\sim p \cup \sim q \leftrightarrow \sim(p \cap q)$
19. $p \rightarrow \nu \cup p$
20. $(\sim \nu \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow \nu)$
21. $\sim\downarrow \nu$
22. $\downarrow p \rightarrow \downarrow(p \cup q)$
23. $\square p \cap \downarrow q \rightarrow \sim(p \rightarrow q)$.

Так как $\square p =: (p \rightarrow p) \rightarrow p$, а $p \rightarrow q =: \sim\square p \cup \square q$, то системы связок $\sim, \cap, \square$ и $\sim, \cap, \cup, \rightarrow$ функционально эквивалентны.
Правила вывода:
Rl, *Modus ponens.*
R2. Обычная подстановка: вместо *p* подставляется формула *B*.
R3. Ограниченная подстановка: вместо *v* подставляется B^0.
(В этой же работе дается аксиоматизация логики $\mathbf{B}_3^T$, которая есть расширение $\mathbf{B}_3$ посредством добавления к последней связки Слупецкого Т*p* (см. выше 3.1.1). Заметим, что в отличие от $\mathbf{Ł}_3^T$, $\mathbf{B}_3^T$ не

является функционально полной, поскольку в ней не определима импликация Лукасевича $\rightarrow$.)

Исчисление, эквивалентное **B**$_3$, построено также в *[Pirog-Rzepecka* 1973] под названием **W**. Значительно более простая аксиоматизация **B**$_3$, чем приведенная выше, принадлежит А.Т. Ишмуратову *[Ишмуратов* 1974]. Эта аксиоматизация упрощена в *[Ишмуратов* 1981], где **B**$_3$ положена в основу специальной системы временной логики.

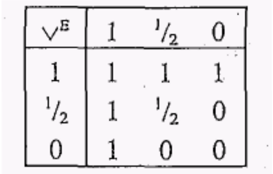
Подчеркнем, что в приведенной выше аксиоматизации **B**з верифицируются не все законы классической пропозициональной логики **C**$_2$, например, не имеет места контрапозиция $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$. Однако, имея в виду, что **B**$_3$ содержит фрагмент, изоморфный **C**$_2$, естественно было бы посредством внешних формул задать аксиоматизацию классической логики **C**$_2$. Тогда аксиоматизацию самой **B**з можно представить как расширение **C**$_2$, что и было сделано Р. Григолия и В.К. Финном в *[Finn and Grigolia* 1993]. В качестве исходных связок берутся следующие: $\cup$, $\cap$, $\sim$, J_0, $J_{1/2}$, J_1, где J_0 есть $\rceil$, $J_{1/2}$ есть $\downarrow$ и J_1 есть $\Box$. Аксиоматизация исключительно громоздкая (29 аксиомных схем плюс сокращения), но с единственным правилом вывода MP.

3.3.3. Логика Холдена H_3 и логика Эббингауза E_3

С, Холден *[Hallden* 1949] конструирует трехзначную логику **H**$_3$ (Холден обозначает её посредством **C**) с двумя выделенными значениями, в которой независимо от Д.А. Бочвара третье истинностное значение интерпретируется как "бессмысленность". Логика **H**$_3$ имеет следующие исходные связки $\sim p$, $p \cap q$ и $\sim\downarrow p$.(Связка $\sim\downarrow$ в дальнейшем будет встречаться, поэтому обозначим ее посредством $\triangle$). Легко показать, что логика **H**$_3$ содержится в **B**$_3$, но не наоборот, т.е. расширение **H**$_3$ одним из модальных операторов $\Box p$ или $\Diamond p$ превращает **H**$_3$ в **B**$_3$. Отсюда следует, что логика **H**$_3$ вообще не имеет нормальных изоморфов **C**$_2$. К этому факту мы вернемся в разделе (7.5.3),

К, Сегерберг *[Segerberg* 1965], исходя из работы С. Холдена, конструирует несколько трехзначных систем логики бессмысленности, одной из которых является не что иное, как трехзначная логика Бочвара **B**з с теми же самыми исходными связками, но с двумя выделенными значениями,

Представляет интерес расширение **B**з, которое представлено в *[Ebbmghaus* 1969] (см, также *[Firm and Grigolia* 1993]). Здесь к **B**$_3$ добавляется дизъюнкция $\vee^{E}$:



$\vee^{E}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	1	0	0

Полученная система обозначается как **E**$_3$. Обратим внимание, что **E**$_3$ может быть представлена как расширение **B**$_3$ посредством добавления импликации Собочиньского $\supset_S$ (см. ниже раздел 3.5.2.1), поскольку $p \vee^{E} q =: \sim p \supset_S q$ и $p \supset_S q =: \sim p \vee^{E} q$.

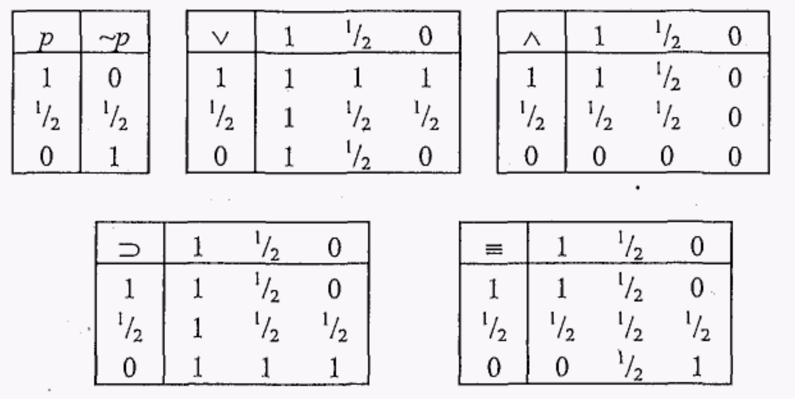
3.4. Трехзначные (регулярные) логики Клини

Здесь мы рассмотрим класс *регулярных* трехзначных логик Клини, самой известной из которых является сильная логика Клини **K**$_3$. Слабая логика Клини $\mathbf{K}_3^{W}$ есть не что иное, как логика с внутренними связками Бочвара. Открыта промежуточная (регулярная) логика Клини $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ (логика **Lisp).** Ее свойства оказались весьма необычными, а именно дизъюнкция и конъюнкция *некоммутативны.* Особый интерес здесь представляет *промежуточная р-логика.*

3.4.1. Сильная логика Клини K_3

Разработка теории рекурсивных функций приводит к идее не всюду определенной (частичной) функции. В *[Шeene* 1938] С. Клини конструирует трехзначную логику **K**$_3$ (см. также *[Клини* 1957]), в которой введение логических связок должно моделировать рекурсивные функции, вычисление значения которых никогда не заканчивается. Отсюда третье истинностное значение может интерпретироваться как «не определено», «неизвестно», «неразрешимо». Таким образом, третье истинностное значение вводится не по онтологическим соображениям, как у Лукасевича, а скорее по эпистемологическим.

Опять же возникает проблема определения трехзначных логических связок. С. Клини приходит к выводу, что эти связки должны определяться *регулярными* таблицами в следующем смысле: *«данный столбец (строка) содержит 1 в строке (столбце) для $^1/_2$ только при условии, что этот столбец, (строка) состоит целиком из 1; аналогично для 0».* В итоге С. Клини дает следующее табличное определение логических связок:



p	$\sim p$
1	0
$^1/_2$	$^1/_2$
0	1

$\vee$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	$^1/_2$	0

$\wedge$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	0
0	0	0	0

$\supset$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	1	1

$\equiv$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
0	0	$^1/_2$	1

Содержательная интерпретация логических связок, например, дизъюнкции $p \vee q$, выглядит следующим образом: дизъюнкция: $p \vee q$ истинна, если *p* истинно (и здесь ничего не надо говорить о q) или *q* истинно (и здесь ничего не надо говорить о p), ложна, если *p* и *q* оба ложны; определена только в этих случаях (а поэтому не определена в остальных). В результате $p \vee q$ в **K**$_3$ имеет ту же самую истинностную таблицу, что и $p \vee q$ в **Ł**$_3$. Совпадают истинностные таблицы также для $p \wedge q$ и $\sim p$, т.е **K**$_3$ является фрагментом **Ł**$_3$.

Итак, приведенные таблицы позволяют установить принципиальную неравноправность значения $^1/_2$ со значениями 1 и 0, поскольку, в отличие от 1 и 0, 1/2 не несет никакой информации или, по-другому, выражает факт отсутствия информации.

Только что рассмотренные регулярные истинностные таблицы **C** Клини называет *сильными* (strong), и при этом они определяются как самые сильные из возможных регулярных расширений классических двузначных таблиц, т.е. они регулярны и имеют 1 или 0 в каждом месте, где какое-либо регулярное расширение 2-значных таблиц может содержать 1 или 0 (что именно: 1 или 0, — это определено однозначно). Соответствующие связки названы *сильными.*

Примером нерегулярной истинностной таблицы как раз является таблица для импликации Лукасевича $\rightarrow$. Отсюда видно, что принципиальное отличие **K**$_3$ от **Ł**$_3$ состоит только в том, что в **K**$_3$ $^1/_2 \supset {}^1/_2 = {}^1/_2$, а в **Ł**$_3$ $^1/_2 \rightarrow {}^1/_2 = 1$. Но тогда импликацию в **K**$_3$ можно определить, как это делается в **C**$_2$, т.е. $p \supset q =: \sim p \vee q$, и это позволяет развивать трехзначную логику **K**$_3$ не включая $\supset$ в качестве исходной связки. Однако в силу таких свойств импликации различие между **K**з и **Ł**$_3$ оказалось настолько существенным, что в **K**$_3$ при выделенном значении 1 вообще не существует тавтологий. Это следует из того простого факта, что все связки **K**$_3$ сохраняют значение 1/2, когда только оно приписывается аргументам.

Совсем другая ситуация возникает, если рассмотреть логику с исходными связками как в **K**$_3$, но с двумя выделенными значениями: 1 и 1/2. Подобную логику обозначим посредством **K**$_3^2$. В *[Rescher* 1969:] утверждается, что класс тавтологий **K**$_3^2$ совпадает с классом тавтологий классической логики **C**$_2$ (правило MP здесь не сохраняет тавтологию). Специально логике **K**$_3$ и доказательству этого утверждения посвящена статья *[Martin* 1975] (см. также *[Epstein R.L.* 1990]).

Р. Эпштейн это делает следующим образом. Покажем, что формула A не является классической тавтологией, т.т.т., когда найдется такая оценка *e* в **K**$_3$, что *e(A)* = 0.

Каждая оценка *v* в **C**$_2$ есть оценка в **K**з, и если формула принимает значение 0 при некоторой оценке в **C**$_2$, то она принимает значение 0 в **K**$_3$ при этой же оценке. Теперь пусть найдется оценка *e* в **K**$_3$ такая, что *e(A)* = 0. Определим оценку *e* в **C**$_2$ следующим образом: $e'(p) = 1$, т.т.т., когда $e(p) \in \{1, {}^1/_2\}$ и $e'(p) = 0$, т.т.т., когда *e(p)* = 0. Легко доказать индукцией по построению формулы, что, если *e(B)* = 0, то *e'(B)* = 0, и если $e(B) \neq 0$, то $e'(B) \neq 0$. Таким образом, *e(A)* = 0 и неверно, что *A* общезначима в **C**$_2$. Эпштейн также отмечает, что внутренний фрагмент трехзначной логики Бочвара обладает аналогичными свойствами,

Долгое время считалось, по аналогии с **K**$_3^2$, что множество тавтологий трехзначной логики с исходными связками как в **Ł**$_3$, но с двумя выделенными значениями 1 и 1/2 (обозначим подобную логику посредством **Ł**$_3^2$), также совпадает с **C**$_2$. Однако А. Тюркетт (см. *[Rescher* 1969]) нашел контрпример:

$$\sim(p \rightarrow \sim p) \vee \sim(\sim p \rightarrow p)$$

(Н.А. Знаменская , как мы уже говорили нашла другой контрпример:

$$\sim((p \vee \sim p) \rightarrow (p \wedge \sim p))$$

и обратила внимание на то, что если формула *A* есть классическая тавтология, а формула *B* есть классическое противоречие, и *A* и *B* не содержат вхождений импликации, то формула $\sim(A \rightarrow B)$ принимает значение 0 в **Ł**$_3^2$, когда пропозициональные переменные принимают значение $^1/_2$. Таким образом, определен целый класс соответствующих формул.)

Эта формула является классической тавтологией, но в **Ł**$_3^2$, когда *p* принимает значение $^1/_2$, вся формула принимает значение 0.

Так как в **K**$_3$ нет тавтологий, то логику **K**$_3$ удобно представлять в терминах отношения следования. Естественное обобщение классического определения логического следования (см. 1.4) выглядит следующим образом: *высказывание B логически следует из выска-*

зывания A т.т.т., когда всегда, если A принимает выделенное значение, то B также принимает выделенное значение. Пусть D есть множество выделенных значений. Таким образом, данное логическое следование сохраняет D и обозначается посредством $\models_D$. В литературе встречается также другое определение логического следования, названного *компаративным* (comparative) и которое обозначается посредством $\models_C$: *высказывание B логически следует из высказывания A т.т.т., когда истинностное значение высказывания B не ниже, чем. значение высказывания A.* Аксиоматизация $\models_C$ для $\mathbf{K}_3$ в виде исчисления секвенций дана в *[Cleave* 1974], аксиоматизация $\models_D$ для $\mathbf{K}_3$ дана в *[Urquhart* 1986]. Как отмечается в *[Bendova* 2005], оба отношения логического следования равнообъемны для трехзначной логики Рейтинга $\mathbf{G}_3$, поскольку $\mathbf{G}_3$ имеет классическую теорему дедукции. Развитие этой темы, а именно условия эквивалентности $\models_D$ и $\models_C$ для четырехзначной логики Белнапа $\mathbf{B}_4$ см. ниже в разделе 5.4.2.

3.4.2. Слабая логика Клини $\mathbf{K}_3^w$

Другим примером регулярных таблиц (как самых слабых) являются истинностные таблицы, которые получаются из классических двузначных таблиц путем заполнения символом ${}^1/_2$ строки и столбца, озаглавленных символом ${}^1/_2$. Эти таблицы есть в точности истинностные таблицы для внутренних связок логики Бочвара $\mathbf{B}_3$ (см. 3.3). Эти связки Клини называет *слабыми* (weak) связками. Трехзначную логику со слабыми логическими связками обозначим посредством $\mathbf{K}_3^w$.

Легко видеть, что в $\mathbf{K}_3^w$, как и в $\mathbf{K}_3$, нет тавтологий при выделенном значении 1, а при двух выделенных значениях $\mathbf{K}_3^w$ (как и $\mathbf{K}_3$) является обобщенным изоморфом $\mathbf{C}_2$.

Казалось бы, ничего интересного: сильная логика Клини $\mathbf{K}_3$ есть фрагмент трехзначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$, а слабая логика Клини $\mathbf{K}_3^w$ есть фрагмент трехзначной логики Бочвара $\mathbf{B}_3$. Но впервые логики $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_3^w$ рассмотрены в их самостоятельном значении, особенно первая.

Ситуация резко меняется, если мы заинтересуемся вопросом о существовании других регулярных трехзначных логик Клини. Впервые на такую возможность указал М. Фитинг *[Fitting* 1992].

3.4.3. Регулярность и монотонность

В соответствии с данным Клини описанием регулярности можно дать следующее определение этого свойства. Произвольная пропозициональная связка (обозначим ее •) является *регулярной,* если для всякого α из множества истинностных значений $\{1,\ {}^1/_2\ ,0\}$ выполняются следующие условия:

$$({}^1/_2 \bullet \alpha) = 1 \Rightarrow (1 \bullet \alpha) = (0 \bullet \alpha) = 1;$$
$$({}^1/_2 \bullet \alpha) = 0 \Rightarrow (1 \bullet \alpha) = (0 \bullet \alpha) = 0;$$
$$(\alpha \bullet {}^1/_2) = 1 \Rightarrow (\alpha \bullet 1) = (\alpha \bullet 0) = 1;$$
$$(\alpha \bullet {}^1/_2) = 0 \Rightarrow (\alpha \bullet 1) = (\alpha \bullet 0) = 0.$$

Сильные и слабые связки Клини являются регулярными в этом смысле. Соответственно многозначная логика регулярна, если все ее связки регулярны в смысле Клини.

В литературе получило широкое освещение такое свойство трехзначных логик, как монотонность. Так, свойство монотонности сильных трехзначных связок логики Клини $\mathbf{K}_3$ использовано Крипке *[Кпрке* 1975] при построении новой теории истинности. Строгое математическое определение *монотонности* выглядит следующим образом:

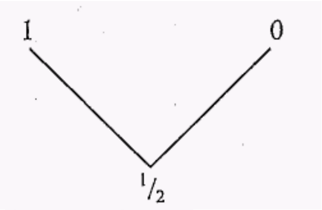
Пусть F — функция, $\{1,\ 0,\ {}^1/_2\}^n \rightarrow \{1,\ 0,\ {}^1/_2\}$, где n - натуральное число и $\{1,\ 0,\ {}^1/_2\}^n$ — n-я декартова степень множества {1,0,1/2}.

Функция F называется трехзначной *монотонной* относительно данного частичного порядка ≤ на множестве $\{1,\ 0,\ {}^1/_2\}^n$ т.т.т., когда для каждого $d_i,\ d_j$ из $\{1,\ 0,\ {}^1/_2\}^n$ верно следующее: если $d_i \leq d_j$ то $F(d_i) \leq F(d_j)$.

Логика называется трехзначной монотонной относительно данного частичного порядка на $\{1,\ 0,\ {}^1/_2\}$, т.т.т., когда все ее функции являются монотонными относительно данного частичного порядка. Отношение ≤ на упорядоченных двойках $d_i,\ d_j$ устанавливается с учетом заданного порядка между тремя значениями $\{1,\ 0,\ {}^1/_2\}$.

Например, принято считать, что в логике Лукасевича между тремя истинностными значениями существует следующее отношение порядка: $0 \leq {}^1/_2 \leq 1$.

Иногда предполагается, вслед за Клини, что третье значение 1/2 принципиально неравноправно с двумя классическими 1 и 0, поскольку оно не столько несет какую-либо информацию, сколько свидетельствует о ее отсутствии. Поэтому постулируется следующее отношение порядка на множестве $\{1,\ 0,\ {}^1/_2\}$ (см. *[Fitting* 1992]):



То есть ${}^1/_2 \le 1$ и ${}^1/_2 \le 0$ и при этом 1 и 0 несравнимы. Мы будем придерживаться, вслед за Фиттингом, следующего отношения порядка $(*)$:

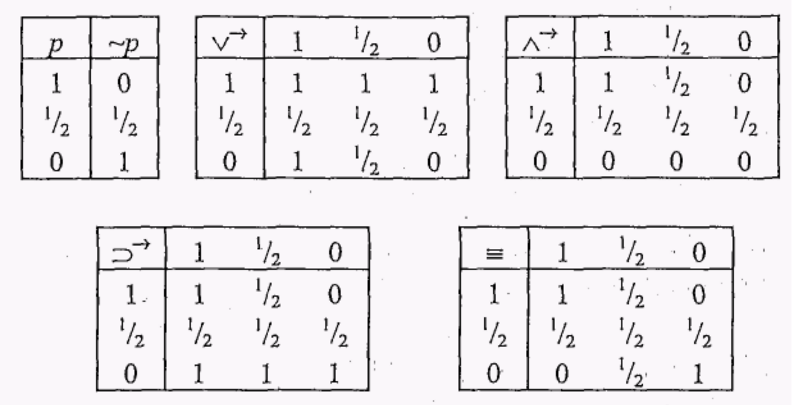
${}^1/_2 \le 1,\ {}^1/_2 \le 0,\ 1 \le 1,\ 0 \le 0,\ {}^1/_2 \le {}^1/_2.$

Этот порядок выбран с целью решения задачи Фиттинга *[Fitting*- 1994] о нахождении всех монотонных регулярных нормальных логик, промежуточных между сильной и слабой логиками Клини.
В *[Комендантская* 2009] доказано, что при так заданном порядке класс монотонных трехзначных логик совпадает с классом регулярных трехзначных логик и таких логик всего 4: $\mathbf{K}_3,\ \mathbf{K}_3^w,\ \mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$.

3.4.4. Промежуточная логика Клини $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ (логика Lisp)

В *[Fitting* 1994] описывается регулярная логика, которая является промежуточной между **Кз** и $\mathbf{K}_3^w$.
Такая промежуточная логика была названа **Lisp.** М. Фиттинг следующим образом описывает логику **Lisp:** допустим, нам необходимо оценить выражение $p \wedge q$, это необходимо делать последовательно, скажем слева направо, так что предложение *p* мы оцениваем первым. Если *p* приписано значение «ложь», то работа по приписыванию значений останавливается и всему выражению приписывается значение «ложь». Если *p* интерпретируется как «истина», то далее проводится приписывание значения *q,* и значение *q* становится значением всего выражения $p \wedge q$. Если *p* «не определено» (1/2), то всему выражению приписывается значение 1/2, вне зависимости от того, какого значение *q.* Это ассиметричная или позиционная логика. Например, если *p* — «ложно», а *q* — «не определено», то выражение $p \wedge q$ будет ложным, а $q \wedge p$ примет значение 1/2 т.е. логическая связка $\wedge$ (а также $\vee$) некоммутативна.

С. Клини в своей книге *[Клини* 1973] приводит лингвистический пример некоммутативной конъюнкции: «Хотя в исчислении высказываний $A\ \&\ B$ равносильно $B\ \&\ A$, фразы "У Джейн родился ребенок и она вышла замуж" и "Джейн вышла замуж и у нее родился ребенок" будут пониматься знакомыми Джейн по-разному». Далее Клини отмечает, что подобные затруднения в трактовке классической конъюнкции возникают при анализе причинно-следственных или временных высказываний.
Связки логики **Lisp,** условимся обозначать ее как $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, могут быть представлены следующим образом (см. *\Lvkyanowskctya* 2003]):



p	$\sim p$
1	0
${}^1/_2$	${}^1/_2$
0	1

$\vee^{\rightarrow}$	1	${}^1/_2$	0
1	1	1	1
${}^1/_2$	${}^1/_2$	${}^1/_2$	${}^1/_2$
0	1	${}^1/_2$	0

$\wedge^{\rightarrow}$	1	${}^1/_2$	0
1	1	${}^1/_2$	0
${}^1/_2$	${}^1/_2$	${}^1/_2$	${}^1/_2$
0	0	0	0

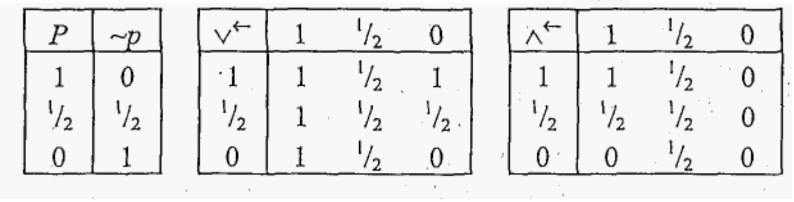
$\supset^{\rightarrow}$	1	${}^1/_2$	0
1	1	${}^1/_2$	0
${}^1/_2$	${}^1/_2$	${}^1/_2$	${}^1/_2$
0	1	1	1

$\equiv$	1	${}^1/_2$	0
1	1	${}^1/_2$	0
${}^1/_2$	${}^1/_2$	${}^1/_2$	${}^1/_2$
0	0	${}^1/_2$	1

Эта логика является регулярной в смысле Клини и монотонной в смысле $(*)$.

3.4.4.1. Промежуточная логика Клини, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ (логика Twin Lisp)

Оказывается, имеется еще одна регулярная логика Клини, которая в *[Lukyanowskaya* 2003] обозначается посредством $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$:



P	$\sim p$
1	0
${}^1/_2$	${}^1/_2$
0	1

$\vee^{\leftarrow}$	1	${}^1/_2$	0
1	1	${}^1/_2$	1
${}^1/_2$	1	${}^1/_2$	${}^1/_2$
0	1	${}^1/_2$	0

$\wedge^{\leftarrow}$	1	${}^1/_2$	0
1	1	${}^1/_2$	0
${}^1/_2$	${}^1/_2$	${}^1/_2$	0
0	0	${}^1/_2$	0

$\supset^{\leftarrow}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	$^1/_2$	1

$\equiv$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
0	0	$^1/_2$	1

Эта логика также является регулярной и монотонной в смысле $(*)$.

3.4.5. Взаимоотношения между регулярными логиками Клини

В общем случае логика Z может быть названа *промежуточной* между логиками X и Y, причем $X \subseteq Y$, если и только если $Z \subseteq Y$ и $X \subseteq Z$, где отношение *включения* $\subseteq$ имеет место, когда все связки одной системы могут быть определены через связки другой, т.е. одна логика фунционально вложима в другую. Если имеет место также обратное, то получаем, как уже говорилось, функциональную эквивалентность.
Ранее мы это часто использовали, например, связки логики $\mathbf{K}_3$ могут быть определены через связки логики $\mathbf{Ł}_3$, т.е. $\mathbf{K}_3 \subseteq \mathbf{Ł}_3$. Точно так же $\mathbf{G}_3 \subseteq \mathbf{Ł}_3$ и $\mathbf{B}_3 \subseteq \mathbf{Ł}_3$. В свою очередь, $\mathbf{G}_3 \nsubseteq \mathbf{B}_3$ и $\mathbf{B}_3 \nsubseteq \mathbf{G}_3$, а $\mathbf{S}_3$ функционально эквивалентна $\mathbf{Ł}_3$ (см. раздел 3.1.2).
Перейдем теперь к рассмотрению отношений между регулярными трехзначными логиками.
Первый результат в этом направлении был получен В.К. Финном *[Финн* 1974a: 425], который определил слабые связки Клини через сильные:

$$p \cap q =: (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q).$$

Двойственным образом определяется $p \bigcup q$:

$$p \cup q =: (p \vee q) \wedge ((p \vee \sim p) \wedge (q \wedge \sim q).$$

То есть было показано, что $\mathbf{K}_3^w \subseteq \mathbf{K}_3$.
В *[Комендантская* 2009] показано, что между всеми четырьмя логиками $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^w$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ существует отношение включения, и таким образом доказано высказанное Фиттингом предположение о том, что все регулярные связки, отличные от $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_3^w$, являются промежуточными между $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_3^w$.
Для доказательства надо определить связки **Lisp** через сильные связки и слабые связки через связки **Lisp**.
Выразимости могут быть осуществлены следующим образом:

$$p \cup q =: (p \vee^{\rightarrow} q) \wedge^{\rightarrow} (q \vee^{\rightarrow} p)),$$

$$p \vee^{\rightarrow} q =: \sim(p \vee \sim q) \vee p.$$

Итак, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \subseteq \mathbf{K}_3$, а $\mathbf{K}_3^w \subseteq \mathbf{K}_3^{\rightarrow}$.
Обратное же не имеет места. То, что нельзя посредством слабых связок определить сильные связки, то есть $\mathbf{K}_3 \not\subset \mathbf{K}_3^w$ — очевидно. Остается показать, что $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \not\subset \mathbf{K}_3^w$, $\mathbf{K}_3 \not\subset \mathbf{K}_3^{\rightarrow}$. Последнее следует из работы Фиттинга *[Fitting* 1994]. Однако строгое доказательство данного факта является открытой проблемой.
Возникает вопрос о взаимоотношении промежуточных регулярных логик $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$. Оказывается, они функционально эквивалентны:

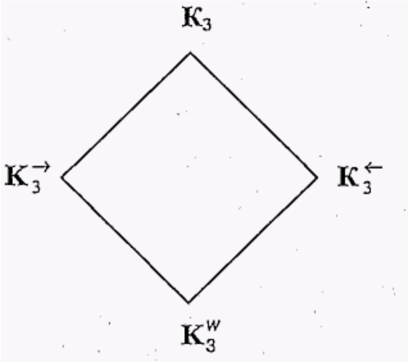
$$p \vee^{\rightarrow} q =: q \vee^{\leftarrow} p$$

$$p \vee^{\leftarrow} q =: q \vee^{\rightarrow} p$$

$$p \wedge^{\rightarrow} q =: q \wedge^{\leftarrow} p$$

$$p \wedge^{\leftarrow} q =: q \wedge^{\rightarrow} p.$$

Таким образом, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \subseteq \mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow} \subseteq \mathbf{K}_3^{\rightarrow}$.
Поскольку $\subseteq$ является отношением порядка, то взаимоотношение между трехзначными регулярными логиками Клини можно представить в виде четырехэлементной решетки (см. *[Комендатская* 2009]):



Заметим, что в *[Томова* 2009c] представлен подкласс регулярных четырехзначных логик Клини.
В конце этой главы мы остановимся на классификации импликативных расширений регулярных логик Клини *[Томова* 2010], а сейчас суммируем свойства таких логик, которые получаются из регулярных логик Клини посредством замены инволюции ~ на трехзначное отрицание Рейтинга $\urcorner$ и на дуальное ему отрицание $\ulcorner$.

3.4.6. Р-логики

По аналогии с понятием *p*-алгебры и дважды *p*-алгебры (см, ниже раздел 4.4.2) введем понятие *p*-логики и дважды *p*-логики *[Карпенко* 2008]. Логику со связками $\{\vee,\ \wedge,\ \rceil\}$ назовём *р-логикой,* логику со связками $\{\vee,\ \wedge,\ \lceil\}$. назовём *дуальной р-логикой,* а логику со связками $\{\vee,\ \wedge,\ \rceil, \lceil\}$ назовём *дважды р-логикой.*

Оказывается, посредством трехзначных связок $\rceil, \lceil,\ \vee$ и $\wedge$ можно определить отрицание Лукасевича *[Cignoli and Monteiro* 1965]:

$$\sim p =:\ \rceil p \vee (p \wedge \lceil p)$$

Более того, посредством этих связок можно определить также импликацию Рейтинга *[Varlet* 1969]:

$$p \Rightarrow q =: (\rceil p \vee \rceil\rceil q) \wedge (\lceil p \vee q).$$

Поскольку

$p \rightarrow q =: (p \Rightarrow q) \vee \sim p$ *[Cignoli* 1982],

то получаем

$$p \rightarrow q =: ((\rceil p \vee \rceil\rceil q) \wedge (\lceil p \vee q)) \vee (\rceil p \vee (p \wedge \lceil p))$$

(Имеется упрощение (Н.А. Знаменская):

$p \rightarrow q =: (\rceil p \vee q) \vee \lceil (p \vee \rceil q) \vee (p \wedge \lceil p).$)

Итак, исходные связки ~ и → трехзначной логики Лукасевича $Ł_3$ выразимы посредством связок $\vee,\ \wedge,\ \rceil$ и $\lceil$. Поскольку посредством связок Лукасевича →и ~ выразимы связки $\vee,\ \wedge,\ \rceil$ и $\lceil$, то эти логики функционально эквивалентны. Таким образом, $Ł_3$ есть трехзначная дважды *р-логика.*

Перейдем к *промежуточным р-логикам.* Сначала покажем, что системы трехзначных связок промежуточных *p*-логик $\{\vee^{\to},\ \wedge^{\to},\ \rceil\}$ и $\{\vee^{\to},\ \wedge^{\to},\ \lceil\}$ функционально эквивалентны. Это можно сделать так *[Томова* 2009]:

$$\lceil p =:\ \rceil(\rceil((p \wedge^{\to} \rceil p) \vee^{\to} \rceil p)$$

$$\rceil p =:\ \lceil(\lceil p \wedge^{\to} \lceil p) \vee^{\to} \lceil p).$$

Оказалось, что посредством системы связок $\{\vee^{\to},\ \wedge^{\to},\ \rceil\}$ можно представить систему связок $\{\rightarrow,\ \sim\}$, т.е. *промежуточная р-логика* есть трехзначная логика Лукасевича $Ł_3$ (!) Это можно сделать следующим образом (см. *[Томова* 2009]),:

$$\sim p =: ((p \wedge^{\to} \rceil p) \vee^{\to} \rceil p)$$

$$p \rightarrow q =: (\rceil(\sim p) \wedge^{\to} (p \wedge^{\to} q)) \vee^{\to} (\sim(\rceil q \vee^{\to} \sim(p \vee^{\to} q))$$

(Имеется упрощение (Н.А. Знаменская):

$(\rceil\rceil((\rceil q \vee^{\to} p) \wedge^{\to} (\rceil p \wedge^{\to} p)) \vee^{\to} (p \wedge^{\to} \rceil p)) \vee^{\to} (\rceil p \vee^{\to} q).$)

Отсюда, например, следует, что логики со связками $\{\vee,\ \wedge,\ \rceil, \sim\}$ и $\{\vee^{\to},\ \wedge^{\to},\ \rceil\}$ функционально эквивалентны.

Но оказалось, что трехзначная *дважды слабая р-логика* со связками $\{\cup,\ \cap,\ \rceil,\ \lceil\}$ есть *слабая р-логика,* а последняя есть трехзначная логика Бочвара:

$$\lceil p =:\ \rceil(\rceil(p \cap \rceil p) \cup \rceil p)$$

$$\rceil p =: \lceil(\lceil(p \cap \lceil p) \cup \lceil p)$$

$$\sim p =: ((p \cap \rceil p) \cup \rceil p)$$

$$\Box p =:\ \rceil \sim p.$$

Об алгебраической характеризации указанных трехзначных *p*-логик см. ниже в разделе 4.5.2.

3.5. Трехзначные паранепротиворечивые логики

Еще одним направлением в области трехзначных логик стало конструирование *паранепротиворечивой* логики **PL**. Неформально говоря, логика называется паранепротиворечивой, если «из противоречия не следует все, что угодно», т.е из *A* и *~A* в общем случае не следует *B.* Поскольку противоречие *A* и *~A* полностью «разрушает» теорию, построенную на классической логике, делая ее тривиальной (т.е. такой, в которой выводимо любое утверждение), то естественно возникает желание рассмотреть такие модификации логики, в которых принцип «из противоречия следует все» не действует и на основе которых могут быть построены противоречивые, но не тривиальные теории.

Общая проблема в таком виде была поставлена и частично решена С. Яськовским *[Jaskowski* 1948]. В этой работе формулируется главный формальный критерий, которому должна удовлетворять паранепротиворечивая логика **PL**: закон Дунса Скота ("принцип сверхполноты" у Яськовского)

$$p \supset (\sim p \supset q)$$

не имеет места в **PL**.

В упомянутой выше работе Яськовский приводит пример трехзначной **PL**, но логические связки в ней такие, что имеет место следующий закон, известный уже Лукасевичу:

$p \supset (\sim p \supset (\sim\sim p \supset q)).$

На этом основании Яськовский отвергает трехзначную **PL**. Назовем приведенную выше формулу формулой Лукасевича.

Тем не менее, трехзначные паранепротиворечивые логики привлекли к себе большое внимание. Содержательно высказывания трехзначной паранепротиворечивой логики, имеющие промежуточное истинностное значение, можно проинтерпретировать как высказывания, термины которых имеют такой денотат, что смысл этих высказываний противоречив, и поэтому они становятся и истинными и ложными одновременно, например, «это утверждение ложно» или «расселово множество является элементом самого себя». Отсюда промежуточное истинностное значение в различных трехзначных паранепротиворечивых логиках интерпретируется как *«антиномично», «парадоксально», «противоречиво».* В силу этого появляются семантические средства, позволяющие анализировать парадоксы типа «Лжец».

Еще из многочисленных применений царанепротиворечивой логики выделим то, которое связано с обработкой противоречивой информации компьютером. В связи с этим см. в разделе (5.4.4) конструирование Н. Белнапом, четырехзначной логики, обозначившей целое направление в современной логике. К паранепротиворечивым логикам мы вернемся в разделе 8.6.

3.5.1. Логика Приста LP

По существу первой *трехзначной* паранепротиворечивой логикой является логика $\mathbf{K}_3^2$ (см. выше раздел 2.4.1), предложенная в качестве паранепротиворечивой Ф. Асеньо *[Asenjo* 1953] и обстоятельно развитая Г. Пристом *[Priest* 1979; 1984], который обозначает ее посредством **LP**. Как мы уже говорили, множество тавтологий $\mathbf{K}_3^2$ совпадает с множеством тавтологий классической логики **C**$_2$. Это значит, что закон Дунса Скота имеет место в **LP**, но правило МР в **LP** не сохраняет тавтологию и поэтому, имея *A* и *~A,* из закона Дунса Скота по правилу МР не получим *B.* В итоге, при стандартном определении отношения логического следования $\models_D$ (см. выше 3.4.1) следующие утверждения не верны:

1. $(A \wedge \sim A) \models B.$ 2. $A, \sim A \vee B \models B.$

3. $A \supset B, B \supset C \models A \supset C.$ 4. $\mathrm{A} \supset B, A \models B.$

5. Если *A* и *B* не содержат общих пропозициональных переменных и если *B* принимает значение 0, то. $A \not\models B.$

Таким образом, логика **LP** отлична от логики **C**$_2$, несмотря на то что множества тавтологий в этих логиках совпадают.

Заметим, что логика **LP** положена Пристом в основание паранепротиворечивой теории множеств. Алгебраическое изучение **LP** и ее расширения см. в *[Рупко* 1995; 2000].

3.5.2. Логика PCcont

Однако наиболее известной трехзначной паранепротиворечивой логикой, которая была построена в разное время и в разных странах независимым образом, является следующая. Берется $\mathbf{K}_3^2$, но в определении связки импликации имеется существенное изменение: вместо $^1/_2 \supset 0 = {}^1/_2$ берется $^1/_2 \supset 0 = 0.$ Такую импликацию обозначим посредством $p \supset_J q.$

(Обратим внимание, что точно так, как импликация Клини $p \supset q$ отличается от импликации Лукасевича $p \to q$ только тем, что $^1/_2 \supset {}^1/_2 = {}^1/_2,$ то и импликация Яськовского $p \supset_J q$ отличается от импликации Гейтинга $p \Rightarrow q$ только тем, что $^1/_2 \supset {}^1/_2 = {}^1/_2.$ Более того, $p \supset_J q$ стандартным образом определима в *p*-логике:

$p \supset_J q =: \rceil p \vee q.$)

Она появляется в *[D'Ottavicmo and da Costa* 1970] и используется в *[da Costa* 1974], хотя впервые появилась в *[Jaskowski* 1948]. В *[Asenjo and Tamburino* 1975], *[Batens* 1980] (под названием **PI**^{s}), *[Розоноэр,* 1983; 1983], *[Rozonoer* 1989] (под названием **PCont),** *[Avron* 1986] (под названием $\mathbf{RM}_3^{\supset}$) эта логика была переоткрыта независимо друг от друга и представлена её аксиоматизация. Систематически она изучена Л.И. Розоноэром, который исходил из некоторых идей Д.А. Бочвара. - Им же предложен предикатный вариант **PCont** (см. также *[Розоноэр* 1993]).

PCont содержит весь позитивный фрагмент классической логики **C**$_{2,}$ плюс следующие классические формулы с отрицанием: $p \vee \sim p, \sim\sim p \approx p, \sim(p \supset_J q) \approx (p \wedge \sim q)$ и законы Де Моргана

$\sim(x \vee y) \approx \sim x \wedge \sim y$

$\sim(x \wedge y) \approx \sim x \vee \sim y,$

где $p \approx q =: (p \supset_J q) \wedge (q \supset_J p).$

(Этот фрагмент состоитиз первых восьми формул в аксиоматизации **C**$_2$ (см. раздел 1.4), плюс закон Пирса $((p \supset q) \supset p) \supset p.$)

Но не все классические тавтологии с отрицанием имеют место в **PCont,** например, закон Дунса Скота,   добавление которого к **PCont** превращает последнюю в **C**$_2$. Изящное секвенциальное исчисление для **PCont** построено в *[Попов* 1989].

Отметим также, что исчисление **PCont** является *максимальным* в том смысле, что между **PCont** и **C**$_2$ нет промежуточного исчисления *[Batens* 1980]. Другими словами, **C**$_2$ является единственным собственным непротиворечивым расширением **PCont.**

3.5.2.1. Логика PCont как RM3

В русле борьбы с парадоксами материальной импликации, например такими, как закон утверждения консеквента $p \supset (q \supset p),$ Б. Собочиньским *[Sobocinsld* 1952] была предложена трехзначная логика **S**$_3$ с двумя выделенными значениями. Отрицание здесь есть не что иное, как отрицание в **PCont,** а импликация имеет то отличие от **PCont,** что вместо $1 \supset_J {}^1\!/_2 = {}^1\!/_2$ берется $1 \supset {}^1\!/_2 = 0.$ Такую импликацию обозначим посредством $p \supset_S q.$ В силе ее важности для классификации имшщкативяых расширений трехзначных регулярных логик Клини приведем ее табличное определение:

$\supset_S$	1	$^1\!/_2$	0
1	1	0	0
$^1\!/_2$	1	$^1\!/_2$	0
0	1	1	1

Дизъюнкция и конъюнкция в логике Собочиньского не являются *max* и *min* соответственно (как в **К**з), и определимы через отрицание и импликацию. Логическая матрица со связками $\sim, \rightarrow_S$ и с дизъюнкцией и конъюнкцией как *max* и *min* появляется в *[Anderson and Belnap* 1975], где. матрица для нее обозначается посредством M_3. Таким образом, связки, определяемые в M$_3$, есть в точности связки трехзначной логики Клини **К**$_3$, расширенной связкой $\supset_S$.

В *[Anderson and Belnap* 1975], где подробно исследуется логика следования **E**, релевантная логика **R**, и система **RM** (об этих логиках см. ниже в разделе 8.5), вводится логика **RM3**, аксиоматика которой есть расширение логики следования **E**. Здесь показано, что связки **RM3** есть в точности связки из M_3, т.е. матрица M$_3$ является характеристической для **RM3.** В *[Brady* 1982] дана аксиоматизация **RM3,** как расширение релевантной логики **R** (см. ниже раздел 8.5.3). Наконец, А. Аврон *[Avron* 1986] определяет в **RM** новую связку $\supset$:

$p \supset q =: q \vee (p \rightarrow q).$

Теперь в языке $\sim, \supset, \vee, \wedge$ формулируется система $\mathbf{RM}^{\supset}$, которая эквивалентна **RM**. Добавление к $\mathbf{RM}^{\supset}$ аксиомы

$\sim(p \supset q) \supset p$

приводит к системе $\mathbf{RM}_3^{\supset}$, которая есть не что иное, как **PCont.** В этой работе, в предисловии, А. Аврон указывает, что эта система функционально эквивалентна **RM3.** Однако только в *[Avron* 1991] мы находим доказательство эквивалентности:

$p \supset_J q =: q \vee (p \supset_S q)$

$p \supset_S q =: (p \supset_J q) \wedge (\sim q \supset_J \sim p)$

(Оказывается $p \supset_S q$ можно определить только посредством связок $\sim$ и $\supset_J$: $p \supset_S q =: \sim(p \supset_J q) \supset_J \sim(q \supset_J p)$ (А.А. Солощенков, 2009 г.).)

Здесь же приводится секвенциальное исчисление для **RM3.**

Обратим внимание на то, что в основе обеих логик **PCont** и **RM3** лежит сильная регулярная логика Клини **К**$_3$ с разными связками импликации, но которые приводят к одной и той же логике по функциональным свойствам. Однако в качестве основания вместо **К**з можно рассмотреть логики $\mathbf{K}_3^w$ и $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$. Как раз в *[Halkowska* 1989] исследуются алгебраические свойства трехзначной логики бессмысленности **Z**, которую можно представить как расширение $\mathbf{K}_3^w$ посредством добавления дизъюнкции Эббингауза $\vee^E$. Это аналогично тому, что к $\mathbf{K}_3^w$ добавить импликацию Собочиньского $\supset_S$, (см. выше раздел 3.3.3). Заметим, что в силу определения $p \supset_S q$ А.А. Солощенковым система **Z** функционально вложима в $\mathbf{K}_3^w + p \supset_J q.$ Развитие этой темы см. в самом конце этой главы, где будет представлена оригинальная решетка импликативных расширений логики $\mathbf{K}_3^w$ (см. *[Томова* 2010]).

3.5.2.2. Решетка паралогик

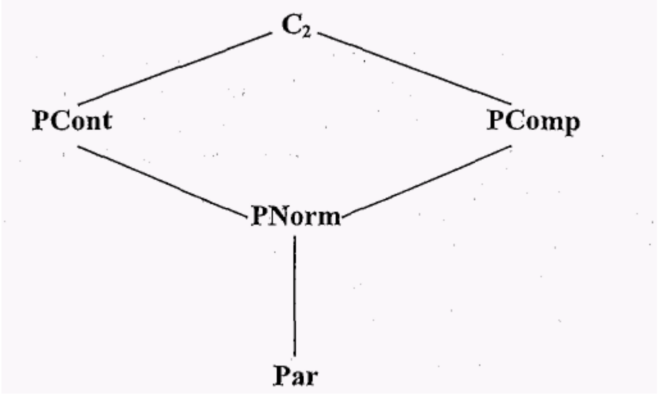
В указанной работе *[Avron* 1991] вводится важное понятие *базисной логики:* это весь позитивный фрагмент классической логики **C**$_2$, плюс законы де Моргана и аксиомы $\sim\sim p \approx p, \sim(p \supset q) \approx p \wedge \sim q.$ Впервые аксиоматизация этой логики появилась в *[Попов* 1989], где она обозначена посредством **Par** (см. ниже раздел 5.4.4.3). Если теперь добавить $p \vee \sim p$, то получим в точности аксиоматизацию **PCont,** предложенную Батенсом-Розоноэром (см. выше). Если же добавить $p \supset (\sim p \supset q)$, то получим аксиоматизацию трехзначной логики с импликацией $\rightarrow_1$ (см. выше раздел 3.1.1), которая функционально эквивалентна логике Лукасевича $Ł_3$.

(^{3} По предложению В.М. Попова эту логику обозначим посредством **PCoтp,** поскольку эта логика в данной формулировке является дуальной к **PCont** и поэтому называется *параполной,* О понятии параггольноты см. в разделе 3.5.4.1.)

Если же добавим одновременно обе эти формулы, продолжает А. Аврон, то получим аксиоматизацию классической логики **C**$_2$. Из *[Попов* 2009] следует, что **Par** является одновременно паранепротиворечивой и параполной логикой. Здесь показано, что **Par** можно расширить законом Клини $(p \wedge \neg p) \supset (q \vee \neg q)$. Эту логику обозначим посредством **PNorm,** которая также является одновременно паранепротиворечивой и параполной.

(В *[Попов* 2009] эта логика обозначается посредством **PContPComp.** В дипломной работе Н.А. Знаменской (2010 г.) показано, что характеристической матрицей для этой логики является девятизначная матрица, полученная посредством умножения матрицы для **PCont** на матрицу для **Pcoтp)**

В *[Знаменская и Попов* 2009] показано, что **PNorm = PCont ∩ PComp**. Понятно, что если добавить к **PNorm** $p \vee \sim p$, то получим **PCont,** если же добавить $p \supset (\sim p \supset q)$, то получим **PCoтp.** Все эти логики, кроме **C**$_2$, назовем *паралогиками.* Тогда решетка Попова выглядит следующим образом:



Более того, других логик между **Par** и **C**$_2$ нет *[Попов* 2009] (!)

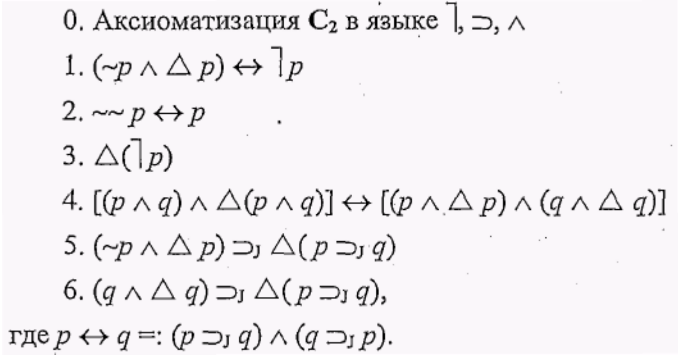
3.5.3. Логика J₃

Еще одна весьма известная паранепротиворечивая логика была предложена в *[D'Ottaviano* and *da Costa* 1970] со следующими связками: $\vee$, $\sim$ и $\Diamond$ и обозначена как **J**$_3$. Как уже известно, логика с такими связками функционально эквивалентна логике Лукасевича $Ł_3$, т.е. в ней выразима импликация Лукасевича → (см.3.1.2). Но **J**$_3$, в отличие от $Ł_3$, берется с двумя выделенными значениями. Подобная логика была нами обозначена как $Ł_3^2$ (см. 3.4.1). Поэтому, например, в **J**$_3$ формула $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$ тавтология, а в $Ł_3$ нет.

J$_3$ совпадает с системой **CLuNs** (см. *[Batens* 1989] и с системой **LFI1** (см. *Carnielly, Marcos and de Amo* 2000) и совпадает с системой $\Phi_\vee$, введенной гораздо ранее в *[Schiitte* I960].

В дальнейшем в качестве исходной связки к **J**$_3$ добавляется связка $\supset_J$. Заметим, что $p \supset_J q =: \sim\Diamond p \vee q$. Напомним, что логика со связками $\sim$, $\vee$ есть **К**$_3$, логика со связками $\sim$, $\vee$, $\supset_J$ есть **PCont.** Таким образом, логика **J**$_3$ есть расширение **PCont** посредством добавления связки $\Diamond$ или, по-другому, логика **J**$_3$ есть расширение **PCont** посредством добавления константы 1 (или 0). Предикатную формулировку **J**$_3$ (и теорию моделей) можно найти в *[D 'Ottaviano* 1985; 1987].

Обратим внимание на работу [D*'Ottaviano and Epstein* 1988] (см. также *[Epstein* 1990]), где приводится аксиоматизация **J**$_3$ как *расширение* классической логики **C**$_2$. В качестве исходных связок взяты $\urcorner$, $\supset_J$, $\wedge$ и $\sim$, где $\urcorner$ есть отрицание Гейтинга (см. 3.2). Поскольку $\Diamond p =: \urcorner(p \supset_J (p \wedge \urcorner p))$, то исходная система связок **J**$_3$ *D*-эквивалентна связкам из $Ł_3$. Заметим, что посредством связок $\urcorner$, $\supset_J$ и $\wedge$ верифицируется **C**$_2$. В $Ł_3$ выразима связка Холдена $\sim\downarrow$ (см. 3.3.1.1), которую мы обозначили посредством $\triangle$. Тогда аксиоматизация **J**$_3$ выглядит следующим образом.



0. Аксиоматизация **C**$_2$ в языке $\urcorner$, $\supset$, $\wedge$

1. $(\sim p \wedge \triangle p) \leftrightarrow \urcorner p$

2. $\sim\sim p \leftrightarrow p$

3. $\triangle(\urcorner p)$

4. $[(p \wedge q) \wedge \triangle(p \wedge q)] \leftrightarrow [(p \wedge \triangle p) \wedge (q \wedge \triangle q)]$

5. $(\sim p \wedge \triangle p) \supset_J \triangle(p \supset_J q)$

6. $(q \wedge \triangle q) \supset_J \triangle(p \supset_J q)$,

где $p \leftrightarrow q =: (p \supset_J q) \wedge (q \supset_J p)$.

Правила вывода: MP и подстановка.
Заметим, что здесь, как и во всех паранепротиворечивых логиках, правило эквивалентной замены (см. выше: если $\vdash A \leftrightarrow B$, то $\vdash \mathrm{C}(A) \leftrightarrow \mathrm{C}(B))$ не имеет места и в силу этого для таких логик нельзя построить алгебру Линденбаума (см. раздел 8.6,3.1). Например, в $\mathbf{J}_3$: $\models (p \leftrightarrow p) \leftrightarrow (q \leftrightarrow q)$, но $\not\models \sim(p \leftrightarrow p) \leftrightarrow \sim(q \leftrightarrow q)$, если p принимает значение 1, а q значение '/2.

3.5.4. Логики P^1 и P^2

Кроме требования Яськовского о неверифицируемости в паранепротиворечивой логике закона Дунса Скота существует еще дополнительное требование да Косты о неверифицируемости закона непротиворечия в виде $\neg(p \wedge \neg p)$ *[da Costa* 1974]. Следующие две логики как раз с таким свойством.
А. Сетте *[Sette* 1973] строит логическое исчисление $\mathbf{P}^1$, которое получается из классического пропозиционального исчисления $\mathbf{C}_2$ в формулировке С.К. Клини посредством замены аксиомы (9)

$$(p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset \neg p)$$

на аксиому

$$(\neg p \supset \neg q) \supset ((\neg p \supset \neg\neg q) \supset p).$$

Эта логика оказалась трехзначной с двумя выделенными значениями, а связки $\supset$ и $\neg$ есть не что иное, как $\overset{\Diamond}{\supset}$ и $\overset{\Box}{\sim}$ (см. выше раздел 3.3.1.1).
Сетте показал, что логические связки $\wedge$, $\vee$ и $\equiv$ в $\mathbf{P}^1$ выразимы посредством $\neg$ и $\supset$:

$$p \wedge q =: (((p \supset p) \supset p) \supset \neg((q \supset q) \supset q)) \supset \neg(p \supset \neg q)$$

$$p \vee q =: (p \supset \neg\neg p) \supset (\neg p \supset q)$$

$$p \equiv q =: (p \supset q) \wedge (q \supset p),$$

где $\wedge$ и $\vee$ не есть, соответственно, *min* и *max.*
Впервые истинностные таблицы для таких логических связок появились в *[da Costa* 1963], где использовались для опровержения некоторых тавтологий $\mathbf{C}_2$, которые не имеют места в паранепротиворечивой логике да Косты $\mathbf{C}_1$ (см. ниже раздел 8.6.2). Эти же истинностные таблицы появились в *[da Costa and Alves* 1981], где соответствующая логика была обозначена посредством **F**; она же независимым образом была обнаружена С. Мортенсеном в 1979 г., который обозначил ее посредством $\mathbf{C}_{0,1}$(см. *[Mortensen* 1989]).

Имеются различные аксиоматизации $\mathbf{P}^1$ с исходными связками $\neg$ и $\supset$. Наиболее простой является следующая *[Sette and Alves,* 1996]:

1. $p \supset (q \supset p)$
2. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
3. $(\neg p \supset \neg q) \supset ((\neg p \supset \neg\neg q) \supset p)$
4. $(p \supset q) \supset \neg\neg(p \supset q)$.

Правила вывода: MP и подстановка.
(В *[Marcos* 2005] приведена аксиоматизация $\mathbf{P}^1$ как расширение аксиоматизации последовательности бесконечнозначных паранепротиворечивых логик да Косты $\mathbf{C}_n$ (см. ниже гл. 8.6.1).
Добавим также, что в *[Popov* 1998] появляется аксиоматизация $\mathbf{P}^1$ под названием $\mathbf{I}_1$, которая получается из трехзначной паранепротиворечивой логики **V1** (см. *[Arruda* 1977]), если в ней останутся только так называемые "переменные Васильева".
Отметим некоторые свойства $\mathbf{P}^1$:
1) Исчисление $\mathbf{P}^1$ как и **PCont** является *максимальным [Sette* 1973];
2) Хотя логика $\mathbf{P}^1$ является паранепротиворечивой, т.е. закон Дунса Скота здесь не имеет места, но верифицируется формула Лукасевича $p \supset (\neg p \supset (\neg\neg p \supset q))$ 5
3) Пусть *T* есть теория. Если $T \models A$ и $T \models \neg A$, тогда формула *A* должна быть атомарной формулой. Другими словами, противоречивость появляется в теориях, основанные на $\mathbf{P}^1$, только на атомарном уровне;
4) Матричная логика $\mathbf{P}^1$ является комбинацией двух трехзначных изоморфов $\mathbf{C}_2$, содержащихся в $\mathbf{B}_3$ (см. последний абзац в 3.5.4.1).
Наконец, отметим, что логики $\mathbf{P}^1$ и **PCont** по функциональным свойствам существенно различны: как мы показали, логические связки $\mathbf{P}^1$ выразимы в $\mathbf{B}_3$, а связки **PCont** выразимы в $\mathbf{Ł}_3$(см. *[Kotas and da Costa*t 1978]).
Интересно, что $\mathbf{B}_3$ содержит еще одну паранепротиворечивую логику со связками $\overset{\Diamond}{\supset}$, $\overset{\Diamond}{\cap}$, $\overset{\Diamond}{\cup}$, и $\overset{\Diamond}{\equiv}$, как в $\mathbf{P}^1$, и с отрицанием ~. Такая логика с одним выделенным значением впервые была рассмотрена Мортенсеном под названием $\mathbf{C}_{0,2}$ *[Mortensen* 1989]. Поскольку правило MP здесь не сохраняет тавтологию, то в *[Marcos* 2005] эта логика рассматривается с двумя выделенными значениями, как и $\mathbf{P}^1$. При этом приводится аксиоматизация новой логики опять же как расширение $\mathbf{C}_n$ и обозначается она как $\mathbf{P}^2$. Заметим, что $\overset{\Box}{\sim}p$ можно определить в $\mathbf{P}^2$ как $p \overset{\Diamond}{\supset} \sim p$. Здесь также доказывается, что $\mathbf{P}^2$, как и $\mathbf{P}^1$, является *максимальной* логикой и приводится их предикатная формулировка.

3.5.4.1. Параполные логики $\mathbf{I}^1$ и $\mathbf{I}^2$, дуальные к $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{P}^2$

В *[Sette and Carnieli* 1995] тщательно исследуется так называемая трехзначная *параполная* логика $\mathbf{I}^1$, дуальная к $\mathbf{P}^1$, и названная ими *слабой интуиционистской логикой,* Показано, что она является максимальной в указанном выше смысле. Понятие «параполноты» встречается уже в обзоре *[Arruda* 1980] (см. также *[Loparic and da Costa* 1984] и является дуальным к понятию «паранепротиворечивости». Полной теорией логики *L*, называется такая теория *T* логики *L,* что для всякой формулы A: $A \in T$ или $\neg A \in T$. Параполной теорией логики *L* называется такая теория *T* логики *L,* что *T* не является полной теорией логики *L* и всякая полная теория логики *L,* включающая *T,* является тривиальной. Параполной логикой называется такая логика *L,* что существует параполная теория логики *L.*

Двухместные логические связки $\mathbf{I}^1$ суть не что иное, как внешние логические связки $\supset^{\square}$, $\cap^{\square}$, $\cup^{\square}$, и $\equiv^{\square}$, а связка отрицание есть внешнее отрицание Бочвара $\sim^{\Diamond}$. При этом берется одно выделенное значение. Посредством $\supset^{\square}$ и $\sim^{\Diamond}$ выразимы остальные связки, поэтому они могут быть взяты в качестве исходных.

В *[Marcos* 2005] приводится матричная параполная логику $\mathbf{I}^2$, которая получается из $\mathbf{I}^1$ посредством замены отрицания $\sim^{\Diamond}$ на ~. Эта логика является параполной и максимальной. Однако заметим, что эта логика впервые была открыта В.М. Поповым *[Попов* 2002] под названием **LAP.** Здесь же она представлена в виде гильбертовского и секвенциального исчисления.

Обратим внимание на факт, что логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ являются *комбинацией* двух изоморфов $(\mathbf{B_3}^{\square}$ и $\mathbf{B_3}^{\Diamond})$ классической логики $\mathbf{C}_2$, содержащихся в $\mathbf{B}_3$ (см. 3.3.1.1). В первом случае берутся двухместные связки из $\mathbf{B_3}^{\Diamond}$ и отрицание из $\mathbf{B_3}^{\square}$; во втором случае берутся двухместные связки из $\mathbf{B_3}^{\square}$ и отрицание из $\mathbf{B_3}^{\Diamond}$.

3.6. Штрих Шеффера для некоторых трехзначных логик

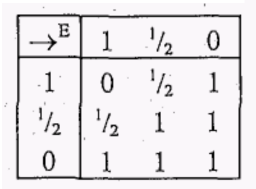
Вопрос о штрихе Шеффера еще раз показывает, насколько трехзначный случай существенно отличается от двузначного.

В *[Шестаков* 1964] по аналогий со стрелкой Пирса для $\mathbf{C}_2$ строится стрелка Пирса (антидизъюнкция) для $\mathbf{K}_3$:

$p\uparrow q =: \sim p \wedge \sim q$. Тогда $\sim p =: p\uparrow p, p \vee q = \sim(p\uparrow q)$.

Здесь показывается, что все *сильные* и все *слабые* в смысле Клини связки могут быть определены через $p|q$.

Для $Ł_3$ штрих Шеффера строится несколько сложнее и мы можем извлечь его из работы Дж. Мак-Кинси *[McKinsey* 1936], где строится штрих Шеффера для $Ł_n$:



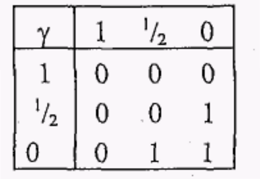
$\to^{E}$	1	$^1/_2$	0
1	0	$^1/_2$	1
$^1/_2$	$^1/_2$	1	1
0	1	1	1

Таким *образом, посредством* $p \to^{E} q$ *можно* определить связки $\sim p$ и $p \to q$, и наоборот, посредством $\sim p$ и $p \to q$ определяется $p \to^{E} q$. При этом заметим, что, как и в предыдущих случаях, формула, определяющая $p \to^{E} q$, содержит не более двух различных переменных.

Другая ситуация имеет место для $\mathbf{G}_3$. Оказывается, что формулы, определяющей штрих Шеффера для $\mathbf{G}_3$ и содержащей не более двух различных переменных, не существует (см. *[Кузнецов* 1965]), Им же здесь представлено определение штриха Шеффера для $\mathbf{G}_3$, которое несколько упрощено в *[Раца 1969]:*

$(p \wedge q \wedge \rceil r) \vee (\rceil p \wedge (q \Rightarrow r))$.

Удивительная ситуация возникает для $\mathbf{B}_3$. В *[Шестаков* 1959] исходные связки для $\mathbf{B}_3$ были сведены к двум: $\square p$ и $p|q$, где последняя есть штрих Шеффера (антиконъюнкция) для множества внутренних связок $\mathbf{B}_3$. Это множество обозначим посредством $\mathbf{B}_0$. В *[Шестаков* 1971] вводится штрих Шеффера γ



γ	1	$^1/_2$	0
1	0	0	0
$^1/_2$	0	0	1
0	0	1	1

(а также стрелка Пирса) для внешних связок B_3. Это множество обозначим посредством $\mathbf{B}_1$. Здесь подробно изучается логика $\mathbf{B}_1$, строятся ее различные нормальные формы и доказывается функциональная полнота. В этой работе В.И. Шестаков заключает, что множество всех связок $\mathbf{B}_3$ есть объединение двух непересекающихся множеств $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}_1$. Отсюда следует, что для логики $\mathbf{B}_3$ штриха Шеффера не существует.

Проблема штриха Шеффера для различных *n*-значных логик будет рассмотрена в гл. 7.

3.7. Некоторые применения

Характерным примером применения трехзначной логики является ситуация, когда рассматриваются высказывания, в которых термины не имеют денотатов *[Strawson* 1950]. Приписывание таким высказываниям какого-то третьего истинностного значения указывает здесь не на то, что высказывание имеет промежуточное значение, а на то, что оно его вообще не имеет. Развитие такого подхода приводит к логикам с «истинностно-значными провалами» (truth-value gaps) *[Fraassen* 1966]. В этих логиках класс логических истин совпадает с классом тавтологий классической двузначной логики $\mathbf{C}_2$, в то время как принцип бивалентности отбрасывается. Эта семантика послужила инструментом для адекватной логической интерпретации аристотелевской проблемы будущей случайности *[Fraassen* 1966], *[Seeskin* 1971]. Таким образом, если у Лукасевича высказываниям, термины которых не имеют денотата (высказывания о будущих случайных событиях), приписывается промежуточное истинностное значение 1/2, то в семантике Фраассена таким высказываниям вообще ничего не приписывается, но тем не менее закон исключенного третьего для таких высказываний имеет место. Такая семантика получила название семантики *супероценок.*

Другим интересным применением трехзначной логики была попытка решить определенные логико-философские проблемы квантовой механики. Первая работа в этой области принадлежит 3. Завирскому *[Zawirsjci* 1934], видимо, оказавшему влияние на Г. Биркгофа и Дж. фон Неймана *[Birkhoff and von Neumann* 1936] при построении ими логики квантовой механики.

Большое внимание привлекли к себе работы Г. Рейхенбаха *[Reichenbach* 1944; 1951], где формулируется несколько трехзначных логик. Г. Рейхенбах, как и Я. Лукасевич, считает третье истинностное значение *промежуточным,* но приписывается оно высказываниям, описывающим неопределенные ситуации (например, высказывание, говорящее о положении частицы и ее импульсе, имеет истинностное значение *не определено).* Идея Г. Рейхенбаха о необходимости трехзначной логики для интерпретации квантовой механики была поддержана Х. Патнэмом *[Putnam* 1957].   : -

В статье (1948 г.), а затем в книге П. Детуш-Феврие *[Fevrier* 1951] был предложен набросок трехзначной логики $\mathbf{L}_{c,3}$ под названием *«логика дополнительности».* Здесь формулируется "теорема" о том, что современная физика требует логику с более чем двумя истинностными значениями и логика дополнительности является адекватной для квантовой теории. Критическая рецензия Дж. Мак-Кинси и П. Суппеса *[McKinsey and Suppes* 1954] интересна тем, что вообще затрагивает вопрос об отношении между логикой и физикой. Что касается упомянутой "теоремы", то ее аргументы не являются завершенными, а новая логика не представлена в виде формальной системы. Более того, пропозициональная логика должна быть расширена кванторами. Последний аргумент в качестве критического выдвигался А. Чёрчем *[Church* 1937] относительно недистрибутивной логики Биркгофа и фон Неймана, а также К. Гемпелем *[Hempel* 1954] относительно трехзначной логики Рейхенбаха. Интересно, что в *[Da Costa and Krauze* 2000] логика $\mathbf{L}_{c,3}$ была представлена строго в виде трехзначной логики и рассмотрена с двумя выделенными значениями как паранепротиворечивая логика $\mathbf{L}^{P}_{c,3}$.

Сравнению трехзначных логических систем Г. Рейхенбаха и П. Детуш-Февриe посвящена статья Г. Тёрнебома *[Tornebohm* 1957]. Работы Рейхенбаха и Патнэма вызвали некоторую дискуссию, итог которой подведен Л. Хенкином *[Henkin* 1960]. После долгого перерыва, как бы возрождая интерес к данной тематике, появляется работа *[Bigaj* 2001], где для адекватного описания "квантовой реальности" используется семантика супероценок, т.е. принцип бивалентности отбрасывается, но сохраняются все законы классической логики.

Наибольшее применение подучила трехзначная логика Клини $\mathbf{K}_3$. В *[Kripke* 1975] она положена в основание новой теории истины, альтернативной к теории истины Тарского, а в книге *[Maudlin* 2004] конструкции предложенная Крипке, применена для разрешения парадокса «Лжец», См. также *[Slcyrms* 1970].

Логика Клини $\mathbf{K}_3$ применена в Фиттингом качестве логики программирования *Prolog,* В *[Fitting and Ben-Jacob* 1988] приводится литература по применению $\mathbf{K}_3$ в этой области, а также указывается, что логика *Pascal* есть слабая логика Клини $\mathbf{K}_3^{W}$, а логика **LISP** есть промежуточная логика Клини $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$. Применение трхзначной логики в программировании также рассмотрено в *[Delahaye and Thibau* 1991].

Обратим внимание на применение трехзначной логики в исследовании корректности вычислительных программ: *[Rasiowa* 1977], *[Kirkenid* 1982], *[Naish* 2006].

Наконец, стоит отметить оригинальную трехзначную логику Юрьева *[Юрьев* 2001], предназначенную для моделирования работы биологического нейрона. Свойства ее весьма необычны: никаких решеточных и квазирешеточных операций она не содержит (см. *[Карпенко* 2001]).

3.8. Общие вопросы

Первой работой, где рассматриваются различные семейства трехзначных связок, выполняющие те или иные свойства, является статья *[Dienes* 1949]. Например, дизъюнкция и конъюнкция являются ассоциативными и выполняются законы дистрибутивности. Для связки импликации выполняются также различные импликативные законы, и т.д. Вопросы взаимоотношения, функциональной эквивалентности и аксиоматизации трехзначных систем не рассматриваются. Интересна статья *[Maduch* 1978], где выделяется класс чисто импликативных логик, состоящий из 18 различных систем, для них доказывается теорема дедукции и приводится их аксиоматизация. Здесь выполняется закон тождества $p \to p$ и выделенным значением является только 1.
Вопрос о взаимоотношении различных трехзначных логик впервые был рассмотрен В.И. Шестаковым *[Шестаков* 1964]. Кратко основной результат можно резюмировать так: если в **В**з конъюнкцию $\cap$ заменим на конъюнкцию $\wedge$ из **К**$_3$, то в результате получим логику $\mathbf{Ł}_3$. Эту логику Шестаков назвал «логикой Бочвара-Клини». Намного более подробно вопросы взаимоотношения трехзначных логик и выразимости в них связок рассматриваются В.К. Финном *[Финн* 1974], где также приводится аксиоматизация и алгебраизация некоторых трехзначных логик.
В книге Л. Годцарда и Р. Раутли *[Goddard and Routley* 1973] вводится термин "логика значения" и рассматривается большое количество различных трехзначных логик. Основная идея состоит в том, что семантические значения высказываний в естественных языках зависят от контекста и поэтому некоторые многозначные логики могут служить в качестве полезной аппроксимации логической структуры естественного языка. Однако эта работа не содержит какого-либо формального определения «логика значения».
В *[Финн, Аншаков, Григолия и Забежайло* 1980] и *[Finn and Grigolia* 1993] дается формальное определение понятия "логика значения" и его частного случая "логик бессмысленностного типа" на основе использования методов алгебраической семантики и введения понятия *«тип исткнносного значения»*. Здесь как бы реализуется идея Д.А. Бочвара о многозначных логиках как формализованных семантиках. В указанных работах приводится классификация трехзначных логик значения и логик бессмысленностного типа. В свою очередь логики бессмысленностного типа делятся на два основных подкласса: логики

сильно бессмысленностного типа и логики слабо бессмысленностного типа. Получаем подкласс логик сильно бессмысленностного типа, если промежуточное значение понимается как «самая сильная» незначимость (бессмыслица). В системах первого подкласса появление хотя бы одного «сильно бессмысленного» высказывания в составе сложного делает все утверждение «сильно бессмысленным», в то время как «слабая бессмыслица» менее склонна к разрушению.
Характерными представителями первого подкласса как раз являются трехзначная логика Бочвара **В**$_3$ и трехзначная логика Холдена **С**. Наиболее интересным представителем второго класса является трехзначная логика Эббинхауза **Е**з, которая по своим функциональным свойствам является промежуточной между **В**$_3$ и $\mathbf{Ł}_3$. Что касается самой $\mathbf{Ł}_3$, то в предложенной классификации она вообще не является логикой значения и называется логикой неопределенностного типа.
Интересна работа А. Аврона *[Avron* 1991], где выделяется класс трехзначных логик, названных *естественными.* Это следующие логики: $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{Ł}_3$, $\mathbf{LPF}$, $\mathbf{RM}_3$ и $\mathbf{PCont}$. Пояснения требует логика **LPF**, которая была развита в рамках *VDM* проекта *[Barringer, Cheng and Jones* 1984]. **LPF** есть расширение **К**$_3$ посредством добавления связки $\triangle$, которая, напомним, есть не что иное, как связка Холдена $\sim\downarrow$ (см. 3.3.3). Аврон показывает, что логики $\mathbf{LPF}$ и $\mathbf{Ł}_3$ функционально эквивалентны. Однако заметим, что уже из работы *[Шестаков* 1964] следует, что подобное расширение **К**$_3$ есть $\mathbf{Ł}_3$ (см. 3.1.2). Выше мы уже говорили, что **RM**$_3$ и **PCont** эквивалентны (см. 3.5.2.1). Но, как говорит Аврон, имеет смыл рассматривать все эти логики по отдельности, поскольку каждая из них имеет свое специфическое *отношение логического следования* (в **LPF** в качестве импликации принимается $p \to_1 q$ (см. 3,1.1)). В этой статье этому вопросу уделено особое внимание. Кроме того, приводится секвенциальная формулировка этих систем со свойством устранимости сечения.
Таким образом, "естественными" логиками, по Аврону, являются только те, которые есть расширение **К**$_3$, что, конечно, является довольно-таки сильным ограничением. Например, не попадает в этот класс такая известная трехзначная логика, как **В**$_3$, поскольку она является расширением слабой регулярной логики Клини $\mathbf{K}_3^w$. Вообще, интересно систематически рассмотреть расширения логики $\mathbf{K}_3^w$ и представить эти расширения в виде решетки. Этот вопрос будет рассмотрен в заключение всей главы.
В течение долгого времени считалось, что различные системы многозначной логики являются *альтернативными* к классической пропозициональной логике **С**$_2$. Иногда для этого используется термин

"deviant" (см., например, *[Haack* 1974]) и такие логики называются *девиаитными* к $\mathbf{C}_2$. Основанием для этого является то, что некоторые тавтологии $\mathbf{C}_2$ опровергаются в той или иной трехзначной логике: закон сокращения в $\mathbf{\L}_3$, контрапозиция в $\mathbf{B}_3$, закон Дунса Скота в $\mathbf{RM}_3$ и т.д. Но оказалось, что некоторые трехзначные логики можно аксиоматизировать как расширение $\mathbf{C}_2$. Выше мы уже ссылались на $\mathbf{B}_3$ и на $\mathbf{J}_3$ (напомним, что последняя по своим выразительным свойствам есть $\mathbf{\L}_3$). При таком подходе эти логики не являются девиантными к $\mathbf{C}_2$. В работе [*Smnott-Armstrong and Mal-hotra* 2002] обсуждается проблема девиантности и в не совсем ясном виде вводится класс трехзначных *нормальных* логик, которые есть расширение $\mathbf{C}_2$. Подобный метод аксиоматизации, но на совершенно другом уровне (метод Аншакова-Рычкова), будет обстоятельно рассмотрен нами в разделе б.3

Наконец, теория моделей для трехзначных логик рассмотрена в *[Hodes* 1989].

3.9. Решетка импликативных расширений регулярных логик Клини

Мы знаем, что **PCont** является расширением $\mathbf{K}_3$ (сильная логика Клини), а $\mathbf{B}_3$ является расширением $\mathbf{K}_3^w$ (слабая логика Клини). Ло-гика $\mathbf{\L}_3$ является расширением как **PCont**, так и $\mathbf{B}_3$. В свою очередь, $\mathbf{K}_3$ является расширением $\mathbf{K}_3^w$. Возникает нетривиальный вопрос о суммировании всех *интересных* расширений $\mathbf{K}_3^w$ и представлении их в виде решетки *[Томова* 2010].

Надо уточнить слово «интересные». Для каждой системы логики наиболее важно, какими свойствами обладает её связка импликации. Пусть V_3 есть $\{0,\ ^1/_2,\ 1\}$ и D есть множество выделенных значений. Импликацию → будем называть *естественной,* если она обладает следующими свойствами:

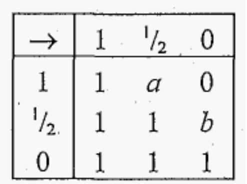
(1) **С**-*расширение,* т.е. ограничение → на подмножество {0, 1} множества V_3 суть обычная классическая связка импликации.

(2) *Нормальность:* modus ponens согласуется с табличным определением связки →.

(3) *Согласованность с частичным порядком* на V_3*, если* $x \leq y$, то $x \to y \in D.$

(4) $x \to y \in V_3$, в остальных случаях.

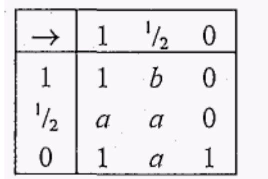
При D = {1} имеем всего 6 импликаций:



→	1	$^1/_2$	0
1	1	a	0
$^1/_2$	1	1	b
0	1	1	1

Здесь $a \in \{0,\ ^1/_2\}$ и $b \in \{0,\ ^1/_2,\ 1\}.$

При $D = \{1,\ ^1/_2\}$ имеем 24 импликации:

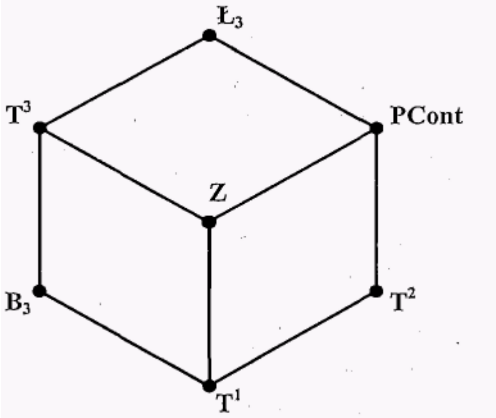


→	1	$^1/_2$	0
1	1	b	0
$^1/_2$	a	a	0
0	1	a	1

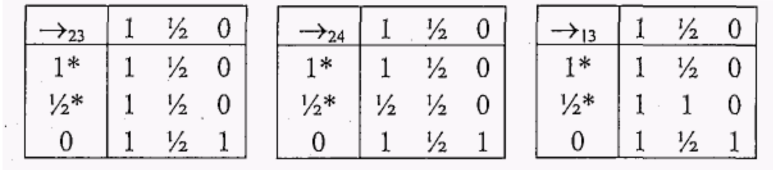
Здесь $a \in \{1,\ ^1/_2\}$ и $b \in \{0,\ ^1/_2\ 1\}.$

Примечание 1. Две пары импликаций совпадают как при D = {1}, так и при $D = \{1,\ ^1/_2\}$, поэтому имеется всего 28 уникальных импликаций, удовлетворяющих условиям (1) — (4).

Тогда решетка расширений логики Клини $\mathbf{K}_3^w$ импликациями состоит всего из *семи* логик:



Пусть



$\to_{23}$	1	½	0
1*	1	½	0
½*	1	½	0
0	1	½	1

$\to_{24}$	1	½	0
1*	1	½	0
½*	½	½	0
0	1	½	1

$\to_{13}$	1	½	0
1*	1	½	0
½*	1	1	0
0	1	½	1

Тогда

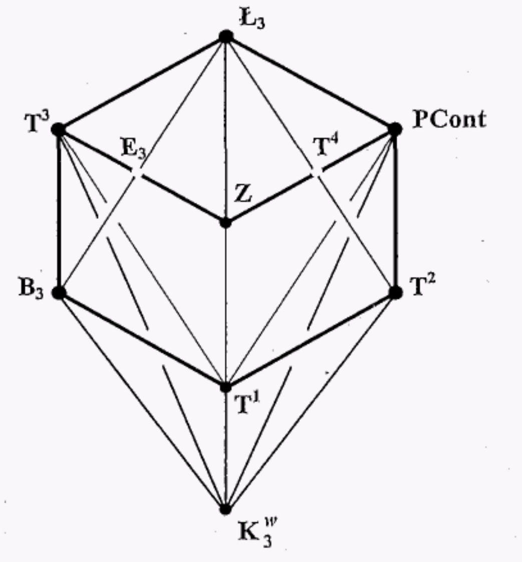
$$\mathbf{T}^1 = \mathbf{K}_3^w + \rightarrow_{23}$$
$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{K}_3^w + \rightarrow_{24}$$
$$\mathbf{T}^3 = \mathbf{K}_3^w + \rightarrow_{13}$$

Напомним

$$\mathbf{Z} = \mathbf{K}_3^w + \rightarrow_{S}.$$

Логики $\mathbf{T}^1$, $\mathbf{T}^2$ и $\mathbf{T}^3$ появляются впервые и это можно объяснить только тем, что они являются *некоммутативными,* если мы обычным образом определим в них дизъюнкцию. Таким образом, некоммутативность является фундаментальным свойством трехзначных логик. Заметим, что некоммутативным логикам уделяется все большее внимание. Самое примечательное то, что для всех этих семи логик имеется импликация, удовлетворяющая стандартной теореме дедукции.

Примечание 3. Логика Эббингауза $\mathbf{E}_3$ также не попадает в эту классификацию, поскольку содержит сразу две импликации (внешнюю импликацию Бочвара и импликацию Собочиньского) и заменить их на одну импликацию нельзя, т.е. $\mathbf{E}_3$ не является импликативным расширение $\mathbf{K}_3^w$. Это хорошо видно на следующей диаграмме:



Интересно, что у $\mathbf{E}_3$ имеется некоммутативный напарник T^4 (точнотак же как у $\mathbf{B}_3$ имеется T^2 , а у **PCont** имеется T): $\mathbf{T}^4 =$

$\mathbf{T}^2 + \rightarrow_{S}.$

Интересна также таблица разбиений всех 28 импликаций на классы:

Ł₃	**PCont**	**B₃**	**Z**	**T¹**	**T²**	**T³**
12	8	3	2	1	1	1

Стоит подчеркнуть, что в каждом из этих классов имеется импликация, которая позволяет сформулировать стандартную теорему дедукции (см. выше раздел 1.4).

Остается проделать аналогичную работу для расширений *р-логик* (см. выше).

4. Логические матрицы и решетки

4.1. Понятие логической матрицы

Понятие логической матрицы как обобщение интуитивного понятия истинностных таблиц появилось в начале 20-х годов XX века (Ч.С. Пирс, Я. Лукасевич, П. Бернайс, Э. Пост и др.). Но строго, понятие многозначнай логической матрицы для фиксированного пропозиционального языка $\mathcal{L}$ введено Я. Лукасевичем и А. Тарским в работе *[Lukasiewicz and Tarski* 1930], подводящей итог исследований Львовско-Варшавской школы в области многозначной логики.

Логическая матрица представляет собой систему $\mathfrak{M} = <V, O, D>$, состоящую их трех множеств, где V есть непустое множество истинностных значений, элементы которого обозначаются *x, y, z* с индексами или без них; *O* — множество матричных операций, определенных на множестве *V,* и *D* называется множеством выделенных значений такое, что *D* является собственным подмножеством *V,* т.е. $D \subset V,\ 0 \in V,$ но $0 \notin D.$

Первоначально логические матрицы использовались как простейшие семантические модели для определения класса теорем в специфических логических исчислениях.

Примеры логических матриц:

1) $\mathfrak{M}_2^C = <\{1, 0\}, \neg_{\mathfrak{M}}, \supset_{\mathfrak{M}}, \vee_{\mathfrak{M}}, \wedge_{\mathfrak{M}}, \{1\}>$ называется двузначной логической матрицей для пропозициональной классической логики $\mathbf{C}_2$, где матричные операции $\neg_{\mathfrak{M}}, \supset_{\mathfrak{M}}, \vee_{\mathfrak{M}},$ $\wedge_{\mathfrak{M}},$ определяются таблично точно так же, как и логические связки $\neg, \supset, \vee, \wedge$ (см. выше раздел 1.1).

2) $\mathfrak{M}_3^L = <\{1, {}^1/_2, 0\}, \sim_{\mathfrak{M}}, \rightarrow_{\mathfrak{M}}, \{1\}>$ называется трехзначной логической матрицей для пропозициональной логики Лукасевича Ł_3, где матричные операции $\sim_{\mathfrak{M}}, \rightarrow_{\mathfrak{M}}$ определяются таблично точно так же, как логические связки ~, → (см. 2.1).

В обоих случаях под многозначной логикой понимался класс тавтологий в соответствующем пропозициональном языке.

4.2. Основные свойства логических матриц

В общем случае для определения класса тавтологий, логического следования, семантического определения логической системы, модели и т.д. окажется весьма полезным понятие *оценки* формулы в логической матрице. Неявным образом мы этим понятием пользовались, когда говорили о формулах, принимающих то или иное истинностное значение.

Пусть *Fm* есть множество формул, образованных из соответствующего пропозиционального языка $\mathcal{L}$.

Оценкой на матрице $\mathfrak{M}$ является отображение *v* из множества пропозициональных переменных в множество истинностных значений V. Тогда истинностное значение *v(A)* формулы *A* из *Fm* определяется индуктивно (с шагами, которые использовались при построении формулы):

1) если *A* есть пропозициональная переменная, то $v(A) \in V$;

2) если *A* и *B* есть формулы, то

$v(\dagger A) = \dagger v(A)$, если † есть унарная связка;

$v(A \otimes \text{B}) = v(A) \otimes v(B)$, если ⊗ есть двухместная связка.

Обратим внимание, что здесь в левые части равенств входят пропозициональные связки, а в правые - символы операций из матрицы $\mathfrak{M}$, но для удобства будем использовать для них одинаковые обозначения.

Будем говорить, что формула *A* является *тавтологией* в матрице $\mathfrak{M}$, если $v(A) \in D$ для любой оценки *v* на матрице $\mathfrak{M}$.

Множество всех тавтологий обозначается посредством $E(\mathfrak{M})$.

Под *правилом* над множеством *Fm* обычно понимается отношение $r \subseteq \mathcal{P}(Fm) \times Fm$, где $\mathcal{P}(Fm)$ есть множество всех подмножеств *Fm* и × есть операция декартова произведения; при этом, естественно, правила должны сохранять тавтологию, т.е. примененные к тавтологиям снова дают тавтологии.

Предположим, что $\mathcal{R}$ есть некоторое множество правил над *Fm* и пусть $X \subseteq Fm$. Тогда каждая такая пара $<X, \mathcal{R}>$ называется *пропозициональным исчислением* **L** над *Fm*. Говорят, что матрица .$\mathfrak{M}$ *адекватна* для исчисления $(X, \mathcal{R})$, если применение всех правил из $\mathcal{R}$ к *X* равно $E(\mathfrak{M})$.

Особый интерес представляют исчисления $\mathbf{L} = <X, \mathcal{R}>$, где $\mathcal{R}$ есть множество правил, которое содержит по крайней мере два правила: *modus ponens* (MP) и *подстановку.* Понятие доказательства формулы *A* из посылок $\Gamma\ (\Gamma \vdash A)$ определяется для всех рассматриваемых в книге исчислений стандартно (см. 1.4).

Пара $\mathbf{L} = <X, \mathcal{R}>$ полностью определяет множество доказуемых в **L** формул. Исчисления рассматриваемого вида принято называть исчислениями *гильбертовского типа,* а множество *X* - множеством *аксиом* исчисления $\mathbf{L} = <X, \mathcal{R}>$. Часто рассматриваются исчисления $\mathbf{L} = <X, \mathcal{R}>$ с пустым множеством аксиом *X,* имеющих то же множество теорем, что и исчисление $\mathbf{L}' = (X', \mathcal{R}')$ с непустым *X* и такими $\mathcal{R}'$, что $\mathcal{R}$ отличается от $\mathcal{R}'$ только наличием 0-посылочных правил вывода, обеспечивающих доказуемость всех подстановочных частных случаев формул из *X.* Таким образом, каждая «аксиома» представляет бесконечное множество аксиом и тогда правило подстановки оказывается излишним. Исчисления такого типа называются исчислениями со *схемами аксиом.* В дальнейшем, если не оговорено другое, под пропозициональным исчислением **L** будем понимать гильбертовское исчисление $\mathbf{L} = <X, \mathcal{R}>$ или, в более общем виде, $\mathbf{L} = <Fm, \vdash>$, где отношение выводимости ⊢ для **L** есть бинарное отношение между множествами формул *Fm* и формулами *Fm,* т.е. $\vdash \subseteq \mathcal{P}(Fm) \times Fm$, удовлетворяющее следующим условиям Тарского для $X, Y \subseteq Fm$ и $A \in Fm$:

(1) если $A \in X$, тогда $X \vdash A$,

(2) если $X \vdash A$ и $X \subseteq Y$, тогда $Y \vdash A$,

(3) если $X \vdash B$ и $X, B \vdash A$, тогда $X \vdash A$.

Отношение ⊢ называется *структурным,* если из $X \vdash A$ следует $e(X) \vdash e(A)$, где *e* есть подстановка в *Fm.* Логика с отношением ⊢, выполняющим эти условия, называется *логикой Тарского.*

(В польской школе логиков получило распространение другое определение пропозициональной логики, введенное А. Тарским *[Tarski* 1930; 1930]. Пусть $\mathcal{P}(A)$ есть множество всех подмножеств множества *A. Оператором замыкания* на множестве *A* называются отображение $C\colon \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, которое удовлетворяет следующим условиям для каждого $X, Y \subseteq A$ (см. *[Кон* 1968]):

(C1) $X \subseteq C(X)$ (рефлексивность),
(C2) $CC(X) = C(X)$ (идемпотентность),
(C3) Если $X \subseteq Y$, то $C(X) \subseteq C(Y)$ (монотонность).

Подмножество X из A называется *замкнутым подмнооюеством,* если $C(X)=X$.

А. Тарский *[Tarski* 1930] находит применение оператору замыкания для изучения абстрактного отношения следования. Вводится дополнительное условие: оператор С на множестве A называется *финитарным,* если . .

(C4) $C(X) = \cup \{C(Y)\colon Y \subseteq X$ и Y конечно$\}$.

Оператор замыкания с таким свойством в *[Bui'fis and Sankappanavav* 1981 называется *алгебраическим оператором замыкания.* Заметим, что (C4) влечет (C3). Теперь пусть A есть множество всех формул *Fm* в пропозициональном языке $\mathcal{L}$. Тогда оператор замыкания *C* называется *операцией присоединения следствий* (consequence operation) и обозначается посредством *Cn,* т.е. *Cn* есть операция, которая, примененная к множествам формул, позволяет получать новые множества формул. В терминологии Тарского *Cn(X)* называется *дедуктивной системой* и представляет собой множество формул, дедуцируемых из формул *X,* взятых в качестве посылок, посредством аксиом и правил вывода.

Операция присоединения следствий *Cn* называется *структурной* (или *инвариантной относительно подстановки),* если для всех *подстановок е* (эндоморфизмов) пропозиционального языка $\mathcal{L}$ выполняется условие

(C5) $e(Cn(X)) \subseteq Cn(e(X))$.

Открытие того, что подстановки являются эндоморфизмами, и введение условия (C5) (см. *[Los and Suszko,* 1958]) было предназначено для того, чтобы выразить *формальный* характер логического следования.

Под *логикой* (пропозициональной) понимается пара $<Fm, Cn>$, где операция присоединения следствий *Cn* не обязательно финитарная, но *структурная.* Изучению основных свойств операции присоединения следствий посвящена фундаментальная монография Р. Вуйцицкого *[Wqjcicki* 1988]. Непосредственно в применении к многозначным логикам см. монографии *[Zygnnmt* 1984] и *[Malinowskl* 1993]. Связь между операцией *Cn* и обычным отношением выводимости $\vdash$ очевидна:

$A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$ тогда и только тогда, когда $B \in Cn(\{A_1, A_2, ..., A_n\})$.

Проблема нахождения конечного множества аксиом по каждой конечнозначной логической матрице является весьма сложной и будет обсуждаться в главе б.

Логические матрицы могут использоваться для того, чтобы определить понятие логики семантически. Пусть $\mathfrak{M} = <V, O, D>$ есть логическая матрица и отношение логического следования на множестве *Fm* определяется следующим образом:

$\Gamma \models_{\mathfrak{M}} A$ *т.т.т., когда для каждой оценки v на* $\mathfrak{M}$ *из* $v(A) \in D$ *для всех* $A \in \Gamma$ *следует, что* $v(B) \in D$.

При этом отношение логического следования является инвариантным относительно подстановки (или *структурным).* Отсюда пара $<Fm, \models_{\mathfrak{M}}>$ есть логическая система.

Пусть *D* и V' два непересекающихся множества в матрице $\mathfrak{M}$ такие, что $D \cup V' = V$ и *A* и *B* произвольные формулы из *Fm.* Тогда логическая матрица называется *нормальной* (см. *[Lukasiewicz and TarsU* 1930]), если $v(A) \in D$ и $v(B) \in V'$ всегда влекут $v(A \supset B) \in V'$. Таким образом, нормальная логическая матрица согласуется с правилом MP, т.е. MP сохраняет тавтологию. Приведенные выше матрицы $\mathfrak{M}_2^C$ и $\mathfrak{M}_3^L$ являются нормальными, а матрица $\mathfrak{M}_3^L$ с двумя выделенными значениями не является нормальной. Нормальные матрицы играют особую роль при доказательстве независимости аксиом (см. раздел 2.3 и *Приложение).*

Следующее свойство логических матриц является также весьма существенным. Назовем матрицы **С**-*расширяющими,* если ограничения операций $\neg, \supset, \vee, \wedge$ на подмножество {0, 1} множества V суть обычные классические операции отрицания, дизъюнкции, конъюнкции и импликации соответственно. Таким образом, такие матрицы в качестве подматрицы содержат матрицу для **С**$_2$, т.е., говоря неформально, на множестве {0, 1} они содержат классическую логику. Все рассмотренные нами ранее трехзначные логики, кроме Ł_3^T, являются **С**-*расширяющими.* В следующей главе мы рассмотрим самые известные не **С**-расширяющие логики *(n-* значные логики Поста).

Логическая матрица $\mathfrak{M}$ называется *моделью* логики **L**, если каждая доказуемая формула в **L** является тавтологией в $\mathfrak{M}$. Если же верно и обратное, т.е. что каждая тавтология в $\mathfrak{M}$ доказуема в **L**, то модель $\mathfrak{M}$ называется *точной моделью* или, по-другому, $\mathfrak{M}$ есть *характеристическая матрица* для **L**. Другими словами, $\mathfrak{M}$ называется *характеристической матрицей* для **L**, если формула *A* является тавтологией в $\mathfrak{M}$ т.т.т., когда *A* доказуема в **L**. Примерами характеристических матриц являются $\mathfrak{M}_2^C$ для **C**$_2$ и $\mathfrak{M}_3^L$ для Ł_3.

Пропозициональное исчисление может иметь характеристические матрицы различной мощности, где под мощностью матрицы понимается мощность множества V элементов матрицы. Поэтому, естественно, возникает нетривиальная проблема нахождения характеристической матрицы минимальной мощности для исчисления **L**.

Один из наиболее важных и общих результатов для логических матриц принадлежит А. Линденбауму (1930г.): *каждая структурная логика* $<Fm, \vdash>$ *имеет по крайней мере счетную (нормалъную) матрицу* $\mathfrak{M}$, *адекватную для нее.* Дальнейшее развитие теории логических матриц сделано в работах польских логиков *[Los* 1949], *[Los and Suszko* 1958] и *[Wdjcicki* 1969; 1973]. Во второй из указанных работ найдены достаточные и необходимые условия для того, чтобы структурная логика $<Fm, \vdash>$ имела единственную характеристическую матрицу. В работах Р. Вуйицкого доказано, что каждая структурная логика $<Fm, \vdash>$ строго полна относительно определенного *класса матриц.* Этот результат основывается на введении Вуйицким понятия *обобщенной матрицы,* которое оказалось очень полезным для построения различных теоретико-модельных конструкций, играющих важную роль в обосновании новых семантических подходов в современной логике (см. об этом ниже в разделе 10.4).

Обобщенная матрица есть пара $\mathcal{A} = <\mathbf{A}, C>$, где **A** есть алгебра соответствующего типа и $C \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{A})$ есть произвольное семейство подмножеств **A**. Обобщенные матрицы имеют хорошо известное дуальное представление как пара $<\mathbf{A}, C>$, где *C* есть оператор замыкания . Заметим, что в известной статье *[Brown and Suszko* 1973] вводится термин *«абстрактная логика»* $\mathbf{L} = <\mathbf{A}, C>$, где **A** есть абстрактная алгебра, а *C* есть абстрактная операция - присоединения следствий (без структурности). Обобщенные матрицы были также переоткрыты в *[Dunn and Hardegree* 2001] под названием *«атласы»* (atlases). Специально обобщенным матрицам, их применению и развитию посвящена статья *[Font* 2003].

В заключение введем понятие *матричной семантики.* Говорят, что класс **M** логических матриц является матричной семантикой для логики L, если $\Gamma \vdash A$ *т.т.т., когда для каждой* $\mathfrak{M} \in \mathbf{M}$ *и каждой оценки v на* $\mathfrak{M}$ *из* $v[\Gamma] \subseteq D$ *следует* $v(\mathrm{A}) \in D$.

Импликация слева направо говорит о том, что **L** корректна относительно **M**, а импликация в другую сторону говорит о том, что **L** полна. Другими словами, **M** является матричной семантикой для **L**, если каждая матрица в **M** есть модель для **L** и, более того, для каждого *Г* и *A* таких, что $\Gamma \nvdash A$, имеется модель для **L** в **M**, которая удовлетворяет этому условию, т.е. имеется оценка *v* на модели, которая приписывает формулам из *Г* выделенные значения, а формуле *A* не выделенное значение.

В итоге мы имеем: *каждая логика* (независимо от того, как она определена) *имеет, матричную семантику.* Этот результат говорит о преимуществе матричной семантики, т.е. матричная семантика является универсальной, что позволяет применять многие методы универсальной алгебры и теории моделей при семантическом исследовании *всех* пропозициональных логик.

Матричная семантика занимает важное место в процессе *апгебраизащш* логики (см. *[Jansana* 2006]).

4.3. Операции над матрицами

Обратим внимание на то, что логическая матрица $\mathfrak{M}$ представляет собой систему $<\mathcal{A}, \mathrm{D}>$, где $\mathcal{A}$ - некоторая универсальная алгебра, а ее сигнатура образует множество матричных операций *O*. Отсюда все теоретико-модельные операции, которые используются на алгебраических структурах, применимы и к логическим матрицам. (Здесь сделаем важное замечание относительно того, что сам пропозициональный язык $\mathcal{L}$ порождает *алгебру формул*

$\mathfrak{I} = <Fm, \neg, \supset, \vee, \wedge>.$

Тогда логической матрицей для $\mathcal{L}$ является любая матрица $\mathfrak{M} = <\mathcal{A}, \mathrm{D}>$ с алгеброй $\mathcal{A}$ *подобной* алгебре $\mathfrak{I}$, т.е. операции обеих алгебр имеют одну и ту же арность. Это позволяет определить *оценку* языка $\mathcal{L}$ в $\mathfrak{M}$, как гомоморфизм $h\colon \mathcal{L} \to \mathcal{A}$. Тогда формула *A* истинна, если $h(A) \in \mathrm{D}$, и *A* является тавтологией, если $h(A) \in \mathrm{D}$ для каждого гомоморфизма *h* языка $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$.)

Некоторые понятия окажутся нам полезными. Так, $\mathfrak{N} = <\mathcal{A}^*, \mathrm{D}^*>$ является *подматрицей* $\mathfrak{M} = <\mathcal{A}, \mathrm{D}>$, если $\mathcal{A}^*$ есть подалгебра $\mathcal{A}$ (это значит, что операции из $\mathcal{A}$ замкнуты на некотором подмножестве $\mathrm{V}^* \subset \mathrm{V}$) и $\mathrm{D}^* = \mathrm{V}^* \cap \mathrm{D}$. Имеет место следующий важный факт: если $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, то $E(\mathfrak{M}) \subseteq E(\mathfrak{N})$.

Пусть *J* есть любое множество индексов. Для каждого $j \in J$ пусть $\mathfrak{M}_J = <\mathcal{A}, \mathrm{D}>$ есть определенная матрица для языка *S*. Мы можем образовать прямое произведение алгебры $\mathcal{A} = \prod_{j \in J} \mathcal{A}_j$ и образовать произведение ее подмножества $\mathrm{D} = \prod_{j \in J} \mathrm{D}_j$. В результате матрица $\mathfrak{M} = <\mathcal{A}, \mathrm{D}>$ называется *произведением* *матриц* $\mathfrak{M}_j$ и обозначается посредством $\prod_{j \in J} \mathfrak{M}_j$. Имеет место следующая теорема *[Jaskowski* 1936]:

Если $\mathfrak{M} = \prod_{j \in J} \mathfrak{M}_j$, тогда $E(\mathfrak{M}) = \prod_{j \in J} E(\mathfrak{M}_j)$.

Отсюда следует, что операция прямого произведения логических матриц *сохраняет* класс тавтологий исходной матрицы.
Заметим, что в общем случае операция прямого произведения алгебр не сохраняет свойства исходной алгебры. Поэтому вводится понятие *подпрямого произведения* (см. *[Burns and Sankappanavar* 1981]): алгебра $\mathcal{A}$ является подпрямым произведением индексированного семейства $(\mathcal{A}_j)_{j\in J}$ алгебр, если

(i) $\mathcal{A} \leq \prod_{j \in J} \mathcal{A}_j$ и (ii) $\pi_j(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_j$ для всех $j \in J$,

где π_j есть *проективное отображение.*

4.3.1. Прямое произведение матрицы $\mathfrak{M}_2^c$ на саму себя

Операция произведения логических матриц (впервые введена в *[Wajsberg* 1935] нашла широкое применение при решении различных логических проблем. Специальное значение имеет прямое произведение матрицы $\mathfrak{M}_2^c$ классической двузначной логики **C**$_2$ произвольное число раз на саму себя. Результирующая матрица окажется полезной при интерпретации многозначных логик в терминах классических истинностных значений 1 и 0 (см. гл. 9). Здесь же в качестве примера рассмотрим случай произведения $\mathfrak{M}_2^c \times \mathfrak{M}_2^c$, т. е. матрицу $\mathfrak{M}_4^c$.
Пусть $\mathfrak{M}_2^c = < \{1, 0\}, \neg, \supset, \vee, \wedge, \{1\} >$. Тогда результирующая матрица имеет вид:

$$\mathfrak{M}_4^c = <\{<11>, <10>, <01>, <00>\}, \overset{+}{\neg}, \overset{+}{\vee}, \overset{+}{\wedge}, \overset{+}{\supset}, \{<11>\}>.$$

Обозначим пары $<a_i, b_i>$, где a_i, $b_i \in \{1, 0\}$, посредством α, β, γ, $\ldots$ Операции $\overset{+}{\neg}$, $\overset{+}{\vee}$, $\overset{+}{\wedge}$, $\overset{+}{\supset}$ на этих парах определяются *покомпонентно* (см. общий случай произведения матрицы $\mathfrak{M}_2^c$ на саму себя в разделе 10.6).
Тогда табличное определение новых матричных операций выглядит следующим образом:

α	$\overset{+}{\neg}\alpha$
11	00
10	01
01	10
00	11

$\supset^+$	11	10	01	00
11	11	10	01	00
10	11	11	01	01
01	11	10	11	10
11	11	11	11	11

$\vee^+$	11	10	01	00
11	11	11	11	11
10	11	10	11	10
01	11	11	01	01
00	11	10	01	00

$\wedge^+$	11	10	01	00
11	11	10	01	00
10	10	10	00	00
01	01	00	01	00
00	00	00	00	00

Обозначим посредством 1, *b, n* и 0 последовательности <11>, <10>, <01>, <00> соответственно, где 1 интерпретируется как «истина», 0 - «ложь», а *b* и *n* - промежуточные истинностные значения. Тогда приведенные выше таблицы примут следующий вид:

x	$\overset{+}{\neg}x$
1	0
b	n
n	b
0	1

$\supset^+$	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	1	1	n	n
n	1	b	1	b
0	1	1	1	1

$\vee^+$	1	b	n	0
1	1	1	1	1
b	1	b	1	b
n	1	1	n	n
0	1	b	n	0

$\wedge^+$	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	b	b	0	0
n	n	0	n	0
0	0	0	0	0

Обратим внимание, что здесь $b \vee n = 1$ и $b \wedge n = 0$, т.е. операции $\vee$ и $\wedge$ не являются *max* и *min* соответственно.
Именно таким образом была построена Я. Лукасевичем в 1953 г. четырехзначная логика **C**4, которая легла в основу его Ł-модальной системы (подробно об этом см, ниже в разделе 5.4.2). Заметим, что последняя была построена им опять же для опровержения фаталистического аргумента Аристотеля.
Матрица $\mathfrak{M}_4^c = <\{1, b, n, 0\}, \overset{+}{\neg}, \overset{+}{\vee}, \overset{+}{\wedge}, \overset{+}{\supset}, \{1\}>$, как и мат-

рица $\mathfrak{M}_2^c$,является характеристической для **C**₂. Это свойство, как следует из теоремы С. Лськовского, сохраняется для произвольного числа умножений (конечного и бесконечного) матрицы $\mathfrak{M}_2^c$ на саму себя. Отсюда следует, что классическую пропозициональную логику **C**₂ можно представить как конечнозначную с числом истинностных значений *2^n,* так и бесконечнозначную с числом истинностных значений $2^{\aleph_0}$, но она *единственная,* которая имеет характеристическую матрицу с множеством истинностных значений {0, 1}.

Метод умножения матриц служит способом получения новых логических матриц с большим числом истинностных значений. В *[Rose* 1952] подобным образом строится 8-значная система, предназначенная для применения к геометрии. Здесь в качестве истинностных значений выступают элементы множества {1, 0} в третьей степени. Эти значения указывают на истинностный статус высказываний в трех системах геометрий: Евклида, Римана и Лобачевского.

Заметим также, что можно умножать различные матрицы друг на друга. Так, Е. Расёва *[Rasiowa* 1955] умножает истинностную двузначную таблицу для классической эквивалентности на трехзначную таблицу для импликации Лукасевича и дает аксиоматизацию вновь полученной шестизначной логики. Н. Решер *[Rescher* 1969] в качестве примера рассматривает произведение $\mathfrak{M}_2^c \times \mathfrak{M}_3^{\text{Ł}}$. Он также рассматривает для общего случая вопрос о классе тавтологий результирующей матрицы.

4.3.2. Другие операции. Финитная аппроксимируемость

Кроме рассмотренного метода получения новых матриц, мощность которых есть произведение мощностей сомножителей, Яськовский *[Jaskowski* 1936] вводит также операцию $\Gamma(\mathfrak{M}_n)$, которая позволяет получать *n*+1-значную матрицу на основе *n*-значной $(n \geq 2,\ n \in N)$ таким образом, что для произвольной матрицы $\mathfrak{M}_n$, $E(\mathfrak{M}_n) \neq E(\mathfrak{M}_{n+1})$. Делается это следующим образом.

Пусть $\mathfrak{M}_n = \langle V_n, \neg, \supset, \vee, \wedge, \{1\} \rangle$ есть некоторая исходная матрица, где $V_n = \{1, {}^{1}/_{n-1}, {}^{2}/_{n-1}, \ldots, {}^{n-2}/_{n-1}, 0\}$.Тогда матрица $\mathfrak{M}_{n+1}$с множеством значений V_{n+1} и с тем же самым выделенным элементом 1 определяется так:

$\mathfrak{M}_{n+1} = \Gamma(\mathfrak{M}_n)$,

где Г есть операция добавления нового элемента *a** к множеству V_n, причем матричные операции $\neg^*, \supset^*, \vee^*, \wedge^*$ в $\Gamma(\mathfrak{M}_n)$ доопределяются по общей схеме посредством введенной ниже функции $\alpha(x)$, область определения которой есть V_n:

1) $\alpha(1) = a^*$ и $a^* \notin V_n$.
2) если $x \neq 1$, то $\alpha(x) = x$ для любого $x \in V_n$.

Операции в $\Gamma(\mathfrak{M}_n)$ определяются следующим образом:

	$\neg^*$
1	$\alpha(\neg 1)$
$\alpha(x)$	$\neg x$

$\supset^*$	1	$\alpha(y)$
1	$1 \supset 1$	$\alpha(1 \supset y)$
$\alpha(x)$	$x \supset 1$	$x \supset y$

$\vee^*$	1	$\alpha(y)$
1	$1 \vee 1$	$1 \vee y$
$\alpha(x)$	$x \vee y$	$\alpha(x \vee y)$

$\wedge^*$	1	$\alpha(y)$
1	$1 \wedge 1$	$\alpha(1 \wedge y)$
$\alpha(x)$	$\alpha(x \wedge 1)$	$\alpha(x \wedge y)$

В качестве примера применим операцию Г к матрице классической двузначной логики $\mathfrak{M}_2^c$, где *x* = 1 или 0, *y* = 1 или 0 и пусть $\alpha(1) = a^* = ½$. Тогда $\Gamma(\mathfrak{M}_2^c)$имеет вид:

	$\neg^*$
1	0
$\alpha(1) = ½$	0
$\alpha(0) = 0$	1

$\supset^*$	1	$\alpha(1)$	$\alpha(0)$
1	1	$\alpha(1 \supset 1)$	$\alpha(1 \supset 0)$
$\alpha(1)$	$1 \supset 1$	$1 \supset 1$	$1 \supset 0$
$\alpha(0)$	$0 \supset 1$	$0 \supset 1$	$0 \supset 0$

$\supset^*$	1	$½$	0
1	1	$½$	0
$½$	1	1	0
0	1	1	1

Аналогичным способом определяются операции $\vee^*$ и $\wedge^*$. В результате мы получили не что иное, как характеристическую матрицу для трехзначной логики Рейтинга **G**₃ (см. 2.2). Эта матрица получила название «первой матрицы Яськовского». В зависимости от того, как определяется $\Gamma(\mathfrak{M}_n)$, можно получать различные логики. Например, Н. Решер *[Rescher* 1969] вводит другую операцию, а именно $G(\mathfrak{M}_n)$ такую, что для произвольной матрицы $\mathfrak{M}_n$, $E(\mathfrak{M}_n) = E(\mathfrak{M}_{n+1})$.

Комбинируя метод умножения матриц и способ получения *n*+1-значной матрицы на основе *n*-значной, С. Яськовский строит бесконечную последовательность J_i конечных матриц, определяемую так:

$J_0 = \mathfrak{M}_2^c$ (классическая двузначная логика),

$J_{n+1} = \Gamma((J_n)^n)$,

где $(J_n)^n$ - декартова *n*-ая степень с основным множеством $(V_n)^n$.

В соответсвии с определением матриц J_i их основные множества $V_0, V_1\ \ V_2, \ldots$ состоят соответственно из элементов исходной матрицы $\mathfrak{M}_2^c$, из упорядоченных пар этих элементов, из упорядоченных троек упорядоченных пар и т.д. Заметим, что матрицы Яськовского J_i имеют

$$(\ldots((((2^1+1)^2+1)^3+1)^4+1)^5\ldots)^n+1$$

элементов. В частности, J_0, J_1, J_2, J_3, J_4 имеют соответственно 2, 3, 10, 1001 и 1004006004002 элементов. Таким образом, число элементов в матрицах Яськовского растет исключительно быстро, но каждая из них конечна.

Рассмотренные операции над логическими матрицами были введены С. Яськовским для получения следующего результата: *бесконечная последовательность матриц Яськовского* J_i *является характеристической для интуиционистского пропозиционального исчисления* **Int** (Об **Int** см. ниже в разделе 8.2.2). Еще говорят, что последовательность матриц J_i *финитно аппроксимирует* **Int**.

Последнее означает, что для всякой формулы *A,* которая не выводима в **Int**, найдется в J_i матрица, на которой *A* не верна. Из свойства финитной аппроксимируемости следует важное свойство разрешимости исчисления. Роль разрешающего алгоритма играет параллельный перебор всевозможных выводов и всевозможных конечных матриц, чтобы найти вывод данной формулы в этом исчислении или ее опровергнуть. Однако не для всякого исчисления можно построить финитно аппроксимируемую модель или, по-другому, не всякое исчисление имеет *финитно-модельное свойство* (finite model property) *[Harrop* 1958].

Введем еще одно важное понятие, характеризующее логическое исчисление **L** в терминах истинностных таблиц. Исчисление **L'** называется *расширением* исчисления **L** , если каждая доказуемая формула **L** также доказуема в **L'**. Расширение **L'** называется *собственным* расширением исчисления **L**, если **L**' непротиворечиво, но содержит формулу не выводимую в **L**. Например, исчисление классической двузначной логики $\mathbf{C}_2$ является собственным расширением исчисления $\mathbf{P}^1$ и к тому же единственным (см. гл. 2).

Исчисление **L** называется *предтабличным,* если все его собственные расширения табличны, т. е. являются конечнозначными логиками. Важные примеры предтабличных логик мы рассмотрим в гл 8.

4.4. Понятие решетки. Основные свойства

Поскольку, как уже говорилось, логическая матрица $\mathfrak{M}$ есть алгебра $\mathcal{A}$ с множеством выделенных элементов D, то представляется возможным привлечь свойства *решеток* для характеризации многозначных логик. Эта характеризация окажется весьма полезной, поскольку открывает внутренний смысл того, что какая-то формула *A* не является общезначимой в данной матрице $\mathfrak{M}$, или того, что какая-то логическая связка одной логики не выразима посредством логических связок в другой логике. Но, главное, позволяет классифицировать логики относительно их решеточных свойств.

Имеются два стандартных (эквивалентных) определения понятия *решетки.* В первом случае выделяется специальный вид частично упорядоченного множества $< L,\ \leq >$, и преимущество здесь в геометрическом представлении; во втором случае решетка $< L, \leq >$ характеризуется как алгебра $< L, \vee, \wedge >$, т.е. как множество с заданными на нем двумя бинарными операциями. Кратко рассмотрим первый случай, а затем акцентируем внимание на втором подходе (см. *[Гретуер* 1982]).

Отношения, обладающие свойствами рефлексивности $(x \leq x)$, антисимметричности (из $x \leq y$ и $y \leq x$ следует $x = y$) и транзитивности (из $x \leq y$ и $y \leq z$ следует $x \leq z$), называются *отношениями частичного порядка,* а множества, на которых заданы такие отношения, называются *частично упорядоченными множествами* (кратко *ч.у. множествами).* Ч.у. множество $<L, \leq >$, которое обладает также свойством линейности $(x \leq y$ или $y \leq x)$, называется *цепью* (его называют также *линейно упорядоченным множеством).* Далее определяются *sup* и *inf* в произвольном ч.у. множестве (т.е. в $< L, \leq >$).

Пусть $H \subseteq L$ и $x \in L$. Тогда *x* называется *верхней границей* подмножества *H*, если $h < x$ для всех $h \in H$. Верхняя граница *x* подмножества *H* называется его *верхней гранью* или *супремом,* если $x \leq y$ для любой верхней границы *y* подмножества *H*. Это записывается через $x = sup\ H$ или $x = \vee H$. Понятие *нижней границы* и *инфимума* определяется аналогично (двойственным образом) и инфимум записывается через $inf\ H$ или $\wedge H$.

Ч.у. множество $< L, \leq >$ называется *решеткой,* если для всех $x, y \in L$ существуют $sup\{x, y\}$ и $inf\{x, y\}$. Решетка *L* называется *полной,* если $\vee H$ и $\wedge H$ существуют для любого подмножества $H \in L$.

Приведем два важных свойства ч.у. множеств: 1) линейно упорядоченное множество с *sup* и *inf* образует (дистрибутивную) решетку; 2) пусть $\mathcal{P}(E)$ есть множество всех подмножеств множества *E,* упорядоченное отношением включения $\subseteq$. Тогда $<\mathcal{P}(E),\ \subseteq>$ есть (булева) решетка.

Однако во многих случаях предпочтительней охарактеризовать решетку $< L,\ \leq >$ как алгебру $< L,\ \vee,\ \wedge>$. Тогда все понятия и методы универсальной алгебры были бы применимы к решеткам. В этом случае частичный порядок ≤ вводится так: $x \leq y$ означает $x \wedge y = x$.

Непустое множество *L* с двумя бинарными операциями $\vee$ и $\wedge$ на *L* называется *решеткой,* если *L* удовлетворяет следующим тождествам:

I. (a) $x \vee x = x$

(b) $x \wedge x = x$ (*идемпотентность*)

II. (a) $x \vee y = y \vee x$

(b) $x \wedge y = y \wedge x$ (*коммутативность*)

III. (a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (*ассоциативность*)

IV. (a) $x \vee (x \wedge y) = x$

(b) $x \wedge (x \vee y) = x$ (*поглощение*)

(Заметим, что пара тождеств (I) выводима из остальных.)

Обратим внимание, что единственными аксиомами, связывающими верхнюю полурешетку $< L;\ \vee >$ с нижней полурешеткой $< L;\ \wedge >$, являются аксиомы поглощения (IV). Непустое множество *L* называется *квази-решеткой [Plonka* 1967], если выполняются только тождества (I) - (III).

Решетка *L* называется *дистрибутивной,* если выполняются законы дистрибутивности:

V. (a) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(b) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(Один из законов дистрибутивности выводим из остальных тождеств.)

Дистрибутивные решетки лежат в основе большинства хорошо известных многозначных логик. Специально дистрибутивным решеткам посвящена монография *[Balbes and Dwinger* 1974].

Дистрибутивные решетки *L* называются *решетками Де Моргана [Moisil* 1935], или *дистрибутивными решетками с инволюцией {distributive i-lattices) [Kahnan* 1958], если для одноместной операции ~ выполняются тождества

VI. ${\sim}{\sim}x = x$

VII. ${\sim}(x \vee y) = {\sim}x \wedge {\sim}y$

VIII. ${\sim}(x \wedge y) = {\sim}x \vee {\sim}y.$

Решетка *L* с двумя нульарными операциями 0 и 1 называется *ограниченной:*

IX. (a) $x \vee 0 = x$

(b) $x \wedge 1 = x.$

X. (a) $x \vee 1 = 1$

(b) $x \wedge 0 = 0.$

Ограниченные решетки иногда называются алгебрами.

(Вопрос здесь чисто терминологтческий, поскольку решетка $< L,\ \vee,\ \wedge >$ есть алгебра с двумя бинарными операциями, которые удовлетворяют тождествам (I) - (IV). Тем не менее, Г. Гретцер *[Гретцер* 1982] вводит это различие.)

Соответственно ограниченные дистрибутивные решетки $<L,\ \vee,\ \wedge,\ \sim,\ 0,\ 1>$ с отрицанием Де Моргана (тождества VI - VIII) называются *алгебрами Де Моргана {Balbes and Dwinger* 1974].

Алгебры Де Моргана (решетки Де Моргана), в которой операция ~ удовлетворяет условию

(*К*). $x \wedge {\sim}x \leq y \vee {\sim}y$ для всех $x,\ y \in L,$

называются *алгебрами Клини (решетками Клини) [Kahnan* 1958].

О характеристическом тождестве, превращающем алгебру де Моргана в алгебру Клини, см. ниже в разделе 9.2. Условие (закон) Клини является довольно-таки сильным свойством и не имеет места, например, в четырехзначной логике Белнапа (см. ниже раздел 5.4.4).

4.4.1. Булевы алгебры

В ограниченной решетке *L* элемент *y* называется *дополнением x,* если $x \wedge y = 0$ и $x \vee y = 1.$ В этом случае элемент *y* обозначают ~*x*.

Булевой алгеброй называется дистрибутивная решетка *с дополнениями.* Можно показать, что в булевой решетке каждый элемент имеет *единственное* дополнение. Имеется большое число различных (эквивалентных) систем тождеств, определяющих класс булевых алгебр.

Например, алгебра $\mathcal{B}\ =\ <L,\ \vee,\ \wedge,\ \sim,\ 0,\ 1>$ называется *булевой* *алгеброй,* если $<L, \vee, \wedge, 0, 1>$ есть ограниченная дистрибутивная решетка и выполняются следующие два тождества для операции дополнения:

$(B1).\ x \vee \sim x = 1$

$(B2).\ x \wedge \sim x = 0.$ и

Понятно, что булева алгебра является также алгеброй де Моргана и Клини, поскольку все условия для последних выполняются в булевой алгебре.

Примеры. 1) *Алгебра классических истинностных значений.* Двухэлементная структура $\mathcal{B}_2 = <\{0, 1\}, \vee, \wedge, \sim, 0, 1>$ с операциями, определенными посредством истинностных таблиц, является булевой алгеброй. Другими словами, алгебра $\mathcal{B}_2$ является простейшей *моделью* булевой алгебры,

2) *Алгебра подмножеств.* Пусть $\mathcal{P}(U)$ есть множество всех подмножеств некоторого множества *U.* Для $X \in \mathcal{P}(U)$ определим —*X* как дополнение *U\X* множества *X,* а для X и *Y* из $\mathcal{P}(U)$ пусть $X \cup Y$ обозначает обычное теоретико-множественное объединение множеств *X* и Y, а $X \cap Y$ обозначает теоретико-множественное пересечение множеств *X* и *Y.* Тогда < $\mathcal{P}(U), \cup, \cap, - >$ оказывается булевой алгеброй. Роль 0 играет пустое множество $\varnothing$, а 1 есть *U.*

Классическим и одним из наиболее важных результатов в теории булевых алгебр стала ***Теорема представления Стоуна*** [*Stone* 1936]: *Любая булева алгебра изоморфна алгебре подмножеств подходящего множества.*

Таким образом, булевы алгебры полностью сводятся к алгебрам подмножеств. Например, для конечных булевых алгебр: если $\mathcal{A} = <A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1>$ есть любая булева алгебра, то существует определенное множество *U* и множество *B* всех подмножеств *U,* замкнутое относительно булевых операций, такое, что алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна булевой алгебре $\mathcal{B} = <B, \vee, \wedge, \sim, \varnothing, U>.$

Другая теорема представления утверждает: *каждая булева алгебра изоморфна подалгебре прямого произведения двухэлементной булевой алгебры* $\mathcal{B}_2$; или в другой формулировке: *каждая булева алгебра изоморфна подпрямому произведению двухэлементной булевой алгебры* $\mathcal{B}_2$.

Алгебры Буля, явившись результатом исследований Г. Буля в области законов правильных рассуждений (1847 г.), нашли самое широкое применение в логико-математических исследованиях, в области инженерии контактно-релейных схем, компьютерных наук, аксиоматической теории множеств, теории моделей и в других областях науки и математики. Хорошее введение в теорию булевых алгебр имеется в *[Bwris and Sankappanavar* 1981]. См. также *[Владимиров* 1969]. Популярное изложение имеется в *[Яглом* 1980], где рассматриваются также конечные булевы алгебры. Имеется трехтомный справочник по булевым алгебрам [Mcw/c (ed), 1989].

4.4.2. Другие "логические" алгебры

Особое место в исследовании многозначных логик занимают *алгебры Гейтинга.* Пусть *L* - решетка с 0, тогда элемент $\urcorner x$ называется *псевдодополнением* элемента $x \in L,$ если $x \wedge \urcorner x = 0$ и $x \wedge y = 0$ влечет за собой $y \leq \urcorner x.$ Любой элемент не может иметь более одного псевдодополнения. Обобщение понятия псевдодополнения ведет к понятию *относительного псевдодополнения.* Пусть *L* - непустое множество и $x, y \in L.$ Элемент $z \in L$ называется *псевдодополнением* элемента *x относительно y,* если *z* — наибольший элемент со свойством $x \wedge z \leq y.$ Относительное псевдодополнение обозначается посредством $x \Rightarrow y.$ Решетка *L* называется *импликативной* (см. *[Расёва и Сыкорский* 1972,), если $x \Rightarrow y$ существует для всех элементов $x, y \in L.$ Заметим, что решетка с => обладает наибольшим элементом 1, так как для любого $x,\ x \Rightarrow x = 1;$ и, главное, решетка с $\Rightarrow$ является дистрибутивной. Каждая импликативная решетка с наименьшим элементом 0 есть *алгебра Рейтинга'.* Или, по-другому, алгебры Рейтинга являются решетками с 0, *резидуалъными* относительно пересечения *[Blyth and Janowith* 1972], где *резидуальными* относительно $\wedge$ является как раз операция $\Rightarrow$, определяемая следующим образом:

$x \leq y \Rightarrow z$ *т.т.т., когда* $x \wedge y \leq z.$

Как эквациональный класс $<L, \vee, \wedge, \Rightarrow, 0, 1>$ есть алгебра Рейтинга, если $< L, \vee, \wedge, 0, 1 >$ есть ограниченная дистрибутивная решетка и для бинарной операции $\Rightarrow$ выполняются следующие три тождества *[Эсакиа* 1985]:

$(H1).\ x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$

$(H2).\ x \wedge (y \Rightarrow z) = x \wedge (x \wedge y \Rightarrow x \wedge z)$

$(H3).\ (x \wedge y \Rightarrow x) \wedge z = z.$

Заметим, что в алгебре Рейтинга имеет место $\urcorner x = x \Rightarrow 0.$ Если к

алгебре Рейтинга $<L, \vee, \wedge, \Rightarrow, 0, 1>$ добавить, например, закон исключенного третьего $x \vee \rceil x = 1$ или закон двойного отрицания $\rceil\rceil x = x,$ то получим аксиоматизацию булевой алгебры.
Дистрибутивные решетки с операцией $\Rightarrow$ (но в других обозначениях), а также с дуальной к ней операцией $\Leftarrow$ впервые исследовались Т. Скулемом, начиная с 1919 г. (см. *[Карри* 1969]). Такие алгебры X. Карри называет *скулемовскими структурами.*
Операция $\Leftarrow$ есть бинарная операция, дуальная к $\Rightarrow$, т. е. элемент $z\ (= x \Leftarrow y)$ является наименьшим элементом со свойством $x \vee z \geq y.$ Операция $x \Leftarrow y$ в *[Расёва и Сикорский* 1972] называется «псевдоразностью». В *[McKinsey and Tarski* 1946] алгебра $<L, \vee, \wedge, \Leftarrow, 0, 1>$..... изучается под названием *брауэровой алгебры.* Или, по-другому, алгебры Брауэра являются решетками с 1, резидуальными относительно объединения:
$x \geq y \Leftarrow z$ *т.т.т., когда* $x \vee y \geq z.$

Заметим, что в алгебре Брауэра имеет место $\lceil x = x \Leftarrow 1,$ где унарная операция $\lceil$ называется *дуальным псевдодополнением.*
Алгебра $<L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftarrow, 0, 1>$ называется *дважды* (double) *гейтинговой алгеброй,* или *дважды брауэровой алгеброй,* или *полу-булевой алгеброй* (под этим названием она аксиоматизируется в работе *[Rauszer* 1974]), или *алгеброй Скулема [Григолия* 1987], если $<L, \vee, \wedge, \Rightarrow, 0, 1>$ есть алгебра Рейтинга, а $<L, \vee, \wedge, \Leftarrow, 0, 1>$ есть алгебра Брауэра. Дважды алгебры были введены, чтобы восстановить принцип дуальности булевой алгебры.
Алгебра $<L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 0, 1>$ называется *симметрической алгеброй Рейтинга [Monteiro A.* 1969], если $<L, \vee, \wedge, \Rightarrow, 0, 1>$ есть алгебра Рейтинга и $<L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1>$ есть алгебра де Моргана.
Операция ~ на решетке *L* позволяет рассмотреть принцип дуальности: каждое утверждение, доказанное для $\vee,\ \wedge$ и $\sim,$ остается истинным, если $\vee$ и $\wedge$ заменить соответственно на $\wedge$ и $\vee.$ Более того, здесь $x \Leftarrow y = \sim(\sim x \Rightarrow \sim y).$ Таким образом, симметрическая алгебра Гейтинга есть дважды алгебра Рейтинга.
Алгебра $<L, \vee, \wedge, \rceil, 0, 1>$ называется *p-алгеброй,* если $<L, \vee, \wedge, 0, 1>$ есть ограниченная (дистрибутивная) решетка и для любого $x \in L$ элемент $\rceil x$ является *псевдодополнением* элемента *x,* т.е. $x \wedge a = 0$ т.т.т., когда $a \leq \rceil x.$ Алгебра $<L, \vee, \wedge, \rceil, \lceil, 0, 1>$ называется *дважды p-алгеброй,* если $<L, \vee, \wedge, \rceil, 0, 1>$ есть *p*-алгебра и $<L, \vee, \wedge, \lceil, 0, 1>$ — *дуальная p-алгебра,* где для любого $x \in L$ элемент $\lceil x$ является *дуальным псевдодополнением* элемента *x,* т.е. $x \vee a = 1$ т.т.т., когда $a \geq \lceil x.$
Введем новые понятия.
Непустое множество назовем *промежуточной решеткой,* если выполняются тождества (I), (III), (IV); и ограниченной промежуточной решеткой, если выполняются тожества (I), (III), (IV), (IX), (X), причем в X(a) переставлены местами дизъюнктивные члены, а в X(b) переставлены местами конъюнктивные члены.
Некоммутативной алгеброй Клини назовем алгебру $<L, \vee, \wedge, \sim, 1, 0>,$ где $L \neq \varnothing, \vee$ и $\wedge$ — бинарные операции на *L,* а ~ —унарная операция на *L,* удовлетворяющие условиям (I), (III), (IV) - (VIII), тождество (X) и закон Клини изменены:
X. (a) $1 \vee x = 1$ (левая единица относительно дизъюнкции)
(b) $0 \wedge x = 0$ (левый ноль относительно конъюнкции)
$K.\ (y \wedge \sim y) \vee (x \vee \sim x) = y \vee \sim y$ (переставленный закон Клини),
Алгебра $<L, \vee, \wedge, \rceil, 0, 1>$ называется *промежуточной p-алгеброй,* если $<L, \vee, \wedge, 0, 1>$ есть ограниченная промежуточная решетка и для любого $x \in L$ элемент $\rceil x$ является псевдодополнением элемента *x.* Алгебра $<L, \vee, \wedge, \rceil, \lceil, 0, 1>$ называется *дважды промежуточной p-алгеброй,* если $<L, \vee, \wedge, \rceil, 0, 1>$ есть *промежуточная p-алгебра* и $<L, \vee, \wedge, \lceil, 0, 1>$ — *дуальная промежуточная p-алгебра,* где для любого $x \in L$ элемент $\lceil x$ является дуальным псевдодополнением элемента *x.*
Алгебра $<L, \vee, \wedge, \rceil, 0, 1>$ называется *слабой p-алгеброй,* если $<L, \vee, \wedge, 0, 1>$ есть ограниченная квази-решетка, снабженная операцией псевдодополнения $\rceil.$ Алгебра $<L, \vee, \wedge, \rceil, \lceil, 0, 1>$ называется *дважды слабой p-алгеброй,* если $<L, \vee, \wedge, \lceil, 0, 1>$ - *дуальная промежуточная p-алгебра,* снабженная операцией дуального псевдодополнения.

4.5. Алгебраическая семантика

Алгебраическое рассмотрение многозначных логик служит полезным инструментом при выяснении структуры и взаимоотношения последних. В общем случае существенным является вопрос о построении *алгебраической семантики,* под которой понимается класс всех моделей некоторой алгебры $\mathcal{A}$ логики **L**.
В алгебраизации логики особую роль сыграла идея А. Линденбаума (1926/27), который предложил рассматривать формализованный

пропозициональный язык $\mathcal{L}$ как универсальную алгебру формул $\mathfrak{I} = <Fm, \neg, \supset, \vee, \wedge>$ с операциями, соответствующими логическим связкам этого же языка $\mathcal{L}$. Следующий шаг приводит нас к *алгебре Линденбаума,* которая играет важнейшую роль в процессе алгебраизации логики.

Рассмотрим бинарное отношение ≈ на множестве формул *Fm* пропозиционального языка классической логики $\mathbf{C}_2$: $A \approx B$ т.т.т., когда $A \equiv B$ есть доказуемая формула. Легко убедиться, что ≈ есть отношение эквивалентности на множестве формул *Fm* и является *конгруэнцией* на алгебре формул $\mathfrak{I} = <Fm, \neg, \supset, \vee, \wedge>$. Тогда $Fm/_{\approx}$ обозначает фактор-множество по отношению эквивалентности ≈ .

Класс эквивалентности, содержащий *A,* будем обозначать посредством |A|, Для произвольных классов эквивалентности |A| и |B| из $Fm/_{\approx}$ пусть $|A| \cup |B| = |A \vee B|$, $|A| \cap |B| = |A \wedge B|$ и $-|A| = |\neg A|$. Тогда алгебра $\mathcal{L}^* = <Fm/_{\approx}, \cup, \cap, -, \mathbf{0}, \mathbf{1}>$ называется *алгеброй Линденбаума* (классической логики) и есть не что иное, как булева алгебра. Другими словами, алгебры Линденбаума классической пропозициональной логики, полученные подобным образом, являются (с точностью до изоморфизма) счетными булевыми алгебрами.

Нулевым элементом **0** здесь является класс всех противоречий $|A \wedge \neg A|$, а единицей **1** - класс эквивалентности, состоящий из всех тавтологий $|A \vee \neg A|$.

Легко видеть, что между эквивалентностями классической логики высказываний $\mathbf{C}_2$ и тождествами булевой алгебры существует соответствие. Например, между формулой $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ и первым тождеством в (II). Более того, $\vdash A$ в $\mathbf{C}_2$ *т.т.т,, когда* $A^* = \mathbf{1}$ *в* $\mathcal{L}^*$,где А* есть аналог *A* на языке алгебры $\mathcal{L}^*$. Таким образом, возникают средства для *алгебраического* доказательства дедуктивной полноты логических исчислений. Основываясь на этом, А. Тарский в 1935 г. в точности устанавливает связь между классическим пропозициональным исчислением и булевой алгеброй (так называемый метод Линденбаума-Тарского).

Л. Хенкином, Р. Сикорским, Е. Расёвой и др. было осознано, что этот метод может быть применен к другим логикам со связкой импликации, удовлетворяющей некоторым базисным свойствам. Такого рода обобщение было проведено в книге Е. Расёвой *[Rasiowa* 1974], где впервые вводится понятие *«алгебраического примера* (counter-part) *логики».* Магистральное развитие *алгебраической логики* состояло в систематическом исследовании широкого класса логик алгебраическими методами. Одной из целей явилось установление общего критерия для класса алгебр (или для класса математических

объектов, тесно связанных с алгебрами) быть алгебраическим примером логики и развитие для этого самих методов.

Первым примером алгебраической семантики для пропозициональных логик являются класс **BA** булевых алгебр, который является алгебраической семантикой для классической логики $\mathbf{C}_2$. Каждая булева алгебра имеет наибольший элемент согласно их естественному порядку, который обычно обозначается посредством $\mathbf{1}^{A}$. Этот элемент взят как выделенный, относительно которого дана алгебраическая семантика. Тогда *точное* определение алгебраической семантики для классической логики $\mathbf{C}_2$ выглядит следующим образом:

$\Gamma \vdash_{\mathrm{C}} A$ *т.т.т., когда для каждой* $\mathbf{A} \in \mathbf{BA}$ *и каждой оценки v на* А, *если для всех* $B \in \Gamma$ $\nu(B) = \mathbf{1}^{\mathbf{A}}$, *тогда* $\nu(A) = \mathbf{1}^{\mathbf{A}}$.

Импликация слева направо есть теорема об алгебраической корректности, а импликация в другую сторону есть теорема об алгебраической полноте, доказательство которой основано на методе Линденбаума-Тарского (см. изложение этого метода в *[Jansana* 2006]).

Заметим, что если вместо класса **BA** булевых алгебр возьмем класс алгебр Рейтинга, то этот класс является в точности алгебраической семантикой (в выше определенном смысле) для интуиционистской пропозициональной логики **Int**.

Класс логик, для которых имеет место алгебраическая семантика, обычно детерминированная алгеброй Линденбаума, получил название *протоалгебраизуемых* логик *[Blok and Pigozzi* 1986].

Протоалгебраизуемые логики включают в себя почти все хорошо известные логики и составляют главный класс логик, для которых углубленные методы универсальной алгебры могут быть применены к их логическим матрицам, чтобы получить строгие и интересные результаты. Именно алгебры Линденбаума являются фундаментальным свойством протоалгебраизуемых логик.

Однако не всякая логика может быть алгебраизуема подобным образом. Для этого логическая связка эквиваленции должна быть подходящей. Например, в релевантной логике **R** и логике следования **E** (см. ниже раздел 8.5) существуют теоремы *A* и *B,* для которых импликация *A* → *B* не есть теорема. Следовательно, множество всех теорем не совпадает с классом эквивалентности, определенным отношением ≈. Поэтому встал вопрос об обобщении метода Линденбаума-Тарского, т.е. ставится вопрос о подходящем обобщении отношения конгруэнтности на алгебрах и построении более общей теории алгебраизуемых логик. В работе В. Блока и Д. Пигоцци *[Blok andPigozzi* 1989] вводится *лейбницево отношение конгруэнтности*', строго определяется понятие *алгебраической семантики* (см. выше), а понятию *алгебраизуемая логика* дано математически точное определение. Основополагающая идея состояла в следующем: логика является *алгебраизуемой,* если существует класс алгебр, относящийся к этой логике точно так же, как существует класс булевых алгебр, относящихся к классической логике. Заметим, что понятие алгебраизуемой логики, введенное в этой работе, относится только к финитарным логикам, которые еще называются *"конечно-алгебраизуемыми | логиками".*

Здесь уже релевантная логика **R** является алгебраизуемой, но не **E** (об этих логиках см. в разделе 8.5.1). Неалгебраизуемыми оказываются импликативные фрагменты этих логик, в то время как $\mathbf{Ħ}_{\to}$ и $\mathbf{TV}_{\to}$ алгебраизуемы . Доказано также, что известная паранепротиворечивая логика да Косты $\mathbf{C}_1$ неалгебраизуема (см. об этом ниже в разделе 8.6.3.1), а следовательно, все логики из класса $\mathbf{C}_n$. С алгебраизацией паранепротиворечивых логик вообще возникают трудности, в силу отсутствия в них правила подстановочности эивалентности (см. там же). Тем не менее *алгебраическая семантика* имеет место для исключительно широкого класса логических систем. См. *[Font and Jansana* 1996] и *[Blok and Rebagliato* 2003]. Наличие алгебраической семантики для некоторой логики **L** имеет большое методологическое значение. Речь идет о связи между отдельным металогическим свойством специфической логики **L**, которая является алгебраизуемой, и алгебраическим свойством ассоциированного с нею класса алгебр **Alg(L).** Например, **L** допускает строго полную гильбертовскую аксиоматизацию ($\Gamma \vdash A$ т.т.т., когда $\Gamma \models A$) т.т.т., когда **Alg(L)** есть финитно аксиоматизируемое квази-многообразие.

Алгебраизация логики достигла такого уровня, что возникла уверенность, что *всё в логике есть законы алгебры* (см., например, *[Halmos and Givant* 1998]).

Абстракция метода Линденбаума-Тарского играет главную роль в развитии самой алгебраической логики. В результате в конце XX века появился термин "абстрактная алгебраическая логика" (см. обзор *[Font, Jansana, and Pigozzi* 2003]). Здесь дается классификация логик под названием *"иерархия Лейбница".* Приводится 10 классов логик (см. рис. 1 на с. 49), в один из которых входит *всего лишь* классическая логика $\mathbf{C}_2$ наряду с интуиционистской логикой **Int,** нормальными модальными логиками Льюиса, различными конечнозначными логиками, бесконечнозначной логикой Лукасевича $\mathbf{Ł}_{\infty}$ и т.д. Алгебраизацию многозначных логик Лукасевича мы в дальнейшем рассмотрим, Однако заметим, что для большинства интересующих нас логик хорошо работает теория логических матриц. Более того, в основном мы можем ограничиться лишь *характеристическими матрицами.* Такая

семантика гораздо проще, чем алгебраическая, и с философской точки зрения предпочтительней.

4.5.1. Алгебраизация $\mathbf{Ł}_3$

Теперь рассмотрим алгебраические примеры трехзначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$. В разделе 2.1.2 было показано, что логики с множествами исходных связок $\{\rightarrow, \sim\}$ и $\{\vee, \wedge, \sim, \Diamond\}$ эквивалентны. Именно в этой сигнатуре в *[Moisil* 1940] было введено понятие трехэлементной алгебры Лукасевича, аксиоматизация которой была значительно упрощена А. Монтейро *[Monteiro A.* 1963]: Алгебра

$$Ł_3 = <\{1, {}^1/_2, 0\}, \vee, \wedge, \sim, \Diamond, 1>$$

есть трехэлементная алгебра Лукасевича, где $<\{1, {}^1/_2, 0\}, \vee, \wedge, 1>$ есть дистрибутивная решетка с 1 и для унарных операторов ~ и $\Diamond$ выполняются следующие тождества:

1. $\sim\sim x = x,$
2. $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y,$
3. $\sim x \vee \Diamond x = 1,$
4. $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \Diamond x,$
5. $\Diamond\, (x \wedge y) = \Diamond x \wedge \Diamond y.$

(Как показано в *[Monteiro A.* 1963], эти пять тождеств вместе с двумя тождествами: $x \wedge (x \vee y) = x$ и $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ являются независимой аксиоматизацией $Ł_3$.)

Или, по-другому, трехэлементная алгебра Лукасевича $Ł_3$ есть алгебра де Моргана, снабженная операцией $\Diamond$, удовлетворяющей условиям (3), (4), (5). Или, по-другому, $Ł_3$ есть алгебра Клини, снабженная операцией $\Diamond$, удовлетворяющей условиям (3), (4). Заметим, что существует большое число эквивалентных алгебраических построений для $\mathbf{Ł}_3$. Чтобы это как-то систематизировать, обратим внимание на следующий факт: все сформулированные выше алгебры, начиная с алгебры де Моргана, на двухэлементном множестве {0, 1} превращаются в булеву двухэлементную алгебру.

С введением третьего элемента положение становится не столь тривиальным, однако все указанные дважды алгебры, а также симметрическая алгебра Гейтинга и некоторые объединения их сигнатур являются трехэлементными алгебрами Лукасевича $Ł_3$, поскольку трехзначные логики со множествами связок

$\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \sim\}$, $\{\vee, \wedge, \rceil, \lceil\}$, $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftarrow\}$, $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \lceil\}$, $\{\vee, \wedge, \Leftarrow, \rceil\}$,

$\{\vee, \wedge, \sim, \rceil\}$, $\{\vee, \wedge, \sim, |\}$ функционально эквивалентны и все представляют $Ł_3$. ,
Поэтому неудивительно, что в *[Monteirp L.* 1970] дана характеризация $Ł_3$ в терминах симметрическойалгебры Гейтинга; в *[Varlet* 1968; 1969] — в терминах дважды *p*-алгебр; в *[Iturrioz* 1976] - в терминах дважды алгебры Гейтинга, и в *[Bechio* 1978] - в терминах алгебры Рейтинга с дуальным псевдодополнением и в терминах дуальной, алгебры Гейтинга с псевдодополнением. Заметим, что приведенную выше аксиоматизацию $Ł_3$ можно рассматривать как аксиоматизацию в терминах алгебры де Моргана с псевдодополнением $\rceil$, если заменить всюду оператор $\Diamond$ на $\rceil\rceil$. Также в разделе (8.1.1) мы приведем алгебраический пример $Ł_3$в виде трехэлементной MV-алгебры. Имеются и другие алгебраические рассмотрения $Ł_3$. См., например, *[Monteiro A.* 1980] и *[Abad and Figalla* 1984]). Современный уровень алгебраического анализа $Ł_3$см. в *[Cignoli and Monteiro* 2006], где дана характеризация структуры максимальных подалгебр трехзначных алгебр Лукасевича (см. ниже раздел 7.5.2).
Обратим также внимание на представление $Ł_3$ в виде *промежуточной р-логики* со связками $\{\vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \rceil\}$ (см. 3.4.6), Отсюда следует, что $Ł_3$ можно рассматривать как *промежуточную р-алгебру.*
Интересно проследить изменение алгебраических структур с увеличением числа элементов. Например, известно, что если *n* > 3, то отрицание де Моргана нельзя определить посредством псевдодополнения и дуального псевдодополнения вместе с решеточными операциями. Поэтому уже точная характеризация $Ł_4$ посредством дважды *р*-алгебр непригодна. Все дело в том, что функциональные свойства $Ł_3$ настолько «богаты» и обладают таким «критическим» свойством, что допускают много различных алгебраических характеризаций.

4.5.2 Алгебраизация некоторых других трехзначных логик

Очевидно, что трехзначная матричная логика Рейтинга **G**3 есть модель для алгебры Рейтинга. В свою очередь, $\mathbf{G}_3^*$ есть трехзначная модель для алгебры Брауэра. Алгебраизация **G**3 приводится в *[Раца* 1965].
В *[Финн* 1974] вводится понятие трехэлементной алгебры Бочвара. Более подробно об этом см. в *[Finn and Grigolia* 1993], где алгебраизация В3 дается в сигнатуре $<\dot\cup, \cap, \sim, J_0, J_{1/2}, J_1, 0, 1>$.

Здесь $<\dot\cup, \cap, \sim>$ есть деморгановская дистрибутивная квази-решетка. Известно, какую роль играют дистрибутивные решетки с псевдодополнением (*р*-алгебры). Обратим внимание на представление логики **В**3 Н.Е. Томовой в виде *слабой р-логики* со связками $\dot\cup, \cap$ и $\rceil$ (см. 3.4.6). Отсюда следует, что алгебраизацию **В**з можно представить в очень простом виде, а именно как квази-решетку, снабженную трехзначной операцией псевдодополнения.
Заметим, что в работе *[Finn and Grigolia* 1993] дается также алгебраизация трехзначной логики Эббингауза **Е**3 в сигнатуре $<\vee^{E}, \cap, \sim, J_0, J_{1/2}, J_1, 0, 1>$, где $<\vee^{E}, \cap, \sim>$есть дистрибутивная решетка без законов де Моргана.
Теперь на алгебраическом уровне мы можем сделать различие между логикой Клише **К**3 (сильные связки) и логикой Клини $\mathbf{K}_3^w$ (слабые связки или, по-другому, внутренние связки Бочвара). В основе алгебры для **К**3 лежит деморгановская дистрибутивная *решетка,* а в основе алгебры для $\mathbf{K}_3^w$ лежит деморгановская дистрибутивная *квази-решетка.* Это означает, что в **К**3 имеет место эквивалентность $A \vee (A \wedge B) \equiv A$, т.е. формулы $A \vee (A \wedge B)$ и A имеют оду и ту же истинностную таблицу (реализуют одну и ту же функцию), а в $\mathbf{K}_3^w$ нет. То, что существуют логики, в основе алгебраической семантики которых лежит не решеточная структура, а квази-решетка, впервые было обнаружено В.К. Финном *[Финн* 1974] при рассмотрении трехзначной логики Бочвара **В**з.
Как уже говорилось, наиболее важным примером алгебры Клини является матрица трехзначной логика Клини **К**3, а примером некоммутативной алгебры Клини является матрица логики **Lisp** (см. 3.4.4).
Наконец, обратим внимание, что связки $\wedge$ и $\vee$ в $\mathbf{P}^1$ не являются даже полурешеточными *[Mortensen* 1989]. Алгебраическая структура $\mathbf{P}^1$ исследована в *[Lewin, Mikenberg and Schwarze* 1990] и *[Pynko* 1995b]. Здесь же дано алгебраическое доказательство максимальности $\mathbf{P}^1$. Относительно $\mathbf{I}^1$ алгебраические результаты содержатся в *[Sette and Carnielli* 1995].

5. Конечнозначные логики

5.1. Конечнозначные логики Лукасевича $Ł_n$

Из всех конечнозначных логик наибольший интерес представляют логики Лукасевча $Ł_n$. Взаимоотношения между этими логиками, классы их расширений, критерий Мак-Нотона о выразимости функций — все говорит о необычных свойствах этих логик. Эта необычность отражается как на их гильбертовской аксиоматизации, так и на их алгебраическом представлении. Тем не менее, главная особенность Ł_n связана с их функциональным свойствами и неожиданными следствиями из этого (см. раздел 7.6).

5.1.1. Матричная логика Ł_n

Из всех конечнозначных логик наиболее известными являются конечнозначные логики Лукасевича Ł_n, матричное определение которых впервые появилось в *[Lukasiewicz* 1922/1923]. Эти логики являются обобщением трехзначной Логики Ł_3 и формализуются в следующем пропозициональном языке $\mathcal{L}$.
Пусть *p, q, r* с индексами или без них суть пропозициональные переменные; $\sim, \to$ суть логические связки и $(,)$- вспомогательные символы. Понятие формулы определяется стандартно.
Другие логические связки вводятся по определению, как и для
Ł_3.
Матрица вида $\mathfrak{M}_n^L = < \mathrm{V}_n, \sim, \to, \{1\} >$называется *n*-значной логической матрицей Лукасевича $(n \in N,\ n \geq 2)$,где $\mathrm{V}_n = \{0, {}^1/_{n-1}, {}^2/_{n-1}, \dots, {}^{n-2}/_{n-1}, 1\}$; ~ есть унарная и → бинарная операции отрицания и импликации соответственно, определенные на множестве V_n следующим образом:

$$\sim x = 1 - x,$$
$$x \to y = min(1, 1 - x + y).$$

Операции дизъюнкции и конъюнкции вводятся по определению:

$$x \vee y =: (x \to y) \to y$$
$$x \wedge y =: \sim(\sim x \vee \sim y).$$

Заметим, что здесь $x \vee y = max(x, y)$ и $x \wedge y = min(x, y)$'.
Определим теперь функцию оценки *v* формул языка $\mathcal{L}$ в матрице $\mathfrak{M}_n^L$.
v есть функция оценки формул языка $\mathcal{L}$ ватрице $\mathfrak{M}_n^L$, если она удовлетворяет следующим условиям:
1) функция *v* определена для каждой формулы *A;*
2) если *A* есть пропозициональная переменная, то $v(A) \in \mathrm{V}_n$;
3) если *A* и *B* есть формулы, то

$$v(\sim A) = \sim v(A),$$
$$v(A \to B) = v(A) \to v(B).$$

Обратим внимание, что здесь в левые части равенств входят пропозициональные связки, а в правые - символы матричных операций. Для простоты, и те и другие обозначаем одинаково.
Будем говорить, что формула *A* является тавтологией в матрице $\mathfrak{M}_n^L$, если $v(A) = 1$ для любой функции оценки *v* в матрице $\mathfrak{M}_n^L$. Наконец, многозначная матричная логика Лукасевича Ł_n есть множество тавтологий в $\mathfrak{M}_n^L$.
Отметим, что матрица $\mathfrak{M}_2^L$ является характеристической для классического пропозиционального исчисления **C**$_2$ (см. раздел 1.4), а матрица $\mathfrak{M}_3^L$ является характеристической для трехзначного исяисления Ł_3(см. раздел 3.1).

5.1.2. Отношения между конечнозначными логиками Ł_n

Основное отношение между конечнозначньши матричными логиками Лукасевича, т.е. между классами их тавтологий, описываются риедующим условием Линденбаума *[Lukasiewicz and Tarski* 1930, theorem 19]:

$\text{Ł}_n \subseteq \text{Ł}_m$ *т.т.т., когда т-есть делитель п-1*.

Впервые доказательство этой теоремы было опубликовано *Щ*. Аккерманном *[Аскегтапп* 1967].

Из этой теоремы имеем очевидное следствие для случая, когда *n*-1 есть простое число $(n-1) > 1$:

$$\text{Ł}_{kn} \subset \dots \subset \text{Ł}_{2n} \subset \text{Ł}_n \subset \text{Ł}_2.$$

5.1.3. *J$_i$*-операторы

Особое место при изучении свойств конечнозначных логик Лукасевича занимают *J$_i$*-операторы, введенные Дж. Россером и А. Тюркеттом *[Rosser andTurqette* 1952]:

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = i \\ 0, \text{ если } x \neq i \end{cases} \quad (0 \leq i \leq n-1).$$

Ими доказана следующая
Теорема. *J$_i$-операторы определимы посредством → и* ~ в Ł_n .
Заметим, что результат этой теоремы следует из критерия Мак-Нотона (о нем см. 5.1.5). :
На самом деле *J$_i$* -операторы являются характеристическими функциями числа i, $i = 0, {}^1/_{n-1}, {}^2/_{n-1}, \dots, {}^{n-2}/_{n-1}, 1$, и обобщают некото-

рые свойства отрицания. В дальнейшем J_i -операторы будут не раз использоваться.

5.1.4. Оператор Слупецкого для Ł_n

В *[Rosser and Turqette* 1952] дано также обобщение результата Е. Слупецкого относительно Ł_3^T (см. 3.1.1):

Пусть $T_{\frac{n-2}{n-1}}(x)=\frac{n-2}{n-1}$ *для всех* $x \in V$. *Тогда система функций* $\{x \to y, \sim x, T_{\frac{n-2}{n-1}}(x)\}$ *функционально полна.*

В свою очередь обобщением этого результата стала теорема Эванса—Шварца [Evans *and Schwartz* 1958]:

Пусть $T_i(x) = i$, *где* $0 < i < I$. *Тогда система функций* $\{x \to y, \sim x, T_i(x)\}$ *является функционально полной т.т.т., когда* $(n\text{-}1, i) = 1$, *т.е. n-1* и *i есть взаимно простые числа.*

Этот результат независимо был открыт Р. Клэем *[Clay* 1962] как следствие теоремы:

Система функций $\{x \to y, \sim x, T_i(x)\}$ *является функционально полной т.т.т., когда* $(n-1, i_1, \ldots, i_k) = 1$, *где* $0 < i_k < 1$ *и* $0 < k < n$.

В разделе (7.3.3) будет дано строгое определение понятия *функциональной полноты.*

5.1.5. Критерий Мак-Нотона выразимости операций в Ł_n

В общем случае на вопрос о том, какие операции (функции) можно выразить в Ł_n, дает ответ критерий выразимости Р. Мак-Нотона, который является следствием фундаментальной теоремы Мак-Нотона о выразимости функций в континуальной логике Лукасевича Ł_∞ *[McNaughton* 1951] (см. ниже раздел 8.1):

Функция $f\left(\frac{x_1}{n-1}, \ldots, \frac{x_k}{n-1}\right) = \frac{x}{n-1}$ *выразима в матрице для* Ł_n *тогда и только тогда, когда НОД* $(x_1, \ldots, x_k, n\text{-}1)$ *есть делитель x (НОД — наибольший общий делитель).*

С помощью критерия Мак-Нотона доказывается много важных теорем относительно многозначных логик Лукасевича (см. об этом *[Токаж* 1979]).

Следует отметить, что хотя Мак-Нотон дает необходимое и достаточное условие выразимости конечнозначной функции в Ł_n, само доказательство не является конструктивным; оно только указывает, какие конечнозначные функции *f* являются выразимыми без указания

метода, конструирующего Ł_n-формулу, определяющую *f* в терминах ~ и →. Эта проблема решена в *[Takagi, Nakashima and Mukaidono* 1999], где представлено другое необходимое и достаточное условие. Более того, в этой работе показывается, как выразить функцию в языке Ł_n по ее истинностной таблице.

5.1.6. Аксиоматизация Ł_n

В разделе (3.1) была рассмотрена аксиоматизация трехзначной логики Лукасевича Ł_3, предложенная М. Вайсбергом. Однако неясно, как этот способ аксиоматизации может быть распространен на конечнозначные логики Ł_n. Правда, ему же принадлежит аксиоматизация Ł_n для случая, когда *n-1* есть простое число. Как отмечается в *[Lukasiewicz and Tarski* 1930], расширение этого результата на произвольное конечное *n* принадлежит Линденбауму. Позже М. Вайсбергом *[Wajsberg* 1935] был предложен общий метод аксиоматизации широкого класса конечнозначных логик, куда входят также все *n*-значные логики Лукасевича. Однако метод, предложенный В айсбергом, весьма громоздок и практически мало пригоден.

Две неудачные попытки аксиоматизировать Ł_n были предприняты Дж. Россером и А. Тюркеттом *[Rosser and Turquette* 1945, 1950]. Наконец ими был разработан метод аксиоматизации *[Rosser and Turquette* 1952], который включает в себя в качестве исходного условия общезначимость законов *транзитивности, перестановки* и *утверждения консеквента* (см. выше гл. 1). Кроме этого здесь впервые было указано на обязательное наличие в аксиоматизируемой логике J_i-операторов. Все эти условия выполняют, например, конечнозначные логики Лукасевича Ł_n. Этот метод применим также для произвольного числа выделенных значений и распространяется на предикатные многозначные логики. Однако, как и предыдущий метод, он оказался весьма общим и громоздким в применении.

Только в начале 70-х годов XX ст. появились сразу две аксиоматизации Ł_n. После того как было дано алгебраическое доказательство полноты для бесконечнозначной логики Лукасевича Ł_∞, появилась возможность распространить этот метод на *n*-значный случай, что и было сделано Р. Григолия (см. *[Григолия* 1973] и *[Grigolia* 1977]). Аксиоматизация Ł_n, предложенная Григолия, основана на том, что к четырем аксиомам для бесконечнозначной логики Лукасевича Ł_∞ добавляются характеристические аксиомы для каждого *n.* Выглядит это следующим образом:

1. $p \to (q \to p)$
2. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
3. $((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p)$
4. $(\sim p \to \sim q) \to (q \to p)$
5. $np \to (n\text{-}1)p.$

Если $n > 3$, то добавляется следующая аксиома:

6. $(n-1)\ ((\sim p)^j \vee (p \wedge (j-1)p)),$

где $1 < j < n-1$ и j не делит n-1; np и p^1 есть сокращения для $p \vee p \vee \ldots \vee p$ (n раз) и $p \wedge p \wedge \ldots \wedge p$ (j раз) соответственно.

Правила вывода: МР и подстановка.

Другой метод аксиоматизации предложен М. Токажем *[Tokarz* 1974], который для этого существенно использовал критерий Мак-Нотона для выразимости операций в Ł_∞. Однако оба метода (особенно последний) требуют добавления формул слишком большой длины,

Поэтому особый интерес представляет работа Р. Тузьяка *[Tuziak* 1988], где аксиоматизация для Ł_∞ проще, чем во всех предыдущих работах (правда, в другой сигнатуре, чем исходная у Лукасевича), и, главное, не опирается на такие сильные метатеоремы, как алгебраическое доказательство полноты для Ł_∞ или критерий Мак-Нотона для Ł_∞, хотя для доказательства полноты и используются средства алгебры Линденбаума.

Новая аксиоматизация выглядит следующим образом для любого $n \geq 2$. Используются следующие сокращения: $p \to^0 q = q,$ $p \to^{k+1} q = p \to (p \to^k q)$ и $p \equiv q = (p \to q) \wedge (q \to p).$

1. $p \to (q \to p)$
2. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
3. $((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p)$
4. $(p \to^n q) \to (p \to^{n-1} q).$
5. $p \wedge q \to p.$
6. $p \wedge q \to q.$
7. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to q \wedge r)).$
8. $p \to p \vee q.$
9. $q \to p \vee q.$
10. $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q \to r)).$
11. $(\sim p \to \sim q) \to (q \to p).$
12. $(p \equiv (p \to^{S-2} \sim p)) \to^{n-1} p$ для любого $2 \leq s \leq n-1,$ такого, что s не есть делитель *n-1*.

Правила вывода: МР и подстановка.

Обратим внимание, что при $n = 2$ и $n = 3$ аксиома (12) отсутствует. При $n = 2$ мы имеем аксиоматизацию классической пропозициональной логики. Тогда аксиома (4) есть

$(p \to (p \to q)) \to (p \to q).$

При $n = 3$ аксиома (4) есть

$(p \to (p \to (p \to q))) \to (p \to (p \to q)).$

Если $n = 4$, тогда аксиома (12) приобретает вид

$(p \equiv \sim p) \to ((p \equiv \sim p) \to ((p \equiv \sim p) \to p)).$

При этом достаточно рассматривать только простые числа s в аксиоме (12).

Аксиоматизация предикатной логики Ł_n представлена в *[Urquhart* 1986; 2001].

Имеются различные исчисления с устранением сечения (или семантические таблицы) для Ł_n. Обратим внимание на работу *[Prijatelj* 1996], где предложено генценовское исчисление логик Ł_n, в основе которого лежит ограничение структурного правила *сокращения.*

Заметим, что одна из версий ограничения закона сокращения появляется уже в аксиоматизации Григолия, а у Тузьяка аксиома (4) есть в точности ограничение закона сокращения в гильбертовской форме.

5.1.7. Кардинальная степень полноты Ł_n

У Тарского *[Tarski* 1930b] дается определение понятия кардинальной степени полноты логики; оно может быть переформулировано следующим образом:

Кардинальной степенью полноты логики **L**, символически $\gamma(\mathbf{L})$, является число логик, содержащих аксиомы логики **L**.

Вначале было установлено, что $\gamma(\text{Ł}_3) = 3$, а также для *n-1 — простое число:*

$\gamma(\text{Ł}_n) = 3$, если *n*-1 — простое число.

В общем случае теорема для произвольного *n*, была впервые опубликована М. Токажем *[Tokarz* 1974] и упрощена в *[Tokarz* 1977].

Пусть $C = <a_1, \ldots, a_n>$ — произвольная последовательность натуральных чисел. Через $N_c(a_i)$, $1 \le i \le n$, будем обозначать число всех подпоследовательностей *D* из С, которые удовлетворяют следующим условиям:

(1) $a_i \in D$ и для любого $b \in D$, $a_i \ge b$,

(2) если $j \ne k$ и $a_j, a_k \in D$, то a_j-1 не является делителем a_k-1.

Для любого *n* $c(n) = <a_1, \ldots, a_k>$ будет последовательностью, определяемой следующими условиями:

(i) $a_1 = n$,

(ii) $a_1 > \cdots > a_k > 1$,

(iii) для любого *i* $1 \le i \le k$, a_i–1 есть делитель *n-1.*

Теорема. *Для конечного n кардинальная степень полноты* Ł_n *есть*

$$\left(\sum_{a_i \in c(n)} N_{c(n)}(a_i)\right) + 1.$$

На самом деле вычисление кардинальной степени полноты для произвольной Ł_n возможно *только* с помощью специальной компьютерной программы, которая и была создана в 2000 г. М.Н. Рыбаковым.

5.1.8. Ł_n и n-значные логики Гёделя G$_n$

Гёдель *[Godel* 1932] показал, что никакая конечнозначная матрица не может быть характеристической для пропозиционального интуиционистского исчисления **H** (см. ниже раздел 8.2.2). В связи с

эим им была построена следующая логическая матрица

$\mathfrak{M}_n^G = <\mathrm{V}, \rceil, \vee, \wedge, \Rightarrow, \{1\}>$, где

$$\rceil x = \begin{cases} 1, \textit{если } x = 0 \\ 0, \textit{если } x \ne 0, \end{cases}$$

$$x \vee y = max(x,y),$$

$$x \wedge y = min(x,y)$$

$$x \Rightarrow y = \begin{cases} 1, \textit{если } x \le y \\ y, \textit{если } x > y, \end{cases}$$

$$x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x).$$

Трехзначная логика Гёделя есть в точности трехзначная логика Рейтинга **G**$_3$. Таким образом, конечнозначная логика **G**$_n$ есть обобщение **G**$_3$.

Логика **G**$_n$ аксиоматизирована различными способами *[Thomas* 1962], *[Hosoi* 1966], *[Хомич* 1986]. В *[Thomas* 1962] это делается так. Берется следующая аксиоматизация бесконечнозначной логики Геделя-Даммита **LC** (об этой логике см. ниже раздел 8.2.3.1):

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
2. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
3. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow (((q \Rightarrow p) \Rightarrow r) \Rightarrow r)$
4. $f \Rightarrow p$
5. $(p \wedge q) \Rightarrow p$
6. $(p \wedge q) \Rightarrow q$
7. $p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$.

Правила вывода: МР и подстановка.

Определения:

Def. 1. $p \vee q =: ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \wedge ((q \Rightarrow p) \Rightarrow p)$.

Def. 2. $\rceil p =: p \Rightarrow f$.

Искомая аксиоматизация **G**$_n$ получается из приведенной заменой аксиомы 3 на аксиому 3_n:

$$3_n.\ \begin{cases} 3_0 = p_0 \\ 3_{n+1} = ((p_n \Rightarrow p_{n+1}) \Rightarrow p_0) \Rightarrow 3_n. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что операции из **G**n выразимы посредством операций из Ł_n, т.е. **G**n функционально вложима в Ł_n. Для этого надо определить $\rceil x$ и $x \Rightarrow y$. Заметим, что $\rceil x$ есть не что иное, как оператор Россера-Тюркетта $J_0(x)$. В свою очередь, Р. Чиньоли *[Cignoli* 1982] показал, что

$$x \Rightarrow y = J_1(x \to y) \vee y.$$

В итоге операции из **G**n определяются в Ł_n. Это позволяет строить аксиоматизацию Ł_n на основе интуиционистской импликации, что и было впервые сделано Р. Чиньоли *[Cignoli* 1982] (см. ниже).

Особый интерес представляет обобщение Ł_n и G_n на бесконечнозначный случай и их взаимоотношения, что будет рассмотрено в главе 8.

5.1.9. Алгебраизация Ł_n

Первые работы в области алгебраизации Ł_n принадлежат Г. Мойсилу, который задался целью построить алгебраический аппарат для *n*-значных логик Лукасевича, играющий ту же роль, что и булевы алгебры для классической логики. В *[Moisil* 1940] были построены алгебры для Ł_3 и Ł_4, а в *[Moisil* 1941] (см. также *[Moisil* 1963]) эти алгебры были обобщены на *n*-значный случай. Полученные алгебры были названы *n-значными алгебрами Лукасевича;* они представляют собой алгебру де Моргана (см. выше раздел 4.4), снабженную множеством операторов δ_i^n, которые определяются на множестве V*n* следующим образом:

$$\delta_i^n x = \delta_i^n(j/_{n-1}) = \begin{cases} 1, \ если\, i + j \ge n \\ 0, \ если\, i + j < n \end{cases} \quad (1 \le i \le n-1).$$

Заметим, что в *[Suchon* 1974] дается определение операторов δ_i^n в матрице Лукасевича $\mathfrak{M}_n^L$.

Приведем аксиоматизацию класса всех *n*-значных алгебр Лукасевича, принадлежащую Л. Итурриоз *[Itvrrioz* 1977]. В этой работе введено понятие *симметрической алгебры Рейтинга порядка n:*

$<L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, \sigma_1^n, \ldots, \sigma_{n-1}^n, 0, 1>$ есть *n-значная алгебра Лукасевича (n* ≥ 2), если $<L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 0, 1>$ есть симметрическая алгебра Гейтинга (см. раздел 4.4.2) и σ_i^n, $1 \le i \le n\text{-}1$ суть унарные операторы, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$(L1)\ \sigma_i^n(x \vee y) = \sigma_i^n x \vee \sigma_i^n y,$$

$$(L2)\ \sigma_i^n(x \Rightarrow y) = \bigwedge_{j=i}^{n-1} (\sigma_j^n x \Rightarrow \sigma_j^n y),$$

$$(L3)\ \sigma_i^n \sigma_j^n x = \sigma_j^n x,\ 1 \le i, j \le n\text{-}1,$$

$$(L4)\ \sigma_1^n x \vee x = x,$$

$$(L5)\ \sigma_i^n \sim x = \sim\sigma_{n-i}^n x,$$

$$(L6)\ \sigma_1^n x \vee \sim\sigma_1^n x = 1,$$

где $\bigwedge_{j=i}^{n-1} x_j$ стоит вместо $x_i \wedge x_{i+1} \wedge \ldots \wedge x_{n-1}$.

Эквациональный класс *n*-значных алгебр Лукасевича обозначим посредством $\mathcal{L}_n$. Приведем пример $\mathcal{L}_n$:

$$Ł_n\ = <\text{V}_n, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, \sigma_1^n, \ldots, \sigma_{n-1}^n, 0, 1>, \text{где}$$

$$x \vee y = max(x, y),$$

$$x \wedge y = min(x, y),$$

$$\sim x = 1\text{-}x,$$

$x \Rightarrow y$ есть импликация Гёделя (см. выше 5.1.7), $\sigma_i^n x$ определены выше. Поскольку

$$x \Rightarrow y = y \vee \sim\sigma_{n-1} x \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} (\sigma_{n-1}(x \wedge y) \wedge \sim\sigma_{n-i-1}\, x),$$

то характеризации *n*-значных алгебр Лукасевича, данные Г. Мойсилом и Л. Итурриоз, эквивалентны.

(Это утверждение есть обобщение Г. Мойсилом *[Moisil* 1965] своего результата о том, что трехзначная алгебра Лукасевича есть алгебра Гейтинга *[Moisil* 1963]. Исправленное доказательство приведенного утверждения дано в диссертации Р. Чиньоли *[Cignoli* 1970]. Наиболее простое определение $x \Rightarrow y$ принадлежит Л. Итурриоз *[Ilurrioz* 1977]:

$$x \Rightarrow y = \bigwedge_{i=1}^{n-1} (\text{C}\sigma_i x \vee \sigma_i y), \text{ где } \text{C}x = \rceil\, \sigma_1 x.$$

)

Свойства эквационального класса $\mathcal{L}_n$ исследовались в *[Cignoli* 1970], *[Balbes and Dwinger* 1974], *[Iturrioz* 1977; 1983] и других работах.

Очевидно, что алгебра $\mathcal{L}_n$ есть дважды алгебра Рейтинга, поскольку $x \Leftarrow y = \sim(\sim y \Rightarrow \sim x)$. Еще один факт: алгебра $\mathcal{L}_n$ есть алгебра Клини

[Sicoe 1967]. Исторический экскурс о взаимоотношении алгебр Рейтинга и алгебр Лукасевича см. в *[Cignoli* 1980].

Обратим внимание, что J_i-операторы Россера-Тюркетта выразимы в *n*-значной алгебре Лукасевича. Установим, что $\sigma_n^n x = 1 \text{ и } \sigma_0^n$ *x=0.*

Тогда

$$J_i^n(x) = \sigma_{n-i}(x) \wedge \sim\sigma_{n-i-1}(x).$$

Более того,

$$\sigma_i^n(x) = \bigvee_{j=1}^{i} J_{n-j}^n(x),\ 1 \le i \le n.$$

Таким образом, в *n*-значной алгебре Лукасевича операторы σ_i^n можно заменить на операторы J_i^n.

Теперь сделаем замечание. А. Роуз обнаружил, что для случая $n \ge 5$ *n*-значная алгебра Лукасевича соответствует не *n*-значным логикам Лукасевича Ł_n, а их фрагментам (см. предисловие в *[Cignoli* 1970]).

Это значит, что посредством операций $\vee, \wedge, \sim$ и J_i (или .σ_i^n) нельзя выразить импликацию Лукасевича $x \to y$ для случая $n \ge 5$. Это же самое открытие сделал А. Тюркетт *[Turqette* 1969], правда, совершенно по другому поводу, а именно при обобщении трехзначной логики Лукасевича на *n*-значный случай.

Отсюда возникает проблема построения адекватной алгебры для *n*-значной логики Лукасевича Ł_n. Тогда построенные алгебры естественно называть *алгебрами Лукасевича—Мойсила*, а соответствующие им логики будем называть логиками *Лукасевича— Мойсила,* множество исходных связок которых может быть следующее:

$\{\vee, \wedge, \sim, J_0, \ldots, J_1\}$.

Подходящие алгебры для Ł_n были построены Р. Григолия *[Григолия* 1973] как ограничение на конечнозначный случай MF-алгебр, введенных в *[Chang* 1958] и являющихся алгебраической семантикой для бесконечнозначной логики Лукасевича Ł_∞ (О МК-алгебрах см. ниже в разделе 8.1.1). В этих работах Р. Григолия доказал, что произвольная конечная алгебра Лукасевича (не Лукасевича-Мойсила) представима в виде прямого произведения Ł_m-алгебр, где $m \le n$ и *m-1* делит *n*-1 (Ł_m- алгебра есть матрица $\mathfrak{M}_m^L$).

Однако эти алгебры не основаны непосредственно на решеточной структуре.

В *[Cignoli and de Gallego* 1981] строится пятиэлементная алгебра для Ł_5, в основе которой лежит алгебра де Моргана с дополнительными условиями для новых унарных операторов, а в *[Cignoli* 1980] (см. в особенности *[Cignoli* 1982]) введена *собственно n-значная алгебра Лукасевича.*

Пусть $S_n = \{(i, j) \in N \times N\text{: } 3 \le i \le n\text{-}2,\ 1 \le j \le n\text{-}4,\ j < i\}$, если *n* > 5, и $S_n = \varnothing$, если $n < 5$; $T_n = \{(i, j) \in N \times N\text{: } 2 \le i \le n\text{-}2,\ 1 \le j \le n\text{-}3,\ j < i\}$, если $n \ge 4$, и $T_n = \varnothing$, если *n* < 4.

Собственно n-значная алгебра Лукасевича $(n \in N, n \le 2)$ *есть система*

$$<L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, \{\sigma_i^n\}_{1 \le i \le n-1}, \{F_{ij}^n\}_{(i,j) \in S_n}, 0, 1>$$

такая, что

$$<L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, \{\sigma_i^n\}_{1 \le i \le n-1}, 0, 1>$$

есть *n*-значная алгебра Лукасевича-Мойсила $\mathcal{L}_n$, и F_{ij}^n, $(i,j) \in S_n$ есть бинарные операции, определенные на *L* и связанные с $\mathcal{L}_n$ следующими тождествами:

$$\delta_k^n(F_{ij}^n(x, y)) = \begin{cases} 0, \textit{если}\ k \le i - j \\ J_i^n(x) \wedge J_j^n(y),\ \textit{если}\ k > i - j \end{cases} \quad 1 \le k \le n - 1.$$

Эквациональный класс всех собственно *n*-значных алгебр Лукасевича обозначим посредством P_n. Очевидно, что для $2 \le n \le 4$, $P_n = \mathcal{L}_n$, поскольку в этом случае $S_n = \varnothing$.

Примером P_n является алгебра $\mathcal{L}_n$, если к ней добавим, следующие операции:

$$F_{ij}^n(x, y) = F_{ij}^n\left(\tfrac{r}{n-1}, \tfrac{s}{n-1}\right) = \begin{cases} \frac{n-1-i+j}{n-1},\ \textit{если}\ (r, s) = (i, j) \\ 0, \textit{в остальных случаях} \end{cases} \quad (i, j) \in S_n.$$

Нетрудно вычислить, что число таких операций есть $(n(n\text{-}5)+2)/2$, поскольку такова мощность множества S_n для $n \ge 5$.

Остается показать, что *n*-значная импликация Лукасевича $x \to y$ выразима в сигнатуре алгебры P_n:

$$x \to y = (x \Rightarrow y) \vee \sim x \vee \bigvee_{(i,j) \in T_n} F_{ij}^n(x, y).$$

Последняя формула опять же говорит о нетривиальности импликации Лукасевича →.

То, что операции $F_{ij}^n(x, y)$ выразимы посредством исходных операций *n*-значной логики Лукасевича *~x* и $x \to y$, следует из критерия Р. Мак-Нотона, тем не менее:

$$F_{ij}^n(x, y) = (x \to y) \wedge J_i^n(x) \wedge J_j^n(y).$$

Р. Чиньоли дает аксиоматизацию пропозициональной логики Ł_n в сигнатуре алгебры S_n, т.е. на основе интуиционистской импликации $\Rightarrow$.

5.2. Логики Поста P_n

По аналогии с классической двузначной логикой многозначные логики Поста $\mathbf{P}_n$ являются функционально полными. Этот важный факт является решающим при применении логик Поста в различных технических приложениях. Этим также объясняется исключительное развитие алгебр Поста. Особый интерес представляет взаимоотношение конечнозначных логик Поста и логик Лукасевича. Именно относительно функциональных свойств $\mathbf{P}_n$ будут изучаться функциональные свойства логик Лукасевича $\mathbf{\L}_n$.

5.2.1. Матричные логики P_n

Многозначная логика строилась Постом *[Post* 1921] как обобщение двузначной классической логики, развитой А. Уайтхедом и Б. Расселом в *«Principia Mathematical,* где исходными логическими связками служат отрицание и дизъюнкция. В логике Поста исходными связками также являются отрицание $\neg$ и дизъюнкция $\vee$, и каждая пропозициональная переменная может принимать одно из *n* различных значений истинности: $t_1, t_2, \ldots, t_n$, где *n* – натуральное число; t_1 интерпретируется как «истина», t_n — как «ложь». Однако мы_ предпочтем стандартное определение *n*-значной матрицы Поста $\mathfrak{M}_n^P$, которая задается следующим образом:

$\mathfrak{M}_n^P = \langle V_n, \neg, \vee, \{n-1\} \rangle$, где

V_n есть множество $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$,

{n—1} — множество выделенных значений.

Матричные операции определяются так:

x	$\neg x$
0	1
1	2
.	.
.	.
.	.
$n-2$	$n-1$
$n-1$	0

Отрицание Поста $\neg x$ называется *циклическим* отрицанием.

Дизъюнкция $x \vee y$ определяется как в $\mathbf{\L}_n$:

$x \vee y = max(x, y)$.

Самое главное свойство многозначных логик Поста $\mathbf{P}_n$ заключается в том, что они функционально полны, т.е. любая функция *n*-значной логики в них определимы. С функционально полными логиками мы уже встречались: это *n*-значные логики Лукасевича $\mathbf{\L}_n$ с различными обобщениями функтора Слупецкого Т(*x*) (см. раздел 3.3.5). Как частный случай, имеем: $\mathbf{\L}_3^T = \mathbf{P}_3$. В разделе 7.3.1 мы приведем доказательство функциональной полноты $\mathbf{P}_n$.

5.2.1.1. Трехзначная логика Поста P_3

Рассмотрим конкретный пример *n*-значной логики Поста, а именно **Р**з, где истинностные значения для удобства обозначим, как в трехзначной логике Лукасевича $\mathbf{\L}_3$; и пусть выделенным значением будет 1. Тогда $x \vee y$ имеет истинностную таблицу точно такую же, как $x \vee y$ в $\mathbf{\L}_3$, но существенное отличие заключается в операции отрицания:

x	$\neg x$	$\neg\neg x$
1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	0	1
0	1	$^1/_2$

Заметим, что в отличие от $\mathbf{\L}_3$ и **G**$_3$ в **P**$_3$ (как и во всех $\mathbf{P}_n$) есть операция (в данном случае циклическое отрицание $\neg$), которая на множестве классических истинностных значений {0, 1} принимает отличное от них значение, например, $\neg 1 = {}^1/_2$. Поэтому можно указать формулу, которая является тавтологией в **P**$_3$, но не является тавтологией классической логики **C**$_2$:

$\neg\neg\neg(x \vee (\neg x \vee \neg\neg x))$.

Отметим также, что не всякая тавтология **C**$_2$ с исходными связками отрицания и дизъюнкции является тавтологией **P**$_3$, например в **Р**з, как и в $\mathbf{\L}_3$, не имеет места закон исключенного третьего $x \vee \neg x$, но зато имеет место закон исключенного четвертого:

$x \vee \neg x \vee \neg\neg x$.

И вообще, в $\mathbf{P}_n$ имеет место закон исключенного (*n*+1)-го.

5.2.2. Алгебры Поста

Алгебра $<L, \vee, \wedge, \sim, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, e_1, \ldots, e_{n-2}, 0, 1>$ есть *алгебра Поста порядка n*, если $<L, \vee, \wedge, \sim, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, 0, 1>$ есть *n-значная алгебра Лукасевича* и $e_1, \ldots, e_{n-2}$ есть *n-2* элемента, удовлетворяющие следующему условию:

$$(P)\ \sigma_i e_j(x) = \begin{cases} 1, \ \textit{если} \ \ i+j \geq n \\ 0, \ \textit{если} \ \ i+j < n. \end{cases}$$

Или, по другому, алгебра $<L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, e_1, \ldots, e_{n-2}, 0. 1>$, есть *алгебра Поста порядка n,* если $<L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim>$ есть симметрическая алгебра Гейтинга и выполняются условия (LI) — (L6) и (P).

По алгебрам Поста существует огромная литература. Это вызвано еще и тем, что в силу их функциональной полноты они являются наилучшими кандидатами на применение в компьютерных науках; по крайней мере, они могут реализовать любую переключательную схему (выполнение одного из условий для практического использования многозначной логики в *[Lee and Ajabnoor* 1978]).

Первая система аксиом для алгебры, соответствующей *n*-значной логике Поста, принадлежит П. Розенблюму *[Rosenbloom* 1942]. Она была упрощена Г. Эпштейном *[Epstein* I960] и Т. Трачыком *[Traczyk* 1962]. В первой работе было показано, что алгебра Поста есть дистрибутивная решетка с псевдодополнением и к тому же обладает симметричностью, т.е. была определена операция ~. В *[Traczyk* 1963] для алгебр Поста была доказана теорема типа стоуновского представления, а в *[Traczyk* 1964] впервые алгебры Поста были заданы как эквациональный класс, т.е. заданы тождествами . Здесь определение алгебры Поста дано в сигнатуре $<L, \vee, \wedge, C, D_1, \ldots, D_{n-1}, e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}, 0, 1>$, где $<L, \vee, \wedge, 0, 1>$ есть ограниченная дистрибутивная решетка с $0 = e_0 \leq e_1 \leq \ldots \leq e_{n-1} = 1;$ $Cx = \rceil D_1 x,$ и операторы D_i- определяются следующим образом:

$$D_i(e_j) = \begin{cases} 1, \textit{если} \ i \leq j, \\ 0, \textit{если} \ i > j, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n-1, \ j = 0, \ldots, n-1.$$

Первым, кто обнаружил, что алгебры Поста суть также алгебры Рейтинга, был Г. Руссо *[Rousseau* 1969; 1970J. Здесь определение алгебры Поста дано в сигнатуре $<L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \rceil, \mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_{n-1}, e_0, \ldots, e_{n-1}, 0, 1>$, где $<L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \rceil, 0,1>$ есть алгебра Рейтинга и для любых *x*, *y* выполняются следующие равенства:

$(\mathrm{p}_1)\ D_i(x \vee y) = D_i(x) \vee D_i(y),\ i = 1, \ldots, n\text{-}1,$

$(\mathrm{p}_2)\ D_i(x \wedge y) = D_i(x) \wedge D_i(y),\ i = 1, \ldots, n\text{-}1,$

$(\mathrm{p}_3)\ D_i(x \Rightarrow y) = (D_1(x) \Rightarrow D_1(y)) \wedge \ldots \wedge (D_1(x) \Rightarrow D_1(y)),$
$i = 1, \ldots, n\text{-}1,$

$(\mathrm{p}_4)\ D_i(\rceil x) = \rceil D_i(x),\ i = 1, \ldots, n\text{-}1,$

$(\mathrm{p}_5)\ D_i(D_j(x)) = D_j(x),\ i,j = 1, \ldots, n\text{-}1,$

$$(\mathrm{p}_6)\ D_i(e_j) = \begin{cases} 1, \textit{если} \ i \leq j, \\ 0, \textit{если} \ i > j, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n-1, \ j = 0, \ldots, n-1,$$

$(\mathrm{p}_7)\ x = D_1(x) \wedge e_1 \vee \ldots \vee D_{n-1}(x) \wedge e_{n-1},$

$(\mathrm{p}_8)\ D_1(x) \vee \rceil D_1(x) = 1.$

Заметим, что класс всех алгебр Поста любого порядка $n \geq 2$ является эквационально определимым, поскольку класс всех алгебр Рейтинга является эквационально определимым (см. 4.4.2).

В *[Rasiowa* 1974] доказывается эквивалентность определений алгебр Поста, данная Т. Трачыком и Г. Руссо. Отсюда следует еще одно определение $x \Rightarrow y$, данное Е. Расёвой. Здесь же развита теория алгебр Поста.

5.2.3. Аксиоматизация логик $\mathbf{P}_n$

Результат Г. Руссо позволил ему дать аксиоматизацию *n*-значного пропозиционального исчисления Поста $\mathbf{P}_n$ на основе *интуиционистской импликации* и других связок. Эти идеи были развиты Е. Расёвой *[Rasiowa* 1974], где подробно рассматривается взаимоотношение между алгебрами Поста порядка *n* и *n*-значной пропозициональной логикой Поста $\mathbf{P}_n$. Аксиоматизация $\mathbf{P}_n$ дается в сигнатуре: $<\vee, \wedge, \Rightarrow, \rceil, D_1, \ldots, D_{n-1}, e_0, \ldots, e_{n-1}>$, где $\vee, \wedge, \Rightarrow, \rceil$ есть в точности пропозициональные связки логики Гёделя $\mathbf{Q}_n$; $e_0, \ldots, e_{n-1}$- пропозициональные константы; $D_1, \ldots, D_{n-1}$ - одноместные связки, определяемые следующим образом:

$$D_i(e_j) = \begin{cases} e_{n-1}, \textit{если} \ i \leq j, \\ e_0, \textit{если} \ \ i > j, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n-1, \ j = 0, \ldots, n-1.$$

Связка эквивалентности ⇔ вводится по определению:

$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$

Тогда аксиоматизация **P**$_n$ выглядит следующим образом:

(**P**$_0$) аксиомы пропозиционального интуиционистского исчисления **Int** и

(P_1) $D_i(A \vee B) \Leftrightarrow (D_iA \vee D_iB),\ i = 1, ..., n\text{-}1,$

(P_2) $D_i(A \wedge B) \Leftrightarrow (D_iA \wedge D_iB),\ i = 1, ..., n\text{-}1,$

(P_3) $D_i(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((... (D_iA \Rightarrow D_iB) \wedge ...) \wedge (D_iA \Rightarrow D_iB)),$
$i = 1, ..., n\text{-}1,$

(P_4) $D_i \rceil A \Leftrightarrow \rceil D_iA,\ i = 1, ..., n\text{-}1,$

(P_5) $D_iD_jA \Leftrightarrow D_jA,\ i, j = 1, ..., n\text{-}1,$

(P_6) D_ie_j для $i \le j$ и $\rceil D_ie_j$ для $i > j,\ i = 1, ..., n\text{-}1,$
$j = 0, ..., n\text{-}1,$

(P_7) $A \Leftrightarrow (... (D_1A \wedge e_1) \vee ... \vee (D_{n\text{-}1}A \wedge e_{n\text{-}1})),$

(P_8) $D_1A \vee \rceil D_1A.$

Правила вывода:

(R1) MP,

(R2) $\dfrac{A}{D_{n-1}A}.$

Первопорядковые исчисления, основанные на этих пропозициональных исчислениях, изучались Е. Расёвой.

Имеется ряд работ, где логики **P**$_n$ строятся в виде секвенциональных исчислений тенценовского типа.

Заметим, что n-значные логики Поста **P**$_n$ к тому же являются исторически первыми матричными логиками с произвольным, кроме 0, числом (конечным) выделенных значений. Аксиоматизация таких логик впервые появилась в *[Bole andBorowik* 1992].

Как и для любой многозначной логики возникает сложная проблема интерпретации истинностных значений, степень истинности которых пронумерована натуральными числами. Этот вопрос мы рассмотрим разделе 10.6.

5.3. Другие конечнозначные логики

Обобщения трехзначной логики Бочвара **B**$_3$ на n-значный случай, притом совершенно разные, т.е. с разными классами тавтологий, имеются у Н. Решера *[Rescher* 1969] со связками $\sim, \wedge, \vee, \supset, \leftrightarrow$ и в *[Бочвар и Финн* 1972] со связками $\sim, J_i, \cap, \cup$. Рассмотрим определение последних, поскольку логика **B**$_n$ именно с этими связками была аксиоматизирована в *[Григолия и Финн* 1979] и построена ее алгебра с доказательством теоремы представления.

Логическая матрица $\mathfrak{M}_n^B$ определяется следующим образом:

$\mathfrak{M}_n^B = < V_n, \sim, J_0, ..., J_1, \cap, \cup, \{1\} >$, где
$V_n = \{0, {}^1/_{n-1}, {}^2/_{n-1}, ... , {}^{n-2}/_{n-1}, 1\},$
$\sim x = 1\text{-}x,$

J_i есть операторы Россера-Тюркетта,

$x \cap y = max(min(x, y), max(min(x, \sim x), min(y, \sim y))),$
$x \cup y = min(max(x, y), min(max(x, \sim x), max(y, \sim y))).$

Заметим, что алгебры для **B**$_n$ являются не многообразием, а только *квазимногообразием [Мальцев* 1970]. Теорема представления для этих алгебр доказана в виде подпрямого произведения определенного вида B_m-алгебр. К тому же подчеркнем, что в основе этих алгебр лежит квазирешеточная структура.

Обобщение на n-значный случай трехзначной паранепротиворечивой логики **PCont** имеется в *[Kotas and da Costa* 1978]. Делается это следующим образом. К пропозициональному языку n-значной логики Лукасевича **Ł**$_n$ $(\rightarrow, \wedge, \vee, \sim)$ добавляется новая унарная связка $\Diamond$:

$$\Diamond x = \begin{cases} 1, & \textit{если } x \textit{ есть выделенное значение} \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $p \supset q =: \Diamond p \rightarrow q$. Пусть в матрице для **Ł**$_3$ множество выделенных значений есть {1, 1/2}. Тогда получаем **PCont.**

Обобщение трехзначной логики Арруды VI (см. выше раздел 3.5.4) имеется в *[Tuziak* 1997] и обобщение логики Сетте **P**^{1} имеется в *[Fernandez and Coniglio* 2003].

5.4. Четырехзначные логики

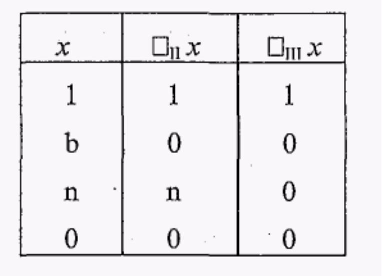
В последние годы наблюдается повышенный интерес к четырехзначным логикам. В статье *[Arieli and Avron* 1998] очень высоко оценивается статус этих логик и им отдается предпочтение по сравнению с трехзначными логиками. Отмечается, что обычно бывает достаточно четырех истинностных значений. См. также *[Bimbo and Dunn* 2001], где. предпочтение отдается четырехзначным семантикам вместо двузначной.

5.4.1. Вводные замечания

Как и в случае с трехзначной логикой, истоки которой обнаруживаются в древнегреческой философии, начиная с Аристотеля, так и элементы четырехзначной логики можно обнаружить в классической индийской логике, представленной Санджайя, работавшем в VI в до н.э. См. *[Dunn* 2000*],* где дается ссылка на специальную работу об этом *[Raju* 1954].

Несколько неожиданным оказался следующий факт, на который обратил внимание автора К.И. Бахтияров *[Бахтияров* 2003]: «В алгебре Буля, как подчеркивал Р. Фейс на столетии его "Законов мысли", использовалось 4 значения, причем в соответствии с правилами алгебры 1/0 являлось бесконечным, 0/0 неопределенным, 0/1 = 0 ложным, 1/1 = 1 истинным *[Feys* 1955]».

В *[Lewis and Langford* 1932] при исследовании модальных логик **S1 — S5** было выделено пять групп четырехзначных матриц, которые различались определением оператора необходимости $\Box$. Особый интерес представляют группы II и III. Связки импликации $\supset$ и отрицания $\neg$ одинаковы для всех групп матриц (см. соответственно связки $\supset^+$ и $\neg^+$ в разделе 4.3.1), а операторы $\Box_{II}$ и $\Box_{III}$ определяются следующим образом:



x	$\Box_{II}\,x$	$\Box_{III}\,x$
1	1	1
b	0	0
n	n	0
0	0	0

В *[Zeman* 1971] было доказано, что матрица со связками $\supset, \neg$ и $\Box_{II}$ является характеристической для модальной логики **K4** Собочиньского *[Sobocinski* 1964], которую будем обозначать посредством **K4(S)** и которая есть $\mathbf{S4.4} + \Box(\Box\Diamond p \supset \Diamond\Box p)$, где **S4.4** есть $\mathbf{S4} +$ $\Diamond\Box p \supset (p \supset \Box p)$. Модальную логику **V2**, для которой характеристической матрицей является матрица со связками $\supset$, $\neg$ и $\Box_{III}$, мы рассмотрим в разделе 5.4.2.1.

Заметим, что из булева множества истинностных значений {1, 0} (или {T, F}) можно двумя способами образовать четырехэлементное множество истинностных значений: 1) взять декартово произведение исходного множества; 2) образовать множество всех подмножеств исходного множества. Первый способ лежит в основе построения четырехзначной Ł-модальной логики Лукасевича *[Lukasiewicz* 1953], второй первоначально связан с четырехзначной логикой Белнапа **DM4** *[Belnap 1977;* 1977].

5.4.2. Ł-модальиая логика Лукасевича

Начиная со статьи *[Lukasiewicz* 1953] (см. также книгу *[Лукасевич* 1959]), Я. Лукасевич полностью отвергает модальную логику Ł_3 (а значит и саму Ł_3 и вообще логики Ł_n) и конструирует новую модальную логику, которую называет Ł-модальной логикой. Кратко проанализируем еще одну попытку Лукасевича содержательно и формально непротиворечивым образом опровергнуть доктрину логического фатализма.

В новых работах Лукасевича нет никаких упоминаний о тех возражениях, которые были адресованы Ł_3. Однако обсуждение формул $p \vee {\sim}p$ и ${\sim}(p \wedge {\sim}p)$, которые не являются законами Ł_3 (и никакой другой многозначной логики Ł_n), видимо, не прошло мимо Лукасевича, о чем говорит его следующее заявление: «Я стою на той точке зрения, что в любой модальной логике должно быть сохранено классическое исчисление предложений. До сих пор это исчисление продемонстрировало свою надежность и полезность, и оно не должно быть отвергнуто без достаточно веских оснований» *[Лукасевич* 1959].

Приняв этот общеметодологический принцип, Лукасевич формулирует следующие две проблемы, имеющие глубокое философское содержание, которые не могут быть решены средствами модальной логики Ł_3.

Во-первых, это принцип необходимости, на котором основывает свой фаталистический аргумент Аристотель, принимающий посылку $T(p) \to N(p)$ (см. выше раздел 2.4). Поскольку в двузначной логике любое высказывание либо истинно, либо ложно, то, указывается в *[Лукасевич* 1959], выражение «истинно, что *p»* эквивалентно «*p*» (конвенция Тарского). В итоге получаем выражение $(p) \to N(p)$. Но, замечает далее Лукасевич, эта формула не может быть принята ни в одной логической системе, так как следствием ее является разрушение пропозициональной модальной логики. С другой стороны, если принять формализацию этого принципа в виде так называемого правила Гёделя для модальных льюисовских логик *(A/NA),* то получаем весьма неприемлемые следствия (см. в *[Лукасевич* 1959]). Поэтому Лукасевич приходит к выводу, что ни одно аподиктическое высказывание, т.е. высказывание вида *N(p),* не может быть истинным. В этом заключается первая проблема, которую должна решить новая модальная логика.

Однако с этим надо увязать вторую проблему, которая не может быть решена в Ł_3 и которая непосредственно связана с проблемой логического статуса высказываний о будущих случайных событиях. Лукасевич рассуждает следующим образом: «Если истина заключается в соответствии мысли с действительностью, то предложение "морское сражение состоится завтра" сегодня не истинно и не ложно... А это приводит к заключению, что на сегодня нет ни необходимости, ни возможности того, что завтра будет морское сражение, - иными словами, что предложение "Возможно, что завтра будет морское сражение" и "Возможно, что завтра не будет морского сражения" сегодня оба истинны, и это будущее событие является случайным» *[Лукасевич* 1959]. Следовательно, в системе модальной логики должны быть истинными некоторые случайные высказывания. Однако средства Ł_3 не позволяют представить конкретные виды таких случайных высказываний, что является, по мнению Луасевича, следствием ограниченности определения в этой системе связки $\Diamond p$.Таким образом, главной проблемой для Лукасевича является соответствующее переопределение модальной связки возможности и затем через нее определение подходящих связок необходимости и случайности.

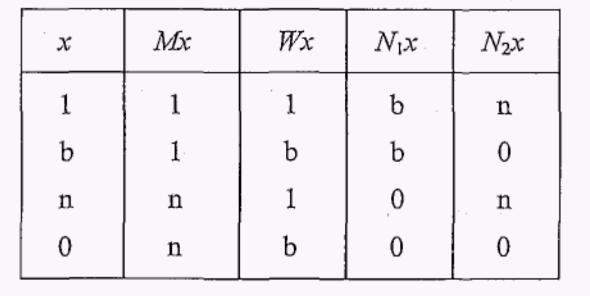
Все эти проблемы решает четырехзначная **Ł**-модальная логика Лукасевича. Беря прямое произведение матрицы классической пропозициональной логики на саму себя, Лукасевич получает матрицу $\mathfrak{M}_4^c = <\{1, 2, 3, 4\}, \neg^+, \vee^+, \wedge^+, \supset^+, \{1\}>$, где указанные операции определяются покомпонентно (см. выше раздел 4.3.1). Как там подчеркивалось, она является характеристической для классической логики $\mathbf{C}_2$. Таким образом, все законы классической логики, в том числе $p \vee \sim p$ и $\sim(p \wedge \sim p)$ будут иметь место в новой логике.

Поскольку теперь имеются два истинностных значения, обозначающих "возможность" (это *"b"* и "*n*"), то Лукасевич строит также два модальных оператора возможности: *Mx* и *Wx* таким образом, чтобы посредством их, определив обычным образом две связки

необходимости: N_1x и N_2x решить проблему истинности аподиктических высказываний.

(Заметим, что покомпонентной определение операций может быть разным. См. ниже бирешетку под названием *'FOUR'.)*

Эта проблема решается за счет того, что значения связок необходимости не равны 1:



x	Mx	Wx	N_1x	N_2x
1	1	1	b	n
b	1	b	b	0
n	n	1	0	n
0	n	b	0	0

Далее Лукасевич определяет две связки случайности и приводит примеры принимаемых формул, которые говорят о том, что в **Ł**-модальной логике существуют истинные случайные высказывания. Таким образом, все поставленные проблемы решены.

Также с точки зрения чисто логико-алгебраического подхода никаких проблем не возникает. Уже Лукасевичем была высказана гипотеза об аксиоматизации этой логики. С некоторым упрощением она была осуществлена в *[Smiley* 1961] и стандартный вид приняла в *[Lemmon* 1966]. Пусть $\supset$ есть $\supset^+$ (см. 4.3.1) и $\Box$ есть N_1x. Тогда аксиоматизацией **Ł**-системы является любое множество схем аксиом для классической пропозициональной логики $\mathbf{C}_2$ плюс следующие три:

$$\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B),$$

$$\Box A \supset A,$$

$$\Box A \supset (B \supset \Box B).$$

Единственным правилом вывода является *modus ponens.*

В *[Lemmon 1966]* дано алгебраическое доказательство полноты **Ł** -модальной системы, т.е. эта система строго полна относительно класса дискретных эпистемических алгебр. Дискретные эпистемические алгебры есть в точности булевы алгебры с выделенным элементом $\Box 1$, где $\Box$ определяется следующим образом:

$$\forall x \in L,\ \Box x = \Box 1 \wedge x.$$

Однако **Ł**-модальная логика вызвала не меньше, если даже не больше, критических замечаний, чем Ł_3. Опять же было указано на несоответствие формальных свойств новой модальной логики философской проблематике, поднятой Аристотелем. Был обнаружен целый ряд парадоксальных, совершенно интуитивно неприемлемых модальных формул (некоторые уже озадачили самого Лукасевича), которые ставят под сомнение интерпретацию связок Mp, Wp и N_1p, N_2p как "возможно" и "необходимо" соответственно. Также рассмотрению некоторых таких формул и следствий из них посвящена статья А.А. Ивина *[Ивин* 1980].

Когда всякий интерес к **Ł**-модальной логике Лукасевича казалось бы пропал, появилась исчерпывающая статья *[Font and Hajek* 2002]. Здесь рассмотрены проблемы построения крипковской семантики для этой системы и продолжены алгебраические исследования. Рассмотрены также работы, где данная система появилась независимо от Лукасевича. Интересно заключение авторов, что странности этой системы связаны не с построениями Лукасевича, а с модальной силлогистикой Аристотеля.

(См., например, формулу $\Box p \supset (\Diamond q \equiv \Box q)$. Здесь $\Diamond$ есть М и $\equiv$ определяется обычным образом через импликацию и конъюнкцию.)

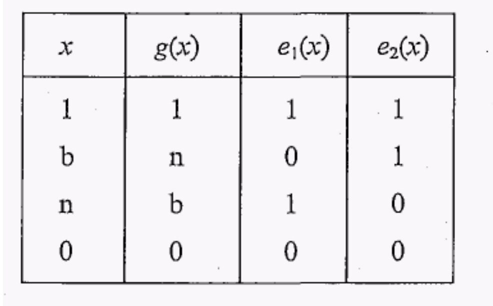
5.4.3. Решетка расширений четырехзначной классической логики C₄

Итак, первоначально развитие четырехзначных логик пошло по линии расширения классической четырехзначной пропозициональной логики **C**$_4$ унарными операторами, Таких операторов всего 256. Желательно было бы иметь какой-то критерий для их выбора. Например, в работе *[Lemmon* 1966] выделяется 15 унарных операторов, которые добавляются к **C**$_4$. Все эти 15 групп матриц называются регулярными, поскольку они верифицируют модальную аксиому

K: $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$. Выделенным значением является 1.

Однако имеется одно очень важное ограничение, предложенное в работе *[Ермолаева и Мучник* 1979]. Здесь обращается внимание на то, что модальные операторы, а также временные операторы в ряде модальных и временных логик и соответствующих алгебр выражаются с помощью эндоморфизмов в дистрибутивных решетках.

Рассматривается четырехэлементная булева алгебра $D^2 = D \times D$ *(D* - булева алгебра) с одноместными функциями g, e_1 и e_2:



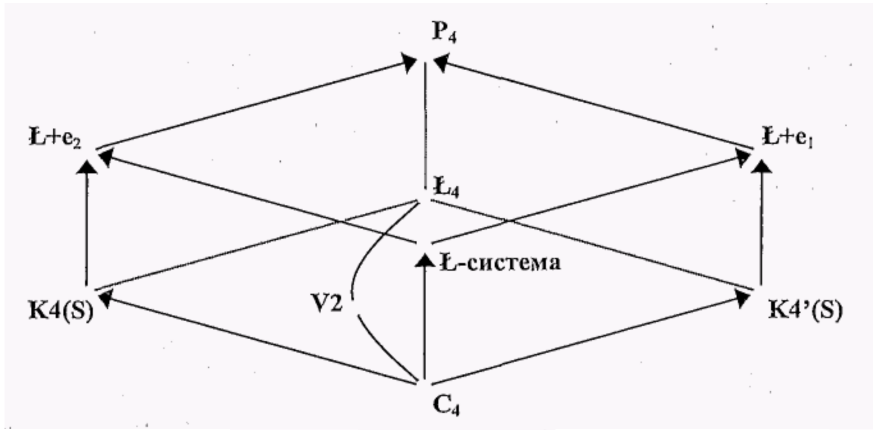
x	$g(x)$	$e_1(x)$	$e_2(x)$
1	1	1	1
b	n	0	1
n	b	1	0
0	0	0	0

В булевой алгебре D^2 эти функции являются эндоморфизмами:

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y),$$
$$f(\neg x) = \neg f(x), f(1) = 1, f(0) = 0, f(x^{\sigma}) = (f(x))^{\sigma},$$

($x^{\sigma} = \begin{cases} x \text{ при } x = 1 \\ \neg x \text{ при } x = 0. \end{cases}$)

где *f* может быть любой из функций *g, e_1* и e_2. Вместе с $e_0(x) = x$ (тождественной функцией) *g, e_1* и e_2 образуют моноид *Q* всех эндоморфизмов D^2. Добавляются также константы *b* и *n.* В этой работе выписаны все функционально замкнутые расширения *D.* Приводится решетка этих классов и определены соответствующие каждому классу четырехзначные логики. Мы приведем решетку логик в наших обозначениях:



Логики со связками $\{\vee, \wedge, \neg, b\}$ и $\{\vee, \wedge, \neg, n\}$ есть одна и та же **Ł** -модальная логика Лукасевича (см. выше). Расширение **C4** по отдельности операциями e_2 и e_1 и образует соответственно модальную логику **K4(S)** (см. выше) и **K4'(S).** Как раз с эндоморфизмом e_2 используется оператор необходимости L: $L1 = 1$, $Lb = 0$, $Ln = n$, *L0* = 0 в работе *[Zeman* 1971], где, как уже отмечалось, было доказано, что матрица со связками $\supset, \neg$ и L является характеристической для **K4(S).** Объединение двух этих логик, **K4(S)** и **K4'(S),** т.е. множество операций $\{\vee, \wedge, \neg, e_1, e_2\}$, образует четырехзначную логику Лукасевича Ł_4. Новые две системы получаются посредством расширения Ł-модальной логики Лукасевича операторами e_1 и e_2 соответственно. Множество связок $\{\vee, \wedge, \neg, e_1, e_2, b, n\}$ образует четырехзначную функционально полную логику Поста $\mathbf{P}_4$. В итоге получили бы 8-элементную булеву решетку, если бы не расширение $\mathbf{C}_4$ операцией *g,* которое образует модальную логику **V2**, находящуюся между $\mathbf{C}_4$ и Ł_4.

5.4.3.1. Модальная логика V2

Б. Собочиньский в *{Sobochinski* 1964] при исследовании расширений модальной логики **S4** (см. ниже) обнаруживает следующую формулу:

$$\Box p \vee \Box(p \supset q) \vee \Box(p \supset \neg q)$$

и устанавливает, что она не выводима в **S5**, но добавление ее к **S5** не превращает всю систему в классическую логику. Следуя *[Месхи* 1974] обозначим ее посредством β_2. В силу результата С. Скрогга о предтабличности **S5** (см. ниже раздел 8.4.2.1) Собочиньский замечает, что система $\mathbf{S5} + \beta_2$ не представляет большого интереса, поскольку является конечнозначной логикой. В *[Sobochinski* 1970] эта система обозначается посредством **V2**, и это стало ее стандартным обозначением. Сам Собочиньский занялся исследованием системы $\mathbf{V1}\ (\mathbf{S4} + \beta_2)$. Нас же как раз интересует система **V2**.

В *[Ермолаева и Мучник* 1974] утверждается, что матрица «группы III» (см. выше раздел 5.4.1) является характеристической для модальной логики **V2**.

В логике **V2** оператор □ имеет стандартные свойства: $\Box(1) = 1$, $\Box(b) = \Box(n) = \Box(0) = 0$ и определяется следующим образом:

$\Box p =: p \wedge g(p)$ *[Ермолаева и Мучник* 1974].

$\Diamond p =: \neg\Box\neg p.$

В *[Месхи 1974]* для **V2** строится семантика Крипке. Модель $<M, R>$, в которой $\forall x, y \in M$, либо *xRy,* либо *yRx,* будем называть *квазицепъю.* Непустое подмножество M' квазицепи <*M, R*> назовем *слипшимся многоточием,* если $\forall x, y \in M, xRy$ и $yRx.$ Тогда **V2** характеризуется двухэлементной квазицепью длины 1, или, иначе говоря, двухэлементным слипшимся многоточием. Поскольку оператор *g* определяется в **V2**:

$g(p) =: \Box p \vee (\neg p \wedge \Diamond p)$,

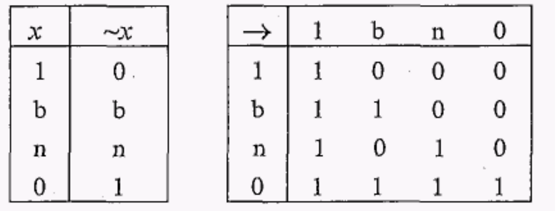
то четырехзначные логики со связками $\{\supset, \neg, \Box\}$ и $\{\supset, \neg, g\}$ функционально эквивалентны. А это значит, что логику **V2** можно развивать на основе оператора *g,* который будет играть особую роль в разделе 5.4.6 (см. также раздел 5.4.4.2).

5.4.4. Логика Белнапа DM4

В 1962 г. А. Андерсон и Н. Белнап предложили рассмотреть множество выводов, которые они назвали "тавтологическими следствиями", или "следованиями первой ступени" *(first degree enlailmenf).*

Содержательно, это множество выводов должно было включать в себя *все разумные выводы,* содержащие связки $\sim, \vee, \wedge$, а импликация входит только один раз и разделяет формулу на антецедент и консеквент, т.е. следованиями первой ступени являются формулы вида $A \rightarrow B$, где *A* и *B* суть формулы, не содержащие вхождений связки →. Формализация этих выводов привела к системе Efdo *[Anderson and Belnap* 1963], которая является фрагментом системы логики следования **E** и **R** (см., например, *[Dunn* 1986]). Т.Дж. Смайли нашел четырехзначную матрицу $\mathfrak{M}_{E_{fde}}$, которая является характеристической для $\mathbf{E}_{\mathrm{fdc}}$ (см. *[Anderson and Belnap* 1975]):

$\mathfrak{M}_{E_{fde}} = <\{1, b, n, 0\}, \sim, \vee, \wedge, \rightarrow \{1\}>$, где



x	$\sim x$
1	0
b	b
n	n
0	1

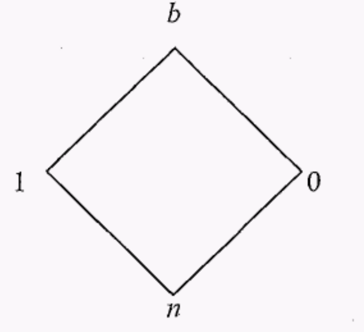
$\rightarrow$	1	b	n	0
1	1	0	0	0
b	1	1	0	0
n	1	0	1	0
0	1	1	1	1

Операции $\vee$ и $\wedge$ есть в точности $\overset{+}{\vee}$ и $\overset{+}{\wedge}$ из четырехзначной Ł-модальной логики Лукасевича.

Позже Дж. Данн предложил различные семантики для тавтологических следствий, некоторые из котрых были тесно связаны с четырехзначной матрицей Смайли. В *[Dunn* 1976] Данну принадлежит основополагающая идея, которая заключается в отождествлении четырех значений с четырьмя подмножествами булева множества {1,0}, т.е. $\mathcal{P}\{1, 0\} = \{\{1\}, \{0\}, \varnothing, \{1, 0\}\}$.

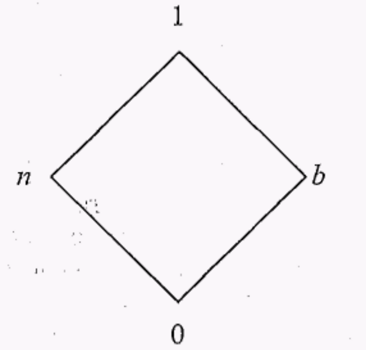
В работах *[Belnap* 1977] предложена "полезная четырехзначная логика", которая со временем вызвала необычайный интерес, особенно среди специалистов в области информатики и искусственного интеллекта. Исходная интенция Белнапа заключается в том, что компьютер должен нормально работать в условиях неполноты и/или противоречивости поступающей информации (информация может поступать из различных (возможно, независимых) источников). Белнаповский компьютер оценивает истинность высказывания в соответствии с полученной информацией. Тогда, кроме двух стандартных (классических) случаев, когда компьютеру сообщается, что высказывние является либо истинным - {1}, либо ложным - {0}, возможны еще два случая, когда источники ничего не говорят об истинности данного высказывания, т.е. возникает ситуация "истинностно-значного провала" *(gap)* — $\varnothing$, или же сообщается противоречивая информация, и тогда возникает ситуация "истинностно-значной пресыщенности" *(glut)* - {1, 0}. Для этих четырех "информационных ситуаций" Белнап вводит, соответственно, следующие четыре истинностных значения: ***T*** *(True)*, ***F*** *(False)*, ***N*** *(None)* и ***B*** *(Both)*. Мы для унификации и для простоты чтения будем использовать, как и ранее, следующие истинностные значения: 1, 0, *n* и *b*.

Далее Белнап предлагает рассмотреть на множестве $\{1, 0, n, b\}$ два частичных порядка. Первый порядок естественно возникает на множестве $\{\{1\}, \{0\}, \varnothing, \{1, 0\}\}$ и является отношением теоретико-множественного включения $\subseteq$.Тогда элементы 1 и 0 находятся между *n* и *b* и являются несравнимыми. На диаграмме Хассе это выглядит следующим образом:



Очевидно, этот порядок задает полную решетку, которую Белнап, следуя Д. Скотту *[Scott* 1973], называет "аппроксимационной решеткой" и обозначает посредством **A4**, а сам решеточный порядок на **A4** может быть интерпретирован как "информационный" порядок $\leq_i$: чем "выше" находится элемент данной решетки, тем больше информации он несет.

При другом порядке элементы *n* и *b* находятся между 1 и 0 и являются несравнимыми. Заметим, что новую упорядоченность элементов можно получить за счет поворота предыдущей решетки вправо:



Этот порядок тоже задает полную решетку, которую Белнап называет "логической решеткой" и обозначает посредством **L4**, а сам решеточный порядок на **L4** может быть интерпретирован как "логический" порядок $\leq_t$: чем "выше" находится элемент данной решетки, тем больше истинности он несет. Именно логике, основанной на свойствах этой решетки, Белнап уделяет основное внимание. Отношение $\leq_t$ играет особую роль, поскольку именно этот порядок детерминирует работу белнаповского компьютера. Перед Белнапом стоит задача определения логических связок (решеточных операций) дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции $\wedge$. Исходя «всего лишь из трех соображений: таблиц истинности для двузначной логики, монотонности и соответствия между $\wedge$ и $\vee$», Белнап (см. *[Белнап* 1981]) получает в точности таблицы истинности для $\vee$ и $\wedge$, как в матрице Смайли для $\mathbf{E}_{\text{fdc}}$. В свою очередь, отрицание ~ также совпадает с отрицанием в матрице Смайли. Такое отрицание называется отрицанием Де Моргана. Логику с такими связками обозначают посредством **DM4**, поскольку ее алгебраическим примером является решетка Де Моргана (квазибулева алгебра), четырехэлементный случай которой был приведен уже в *[Biafynicki-Binila and Rasiowa* 1957] (см. также *[Rasiowa* 1974]).

М. Фиттинг *[Fitting* 1989] (см. также *[Fitting* 1992]) обратил внимание на то, что четырехзначная логика Белнапа есть не что иное, как обобщение трехзначной логики Клини $\mathbf{K}_3$. Более того, если мы посмотрим на истинностные таблицы, приведенные выше для $\sim$, $\vee$ и $\wedge$, то увидим, что ограничения этих связок на множестве $\{1, 0, b\}$ и $\{1, 0, n\}$ в точности дают одну и ту же трехзначную логику Клини $\mathbf{K}_3$.

Белнап ничего не говорит о связке импликации и оставляет открытым вопрос о множестве выделенных значений. Заметим, что при одном выделенном значении 1, как и при двух выделенных значениях 1 и *b,* эта логика не имеет тавтологий. Тем не менее, порядок $\leq_l$ позволяет ему естественно ввести *отношение логического следования.* Пусть *v* (оценка) есть отображение множества пропозициональных переменных на множество $\{1,\, 0,\, n\; b\, \}$.Тогда имеем:

$A \vDash_C B$ *т.т.т., когда* $v(A) \leq_l v(B)$ *для всякой оценки* v.

Белнап предлагает компьютеру некоторый набор выводимостей, которые тот может использовать. Это отношение логического, следования как раз и аксиоматизируется посредством $\mathbf{E}_{\mathrm{fdc}}$. Оказывается, это отношение логического следования эквивалентно приведенному нами для логики Клини $\mathbf{K}_3$ (см. 3.4.1). Перепишем его следующим образом:

$A \vDash_D B$ *т.т.т., когда* $v(A) \in D \Rightarrow v(B) \in D$ *для всякой оценки* v.

Теперь это отношение определяется для **DM4** с множеством выделенных значений {1, *b}*. Доказательство эквивалентности см. в *[Font* 1997] и детально и независимым образом в *[Зайцев и Шрамко* 2004].

Конечно, возникает вопрос, каково отличие **DM4** от $\mathbf{K}_3$, если первая есть обобщение второй и отношения логического следования совпадают? Тщательному изучению **DM4** посвящена статья *[Font* 1997] (см. добавление в *[Font* 1999]). Здесь представлено секвенциальное исчисление для **DM4,** его взаимоотношение с подобными исчислениями для трехзначной логики Клини $\mathbf{K}_3$ и для классической логики $\mathbf{C}_2$. Главный результат заключается в следующем: *класс решеток Де Моргана является алгебраическим примером* **DM4;** точно так же, как класс булевых алгебр является алгебраическим примером $\mathbf{C}_2$. См. также *[Рупко* 1999]. Напомним, что операции матрицы для $\mathbf{K}_3$ образуют решетку Клини.

Четырехзначная логика Белнапа **DM4** оказалась очень полезной в качестве базиса для других логик. Наиболее интересны её расширения модальными операторами, эндоморфизмами на дистрибутивных решетках и, конечно, связкой импликации.

5.4.4.1. Логика DM4 с модальными операторами

На самом деле логика де Моргана как эквивалент алгебры Де Моргана была построена уже в *[Ермолаева* 1973], которая исходила из [работы Хао Вана *[Wang* 1961], где рассматривались два варианта импликации

в трехзначной логике: импликация Лукасевича и импликация Клини (см. выше гл. 3).

В *[Ермолаева* и *Мучник 1974]* впервые в качестве объекта исследования изучалась логика **DM4** со стандартным модальным оператором □ III (см. выше раздел 5.4.1) и был представлен ее алгебраический эквивалент с теоремой представления. Здесь отмечается, что алгебра подобной логики возникла еще при первоначальной попытке Г. Мойсила найти короткую систему аксиом для трехзначных алгебр Лукасевича.

Специально изучению такой логики под названием **TML** *itetravalent modal logic)* и их алгебрам *(TMA)* посвящена обстоятельная статья *[Font and Rius* 2000]. Здесь отмечается, что *TMA.* первоначально изучались А. Монтейро под влиянием работ Л. Монтейро, посвященных доказательству независимости аксиоматизации трехэлементных алгебр Лукасевича *[Monteiro L.* 1963]..

В *[Font and Rius* 2000] приводится аксиоматизация *TMA.* К аксиомам алгебры Де Моргана добавляются следующие две аксиомы:

(TM1) $\Box x \wedge {\sim}x = 0$

(TM2) ${\sim}\Box x \wedge x = {\sim}x \wedge x.$

Если к ним добавить аксиому $\Diamond(x \wedge y) = \Diamond x \wedge \Diamond y\ (\Diamond x = {\sim}\Box{\sim}x)$,то получим аксиоматизацию класса трехэлементных алгебр Лукасевича. Здесь же представлено секвенциальное исчисление логики **TML**.

5.4.4.2. Логика DM4 с эндоморфизмами

Как и в случае с расширением классической логики $\mathbf{C}_4$, особый интерес представляют расширения логики Белнапа **DM4** эндоморфизмами *g, e_1* и e_2 (см. раздел 5.4.3). Однако здесь, в отличие от предыдущего случая, решетка логик не столь привлекательна.

Интересно, что в случае с эндоморфизмом *g мы опять же получаем модальную логику* **V2.** Это следует из того простого факта, что логики с операциями $\{\vee,\, \wedge,\, \neg,\, g\}$ и $\{\vee,\, \wedge,\, {\sim},\, g\}$функционально эквивалентны:

${\sim}x =: g(\neg x)$ и $\neg x = g({\sim}x).$

Отсюда также следует, что **V2** есть расширение **TML**.

Другим заслуживающим внимание расширением логики **DM4** является так называемая *логика истинности* фон Вригта.

Г.Х. фон Вригт, начиная со статьи «Истина и логика» *[Wright* 1984], конструирует целый ряд исчислений, отличительной чертой которых является расширение классической пропозициональной логики пропозициональным оператором истинности T («истинно, что ...»), который играет роль модального оператора. Таким образом, понятие истины вводится в объектный язык. Как пишет фон Вригт, эта тематика заинтересовала его еще в статье «О логике отрицания» (1959).

В статье, опубликованной на венгерском языке в журнале *«Doxa,* 5» (1985), а затем на русском языке *[Вригт* 1986], вводятся трехзначные и четырехзначные операторы истинности. Трехзначные операторы истинности представляют собой не что иное, как модальные операторы $\Box$ и $\Diamond$ из трехзначной модальной логики Лукасевича (см. выше раздел 3.1.2), но, как нам уже известно, соответствующие логики по своим функциональным свойствам есть не что иное, как трехзначная логика Лукасевича Ł_3, и тогда ничего нового мы не получаем, и всякий смысл оператора истинности пропадает

В заключительной работе *[Wright* 1987] аксиоматизируется четырехзначная логика истинности **T"** (у фон Вригта - **T"LM**) с одним выделенным значением, которая на самом деле представляет собой расширение логики **DM4** (без ссылки на Н. Белнапа) посредством эндоморфизма e_2 (см. выше раздел 5.4.3). Эта операция как раз и обозначается посредством T. Поскольку в **T"** выразим стандартный оператор необходимости $\Box$ $(\Box x =: \mathrm{T}x \wedge {\sim}(\mathrm{T}{\sim}x))$, то **T"** можно представить как расширение модальной логики Де Моргана **TML** (см. выше) посредством добавления оператора T. Легко показать, что в **T"** выразимы все $J_1(x)$-операторы. Это значит, что используя алгоритм, предложенный в *[Аншаков и Рычков* 1982] (см. следующую главу), пропозициональную логику **T"** (как и её предикатный вариант) можно аксиоматизировать как расширение классической логики. Заметим, что если в логике **T"** отрицание Де Моргана ~ заменить на булево отрицание $\neg$, то получим модальную логику **K4(S)** (см. выше раздел 5,4.3), и тогда «логикой истинности» можно было бы считать данную логику. Отметим также, что если логику **T"** расширить булевым отрицанием $\neg$, то получим логику Лукасевича Ł_4. Это следует из решетки расширений **C4** (см. выше),

В *[Павлов* 1994] (см. также *[Павлов* 2004]) появляется формализация четырехзначной *логики ложности* под названием **FL4**. Исходными связками здесь являются импликация → и оператор ложности F. Заметим, что импликация → есть не что иное, как импликация из белнаповской логики **DM4**, если возьмем стандартное определение: $x \to y =: {\sim}x \vee y$. Оператор ложности F (в указанных работах он обозначается посредством *—x)* можно определить следующим образом: $\mathrm{F}(x) =: \mathrm{T}({\sim}x)$.

Понятно, что логика ложности **FL4** по функциональным свойствам есть не что иное, как логика истинности **T"**. Заметим, что **T"** также получается, если **DM4** расширить эндоморфизмом e_2, поскольку эндоморфизмы e_1 и e_2 взаимовыразимы при наличии де-моргановского отрицания:

$e_1(x) =: {\sim}(e_2({\sim}x))$ и $e_2(x) =: {\sim}(e_1({\sim}x))$.

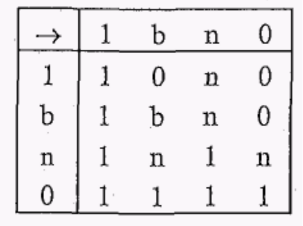
Заметим, что выбор оператора e_2 (или e_1) в качестве оператора истинности крайне неудачен, поскольку в силу свойств этого оператора (значениями $e_2(x)$ являются только 1 или 0) вся предполагаемая проблематика истинности и ложности сводится к двузначному случаю и становится тривиальной. Это хорошо видно из указанных работ С.А. Павлова. На самом деле главным для фон Вригта было построение паранепротиворечивой логики, в которой закон непротиворечия ${\sim}(T(x) \wedge T({\sim}x))$ не имеет места. Этим и только этим объясняется выбор отрицания де Моргана ~ и соответствующего оператора истинности *T.*

В разделе 5.4.6 будет предложен оптимальный вариант четырехзначной пропозициональной «логики истинности» в связи с аристотелевской проблемой логического фатализма.

5.4.4.3. Логика DM4 с импликацией

Определение импликации $p \supset q$ как ${\sim}p \vee q$ в **DM4** не является адекватным, поскольку ни *modus ponens,* ни теорема дедукции не имеют в таком случае места.

Импликация Смали $A \to B$ (см. выше) обладает такими свойствами, но только на первопорядковом уровне, где A и B суть формулы, не содержащие вхождений связки →. В *[Brady* 1982], исходя из свойств импликации Смали, это ограничение снимается. При этом автор обобщает свойства трехзначной импликации из **RM3** (см. выше раздел 3.5.2.1) следующим образом:



→	1	b	n	0
1	1	0	n	0
b	1	b	n	0
n	1	n	1	n
0	1	1	1	1

На подмножестве $\{1, b, 0\}$, → есть импликация Собочиньского из **RM3,** в то время как на подмножестве $\{1, n, 0\}$ → есть импликация Лукасевича из $Ł_3$. **DM4** сданной импликацией обозначается в *[Brady* 1982] посредством **BN4** и выделенными значениями являются 1 и *b*. Здесь приводятся различные виды семантик для **BN4** и дается гильбертовская аксиоматизация с *несколькими* правилами вывода. В этой логике верифицируются все аксиомы релевантной системы **R** (см. раздел 8.5.1), кроме закона сокращения.

Логика **BN4** независимым образом появляется в *[Slaney* 1991]. Она изучается также в *[Restall* 1993] в связи с аксиомой свертывания в наивной теории множеств, где считается наиболее естественной четырехзначной логикой.

В отличие от *[Brady* 1982] В.М. Попов в *[Попов* 1989] обобщает свойства трехзначной паранепротиворечивой логики **PCont** (см. выше раздел 3.5.2) на логику **Par.** В указанной работе приводится секвенциальная и гильбертовская аксиоматизация **Par.** Последняя состоит из всех классически общезначимых, формул, не содержащих отрицание ~. А также следующие десять формул:

$$\sim\sim p \supset p,\ p \supset \sim\sim p,\ \sim(p \vee q) \supset \sim p,\ \sim(p \vee q) \supset \sim q,$$

$$(\sim p \wedge \sim q) \supset \sim(p \vee q),\ \sim(p \wedge q) \supset (\sim p \vee \sim q),\ \sim p \supset \sim(p \wedge q),$$

$$\sim q \supset \sim(p \wedge q),\ \sim(p \supset q) \supset (p \wedge \sim q),\ (p \wedge \sim q) \supset \sim(p \supset q).$$

Правила вывода: modus ponens и подстановка. В *[Рупко* 1999] было отмечено, что **Par** является расширением **DM4** посредством добавления связки ⊃:

⊃	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	1	b	n	0
n	1	1	1	1
0	1	1	1	1

Обратим внимание, что на подмножестве $\{1, b, 0\}$, ⊃ есть импликация $\supset_J$ из паранепротиворечивой логики **PCont,** в то время как на подмножестве $\{1, n, 0\}$, ⊃ есть импликация $\rightarrow_1$, рассмотренная нами в (3.1.1). В этой работе также представлено генценовское исчисление для **Par** и показано, что алгебраической семантикой для логики **DM4** с импликацией ⊃, т.е. для **Par,** является *импликативная решетка Де Моргана.*

Заметим, что такое определение четырехзначной импликации ⊃ в явном виде (и в связи с логикой **DM4)** впервые встречается в

[Avrori 1991]. Более того, здесь показано, что как и трехзначные логики **RM3** и **PCont,** точно так же и четырехзначные логики **BN4** и **Par** функционально эквивалентны:

$$p \supset q =: q \vee (p \rightarrow (p \rightarrow q)),$$

$$p \rightarrow q =: (p \supset q) \wedge (\sim q \supset \sim p).$$

5.4.4.4. Бирешетки

М. Гинзберг *[Ginsberg* 1986; 1988] был первым, кто обобщил идеи Белнапа и рассмотрел произвольное множество с двумя частичными порядками, каждый из которых на этом множестве задает свою собственную полную решетку. Главное то, что эти две решетки существуют не сами по себе, а связаны между собой. Это обобщение можно представить следующим образом.

Пусть $<L_1, \leq_1>$ и $<L_2, \leq_2>$ есть решетки, каждая с наибольшим и наименьшим элементом. Посредством $L_1 \odot L_2$ обозначается $<L_1 \times L_2, \leq_t, \leq_k>$, где

1. $<x_1, x_2> \leq_t <y_1, y_2>$, если $<x_1 \leq_1 y_1>$ и $<y_2 \leq_2 x_2>$;
2. $<x_1, x_2> \leq_k <y_1, y_2>$, если $<x_1 \leq_1 y_1>$ и $<x_2 \leq_2 y_2>$.

Отсюда легко дать характеризацию решеточных операций в $L_1 \odot L_2$:

$$<x_1, x_2> \vee <y_1, y_2> = <x_1 \vee y_1, x_2 \wedge y_2>$$

$$<x_1, x_2> \wedge <y_1, y_2> = <x_1 \wedge y_1, x_2 \vee y_2>$$

$$<x_1, x_2> \oplus <y_1, y_2> = <x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2>$$

$$<x_1, x_2> \otimes <y_1, y_2> = <x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2>$$

Такая алгебраическая структура была названа *бирешеткой (bilattice)* и основной мотивацией для Гинзберга было использование бирешеток в качестве основания в различных системах искусственного интеллекта. Если L_1 и L_2 каждая является дистрибутивной решеткой, то $L_1 \odot L_2$ тоже дистрибутивная решетка. Более того, Гинзберг показал, что имеют место все 12 возможных дистрибутивных законов, т.е. операции взаимосвязаны между собой. Например,

$$x \otimes (y \wedge z) = (x \otimes y) \wedge (x \otimes z).$$

В *[Ginsberg* 1988] доказана *теорема представления* для бирешеток: если $\mathcal{B}$ есть дистрибутивная бирешетка, тогда имеются дистрибутивные решетки L_1 и L_2 такие, что $\mathcal{B}$ изоморфна $L_1 \odot L_2$.

Иногда бирешетку представляют в виде

$$\mathcal{B} = <\mathcal{B}, \vee, \wedge, \oplus, \otimes>,$$

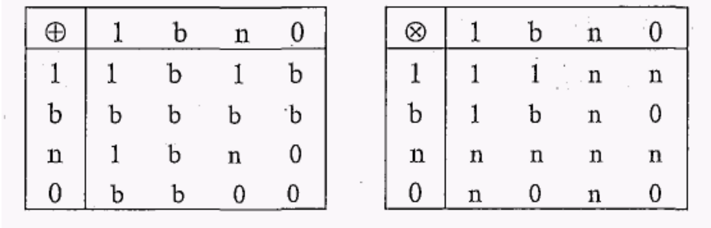
где *B* есть непустое множество.

Следуя Гинзбергу, на $\mathcal{B}$ вводится регулярное отрицание ~ (здесь оно обычно обозначается посредством $\neg$), которое удовлетворяет следующим условиям:

1. если $x \le_t y$, то $\sim x \ge_t \sim y$
2. если $x \le_i y$, то $\sim x \ge_i \sim y$
3. $\sim\sim x = x$.

Специальный интерес для нас представляет следующий пример. Пусть $L_1 \sim L_2$ есть двухэлементная решетка {0, 1}, где 0 < 1. Тогда $L_1 \odot L_2$ есть не что иное, как "комбинация" двух решеток **A4** и **L4**, где 1 есть <1, 0>, 0 есть <0, 1>, *b* есть <1, 1> и *n* есть <0, 0>. В итоге мы имеем наиболее простую нетривиальную бирешетку, которая обозначается посредством *FOUR,*

Целый ряд работ логического характера, связанных с бирешетками, принадлежит М. Фиттингу. В *[Fitting* 1989] вводятся обозначения $\oplus$ и $\otimes$ для решеточных операций в решетке $<L, \le_i>$, которые называются соответственно *'доверчивость'* (gullability) и *'консенсус'* (consensus):



⊕	1	b	n	0
1	1	b	1	b
b	b	b	b	b
n	1	b	n	0
0	b	b	0	0

⊗	1	b	n	0
1	1	1	n	n
b	1	b	n	0
n	n	n	n	n
0	n	0	n	0

Здесь же впервые дается аксиоматизация в виде аналитических таблиц логики со множеством связок $\{\vee, \wedge, \oplus, \otimes, \sim\}$. Вводится также унарная операция '–' под названием *"конфляция"* (conflation): $-n = b$, $-b = n$, $-1 = 1$ и $-0 = 0$. Эта операция есть не что иное, как рассмотренный выше эндоморфизм *g*.

Для всех этих трех операций Фиттинг дает содержательное обоснование. В *[Fitting* 1990] вводится важное понятие *сплетенной* (interlaced) бирешетки: *Бирешетка* $\mathcal{B}$ (с отрицанием или без него) *называется сплетенной, если каждая из операций* $\vee, \wedge, \oplus, \otimes$ *является монотонной относительно обоих порядков* $\le_i$ *и* $\le_t$. Это понятие является прямым обобщением клиниевского понятия *регулярности* трехзначных логических связок (см. 3.4.1). Из условия сплетенности следуют такие "странные" (см. *[Белнап* 1981) свойства операций, как $b \vee n = 1$, $b \wedge n = 0$, а также $1 \vee 0 = b$, $1 \wedge 0 = n$. Фиттинг показал, что каждая дистрибутивная бирешетка является сплетенной *[Fitting* 1992]. Новые операции понадобились Фиттингу при разработке языка логики программирования, имеющего дело с базами распределенного знания *[Fitting* 1991]. Он был первым, кто осознал значимость бирешеток для семантики логики программирования. Исходя из работы *[Dunn* 1976], Фиттинг в *[Fitting* 1989] (см., также *[Fitting* 1994]) представил исчисление, основанное на *FOUR,* в виде аналитических таблиц. Интересно, что во второй работе Фитинг по аналогии с **К**з обобщил логики $\mathbf{K}_3^w$ и **LISP** (см. выше раздел 3.4) до дистрибутивных бирешеток в том смысле, что каждая из них является частью соответствующих бирешеток. Наконец, Фиттинг первым *[Fitting* 1992; 1994] исследует бирешетки с отрицанием *~x* и конфляцией *—x* (в последней работе доказывается теорема представления). Заметим также, что суммарный итог многочисленных работ Фиттинга по бирешеткам можно найти в *[Fitting* 2006].

Несколько слов об обобщении бирешеток. В *[Lakshrnanan and Sadri* 1994] бирешетки расширяются третьим отношением порядка, названным *"отношением точности",* предназначенным для эффективного рассмотрения различных степеней веры и сомнения в дедуктивных вероятностных базах данных. В *[Shramko, Dunn and Takenaka* 2001] (см. также *[Шрамко* 2002]) введено понятие *трирешетки* конструктивных истинностных значений *SIXTEEN* с дополнительным третьим частичным порядком $\le_c$, упорядочивающим 16 истинностных значений *по их конструктивности.* В *[Shramko and Warning* 2005] (см. также *[Ванзинг и Шрамко* 2005]) вводится понятие *n-мерной мультирешетки* как структуры, на которой определены в точности *n* частичных порядков. В этих работах исследуется также сама 16-значная логика, соответствующая структуре *SIXTEEN.*

Подчеркивается фундаментальная роль теории следования первой ступени (см. выше раздел 5.4.4).

5.4.4.4.1. Логическая бирешетка: импликация и классическое отрицание

Большой интерес представляют работы А. Ариэли и А. Аврона, в которых вводится понятие *логической бирешетки* и строятся соответствующие логики *[Arieli and Avron* 1994; 1996]. Здесь решается проблема выделенных значений и проблема определения подходящей импликации.

Понятие логической бирешетки в некотором смысле является обобщением понятия логической матрицы, которая, напомним, есть пара $<\mathcal{A}, D>$, в которой $\mathcal{A}$ есть алгебра с множеством выделенных значений *D. Логической бирешеткой* называется пара $<\mathcal{B}, F>$, в которой $\mathcal{B}$ есть бирешетка и *F* есть простой бифильтр на $\mathcal{B}$.

(Бифильтр бирещетки есть $\mathcal{B} = <\mathcal{B}, \leq_t, \leq_k>$ непустое подмножество $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$, $F \neq \mathcal{B}$ такое, что

$x \wedge y \in F$ т.т.т., когда $x \in F$ и $y \in F$,
$x \otimes y \in F$ т.т.т., когда $x \in F$ и $y \in F$.

Бифильтр называется простым, если также выполняются условия:
$x \vee y \in F$ т.т.т., когда $x \in F$ или $y \in F$,
$x \oplus y \in F$ т.т.т., когда $x \in F$ или $y \in F$.)

Пусть *BL* есть стандартный пропозициональный язык $\{\vee, \wedge, \sim, \oplus, \otimes\}$.

(В этих работх рассматриваются также различные расширения языка $\{\vee, \wedge, \sim, \oplus, \otimes\}$, , например, *BL(4),* который есть *BL,* расширенный пропозициональными константами $\{1, 0, b, n\}$. Однако свойства логического следования $\models$ во всех этих случаях остаются неизменными.)

Оценка *v* есть функция, которая приписывает истинностное значение из $<\mathcal{B}, F>$ каждой пропозициональной переменной. Любая оценка обычным образом расширяется на сложные формулы. Отношение логического следовния $\models$ вводится, как считают авторы, наиболее естественным образом (см. выше определение $\models_D$):

$\Gamma \models \Delta$. *{где* Γ, Δ *есть конечные множества формул в языке* $\{\vee, \wedge, \neg, \oplus, \otimes\}$) *т.т.т,, когда для каждой оценки v такой, что* $\nu(A) \in \mathcal{F}$ *для каждой формулы* $A \in \Gamma$, *существует некоторая формула* $B \in \Delta$ *такая, что* $\nu(B) \in F$.

Отношение $\models$ имеет два важных свойства:

a) $\models$ не имеет тавтологий,
b) $\models$ является паранепротиворечивым: $p, \neg p \not\models q$.

Аксиоматизация отношения $\models$ дается в виде генценовского исчисления под названием **GBL.** Фрагмент $\{\vee, \wedge, \sim\}$ языка **GBL** является аксиоматизацией первопорядкового следования $\mathbf{E}_{\text{fdc}}$. Посредством добавления соответствующих правил можно получить из этого фрагмента генценовские исчисления для **К**з, **J**$_3$ и **C**$_2$.

Следует отметить, что исходя из исследований М. Фиттинга бирешеток с конфляцией, в *[Arieli and Avron* 1996] дается следующая формулировка *классической* бирешетки: *Бирешетка* $\mathcal{B}$ *с конфляцией*

называется классичекой, если для каэюдого $x \in \mathcal{B}, x \vee \neg\sim x = 1$. Отмечается, что обе эти операции коммутируют: $\neg\sim x = \sim\neg x$; в свою очередь, комбинация $\neg\sim x$ играет роль *классического отрицания* $\neg$ $(\neg n = b, \neg b = n, \neg 1 = 0$ и $\neg 0 = 1)$. В этой же работе исчисление **GBL** расширяется связкой конфляции.

Важная проблема, которая здесь возникает, это расширение языка *BL* связкой импликации $\supset$. В силу того, что соответствующая логика **BL** не имеет тавтологий, определение $p \supset q$ как $\neg p \vee q$, как уже говорилось, не является подходящим. Авторы указывают, что единственно приемлемым способом является следующий.

Пусть $<\mathcal{B}, F>$ есть логическая бирешетка. Тогда

$$p \supset q = \begin{cases} q, \text{ если } p \in F \\ T, \text{ если } p \notin F. \end{cases}$$

Исчисление **GBL** расширяется связкой $\supset$:

a) **GBLb** есть консервативное расширение **GBL,**
b) **GBL**$_3$ является паранепротиворечивой логикой,.
c) Фрагмент $\{\vee, \wedge, \supset\}$ идентичен классической позитивной логике.

Также приводится гильбертовская аксиоматизация $\mathbf{BL}_{\supset}$.

Четырехзначная импликация $\supset$ есть не что иное как импликация из **Par.** Отмечается, что она имеет ряд недостатков. Например, $A \supset B$ и $B \supset A$ могут быть тавтологиями, но $\sim A \supset \sim B$ нет. Также Имеем $n \supset 0 = 1$. Авторы предлагают два способа исправления этих недостатков. Первый заключается в том, чтобы усилить связку посредством введения "сильной" *(strong)* импликации → . Тода четырехзначный случай со связками $\vee, \wedge, \supset$ и $\sim$ есть логика **BN4** (у авторов нет ссылки на работу *[Brady* 1982]).

Импликация → интересна тем, что позволяет устанавливать взаимоотношения с другими логиками. Авторы отмечают, что значимость введенного отношения $\models$ в том, что оно может быть принято в качестве первого приближения в выводах при наличии противоречивого знания. Проблемы, которые возникают с импликацией $\supset$, связаны с данным определением логического следования $\models$, которое является монотонным. Поэтому имеет смысл переопределить $\models$ так, чтобы оно стало немонотонным. Здесь авторы следуют идее, взятой из *[Kifer and Lozinskii* 1992].

Все логические результаты, основанные на логических бирешетках, имеют также место и относительно четырехэлементой структуры *FOUR.* Такая структура в теории логических бирешеток играет ту же роль, что двухэлементная булева алгебра в теории булевых алгебр. Тогда, если $\mathcal{B}$ в $<\mathcal{B}, \mathcal{F}>$ есть *FOUR,* то множество $\{1, b\}$ является единственным простым фильтром. Заметим, что единственным простым фильтром на двухэлементной булевой алгебре является множество {1}.

Работа *[Arieli and Avron* 1998] посвящена именно изучению четырехзначной логики со связками $\{\vee, \wedge, \sim, \oplus, \otimes, \supset\}$. Множеством выделенных значений *D* является множество $\{1, b\}$. Авторы отмечают, что импликация $\supset$ в сигнатуре $\{\vee, \wedge, \sim, \oplus, \otimes\}$ не определима и, более того, она не определима даже, если добавим пропозициональные константы $\{1, 0, b, n\}$ (такая логика обозначается посредством BL(4) (В *[Avron* 1999] уточняется, что это следует из того факта, что все указанные связки являются монотонными, а связка $\supset$ нет. Здесь же устанавливается факт о функциональной предполноте BL(4). Это означает, что в отличие от трехзначного случая, множество всех монотонных связок четырехзначной логики предполно. Этот же результат о функциональной предполноте BL(4) получен в *[Pynko* 1999]. О понятии функциональной предполноты см. в разделе 7.3.3.)

Однако логика со связками $\{\vee, \wedge, \sim, \oplus, \otimes, \supset, 1, 0, b, n\}$ уже является функционально полной. Число связок в такой логике можно свести до базисного (классического) языка $\{\sim, \vee, \supset\}$, расширенного константами *b* и *n.* Более того, число связок можно свести до четырех: $\{\sim, \oplus, \supset, n\}$.

Интересно замечание авторов, что из генценовской аксиоматизации логики со связками $\{\vee, \wedge, \sim, \oplus, \otimes, \supset, 1, 0, b, n\}$ следует, что $\{\vee, \wedge, \supset, 1, 0\}$-фрагмент является аксиоматизацией классической логики $\mathbf{C}_2$. Тогда можно представить аксиоматизацию логики со всеми этими связками как расширение $\mathbf{C}_2$ новыми связками, например, ~.

Обратим внимание на работу *[Muskens* 1999]. Здесь строится четырехзначная логика предикатов $\mathbf{L}_4$, основанная на бирешеточных операциях $\{\wedge, \otimes, \sim, -\}$, для которых имеет место функциональная полнота. Для $\mathbf{L}_4$ развивается теория моделей и доказывается аналог интерполяционной теоремы Крейга.

Очень важная, уже упоминавшаяся, *алгебро-логическая* работа относительно расширений **DM4** принадлежит А.П. Пынко [*Pynko* 1999]. Здесь предложено 12 логик, ассоциированных с **DM4**: сама **DM4, DM4** с 1 и 0 (**BDM4), DM4** с $\oplus$ и $\otimes$ **(D4), D4** с константами 1, 0, *b, n* **(BD4)з BDM4** с классическим отрицанием $\neg$**(DMB4), BD4** с $\neg$**(B4);** эти шесть логик расширяются импликацией $\supset$, рассмотренной нами выше. Используя им же предложенную в 1993 г. теорию алгебраизуемых секвенциальных исчислений, А.П. Пынко представляет алгебраическую аксиоматизацию всех этих логик с последующей их секвенциальной аксиоматизацией. Также показывается, что логика **BD4**$(\vee, \wedge, \sim, \oplus, \otimes, 1, 0, b, n)$ с классическим отрицанием $\neg$, т.е логика B4, функционально полна.

5.4.5. Другие четырехзначные логики

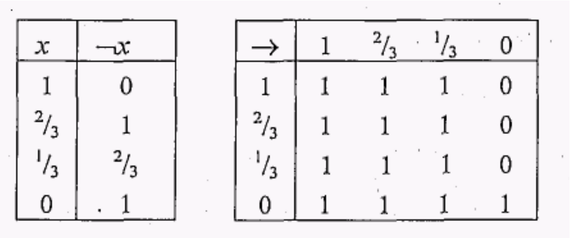
Интерес вызывают работы по логике аргументации с использованием аппарата современной символической логики. Исходной является статья В.К. Финна *[Финн* 1996], где предлагается вариант логики аргументации $\mathbf{A}_4$, истинностные значения которой $1, -1, 0, \tau$ истолковывались соответственно как «фактически истинно», «фактически ложно», «фактически противоречиво» и «неопределенно».

Семантика логики аргументации $\mathbf{A}_4$ образована непустым множеством доводов (возможных аргументов и контраргументов) $\mathcal{A}$ и функциями g^+ (аргументов *pro)* и g^- (аргументов *contra),* которые отображают множества всех пропозициональных переменных во множество подмножеств некоторого (конечного) множества $\mathcal{A}$ аргументов. С помощью функций g^+ и g^- вычисляется оценка пропозициональных переменных. Особенностью логики аргументации $\mathbf{A}_4$ является неассоциатиность конъюнкции &. Дана формализация логики $\mathbf{A}_4$ методом аналитических таблиц Р. Смальяна. Также представлена логика предикатов $\mathbf{A}_4$. В *[Финн* 2007] рассмотрено три типа отношения порядка на множества истинностных значений $\{1, -1, 0, \tau\}$, в соответствии с чем строится четыре варианта четырехзначных логик аргументации.

В *[Виноградов* 2006] предложен вариант логики аргументации, который отличается от исходного тем, что функции «аргументации» заданы на множестве всех пропозициональных формул, а не на множестве пропозициональных переменных. В качестве основы принимается логика Белнапа **DM4;** В *[Виноградов* 2006] предыдущая логика аргументации расширяется связками $\oplus$ и $\otimes$ и импликацией $\supset$. Для этого языка развивается метод семантических таблиц, который является обобщением метода Фиттинга.

Среди других четырезхначных логик, выделим четырехзначную паранепротиворечивую логику $\mathbf{P}^1_4$, которая является обобщением трехзначной логики Сетте $\mathbf{P}^1$ (см. раздел 3.5.4). Эта логика была введена в *[Carnielly and Lima-Marques* 1999] и изучалась в *[Fernandez and Coniglio* 2003] под названием $\mathbf{P}^2$. Она имеет следующую логическую матрицу:

$\mathfrak{M}^L_n = <\{0, {}^1/_3, {}^2/_3, 1\}, \neg, \rightarrow, \{{}^1/_3, {}^2/_3; 1\}>$, где



x	$\neg x$
1	0
$^2/_3$	1
$^1/_3$	$^2/_3$
0	1

$\to$	1	$^2/_3$	$^1/_3$	0
1	1	1	1	0
$^2/_3$	1	1	1	0
$^1/_3$	1	1	1	0
0	1	1	1	1

Однако уже в *[Setle and Carnielli* 1995] встречается аналогичная матрица, а также на четырехзначный случай обобщается трехзначная параполная логика $\mathbf{I}^1$.

В заключение рассмотрим еще одну четырехзначную логику, которая одновременно является и паранепротиворечивой, и параполной, т.е. *паранормальной.* Эта логика исследуется в *[Попов* 2003] под названием **AVP**.

Язык $\mathcal{L}$ логики **AVP** есть стандартно определяемый пропозициональный язык $<S, \&, \vee, \supset, \neg>$, где S есть множество $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ всех пропозициональных переменных языка $\mathcal{L}$. Квазиэлементарной формулой называется формула, которая не имеет вхождений ни одной из логических связок $\&, \vee, \supset$. Логика **AVP** *[Попов* 2008]) есть наименьшее множество формул, которое замкнуто относительно правила подстановки и правила MP и которому принадлежат все классические тавтологии в языке $\mathcal{L}$, не содержащие вхождений $\neg$, и для всякой формулы A, не являющейся квазиэлементарной формулой, имеют место следующие формулы:

$$\neg\neg p_1 \supset p_1, \quad p_1 \supset \neg\neg p_1,$$

$$\neg A \supset (A \supset p_1), \quad (A \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg A.$$

Для этой логики строится семантика обобщенных по Е.К. Войшвилло *[Войшвилло* 1988] описаний состояния. Более того, она имеет четырехзначную характеристическую матрицу с одним выделенным значением.

Сделаем предположение, что трехзначных средств недостаточно для построения *паранормальной* логики с соответствующей теоремой адекватности.

5.4.6. «Логика истинности» Tr и фаталистический аргумент Аристотеля

Еще раз обратим внимание на то, что расширение классической четырехзначной логики $\mathbf{C}_4$ и расширение логики Белнапа **DM4** оператором g в результате дает одну и ту же логику, а именно модальную

логику **V2** со связками $\{\vee, \wedge, \neg, \Box\}$, которая функционально эквивалентна логикам со связками $\{\vee, \wedge, \neg, g\}$ и $\{\vee, \wedge, \sim, g\}$.

5.4.6.1. Логика Tr

Предлагается рассмотреть логику, в которой вместо оператора необходимости $\Box$ используется оператор g, интерпретируемый как *«оператор истинности»* T. Такую логику обозначим посредством **Tr**
В работе А. Тарского об истине 1933 года (см. *[Тарский* 1999]) указаны некоторые свойства (условия) *предиката* «истинный», которые должна выполнять аксиоматическая теория истины. Если перевести эти и другие условия на *пропозициональный* случай и вместо предиката «истинный» взять оператор истинности T, то приемлемые условия для этого оператора выглядят следующим образом:

(I) $\mathrm{T}(\neg p) \equiv \neg\mathrm{T}(p)$

(II) $\mathrm{T}(p) \vee \mathrm{T}(\neg p)$ – закон исключенного третьего

(III) $\mathrm{T}(p) \equiv p$ – конвенция Тарского.

Если же имеется оператор ложности $\mathrm{F}(p)$: $\mathrm{F}(p) \equiv \mathrm{T}(\neg p)$, то естественно, чтобы оба эти оператора коммутировали:

(IV) $\mathrm{TF}(p) \equiv \mathrm{FT}(p)$,

что согласуется с нормальным использованием этих понятий и позволяет естественным образом ввести отрицание: в нашем случае это $\neg p$.

(V) $\neg p \equiv \mathrm{TF}(p)$.

Заметим, что ни одно из этих пяти условий не выполняется в логике истинности **T''** (соответственно и в логике ложности **FL4),** где в качестве оператора истинности берется эндоморфизм e_2 (см. выше раздел 5.4.4.2).

(По аналогии с тем, как Лукаоевич ввел парные возможности, логику фон Вригта **T''** можно также рассмотреть с парными операторами истинности T_1 и T_2 вместо эндоморфизмов e_1 и e_2. Тогда:

(I') $\mathrm{T}_1(\sim p) \equiv \sim\mathrm{T}_2(p)$,

(II') $\mathrm{T}_1(p) \vee \mathrm{T}_2(\sim p)$,

(IV') $\mathrm{T}_1\mathrm{F}_2(p) \equiv \mathrm{F}_2\mathrm{T}_1(p)$.

Однако, хотя здесь операторы T_1 и F_2 коммутируют, но $\mathrm{T}_1\mathrm{F}_2(p) \equiv \mathrm{F}_2\mathrm{T}_1(p) \not\equiv \sim p$.)

Однако эти вопросы решаются, если в качестве оператора истинности T возьмем эндоморфизм *g*. Тогда условия (I), (II), (ГУ) и (V) выполняются. Оператором ложности здесь является отрицание Де Моргана ~.

Остается вопрос об аксиоматизации логики **Tr** и о верификации конвенции Тарского $\mathrm{T}(p) \equiv p$.

5.4.6.1.1. Аксиоматизация логики Tr

Обратим внимание на работу *[Ермолаева и Мучник* 1976], где развита теория *Bg*-алгебр, т.е. для булевых алгебр, снабженных оператором gv Здесь доказана теорема представления для подобных структур получен целый ряд других важных результатов.

(Заметим, что уже в *[Ермолаева и Мучник* 1974] вводится понятие МБ-алгебр и дается их аксиоматизация - это расширение алгебры Де Моргана операцией $\neg$. Доказывается теорема представления для МВ-алгебр. Интересно, что в *[Рупко* 1999] вводится аналогичная алгебраическая структура под названием Де *Моргановская булева алгебра* в сигнатуре $<\vee, \wedge, \sim, \neg, 1, 0>$, где $<\vee, \wedge, \sim>$-редукт есть решетка Де Моргана, а $<\vee, \wedge, \neg, 1, 0>$-редукт есть булева алгебра. Соответствующая четырехзначная логика в виде секвенциального исчисления обозначается посредством **DMB4**.)

Поскольку частным случаем применения этой теории является логика **Tr**, то отсюда можно извлечь изящную аксиоматизацию логики **Tr** в языке $\supset, \neg$ и T, где $A \equiv B$ есть сокращение для $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$, а $A \wedge B$ определяется обычным образом посредством $\supset$ и $\neg$. Тогда:

A0. Классическая логика (см. выше раздел 1.5).

A1. $\mathrm{T}(A \supset B) \equiv (\mathrm{T}A \supset \mathrm{T}B)$

A2. $\neg\mathrm{T}A \equiv \mathrm{T}\neg A.$

A3. $\mathrm{TT}A \equiv A.$

Правила вывода: МР.

(Интересно, что в *[Хавьер Санчес* 1978] дана аксиоматизация (без доказательства) логики, которая есть расширение $\mathbf{C}_2$ посредством добавления отрицания де Моргана ~. Предложена семантика в терминах описания состояний в духе Карнапа.

Поскольку $\neg$ и $\sim$ коммутируют, т.е. $g(p) = \neg(\sim p) = \sim(\neg p)$, то эта логика есть не что иное, как **Tr**. См. также *[Bochman* 1998].)

Сделаем предположение:

Логика **Tr (V2)** *является ЕДИНСТВЕННЫМ нормальным расширением модальной логики* **S5** *(кроме самой* **S5, C**$_2$ *и противоречивой логики), которая обладает интерполяционным свойством Крейга.* (Об этом свойстве см. в разделе 8.5.2).

Эту логику и можно было бы считать искомой пропозициональной «логикой истинности», В связи с этим сделаем следующее замечание.

5.4.6.2. Логика Tr и аксиоматические теории истины

Никакого отношения к аксиоматическим теориям истины все это не имеет и поэтому неудивительно, что работы фон Вригта о логиках истинности не вызвали какого-либо интереса. Аксиоматизация теории истины Тарского происходит на совершенно другом уровне (см. *[Halbach* 2007]) с привлечением, как минимум, аппарата первопорядковой арифметики.

Добавим также, что применение многозначных логик в исследовании свойств предиката истины использует не только расширенное пространство истинностных значений, но и свойства структур, которые это пространство образует. Пионерской работой здесь является статья С. Крипке *[Kripke* 1975] и независимо от него работа Р. Мартина и П. Вудруфа *[Martin and Woodruff* 1975]. В этих работах введен подход, основанный на "неподвижных точках", позволяющий предложению, которое ссылается само на себя, не принимать никакого классического истинностного значения или принимать "неопределенное" истинностное значение. Подходящим инструментом здесь оказалась трехзначная логика Клини $\mathbf{K}_3$ и в особенности тот факт, что её связки монотонны (регулярны). Поэтому трехзначная логика Лукасевича Ł_3 здесь никак не применима. Подход Крипке получил большую известность и даже стал *альтернативным* по отношению к теории истины Тарского (см. книгу *[Soames* 1998]). Теория истины Крипке была расширена на четырехзначный случай в работах *[Visser* 1984] и *[Woodruff* 1984], где теперь предложение может принимать одновременно оба классических истинностных значения. Существенно то, что четырехзначный подход позволяет работать с полными *решетками,* а не с полными *полурешетками,* что намного упрощает технический аппарат. Но что более важно, четырехзначный подход имеет естественное обобщение до семейства сплетенных бирешеток (см. выше), обогащенных операцией конфляции *g(x).* Введение кванторов предполагает четырехзначное пространство (см. *[Fitting* 1989]).

Другое дело, что логика **Tr** может служить *пропозициональным базисом для новой аксиоматической теории истины,* но не более того.

5.4.6.3. Конвенция Тарского и логический фатализм

Классическая операция эквиваленции $\equiv$ такова, что формула $T(p) \equiv p$ в логике **Tr** не имеет места.

Поэтому введем новую операцию эквиваленции $\equiv_1$. Определим импликацию $\rightarrow_1$ следующим образом:

I $p \rightarrow_1 q =: \neg(\Box p) \vee q,$

где, напомним, $\Box p =: p \wedge \mathrm{T}(p).$

Приведем табличное определение $p \rightarrow_1 q$:

$\rightarrow_1$	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	1	1	1	1
n	1	1	1	1
0	1	1	1	1

Для этой импликации имеет место стандартная форма теоремы индукции.

Искомая операция эквиваленции $\equiv_1$ определяется так:

$$p \equiv_1 q = (p \rightarrow_1 q) \wedge (q \rightarrow_1 p).$$

В этом случае конвенция Тарского $\mathrm{T}p \equiv_1 p$ имеет место.

Как следствие определения импликации $p \rightarrow_1 q$ получаем, что аристотелевский *принцип необходимости* $\mathrm{T}p \rightarrow_1 \Box p$ здесь также верифицируем.

Отсюда верификация конвенции Тарского в виде пропозициональной формулы $\mathrm{T}p \equiv_1 p$ непосредственно ведет к тому, что фаталистический аргумент Аристотеля сохраняет свою силу, несмотря на введение в логику дополнительных истинностных значений. А это означает, что отбрасывание принципа бивалентности в общем случае не ведет к опровержению аристотелевского фаталистического аргумента (см. раздел 2.4). Таким образом, весьма распространенное мнение, что многозначная логика может быть использована против логического фатализма, несостоятельно.

Интересен также вопрос об аксиоматизации логики **Tr** с дополнительной связкой $\equiv_1$. Предполагаемый вариант: замена в аксиоматизации **Tr** связки $\equiv$ на $\equiv_1$ (с предварительным её аксиоматическим заданием). Тогда аксиома (A3) редуцируется в аксиому

(A3'): $\mathrm{T}p \equiv_1 p.$

6. Аксиоматизация конечнозначных логик

6.1. Предыстория

Появление и развитие матричных *n*-значных логик Лукасевича и Поста поставили вопрос об их аксиоматизации, а затем возникла проблема аксиоматизации произвольной конечнозначной логики. По крайней мере, тривиальной аксиоматизацией является весь класс общезначимых формул данной матричной логики. Тогда возникает следующая проблема: можно ли для этого бесконечного класса формул найти конечный базис? Таким образом, по аналогии с классической логикой встал вопрос о доказательстве теоремы адекватности. Мы уже приводили отдельные примеры аксиоматизации конечнозначных логик. Теперь подойдем к этому вопросу систематически.

Первые работы в этой области дают примеры гильбертовских исчислений тех или иных многозначных логик. Как уже говорилось, трехзначная логика Лукасевича Ł_3 была аксиоматизирована Вайсбергом *[Wajsberg* 1931] (см. выше раздел 3.1). Однако совсем не ясно, как этот способ аксиоматизации распространить на произвольное конечное число *n.* Правда, ему же принадлежит аксиоматизация произвольной Ł_n для случая, когда *n*-1 есть простое число. Как отмечается в *Lukasiewicz and Tarski* 1930, расширение этого результата на произвольное конечное *n* принадлежит А. Линденбауму. Позже М.Вайсбергом *[Wajsberg* 1935] был предложен общий метод аксиоматизации широкого класса конечнозначных логик, куда входят также все *n*-значные логики Лукасевича. Однако согласно этому методу должно выполняться следующее ограничение: каждая конечная нормальная матрица (напомним, матрица является нормальной, если она верифицирует правило MP) может быть аксиоматизирована, если в ней общезначимы следующие формулы:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)),$$

$$(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)),$$

$$(q \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p),$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p),$$

$$\neg q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg p).$$

Метод, предложенный Вайсбергом, является весьма громоздким и практически мало пригоден. Еще одно ограничение состоит в том, что предлагаются методы аксиоматизации *только* функционально полных многозначных логик (см. *[Sobocinski* 1936] и *[Sfypecki* 1939]).

Другой метод гильбертовской аксиоматизации был разработан Дж. Россером и А. Тюркеттом *[Rosser and Turqiiette* 1952] и включает в себя в качестве исходного условия общезначимость следующих импликативных формул:

$$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)),$$
$$(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r)),$$
$$p \to (\neg p \to q).$$

Кроме этого, здесь впервые было указано на обязательное наличие в аксиоматизируемой логике J_I-операторов:

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x = i \\ 0, \text{если } x \neq i. \end{cases}$$

Все эти условия выполняют, например, конечнозначные логики Лукасевича. Этот метод имеет место также для произвольного числа выделенных значений и распространяется на предикатные многозначные логики. Подробно данный метод аксиоматизации на пропозициональном и предикатном уровнях рассмотрен в *[Gottwald 2001*].

Главным недостатком этого метода является то, что он содержит существенные ограничения на класс аксиоматизируемых *n*-значных логик.

6.2. Другие методы аксиоматизации

Статья К. Шрётера *[Schroter* 1955] является первой работой, в которой предлагается метод аксиоматизации произвольных конечнозначных логик без ограничений Россера-Тюркетта. Этот метод является распространением генценовских секвенциальных исчислений на системы конечнозначных логик. С различными модификациями секвенциальные построения были осуществлены в *[Rousseau* 1967] и *[Baaz, Fermi'tller, Salzer and Zach* 1998]. См. также *[Takaha-shi* 1967; 1968] и *[Baaz, Fermilller and Zach* 1994].

(Здесь следует также упомянуть простой метод аксиоматизации для пропозициональных логик, предложенный В.М. Поповым *[Попов* 1979]. При этом необходимым условием является наличие одноместных функций $I_k(x)$, определяемых на множестве $\{1, \dots, n\}$ $(n \geq 2)$, с единственным выделенным значением *j:*

$$I_k(x) = \begin{cases} j, \text{ если } x = k \\ x, \text{ если } x \neq k \end{cases} \quad (1 \leq k \leq n).$$
)

В обзоре *[Avron* 2003] рассмотрены классические генценовские методы для пропозициональных многозначных логик (трехзначные логики, четырехзначные логики, *n*-значная логика Гёделя $\mathbf{G}_n$, некоторые бесконечнозначные логики). В этих системах используются двусторонние секвенции, они допускают устранимость сечения и обладают свойством подформульности.

Большое развитие получили логические системы в виде *гиперсеквенуий.* Подобные системы являются обобщением генценовских секвенциальных систем и оказались подходящими для многих неклассических логик.

Гиперсеквенции являются мультимножествами секвенций (сами секвенции называются "компонентами")

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \mid \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \mid \dots \mid \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n,$$

где оператор | есть дизъюнкция на метауровне. Гиперсеквенция истинна в некоторой интерпретации, если, по крайней мере, одна из компонент истинна в этой интерпретации. Это обобщение позволяет таким системам использовать одно правило вместо многократного использования правил.

Впервые для конечнозначных логик гиперсеквенции были использованы А. Авроном *[Avron,* 1991]. См. также *[Avron* 1999]. Особенно они оказались удобными для аксиоматизации бесконечнозначных логик (см. окончание гл. 9).

После книги Р. Смульяна *[Smullyan* 1968] представление исчислений в виде аналитических таблиц стало особенно популярным и в скором времени было применено к многозначным логикам. По-видимому, первой работой здесь является статья С. Сурмы *[Surma 1974],* Значительное упрощение и усиление результатов С. Сурмы см. в *[Carnielli* 1987; 1991]. См. также книгу *[Hahnle* 1993].

Применение метода секвенциальных исчислений и аналитических таблиц к аксиоматизации многозначных логик рассмотрено также в *[Gottwald* 2000]. В *[Hahnle andEscalada-Imaz* 1997] содержится обзор различных теоретико-доказательных методов, в том числе и для бесконечнозначных логик. Продолжением является работа *[Baaz, Fermilller and Salzer* 2001], на которую следут обратить особое. внимание. Кроме всего прочего, здесь предлагается классификация различных видов систем дедукции, дается характеризация кнечнозначных логик средствами классической логики предикатов, отдельно рассматривается класс конечно-значных предикатных логик.

В *[Комендантский* 2003] исследуется теория вывода, основанная на теореме представления для алгебр истинностных значений многозначных логик, а также построено исчисление резолюций для всего класса конечнозначных логик поста $\mathbf{P}_n$.

6.3. Метод Аншакова-Рычкова

В заключение мы обсудим один метод аксиоматизации конечнозначных логик. В целом ряде работ О.М. Аншаков и С.В. Рыгчков *[Аншаков и Рынков* 1982; 1984] предложили простой алгоритм аксиоматизации конечнозначных логик, в том числе и *произвольных.* В основе лежит идея В.К. Финна, использованная им при аксиоматизации трехзначной логики Бочвара $\mathbf{B}_3$ *[Финн* 1974] и обобщенная на *n*-значный случай $\mathbf{B}_n$ в *[Григолгш* и *Финн* 1979], которая заключается в том, что при аксиоматизации применяются два вида переменных: "внутренние" и "внешние". При этом внешние переменные оцениваются *классическим* множеством истинностных значений {1, 0}. Тогда главной особенностью метода Аншакова-Рычкова является то, что предложенная гильбертовская аксиоматизация конечнозначных логик представляет собой расширение аксиом классической (первопорядковой) логики.

6.3.1. Предварительные замечания

Рассмотрим класс *n*-значных логик $\mathbf{L}_n$. сигнатуры

$$\sigma = <\{J^*_\alpha \mid \alpha \in V_n\}, \neg^*, \vee^*, \wedge^*, \supset^* >,$$

где $V_n = \{0, {}^1/_{n-1}, {}^2/_{n-1}, \dots, {}^{n-2}/_{n-1}, 1\}$ — множество истинностных значений.

Эти логики задаются операциями на множестве истинностных значений V_n, причем выполняются следующие условия:

(1) Алгебра $< V_n; \vee^*, \wedge^* >$ является квазирешеткой (см. 4.4),

(2) Наличие всех J^*_α-операторов (см, выше),

(3) Ограничения операций $\neg^*, \vee^*, \wedge^*, \supset^*$ на подмножество {0, 1} множества V_n суть обычные классические операции отрицания, дизъюнкции, конъюнкции и импликации соответственно.

Отметим, что наличие в сигнатуре всех *J*-операторов J^*_α, $\alpha \in V_n$ интуитивно означает возможность для любого $\alpha \in V_n$ на языке логики $\mathbf{L}_n$ говорить о том, что некоторое предложение *A* этой логики принимает данное истинностное значение α. Отсутствие какоголибо из *J*-операторов J^*_β, $\beta \in V_n$, соответственно, означало бы невозможность делать на языке данной логики утверждения типа: «предложение *A* принимает истинностное значение β». Например, если мы имеем трехзначную логику с истинностными значениями «истина» (1), «ложь» (0) и «бессмыслица» (1/2), и $J_{1/2}$-оператор был бы невыразим в нашей логике, то мы не смогли бы на языке этой логики высказать утверждение о «бессмысленности» какого-либо предложения.

Отметим, что все результаты будут иметь место для значительно более широкого класса логик, а именно для таких логик, в которых функционально выразима сигнатура

$$\sigma = <\{J^*_\alpha \mid \alpha \in V_n\}, \neg^*, \vee^*, \wedge^*, \supset >,$$

удовлетворяющая указанным выше условиям (1), (2), (3).

Логики, в которых выразимы все J_α-операторы, называются *истинностно-полными логиками.* А истинностно-полные логики, в которых выразимы операции $\neg^*, \vee^*, \wedge^*, \supset^*$, ограничения которых на подмножество {0, 1} совпадает с классическими логическими связками, называются *истинностно-полными **C**-расширяющими логиками:,* потому что, говоря неформально, они содержат на множестве {0, 1} классическую логику $\mathbf{C}_2$, т.е. $\mathbf{L}_n$ совпадает с $\boldsymbol{C}_2$ на множестве {0, 1}. В этом смысле так определенный класс конечнозначных логик «похож» на классическую логику. Отметим, что в класс истинностно-полных **C**-расширяющих логик, удовлетворяющих условию квазирешеточности, попадают все конечнозначные логики Лукасевича, логики, соответствующие алгебрам Лукасевича-Мойсила, трехзначная логика Бочвара и ее обобщения, класс трехзначных логик значения из работы *[Финн, Аншаков, Григолия и Забежайло* 1980], *n*-значные логики Поста, логика истинности фон Вригта **T**", максимльно предполные логики $\mathbf{T}_n$ (см. раздел 7.3.3.2.1) и многие другие конечнозначные логики.

Условие квазирешеточности возникает здесь не случайно и связано со свойством логики быть *хорошо кванторизуемой.* Кванторы всеобщности и существования здесь определяются как обобщенные конъюнкция и дизъюнкция соответственно. Для этого необходимо и достаточно, чтобы конъюнкция и дизъюнкция зависели только от множества значений своих компонент и, следовательно, не зависели бы ни от расстановки скобок, ни от порядка членов, ни от количества одинаковых компонент. Таким образом, как для конъюнкции, так и для дизъюнкции должны иметь место законы ассоциативности, коммутативности и идемпотентности, т.е. множество истинностных значений относительно этих операций образует квазирешетку. Выполнение этого условия и делает логику *хорошо кванторизуемой.* Заметим, что понятие многозначного квантора введено в *[Rosser and Turquette* 1952], хотя уже неявно появилось в *[Mostowski* 1948].

6.3.2. Аксиоматизация

Рассмотрим гильбертовское исчисление предикатов для конечно-значных логик из работы *[Апшаков и Рынков* 1982].

6.3.2.1. Синтаксис

Алфавит:

1) Предметные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

2) Функциональные буквы $f_1^{(0)}, \ldots, f_n^{(k_n)}, \ldots$.

3) Предикатные буквы $p_1^{(n_1)}, \ldots, p_n^{(r_n)}, \ldots$.

4) Связки $\neg, \wedge, \vee, \supset, J_\alpha \ (\alpha \in V)$.

5) Кванторы $\forall, \exists$.

5) Скобки $), ($.

Определение 1.

а) Каждая константа (функциональный символ вида $f_i^{(0)}$) и каждая предметная переменная есть терм.

б) Если $t_1, \ldots, t_n$ термы, а $f_i^{(n)}$ *n*-арная функциональная буква, то $f_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$— тоже терм.

Определение 2.

а) Если $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $p_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$- атомарная формула.

б) Если *A* и *B* — формулы, а *x* — предметная переменная, то формулами будут и выражения $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$, $(\exists xB)$, $(\forall xA)$, $(J_\alpha A)$.

Свободные и связанные вхождения переменных определяются обычным образом. Используются также обычные соглашения об опускании скобок. Кроме того, J_α по силе связывания приравнивается к отрицанию $\neg$.

Определение 3.

а) Если *A* - формула, то $J_\alpha A$ - внешняя формула.

б) Если *X* и *Y* — внешние формулы, то внешними формулами будут и выражения $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \supset Y)$, $(\neg X)$, $(\exists xX)$, $(\forall xX)$.

В дальнейшем будем использовать буквы *A, B, C,* ... как мета-переменные для формул, а буквы *X, Y, Z,* ... - как метапеременные для внешних формул.

Система аксиом:

I. Пропозициональные аксиомы связи (P) (см. 1.4)

P1. $X \supset (Y \supset X)$,

P2. $(X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$ >,

P3. $X \supset (Y \supset X \wedge Y)$,

P4. $X \wedge Y \supset X$,

P5. $X \wedge Y \supset Y$,

P6. $(X \supset Z) \supset ((Y \supset Z) \supset (X \vee Y \supset Z))$,

P7. $X \supset X \vee Y$,

P8. $Y \supset X \vee Y$,

P9. $(X \supset Y) \supset ((X \supset \neg Y) \supset \neg X)$,

P10. $\neg\neg X \supset X$.

Определение 4.

Будем говорить, что терм *t* допустим для подстановки в формулу *A* вместо переменной *x,* если ни одно свободное вхождение переменной *x* не находится в области действия кванторов по переменным, входящим в *t*. Запись $A(t/x)$ означает формулу, полученную из *A* в результате подстановки *t* вместо *x* во всех свободных вхождениях, причем при этом подразумевается, что *t* допустим для подстановки в *A* вместо *x*.

II. Кванторные аксиомы (Q)

Q1. $\forall xX \supset X(t/x)$,

Q2. $X(t/x) \supset \exists xX$,

где *t* — произвольный терм, допустимый для подстановки в *X* вместо *x*

Определение 5.

$A \equiv B =: (A \supset B) \wedge (B \supset A)$.

Аксиомы связи (A).

Будем использовать малые греческие буквы как переменные для элементов множества истинностных значений V_n.

A1. $J_1 X \equiv X$,

A2. $J_\alpha J_\beta A \supset X \wedge \neg X \; (0<\alpha<1)$,

A3. $J_0 J_\alpha A \equiv \neg J_\alpha A$,

A4. $J_\alpha A \bigwedge\limits_{\beta \neq \alpha} \neg J_\beta A$,

A5. $J_\alpha (A \wedge B) \equiv \bigvee\limits_{\beta \wedge^* \gamma = \alpha} (J_\beta A \wedge J_\gamma B)$,

A6. $J_\alpha (A \vee B) \equiv \bigvee\limits_{\beta \vee^* \gamma = \alpha} (J_\beta A \wedge J_\gamma B)$,

A7. $J_\alpha (A \supset B) \equiv \bigvee\limits_{\beta \supset^* \gamma = \alpha} (J_\beta A \wedge J_\gamma B)$,

A8. $J_\alpha \neg A \equiv \bigvee\limits_{\neg^* \beta = \alpha} J_\beta A$.

Примечание 1.

Сокращающие символы $\bigwedge\limits_{l \in I} A_l$, $\bigvee\limits_{l \in I} A_l$ понимаются как .$A_1 \wedge (A_2 \wedge \ldots (A_{k-1} \wedge A_k) \ldots)$ и $A_1 \vee (A_2 \vee \ldots (A_{k-1} \vee A_k) \ldots)$ соответственно при условии, что $I = \{1, \ldots, k\}$.Если же $I \neq \varnothing$, то через $\bigwedge\limits_{l \in I} A_l$ обозначается Формула $X \vee \neg X$, а через $\bigvee\limits_{l \in I} A_l$ обозначается формула $X \wedge \neg X$, где X — произвольно выбранная внешняя формула. Что касается бинарных операций $\wedge^*$ и $\vee^*$,то в силу коммутативности, ассоциативности и идемпотентности запись $\bigwedge\limits_{\beta \in I} {}^* \beta$, $\bigvee\limits_{\beta \in I} {}^* \beta$ имеет смысл, причем $\bigwedge\limits_{\beta \in I} {}^* \beta = 1$ и $\bigvee\limits_{\beta \in I} {}^* \beta = 0$ при $I = \varnothing$.

Определение 6.

Через *Con* α обозначим множество $\{C \subseteq V_n \mid \bigwedge\limits_{\beta \in C} {}^* \beta = \alpha\}$.

Через *Dis α* обозначим множество $\{D \subseteq V_n \mid \bigvee\limits_{\beta \in D} {}^* \beta = \alpha\}$.

Кванторные аксиомы связи (QA)

QA1. $J_\alpha \forall x A \equiv \bigvee\limits_{C \in Con\, \alpha} ((\forall x \bigvee\limits_{\beta \in C} J_\beta A) \wedge (\bigwedge\limits_{\beta \in C} \exists x J_\beta A))$,

2. $J_\alpha \exists x A \equiv \bigvee\limits_{D \in Dis\, \alpha} ((\forall x \bigvee\limits_{\beta \in D} J_\beta A) \wedge (\bigwedge\limits_{\beta \in D} \exists x J_\beta A))$.

Правила вывода:

1. Modus ponens: $\dfrac{Y, Y \supset X}{X}$,

где здесь и далее X и Y— внешние формулы.

2. J_1-введение: $\dfrac{A}{J_1 A}$.

3. J_1-удаление: $\dfrac{J_1 A}{A}$.

4. $\exists$ -введение: $\dfrac{X \supset Y}{\exists x X \supset Y}$, где x не входит свободно в Y.

5. $\forall$ -введение: $\dfrac{X \supset Y}{X \supset \forall x Y}$,где x не входит свободно в X.

Определение доказательства стандартное. Теорема дедукции.
Пусть Г — совокупность формул, а X — внешняя замкнутая формула. Тогда $\Gamma, X \vdash A$ *влечет* $\Gamma \vdash X \supset J_1 A$.

6.3.2.2. Семантика

1.0. *Определение* L_{n+1}-структурой, связанной с языком L_{n+1},назовем тройку $\boldsymbol{L} = <D, \{F_i^k\}_{k \in N, i \in J}; \{P_j^m\}_{m \in N, j \in K}>$, где $D \neq \varnothing$, F_i^k—отображение D^k в D, P_j^m — отображение D^m в V, и тип L_{n+1}-структуры $<\tau_1, \tau_2>$ (где $\tau_1: J \to \mathbf{N}$ и $\tau_2: K \to \mathbf{N}$, и $\tau_1(i)$— арность операции F_1, $\tau_2(j)$— арность (n+1)-значного предиката P_j) совпадает с типом языка L_{n+1}.

1.1. Пусть I- интерпретация языка L_{n+1} в L, т.е. I- функция, определенная на $\boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{P}$ (где $\boldsymbol{F}$ — множество пропозициональных букв и $\boldsymbol{P}$ - множество предикатных букв языка L_{n+1}),такая, что $If_i^{(k)} = F_i^k$ и $Ip_j^{(m)} = P_j^m$. Пусть также v^* - произвольное отображение из множества $\boldsymbol{X}$ всех предметных переменных языка L_{n+1} в множество D. Определим по индукции оценку v, заданную функцией $v^*: \boldsymbol{X} \to D$

1.2. $(a)\quad \nu f_i^{(0)} = If_i^{(0)} = F_i^{(0)},\ \nu x_i = \nu^* x_i,$

$(b)\quad \nu f_i^{(k)}(t_1, \ldots, t_k) = F_i^{(k)}(\nu t_1, \ldots, \nu t_k).$

1.3. $(a)\quad \nu p_i^{(k)}(t_1, \ldots, t_k) = P_i^k(\nu t_1, \ldots, \nu t_k),$

$(b)\quad \nu(A \wedge B) = \nu A \wedge_* \nu B,$

$\nu(A \vee B) = \nu A \vee_* \nu B,$

$\nu(A \supset B) = \nu A \supset_* \nu B$

$\nu(\neg A) = \neg_* \nu A$

$\nu(J_\alpha A) = J^*{}_\alpha \nu A\ (\alpha \in V)$

(c) пусть $\nu_{|x \to a|}$ — оценка, порожденная функцией $\nu^*{}_{|x \to a|}$, такой, что

$$\nu^*{}_{|x\to a|}\ y = \begin{cases} \nu^* y, \text{ если } x \neq y \\ a, \text{ если } x = y. \end{cases}$$

Положим

$$\nu\forall x A = \bigwedge\nolimits_{*\ \beta \in \{\beta \in V | (\exists a \in D)(\nu_{|x\to a|} A = \beta)\}} \beta$$

$$\nu\exists x A = \bigvee\nolimits_{*\ \beta \in \{\beta \in V | (\exists a \in D)(\nu_{|x\to a|} A = \beta)\}} \beta$$

1.4. *Определение.* Формулу *A* языка L_{n+1} назовем истинной довыполненной) на L_{n+1}-структуре ***L*** при оценке *v*, если $\nu A = 1 \in V.$

1.5. *Определение.* Формулу *A* языка L_{n+1} назовем истинной («выполненной») на L_{n+1}-структуре *L,* если $\nu A = 1$ для любой оценки *v* в этой структуре.

1.6. *Определение.* Формулу *A* языка L_{n+1} назовем L_{n+1}-выполнимой, если найдется L_{n+1}-структура ***L,*** такая, что *A* истинна

1.7. *Определение.* Формулу *A* языка L_{n+1} назовем L_{n+1}-общезначимой, если для любой L_{n+1}-структуры ***L*** формула *A* истинна на ***L*** .

1.8. *Теорема о корректности.* Все формулы, выводимые в L_{n+1}, Являются L_{n+1}-общезначимыми.

Доказательство. Достаточно проверить общезначимость аксиом

и то, что правила вывода сохраняют общезначимость.

Далее строится секвенциальное исчисление, эквивалентное тайному, и доказывается теорема о полноте.

6.3.3. Обобщение и другие вопросы

Изложенный здесь метод может быть применен для более широкого класса логик (см. *[Аншаков и Рычков* 1984]), а именно для логик с сигнатурой

$\delta_1 = < F_1, \ldots, F_k >,$

через которую выразима сигнатура

$\sigma = <\{J^*{}_\alpha | \alpha \in V_n\}, \neg^*, \vee^*, \wedge^*, \supset^* >,$

удовлетворяющая указанным выше условиям (1), (2), (3), и теперь для удобства рассматриваются логики сигнатуры $\delta_2 = \delta \cup \delta_1.$ Тогда операциям $F_1, \ \ldots, \ F_k$ поставим в соответствие логические связки $f_1, \ldots, f_k$ подходящей местности. При построении исчисления предикатов **L**$_n$ на базе конечнозначной логики, при определении формул и термов нужно добавить в индукционный шаг случаи, отвечающие связкам $f_1, \ldots, f_k.$ Также в определении оценки добавляются случаи:

$\nu f_j^r(A_1, \ldots, A_r) = F_j(\nu A_1, \ldots, \nu A_r)\ (j = 1, \ldots, k).$

Общезначимость определяется как и ранее.

Логику **L**$_n$ можно аксиоматизировать следующим образом: к группе аксиом связи (A) добавляются следующие схемы аксиом

$$J_\alpha f_i(A_1, \ldots, A_r) \equiv \bigvee_{F_j(\beta_1, \ldots, \beta_r) = \alpha} (J_{\beta_1} A_1, \ldots, j_{\beta_r} A_r)$$

$$(j = 1, \ldots, k, \alpha \in V).$$

Таким образом, имеется общий эффективный способ построения предикатных исчислений (гильбертовских, а также и секвенциальных), полных относительно **L**$_n$-общезначимости, на базе истинностно-полных **C**-расширяющих логик с условием квазирешеточности. Более того, с незначительными *изменениями эти* результаты имеют место относительно **L**$_n$-общезначимости с произвольным числом выделенных значений $D \subset V_n$ таким, что $0 \notin D$ и $1 \in D.$

В случае же произвольных конечнозначных логик их язык, т.е. сигнатура δ_2, расширяется конечным числом «метасимволов», т.е. вводятся добавочные «внешние» связки, которым соответствуют либо операции на множестве {0, 1}, либо J-операторы, вообще говоря, не выразимые через исходные логические операции. (Имеются также и внешние кванторы.) Полученные в результате применения данного способа исчисления с такой нестандартной семантикой называются исчислениями *квазигильбертовского типа* и *квазисеквенциальными исчислениями.* По своим дедуктивным свойствам они близки к обычным ичислениям гильбертовского типа и секвенциальным исчислениям. Это позволяет стандартным образом развивать для них теорию моделей и теорию доказательств.

Как отмечают авторы, возможность в общем виде развивать теорию моделей для произвольных конечнозначных логик обусловлена не только дедуктивными свойствами исчислений, но и в не меньшей степени введением в данной работе общего понятия ультрапроизведения L_n -структур. В указанной работе доказываются аналоги теоремы Лося об ультрапроизведениях и теоремы Мальцева о компактности.

В *[Anshakov and Rychkov* 1994] были рассмотрены алгебраические проблемы, связанные с истинностно-полными **C**-расширяющими логиками $\mathbf{L}_n$. Показано, что каждой такой логике соответствует некоторый класс алгебр, играющий для $\mathbf{L}_n$ ту же роль, что играет класс булевых алгебр для классической логики $\mathbf{C}_2$. Доказана теорема представления для L_n -алгебр и предложено новое доказательство полноты для пропозициональных истинностно-полных **C**-расширяющих логик. В *[Ambas* 2001] показано, что данные логики алгебраизуемы в смысле *[Blok and Pigozzi* 1989] и для них доказана строгая теорема полноты.

В *[Anshakov, Finn and Skvortsov* 1989] рассмотрено обобщение истинностно-полных **C**-расширяющих логик, названное авторами *J-определимыми J-компактными логиками,* которые могут и не быть конечнозначными. Именно бесконечнозначные *J* -определимые *J* -компактные логики используются для формализации правдоподобных рассуждений в ДСМ-методе автоматического порождения гипотез. В *[Атиаков* 1998] рассматривается алгебраическая проблематика, связанная с такими логиками. Автор переносит результаты из *[Anshakov and Rychkov* 1994] на класс подобных логик.

6.4. Некоторые размышления

В итоге мы имеем несколько необычный взгляд на суть *n*-значных логик: *каждая конечнозначная логика (предикатная) есть расширение классической логики.* Такую аксиоматизацию назовем **C**-аксиоматизацией. Последнее как раз и позволяет дать единый метод

(алгоритм) аксиоматизации конечнозначных логик и доказать целый ряд известных теоретико-модельных теорем, являющихся аналогами теорем для классической логики предикатов.

Конечно, такая, унификация *всего* класса конечнозначных логик имеет свои издержки и главная из них та, что скрываются весьма существенные отличительные черты каждой из них. Например, трехзначная логика Лукасевича $Ł_3$ (и соответственно все ее обобщения $Ł_n$) является к тому же исторически первой логикой без сокращения, т.е. добавление к $Ł_3$ формулы

$$(p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)$$

приводит к классической двузначной логике $\mathbf{C}_2$.

Характерен случай с паранепротиворечивыми логиками и их. трехзначными вариантами, которые заведомо строились с целью фальсифицировать формулы

$$p \to (\neg p \to q) \text{ или } (p \wedge \neg p) \to q.$$

Как мы видели, паранепротиворечивая логика $\mathbf{J}_3$ (см. 3.5.3) асиоматизирована как расширение $\mathbf{C}_2$. Поскольку в изложенном методе аксиоматизации каждая конечнозначная логика $\mathbf{L}_n$ есть расширение $\mathbf{C}_2$, то все эти формулы уже содержатся в исходных аксиомах (или выводимы из них). Более того, если $\mathbf{L}_n$ не является итинностно-полной **C**-расширяющей логикой, то это не значит, что она может быть аксиоматизируема *только* в виде квази-гильбертовского исчисления. Например, в логиках Гёделя $\mathbf{G}_n$ (см. 5.1.7) не выразимы J-операторы, т.е. эти логики не являются истинностно-полными. Тем не менее, как отмечалось, они имеют простую гильбертовскую аксиоматизацию.

Также обратим внимание на явную связь истинностно-полных логик с наличием в них нормального изоморфа $\mathbf{C}_2$ (см. 3.3.1.1). Это как раз и позволяет представить аксиоматизацию истинностно-полных **C**-расширяющих логик как расширение $\mathbf{C}_2$. Таким образом, наличие изоморфа является достаточным основанием для **C**-аксиоматизации широкого класса конечнозначных логик. При этом заметим, что при построении изоморфа нет необходимости использовать все J-операторы. Это наводит на мысль расширить метод Аншакова-Рычкова на те конечнозначные логики, в которых не выразимы все J-операторы, но наличие изоморфа гарантируется.

Итак, по заданной конечной матрице можно построить если не гильбертово, то квази-гильбертово исчисление. Возникает следующий естественный вопрос: можно ли по каждой конечной матрице построить конечную *гильбертову* аксиоматизацию? Ответ отрицателен. В качестве предположения это было высказано в *[Аншаков и Рынков* 1984]. В пользу такого ответа говорят следующие результаты.

В. Раутенберг *[Rautenberg* 1981] доказал, что *содержание* любой двузначной матрицы, т.е. $E(\mathfrak{M}_2)$, конечно аксиоматизируемо, и в связи с этим спрашивает, имеет ли это место для любой конечной матрицы.
П. Вуйтылак *[Wojtylak* 1984] опровергает возможность этого, сконструировав пятизначную матрицу с двумя выделенными значениями, которая не является конечно аксиоматизируемой. Затем В. Дзёбяк *[Dziobiak* 1991] находит четырехзначную матрицу с одним выделенным значением с тем же самым свойством и ставит вопрос о существовании подобной матрицы среди трехзначных.
Наконец, К. Палашиньська *[Patasinska* 1992; 1994], представила две 3-значные матрицы с одним выделенным значением, в которых операция присоединения следствий не является конечно-аксиоматизируемой. Одна из них имеет следующий вид:

$\mathfrak{M} = <\{0, 1, 2\}, \otimes, \{2\}>,$

где $x \otimes y$ принимает всюду значение 2, кроме случая $2 \otimes 0 = 1.$

7. Многозначная логика как функциональная система

В силу прикладного характера многозначной пропозициональной логики главным становится не изучение многозначной логики как логического исчисления (класса аксиоматизируемых тавтологий) и не изучение свойств алгебраических тождеств, что все вместе представляет сугубо теоретический интерес, а изучение функциональных свойств моделей логики высказываний.

7.1. Формульная модель *n*-значной логики

Модели многозначной логики строятся по аналогии с двузначной логикой, как это было видно на примере с *x*-значной логикой Лукасевича Ł_n.Так, индивидуальные высказывания логики, разбитые на классы, с одним и тем же значением истинности, приводят к понятию множества V_n — константы модели, которые заменяют индивидуальные высказывания их соответствующими значениями истинности; переменные высказывания приводят к переменным величинам x_1\, x_2, ..., которые в качестве значений принимают элементы из множества V_n; логические связки приводят к множеству $f_1, \ldots, f_k$ элементарных функций (операций). Напомним, что в *n*-значной логике Лукасевича Ł_n этими функциями являются отрицание ~ и импликация $\to$.

7.1.1. Понятие функции *n*-значной логики. Элементарные функции

В моделях многозначной логики понятие функции является основным и наряду с булевыми функциями (функциями двузначной логики) используется для описания дискретных устройств, компоненты которых могут находиться в некотором числе различных состояний.
Произвольная функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ от любого конечного числа переменных, областью определения которых и областью значения самой функции является множество V_n (без ограничения общности можно считать, что его элементами являются 0, 1, 2, ..., *n-1*), называется *n*-значной функцией или *функцией n-значной логики.* Таким образом, если $f(x_1, \ldots, x_m)$ - функция от *m* переменных, то *f* отображает множество V_n^m во множество V_n, где *m* обозначает *m*-ную декартову степень множества V_n, $m \geq 1$. В случае $V_n = \{0, 1\}$ имеем дело с *булевыми функциями.* Имеются различные способы задания функций. Например, функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ может быть задана таблицей, где в некотором порядке перечислены все *n*-ичные наборы длины *m* (из элементов 0, 1, 2, ..., *n-1)* и на каждом из них указано значение функции, как это делалось в двузначной логике.
Число *n*-ичных наборов длины *m* равно n^m и на каждом из них значение функции можно задать *n* способами. Поэтому число функций *n*-значной логики, зависящих от аргументов $x_1, \ldots, x_m$, составляет n^{n^m}. Множество всех функций *n*-значной логики обозначим посредством P_n.[1] Случай $n > 2$ оказывается существенно более сложным, чем классический случай P_2. Уже в P_3 число функций от двух переменных равно 19 683, в то время как в P_2 таких функций всего 16, Естетвенно в P_n возникают трудности как в возможности эффективного использования табличного задания функций, так и в возможности просмотра всех функций от *m* переменных. Поэтому вместо табличного задания функций часто употребляется задание при помощи алгоритма вычислимости функций. Например, $max(x_1, -\ldots, x_m)$ можно рассматривать как алгоритм, который для любого набора значений переменных выдает их *максимум.*
Как и в двузначном случае, в P_n выделяются функции, которые наиболее часто употребляются в логике и в вычислительных уст-

ройствах и играют там важную роль. Такие функции называются *элементарными.* Приведем некоторые из них.

1. *Константы* $0, 1, 2, ..., n–1.$

2. *Отрицание Лукасевича:* $\sim x = n\text{-}1\text{-}x$- обобщение отрицания в смысле «зеркального отрицания».

3. *Отрицание Поста:* $\neg x = x{+}1(mod\ n)$- обобщение отришания в смысле «циклического сдвига значений».

$$J_i(x) = \begin{cases} n-1, \text{ если } x = i \\ 0, \text{ если } x \neq i. \end{cases} \text{ – обобщение некоторых свойств}$$

отрицания,$i = 0, 1, 2, ..., n\text{-}1.$

5. Функция *min(x,y)* - обобщение конъюнкции. Функция *min* (x, *y)* обозначается также $x \wedge y$, или .$x \,\&\, y$.

6. Функция *xy (mod n)* - второе обобщение конъюнкции.

7. Функция *max(x,y)* - обобщение дизъюнкции. Функция *max(x, y)* обозначается также .$x \vee y$.

8. Функция $x + y\ (mod\ n)$- обобщение суммы по *mod 2.*

9. Импликация Лукасевича:

$$x \to y = \begin{cases} n-1, \text{ если } x \leq y, \\ (n-1) - x + y, \text{ если } x > y \end{cases}$$ - обобщение

одного из свойств классической импликации.

10. Функция *Вебба:*$W_n(x, y) = max(x, y){+}1(mod\ n)$—обобщение стрелки Пирса *[Webb* 1935; 1936].

Из этого списка элементарных функций видно, что функции двузначной логики имеют в *n*-значной логике $(n \geq 3)$ по несколько аналогов, каждый из которых обобщает соответствующее свойство данной булевой функции.

Заметим, что не для всех обобщений булевых функций сохраняются соответствующие классические свойства. Например,$\sim(\sim x) = x$, но $\neg(\neg x) \neq x$ (при $n \geq 3$).

7.1.2. Формулы как суперпозиция элементарных функций

Кроме двух рассмотренных способов задания функций не менее известным способом является формула, которая строится из элементарных функций. Пусть *F* — некоторое непустое множество *n*-значных функций. По индукции определим понятие формулы над *F.*

a) Базис индукции. Каждая функция $f(x_1, ..., x_m)$ из *F*называется *формулой над F.*

b) Индуктивный переход. Пусть$f_i(x_1, ..., x_m)$ — функция из *F* и $A_1, \ldots, A_m$- выражения, являющиеся либо формулами над *F,* либо символами переменных (аргументов). Тогда выражение $f_i(A_1, \ldots, A_m)$ называется формулой над *F.*

Заметим, что при образовании новых формул вместо переменных исходных функций можно подставлять как формулы, так и переменные.

Так как мы можем определить значение формулы *A* (опираясь на индуктивное определение формул) на любом наборе переменных, то тем самым мы сопоставим этой формуле некоторую функцию $f(x_1, ..., x_m)$,т.е. по формуле, вычисляя ее на всех n^m наборах, можно восстановить таблицу функции. Про функцию, сопоставленную формуле, говорят, что она *реализуется* этой формулой.

В отличие от табличного задания, реализация (представление) данной функции формулой не единственно. Например, в двузначной логике штрих Шеффера $x|y$ можно представить формулами $\neg x \vee \neg y$ и $\neg(x \wedge y)$.

Формулы, представляющие одну и ту же функцию, называются *эквивалентными* или *равносильными.* Эквивалентность формул обозначается знаком равенства, поэтому можно записать $x|y = \neg x \vee \neg y = \neg(x \wedge y)$.

Опираясь на понятие эквивалентности, можно описать основные свойства элементарных функций. Как и в классической логике, функции $x \wedge y$ и $x \vee y$ обладают свойствами ассоциативности, коммутативности, идемпотентности и дистрибутивны относительно друг друга. Ниже мы покажем, что посредством функций $x \vee y$, $x \wedge y$, $J_i(x)$ и констант любую функцию$f(x_1, ..., x_m)$из P_n можно представить в так называемой *первой форме,* являющейся аналогом совершенной д.н.ф. для функций алгебры логики (см. 1.3).

Если функция *f* реализуется формулой, которая составлена только из символов функций $f_1, \ldots, f_k$ (а также символов переменных), то говорят, что функция *f* является *суперпозицией* функций $f_1, \ldots, f_k$, а процесс получения функции *f* из$f_1, \ldots, f_k$ называют *операцией суперпозиции [Яблонский* 1958].

Например, из элементарных функций $\sim x$ и $x \vee y$ посредством их суперпозиции можно получить формулы $\sim x \vee y$, $x \vee x$, $x \vee (x \vee \sim y)$, и т. д. Таким образом, формулой является выражение, описывающее суперпозицию элементарных функций.

В итоге задание конкретной модели многозначной логики состоит в указании множества истинностных значений V_n, множества элементарных функций *F* и множества функций, полученных посредством суперпозиции над F и реализуемых формулами. Эта модель называется *формульной моделью,* а также *n-значной логикой* (см. *[Кудрявцев* 1982]). В кибернетике такие модели рассматриваются как управляющие системы. Элементарные функции при этом являются элементами, производящими определенные операции, а формулы интерпретируются как схемы, построенные из элементов и осуществляющие переработку входной информации в выходную. Характерными задачами для формульной модели являются: задача об указании всех формул, реализующих заданную константу; задача об эквивалентных преобразованиях; задача о сложности реализации; задача о минимизации и т.д.

7.2. Алгебра функций

Однако в зависимости от того, какие цели преследуются при изучении многозначной логики, по-разиому понимается, что собой представляет ее модель. Для многих специалистов, связанных с вычислительной техникой, инженеров, прикладных математиков и физиков гораздо большее значение имеет представление модели многозначной логики в виде *функциональной системы.* В отличие от универсальной алгебры, где носителем может служить множество произвольной природы, в теории функциональных систем носитель должен быть множеством функций, в то время как операции над этими функциями могут быть неалгебраического характера. Основные проблемы, стоящие перед теорией функциональных систем были сформулированы в докладе СВ. Яблонского *[Яблонский* 1978]. Некоторые итоги подведены в работе В.Б. Кудрявцева *[Кудрявцев* 1981], а также в *[Марченков* 2004].
Нас будут интересовать те функциональные системы, которые базируются на функциях многозначной логики с операцией суперпозиции, т.е. под функциональной системой мы будем понимать пару (P_n , C), где P_n есть множество всех функций n-значной логики с заданной на нем операцией суперпозиции C. Наиболее яркие достижения в этой области относятся к двум взаимосвязанным темам: построение и анализ порождающих множеств и проблема полноты. Классические работы здесь принадлежат Э. Посту, А.В. Кузнецову, СВ. Яблонскому, В.К. Финну, И. Розенбергу. Тщательное изложение всех основных результатов, начиная со статьи Э. Поста *[Post* 1920], содержится в фундаментальной монографии *[Lau* 2006], которая значится как базовый курс по конечнозначной логике.

7.2.1. Оператор замыкания, замкнутые классы и базисы

Операция суперпозиции порождает на P_n оператор замыкания. Пусть $F \subseteq P_n$.Тогда, следуя А.В. Кузнецову (см. *[Кузнецов* 1959)], множество всех функций, которые можно получить с помощью операции суперпозиции из F, называется *замыканием* F и обозначается посредством $[F]$. Таким образом, оператор замыкания определяется на множестве всех подмножеств n-значных функций и ставит в соответствие каждому множеству F замыкание множества F, состоящее из всех функций, которые выразимы формулами, составленными из функций множества F,
Оператор [ ]обладает следующими свойствами $(F,\ F_1,\ F_2$ — произвольные множества n-значных функций):
(i) $F \subseteq [F]$ (рефлексивность),
(ii) $[[F]] = [F]$ (идемпотентность), .
(iii) $F_1 \subseteq F_2$ влечет $[F_1] \subseteq [F_2]$ (монотонность),
(iv) Если система F_1 является полной и $F_1 \subseteq [F_2]$, то и система F_2 является полной. ;
Все эти утверждения следуют из определения оператора замыкания. Утверждение (iv) позволяет устанавливать полноту некоторой системы, выражая с её помощью все функции другой системы, полнота которой уже установлена.
Множество F n-значных функций называется (функционально) *замкнутым множеством (классом),* если оно совпадает со своим замыканием, т.е. если $F= [F]$.
Примеры.
1. Класс $F = P_n$, очевидно, является замкнутым классом.
2. Класс функций от одной переменной, очевидно, является замкнутым классом.
3. Класс функций от двух переменных не является замкнутым классом, поскольку $x \vee y \vee z$ функция от трех переменных, является суперпозицией дизъюнкции $x \vee y$. •
Говорят, что множество функций замкнуто относительно операции суперпозиции, если любая суперпозиция функций из данного множества тоже входит в это множество. Таким образом, замкнутость класса функций F означает собой сохранение при суперпозиции «наследственных» свойств этих функций. Пример (3) рак раз показывает, что свойство быть функцией от двух переменных не сохраняется при суперпозиции.

Пусть F — замкнутый класс и $F_1 \subset F$. Говорят, что множество функций F_1 порождает замкнутый класс F (или что F *порождается* множеством функций F_1), если $[F_1] = F$. Если F_1 порождает класс F, то говорят также, что F_1 *полно* в классе F. В случае, когда замкнутый класс F порождается конечным множеством функций, класс F называют *конечно порожденным.* Множество функций F_1 называется *базисом,* замкнутого класса F, если F_1 порождает F и $[F_2] \neq F$ для любого подмножества F_2 множества F_1, отличного от F_1, т.е. базисом является минимальная полная независимая система функций, удаление из которой любой функции делает систему неполной**.**

Хорошо известным примером полных в P_2 систем функций (использующихся при построении *СДНФ* и полинома Жегалкина) являются $\{\wedge, \vee, \neg\}$ и $\{\wedge, \oplus, 1\}$. Первая не является базисом P₂, а вторая является таковым. В свою очередь, система $\{\oplus, 1\}$является базисом класса линейных функций (см. ниже). Число функций, входящих в базис, называется *рангом* базиса.

Базис является *минимальным,* если при любом отождествлении переменных у всякой функции базиса получается неполная система. В *[Шестопал* 1961] доказано, что в P_2 имеется конечное число различных минимальных базисов и это число равно 48.

Заметим, что в ряде задач изучаются только соответствия между F и $[F]$. Тем самым фактически переходят к изучению оператора замыкания, который определяется посредством суперпозиций функций, а сама функциональная система (P_n, C) зачастую отождествляется с многозначной логикой, т.е. (P_n, C) выступает в качестве модели многозначной логики. Эта модель, в отличие от рассмотренных выше алгебр истинностных значений, является *алгеброй функций.*

(Следуя А.И. Мальцеву *[Малы/ев* 1966] (см. также *[Марченков* 2000]), существует чисто алгебраический способ определения понятий суперпозиции, замыкания и замкнутого класса. Введем следующие элементарные алгебраические операции: $\varsigma, \tau, \Delta, \nabla, *$. ς и τ суть одноместные операции циклической перестановки переменных и транспозиции первых двух переменных. Если f- m-местная функция и $k \geq 2$, то m-местные функции ςf и τf определяются соотношениями

$$(\varsigma f)(x_1, x_2, x_3,\dots, x_m) = f(x_2, x_3,\dots, x_m, x_1,),$$
$$(\tau f)(x_1, x_2, x_3,\dots, x_m) = f(x_2, x_1, x_3,\dots, x_m).$$

Δ есть одноместная операция отождествления первых двух переменных:

$$(\Delta f)(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}).$$

∇ есть одноместная операция введения (первой) фиктивной переменной:

$$(\nabla f)(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) = f(x_2, \dots, x_{m+1}).$$

Наконец, * есть двуместная операция подстановки. Если f—m-местная, а g —k-местная функции, то f* g является (k+m-1)-местной функцией, которая определяется тождеством

$$(f * g)(x_1, \dots, x_{k+m-1}) = f(g(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}, \dots, x_{k+m-1}).$$

Алгебра$\langle P_n; \varsigma, \tau, \Delta, \nabla, *\rangle$называется *(полной) итеративной алгеброй функций [Lau* 2006]. В случае, когда носителем является множество булевых функций P_2, алгебра называется *итеративной алгеброй Поста* (см. также *[Малыше* 1976]). Функция $f \in P_n$называется суперпозицией над $F \subseteq (P_n)$,если f может быть получена посредством применения конечного числа операций $\varsigma, \tau, \Delta, \nabla, *$ к функциям из F. Множество всех суперпозиций над $F \subseteq (P_n)$ называется замыканием F. Поэтому всякая подалгебра итеративной алгебры $\langle P_n; \varsigma, \tau, \Delta, \nabla, *\rangle$ является замкнутым классом.)

Известна содержательная трактовка понятия функциональной системы *(*(P_n, C) является частным случаем таковой), в основе которой лежит рассмотрение таких пар (P, Ω), в которых P является множеством отображений, реализуемых управляющими системами из некоторого класса, а Ω состоит из операции, используемой при построении новых управляющих систем из заданных. В нашем случае Ω представляет собой операцию суперпозиции C.

7.2.1.1. Классы Поста

Наиболее сложной задачей, можно сказать, глобальной задачей для многозначной логики является описание решетки замкнутых классов данной модели многозначной логики. В *[Post* 1921] установлено, что мощность множества замкнутых классов в P_2 *счётно,* и только через двадцать лет, в *[Post* 1941] доказывается *Большая теорема Поста,* где дается полное описание решетки замкнутых классов, каждый класс строится эффективно и показано, что каждый замкнутый класс имеет конечный базис. Эти классы названы *классами Поста.* Их около 50, включая несколько бесконечных регулярных семейств. Из этих результатов следуют решения задач о выразимости, полноте *(Малая теорема Поста),* базисах и др. Так, максимальный ранг базиса не превышает 4, например,$\{x \wedge y, 0, 1, x \oplus y \oplus z\}$.

Эта работа сыграла основополагающую роль в дальнейшем изучении функциональных свойств многозначных логик. Доказательство Поста громоздко и довольно-таки сложно. В *[Яблонский, Гаврилов и Кудрявцев* 1966] результаты Поста излагаются в более доступной форме. Эта книга сыграла огромную роль в литературе, на многие годы определив характер исследований по замкнутым классам булевых функций. В 80-е годы появляется целый ряд новых доказательств, например, алгебраическое доказательство в *[Вегтап* 1980] и компактное доказательство в *[Угольников* 1988]. Последнее доказательство несколько модифицировано в *[Марченков* 2000]. Элементарное доказательство приводится в *[Lau* 2006].

7.3. Проблема функциональной полноты

Труднейшей проблемой при изучении функциональных систем является следующая: какие функции могут быть сконструированы из данного множества функций. Проблема эта возникает и в самом пропозициональном исчислении, представленном формульной моделью, и в синтезе автоматов, и в универсальной алгебре; но именно при рассмотрении многозначной логики как функциональной системы этой проблеме уделяется специальное внимание. Заметим, что в *[Емельянов* 1985] показано, что в *n*-значной логике для любого фиксированного *n* > 2 задача о выразимости функции посредством операции суперпозиции через функции определенной системы является *NP* трудной задачей, т.е. для её решения не существует полиномиальных алгоритмов.

Важнейшим свойством функциональной системы является свойство функциональной полноты (например, для того, чтобы можно было реализовать любую переключательную схему). Система функций $F = \{f_1, \ldots, f_k, \ldots\}$ из P_n называется функционально полной, если любая функция из P_n представима посредством суперпозиций функций из системы *F*. Или, в терминах замыкания: *F* — полная система, если $[F] = P_n$.

Таким образом, указанная выше проблема приобретает здесь следующий вид: является ли некоторое множество *F* функционально полным?

7.3.1. Примеры функционально полных систем

Приведем три конкретных примера функционально полных систем.

- Система Россера и Тюркетта $F = \{0, 1, \ldots, n-1, J_0(x), J_{n-1}(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$

является полной в P_n (см. *[Яблонский* 1958], *[Гиндикин* 1972], *[Лупанов* 2007]). Здесь и в остальных примерах будем исходить из последней работы.

Доказательство. Для функций *n*-значной логики имеет место представление, которое является аналогом совершенной дизъюнктивной нормальной формы:

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} J_{\sigma_1}(x_1) \& \ldots \& J_{\sigma_n}(x_m) \& f(\sigma_1, \ldots, \sigma_m),$$

где максимум берется по всевозможным наборам значений переменных $(x_1, \ldots, x_m)$. Действительно, рассмотрим произвольный набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Найдем значение формулы на этом наборе. Если выполняется равенство $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$,то

$$J_{\sigma_1}(\alpha_1) \& \ldots \& J_{\sigma_n}(\alpha_m) \& f(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

так как $J_{\sigma_1}(\alpha_1) = \ldots = J_{\sigma_m}(\alpha_m) = n-1$ (т.е. равны максимальному значению из множества V_n). Если же $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \neq (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, то найдется $i \ (1 \le i \le m)$ такое, что $\sigma_i \neq \alpha_i$. Тогда $I_{\sigma_i}(\alpha_i) = 0$ (равно наименьшему значению из V_n). Поэтому

$$J_{\sigma_1}(\alpha_1) \& \ldots \& J_{\sigma_m}(\alpha_m) \& f(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = 0.$$

Следовательно,

$$\bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)} J_{\sigma_1}(\alpha_1) \& \ldots \& J_{\sigma_m}(\alpha_m) \& f(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m).$$

Поскольку рассматриваемая формула построена только из функций системы *F* , то *F* — полная система.

- Система Поста $\{\max(x_1, x_2), x+1(\mathrm{mod}\, n)\}$ является полной в P_n. Для доказательства нужно посредством суперпозиций этих функций выразить все функции системы Россера и Тюркетта.

Доказательство. Разобьем доказательство утверждения на несколько этапов.

Построим сначала константы. Рассмотрим функции

$$\overline{x} = x+1, \overline{x+1} = x+2, \ldots, (\overline{x+n-2}) = x+n-1, x+n = x.$$

При каждом значении *x* из $V_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ множество значений, принимаемых всеми этими функциями, равно V_n, Поэтому

$$\max(x+1, x+2, \ldots, x+n-1, x) = n-1.$$

Остальные константы получаются при помощи функции $x+1(\mathrm{mod}\, n)$.

Построим затем функции $J_i(x), \quad i = 0, 1, n-1$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \max(x, x+1, \ldots, x+n-2) + 1$$

Если $x = 0$, то $\varphi(0) = \max(0, 1, ..., n-2) + 1 = n-1$. Если же $x = \sigma \neq 0$, то среди чисел $\sigma, \sigma+1, ..., \sigma+n-2$ есть число $n — 1$. Поэтому $\varphi(\sigma) = n-1+1 = 0$. То есть

$$\varphi(x) = \begin{cases} n-1, \ если\, x = 0 \\ 0, если\, x \neq 0, \end{cases}$$

а значит, $\varphi(x) = J_0(x)$. Аналогично функция

$$\psi(x) = \max_{\alpha \neq n-1-i} \{x+\alpha\} + 1$$

равна функции $J_i(x)$. Действительно, при $x = i$ выполняется равенство

$$\psi(i) = \max_{\alpha \neq n-1-i} \{i+\alpha\} + 1 = \max_{\alpha+i \neq k-1} \{i+\alpha\} + 1 = n-2+1 = n-1.$$

А при $x = \sigma \neq i$ среди чисел

$$\sigma, \sigma+1, ..., \sigma+n-1-(i-1), \sigma+n-1-(i+1), ..., \sigma+n-1$$

естьчисло $n — 1$. Поэтому $\psi(\sigma) = n-1+1 = 0$.

То есть

$$\psi(x) = J_i(x).$$

Для доказательства утверждения осталось получить только функцию $\min(x_1, x_2)$. Для этого воспользуемся следующим равенством:

$$\min(x_1, x_2) = N(\max(N(x_1), N(x_2))),$$

которое аналогично равенству $x_1 \,\&\, x_2 = \neg(\neg x_1 \vee \neg x_2)$ для функций алгебры логики. Таким образом, достаточно получить функцию $N(x)$.

Покажем, как получать произвольные функции одной переменной из P_n. Для произвольных α, β из V_n рассмотрим функции

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \beta, \ если\, x = \alpha \\ 0, если\, x \neq \alpha, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \max(J_\alpha(x), n-1-\beta).$$

При $x = \alpha$ функция ψ принимает значение $k—1$, а при $x = \gamma \neq \alpha$ выполняется равенство $\psi(\gamma) = n-1-\beta$.

Поэтому $\varphi_{\alpha,\beta}(x) = \psi(x) + \beta + 1$. Пусть теперь $g(x)$ - произвольная функция (одной переменной) из P_n. Тогда

$$g(x) = \max(\varphi_{0,g(0)}(x), \varphi_{1,g(1)}(x), ..., \varphi_{n-1,g(n-1)}(x)).$$

Следовательно, мы можем получить и функцию $N(x)$.

Итак, мы выразили все функции системы

$$F = \{0, 1, ..., n-1, J_0(x), J_{n-1}(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$$

в виде формул над исходной системой. Поскольку система F является полной, то получаем, что $\{\max(x_1, x_2), x+1(\mathrm{mod}\, n)\}$— полная система[5].

- Система, состоящая из функции Вебба $W_n(x, y)$, является полной в P_n.

Доказательство. Действительно, $W_n(x, x) = x+1$. Поэтому можно получить любую функцию $\varphi(x) = x+c$, $c \in V_k$. Кроме того, выполняется равенство $W_n(x_1, x_2) + n - 1 = \max(x_1, x_2)$. Поскольку полученные функции образуют полную систему, то и система $\{W_n(x_1, x_2)\}$ является полной. В свою очередь заметим, что через функции логики Поста $\neg x$ и $x_1 \vee x_2$ легко выразима функция Вебба: $W_n(x_1, x_2) = \neg\neg(x_1 \vee x_2)$.

Как видим, обычно доказательство полноты конкретных систем в P_n производится с помощью метода сведения к заведомо полным системам.

7.3.2. Признаки функциональной полноты и неполноты

Существует ряд признаков полноты, в которых рассматриваются множества функций, содержащих некоторые совокупности функций от одной переменной и еще только одну функцию, существенно зависящую не менее чем от двух переменных. Функция $f \in P_n$ называется *существенной,* если она зависит не менее чем от двух переменных и принимает все n значений из множества V_n. Такие функции называются *функциями Слупецкого.* Сформулируем наиболее важные из таких признаков.

Пусть $P_n^{(1)}$ обозначает множество всех функций n-значной логики, зависящих от одной переменной. Функция от одной переменной называется *разнозначной,* если она принимает все n значений. Тогда множество всех разнозначных функций из P_n обозначим посредством S_n и $CS_n = P_n^{(1)} \backslash S_n$.

Критерий Слупецкого: Система $P_n^{(1)} \cup \{f(x)\}$ полна в P_n (при $n \geq 3$) т.т.т., когда $f(x)$ — существенная функция *[Shipecki* 1939].

Критерий Яблонского: Система $CS_n \cup \{f(x)\}$ полна в P_n (при $n \geq 3$) т.т.т., когда $f(x)$ — существенная функция *[Яблонский* 1958; 1986].

Критерий Саломаа: Система $S_n \cup \{f(x)\}$ полна в P_n (при $n \geq 5$) т.т.т., когда $f(x)$ — существенная функция *[Salomaa* 1962].

Понятие замкнутого класса может быть применено к решению вопросов об обосновании неполноты некоторых систем. Например, рассмотрим систему $F = \{\sim x,\ x \vee y\}$. Из определения операций ~*x* и $x \vee y$ следует, что обе функции принадлежат к классу функций, сохраняющих множество истинностных значений $\{0,\ n\text{-}1\}$,т.е. для любого набора σ, состоящего из 0 и *n-1,* значение функции $f(\sigma)$ является 0 или *n*-1. Очевидно, что $F = \{\sim x,\ x \vee y\}$ является примером еще одного замкнутого класса. В силу сохранения множества {0, *n*-1} замкнутый класс $[\sim x,\ x \vee y]$ не содержит, например, константу 1. Значит, при $n \geq 3$ *F* не будет полной системой. На этом примере видно, что хотя система $\{\sim x,\ x \vee y\}$ и является обобщением системы $\{\neg x,\ x \vee y\}$ булевых функций, она не является полной. Заметим также, что система функций $\{\sim x,\ x \rightarrow y\}$ тоже принадлежит к классу функций, сохраняющих $\{0,\ n\text{-}1\}$. В силу этого *n*-значная логика Лукасевича Ł_n не является функционально полной при $n \geq 3$.
(Дж. Мак-Кинси *[McKinsey* 1936] показывает, что функция Вебба не может быть определена в терминах $\sim x$ и $x \rightarrow y$ за исключением случая, когда *n=2.* Таким образом, здесь впервые опубликовано доказательство того, что множество функций Ł_n не является функционально полным ни для какого $n \geq 3$.)

7.3.3. Критерий функциональной полноты. Предполнота

Сложной технической проблемой для *n*-значных логик является проблема распознавания полноты для *произвольных* систем. Выделяются два подхода к решению задачи о полноте, Первый подход основывается на теореме о существовании алгоритма, позволяющего для каждой конечной системы *F* выяснить, будет ли она полна или нет. Суть алгоритма сводится к построению строго возрастающей цепочки множеств R_r, содержащих функции от двух переменных. Начиная с некоторого множества R_{r^*} процесс стабилизируется, т.е. последующие множества не содержат новых функций (а всего функций от двух переменных n^{n^2}). Поскольку множество R_{r^*} содержит все функции от двух переменных из класса *[F],* то система *F* полна тогда и только тогда, когда функция Вебба $W_n(x, y)$ принадлежит множеству R_{r^*} (см. *[Яблонский* 1958; 1986]).
Большой интерес вызвал второй подход, который основывается на совокупности всех предполных классов функций в P*ₙ*. Система *F* функций называется *предполной (максимальной)* в P_n, если *F*

представляет не полную систему, но добавление к *F* любой функции *f* такой, что $f \in P_n$ и $f \notin F$ преобразует *F* в полную систему. Или, в терминах замыкания: *F* преддолна в P_n, если $[F] \neq P_n$ и $[F \cup \{f\}] = P_n$, где $f \in P_n$ и $f \notin F$. Важная роль предполных классов функций видна из следующей теоремы А.В. Кузнецова, которая формулирует *критерий функциональной полноты:* Для любого *n* существует лишь конечное число предполных классов $M_1, M_2, .. ,M_q$; при этом *система функций F полна в* P_n *тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном предполном классе* M_i *[Кузнецов* 1956]. См. также *[Яблонский* 1958; 1986].

7.3.3.1. Предполные классы в P_2 и P_3

Известно, что в булевой алгебре функций существует только пять предполных классов *[Post* 1920]. В современных обозначениях это выглядит следующим образом:

- $\mathbf{T}_0$ - класс функций, удовлетворяющих условию $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$ *(сохраняющих* 0);
- $\mathbf{T}_1$ — класс функций, удовлетворяющих условию $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$ *(сохраняющих* 1);
- **L** — класс *линейных* функций, т.е. функций вида $x_1 \oplus \ldots \oplus x_m \oplus a$, где $a \in \{0, 1\}$ (полиномы Жегалкина, не содержащие два и более сомножителей);
- **M** — класс монотонных функций: $x_1 \leq y_1, \ldots, x_m \leq y_m \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_m) \leq f(y_1, \ldots, y_m)$;
- **S** - класс самодвойственных функций, т.е. таких, что $f(\neg x_1, \ldots, \neg x_m) = \neg f(x_1, \ldots, x_m)$ (это значит, что на противоположных наборах *f* принимает противоположные значения.

Классы $\mathbf{T_0}$, $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{S}$ являются замкнутыми, что устанавливается индукцией по построению формул.
Малая теорема Поста*. Классы* $\mathbf{T_0}$, $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{S}$ *являются предполными, и никаких других предполных классов не существует. Множество булевых функций F является полным т.т.т., когда F не содержится целиком ни в одном из этих пяти предполных классов.*
Критерий функциональной полноты для P_2 можно записать в следующем виде. Пусть $F \subseteq P_2$. Тогда
$$[F] = P_2 \Leftrightarrow \forall X \in \{\mathbf{T_0}, \mathbf{T_1}, \mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{S}\} : F \not\subseteq X.$$
Необходимость этого утверждения очевидна, так как если бы все функции из *F* входили в один из перечисленных классов, то и замыкание *F* входило бы в этот класс и тогда класс *F* не полон.

При доказательстве достаточности исходим из предположения, что *F* содержит функции, не входящие ни в один из указанных пяти классов. Остается показать, что из этих функций можно сконструировать один из полных базисов P_2.

Эта теорема Поста является следствием из обзора всех замкнутых классов булевых функций, т.е. следствием Большой теоремы Поста *[Post* 1941]. Первое непосредственное доказательство этой теоремы было получено С.В.Яблонским в 1951 г. (независимо от результатов Э. Поста) и опубликовано в *[Яблонский* 1952]. Более простое и короткое доказательство А.В. Кузнецова опубликовано в *[Яблонский* 1958]. В *[Кузнецов* 1959] Малая теорема Поста называется теоремой "Поста-Яблонского". Из современных доказательств см., например, *[Марченков* 2002].

Очень важным для дальнейшего изложения является понятие сохранения предиката *ρ* множеством функций из заданного класса, впервые введенное в 1951 г. (см. *[Кузнецов* 1959; 1961]). Пусть $\rho(x_1, \ldots, x_k)$ —*k*-местный предикат, $f(y_1, \ldots, y_m)$— *n*-значная функция. Говорят, что функция $f(y_1, \ldots, y_m)$ *сохранят предикат* $\rho(x_1, \ldots, x_k)$ (или соответствующее отношение), если для любых *m* наборов

$(a_{11}, \ldots, a_{k1}), \ldots, (a_{1m}, \ldots, a_{km})$,

удовлетворяющих предикату *p,* набор

$(f(a_{11}, \ldots, a_{1m}), \ldots, f(a_{k1}, \ldots, a_{km}))$

также удовлетворяет предикату ρ.

Предикатное описание предполных классов в P_2 было получено А.В.Кузнецовым в 1951 г. (см. *[Кузнецов* 1959]): $\mathbf{T}_0$ сохраняет предикат $x = 0$, $\mathbf{T}_1$ сохраняет $x = 1$, **M** сохраняет $x \leq y$, **S** сохраняет $x \neq y$ и L = сохраняет $x \oplus y = z \oplus u$.

(Заметим, что класс линейных функций может быть также охарактеризован как сохранение предиката $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 = 0$ (см. *[Марченков* 2000]).

Более того, как следует из *[Марченков* 2000], А.В. Кузнецову было известно предикатное описание замкнутых классов булевых функций (результат не опубликован). Первой публикацией на эту тему явилась статья Г.Н. Блохиной *[Блохина* 1970]. ,

Критерий функциональной полноты для P_3 был найден С.В.Яблонским *[Яблонский* 1954; 1958], где полностью описываются все 18 предполных в P_3 классов, сохраняющих соответствующие предикаты (см. также *[Гиндикин* 1972]).

По аналогии с классами $\mathbf{T}_0$ и $\mathbf{T}_1$ в двузначной логике в P_3 имеется шесть классов, сохраняющих собственные подмножества множества {0, 1, 2}. Обратим внимание на класс $\mathbf{T}_{\{0,2\}}$ - функции, сохраняющие множество {0, 2}. Заметим, что этот класс функций соответствует классу функций трехзначной логики Лукасевича Ł_3. Имеется также класс **L** линейных функций. В трехзначной логике имеются три класса монотонных функций из-за того, что можно различными способами упорядочивать числа 0, 1; 2 (0<1<2, 1<2<0, 2<0<1). Остальные упорядочивания не приводят к новым классам. Имеется только один класс самодвойственных функций. Имеются еще три класса, являющихся более тонкими аналогами классов $\mathbf{T}_0$ и $\mathbf{T}_1$ в P_2. Остается указать четыре класса, не имеющих аналогов при $n = 2$ (их точные аналоги совпадают с множеством всех функций P_2). Класс $\mathbf{U}_0$ состоит из функций, которые на любой совокупности наборов, у которых в некоторых фиксированных разрядах стоят нули, а в остальных их нет, либо не принимают значения нуль, либо равны нулю на всех этих наборах. Класс $\mathbf{U}_1$ связан с 1 так же как $\mathbf{U}_0$ с 0. Класс $\mathbf{U}_2$ аналогичным образом связан с 2. Наконец **C** -класс, состоящий из всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной, и функций, не принимающих, по крайней мере, одного значения (при $n = 2$ это класс функций от одной переменной).

В *[Кузнецов* 1959] указаны все 18 предикатов (определенных на множестве {0, 1, 2}), которые сохраняются указанными соответствующими предполными классами функций.

В работе *[Захарова, Кудрявцев и Яблонский* 1969] отмечается, что А.И. Мальцев доказал, что P_4 имеет в точности 82 предполных класса.

7.3.3.2. Предполные классы в P_n

Теорема А.В. Кузнецова дает способ построения предполных классов и говорит об их конечном числе, но этот способ не является алгоритмом. Тем не менее она открывает перспективы для описания всех предполных классов в P_n для любого $n \geq 3$, что становится фундаментальной проблемой *n*-значной логики.

Еще в 1951 г. А.В. Кузнецов доказал, что всякий предполный класс функций *n*-значной логики является классом сохранения некоторого предиката, зависящего (при $n \geq 3$) от не более чем *n* аргументов.

Отсюда получается верхняя оценка: их меньше чем 2^{n^n}. А.В. Кузнецовым (неопубликовано) и С.В. Яблонским был построен ряд семейств предполных классов, обобщающих предыдущие примеры на *n*-значный случай. Первые результаты в этой области были опубликованы в статье С.В.Яблонского *[Яблонский* 1958], например, в ней были описаны все предполные классы самодвойственных функций и все предполные классы, сохраняющие предикаты эквивалентности (разбиения). В *[Мартынюк,* I960] описаны все предполные классы монотонных функций. В *[Lo Czu Kai* 1963] описаны все предполные классы линейных функций. Количество найденных предполных классов стремительно росло и стали полагать, что число различных типов предполных классов должно расти с ростом *n.* Как отмечается в *[Гиндикин* 1972], имелась даже гипотеза, что нет описания множества предполных классов для любого *n,* существенно более эффективного, чем описание, данное в теореме Кузнецова. Однако в *[Rosenberg* 1965] было анонсировано, а в книге *[Rosenberg* 1970] дано описание всех предполных классов в *n*-значной логике.

Множество всех функций $f \in P_n$, сохраняющих предикат ρ, обозначается посредством $Pol(\rho)$. Множества $Pol(\rho)$ являются замкнутыми классами, которые называют также *клонами.*

(Множество $F \subseteq P_n$ называется *клоном (clone),* если *F* замкнуто относительно суперпозиции и ему принадлежит множество всех селекторных функций *(проекции).* Для любого $m, m \geq 1$, и любого $i, 1 \leq i \leq m$, функцию $e_i^m(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$, равную значению переменной x_i, называют *селекторной функцией.* При наличии всех селекторных функций значительно упрощаются многие технические выкладки. С другой стороны, клон или *клон операций* — это хорошо известный объект универсальной алгебры (см. *[Коя* 1968]).)

Указание этих предикатов и составляет содержание теоремы Розенберга о полноте в конечнозначных логиках. В результате, следуя И. Розенбергу, все предполные классы делятся на шесть типов (семейств):

- Тип $\mathfrak{M}$— предполные классы монотонных функций;
- Тип $\mathfrak{S}$ — предполные классы самодвойственных функций;
- Тип $\mathfrak{U}$ — предполные классы функций, которые сохраняют нетривиальные предикаты эквивалентности;
- Тип $\mathfrak{L}$ - предполные классы квазилинейных функций;
- Тип $\mathfrak{C}$ - предполные классы функций, которые сохраняют центральные предикаты;
- Тип $\mathfrak{B}$ - предполные классы функций, которые сохраняют /г-универсальные предикаты.

(Заметим, что у И. Розенберга вместо предикатов выступают отношения, т.е. вводится понятие сохранения функцией *f* отношения ϱ.)

В *[Rosenberg* 1970] доказывается, что все указанные семейства классов являются предполными, и устанавливается критерий функциональной полноты для P_n:

$$[F] = P_n \Leftrightarrow \forall \rho \in \mathfrak{M}_n \cup \mathfrak{S}_n \cup \mathfrak{U}_n \cup \mathfrak{L}_n \cup \mathfrak{C}_n \cup \mathfrak{B}_n : F \nsubseteq Pol(\rho).$$

Это значительная теорема в многозначной логике. Доказательство И. Розенберга в более доступной форме излагается в *[Lau.* 2006]. Новое доказательство через модификацию некоторых идей имеется в *[Quackenbush* 1982]. Описание указанных шести типов классов и подробное доказательство их предполноты можно найти в *[Яблонский, Гаврилов и Набебин* 1997]. То же самое, но в более компактной форме имеется в *[Марченков* 2004].

Конечно, интересует вопрос о числе предполных классов *n(n)* в P_n для любого $n \geq 2$. В *[Захарова, Кудрявцев и Яблонский* 1969] показано, что число *n(n)* асимптотически равно

$$\delta(n) \cdot n \cdot 2^{C_{n-1}^{[n-1/2]}},$$

где $\delta(n) = 1$ для нечетных и, $\delta(n) = 2$ для четных *n.* В этой работе, основываясь на статье *[Rosenberg* 1965], вычисляется число предполных классов для каждого типа и в общем случае для $n \leq 8$.

Полностью вопрос решен в *[Rosenberg* 1973], где определена также мощность каждого из указанных семейств предполных классов. Для *n(n)* имеет место следующая таблица:

n	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(n)$	5	18	82	643	15 182	7 848 984	549 761 933 169

Очень быстрый их рост указывает на малую практическую эффективность предполных классов для решения проблемы полноты. Поэтому для практических применений формулируются критерии полноты, в которых используется информация о множестве одноместных функций (см. выше "признаки полноты").

7.3.3.2.1. «Максимальный» предполный класс и его базис

Особый интерес представляет следующий класс функций. Пусть T_n обозначает множество всех функций из P_n, которые сохраняют 0 и *n*-1, т.е. $f(x_1, \ldots, x_m) \in T_n$ т.т.т., когда $f(x_1, \ldots, x_m) \in \{0, n\text{-}1\}$, где $x_i \in \{0, n\text{-}1\}$, $1 \leq i \leq m$. Из теоремы Яблонского о функционально предполных классах функций в *n*-значной логике *[Яблонский* 1958] следует, что данный класс функций T_n является предполным в P_n.

Пусть $Ł_3$ есть множество функций, соответствующее трехзначной логике Лукасевича $Ł_3$, т.е. $[\sim x,\ x \to y] = Ł_3$. В работе В.К. Финна *[Финн* 1969] о функциональной предполноте $Ł_3$ показано, что $Ł_3 = T_3$. Рассмотрим матричное определение логики $\mathbf{T}_n$, соответствующей множеству функций T_n, которую В.К. Финн *[Finn* 1975] называет «максимальной *n*-значной непостовской логикой»:

$$\mathfrak{M}_n^T = <V_n, \sim x, x \wedge y, J_0(x), ..., J_{n-1}(x), N_1(x), ..., N_{n-2}(x), \{n-1\}>,$$

где

$\sim x, x \wedge y$ и $J_i(x)$ — функции, определенные выше,

$$N_i(x) = \begin{cases} i, если\ x \in \{1,...,n-2\} \\ \sim x, если\ x \in \{0, n-1\} \end{cases} \quad (1 \le i \le n-2).$$

Сигнатуру матрицы $\mathfrak{M}_n^T$ можно значительно упростить. Пусть

$\mathfrak{M}_n^{T*} = < V_n, \sim x, x \to^{T*} y, \{n-1\}$ *[Карпенко* 1989, где

1) если $n = 3$, то $x \to^{T*} y = x \to y$;

2) если $n > 3$, то

$$x \to^{T^*} y = \begin{cases} n-2, если\ x = y\ и\ x, y \in \{1,...,n-2\} \\ x \to y, в\ остальных\ случаях. \end{cases}$$

Множество всех функций матрицы $\mathfrak{M}_n^{T*}$ обозначим посредством T_n^*.

Теорема. $T_n^* = T_n$ *для любого* $n \ge 3$.

Доказательство.

I. $T_n \subseteq T_n^*$.

Сначала определим в T_n^* импликацию Лукасевича $x \to y$:

$$x \to y = \sim((y \to^{T*} x) \to^{T*} \sim(y \to^{T*} x)) \to^{T*} (x \to^{T*} y).$$

Легко показать, что

$$x \to y = \sim((y \to x) \to \sim(y \to x)) \to (x \to y).$$

Поскольку $x \to^{T*} y$ отличается о т$x \to y$ только для случая, когда $x = y$ и $x, y \in \{1, ..., n\text{-}2\}$, то остается проверить этот случай. Тогда имеем

$$x \to y = \sim((n\text{-}2) \to^{T*} ((n\text{-}1)\text{-}(n\text{-}2))) \to^{T*} (n\text{-}2) =$$
$$= \sim((n\text{-}2) \to^{T*} 1) \to^{T*} (n\text{-}2) = ((n\text{-}1)\text{-}2) \to^{T*} (n\text{-}2) = n\text{-}1.$$

Следовательно, $Ł_n \subseteq T_n^*$. Поскольку $x \wedge y \in Ł_n$, то $x \wedge y \in T_n^*$.

Как уже отмечалось, Б. Россер и А. Тюркетт *[Rosser and Tvrquette* 1952] показали, что для любого $n \ge 3$ и любого $i \in V_n$, $J_i(x) \in Ł_n$. Отсюда, $J_i(x) \in T_n^*$. Остается показать, что $N_i(x) \in T_n^*$.

1) $n = 3$, Тогда :

$N_1(x) = \sim x$;

2) $n \ge 3$. Тогда

$$N_1(x) = (x \to^{T*} x) \to^{T*} J_0(x),$$
$$N_2(x) = (x \to^{T*} x) \to^{T*} N_1(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$N_{n-2}(x) = (x \to^{T*} x) \to^{T*} N_{n-3}(x),$$

Таким образом, $T_n \subseteq T_n^*$. .

II. $T_n^* \subseteq T_n$.

Выше мы показали, что T_n^* включает в себя T_n. Но T_n является функционально предполным в P_n множеством функций для любого $n \ge 3$. Поскольку T_n^* не является функционально полным множеством функций (функции $\sim x$ и $x \to^{T*} y$ сохраняют множество значений $\{0, n\text{-}1\}$), то $T_n^* \subsetneq T_n$.

Таким образом, $T_n^* = T_n$.

В *Карпенко* 1989] построена также функция Шеффера для T_n^*.

7.3.4. Функции Шеффера

К проблеме функциональной полноты примыкает задача о базисах и в первую очередь представляют интерес базисы, состоящие из одной функции, которые называются функциями Шеффера. Пусть $F \subseteq P_n$. Тогда функция *f* из P_n есть *функция Шеффера* (или единственный генератор) для *F,* если любая функция из *F* выразима посредством конечного числа суперпозиций функции *f,* или, по-другому, если *[f] = F.*

Уже говорилось, что в P_2 имеются только две полные системы, состоящие из одной функции: штрих Шеффера $x|y$ и стрелка Пирса $x \uparrow y$. Понятно, что подобные функции также являются функциями Слупецкого. Поскольку $x|y$ есть $\neg(x \wedge y)$ и $x \uparrow y$ есть $\neg(x \vee y)$, то имеется следующий критерий для двузначных функций Шеффера (см. *[Шестопал* 1961]):

$$[f] = P_2 \Leftrightarrow (f \notin \mathbf{T}_0 \wedge f \notin \mathbf{T}_1 \wedge f \notin \mathbf{S}).$$

В отличие от P_2, в P_3 имеется 3774 двуместных функций Шеффера (см, *[Martin* 1954]). В *[Wheeler* 1961] найдена формула, вычисляющая число m-местных $(m \geq 2)$ функций Шеффера в P_2.

Незначительное усиление теоремы из *[Martin* 1954] приводит к следующей характеризации функции Шеффера для P_n:

Функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ *из* P_n, *гд е* $n \geq 3$, *является функцией Шеффера т.т.т., когд а* $f(x_1, \ldots, x_m)$ *порождает все функции одной переменной, принимающие не более n-1 значений [Яблонский* 1958].

По сути это является еще одним критерием функциональной полноты для P_n.

Интересно получить критерий для двузначных функций Шеффера в терминах предполных классов Розенберга, что и было сделано в *[Rousseau* 1967]):

$$[f] = P_n \Leftrightarrow \forall \rho \in \mathfrak{C}_n^1 \cup \mathfrak{U}_n \cup \mathfrak{B}_n : f \notin Pol(\rho)$$

(Здесь C_n^1 есть класс, сохраняющий одноместные центральные предикаты. О свойствах этого класса и функции Шеффера для него см. также в *[Кудрявцев* 1970].)

В *[Schofteld* 1969] было показано, что эти условия независимы. Отсюда следует, что функция Шеффера существует для любого из указанных классов и что все другие классы не имеют никакой функции Шеффера.

А. Роуз показал *[Rose* 1969], что не для каждого множества функций n-значной логики существует штрих Шеффера.

В *[Rosenberg* 1978] приводится библиография по функциям Шеффера включительно по 1978 г. Теория двуместных штрихов Шеффера для P_n и эффективные правила их построения даны *[Pinkava* 1981]. О симметрических (коммутативных) функциях Шеффера см. в *[Stojmenovic* 1989]. Ранее было известно, что в P_3 имеется 90 двуместных коммутативных функций Шеффера.

В каждом случае, однако, возникает проблема построения функции Шеффера для функционально неполных логик. Для некоторых трехзначных логик мы этот вопрос рассмотрели в разделе (3.6).

7.3.4.1. Функция Шеффера для Ł_n

Интересен следующий результат, который понадобится нам в дальнейшем. Дж. Мак-Кинси *[McKinsey* 1936] сконструировал функцию (штрих) Шеффера для n-значной логики Лукасевича Ł_n в следующем виде:

$$Exy = \mathrm{C}x\mathrm{C}\{\mathrm{CN}y\}y\mathrm{NC}y\mathrm{N}\{\mathrm{C}y\}\mathrm{N}y,$$

где C и N - импликация и отрицание в нотации Лукасевича, а скобки указывают на *n-2* вхождение заключенного в них выражения. Для единообразия обозначим функцию *Exy* как $x \to^{\mathrm{E}} y$.

Используя $J_i(x)$-функции, которые не были известны Дж. Мак-Кинси, можно значительно упростить определение $x \to^{\mathrm{E}} y$. Заме тим, что $J_{n-1}(y) = \mathrm{N}\{\mathrm{C}y\}\mathrm{N}y$ и $J_0(y) = \mathrm{N}\{\mathrm{CN}y\}y$.Тогда

$$x \to^{\mathrm{E}} y = x \to (\sim J_0(y) \to \sim(y \to J_{n-1}(y)).$$

Применив контрапозицию к консеквенту, получим нужное определение:

$$x \to^{\mathrm{E}} y = x \to ((y \to J_{n-1}(y)) \to J_0(y)).$$

Для сравнения с импликацией Лукасевича $x \to y$ определим $x \to^{\mathrm{E}} y$ следующим образом:

$$x \to^{E} y = \begin{cases} 1, \text{ если } y = 0 \\ \sim x, \text{ если } y = 1 \\ x \to y, \text{ в остальных случаях} . \end{cases}$$

Теперь нужно посредством $x \to^{\mathrm{E}} y$ определить функции $\sim x$ и $x \to y$. Мак-Кинси это делает следующим образом:

$$(a)\ n\text{-}1 = (x \to^{\mathrm{E}} x) \to^{\mathrm{E}} ((x \to^{\mathrm{E}} x) \to^{\mathrm{E}} (x \to^{\mathrm{E}} x)),$$

$$(b)\ \sim x = x \to^{\mathrm{E}} n{-}1,$$

$$(c)\ x \to y = x \to^{\mathrm{E}} (n{-}1 \to^{\mathrm{E}} \mathrm{y}).$$

Множество всех суперпозиций функции $x \to^{\mathrm{E}} y$ обозначим посредством E_n. Таким образом, $E_n = \text{Ł}_n$ для любого $n \geq 2.$

Исследования штриха Шеффера для Ł_n работой Мак-Кинси не закончились. А.Роуз *[Rose* 1952] обратил внимание, что функция $x \to^{\mathrm{E}} y$ не является коммутативной, и предложил новое определение штриха Шеффера для Ł_n, которое значительно проще:

$$x \to^{\mathrm{D}} y = x \to^{\mathrm{D}} \sim y.$$

Однако новый штрих Шеффера не имеет места для случая, когда $n = 3i$, поскольку i тогда является неподвижной точкой. Интересно, что точно такой же штрих Шеффера для Ł_n был построен в *[Hendry and Massey* 1969]. Наконец, А. Роуз *[Rose* 1968] доопределяет функцию $x \to^{\mathrm{D}} y$ таким образом, что она является штрихом Шеффера для любого $n \geq 3.$

7.4. Принципиальные отличия многозначной логики от двузначной. Континуальность

В книге Э. Поста *[Post* 1941] поставлен также вопрос об описании всех замкнутых классов в P_n. На положительное решение вопроса дал некоторые основания сам Пост, предложив двузначную интерпретацию логик P_n (см. ниже раздел 10.6)
Однако на самом деле с многозначной логикой дело обстоит совсем по-другому. Оказалось, что имеются существенные различия между классической двузначной логикой и многозначной, говорящие о *принципиальной несводимости многозначной логики к двузначной.*
Первое качественное отличие (не количественное, как, например, рост числа функций или числа предполных классов при росте числа истинностных значений *n)* было обнаружено А.В. Кузнецовым в 1951 г. при обобщении теоремы Жегалкина (см. 1.3.1):
Функцию n-зпачной логики можно представить полиномом по mod n т.т.т., когда n есть простое число (см. *[Яблонский* 1986]),
Но главные отличия следующие. Ю.И. Янов доказал, что в отличие от *P_2 для всякого $n \geq 3$ существует в P_n замкнутый класс, не имеющий базиса [Янов и Мучник* 1959], а А.А. Мучник доказал, что *для всякого $n \geq 3$ существует в P_n замкнутый класс со счетным базисом [Янов и Мучник* 1959]. Подробное доказательство см. в *[Яблонский* 1986]. Непосредственно к этой второй теореме примыкает следующий результат А.А. Мучника: *для всякого n $(n \geq 3)$ P_n содержит континуум различных замкнутых классов.*
Таким образом, добавление только одного истинностного значения к классической двузначной логике приводит к континуальности.
Вообще-то говоря, точная природа такого различия между двузначной и трехзначной логиками неясна, т.е. при переходе от двух истинностных значений к трем озадачивает происходящий *скачок* от счетности к континуальности.
Отметим также несколько неожиданный факт при переходе от 7 к 8 при изучении предполных классов в *P_n :*
Для $n \geq 8$ существует предполный класс $F \in \mathfrak{M}_n$ такой, что F не имеет конечного базиса [Tardos 1986] (см. также *[Михеева* 1986]).
В силу основной трудности (континуальности множества замкнутых классов) исследуется «локальная» информация о структуре окрестности некоторого произвольного замкнутого класса. На один результат, относительно мощности замкнутых классов в самих предполных классах, стоит сослаться (см. *[Марченков* 1983] и *[Demetrovics andHannak* 1983].

Пусть $n \geq 3$ и пусть F есть произвольный предполный класс из P_n. Тогда мощность решетки замкнутых классов множества F континуальна, т.е. $|\mathbb{L}_n(F)| = c$, т.т.т,, когда F не является предполным классом типа $\mathfrak{L}$. Если F — предполный класс типа $\mathfrak{L}$, тогда в случае, когда n =p^n, где p есть простое число, $|\mathbb{L}_n(F)| < \aleph_0$, если $m \doteq 1$ и $|\mathbb{L}_n(F)| = \aleph_0$ в остальных случаях.
Целая серия работ в изучении решеток клонов принадлежит А.А. Булатову (см., например, *[Bulatov* 2001]).

7.5. Трехзначные логики: функциональные свойства

Несмотря на довольно-таки исчерпывающее рассмотрение трехзначных логик в гл. 3, тем не менее остается целый ряд нерешенных проблем. Наиболее интересны следующие:
1) классификация функций и число базисов;
2) критерий функциональной полноты для различных не-функционально полных логик;
3) мощностные характеристики множеств замкнутых классов в этих логиках.

7.5.1. Классы функций и базисы для P_3

В первую очередь интересует число базисов в самой P_3. Известно, что функции из P_3 можно классифицировать, используя предполные классы. Вначале определяются классы функций (вектора) отосительно того, является или нет какая-либо функция элементом предполного класса. Относительно этих векторов вычисляются полные базисы (агрегаты). Впервые для P_3 это было проведено в *[Miyakawa* 1971]. Уточнение результатов этой работы сделано в *[Stojmenovic* 1984], откуда следует, что число классов функций в P_3 есть 406 и число базисов есть б 239 721. Также установлено, что максимальный ранг базиса не превышает 6. При этом указано число базисов для каждого из рангов от 1 до 6. Расчеты велись с помощью компьютерной программы. Таким образом, выяснена точная структура P_3.
(Число классов функций для P_2 есть 15 *{Яблонский* 1952] и число базисов (агрегатов) есть 42 *[Iburki, Naemura and Nosaki* 1963]. Агрегат есть множество всех базисов, имеющих одно и то же множество характеристических векторов. Например, одно и то же множество

характеристических векторов имеют функции Шеффера: они не входят ни в один из пяти предгголных классов.)
Обзор данной проблематики см. в *[Miyakawa, Stojmenovic, Lau and Rosenberg* 1987]. Алгоритмическую проблематику, связанную с вычислениями, см. в книгах *[Stojmenovic* 1987] и *[Miyakawa* 1988]. Специально о классификации трехзначных функций см. *[Miyakawa* 2002].

7.5.2. Субмаксимальные клоны

Рассмотрим следующее полезное понятие, впервые введенное *[Раца* 1969]. Будем называть *глубиной* системы *F* функций в классе K_0 наименьшее из таких натуральных чисел *m,* что существует убывающая последовательность классов $K_0, K_1, \ldots, K_m$, удовлетворяющая двум условиям:
1) класс K_{i+1} предполон в K_i $(i = 0, 1, \ldots, m–1)$;
2) система *F* является полной в K_m,
В частности, то, что глубина системы *F* в классе K_0 равна 0, означает, что *F* является полной в K_0 (ср. это определение глубины с *[Lau* 2006]).
В *[Rosenberg* 1974] вводится понятие *субмаксимального {submaximal)* класса. Это такие предполные классы функций, глубина которых равна 2. Заметим, что каждый субмаксимальный класс является клоном (см, *[Lau* 2006]).
Впервые это было вычислено в *[Miyakawa* 1979].
Как раз первым примером логики "глубины 2", чьи функциональные свойства были тщательно изучены, была трехзначная логика Рейтинга **G**$_3$ (см. выше раздел 3.2). М.Ф. Рана, ученик А.В. Кузнецова, показал, что класс функций G_3 предполон в классе функций $\L_3$ (как мы уже знаем класс $\L_3$ предполон в P_3), и установил критерий функциональной полноты для класса функций G_3 *[Раца* 1965; 1969]. Здесь доказывается, что G_3 имеет ровно 10 предполных классов, и система функций *F* полна в G_3 т.т.т., когда *F* не включается ни в один из этих классов. Также доказывается, что, ранг базиса для G_3 не превышает 6.
(Отсюда следует, что каждый предполный класс в G_3 имеет глубину, равную 3. Одним из таких предполных классов в G_3 является класс функций $[\urcorner x, x \vee y, x \wedge y]$ (см. определение трехзначной *p*-логики в разделе 3.2.2).)
Этапной работой, посвященной описанию всех субмаксимальных классов P_3, т.е. описанию всех предполных классов в каждом из предполных классов Яблонского для P_3, является статья *[Lau* 1982].

Эта работа стала основой для вычисления характеристических векторов и базисов для различных предполных в P_3 классов. Из 18 классов Яблонского эта работа уже выполнена для 8 классов. См. соответствующую литературу в *[Miyakawa, Rosenberg and Sto-jmenovic* 1990], где установлено, что в предполном классе Яблонского, сохраняющем 0, имеется 253 класса различных функций и 833 720 базисов.
Интереснейшим вопросом, который встает при изучении субмаксимальных клонов, есть вопрос о мощности каждого из этих клонов. Уже в *[Раца* 1969] был поставлен вопрос о мощности множества замкнутых классов функций, соответствующего трехзначной логике Рейтинга **G**$_3$. Ответ оказался несколько неожиданным, хотя глубина клона G_3 равна 2:
Множество функций G_3 *включает континуум замкнутых классов со счетными базисами, а также континуум замкнутых классов, вообще не имеюгцих базиса [Раца* 1982; 1990].
Для порождения континуального множества замкнутых классов функций М.Ф. Раца строит систему функций С, выраженную следующей формулой;

$$\left\{ \mathop{\&}_{i=1}^{n} ((\neg x_1 \,\&\ldots\&\, \neg x_{i-1} \,\&\, \neg x_{i+1} \,\&\ldots\&\, \neg x_n) \Rightarrow \perp x_i) \;\middle|\; n = 2, 3, \ldots \right\},$$

Где $\perp x =: x \vee \neg x$.
Обозначим эти функции — двухместную, трехместную и т.д. символами C_2, C_3... соответственно. Например, C_2 есть
$(\neg x_2 \Rightarrow x_1 \vee \neg x_1) \,\&\, (\neg x_1 \Rightarrow x_2 \vee \neg x_2)$.
Условимся для любых функций $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$ и $g(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ из G_3 обозначать символом $f(x_i/g)$ результат подстановки в *f* функции *g* вместо переменной x_i. Тогда для всякого $n = 2, 3, \ldots$ функция C_n является симметрической (т.е. при всякой перестановке аргументов остается равной себе) и удовлетворяет условиям:

1. $C_n = \perp C_n$,
2. $C_n(x_i/1) = 1 \quad (1 \le i \le n)$,
3. $C_n(x_i/\perp y, x_j/\perp z) = 1 \quad (1 \le i < j \le n)$.

Ф. Раца показывает, что при выполнении этих условий система функций *С* является независимой, откуда следует, что существует континуум различных замкнутых классов функций.
Поскольку класс функций G_3 предполон в $\L_3$, то таковыми же континуальными свойствами обладает и сама $\L_3$ и, вообще, любая

логика, в которой посредством исходных связок можно задать указанную выше систему функций C, является континуальной. Таким образом, можно говорить о некотором критерии континуальности.
Общий ответ на поставленный выше вопрос о мощности субмаксимальных клонов дает следующая теорема *[Bulatov, Lau and Stranch* 1996]:

Всего P_3 имеет 158 субмаксимальных клонов. Из них: 5 субмаксимальных клонов имеют конечное множество замкнутых классов; 7 субмаксимальных клонов имеют счетное множество классов; остальные 146 субмаксимальных клонов имеют мощность континуума.

Более того, по отдельности указана мощность каждого из субмаксимальных клонов. В качестве следствия имеем вышеприведенный результат М.Ф. Раца для G_3. Но, подчеркнем, у М.Ф. Раца приведены базисы для каждого предполного в G_3 класса функций. К сожалению, нет такого описания предполных классов для $Ł_3$. Однако в *[Cignoli and Monteiro* 2006] имеется описание структуры максимальных подалгебр трехзначной алгебры Лукасевича, где понятие *максимальной подалгебры* соответствует понятию предполного класса функций.

7.5.3. Функциональные свойства *B₃*

В статьях *[Финн* 1974], *[Finn* 1974] В.К. Финн установил критерий функциональной полноты для класса функций B_3, соответствующего трехзначной логике Бочвара $\mathbf{B}_3$ (см. выше 3.3). Здесь доказывается, что B_3 имеет ровно 11 предполных классов, и система функций F полна в B_3 т.т.т., когда F не включается ни в один из этих классов. Отсюда также следует критерий функциональной полноты для множества внешних функций (см. в разделе 3.3.1 о внешних связках логики Бочвара $\mathbf{B}_3$): семь предполных классов. Также В.К. Финн показал, что класс функций H_3, соответствующий трехзначной логике Холдена $\mathbf{H}_3$ (см. выше раздел 3.3.3), включается в один из предполных классов B_3.
Тогда можно сделать предположение о глубине рассмотренных классов функций:

$$H_3 \subset B_3 \subset E_3 \subset Ł_3 \subset P_3,$$

где E_3 есть класс функций, соответствующей трехзначной логике Эббингауза (см. 3.3.3).
Интересна гипотеза В.К. Финна, что мощность множества замкнутых классов B_3 является счетной, как и для P_2. Эта гипотеза основывалась на *предположении* о том, что в B_3 класс внутренних функций B_3^{in} (который порождается функциями $\sim, \cap$) и класс внешних функций

B_3^{ex} (областью значения которых является множество {0,1}) каждый сам по себе счетен, а в объединении они порождают всё множество функций B_3. Исходя из этого, гипотеза В.К. Финна выглядит естественной.
Однако возможны и другие гипотезы. Обратим внимание на работу *[Lau* 1986] (см. также [Law 2006]), где дается следующий критерий счетности:

Пусть F есть подкласс P_n (или алгебра со счётным множеством элементов). Там существует отношение частичного порядка $\leq$ на F, удовлетворяющее следующим трем свойствам:

(a) $f \leq g \Rightarrow [f] \subseteq [g]$,

(b) *каждая цепь является вполне упорядоченной (относительно* $\leq$),

(Т.е. каждое непустое подмножество обладает единственным минимальным элементом.)

(c) *каждая антицепь (относительно* $\leq$) *имеет только конечное число элементов.*

Тогда F имеет как наибольшее только счётное множество различных подклассов.

(*Антицепью* называется подмножество частично упорядоченного множества, состоящее из попарно несравнимых элементов, которых не меньше двух.)

Обратим внимание на свойство (a). Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ не превосходит функцию $g(x_1, \ldots, x_m)$, и писать $f \leq g$, если для любого набора $(a_1, \ldots, a_m)$ из V_3^m выполняется $f(a_1, \ldots, a_m) \leq g(a_1, \ldots, a_m)$.

В *[Карпенко* 2009] показано, что нетрудно подобрать две функции, например, внутреннюю $\cap$ и внешнюю $\cap^{\square}$ конъюнкции (см. раздел 3.3.1) из B_3 такие, что $(x \cap^{\square} y) \leq (x \cap y)$. Из теоремы В.К. Финна о критерии функциональной полноты B_3 следует, что множество внутренних функций B_3^{in} и множество внешних функций B_3^{in} не пересекаются. Это значит, что условие (a) из вышеприведенного критерия счётности в B_3 не выполняется. Однако вышеприведенный критерий счётности составляет всего лишь *необходимое условие.*
Рассмотрим еще одно предположение в пользу континуальности B_3.
Как уже говорилось (см. раздел6.3), в *[Ангиаков и Рычков* 1982] предложен метод гильбертовской аксиоматизации широкого класса многозначных логик, основанный на расширении классической логики $\mathbf{C}_2$. Для этого должны выполняться следующие условия:

(1) Алгебра $< V_n; \vee, \wedge >$ является квазирешеткой;

(2) Наличие всех J_i-операторов;

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = i \\ 0, \text{ если } x \neq i \end{cases} \quad (\text{для всех } i \in V_n);$$

(3) Ограничения операций $\neg, \vee, \wedge, \supset$ на подмножество {0, 1} множества V_n суть обычные классические операции отрицания, дизъюнкции, конъюнкции и импликации соответственно. Логика $\mathbf{B}_3$ все эти условия ыполняет, но не выполняет их логика $\mathbf{G}_3$: не все J_i-операторы здесь имеют место. Однако все J_i -операторы и не нужны, достаточно, J_0 или J_1, поскольку с их помощью строится трехзначный *нормальный изоморф* $\mathbf{C}_2$ (см. раздел 3.3.1). Таким образом, задается некоторый "минимум" функциональных свойств, который достаточен для аксиоматизации некоторой трехзначной логики $\mathbf{L}_3$. Заметим, что логика Холдена $\mathbf{H}_3$ не содержит операторов J_0 и J_1 и поэтому не имеет нормального изоморфа, а значит, не может быть аксиоматизирована как расширение $\mathbf{C}_2$.

7.5.3.1. Гипотеза о критерии континуальности трехзначных логик

В связи со сказанным выше в качестве гипотезы можно сформулировать следующий критерий континуальности трехзначных логик. Пусть $F \subseteq P_3$ и $|F|$ есть мощность множества *F*. Для класса *F, соответсвующего некоторой трехзначной логике* $\mathbf{L}_3$, $|F| = c$ *т.т.т., когда* $\mathbf{L}_3$ *аксиоматизируема как расширение* $\mathbf{C}_2$.
Таким образом, функциональные свойства некоторого множества функций *F* связываются с чисто логическими свойствами класса формул соответствующей логики $\mathbf{L}_3$.

7.5.4. S-классификация

Поскольку не представляется никакой возможности классифицировать континуум замкнутых классов, в конце 70-х - начале 80-х годов XX ст. появились идеи, которые могли бы привести к конечным либо счетным классификациям. Наибольшее распространение получила идея *S*-классификации, основанная на новой операции, названной S-замыканием. Пусть $F \subseteq P_n$. *S-замыканием* множества *F* называется замыкание *F,* которое наряду с любой функцией *f* содержит также все двойственные к ней функции. Показано, что при любом *n, n* ≥ 3, число замкнутых классов в S-классификации конечно, хотя и зависит от *n* эспоненциальным образом.

Например, S-классификация функций трехзначной логики состоит всего из 48 классов и при этом можно обойтись без использования критерия функциональной полноты, основанного на просмотре всех предполных классов. Как раз полному описанию всех этих 48 классов и посвящена работа *[Марченков* 2001].

7.6. Логики Лукасевича $Ł_n$ и простые числа

Здесь нам будет удобней работать со следующей формулировкой конечнозначных логик Лукасевича, которая эквивалентна исходной. Под *n*+1-значной матрицей Лукасевича $\mathfrak{M}^L_{n+1}$ будем понимать матрицу следующего вида:

$$\mathfrak{M}^L_{n+1} = <V_{n+1}, \sim, \to, \{n\}> \quad (n \geq 2, n \in N),$$

где

$$V_{n+1} = \{0, 1, 2, \ldots, n\},$$

{n} — множество выделенных значений.
Функции $\sim x$ и $x \to y$ определяются на множестве V_{n+1} следующим образом:

$$\sim x = n\text{-}x,$$
$$x \to y = min(n, n\text{-}x\text{+}y).$$

Функции $x \vee y$ и $x \wedge y$ определяются через исходные:

$$x \vee y = (x \to y) \to y = max\,(x, y),$$
$$x \wedge y = \sim(\sim x \wedge \sim y) = min\,(x, y).$$

Множество всех суперпозиций функций $\sim x$ и $x \to y$ обозначим посредством $Ł_{n+1}$.
Ранее отмечалось (см. 7.3.3.2.1), что множество функций $Ł_3$ является функционально предполным в P_3, т.е. $Ł_3$ оказалось одним из предполных классов Яблонского, а именно тем, который сохраняет 0 и 2 и обозначается посредством T_3. Таким образом, $Ł_3 = T_3$. Возникает следующий нетривиальный вопрос: каковы функциональные свойства множества функций $Ł_{n+1}$ для любого *n?*

7.6.1. Функциональные свойства $Ł_n$ (теорема В.К. Финна)

Ответ на поставленный выше вопрос дан В.К. Финном в тезисах доклада *[Финн* 1970], а затем опубликовано подробное доказательство в *[Бочвар, Финн* 1972].

Пусть $I_{\xi\eta}(x)$ есть функции, определяемые следующим образом:

$$I_{\xi\eta}(x) = \begin{cases} \eta, \text{если } x = \xi \\ 0, \text{если } x \neq \xi \end{cases} \quad (0 < \xi, \eta < n).$$

Истинностными таблицами, отвечающими указанным функциям, будут таблицы вида

x	0	1	...	i	...	n-1	n
$I_{\xi\eta}(x)$	0	0	...	j	...	0	0,

где $\xi = i, \eta = j, 1 \leq i, j \leq n\text{-}1.$

Обозначим посредством I_{n+1} множество всех $I_{\xi\eta}(x)$-функций, определимых в T_{n+1}.

Лемма 1. *Множество функций* Ł_{n+1} *является функционально предполным в* P_{n+1} *т.т.т,, когда все функцн* $I_{ij}(x),\ 1\leq i,\ j\leq n-1$ *принадлежат* Ł_{n+1}. *Причем, если* Ł_{n+1} *— предполное в* P_{n+1} *множество функций, то* $\text{Ł}_{n+1} = T_{n+1}$ *[Бочвар и Финн* 1972].

Доказательство леммы 1 есть по существу доказательство следующего утверждения: любая функция $f \in T_{n+1}$, которая не равна константе 0, определима посредством суперпозиции $x \vee y, x \wedge y,$ *I*-функций и *J*-функций (эта суперпозиция есть аналог совершенной дизъюнктивной нормальной формы для двузначной логики)

(В связи с этим обратим внимание на следующий результат в *[Бочвар и Финн* 1972, теорема 4]: каждая тождественно неравная 0 функция $f \in \text{Ł}_{n+1}$ имеет *I-J*-совершенную дизъюнктивную нормальную форму т.т.т., когда $n = p^{\beta}$, где *p* — простое число, а β — натуральное число, $\beta \geq 1$. В *[Agitzzzoli, D 'Antona and Marra* 2005], применяя специальную технику *(Bnm hats),* строится аналог булевской СДНФ для Ł_{n+1}, кода *n* есть простое число (вместо дизъюнкции берется функция $x \oplus y =: \sim x \to y$).Здесь же этот результат распространяется на произвольную Ł_{n+1}.)

Таким образом, ответственным за предполноту Ł_{n+1} в P_{n+1} является наличие в Ł_{n+1} множества функций I_{n+1}. Возникает вопрос: для каких *n* имеет место $I_{n+1} \subset \text{Ł}_{n+1}$, т. е. для каких $n\ \text{Ł}_{n+1} = T_{n+1}$?

Лемма 2. $I_{n+1} \subset \text{Ł}_{n+1}$ *т.т.т., когда n есть простое число [Бочвар и Финн* 1972].

Доказательство леммы 2 хотя и весьма громоздко, но является конструктивным, так как указан алгоритм построения суперпозиций исходных базисных функций $\sim x,\ x \to y$, равных соответствующим $I_{\xi\eta}(x)$-функциям. Отсюда, в частности, следует, что при *n = p,* где *p* - простое число, можно указать эффективный способ построения формулы, отвечающей функции $f \in \text{Ł}_{n+1}$, использующий *I*-функции и нормальные формы (I-J-с.д.н.ф.), рассмотренные при доказательстве леммы 1.

Из леммы 1 и леммы 2 получаем теорему, которая дает критерий функциональной предполноты множества функций Ł_{n+1}:

Теорема В.К. Финна. $\text{Ł}_{n+1} = T_{n+1}$*т.т.т., когда для любого* $n \geq 2$ *n есть простое число.*

В итоге мы имеем новое определение понятия простого числа: произвольное натуральное число $n \geq 2$ является простым т.т.т., когда множество всех функций .Ł_{n+1}, соответствующее *n*+1-значным матричным логикам Лукасевича, есть функционально предполное множество в *P*$_{n+1}$, а именно $\text{Ł}_{n+1} = T_{n+1}$.Отсюда следует, что существует бесконечная последовательность p_s+1-значных логик Лукасевича *(p*$_s$ — *s*-е в порядке возрастания простое число в натуральном ряду чисел), которым соответствует последовательность предполных множеств функций, такая, что $\text{Ł}_{p_s+1} = T_{p_s+1}$ для всех *s* =1,2,...

Обратим внимание, что после доказательства В.К. Финна появилось еще два доказательства этой теоремы: *[Hendry* 1983] и *[Urquhart* 1986]. Последнее доказательство целиком основано на критерии Мак-Нотона об определимости функций в Ł_{n+1}. Заметим, что на это уже указывал В.К. Финн (см. *[Финн* 1976]), поскольку из теоремы Мак-Нотона следует утверждение леммы 2. Действительно, $I_{\xi\eta}(x) \in \text{Ł}_{n+1}$ т.т.т., когда наибольший общий делитель чисел *n* и ξ делит нацело η.

Следствия из осмысления теоремы В.К. Финна оказались совсем неожиданными. Получен результат о структурализации простых чисел в виде корневых деревьев и представлен алгоритм, который по каждому простому числу строит его корневое дерево. Построена конечнозначная логика **K**$_{n+1}$ такая, что **K**$_{n+1}$ имеет класс тавтологий т.т.т., когда *n* есть простое число, при этом доказано, что для этого случая **K**$_{n+1}$ есть логика Лукасевича Ł_{n+1}.. Таким образом, дана характеризация простых чисел посредством специального вида логических матриц. Построена функция (штрих) Шеффера для простых чисел, т.е. для классов функций, соответствующих **K**$_{n+1}$. Комбинирование различных алгебро-логических определений простого числа привело к формулировке *алгоритма порождения классов простых чисел.* Также дана характеризация посредством логических матриц степени простого числа, нечетных чисел и, самое сложное, чётных чисел. Всё это изложено в монографии *[Карпенко* 2000] (см. также *[Karpenko* 2006]), название которой было подсказано автору В.К. Финном.

Здесь мы рассмотрим логику **K**$_{n+1}$ и ее функциональные свойства, а также сам алгоритм.

7.6.2. Матричная логика для простых чисел

Если простые числа можно охарактеризовать предполными классами функций, то почему бы не найти характеризацию простых чисел посредством соответствующих классов тавтологий.
Впервые это было сделано в *{Карпенко* 1982; 1989] (см, также *[Karpenko* 1989]), где следующим образом определяется функция $x \rightarrow^{K} y$: $x \rightarrow^{K} y = y$, если $0 < x \leq y < n$ и *x, y* имеют общий делитель; $x \rightarrow^{K} y = x \rightarrow y$ в остальных случаях. Тогда логика **K**$_{n+1}$ отличается от $\mathbf{Ł}_{n+1}$заменой $x \rightarrow y$ на $x \rightarrow^{K} y$.
Однако для более простого доказательства последующих теорем имеет смысл переопределить функцию $x \rightarrow^{K} y$.
Определим матрицу $\mathfrak{M}^{K'}_{n+1}$ следующим образом:

$\mathfrak{M}^{K'}_{n+1} = <\mathrm{V}_{n+1}, \sim, \rightarrow^{K'}, \{n\}> \quad (n \geq 3, n \in N)$, где

$\sim x = n\text{-}x$,

$$x \rightarrow^{K'} y = \begin{cases} x, \textit{ если } 0 < x < y < n, (x, y) \neq 1 \textit{ и } (x + y) \leq n & (i_1) \\ y, \textit{ если } 0 < x < y < n, (x, y) \neq 1 \textit{ и } (x + y) > n & (i_2) \\ y, \textit{ если } 0 < x = y < n & (ii) \\ x \rightarrow y, \textit{ в остальных случаях} & (iii), \end{cases}$$

где $(x, y) \neq 1$обозначает, что *x* и *y* не являются взаимнопростыми числами, а $x \rightarrow y$есть импликация Лукасевича.
Соответствующую матричную логику обозначим посредством $\mathbf{K'}_{n+1}$, а множество всех суперпозиций функций $\sim x$ и $x \rightarrow^{K'} y$ обозначим посредством K'_{n+1}.

Теорема 1. *Для любого* $n \geq 3$ *n есть простое число т.т.т., когда* $n \in K'_{n+1}$ (подробное доказательство см. в *[Карпенко* 2000]).
Таким образом, теорема 1 дает новое определение простого числа. Введя обычным образом пропозициональный язык и функцию оценки *v* на нем, получаем, что матричная логика $\mathbf{K'}_{n+1}$ имеет класс тавтологий т.т.т., когда *n* есть простое число, т.е. каждое простое число определяется соответствующим классом тавтологий. В связи с этим возникает нетривиальный вопрос о функциональных свойствах $\mathbf{K'}_{n+1}$.

Теорема 2. *Для любого* $n \geq 3$*такого, что n есть простое число,* $\mathbf{K'}_{n+1} = \text{Ł}_{n+1}$.

Доказательство.

I. $K'_{n+1} \subseteq \text{Ł}_{n+1}$.

Из определения $x \rightarrow^{K'} y$ следует, что множество функций K'_{n+1} не является функционально полным ни для какого $n \geq 2$. По крайней мере функции $\sim x$ и $x \rightarrow^{K'} y$ сохраняют множество значений {0, *n}*, как и множество функций Ł_{n+1}. Поскольку множество Ł_{n+1} функционально предполно для случая, когда *n* есть простое число (теорема В.К. Финна), то для этого случая $K'_{n+1} \subseteq \text{Ł}_{n+1}$.

II. $\text{Ł}_{n+1} \subseteq K'_{n+1}$.

Надо показать, что функция .$x \rightarrow y$определима посредством суперпозиции $\sim x$ и $x \rightarrow^{K'} y$. Это можно сделать с помощью следующих определений:

$$(A) \;\; x \rightarrow^{1} y = \sim((y \rightarrow^{K'} x) \rightarrow^{K'} \sim(y \rightarrow^{K'} x)) \rightarrow^{K'} (x \rightarrow^{K'} y)$$

$$(B) \;\; x \vee^{1} y = (x \rightarrow^{1} y) \rightarrow^{1} y$$

$$(C) \;\; x \rightarrow^{2} y = \sim(\sim x \rightarrow^{K'} \sim(x \rightarrow^{K'} x)) \rightarrow^{K'} y$$

$$(D) \;\; x \rightarrow^{3} y = ((x \rightarrow^{K'} y) \rightarrow^{2} (\sim y \rightarrow^{K'} \sim x)) \vee^{1}$$

$$(\sim y \rightarrow^{K'} \sim x) \rightarrow^{2} (x \rightarrow^{K'} y)) = x \rightarrow y.$$

Полное доказательство см. в *[Карпенко* 2000], что намного короче, чем доказывать эту теорему с функцией $x \rightarrow^{K} y$.

Теорема 3. *Для любого* $n \geq 3$ *n есть простое число т.т.т,, когда* $K'_{n+1} = \text{Ł}_{n+1}$.

Доказательство;

I. Если $n \geq 3$ есть простое число, то $K'_{n+1} = \text{Ł}_{n+1}$ (теорема 2).
II. Если $K'_{n+1} = \text{Ł}_{n+1}$, то $n \geq 3$ есть простое число. Докажем контрапозицию этого утверждения. Пусть $n \geq 3$ не есть простое число. Тогда из теоремы 1 (необходимость) следует, что $n \notin K'_{n+1}$. Но свойства множества функций Ł_{n+1} такие, что $n \in \text{Ł}_{n+1}$ для любого $n \geq 3$. Следовательно, если $n \geq 3$не есть простое число, то $K'_{n+1} \neq \text{Ł}_{n+1}$.

В заключение определим функцию Шеффера $x \rightarrow^{s} y$ для класса функций K_{n+1} (см. *[Karpenko* 1994; 2006] :

$x \rightarrow^{s} y = \sim(y \rightarrow^{K'} \sim(\sim y \rightarrow^{K'} \sim y)) \rightarrow^{K'} \sim x.$

Теперьпосредством функции $x \rightarrow^{s} y$надо определить функции $\sim x$ и $x \rightarrow^{K'} y$:

$$(a) \;\; \sim x = x \rightarrow^{s} x,$$

$$(b) \;\; n = \sim(x \rightarrow^{s} \sim x) \rightarrow^{s} \sim(\sim x \rightarrow^{s} x),$$

$$(c) \;\; x \rightarrow^{K'} y = \sim y \rightarrow^{s} (n \rightarrow^{s} \sim x).$$

7.6.3. Алгоритм порождения классов простых чисел

Заменим в теореме 2 (II) функцию $x \to^{\kappa'} y$ на функцию $x \to^{\kappa} y.$ Обозначим новую последовательность формул посредством *(A*) -(* D**)*. Нетрудно показать, что тогда формула (D*):

$$x \to^* y = ((x \to^{\kappa} y) \to^2 (\sim y \to^{\kappa} \sim x)) \vee^1$$
$$(\sim y \to^{\kappa} \sim x) \to^2 (x \to^{\kappa} y))$$

определяет импликацию Лукасевича $x \to y$ только для первых пяти нечетных чисел: 3, 5, 7, 11 и 13. Однако если $x < y$ и $(x, y) \neq 1,\ (n\text{-}y,\ n\text{-}x) \neq 1,$ то в общем случае $x \to^* y \neq x \to y.$Например, пусть *n* = 17, *x*= 2 и *y*= 12. Тогда $x \to^{\kappa} y = 12,\ \sim y \to^{\kappa} \sim x = 15,\ 12 \to^2 15 = 15,\ 15 \to^2 12 = 14,\ 15 \vee^1 14 = 15.$ Таким образом,. $x \to^* y = 15,$ в то время как $x \to y = 17.$ Можно показать, что итерация $\mathcal{D}_i\ (i = 1, 2, 3,\ldots)$ формулы (D*) будет задавать *классы простых чисел,* для которых формула $\mathcal{D}_i$ определяет $x \to y.$ Пусть

$$A_0 = ((x \to^{\kappa} y) \to^2 (\sim y \to^{\kappa} \sim x)) \text{ и}$$
$$B_0 = ((\sim y \to^{\kappa} \sim x) \to^2 ((x \to^{\kappa} y)).$$

Тогда

$$\mathcal{D}_0 = A_0 \vee^1 B_0,$$
$$\mathcal{D}_1 = (A_0 \to^2 B_0) \vee^1 (B_0 \to^2 A_0),$$
$$\mathcal{D}_2 = ((A_0 \to^2 B_0) \to^2 (B_0 \to^2 A_0)) \vee^1 ((B_0 \to^2 A_0) \to^2 (A_0 \to^2 B_0))$$

и так далее.

Таким образом, смысл итерации состоит в том, что берется исходная формула $\mathcal{D}_0,$ в ней осуществляется операция замены дизъюнкции $\vee^1$ на импликацию $\to^2$ (эту операцию обозначим посредством: $[\to^2\ /\ \vee^1]),$ затем над полученной формулой производится операция обращения (REV), т.е. импликация записывается в обратную сторону, и, наконец, обе формулы соединяются дизъюнктивно.

Заметим, что дизъюнкцию $\vee^1$ в силу формулы

$$x \vee y = (x \vee^{\kappa} y) \vee^1 (y \vee^{\kappa} x) = max(x, y)$$

можно заменить на обычную дизъюнкцию $\vee,$ что упрощает вычисления. Тогда в общем случае запись итерации выглядит так:

$$\mathcal{D}_i = ([\to^2/\vee]\mathcal{D}_{i\text{-}1}) \vee (\mathrm{REV}([\to^2/\vee]\mathcal{D}_{i\text{-}1})).$$

Обозначим посредством P_i класс простых чисел, при которых $\mathcal{D}_i = x \to y.$ В силу идемпотентности операции $\to^2$ замена дизъюнкции $\vee$ на $\to^2$ сохраняет значения обоих членов дизъюнкции $\mathcal{D}_{i\text{-}1},$ когда они равны, при переходе к $\mathcal{D}_i.$Отсюда следует, что класс $P_{i\text{-}1}$ содержится в P_i. Тогда имеем

$$P_0 = \{3, 5, 7, 11, 13\},$$
$$P_1 = P_0 \cup \{17, 19\},$$
$$P_2 = P_1 \cup \{23, 29, 31, 41, 43, 53, 59, 61\}.$$

С помощью компьютерной программы, написанной В.И. Шалаком в 1995 г., можно вычислить другие P_i. Например,

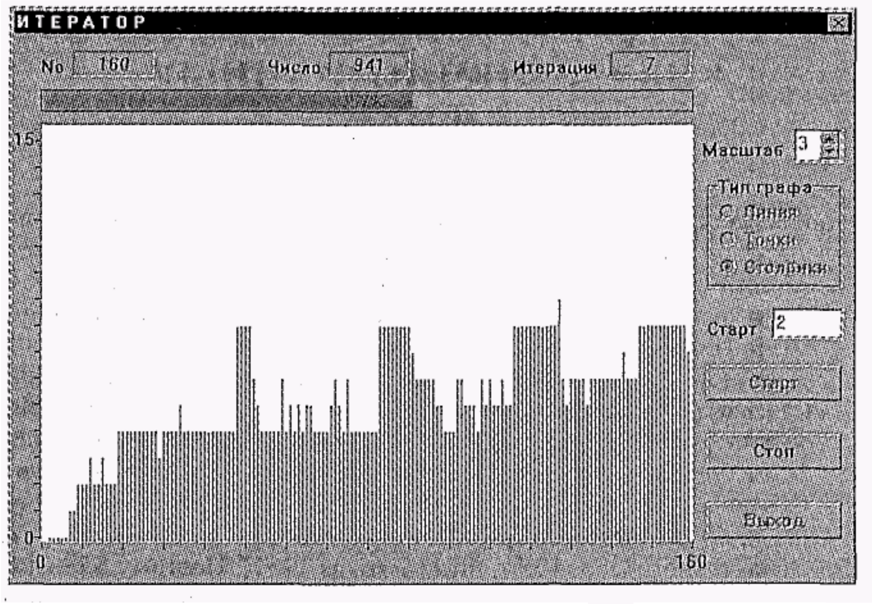
$$P_3 = P_2 \cup \{37, 47, 109\}.$$

Класс P_4, содержит новые простые числа в количестве 51; класс P_5 содержит 21 новое простое число.

Таким образом, для каждого *n* импликации Лукасевича $\mathrm{x} \to \mathrm{y}$ соответствует свой новый класс простых чисел. В результате получаем разбиение множества простых чисел на классы эквивалентности относительно числа итераций. Это разбиение напрямую связано со свойствами импликации Лукасевича.

По существу формула $\mathcal{D}_\mathrm{i}$ является *законом порождения классов простых чисел [Karpenko* 1996]. Подчеркнем, что в силу наличия штриха Шеффера $x \to^s y$ этот закон может описываться итерацией только одной-единственной функции, а именно штриха Шеффера $x \to^s y.$

Для наглядности приведем график для определенного числа простых чисел. По вертикали показано число итераций, по горизонтали - простые числа.



No 160

Число 941

Итерация 7

Масштаб 3

Тип графа
○ Линия
○ Точки
● Столбики

Старт 2

Заметим, что вычислять простые числа по формуле $\mathcal{D}_i$ весьма громоздко и не эффективно, тем более что для этого существует огромное число различных алгоритмов (см. обзор *[Василенко* 1988]). В данном случае нас интересует разбиение простых чисел на классы P_i. И программа В.И. Шалака выполняет именно эту задачу, т.е. $\mathcal{D}_i$ вычисляется только для случаев, когда $n = p$. Поэтому введем функцию *i,* которая по каждому простому числу дает число итераций *i(p).* Можно упростить исходную формулу (D*), заменив в ней вхождения функции $x \rightarrow^2 y$ на $x \rightarrow y$ и при этом рассматривая только случай $0 < x < y < n.$ Однако на компьютерный процесс вычисления это влияет незначительно.

Мы показали, что итерация $\mathcal{D}_i$ порождает классы простых чисел, но встает принципиальный вопрос: порождаются ли *все* простые числа? На этот вопрос дает ответ

Теорема 4. *Каждое простое число (кроме 2) содержится в некотором классе* P_i *[Карпенко* 1997].

---

8. Бесконечнозначные логики

Мир бесконечнозначных логик исключительно широк. На самом деле этот универсум, как мы увидим, *континуален.* Рассмотрим наиболее известные и важные примеры бесконечнозначных логик,

Однако существует проблема, что считать бесконечнозначной логикой. Например, матрица, полученная в результате счетного числа умножений матрицы $\mathfrak{M}_2^c$ классической двузначной логики высказываний **C**$_2$ саму на себя имеет $2^{\aleph_0}$ истинностных значений, т.е. континуальна, и эта матрица является характеристической для **C**$_2$. Это же число истинностных значений имеет и модальная логика **S**5 в интерпретации А. Прайора (см. ниже). Но отличие между логиками **C**$_2$ и **S**5 весьма существенно: **S**5 вообще не имеет конечной характеристической матрицы *[Scroggs* 1951]. Поэтому **S**5 является бесконечнозначной логикой. Другим примером бесконечнозначной матрицы, а вернее, бесконечной последовательности конечных матриц, является последовательность матриц **C**. Яськовского (см. раздел 4.3.2), которая является характеристической для интуиционистской логики **Int.** Заметим, что первоначально не было ясно, является ли **Int** конечнозначной логикой или бесконечнозначной. В одних книгах по многозначным логикам рассматриваются модальные льюисовские системы и **Int,** в других нет. Но мы уже знаем, как из **Int** получается трехзначная логика Рейтинга **G**$_3$ (см. раздел 3.2), из **S5**-четырехзначная логика **V2** (см. раздел 5.4.3.1), а из релевантной логики **R** — трехзначная паранепротиворечивая логика **RM3** (см. раздел 3.5.2.1). Поэтому кратко рассмотрим эти логики наряду с другими.

Начнем с наиболее известной и самоочевидной бесконечнозначной логики, которая носит имя Лукасевича.

8.1. Бесконечнозначная логика Лукасевича Ł_∞

Простым способом построения бесконечнозначной логики является следующее естественное обобщение классических операций:

$$\neg x = 1 - x,$$

$$x \vee y = max(x, y),$$

$$x \wedge y = min(x, y),$$

$$x \supset y = \neg x \vee y = max(1\text{-}x, y),$$

Тогда бесконечнозначную логику можно задать следующей матрицей:

$$\mathfrak{M}_\infty^K \;\; = <[0,1], \neg, \vee, \wedge, \supset, \{1\}>.$$

Обратим внимание, что хотя операции определяются точно так же, как и в классической логике **C**$_2$, тем не менее обобщение **C**$_2$ оказалось совсем «не классическим», поскольку даже формула $p \supset p$ не является законом. И вообще, здесь нет тавтологий. Если ограничимся тремя истинностными значениями, то получим трехзначную логику Клини **K**$_3$. В связи с этим понятно замечание, сделанное в *[Dorning, Trilles and Valverde* 1981], что импликация Лукасевича → была введена из-за того факта, что естественное обобщение классической булевой операции в многозначной логике не удовлетворяет *принципу тождества* $x \to x = 1$ для всех $x \in [0, 1]$.

Бесконечнозначная логика Лукасевича Ł_{∞} является исторически первым примером логики, в которой явно определено бесконечное (счетное или континуальное) множество истинностных значений. Само понятие бесконечнозначной логики введено Я. Лукасевичем в *[Lukasiewicz* 1929] (см. в особенности *[Lukasiewicz and Tarsia* 1930]). Обобщение конечнозначной логики Лукасевича Ł_{n} (см. выше раздел 5.1.1) на бесконечнозначный случай Ł_{∞} не составляет труда, поскольку символ *n* не входит в определение логических операций в $\mathfrak{M}^{L}_{\infty}$. Поэтому равенства для отрицания ~ и импликации → сохраняются; в качестве истинностных значений для счетнозначной логики берется множество рациональных чисел из отрезка [0, 1], а для континуальной логики - множество действительных чисел в отрезке [0, 1]. Полученную матрицу обозначим посредством $\mathfrak{M}^{L}_{\infty}$:

$$\mathfrak{M}^{L}_{\infty} = < [0,1] \sim, \to, \{1\} >,$$

где ~ есть унарная и → бинарная операции отрицания и импликации соответственно, определенные на множестве [0,1] следующим образом:

$$\sim x = 1 - x,$$

$$x \to y = min(1,\ 1 - x + y).$$

Операции дизъюнкции и конъюнкции вводятся, как и для Ł_{n}, по определению:

$$x \vee y = (x \to y) \to y = max(x, y),$$

$$x \wedge y = \sim(\sim x \vee \sim y) = min(x, y).$$

Функция оценки (гомоморфизм) *v* формул пропозиционального языка $\mathcal{L}$ в матрицу $\mathfrak{M}^{L}_{\infty}$ определяется аналогичным образом, как и для Ł_{n}. Формула *A* является тавтологией в матрице $\mathfrak{M}^{L}_{\infty}$, если *v(A)* = 1 для любой функции оценки *v* в матрице $\mathfrak{M}^{L}_{\infty}$. Бесконечнозначная матричная логика Лукасевича Ł_{∞} есть множество тавтологий в $\mathfrak{M}^{L}_{\infty}$.

А. Линденбаум установил *[Lukasiewicz and Tarski* 1930], что как счетнозначная логика, так и континуальная логика Лукасевича имеют одно и то же множество тавтологий. Следующий результат принадлежит *Я.* Лукасевичу *[Lukasiewicz and Tarski* 1930]:

$$\text{Ł}_{\infty} = \prod_{1 \le n < \aleph_0} \text{Ł}_{n}. \quad \mathbf{2}$$

Там же Лукасевич выдвинул гипотезу, что Ł_{∞} аксиоматизируется с правилом подстановки и *modus ponens* посредством следующих аксиом:

Ł1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

Ł2. $p \to (q \to p)$

Ł3. $((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p)$

Ł4. $(\sim p \to \sim q) \to (q \to p)$

Ł5. $((p \to q) \to (q \to p)) \to (q \to p)$.

Эта гипотеза была подтверждена М. Вайсбергом *[Wajsberg* 1935], но доказательства не сохранилось. Позже оказалось, что аксиома (Ł5) не является независимой. Различные доказательства этого факта были получены одновременно и независимо друг от друга К.А. Мередитом *[Meredith* 1958] и Ч.Ч. Чэном *[Chang* 1958]. Таким образом, аксиоматизация Ł_{∞} получается из аксиоматизации Ł_{3} (см. раздел 2.4) посредством замены аксиомы (W4) на аксиому (Ł3). Наконец, А. Роуз и Дж. Россер *[Rose and Rosser* 1958] опубликовали доказательство полноты (Ł1) – (Ł5) относительно $\mathfrak{M}^{L}_{\infty}$.

Таким образом, логическая матрица $\mathfrak{M}^{L}_{\infty}$ является характеристической для исчисления Ł_{∞}, т.е. Ł_{∞} имеет бесконечную характеристическую матрицу и, как показал А. Уркварт *[Urquhart* 1986], для Ł_{∞} нет конечной характеристической матрицы.

Отметим, что предложенное доказательство полноты Ł_{∞} весьма громоздко (45 страниц) и к тому же существенно опирается на критерий Р. Мак-Нотона *[McNaughton* 1951] об определимости операций в бесконечнозначной матрице Лукасевича $\mathfrak{M}^{L}_{\infty}$. Имея в виду исключительную важность этой теоремы Мак-Нотона для исследования свойств Ł_{∞}, приведем необходимую формулировку:

Функция $f(x_1, \ldots, x_k)$ *определима в* $\mathfrak{M}^{L}_{\infty}$ *посредством функций ~ и → т.т.т., когда;*

(i) *f является непрерывной и* $0 \le f(x_1, \ldots, x_k) \le 1$, *где* $0 \le x_i \le 1,\ i = 1, \ldots, k;$

(ii) *существует конечное число отличных друг от друга полиномов* $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$, *каждый из которых имеет форму* $\lambda_j = b_j + m_1 x_1 + \dots + m_{k_j} x_k$, где все *b и m — такие целые числа, что для каждого набора* $(x_1, \dots, x_k)$, $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, k$, *существует* j, $1 \leq j \leq \mu$, *такое, что* $f(x_1, \dots, x_k) = \lambda_j(x_1, \dots, x_k)$;

(iii) *для произвольных* x_i, $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, k$ *имеют место неравенства* $0 \leq f(x_1, \dots, x_k) \leq 1$.

У Р. Мак-Нотона доказательство не является конструктивным, однако имеется конструктивное доказательство этой теоремы (см. *[Mundici* 1994]).

Как отмечается в *[Aguzzoli and Ciabattoni* 2000], в настоящее время $Ł_\infty$ не имеет хорошо разработанной теории доказательств, хотя в литературе встречаются различные (секвенциальные) исчисления для $Ł_\infty$.

(Тем не менее для $Ł_\infty$ сконструирован прувер *[Beavers* 1993]. См. также *[Met-calfe, Olivetti and Gabbay* 2005].)

Однако эти исчисления или не являются аналитическими, т.е. содержат слишком мало информации о конструкции доказательств в $Ł_\infty$ (см. *[Takahashi* 1970], *[Prijatelj* 1996], *[Ciabattoni and Luchi* 1997]), или не являются внутренними, т.е. требуют совершенно посторонних средств (см. *[Hah-nle* 1994] и *[Mundici and Olivetti* 1998]). В свою очередь, в *[Aguzzoli and Ciabattoni* 2000] строится секвенциальное исчисление для $Ł_\infty$, позволяющее редуцировать понятие логического следования в $Ł_\infty$ к тому же самому понятию в подходящих *конечных* множествах логик $Ł_n$. В результате исчисление является аналитическим и имеет дело только с формулами логики. К тому же все манипуляции при доказательстве являются синтаксическими и совсем не включают каких-либо алгебраических или геометрических вычислений.

Также стоит добавить, что в указанной работе значительно улучшается результат Д. Мундичи *[Mundici* 1987], впервые установившего, что проблема разрешимости в $Ł_\infty$ может быть редуцирована к той же самой проблеме в подходящем множестве логик $Ł_n$. Усиление результата состоит в том, что общезначимость формулы α в $Ł_\infty$ может быть проверена в *точно одной* конечнозначной логике $Ł_n$, и при том для *n* меньше $2^{\#(\alpha)} + 1$, где $\#(\alpha)$ обозначает общее число вхождений переменных в α.

А теперь несколько замечаний о применении $Ł_\infty$. Исследования Р. Джайлса *[Giles* 1976] в поисках подходящей логики для формализации физических теорий с неопределенными высказываниями привели к весьма убедительной философской интерпретации счетнозначной логики Лукасевича $Ł_\infty$, которая имеет

(субъективный) вероятностный характер. В работе *[Pykacz* 1994] показана связь $Ł_\infty$ с аксиоматикой квантовой механики. Особое место занимает $Ł_\infty$ в исследовании *нечетких* (fuzzy) логик (см. следующую главу). Сама по себе нечеткая логика, построенная на основе некоторой теории нечетких множеств, является по существу многозначной логикой. Поскольку в основе нечетких множеств Заде *[Zadeh* 1965] лежит множество чисел в интервале [0, 1], то это дало повод считать, что нечеткой логикой является именно континуальная логика Лукасевича $Ł_\infty$. Например, Джайлс *[Giles* 1976] утверждает, что $Ł_\infty$ относится к теории нечетких множеств точно так же, как классическая логика к обычной теории множеств. Такого же мнения придерживается и Х. Скала *[Skala* 1978]. Моделированию нечетких и неопределенных рассуждений посредством $Ł_\infty$ посвящена также значительная часть монографии П. Хаека *[Hajek* 1998].

Интерес вызывает предикатная бесконечнозначная логика Лукасевича $\forall Ł_\infty$. Квантор $\forall$ является инфинитарным обобщением конъюнкции $\wedge$, а квантор $\exists$ является инфинитарным обобщением дизъюнкции $\vee$. Долгое время оставалась нерешенной проблема адекватной аксиоматизации для $\forall Ł_\infty$. В *[Scarpellini* 1962] доказано, что множество общезначимых формул в $\forall Ł_\infty$ не является рекурсивно перечислимым, т.е. $\forall Ł_\infty$ не имеет конечной аксиоматизации (см. также *[MostoM'ski* 1964: 72]).

(В связи с этим интересная проблема поставлена В.Н, Гришиным *[Гришин* 1974]. Берется классическое исчисление предикатов Генцена **LK** *[Генцен* 1967] без правил сокращения. Такая логика обозначается посредством $Ł^{\circ}$. В силу результата *[Scavpellini* 1962] следует, что $Ł^{\circ}$ слабее $\forall Ł_\infty$. Можно ли добавить к $Ł^{\circ}$ какое-нибудь множество (бесконечное) правил так, чтобы получилась логика $\forall Ł_\infty$? В.Н. Гришин показал, что в $Ł^{\circ}$ класс всех аксиом свертывания непротиворечив, а сама $Ł^{\circ}$ разрешима.)

Аналогичные этому две аксиоматизации были представлены в *[Belhtce and Chang* 1963] и *[Hay* 1963]. Подробно о проблемах аксиоматизации $\forall Ł_\infty$ см. в *[Gottwald* 2001].

Повышенный интерес к $\forall Ł_\infty$ обусловлен тем, что в 1958 г. Т. Скулем показал, что полная аксиома свертывания является $\forall Ł_\infty$-непротиворечивой для теории множеств (упрощенное доказательтво см. в *[Fenstad* 1964]). Подробно об этом и других результатах см. в *[Gottwald* 2000]. Дополнительную информацию об аксиоматизации $\forall Ł_\infty$ и использовании нечетких логик в теории множеств см. в *[DiNola, Georgescu andSpada 2008].*

8.1.1. Алгебраизация $Ł_{\infty}$

Целое направление в алгебраической логике было основано работой Ч.Ч. Чэна *[Chang* 1958], в которой вводится понятие *MV-алгебры.* Основной целью Чэна была разработка алгебраического аппарата, подходящего для изучения бесконечнозначной пропозициональной логики Лукасевича $Ł_{\infty}$, точно так же, как булева алгебра стала инструментом для изучения свойств классической пропозициональной логики. В итоге Чэн дает чисто алгебраическое доказательство полноты $Ł_{\infty}$(см. также *[Chang* 1959]).

Многообразие, порожденное структурой $<[0,1], \oplus, \otimes, \neg, 0, 1>$, называется *MV*-алгеброй, где

$$\neg x = 1 - x,$$

$$x \oplus y = \neg x \to y = min(1, x+y),$$

$$x \otimes y = \neg(\neg x \oplus \neg y) = max(0, x+y-1).$$

Аксиоматизация *MV* -алгебры Ч.Ч.Чэном содержит 22 тождества и была упрощена П.Мангани *[Mangani* 1973] до 9 тождеств следующим образом. Алгебра $A = <A, \oplus, \otimes, \neg, 0, 1>$есть *MV* -алгебра т.т.т., когда она удовлетворяет следующим тождествам:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
2. $x \oplus y = y \oplus x$
3. $x \oplus 0 = x$
4. $x \oplus 1 = 1$
5. $\neg 0 = 1$
6. $\neg\neg x = x$
7. $x \oplus \neg x = 1$
8. $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus \mathrm{x}) \oplus x$
9. $x \otimes y = \neg(\neg x \oplus \neg y)$

(Тождества (6) и (7) можно заменить на тождество $\neg 1 = 0$(см. *[Cignoli* and *Mimdici* 1998]).**)**

Заметим, что аксиомы (1)-(3) устанавливают, что $<A, \oplus, 0>$ есть абелев моноид.

В *[Cattaneo and Lombardo* 1998] дана независимая аксиоматизация *MV* -алгебр:

1. $(x \oplus y) \oplus z) = y \oplus (z \oplus x)$
2. $x \oplus 0 = x$
3. $x \oplus \neg 0 = \neg 0$
4. $\neg\neg x = x$
5. $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(x \oplus \neg y) \oplus x.$

В языке *MV* -алгебр можно определить следующие операции:

$$x \vee y = (x \otimes \neg y) \oplus y,$$

$$x \wedge y = (x \oplus \neg y) \otimes y.$$

Тогда для каждой *MV* -алгебры редукт $<A, \vee, \wedge, 0, 1>$ есть ограниченная дистрибутивная решетка.

Ч.Ч. Чэн показал *[Chang* 1958], что булева алгебра совпадает с *MV* -алгеброй, если в последней имеет место идемпотентность $x \oplus x = x$.

В свою очередь, Р. Григолия *[Grigolia* 1977] на основе *MV* -алгебры строит *MV* $_n$-алгебры для изучения конечнозначных логик Лукасевича $\mathbf{Ł_n}$, откуда, например, следует, что алгебраическим примером $\mathbf{Ł_3}$ является *MV* -алгебра, если в последней имеет место $x \oplus x = x \oplus x \oplus x.$

Примеры. Пусть *G* есть решеточно-упорядоченная абелева группа (*l*-группа). Для каждого $u \in G,\ u > 0$, пусть $[0,\ u] = \{x \in G \mid 0 \le x \le u\}$, и для каждого $x,\ y \in [0,\ u]$, пусть $x \oplus y = u \wedge (x + y), \neg x = u - x, 1 = u = \neg 0$ и $x \otimes y = 0 \vee (x + y - u)$.

Нетрудно видеть, что $<[0, u], \neg, \oplus, \otimes, 0, 1>$ есть *MV* -алгебра, которая обозначается **Г***(G, u).* Если *G* = **R** (= аддитивная группа действительных чисел с естественным порядком и *u*= 1, тогда **Г** (**R**, 1) совпадает с *MV* -алгеброй [0, 1], представленной выше.

MV -алгебра называется *линейной* т.т.т., когда определенное на ней отношение частичного порядка $x \le y$ является также отношением линейного порядка: $x \le y$ или $y \le x$.

Главным алгебрическим результатом для логики является

Теорема представления Чэна. *Каждая MV-алгебра изоморфна подпрямому произведению линейно-упорядоченных MV-алгебр, т.е. дефинициальным вариантам матриц Лукасевича для* $Ł_{\infty}$.

Пусть t_1 и t_2 термы в языке *WV* -алгебры. Тогда равенство $t_1 = t_2$ имеет место во всех *MV* -алгебрах т.т.т., когда оно имеет место во всех линейно-упорядоченных *MV*- алгебрах.

Теорема полноты. *Равенство* $t_1 = t_2$ *имеет место в* [0, 1] *т.т.т., когда оно имеет место в каждой MV-алгебре.*

После доказательства полноты Чэном, являющегося теоретико-модельным и использующим элиминацию кванторов, появился целый ряд других доказательств: *[Cignoli* 1993], где используется представление свободных абелевых *l*-групп; *[Panti* 1995], предложившем геометрическое доказательство; наконец, в *[Cignoli and Mundici* 1997] дается доказательство теоремы Чэна о полноте, требующее лишь элементарных знаний алгебры.

Изучение алгебраических свойств Ł_∞ шло и по другому направлению. Ю. Комори *[Komori* 1978] вводит понятие *CN-алгебры* и в последней работе изучает их некоторые алгебраические свойства, чтобы исследовать *расширения* Ł_∞ (к этому вопросу мы вернемся ниже).

Систематическое изучение этих алгебр под названием *«алгебр Вайсберга» (W-алгебры)* было предпринято в *[Rodriguez* 1980]. Часть этих результатов опубликована в *[Font, Rodriguez and Torrens* 1984], где показано, что W-алгебры эквивалентны (взаимно определяемые) *MV*-алгебрам. Также в *[Rodriguez* 1980] дана характеризация конечнозначных логик Лукасевича Ł_n посредством *n*-элементных алгебр Вайсберга. Преимущество *W*-алгебр перед *MV* -алгебрами в том, что они формулируются в терминах импликации → и отрицания ¬ и поэтому их логический смысл более ясен. ,

Алгебра $\boldsymbol{A} = <A, \to, \neg, 1>$ есть W-алгебра т.т.т., когда она удовлетворяет следующим тождествам:

$$\text{W1. } 1 \to x = x.$$

$$\text{W2. } (x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$$

$$\text{W3. } ((x \to y) \to y) = ((y \to x) \to x)$$

$$\text{W4. } (\neg x \to \neg y) \to (y \to x) = 1.$$

Доказательство эквивалентности *MV* -алгебр и *W-алгебр* основано на следующих равенствах: $x \to y = \neg x \oplus y$, $x \oplus y = \neg x \to y$ и $x \otimes y = \neg(x \to \neg y)$. Поскольку в W-алгебре имеет место

$$x \vee y = (x \to y) \to y;\ x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y);\ \ 0 = \neg 1,$$

то $< A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1>$ есть алгебра де Моргана.

Примером W-алгебры является алгебра Линденбаума пропозиционального исчисления Ł_∞. Другим примером является матрица $\mathfrak{M}^{L}{}_{\infty}$.

С другой стороны, алгебры Вайсберга могут быть получены дуальным образом, если идти от *ВСК-алгебр.* Последние были введены в *[Isiki 1966]* как алгебраический пример для **ВСК**-логики:

$$\textbf{B.}\ \ (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

$$\textbf{C.}\ \ (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$$

$$\textbf{K.}\ \ p \to (q \to p).$$

Правила вывода: MP и подстановка. В *[Wronski* 1983] показано, что *ВСК*-алгебра не является многообразием, т.е. ее нельзя задать в виде одних тождеств. В *[Tanaka* 1975] было введено понятие *коммутативной В*СК-алгебры, а в *[Yutairi* 1977] показано, что коммутативная *ВСК* -алгебра является многообразием:

$$(1)\ \ x * x = 0$$

$$(2)\ \ x * 0 = x$$

$$(3)\ \ (x * y) * z = (x * z) * y$$

$$(4)\ \ x * (x * y) = y * (y * x).$$

Эта аксиоматика независима.

В *[Iseki and Tanaka* 1978] развиты основные свойства *ВСК*-алгебр и введено понятие *ограниченной коммутативной ВСК-алгебры,* т.е. добавлена 1. Здесь показано, что ограниченная коммутативная *ВСК-алгебра* образует дистрибутивную решетку, а с условием

$$x = x * (y * x)$$

она есть булева алгебра.

Если к аксиомам коммутативной *ВСК-алгебры* добавить аксиому

$$(5)\ \ x * 1 = 0,$$

то получим аксиоматизацию ограниченной коммутативной *ВСК*-алгебры *[Traczyk* 1979].

Заметим, что в *[Rodriguez* 1980] коммутативные *ВСК* -алгебры выступают под названием «алгебры Сэйла». Из результатов этой работы, а также из работы *[Romanowska and Traczyk* 1980] следует, что ограниченная коммутативная *ВСК-алгебра* есть W-алгебра. В последней работе указанные алгебраические структуры изучались как дуальные друг к другу.

Обратим внимание, что в *[Buff 1985]* совершенно независимым образом была введена ограниченная коммутативная *ВСК* -алгебра (под другим названием) и доказана эквивалентность с *MV*-алгебрами Чэна. Таким образом, *MV* -алгебры и ограниченные коммутативные *ВСК-апгебры* эквивалентны. Специально этому вопросу посвящена статья Д. Мундичи *[Mundici* 1986].

Перечисленные алгебраические структуры, эквивалентные *MV* -алгебрам, отнюдь не единственные, а только лишь первоначально открытые. *MV* -алгебры под названием «symmetric brick» были переоткрыты *[Bosbach* 1981] в формулировке П. Мангани. Эта

структура была получена в ходе исследования определенных решеточно-упорядоченных групп (*l*-групп).
Начиная с фундаментальной работы Д. Мундичи *[Mundici* 1986], интерес к теории *MV* -алгебр и к самой Ł_∞ повысился чрезвычайно в силу глубоких связей, которые она имеет с функциональным анализом *(AF* С*-алгебры); с теорией кодирования *[Mundici* 1992], с квантовой физикой *[Mundici* 1993], с геометрией *[Mundici* 1996]. Была доказана эквивалентность *MV* -алгебр другим важным алгебраическим структурам (см. *[Hoo* 1990], *[Di Nola and Lettieri* 1994] и *[Cignoli and Mvndici* 1997]). Н.Г. Мартинез *[Martinez* 1990] доказал для *W*-алгебр теорему типа стоуновского представления. Отметим также, что теории *MV* -алгебр посвящен специальный выпуск журнала *«Mathware & Soft Computing»,* 1995, Vol. II, No. 3. В предисловии здесь указывается (с приведением соответствующей литературы) на глубокую связь теории *MV* -алгебр с теорией нечетких множеств, аналогичную связи булевых алгебр с обычной теорией множеств. См. также монографию П. Хаека *[Hajek* 1998]. (Этот аспект логики Ł_∞ мы рассмотрим в следующей главе). Наконец, сошлемся на книгу *[Cignoli, D'Ottaviano and Mun-dici* 2000], полностью посвященную алгебраическому рассмотрению бесконечнозначной логики Лукасевича, и на статью *[Магга and Mundici* 2003], где рассматриваются последние результаты в этой области.
Заметим, что интерес к алгебраическим исследованиям Ł_∞ и родственным ей системам только возрастает. В последнее время в отдельное направление сложилось исследование *некоммутативных MV-алгебр {псевдо MV -алгебры) [Georgescu and Iorgulescu* 1999]. В результате появилась пропозициональна некоммутативная бесконечнозначная логика Лукасевича *[Leustean* 2006].

8.1.2. Изменение множества истинностных значений

Обратим также внимание на два расширения Ł_∞, связанных с введением отрицательных чисел. В первом случае (см. *[Chang* 1963]), в качестве множества истинностных значений берется замкнутый' интервал $[-1,\ +1]$ и исследуется логикаи Ł^* соответствущие ей *MV* -алгебры. Во втором случае (см. *[Карпенко* 1985] и *[Karpenko* 1988]) в качестве множества истинностных значений берется множество с порядковым типом $\omega + \omega^*$,т. е.
$\Sigma = \{0^+, 1, 2, 3, \ldots \qquad \ldots, -3, -2, -1, 0^-\}.$
Строится логика Ł_Σ и для нее фактор-семантика (см. подробно в разделе 10.6.1).

В обоих случаях происходит расширение исходной логики Ł_∞, но с теми же самыми логическими связками, лишь «приспособленными» к новому множеству истинностных значений. Расширение же Ł_∞ новыми логическими связками мы рассмотрим ниже (см. раздел 8.3).

8.2. Интуиционистская логика Int и класс суперинтуиционистских логик

Первая серьезная критика классической логики привела к созданию логической системы, не только разрушившей диктат одной логики, но приведшей впоследствии к открытию *континуальности логического универсума.*

8.2.1. Появление Int

Интуиционистская логика **Int** первоначально возникла как логика интуиционистской математики, но впоследствии получила более широкое применение как чисто логическое, так и философское. Основоположником направления явился голландский ученый Л.Э.Я. Брауэр (1881-1966), который поставил себе целью полностью освободить математику от трудностей, связанных с канторовским учением о множествах. В собственной программе, названной им *«интуиционистской»,* Брауэр предложил строить математику на базе интуитивно ясных потенциально осуществимых «умственных математических построений», совершенно не прибегая при этом к представлению о «множестве». Критике подверглось, в первую очередь, классическое понятие *существования.* Интуиционистское доказательство предложения «существует такое *n*, что *P(n)»* должно быть *конструктивным* в следующем смысле: это доказательство действительно представляет пример такого *n,* что P(*n*), или, по крайней мере, указывает *метод,* позволяющий в принципе найти такой пример. Классическое понимание, говорящее, что где-то в завершенной бесконечной совокупности всех натуральных чисел встречается такое *n,* что P(*n*), для них не годится, поскольку они не рассматривают натуральные числа как образующие завершенную совокупность. В ходе реализации этой программы Брауэр сделал выдающееся открытие, совершившее переворот в логике. В 1908 г, он публикует на голландском языке статью под вызывающим названием: «О достоверности логических принципов» (см, англ. пер. *[Brouwer* 1975]), где обосновывает, что при интуиционистском понимании суждений *закон исключенного третьего* $p \vee \neg p$, а вместе с ним и метод «от противного» *(reductio ad absurdum)* утрачивают традиционно приписывающийся им статус общелогических норм. Ложность отрицания указывает на недостаточность истинности и поэтому не влечет истинности утверждения. Отсюда классический закон снятия двойного отрицания $\sim\sim p \Rightarrow p$ также отбрасывается. Таким образом, рядом с классической логикой, переставшей теперь быть *единственной* наукой о способах рассуждений, возникла новая, итуционистская, логика.

8.2.2. Основные свойства Int

Обратим внимание, что после работы Брауэра потребовалось разъяснение сложившейся ситуации и первой попыткой такого рода стала известная работа А.Н. Колмогорова «О принципе *tertium non datum* [*Колмогоров* 1925], где впервые дается (частичная) аксиоматизация интуционистской логики (**Int**) и впервые проводится погружение классической пропозициональной логики **C**$_2$ в **Int**. В свою очередь, В.И. Гливенко в 1928 г. (см. русс. пер. [*Гливенко* 1998]) опровергает гипотезу о трехзначночности **Int**, а в 1929 г. доказал фундаментальный факт об **Int**: произвольная пропозициональная формула *A* классически доказуема, если и только если $\neg\neg A$ доказуема в **Int** (см. русс. пер. [*Гливенко* 1998]).

Уже к концу 20-х годов логика **Int**, устоялась настолько, что ученик Брауэра А. Рейтинг в работе [*Heyting* 1930] смог представить ее как дедуктивную систему. Например, аксиоматизация **Int**, как уже говорилось, получается из аксиоматизации классической логики **C**$_2$, в формлировке С.К. Клини (см. выше раздел 1.4), посредством замены закона снятия двойного отрицания $\sim\sim p \supset p$ на закон Дунса Скота $p \supset (\sim p \supset q)$; или она может быть представлена посредством удаления из **C**$_2$ закона исключенного третьего.

Гёдель установил [*Godel* 1933] (без доказательства), что **Int** обладает *дизъюнктивным свойством:* если $A \vee B$~ выводима, то хотя бы одна из формул *A* или *B* выводима. Очевидно, **C**$_2$ не обладает таким свойством. Это свойство выражает тот факт, что дедуктивный аппарат интуиционистского исчисления высказываний согласован с содержательным конструктивным пониманием дизъюнкции: доказать $A \vee B$ означает доказать хотя бы одну из этих формул. Заметим, что с помощью этого свойства просто доказывается теорема об отсутствии конечной характеристической матрицы для **Int** (см. ниже).

Первые результаты исследования **Int** оказались весьма необычными. Напомним, что трехзначная логика **G**$_3$ (см. выше раздел 3.2) выступает

в качестве модели для **Int** в [*Heyting* 1930], но никакая трехзначная матрица не является характеристической для логики **Int**. В [*Gddel* 1932] К. Гёдель показал, что **Int** не имеет конечной характеристической матрицы, а между **Int** и **C**$_2$ существует счетная последовательность матричных конечнозначных логик $\mathbf{G_3}, \ldots, \mathbf{G_n}$.

Понадобятся следующие свойства:

(1) в каждой модели $\mathfrak{M}$ для **Int:**$x \Rightarrow x = 1$ и $1 \vee x = x \vee 1 = 1.$

. (2) если $i \neq j,$ то формула $p_i \Rightarrow p_j$ не выводима в **Int**

Метод доказательства состоит в конструировании для каждого натурального числа *n* > 1 недоказуемой в **Int** формулы *A* такой, что *A* общезначима во всех *n*-значных моделях **Int**. В качестве такой формулы Гёдель предлагает следующую конструкцию. Из пропозициональных переменных $p_1, \ldots, p_{n+1}$ образуются всевозможные импликации вида $p_i \Rightarrow p_j$, которые затем соединяются в произвольном порядке знаками дизъюнкции. Полученную формулу обозначим посредством D_n :

$$D_n = \bigcup_{1 \leq l<j \leq n} (p_i \Rightarrow p_j).$$

Допустим, что существует *n*-значная матрица $\mathfrak{M}_n$, которая, является характеристической для **Int**. Заметим, что формула D_{n+1} общезначима в $\mathfrak{M}_n$. Это следует из того, что в матрице $\mathfrak{M}_n$ только *n* элементов, а в D_{n+1} имеется (*n*+1) переменных. Поэтому найдутся такие k и $l\ (1 \leq k < l \leq n),$ что $x_k = x_l.$ Тогда $x_k \Rightarrow x_l = 1$ (см. выше свойство (1)). Таким образом, формула D_{n+1} общезначима. Так как $\mathfrak{M}_n$ является по допущению характеристической матрицей, то тогда D_{n+1} выводима в **Int**. Но поскольку **Int** обладает дизъюнктивным свойством, тогда в D_{n+1} должна найтись и выводимая импликация $p_i \Rightarrow p_j$,где $i \neq j,$ что противоречит (2).

Подобная конструкция затем часто применялась при доказательстве отсутствия конечной характеристической матрицы для той или иной логики.

Напомним, что С. Яськовский показал \[*Jaskowski* 1936], что многозначной семантикой для **Int** является бесконечнозначная последовательность конечнозначных матриц (см. выше раздел 4.3.2). Отсюда следует разрешимость **Int**. Это является классическим примером интересного феномена: бесконечнозначная логика финитно аппроксимируется последовательностью конечнозначных логик. Развитие этого результата для других логик см. в [*Baaz and Zach* 1994] и [*Gottwald* 2001. Нельзя не отметить следующий результат А. Вроньского: никакая счетнозначная матрица не является адекватной для доказательства строгой полноты **Int** [*Wronski* 1974]. Таким

образом, логика **Int** является *существенно* континуальной, в отличие от $\mathbf{C}_2$, которая является *существенно* двузначной.
В *[McKinsey* 1939] было доказано, что, в отличие от $\mathbf{C}_2$, операции $\neg, \Rightarrow, \vee, \wedge$ в **Int** невыразимы друг через друга. Таким образом, в отличие от $Ł_\infty$, в **Int** нельзя взять за исходные связки отрицание и импликацию. Однако для **Int** найдены аналоги штриха Шеффера (см. *[Кузнецов* 1965]). Также отметим, что один из законов Де Моргана не имеет места в **Int**, а именно:
$\neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q).$
Заметим, что предикатная **Int** в ряде случаев отличается от классической логики. Например, хотя оба исчисления неразрешимы, интуиционистская логика одноместных предикатов тоже неразрешима в отличие от классического одноместного исчисления предикатов.

8.2.2.1. Философская интерпретация Int (семантика возможных миров)

В 1954 г. появляется концепция реляционной модели у А. Прайора, а в 1957 г. в работах С. Кангера и Я. Хинтикки, пока С. Крипке не выразил эту идею в 1959 г., а затем в 1963 г. в наиболее ясной и законченной форме для модальных логик (см. *[Крипке* 1974]). *Шкалой* Крипке (структурой, фреймом) называется пара *<W, R>,* где *W* — множество *возможных миров* (точки, моменты, вынуждающие условия), а *R* — бинарное отношение достижимости на мирах.
В *[Grzegorchyk* 1964] и *[Kripke* 1965] появилась семантика возможных миров для **Int**. Мы будем следовать работе М. Фиттинга *{Fitting* 1969]. Пусть дана некоторая модель Крипке $<W, R, e>$, где
W — непустое множество возможных миров; *R* — отношение частичного порядка (рефлексивно и транзитивно) на *W,* и *е* — функция оценки формул на подмножествах *W.* Определим отношение $\Vdash$ между элементами $w \in W$ и формулами **Int**, где $w \Vdash A$ читается «в мире *w* имеет место формула *A»:*

1. $w \Vdash p$ т.т.т., когда для всех *z* таких, что $wRz, z \in e(p)$
2. $w \Vdash A \wedge B$ т.т.т., когда $w \Vdash A$ и $w \Vdash B$
3. $w \Vdash A \vee B$ т.т.т., когда $w \Vdash A$ или $w \Vdash B$
4. $w \Vdash A \Rightarrow B$ т.т.т., когда для всех z таких, что wRz, если $z \Vdash A$, то $z \Vdash B$
5. $w \Vdash \neg A$ т.т.т., когда для всех z таких, что *wRz,* не имеет места $z \Vdash B.$

В модели Крипке $<W, R, e>$ имеет место $w \Vdash A$ т.т.т., когда для всех $w \in W,\ w \Vdash A.$ Относительно этой семантики доказывается

полнота исчисления **Int**.
Основная философская проблема: что это за сущности такие - *возможные миры!* Первая философская работа по интерпретации **Int** (истинности в **Int**) принадлежит А. Гжегорчйку [*Grzegorchyk* 1964]. Конечно, такого рода интерпретации не лишёны элемента произвольности. В несколько общем виде философская интерпретация **Int** обсуждается в [*Шрагалин* 1979]. Будем интерпретировать миры как возможные состояния знания некоторого познающего субъекта. Субъект видит, что в настоящий момент он находится в состоянии *w* - это его «реальный мир». Если $w \leq z$, то состояние *z* можно рассматривать как более позднее, как результат развития *w.* Соответственно, информация, приписанная z, является расширением информации *w.* Мы считаем, что со временем найденная информация не теряется, а может лишь приобретаться. Это выражается семантической леммой, имеющей место в **Int**:
Для любой $<W, R, e>$ *и* $w \in W$, $w \vDash A$ *т.т.т., когда для всех z таких, что* $wRz, z \vDash A.$
Индукцией по построению формулы *A* легко выяснить, если она истинна в каком-то мире, то истинна и во всех достижимых мирах (благодаря отношению *R).* М. Фиттинг, у которого миры тоже есть «состояния знания», интерпретирует данную лемму так: если в настоящее время мы знаем, что *A* истинно, то в любое позднее время мы все еще знаем, что *A* истинно *[Fitting* 1969]. У М. Даммита *[Dummett* 1977] моменты из *W* есть «состояния информации» (в этой работе он дает *интуиционистски приемлемое* доказательство полноты **Int**, при этом по существу используя конечные деревья Крипке). Гораздо дальше пошли Н.К. Верещагин и А. Шень *[Верещагин и Шенъ* 2008]: *W* есть множество возможных состояний цивилизаций; $w \leq z$ означает, что мир z может получиться из мира *w* в результате развития цивилизации. Истинность $\neg A$ в мире *w* означает, что ни при каком развитии цивилизации из состояния *w* высказывание *A* не станет истинным.

8.2.3. Суперинтуиционистские логики

Суперинтуиционистской логикой (*si*-логикой) называется логика, полученная посредством расширения **Int** аксиомами в этом же языке. Члены последовательности конечнозначных логик Гёделя $\mathbf{G}_n$ являются *si* -логиками (см. раздел 5.1.7), самой известной из которых является трехзначная логика Рейтинга $\mathbf{G}_3$. Добавление к **Int** слабого закона исключенного третьего $\neg p \vee \neg\neg p$ образует *si-логику* **КС** *(логика*

Янкова). Еще одной хорошо известной *si* -логикой является расширение **Int** посредством аксиомы $((\neg\neg p \to p) \to (p \vee \neg p)) \to (\neg\neg p \vee \neg p)$ *(логика Скотта* **SL**).
Имеются обзоры по пропозициональным *si* -логикам *[Hosoi and Ono* 1973] и по предикатным *si* -логикам *[Ono* 1987].
Специальный интерес к *si* -логикам проявился в 50-е годы, когда стали изучаться целые классы *si* -логик (см. *[Umezava* 1959]). Изучение способов рассуждения в некоторой *выделенной* логической системе (пусть даже такой, как классическая или интуиционистская логика) отодвигается на второй план. А на первый план выдвигается изучение *класса* логик с «хорошими» семантическими или синтаксическими свойствами. Например, выделяется какой-то интересный класс шкал Крипке. Естественно возникает вопрос, какой класс логик моделируется этими шкалами? С другой стороны, имеется класс логик с хорошо определенным свойством, например, с дизъюнктивным свойством. Естественно возникает вопрос: имеется ли для них полная по Крипке семантика?
В течение долгого времени оставалась надежда найти полное описание *решетки si* -логик - тогда можно было бы «обозреть» любую логику и даже, может быть, представить их в виде исчисления. Все эти надежды были разрушены открытием В.А. Янкова *[Янков* 1968] *континуального* класса *si* -логик (т.е. мощность множества всех логик между **Int** и $\mathbf{C}_2$ континуальна), причем в нем имеются и логики, не являющиеся финитно-аппроксимируемыми и конечно аксиоматизируемыми. В свою очередь, в *[Шехтман* 1978]) была решена старая проблема и представлена конечно-аксиоматизируемая, но не являющаяся разрешимой логика. Более того, А.В. Кузнецов доказывает теорему о континуальности всякого интервала между **Int** и её собственным расширением *[Кузнецов* 1971]. Различные континуальные классы пропозициональных *si* -логик рассмотрены А.В. Чагровым и М. Захарьящевым *[Chagrov and Zakharyaschev* 1993]. Оказалось, например, что имеется континуум *si* -логик с дизюнктивным свойством и континуум *si* -логик без дизюнктивного свойства, причем не существует алгоритма, по которому можно было бы определить, *к какому из двух континуальных классов данная логика принадлежит.*
Понятно, что существует некоторая корреляция между неразрешимостью некоторого свойства и континуальностью множества логик с этим свойством. Оказывается, континуальность классов логик является не исключением, а нормой.
Несколько иная ситуация сложилась относительно расширений бесконечнозначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_\infty$. Еще А. Роуз *[Rose* 1953] показал, что мощность множества всех собственных расширений

бесконечнозначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_\infty$, т.е. мощность множества всех логик между $\mathbf{Ł}_\infty$ и $\mathbf{C}_2$,является счетной. При этом доказательство существенно опирается на критерий Р. Мак-Нотона.

8.2.3.1. Логика Гёделя-Даммита $\mathbf{G}_\infty$

По-видимому, самой известной *si* -логикой (кроме самих **Int** и $\mathbf{C}_2$) является бесконечнозначная логика Гёделя-Даммита $\mathbf{G}_\infty$, логическая матрица которой получается из матрицы для $\mathbf{G}_n$ посредством введения бесконечного числа истинностных значений [0, 1] (ранее эта логика обозначалась посредством **LC** и называлась *цепной (линейной) логикой Даммита).* Определение логических операций на этом множестве следующее: $x \Rightarrow y$ есть 1, если $x \leq y$, и *y* в остальных случаях; $\rceil x$ есть просто $x \Rightarrow 0$, и $\wedge$ и $\vee$ есть, соответственно, *min* и *max* операции. {1} - множество выделенных значений. Даммит показал *[Dummett* 1959], что множество тавтологий $\mathbf{G}_\infty$ аксиоматизируется аксиомами **Int,** расширенной аксиомой *линейности*

$$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p).$$

Здесь же показано, что $\mathbf{G}_\infty$ характеризуется пересечением множества тавтологий всех $\mathbf{G}_n$.
Заметим, что теперь в этой логике дизъюнкция определима через импликацию и конъюнкцию:

$$p \vee q =: ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \wedge ((q \Rightarrow p) \Rightarrow p).$$

В *[Hom* 1969] дано алгебраическое доказательство полноты логики $\mathbf{G}_\infty$, где вводится понятие L-алгебры: алгебра Гейтинга (см. раздел 4.4.2) плюс тождество

$$(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1.$$

(В связи с развитием нечетких логик, основанных на t-нормах (см. ниже раздел 9.3.2), такие алгебры стали называться *алгебрами Гёделя* (G-алгебры).)
Эта логика привлекла к себе большое внимание. В *[Visser* 1982] она используется в исследованиях *доказуемостной логики* арифметики Гейтинга; в *[Pearce* 1999] она применяется для анализа выводов расширенной логики программирования; в *[Hdjek* 1998] она признана одной из трех наиболее важных формализации нечеткой логики (см. следующую главу).
Первая секвенциальная формулировка $\mathbf{G}_{\infty a}$ с устранимым сечением представлена в *[Sonobe* 1975] (см. также *[Смирнов* 1983]). Она была улучшена в *[Avelone, Ferrari and Miglioli* 1999] и *[Dyckhoff* 1999], где также представлены версии с устранением сокращения. Более

подходящая формулировка дана А. Авроном *[Avron* 1991], которая имеет те же самые логические правила, что и стандартная формулировка **Int.** Однако в этой работе правила не являются обратимыми *(invertible),* что затрудняет поиск доказательств. Наконец в *[Avron andKvnilcowska* 2001] представлена система, основанная на обратимых двухпосылочных правилах, наиболее приспособленная для поиска доказательств. То же самое имеет место и для конечно-значных логик Гёделя $\mathbf{G}_n$,

Впервые предикатная логика $\mathbf{QG}_\infty$ была аксиоматизирована в виде секвенциального исчисления в *[Takeuti and Titani* 1984] (без ссылки на статью Даммита). Основной задачей было построение интуиционистской нечеткой теории множеств. В *[Avellone et ah* 1999] представлены аналитические таблицы для первопорядковой $\mathbf{G}_\infty$. В *[Corsi* 1992] для $\mathbf{QG}_\infty$ доказана полнота по Крипке относительно линейных шкал Крипке. В *[Skwortsov* 2005] дано значительное упрощение этого доказательства и рассмотрены некоторые не полные по Крипке расширения $\mathbf{QG}_\infty$. Наконец, в *[Baaz, Preining and Zach* 2007] дается аксиоматизация целого семейства предикатных логик Гёделя-Даммита (в зависимости от выбора множества истинностных значений), а также различных их фрагментов.

8.3. Синтез логик Ł_∞ и $\mathbf{G}_\infty$

Представляет интерес сравнение двух хорошо известных бесконечнозначных логик: Ł_∞ и $\mathbf{G}_\infty$. В обеих этих логиках закон исключенного третьего $p \vee \sim p$ не имеет места. Их импликативные фрагменты содержат **ВСК**-логику (см. выше). Более точно, обе логики являются расширением «базисной логики» **BL** (см. следующую главу). С алгебраической точки зрения обе они имеют дистрибутивную решеточную структуру и являются расширением *BL*-алгебры,

В разделе (5.1.7) мы сравнивали между собой конечнозначные логики Лукасевича Ł_n и Гёделя $\mathbf{G}_n$ и показали, что операции из $\mathbf{G}_n$ выразимы посредством операций из Ł_n для любого конечного *n.* Но для бесконечнозначного случая это не проходит, поскольку, используя критерий Р. Мак-Нотона *[McNaughton* 1951] об определимости операций в Ł_∞, можно показать, что ни операция $\urcorner x$, ни операция $x \Rightarrow y$ не определимы в Ł_∞.

Теперь рассмотрим вопрос о синтезе логических и алгебраических свойств этих различных логик.

8.3.1. Симметрический моноид Рейтинга *SHM* и алгебра Вайсберга-Гейтинга *WH*

В *[Васюков и Карпенко* 1987] вводится понятие *симметрического моноида Рейтинга* $SHM = <A, \Rightarrow, \oplus, \sim, 1, 0>$, который представляет собой алгебру типа (2,2,1,0,0) со следующей аксиоматикой.

А1. Аксиомы *позитивной импликационной алгебры* $PI = <A, \Rightarrow, 1>$ *[Rasiowa* 1974]:

1.1. $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$

1.2. $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)) = 1$

1.3. если $x \Rightarrow y = 1$ и $y \Rightarrow x = 1$, то $x = y$

1.4. $x \Rightarrow 1 = 1$.

А.2. Аксиомы *абелева моноида* $AM = < A, \oplus, 0 >$(см. выше аксиоматизацию MV-алгебры):

2.1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

2.2. $x \oplus y = y \oplus x$

2.3. $x \oplus 0 = x$.

А3. Аксиомы для *инволюции* ~:

3.1. $\sim\sim x = x$

3.2. $\sim 1 = 0$

3.3. $\sim 0 = 1$.

А4. Аксиомы *связи:*

4.1. $(x \Rightarrow y) \oplus z = (x \oplus z) \Rightarrow (y \oplus z)$

4.2. $\sim(x \oplus y) \oplus y = \sim(\sim x \oplus \sim y) \oplus \sim x$

4.3. $x \oplus \sim x = 1$

4.4. $x \oplus 1 = 1$.

Понятие симметрического моноида Гейтинга обязано своим существованием гипотезы о том, что импликация Лукасевича → может быть определена таким образом, чтобы связать между собой логику Ł_∞ с логикой $\mathbf{G}_\infty$:

$Df1.\ x \rightarrow y =: (x \Rightarrow y) \oplus (\sim y \Rightarrow \sim x)$.

Вводится понятие *алгебры Вайсберга— Гейтинга* $WH = <A, \rightarrow, \Rightarrow, \neg, 1>$, которая представляет собой алгебру типа (2,2,1,0) со следующей аксиоматикой:

АI. Аксиомы алгебры Вайсберга $W = <A, \rightarrow, \neg, 1>$(см. выше раздел 8.1.1).

AIIП. Аксиомы позитивной импликационной алгебры $PI = <A, \Rightarrow, 1>$ (см. выше).

AIII. Аксиома связи:

$\neg(x \Rightarrow y) \to z = (\neg x \to z) \Rightarrow (\neg y \to z).$

Определения:

$Df2.\ 0 =: \neg 1.$

$Df3.\ x \oplus y =: \neg x \to y.$

$Df4.\ \neg x =: \sim x.$

Доказывается следующая

Теорема. *Алгебры* $SHM = <A, \Rightarrow, \oplus, \sim, 1, 0>$ *и* $WH = <A, \to, \Rightarrow, \neg, 1>$ *эквивалентны.*

Пропозициональную логику, алгебраическим примером которой является *WH*-алгебра, обозначим посредством $\mathbf{ŁG}_{\infty}$.

Через 15 лет в *[Cattaneo and Ciucci* 2002] введено понятие *алгебры Гейтинга-Байсберга* $HW = <A, \to, \Rightarrow, 0>$, которая представляет собой алгебру типа (2,2,0) со следующей аксиоматикой.

Определения:

$Df1.\ \neg x =: x \to 0.$

$Df2.\ \sim x =: x \Rightarrow 0$

$Df3.\ 1 =: \neg 0$

$Df4.\ x \wedge y =: \neg((\neg x \to \neg y) \to \neg y)$

$Df5.\ x \vee y =: (x \to y) \to y).$

Аксиомы:

HW1. $x \Rightarrow x = 1$

HW2. $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow z) \wedge (x \Rightarrow y)$

HW3. $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$

HW4. $(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)$

HW5. $1 \to x = x$

HW6. $x \to (y \to z) = \neg(x \to z) \to \neg y$

HW7. $\neg\sim x \to \sim\sim x = 1$

HW8. $(x \Rightarrow y) \to (x \to y) = 1.$

Можно показать, что алгебры $WH = <A, \to, \Rightarrow, \neg, 1>$ и $HW = <A, \to, \Rightarrow, 0>$ квивалентны. Заметим, что в *[Cattaneo, Chicci, Giuntini and Konig* 2004] доказывается, что $HW\ <A, \to, \neg, 1>$ есть алгебра Вайсберга *W* с аксиомами Wl, W2, W3, W4 (см. выше раздел 8.1,1). Также доказывается, что в *HW* имеют место все аксиомы симметрической алгебры Рейтинга (см. выше раздел 4.4.2).

Также отмечается, что *HW* можно рассматривать как модальную алгебру, поскольку в ней определимы модальные операторы $\Box x =: \sim\neg x$ и $\Diamond x =: \neg\sim x.$ При этом выполняются все аксиомы модальной логики **S5** (см. ниже), но основой является не булева алгебра, а алгебра Клини.

8.3.1.1. Алгебры, эквивалентные *HW*

В *[Карпенко* 1997] к операциям матрицы для $\mathbf{Ł}_{\infty}$ добавляется отрицание $\rceil$ из $\mathbf{G}_{\infty}$. Тогда

$x \Rightarrow y = \rceil\sim(x \to y) \vee y$

(см. раздел 5.1.7, где $J_1(x)$ есть $\rceil\sim x).$

Пользуясь «симметризацией» алгебры Рейтинга, проведенной А. Монтейро (см. выше раздел 4.4.2), получаем

$x \Leftarrow y = \sim(\sim x \Rightarrow \sim y).$

Таким образом, в $\mathbf{Ł}_{\infty}$ с $\rceil x$ выразимы операции **Н-В**-логики *[Rauszer* 1974]. Здесь же утверждается (без доказательства), что алгебра Вайсберга *W* с $\rceil$ эквивалентна алгебре Вайсберга-Гейтинга *WH.* Интересно, что в *[Cattaneo, Dalla Chiara and Ginntini* 1998] [вводится понятие *«Брауэра-Заде многозначной алгебры с законами Де Моргана».* Эти алгебры обозначаются посредством $BZMV^{IM}$ и являются усилением *MV*-алгебры посредством добавления операции $\rceil$ из $\mathbf{G}_{\infty}$. В этом же году в *[Hajek* 1998] вводится понятие MV_{Δ}-алгебры, которая есть расширение MV-алгебры посредством добавления модального оператора Δ, введенного в *[Baaz* 1996] и который на линейно-упорядоченной структуре определяется следующим образом:

$\triangle x = 1,$ если $x = 1$ и $\triangle x = 0$ в остальных случаях.

Аксиоматизацией логики $\mathbf{Ł}_{\Delta}$ *[Hdjek* 1998] являются схемы аксиом для $\mathbf{Ł}_{\infty}$ и следующие пять аксиом для оператора $\triangle$, взятые из *[Baaz 1996]:*

$(\triangle 1)\quad \triangle A \vee {\sim}\triangle A,$

$(\triangle 2)\quad \triangle(A \vee B) \to (\triangle A \vee \triangle B),$

$(\triangle 3)\quad \triangle A \to A,$

$(\triangle 4)\quad \triangle A \to \triangle\triangle A,$

$(\triangle 5)\quad \triangle(A \to B) \to (\triangle A \to \triangle B).$

Наконец, в *[Benuce* 1997] вводится понятие стоуновской *MV*-алгебры *(SMV-алгебры)* посредством некоторого ограничения на множество булевых элементов, что дает возможность ввести сто-уновское отрицание.

В *[Cattaneo, Ghmtini and Pilla* 1999] доказана эквивалентность между *SMV* и *BZMV*^{dM} алгебрами, а в *[Cattaneo, Ciucci, Ghmtini and Konig* 2004] доказывается эквивалентность между MV_Δ и *BZMV*$^{\text{ІМ}}$- алгебрами и между *BZMV*$^{\text{ІМ}'}$ и *HW*-алгебрами. Таким образом, все указанные алгебры эквивалентны. Также доказывается (берется *HW*-алгебра), что имеет место условие Даммита, т.е. линейность:

$(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1.$

В этой же работе, используя результаты из *[Hdjek* 1998], где дана теорема представления для MV_Δ-алгебры и доказана теорема полноты для соответствующего пропозиционального исчисления, получены аналогичные результаты для остальных алгебр и соответствующих им исчислений. Приведем аксиоматику пропозиционального исчисления **HWL** в виде аксиомных схем с исходными связками

: $\sim, \to$ (из $\mathbf{Ł}_\infty$) и $\Rightarrow$ (из $\mathbf{G}_\infty$).

Определения:

$\rceil A =: A \Rightarrow {\sim}(A \Rightarrow A)$

$A \wedge B =: \neg((\neg A \to \neg B) \to \neg B)$

$A \vee B =: (A \to B) \to B)$

$A \leftrightarrow B =: (A \to B) \wedge (B \to A).$

Аксиомы:

1. $A \Rightarrow A$
2. $A \Rightarrow (B \wedge C) \leftrightarrow (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
3. $A \wedge (A \Rightarrow B) \leftrightarrow A \wedge B$
4. $(A \vee B) \Rightarrow C \leftrightarrow (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
5. $(A \Rightarrow A) \to A \leftrightarrow A$
6. $A \to (B \to C) \leftrightarrow \neg(A \to C) \to \neg B$
7. ${\sim}\rceil A \to \rceil\rceil x$
8. $(A \Rightarrow B) \to (A \to B).$

Правила вывода: $A, A \to B \vdash B;\ A, A \Rightarrow B \vdash B.$

8.3.2. Логика без неподвижных точек $\mathbf{ŁG}^*_\infty$

Теперь поставим следующий вопрос (см. *[Карпенко* 1993]): можно ли «расширить» свойства импликации $x \to y$ в матрице

$\mathfrak{M}^{Ł}_\infty = <[0,1] \sim, \to, \{1\}>$

для бесконечнозначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_\infty$ таким образом, чтобы посредством этой новой операции и $\sim x$ определить операции $\rceil x$ и $x \Rightarrow y$ из $\mathbf{G}_\infty$.

Рассмотрим бесконечнозначную матрицу

$\mathfrak{M}^*_\infty = <[0, 1]^*, \sim, \to^*, \{1\}>,$

где $[0,\ 1]^*$ есть множество таких рациональных чисел из отрезка [0, 1], из которого элиминированы все числа с четным знаменателем.

Операции $\sim, \to^*$ определяются следующим образом:

$${\sim}x =: 1{-}x;$$

$$x \to^* y = \begin{cases} x, \ \textit{если}\ \ 0 < x = y < 1 \\ x \to y, \ \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Лемма 1. *Операции* $\rceil x$ *и* $x \Rightarrow y$ *определимы в матрице* $\mathfrak{M}^*_\infty$.

Это можно сделать следующим образом:

$x \to y =: {\sim}((y \to^* x) \to^* {\sim}(y \to^* x)) \to^* (x \to^* y),$

$\rceil x =: {\sim}((x \to^* x) \to x),$

$x \Rightarrow y =: J_1(x \to y) \vee y,$

где $J_1 x = \rceil {\sim} x$ и $x \vee y = (x \to y) \to y.$
Имеет смысл определить операцию $x \to^{*} y$ в терминах хорошо известных операций. Пусть

$$\mathfrak{N}^{*}_{\infty} = <[0,\ 1]^{*}, \rceil, \sim, \to, \{1\}>.$$

Тогда имеет место следующая

Лемма 2. *Операция* $x \to^{*} y$ *определима в матрице* $\mathfrak{N}^{*}_{\infty}$.

Это можно сделать следующим образом:

$$x \to^{*} y = ((J_1(x \equiv y) \to x) \wedge (x \to y)) \vee \rceil x,$$

где $x \equiv y = (x \to y) \wedge (y \to x)$ и $x \wedge y = {\sim}({\sim}x \vee {\sim}y)$

Из леммы 1 и леммы *2* следует, что матрицы $\mathfrak{M}^{*}_{\infty}$ и $\mathfrak{N}^{*}_{\infty}$ задают одну и ту же логику, которую обозначим посредством $\textbf{ŁG}^{*}_{\infty}$.
Обратим внимание на существенное свойство построенных матриц, которое заключается в том, что они не содержат *неподвижных точек* относительно ~, т.е. ${\sim}x \neq x.$ Из этого следует, что в основе алгебры для $\textbf{ŁG}^{*}_{\infty}$ лежит *интенсиональная решетка [Belnap and Spencer* 1966], которая представляет собой решетку де Моргана без неподвижных точек (о применении см. в *[Anderson andBelnap* 1975]).
Интересно сравнение матричных логик $\textbf{ŁG}_{\infty}$ и $\textbf{ŁG}^{*}_{\infty}$. Очевидно, что каждая тавтология $\textbf{ŁG}_{\infty}$ является тавтологией $\textbf{ŁG}^{*}_{\infty}$, но имеются различные тавтологии из $\textbf{ŁG}^{*}_{\infty}$, которые не являются тавтологиями $\textbf{ŁG}_{\infty}$, например, формула

$${\sim}((p \to {\sim}p) \wedge ({\sim}p \to p))$$

(Для справедливости заметим, что уже после публикации статьи *[Карпенко* 1993] мы обратили внимание на матричную логику $\mathbf{S}_{[\aleph]}$ (см. *[Rescher* 1969]). Здесь вначале определяется система $\mathbf{S}_{\aleph}$, операции которой задаются на множестве рациональных чисел из отрезка [0, 1] следующим образом:

$${\sim}x = 1 - x, \quad x \vee y = max\,(x, y), \quad x \wedge y = min\,(x,y),$$
$$x \to y = \begin{cases} 1, \textit{ если } x \leq y \\ 0, \textit{ если } x > y. \end{cases}$$

Логическая матрица для логики $\mathbf{S}_{[\aleph]}$ есть матрица для $\mathbf{S}_{\aleph}$ без истинностного значения $^{1}/_{2}$. Здесь как раз и появляется формула

$${\sim}((p \to {\sim}p) \wedge ({\sim}p \to p)),$$

которая имеет место в $\mathbf{S}_{[\aleph]}$, но не в $\mathbf{S}_{\aleph}$.)

8.4. Модальные логики

Класс модальных логик устроен даже сложнее, чем класс суперинтуиционистских логик (*si*-логик), хотя что может быть сложнее континуума? Здесь мы рассмотрим наиболее интересные льюисовские модальные системы и определим важную тенденцию развития современной логики.

8.4.1. К.И. Льюис и К. Гёдель

В *[Lewis* 1912] К.И. Льюис (1883-1964) строит новую теорию *логического следования* взамен теории материальной (классической) импликации, изложенной в *«Principia Mathematica»*. Исходным мотивом Льюиса было избавиться от так называемых *парадоксов материальной импликации.* Под последними в первую очередь рассматривались формулы

$$p \supset (q \supset p) \text{ и } p \supset ({\sim}p \supset q),$$

которые содержательно означали следующие принципы: «Истина имплицируется из чего угодно» и «Противоречие имплицирует все что угодно». В классической $\mathbf{C}_2$ и интуиционистской **Int** логиках эти принципы общезначимы. В итоге материальная импликация была заменена Льюсом на *строгую* импликацию →, определение которой потребовало введения модальных операторов ◊ (возможно) и □ (необходимо):

$$p \to q =: {\sim}\Diamond(p \wedge {\sim}q).$$

В работе *[Lewis* 1918] уделено внимание проблеме исчислений, в которых подобные формулы не выводимы, а введенное там исчисление получило в дальнейшем обозначение **S3**.
Развитие современной модальной логики можно датировать началом 30-х годов XX века, когда вышла книга *[Lewis and Langforrd* 1932], содержащая формулировки модальных логических систем **S1 — S5**, в дальнейшем названных *льюисовскими,* и двухстраничная статья К. Гёделя *[Godel* 1933], в которой приводится формулировка льюисовских систем **S4 и S5** в стиле, ныне называемом гёделевым, и утверждается *погружаемость* интуиционистской логики **Int** в **S4** *переводом,* при котором интуиционистские связки интерпретируются соответствующими классическими, но при этом используется усиливающий оператор □, который навешивается на пропозициональные переменные и усиливает импликацию.
Работа Гёделя имела фундаментальное значение для дальнейшего развития логики. Во-первых, оказалось, что исчисление, строящееся

как ограничение классической логики (отбрасывание ряда неприемлемых формул), на самом деле может оказаться расширением последнего: льюисовские системы строятся как расширение классической логики **C**$_2$, т.е. к аксиоматизации **C**$_2$ добавляются характеристические аксиомы для модальных операторов. (Напомним, что подобный метод аксиоматизации был затем использован при аксиоматизации многозначных логик (см. выше раздел 6.3).

Во-вторых, погружаемость одних логических систем в другие означала сходство способов рассуждения различных логических систем, а также обладание порой весьма важными одинаковыми свойствами. В данном случае последнее означало то, что *si*- логики и модальные логики стали изучаться параллельно. Систематическое исследование тесной связи между модальными логиками и *si*-логиками было начато в классической работе Дж. Маккинси и А. Тарского *[McKinsey and Tarski* 1948].

8.4.2. Некоторые модальные логики

В обзоре *[Bull andSegerberg* 1984] отмечается, что за последние годы появилось *астрономическое* число модальных логик, при этом имеются в виду логики, которые получили «персональное» обозначение. В этой работе приводится список из 15- модальных логик . В *[Chagrov and Zakhaiyaschev* 1997] приводится список из 30 нормальных модальных логик, причем 5 из них задают *классы* логик. Некоторые из этого списка будут полезными для нас.

Модальная логика является *нормальной* т.т.т., когда она включает все тавтологии **C**$_2$ и аксиому

K. $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$

и замкнута относительно подстановки для переменных, modus ponens и правила Гёделя: если $\vdash A$, то $\vdash \Box A$. Логика называется *квазинормальной,* если она не удовлетворяет правилу Гёделя.

Рассмотрим еще несколько модальных аксиом:

T. $\Box p \supset p$,

4. $\Box p \supset \Box\Box p$,

B. $p \supset \Box\Diamond p$,

Grz. $\Box(\Box(p \supset \Box p) \supset p) \supset p$.

W. $\Box(\Box p \supset p) \supset \Box p$ (аксиома Лёба).

Логика **S4** есть **KT4**; логика **S5** есть **KT4B**; **KT4Grz = KGrz** есть *логика Гжегорчика* **Grz** (в первоначальной аксиоматике она представлена в *[Grzegorchyk* 1967]). Логика **Grz** вызвала особый интерес, поскольку является наибольшим нормальным расширением модальной логики **S4**, в которое погружается интуиционистская логика **Int** посредством перевода Гёделя-Тарского-Мак-Кинси. **K4W = KW** есть *логика Гёделя-Лёба* **GL** - *логика доказуемости,* в которой оператор необходимости понимается как *формальная доказуемость* в некоторой аксиоматической теории подобной арифметике Пеано *PA.* Логика **GL** полна относительно арифметической интерпретации: модальная формула *A* доказуема в **GL** т.т.т., когда *A* есть *PA* -тавтология *[SoJovay* 1976].

Заметим, что в *[Dummett and Lemmon* 1959] по характеристической матрице Яськовского для **Int** построена характеристическая матрица для **S4**. Очень простая континуальная характеристическая матрица для **S5** сконструирована А. Прайором *[Prior* 1957].

В качестве истинностных значений берутся все 1-0-последовательности счетной длины, т.е. булевы вектсгоа, состоящие из вхождений 1 - «истина» и 0 - «ложь» (а их континуум —$2^{\aleph_0}$), перациями являются покомпонентные булевы операции (подробно об этом см. в разделе 10.5), а операторы возможности $\Diamond$и необходимости $\Box$ определяются следующим образом:

$$\Diamond p = \begin{cases} <0,0,0>, \text{ если } p \text{ есть } <0,0,0> \\ <1,1,1> \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\Box p = \begin{cases} <1,1,1>, \text{ если } p \text{ есть } <1,1,1> \\ <0,0,0> \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Строгое доказательство того факта, что эта модель является *точной* моделью для **S5**, дано в *[Massey* 1972].

В *[Fine* 1974] доказывается континуальность множества расширений **S4** (однако, это уже после результата Янкова о континуальности класса *si*-логик *[Янков* 1968]). Результаты, аналогичные тому, что между **Int** и любой *si* -логикой находится континуум логик *[Кузнецов* 1971], справедливы и в модальном случае. Так, континуален любой интервал между модальной логикой **L** и ее собственным расширением при **L = K, L = K4, L = S4, L = Grz, L = GL** и во многих других случаях.

Оказывается, континуальность классов логик является не исключением, а нормой. См. об этом специальную статью И.А Горбунова и М.Н. Рыбакова *[Горбунов и Рыбаков* 2007].

8.4.2.1. Табличность и предтабличность

Как и в случае с интуиционистской логикой **Int,** одним из первых вопросов для новых логических систем является вопрос об их *табличности.* Логика является табличной, если она характеризуется конечными моделями (шкалами, алгебрами, матрицами и т.д.). Дж. Дугунджи *[Dugundji* 1940], используя метод К. Гёделя для **Int** (см. выше), показал, что люисовские системы, включая **S1 - S5**, являются бесконечнозначными логиками, т.е. не имеют конечной характеристической матрицы. Затем С. Скроггс *[Scroggs* 1951] доказал, что логика **S5** является *предтабличной,* т.е. любое ее собственное (нормальное) расширение характеризуется конечной матрицей с единственным выделенным значением. Напомним, что именно таким образом была получена четырехзначная логика **V2** (см. выше раздел 5.4.3.1).

Понятия табличности и предтабличности тесно связаны и последнее понятие в явном виде введено А.В. Кузнецовым *[Кузнецов* 1971] для того, чтобы на этом пути подойти к решению проблемы разрешимости табличности. Если имеется простое описание всех предтабличных логик в некотором классе расширений, то мы имеем эффективный критерий табличности для этого класса. Конечно, хотелось бы иметь *алгоритм,* который по исчислению выдавал бы, является логика конечнозначной или нет.

К сожалению, в общем случае никакого эффективного критерия табличности не существует. Однако, если мы ограничимся достаточно сильными логиками, например, классом нормальных расширений **S4**, то проблема табличности оказывается разрешимой. Описание всех предтабличных логик в этом классе дано Л.Л.Максимовой *[Максимова* 1975] (таковых оказалось 5). А еще ранее Л.Л. Максимова установила (1972), что в классе *si*-логик содержится в точности три предтабличных логики, одна из которых есть логика Гёделя-Даммита $\mathbf{G}_\infty$. Естественно, возникает вопрос о предтабличных расширениях логики Лукасевича Ł_∞. Из работы *[Beavers* 1993] следует, что существует только одно предтабличное расширение Ł_∞. Обозначим эту логику посредством Ł_Σ (мы рассмотрим ее в разделе 10.6.1).

Значительное продвижение в исследовании предтабличных модальных логик было сделано в *[Blok* 1980]. Оказалось, например, что в нормальных расширениях модальной логики К4 имеется *континуум* предтабличных логик (что, кстати, лишает возможности на этом пути получить прямое решение открытой до сих пор проблемы табличности нормальных расширений **К4**); а в нормальных расширениях модальной логики доказуемости **GL** имеется ровно счетное множество предтабличных логик.

Свойство табличности играет существенную роль при изучении класса конечно аппроксимируемых логик, которые характеризуются классами (в общем случае бесконечными) конечных шкал Крипке. Каждая такая логика есть пересечение множества табличных логик, т.е. может быть аппроксимируема возрастающей последовательностью табличных логик, как это и было впервые показано в случае с **Int** (см. выше раздел 4.3.2). Класс финитно аппроксимируемых логик исключительно важен в силу свойства разрешимости для конечно аксиоматизируемых логик и включает почти все стандартные модальные и *si* -логики.

8.4.3. Шкалы Крипке и принцип соответствия

Ввиду тесной связи между модальной логикой **S4** и интуиционистской логикой **Int,** первоначальной семантикой для **S4** и ее расширений была алгебраическая, которая уже систематически исследовалась Дж. Мак-Кинси в 1941 г. Модальные алгебры для многих модальных систем были введены Е. Леммоном *[Lemmon* 1966]. Здесь особое место занимает работа *[Jonsson and Tarski* 1951]. Как отмечается в *[Bull and Segerberg* 1984], если бы эта работа получила известность после ее публикации, то история модальной логики была бы другой. В этой работе была расширена теорема представления Стоуна на булеву алгебру с операторами, при этом в явном виде введены шкалы как реляционные представления модальных алгебр.

Одной из наиболее привлекательных черт семантики возможных миров, получившей необычайно широкое признание, является обнаружение простой связи между существованием модальных аксиом и обычными свойствами отношения достижимости между мирами. Такая связь положена в основание *теории соответствия:* какие классы моделей (шкал) Крипке можно описать модальными формулами, какие - формулами классической логики первого порядка. В действительности, теория соответствия выросла из весьма простого наблюдения, сделанному в начале 70-х годов: **Т**-аксиома $\Box p \supset p$ истинна на шкале Крипке $<W, R>$ т.т.т., когда *R рефлексивно.* Здесь «истинна на шкале» обозначает истинность во всех мирах при всех приписываниях значений пропозициональным переменным. Аксиома **4** эквивалентна *транзитивности,* а аксиома **В** - *симметричности.* Отсюда логика **К4** характеризуется классом всех транзитивных шкал, логика **S4** — классом всех транзитивных и рефлексивных шкал и логика **S5** характеризуется отношением эквивалентности на множестве миров *W.* Тогда модальная логика **К** называется *базисной* и примечательна тем, что в семантике Крипке для модальных логик на отношение достижимости не накладывается никаких ограничений. Другими словами, множество формул логики **К** общезначимо во всех шкалах Крипке. Что касается логики Гжегорчика **Grz**, то она характеризуется классом всех финитных частично-упорядоченных шкал, а логика доказуемости **GL** характеризуется транзитивными и ирефлексивными (т.е. строго-упорядочнными) шкалами и при этом не содержащими бесконечных обрывающихся цепей.

В *[Van Benthem* 1984] приведена таблица соответствий для некоторых интересных формул. Вообще при таком подходе модальная формула определяет ограничения на отношения достижимости в шкалах Крипке. Некоторые из этих ограничений являются перво-порядково определимыми, другие нет. Например, в этой же работе показано, что свойства шкал Крипке, определяемых аксиомой Лёба, не являются первопорядково определимыми.

С философской точки зрения теория соответствия может быть описана как нахождение того, что может дать нам семантика возможных миров.

Исследования в области модальной логики к началу XXI века естественным образом оказалась разбиты на два уровня (два слоя, два направления): пропозициональный мономодальный и предикатно-кванторный вместе с многомодальным. Основные достижения в области пропозициональной модальной логики собраны в фундаментальной монографии *[Chagrov and Zakharyaschev* 1997] и большой обзорной статье *[Zakharyaschev, Wolter and Chagrov* 2001]. Прекрасным введением в первопорядковую модальную логику является книга *[Fitting and Mendelsohn* 1998]. Рассматриваются технические и философские аспекты квантификации и тождества. Представлены гильбертовские и табличные системы.

8.4.4. Отступление

Исследование различных свойств, не какой-то избранной логики, а *семейства* логик становится глубоко специализированной областью логических исследований, что потребовало развития совершенно новых методов.

Важнейшим этапом современных исследований является изучение *решеточных свойств* классов логик. Уже в статье *[Scroggs* 1951] впервые было рассмотрено семейство модальных логик, в данном случае нормальные расширения **S5**, в виде *решетки.*

В *[Hosoi* 1969] установлено, что множество всех *si*-логик, упорядоченное отношением включения, образует решеточную структуру,

а на самом деле - алгебру Рейтинга. Так начался совершенно новый этап в развитии логики — изучение решеточных свойств не отдельной логики, а семейства логик и их классификации.

Аналогично обстоит дело с множеством собственных расширений Ł_∞. Элементы этого множества будем называть *sl*-логиками. Р. Григолия *[Григолия* 1976] установил, что множество всех *sl*-логик образует алгебру Рейтинга. Независимо от Григолия этот результат был установлен также в *[Kojnori* 1981]. В *[Beavers* 1993] было продолжено изучение расширений Ł_∞ в виде гейтинговой структуры.

Для S4 подобные исследования впервые были проведены в *[Максимова и Рыбаков* 1974].

(Конечно, возникает вопрос, почему решетка теорий является брауэровой? Природа этого феномена скорее всего заключается в природе операции присоединения следствий (замыкания), используемой А. Тарским при определении логики. Эта операция является топологическим замыканием, а логики - замкнутые множества, в том числе *si*-логики и *sl*-логики. Остается вспомнить связь топобулевых алгебр, псевдобулевых алгебр (алгебр Рейтинга) и брауэровых алгебр: так, всякая псевдобулева (брауэрова) алгебра является алгеброй открытых (замкнутых) элементов подходящей топо-булевой алгебры; во всякой топобулевой алгебре совокупность открытых (замкнутых) элементов образует псевдобулеву (брауэрову) алгебру.)

Представление расширений логических систем в виде структурированных множеств (решеток) позволяет устанавливать погружающие операции между такими логическими объектами. Здесь мы уже имеем дело не с погружением одной логической системы в другую, а с погружением решетки одних логик в решетку других логик. Особо отметим теорему Блока-Эсакиа: независимо В. Блок *[Blok* 1976] и Л.Л. Эсакиа *[Эсакиа* 1979] (ранее заявлено в тезисах конференции 1974 года) доказали *изоморфизм* решеток *si*-логик и нормальных расширений **Grz**. Такие погружения интересны не только с теоретической точки зрения, но могут служить важным инструментом для редуцирования одного класса логик к другому, уже хорошо изученному.

В обзоре *[Bull and Segerberg* 1984] лишь отмечается, что все нормальные логики образуют дистрибутивную решетку относительно теоретико-множественного включения, которая чрезвычайно сложна. В книге *[Chagrov and Zakhajyaschev* 1997] содержится глава 4 под названием «От логик к классам логик», где оговорено,

что классы расширений модальных логик рассматриваются как решетки. Здесь явно обозначена тенденция к изучению не отдельных логик, а огромных (зачастую, континуальных) классов логик и развитие общих методов исследования этих классов. Наконец, обзор *[Zakharyaschev, Wolter and Chagrov* 2001] начинается с представления решетки расширений логики **К**. Такой подход, отмечается авторами в предисловии, дает возможность использовать мощный технический аппарат, который позволяет ставить вопросы типа «что является ко-атомами в решетке?» (т.е. какие логики являются максимально непротиворечивыми?), или «имеются ли бесконечные обрывающие цепи?» (т.е. являются ли все логики в этом семействе конечно аксиоматизируемыми?).

Таким образом, от изучения свойств конкретной логики мы переходим к изучению свойств *решетки логик.* Развитие этой темы см. в конце последнего раздела в *Приложении.*

8.5. Релевантные логики

Литература по релевантным логикам столь обширна и разнообразна, что авторы фундаментальной статьи *[Dunn and Restall* 2002] даже не называют ее обзором. Классическими монографиями являются следующие: *[Anderson and Belnap* 1975] и *[Anderson, Belnap and Dunn* 1992].

Мы в основном сконцентрируемся на уже не раз упоминавшейся нами пропозициональной системе релевантной логики **R** и на её расширении **RM**, которое имеет ряд общих черт с логикой Гёделя-Даммита $\mathbf{G}_\infty$.

8.5.1. Критерий релевантности и логика R

Модальные логики не решили проблем с парадоксами импликации и в свою очередь были выявлены *парадоксы строгой импликации.* Аналогами предыдущих двух парадоксов (см. 8.4.1), но в более очевидной форме, являются следующие формулы:

$p \to (q \to q)$ и $(p \wedge {\sim}p) \to q.$

Обратим внимание, что антецеденты и консеквенты этих формул не имеют общих переменных. В I960 г. Н.Д. Белнап предложил критерий релевантности, который должна выполнять «хорошая» система логического следования **R**: *если* $A \to B$ *есть теорема* **R**, *тогда существует некоторая пропозициональная переменная р, которая входит как в А, так и в В* [*Belnap* 1960].

(Заметим, что для доказательства Белнап использовал 8-элементную решетку. Критерий релевантности был независимо открыт также В.В. Донченко [Донченко 1963].)

Стандартной аксиоматизацией системы **R** является следующая (см. *[Dunn* 2000]):

R1. $p \to p$

R2. $(p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q))$

R3. $(p \supset (q \supset r)) \supset (q \supset (p \supset r))$

R4. $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$

R5. $(p \wedge q) \to p$

R6. $(p \wedge q) \to q$

R7. $((p \to q) \wedge (p \to r)) \to (p \to (q \wedge r))$

R8. $p \to (p \vee r)$

R9. $q \to (p \vee q)$

R10. $((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r))$

R11. $(p \wedge (q \vee r)) \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

R12. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

R13. $p \to \neg\neg p$

R14. $\neg\neg p \to p.$

Правила вывода:

1. *Modus ponens,*
2. *Подстановка,*
3. $A, B \vdash A \wedge B$ *(правило адъюнкции).*

(Первая аксиоматизация системы **R** появилась в *[Belnap 1967]* посредством добавления аксиомы (Demodaliser) $p \to ((p \to p) \to p)$ к системе следования **E**. Последняя является результатом модификации и реконструкции А. Андерсоном Н. Белнапом (см. *[Anderson and Belnap* 1975]) системы **П'** с так называемой *сильной импликацией,* сформулированной В. Аккерманом в 1956 г. Система **E** является одновременно релевантной и модальной логикой. В действительности, определяя $\Box p =: (p \to p) \to p,$ находим, что **E** имеет нечто похожее на модальности в **S4** (см. там же, §4,3 и §10). Импликативный фрагмент **R** (аксиомы **Rl — R4**) обозначается посредством $\mathbf{R}_{\to}$.

Известно, что $\mathbf{R}_{\to}$ может быть аксиоматизирован посредством следующих аксиом: (R4), $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$, $((p \to p) \to q) \to q$ и (Demodaliser). Тогда сильная импликация $\mathbf{E}_{\to}$ аксиоматизируется посредством отбрасывания (Demodaliser) из $\mathbf{R}_{\to}$.)

Примечательным свойством релевантных систем является то, что правило *дизъюнктивного силлогизма* (Dis)

$A, \neg A \vee B \vdash B$

для них не имеет места, поскольку соответствующая формула

$A \wedge (\neg A \vee B) \to B$

не является теоремой **E** и **R**.

(Уже в *[Lewis and Longford* 1932] показано, как из $p \wedge \neg p$ с помощью правила Dis выводима любая формула *q*. В современной нотации это выглядит так:

(1) $p \wedge \neg p$ посылка
(2) p $\wedge$-удаление
(3) $\neg p$ $\wedge$-удаление
(4) $\neg p \vee q$ $\vee$-введение
(5) q из 2 и 4 по правилу Dis.
).

Если мы добавим «парадоксальную» формулу $p \to (q \to p)$ к **R**, то получим классическую логику **C**$_2$.

(Релевантисты называют эту формулу «позитивным парадоксом».)

Если в **R** отбросим аксиому $\neg\neg p \to p$, то получим конструктивную *{интуиционистскую)* версию релевантной логики *[Dunn* 2000].

(Отметим, что в *[Смирнов* 1972] построено «абсолютное исчисление предикатов», которое после осознания того, что импликативный фрагмент этого исчисления есть импликативный фрагмент **R**, было обозначено в *[Смирнов* 1979] как **RA**. В секвенциальном виде **GRA** — это *интуиционистская* система в генценов-ской формулировке без структурных правил утончения. Показывается, как от **GRA** можно элегантно перейти к минимальной интуиционистской логике (о ней чуть ниже), к самой интуиционистской и к классической. В гильбертовском виде **RA** есть **R** без закона дистрибутивности и без закона снятия двойного отрицания.)

Добавление к этой версии $p \to (q \to p)$ приводит к интуиционистской логике **Int.** Здесь правило адъюнкции заменяется на аксиому $p \to (q \to (p \wedge q))$.

Мы уже знаем (см. выше раздел 5.4.4), что имеется четырехзначная матрица Смайли $\mathfrak{M}_{E_{fde}}$, которая является характеристической для

первопорядкового следования в **E** и **R**. Интересный результат содержится в *[Swiiydowicz* 2008]: **R** имеет континуальное множество предтабличных расширений.

8.5.2. Некоторые свойства

Казалось бы, все проблемы решены и наконец-то формализована подходящая теория логического следования. Более того, в *[Dunn* 1966] (и независимо в *[Максимова* 1967)]) проведена алгебраизация системы **R** посредством введения *моноида Де Моргана* и показано, что алгебра Линденбаума для **R** есть в точности моноид Де Моргана. Эта структура есть соединение дистрибутивной решетки Де Моргана и абелева моноида с дополнительными условиями, одним из которых является неидемпотентность моноидной операции $\circ$ $(x \leq x \circ x)$ [29]. Важным является то, что моноиды Де Моргана резидуированы, т.е. там относительно операции $\circ$ имеется резидуальная операция →*:*

$x \circ y \leq z$ т.т.т., когда $x \leq y \to z$.

Хотя стоит заметить, что здесь эта операция есть $\neg(y \circ \neg z)$. В свою очередь, $x \circ y = \neg(x \to \neg y)$.

Однако построить крипковскую семантику для **R** не удавалось, пока в 1973 г. не была изобретена *тернарная семантика Крите,* т.е. с тернарным отношением достижимости (см. *[Роутлей и Мейер* 1981]). Стоит сказать, что и по сей день ее интуитивное содержание остается неясным.

С самого появления системы **R** много внимания было уделено проблеме разрешения (см. обзор этой проблематики в *[Dunn and Restall* 2002]. Интерес подогревался еще тем, что в *[Harrop* 1965] было высказано утверждение, что все философски интересные пропозициональные логики должны быть разрешимы.

Оказалось, эта проблема легко решается для различных фрагментов **R**: для $\mathbf{R}_{\to}$ и $\mathbf{E}_{\to}$ это было сделано в 1959 г. С. Крипке который представил указанные логики в виде секвенциальных исчислений. В 1961 г., применяя метод Крипке, была доказана разрешимость импликативно-негативного фрагмента **E** (N. Belnap and J. Wallace), что непосредственно распространялось на такой же фрагмент **R**, а в 1966 г. была доказана разрешимость **R** без закона дистрибутивности (R. Meyer). Более того, в 1968 г. было показано, что система **R** с аксиомой $p \to (p \to p)$ (об этой системе в следующем разделе), разрешима (R. Meyer).

Однако совершенно неожиданно появилось доказательство того, что системы **E**, **R** (и родственные им) *неразрешимы [Urquhart* 1984]. А затем оказалось, что *интерполяционное свойство* — фундаментальное свойство всех «хороших» логических систем -для **E** и **R** не имеет места *[Urqiihart* 1993].

И тем не менее, основополагающая идея о том (начиная с матрицы Смайли), что четырехзначная семантика может оказаться адекватной для R, была наконец реализована в *[Mares* 2005], где была построена для R четырехзначная *окрестностная* семантика Крипке.

В 1957 г. В. Крейг (W. Craig) доказал теорему об интерполяции в классической логике предикатов: если выводимо $A \Rightarrow C$, то можно построить формулу *B,* содержащую лишь термины, входящие и в *A,* и в C, такую, что выводимы $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$. Эта теорема имеет место для рассмотренных выше логик **Int, K, K4, S4, Grz, S5,** и **GL.** Вызвало удивление, что интерполяционным свойством не обладают конечнозначные логики Лукасевича Ł_n и сама логика Ł_∞ (см. *\Krzystek and Zachorowski* 1977]). Но здесь как раз ничего удивительного нет, учитывая чисто теоретико-числовую природу Ł_n (см. выше раздел 8.1).

8.5.3. Логика RM

Логика **RM** считается «лабораторией релевантной логики» (К. Мейер), а по мнению А. Аврона: «Система **RM** наиболее интересная (и на наш взгляд, также самая важная) среди логик, разработанных школой Андерсона и Белнапа» *[Avron* 1987]. По существу, система **RM** играет ту же роль среди релевантных логик, что и система **S5** среди модальных логик.

Как мы уже знаем, добавление формулы

$p \to (q \to p)$

к **R** дает классическую логику. Однако можно ослабить эту формулу за счет подстановки *p* вместо *q.* Такая формула обозначатся посредством **M**, а система **R + M** получила название логики **RM (R-Mingle).**

В начале 60-х годов началось активное изучение системы **RM** и в 1967 г. К. Мейером было установлено (см. *[Anderson and Belnap* 1975]), что характеристической матрицей для **RM** является бесконечнозначная матрица Т. Сугихары, предложенная для элиминации некоторых парадоксов материальной импликации *[Sngihara* 1955]:

$\mathfrak{M}^S_\infty = \langle V, \neg, \vee, \wedge, \to, D \rangle$, где

V есть $\{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,

$$\neg x = -x,$$
$$x \vee y = max(x, y),$$
$$x \wedge y = min(x, y),$$
$$x \to y = \begin{cases} \neg x \vee y, & \text{если } x \le y \\ \neg x \wedge y, & \text{если } x > y. \end{cases}$$

Множеством выделенных значений D является множество натуральных чисел.

Заметим, что матрица $\mathfrak{M}^S_3$ есть не что иное, как характеристическая матрица M_3 для трехзначной логики **RM3** (см. выше раздел 3.5.2.1), которая аксиоматизируется посредством добавления к **R** следующих аксиом *[Brady* 1982]:

1. $(\neg p \wedge q) \to (p \to q)$
2. $p \vee (p \to q)$.

Доказательство полноты **RM** дает *следствие.* Предположим, высказывание *A* содержит *n* пропозициональных переменных и в матрице $\mathfrak{M}^S_n$ V_n есть $\{-n, \ldots, -1, 1, \ldots, n\}$. Тогда $\vdash_{RM} A$, *т.т.т., когда A общезначима в* $\mathfrak{M}^S_n$.

Опираясь на это следствие, Мейер доказывает разрешимость **RM** следующим образом. Каждое высказывание *A* имеет фиксированное конечное число *n* пропозициональных переменных. Исходя из указанного следствия, для данного *A,* $\vdash_{RM} A$, т.т.т., когда *A* общезначима в M^S_n, т.е. истинна в каждой $\mathfrak{M}^S_n$ интерпретации. Таких интерпретаций $(2n)^n$; проверка *A* на каждой из них конечна. Эта конечная проверка отбрасывает каждую не тавтологию *A.* Таким образом, система **RM** разрешима.

В *[Dunn* 1970] вводится понятие *идемпотентного* моноида Де Моргана посредством усиления $x \le x \circ x$ до $x \le x \circ x$ и дается алгебраическое доказательство полноты **RM**. Здесь же показывается, что **RM** есть предтабличная логика, как **S5** и $\mathbf{G}_\infty$, а в статье *[Dunn and Meyer* 1971] представлено погружение $\mathbf{G}_\infty$ в **RM**, откуда следует, что их множество теорем в импликативно-дизъюнктивно-конъюктивном языке совпадают (см. также *[Avron* 1986]). В силу этого некоторые авторы указывают на взаимоотношение $\mathbf{G}_\infty$ с релевантными логиками. Однако **RM** не является релевантной логикой.

Добавление к **R** такой «безобидной» формулы, как $p \to (p \to p)$, резко меняет ситуацию: свойство релевантности не имеет места для

RM. Как показал Р. Мейер в 1971 г. (см. *[Anderson andBelnap* 1975]), в **RM** выводима формула

$\neg(p \to p) \to (q \to q)$ **34**

Также выводим закон линейности

$(p \to q) \vee (q \to p),$

который, как мы знаем, не является интуиционистской формулой, в то время как позитивный фрагмент логики **R** является таковым.

8.5.3.1. Логики $\mathbf{RM}_{\to,\sim}$ и $\mathbf{RM}_{\to}$

Особый интерес представляет импликативно-негативный фрагмент трехзначной логики Собочиньского **S3** (см. выше раздел 3.5.2.1), аксиоматизированный в *[Sobocirisla* 1952]:

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$)
2. $p \to ((p \to q) \to q)$
3. $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$
4. $p \to (q \to (\sim q \to p))$
5. $(\sim p \to \sim q) \to (q \to p).$

Правила вывода: **MP** и подстановка.

Выяснилось (см. *[Parks* 1972]), что эти аксиомы в точности аксиоматизируют импликативно-негативный фрагмент **RM** (обозначим его посредством $\mathbf{RM}_{\to,\sim}$), а матрица из M_3 с операциями ~ и →является характеристической для аксиом 1-5. Отсюда следует, что $\mathbf{RM}_{\to,\sim}$ есть трехзначная логика, в то время как **RM** - бесконечнозначная (специально об этом см. также в *[Avron* 1984]). Отметим также, что в *[Попов* 1984] впервые представлена секвенциальная формулировка $\mathbf{RM}_{\to,\sim}$ и оригинальная семантика для нее с двумя видами оценок.

Еще один результат относительно **RM** состоит в следующем. В этой же работе Б. Собочиньский ставит проблему аксиоматизации импликативного фрагмента $\mathbf{S}_3$, который обозначим посредством $\mathbf{S}_{3\to}$.

После целого ряда работ, начиная с А. Роуза *[Rose* 1953], наконец была получена следующая независимая аксиоматизация $\mathbf{S}_{3\to}$ *[Meyer and Parks* 1972]: в приведенной только что аксиоматизации аксиомы (4) и (5) заменяются на аксиому

U. $((((p\to q)\to q)\to p)\to r)\to(((((q\to p)\to p)\to q)\to r)\to r).$

В этой же работе Р. Мейер и 3. Парке показывают, что $\mathbf{S}_{3\to}$ есть в точности импликативный фрагмент **RM**, который обозначается посредством $\mathbf{RM}_{\to}$. Заметим, что формула **U** не является интуиционистской формулой. Таким образом, добавление формулы **M** к $\mathbf{R}_{\to}$ (такая система обозначается посредством $\mathbf{RM0}_{\to}$ и очевидно, что все ее аксиомы являются интуиционистски значимыми) не образует импликативного фрагмента логики **RM** (!), т.е. **RM** не является консервативным расширением $\mathbf{RM0}_{\to}$.

Остается добавить, что формула **U** сыграет решающую роль при построении *максимальной* булевой решетки импликативных логик (см. ниже *Приложение).*

Новый результат относительно **RM** содержится в *[Blok and Raftery* 2004]. Оказывается, что в отличие от **R** здесь можно определить связку дизъюнкции $\vee$ в терминах $\wedge$ и $\to$ без использования отрицания $\neg$. В этой же работе содержится обширная литература об **RM** и её фрагментах.

Остается только добавить, что между **R** и **RM** содержится континуум логик, удовлетворяющих критерию релевантнети (см. *[Dziobiak* 1983]).

8.6. Паранепротиворечивая логика $\mathbf{C}_{\omega}$ и иерархия ее расширений

В разделе 3.5, где мы рассматривали трехзначные паранепротиворечивые логики (в дальнейшем **PL**), указывалось, что в таких логиках блокируется выводимость $A, \sim A \vdash B$ и, как следствие, закон Дунса Скота

$p \supset (\sim p \supset q).$

Отсюда также следует, что релевантные логики в силу критерия релевантности являются подклассом **PL**. В первой обстоятельной книге по **PL** *[Priest, Routley and Norman* 1989] подробно рассмотрено возникновение **PL** и ее различные направления. См. также обзор в *[Priest* 2002]. Первый обзор на русском языке опубликован в *[Игимуратов, Карпенко и Попов* 1989]. Имеется справочник по паранепротиворечивым логикам *[Beziau, CarnielH and Gabbcy* (eds), 2007].

Обратим внимание на то, что исторически первой законченной системой **PL** является *минимальная интуиционистская логика* И. Йохансон **J** (см. *[Johansson* 1936]), которая получается из интуиционистской логики **Int** (см. выше раздел 8.2.2) посредством отбрасывания из нее закона Дунса Скота. Однако уже Н.А.Колмогоров *[Колмогоров* 1925], принимая предпринятую Э. Брауэром критику традиционной логики, обнаруживает в последней еще один уязвимый, но обойденный критикой Брауэра логический принцип, а именно закон Дунса Скота. Как указывает Колмогоров, эта аксиома «не имеет и не может иметь интуитивных оснований как утверждающая нечто о последствиях невозможного». Таким образом, рождение первой паранепротиворечивой системы логики (импликативно-негативной) следует датировать 1925 г.

8.6.1. Логика $\mathbf{C}_\omega$ и ее свойства

Одной из наиболее известных паранепротиворечивых систем можно считать логику $\mathbf{C}_\omega$ Ньютона да Косты, построенную им в *[Da Costa* 1963] (см. в особенности *[Da Costa* 1974]), и которая считается самой «слабой» **PL**. $\mathbf{C}_\omega$ получается из аксиоматизации Клини классической логики **C**$_2$ (см. выше раздел 1.4) путем замены аксиомы приведения к абсурду (аксиома 9) на закон исключенного третьего. От системы Клини систему $\mathbf{C}_\omega$ отличает лишь одна аксиома, но за счет ослабления отрицания становится не выводим, например, закон Пирса

$((A \supset B) \supset A) \supset A,$

который сам не содержит отрицания, но для вывода которого существенным образом используется аксиома 9, т.е. позитивный фрагмент $\mathbf{C}_\omega$ совпадает с позитивным фрагментом **Int,** который обозначим посредством $\mathbf{Int}^+$. Тогда аксиоматизациейявляется $\mathbf{C}_\omega$ $\mathbf{Int}^+$ (аксиомы 1-8 в аксиоматизации Клини) и добавляются аксиомы:

$\mathbf{C}_\omega\mathbf{1}.\ A \vee \sim A$

$\mathbf{C}_\omega\mathbf{2}.\ \sim\sim A \supset A$

Единственным правилом вывода является **MP**.

Интересно, что Д. Батено *[Batens* 1980] формулирует паранепротиворечивую систему **PI** следующим образом. Берется позитивный фрагмент классической логики, т.е. $\mathbf{Int}^+$плюс закон Пирса, и добавляется только одна аксиома с отрицанием: $A \vee \neg A$.

Из логики $\mathbf{C}_\omega$получается трехзначная **PCont** посредством добавления к первой закона Пирса, законов Де Моргана, выразимости импликации через другие связки и $A \supset \sim\sim A$ (см. выше раздел 3.5.2).

Логика$\mathbf{C}_\omega$ не является *финитно тривиализируемой,* т.е. добавление к ней произвольной недоказуемой формулы не влечет выводимости противоречия, как это доказал Н. да Коста. Заметим, что в $\mathbf{C}_\omega$ не имеет места закон линейности

$(A \supset B) \vee (B \supset A).$

Интересно *принципиальное* различие между паранепротиворечивыми логиками **J** и $\mathbf{C}_\omega$. В **J**, хотя закон Дунса Скотта не имеет места, но выводим его следующий аналог:

$\sim A \supset (A \supset \sim B).$

Заметим также, что для $\mathbf{C}_\omega$, как и для **J**, имеется семантика Крипке (см. *[Baaz* 1986]).

8.6.2. Иерархия параиепротиворечивых систем $\mathbf{C}_n$

На самом деле Н. да Коста строит линейно-упорядоченную иерархию систем $\mathbf{C}_n$ (в том числе и предикатных). Аксиоматизация произвольной $\mathbf{C}_n$ выглядит следующим образом.

Для $1 \leq n \leq \omega$ пусть A^0 — сокращение формулы $\sim(A \wedge \sim A)$, A^n — сокращениедля A^0 , повторенного n раз, а $A^{(n)}$ есть формула $A^1 \wedge A^2 \wedge \ldots \wedge A^n$.

Аксиоматизация каждой $\mathbf{C}_n$ получается в результате добавления к схемам аксиом для $\mathbf{C}_\omega$ следующих формул:

11-n. $B^{(n)} \supset ((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \sim A))$

12-n. $(A^{(n)} \wedge B^{(n)}) \supset ((A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)} \wedge (A \supset B)^{(n)})$.

А. Арруда показала *[Arruda* 1975], что ни одно из этих исчислений не имеет конечной характеристической матрицы, а в *[Fidel* 1977] показано, что логики $\mathbf{C}_n$ разрешимы.

Также установлено, что каждая $\mathbf{C}_n$ строго слабее, чем ее предшественник, т.е. пусть *Th(S)* обозначает множество теорем исчисления *S*. Тогда

$Th(\mathbf{C}_\mathbf{n}) \subset Th(\mathbf{C}_\mathbf{m})$, если $1 \leq m < n < \omega$.

В отличие от $\mathbf{Ł}_\infty$ и $\mathbf{G}_\infty$, $Th(\mathbf{C}_\omega)$ не является пересечением множества теорем в соответствующей последовательности логик, в данном случае в иерархии $\mathbf{C}_n$. Отыскание такой дедуктивной границы, т.е. $Th(\mathbf{C}_{\mathrm{Lim}})$, является открытой проблемой по сей день (см. *[Carnielli and Marcos* 1999]).

Особый интерес представляет логика $\mathbf{C}_1$, поскольку ею определяются все основные свойства логик в иерархии $\mathbf{C}_n$. Именно с нее начинается изложение **PL** в *[Da Costa* 1974]. Она аксиоматизируется следующим образом: к аксиомам системы $\mathbf{C}_\omega$ добавляются

$B^0 \supset (A \supset B) \supset ((A \supset \sim B) \supset \sim A)$

$A^0 \wedge B^0 \supset ((A \wedge B)^0 \wedge (A \vee B)^0 \wedge (A \supset B)^0)$.

Заметим, что в трехзначной паранепротиворечивой логике Сетте $\mathbf{P}^1$ (см. выше раздел 3.5.4) верифицируются все аксиомы для $\mathbf{C}_1$.

В *[Da Costa and Ginllaume 1965]* выяснилось, что в $\mathbf{C}_1$ выводим закон Пирса, значит она и все $\mathbf{C}_n$ содержат позитивный фрагмент классической логики, и все они конечно-тривиализируемы.

8.6.3. Неистинностно-функциональная семантика для паранепротиворечивых логик

В общем случае интерпретация логики **PL** есть отображение (оценка) *v* из множества формул пропозиционального языка **PL** в множество {0,1}, удовлетворяющее следующим требованиям:

$$v(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 1 \text{ или } v(B) = 1$$

$$v(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 1 \text{ и } v(B) = 1.$$

Случай с импликацией зависит от свойств последней и если она классическая, как в **C**$_1$ и **PI**, то

$$v(A \supset B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 0 \text{ или } v(B) = 1.$$

Главный пункт построения семантики для **PL** — это определение условий истинности для отрицания ~, поскольку для того, чтобы не выполнялась выводимость $A, {\sim}A \vdash B$, мы могли бы выбрать оценку *v* такую, которая приписывает *p* и ~*p* значение 1 (и их конъюнкции), в то время как *q* приписывается значение 0. Это можно достигнуть различными способами. Вот некоторые их них:

$$(1)\ v(A) = 0 \Rightarrow v({\sim}A) = 1$$

$$(2)\ v({\sim\sim}A) = 1 \Rightarrow v(A) = 1.$$

Условие (1) определяет свойства отрицания в системе Д. Батенса **PI**, а условия (1) и (2) определяют отрицание в $\mathbf{C}_\omega$. (Этой системе двойственна логика Ж.-И. Безье (J-Y. Beziau), в которой отрицание обладает только свойством

$$(1')\ v(A) = 1 \Rightarrow v({\sim}A) = 0.$$

Заметим, что вместе (1) и (1') определяют классическое отрицание.)
Для того чтобы получить подобную семантику для **C**$_1$ (с которой опять же начинается статья *[Da Costa and Alves* 1977], где предложена семантика для систем **C**$_n$), надо добавить еще два условия:

$$(3)\ v(A) = v({\sim}A) \Rightarrow v(A^0) = 0$$

$$(4)\ v(A^0) = v(B^0) = 1 \Rightarrow v((A * \mathrm{B})^0), \text{ где } * \in \{\vee, \wedge, \supset\}.$$

Логическая истинность определяется обычным образом: $\vDash_{C_1} A$ т.т.т., когда для всех оценок $v,\ v(A) = 1.$

В этом же году была построена семантика и для логики $\mathbf{C}_\omega$,что потребовало некоторого усложнения в силу свойств импликации в этой системе (см. *[Loparic* 1986]).
Обратим внимание, что свойства отрицания весьма необычны в рассмотренных паранепротиворечивых логиках, поскольку истинностные условия для ~*A* не определяются истинностными условиями *A* (если *v(A)* = 1, то *v(~A)* может быть 1 или 0). Такой подход к отрицанию называется неистинностно-функциональным, и

семантика такого рода является *неистинностно-функциональной* и получила название *семантики оценок.* На этой семантике мы остановимся более подробно в разделе 10.5, а здесь рассмотрим некоторые проблемы, связанные с такой семантикой, для **PL**.

8.6.3.1. Неалгебраизуемость $\mathbf{C}_1$

Покажем, что в **C**$_1$ закон Дунса Скота доказуем из следующих двух рссиом (см., например, *[Hunter* 1998]):

$$1.\ A \supset (B \supset A)$$

$$2.\ (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)).$$

Эти аксиомы проходят во всех рассмотренных нами системах **PL**. Если же взять хотя бы ослабленный вариант контрапозиции, который не имеет места в **PL**, то получим закон Дунса Скота:

$$3.\ ({\sim}B \supset A) \supset ({\sim}A \supset B)$$

$$4.\ A \supset ({\sim}B \supset A) - \text{ из } 1$$

$$5.\ A \supset ({\sim}A \supset B) - \text{по транзитивности } 4{,}3.$$

Но отсутствие контрапозиции ведет к весьма нежелательным поледствиям. В общем случае оказывается неприменимым правило эквивалентной замены (см. выше раздел 3.5.3 в связи с трехзначной паранепротиворечивой логикой **J**$_3$). Например, как отмечается в *[Priest* 2002], хотя *A* логически эквивалентно $A \wedge A$, нет гарантии, что отрицания этих формул при данной интерпретации имеют одно и то же истинностное значение. В общем случае, может случиться так, что $A \vdash B$ и $B \vdash A$, но ${\sim}A \nvdash {\sim}B$ и ${\sim}B \nvdash {\sim}A$. Немедленным следствием этого является то, что логическая эквивалентность не является конгруэнцией на алгебре формул, т.е. мы не можем построить алгебру Линденбаума.
Этот результат для системы **C**$_1$ (и, следовательно, для всех **C**$_n$) впервые был получен в *[Mortensen* 1980], а с появлением аппарата алгебраизуемости логик строго обоснован в *[Lewin, Mikenberg and Schwarze* 1991].
Долгое время такое свойство **PL** не давало покоя алгебраистам и вообще ставило под сомнение использование отрицания, т.е. ставило вопрос, является ли отрицание *отрицанием* в **PL?** Но в самое последнее время появились настолько сильные обобщения метода Блока-Пигоцци (см. выше раздел 4.5), что этот новый аппарат стал применяться к **PL** и, в частности, к логикам Н, даКосты (см. *[Caleiro, Congalves and Martins* 2009]).

В свою очередь, отсутствие какой-либо интуитивно приемлемой семантики, в том числе семантики Крипке для иерархии $\mathbf{C}_n$, привело к изобретению в *[Carnielli* 1990] (см. также *[Carnielli* 2000]) так называемой *«семантики возможной переводимости»* (possible-translations semantics). Важность ее заключается в том, что для логик, не имеющих конечной характеристической матрицы, можно представить адекватный конечный подкласс конечных матриц. Другими словами, исходная логика «разлагается» на несколько простых конечнозначных логик. В случае систем $\mathbf{C}_n$ и их вариантов (см. *[Carnielli* 2000]) достаточно взять фрагменты трехзначной паранепротиворечивой логики $\mathbf{J}_3$. Самое интересное то, как отмечается в этой статье, что «семантика возможной переводимости может рассматриваться как обобщение семантики Крипке, в которой мы имеем миры совершенно *различной природы»*.

8.7. Другие бесконечнозначные логики

Рассмотрение этой темы будет продолжено в следующей главе, когда мы обратимся к нечетким логикам в узко-логическом смысле, и тогда опять появятся логики Ł_∞ и $\mathbf{G}_\infty$ и родственные им. Здесь же только отметим логики, связанные со спецификацией множества истинностных значений, как это уже было сделано в начале этой главы в связи с расширениями Ł_∞, а также обратим внимание на тему комбинирования различных логик.

8.7.1. Обобщение логики Поста $\mathbf{P}_п$

В *[Rescher* 1969] отмечается, что непосредственное обобщение логики $\mathbf{P}_п$ (см. выше раздел 5.2.1) на бесконечнозначный случай, как это было сделано с Ł_∞, не имеет успеха, поскольку класс тавтологий пуст. Поэтому пошли по пути обобщения понятия алгебры Поста. Наиболее важной работой здесь является статья *[Rasiowa* 1973], в которой вводятся алгебры Поста порядка ω^+ и соответствующие системы бесконечнозначной (предикатноой) логики. Под ω^+ (или ω+ 1) понимается порядковый тип множества натуральных чисел, дополненных наибольшим элементом ∞, т.е. множество $\{0, 1, 2, \dots, \infty\}$. Теорема представления для таких алгебр доказана в *[Malcsimova and Vakarelov* 1974] и ими же в *[Maksimova and Vakarelov* 1974] вводится адекватная семантика типа реляционной для соответствующих исчислений. Другой вид обобщения на бесконечнозначный случай соответствует алгебрам Поста порядка

$\omega + \omega^*$. (см. *[Epstein and Rasiowa* 1990; 1991]). Здесь множество элементов упорядочено следующим образом:

$0 = e_0 \leq e_1 \leq e_2 \leq \dots, \dots \leq e_{-2} \leq e_{-1} = 1.$

Обратим внимание, что впервые подобное множество истинностных значений было введено в *[Карпенко* 1985] при построении логики Ł_Σ (см. ниже раздел 10.7.1).

8.7.2. Предельные и непрерывные логики

В счетнозначных и континуумзначных логиках особую роль играют различные их подклассы (см. *[Кудрявцев* 1982: 720]). Таковыми являются в первом случае *предельные логики,* а во втором - *непрерывные логики.* Предельные логики представляют собой счетные замкнутые классы функций из $P_{\aleph_0}$, содержащие гомоморфные прообразы всех конечнозначных функций. Существует континуум различных предельных логик. Мощность множества предполных классов в предельных логиках может быть равной любому натуральному числу, а также быть счетной или континуальной (см. *[Деметрович* 1975]).

Естественно, что проблемы, возникающие при изучении функциональных свойств бесконечнозначных логик, становятся гораздо сложнее. Для счетнозначных логик установлена *гиперконтинуальъность* множества всех предполных классов и найдено решение о полноте систем, содержащих множество $P^1_{\aleph_0}$ всех одноместных функций *[Гаврилов* 1965]. А. Саломаа *[Salomaa* 1963] показал, что существует континуум штрихов Шеффера в $P_{\aleph_0}$ и, с другой стороны, доказал, что бесконечнозначная логика Лукасевича Ł_∞ не имеет штриха Шеффера (напомним, что для Ł_n штрих Шеффера построен).

В непрерывных логиках в качестве логических операций выступают непрерывные функции. Специальный ее вариант положен в основу общей теории моделей для бесконечнозначных предикатных логик *[Chang and Keisler* 1966] по аналогии с тем, как была развита теория моделей на основе классической двузначной логики. Здесь же приводятся примеры непрерывных логик, например, логика предикатов Ł_∞.

Заметим, что в *[Волгин и Левин* 1990] (см. также *[Левин* 2006] и, в особенности, *[Левин* 2008]) под непрерывной логикой понимается всякая бесконечнозначная логика с непрерывном отрезком множества вещественных чисел. Рассмотрены различные обобщения и многочисленные применения. Аппарат непрерывной логики эффективно используется в исследовании структурно-сложных информационных и управляющих систем. Отметим также, что уже не раз упоминавшаяся работа Р. Мак-Нотона *[McNaughton* 1951] явилась одной из первых в этой области.

8.7.2.1. Неархимедова логическая многозначность

Интересным современным примером непрерывных логик являются *неархимедовы логики,* что связано с отрицанием аксиомы фундированности.

Нефундированная теория множеств принадлежит к аксиоматическим теориям, в которых не выполняется правило регулярности (другое название - правило фундированности *(well-founctedness)),* например, в данной теории допускается, чтобы множества содержали самих себя: $X \in X,$ или в иной записи: $X = \{X\};$ см. подробнее в *[Aczel* 1988]. Нефундированные множества неявно используются в нестандартном (более точно, неархимедовом) анализе, а именно в анализе бесконечно малых и *р*-адическом анализе. Дело в том, что отрицание аксиомы регулярности (фундированности) в числовых системах подразумевает задание неархимедово упорядоченной структуры. Напомним, что аксиома Архимеда звучит так: для любого положительного вещественного числа *у* существует позитивное целое число *n,* такое что $y > 1/n$ или $ny > 1.$ Неформальный смысл аксиомы Архимеда состоит в утверждении, что все может быть измерено линейкой. Отрицание Архимедовой аксиомы влечет за собой существование бесконечно больших чисел (в случае поля гипервещественных чисел это означает дополнительно существование бесконечно малых чисел (инфинитезималей)).

В серии своих статей (см., например, *[Schumann* 2007; 2008]) А.Н. Шуман предложил использовать нестандартный логический язык, в котором множество формул определялось бы не с помощью индукции, а посредством коиндукции — операции, двойственной индукции (см. *[Bartels* 2003]). Такое множество формул может быть полным относительно своих интерпретаций во множестве [*0, *1] гипервещественных чисел или множестве Z_p целых *р*-адических чисел. Таким образом, Шуман предложил эффективный метод построения совершенно новых логических языков, для которых синтаксические объекты, семантические объекты и деревья доказательств не соответствуют теоретико-множественной аксиоме фундирования. На практике это означает, что данные языки изначально соответствуют нецентрализованным массово-параллельным вычислениям. Поэтому могут использоваться при дизайне массово-параллельных вычислений, а также при разработке их семантики. Вполне естественно, поэтому, что у языков Шумана наблюдаются более богатые выразительные возможности, чем у других логических языков.

8.7.3. Логики со свойствами других логик

Мы сознательно не употребляем здесь термин *«комбинированные логики»* (combining logics), широко используемый в литературе и предполагающий различные комбинации и рекомбинации семантических структур и дедуктивных исчислений, как одной и той же, так и различной природы (см. обзор в *[Carnielli and Coniglio* 2007]), а также первую монографию *[Carnielli, Coniglio, Gabbay, Gouveia and Sernadas* 2008]. Относительно паранепротиворечивых логик мы указывали на семантику возможной переводимости в разделе 8.6.3.1. Заметим только, что на самом деле первые случаи (простейшие) комбинирования логик, а именно умножение друг на друга (различных) логических матриц, отмечены нами в конце раздела 4.3.1. Здесь же мы рассмотрим идею построения бесконечнозначных модальных логик с использованием аппарата многозначной логики, некоторые аналогичные построения и проблему дуальности между логиками.

8.7.3.1. Многозначные модальные логики

Вспомним интерпретацию А.Н. Прайором модальной логики **S5** посредством бесконечного множества 1-0-последовательностей *[Prior* 1957] (см. выше раздел 8.4.2). Новая идея Прайора состояла в том, что в качестве множества истинностных значений можно взять множество бесконечных 1-2-0-последовательностей, где наряду с 1 — «истина» и 0 — «ложь» входит также истинностное значение 2 — «неопределено» *[Prior* 1957]. Тогда проблема состоит в выборе покомпонентных операций над этими последовательностями. Если в случае системы **S5** Прайором используется классическая двузначная логика $\mathbf{C}_2$, то здесь принята трехзначная слабая логика Клини $\mathbf{K}_3^w$, но с двумя выделенными значениям (см. выше раздел 3.4.2). На таких последовательностях определяются модальные операторы возможности и необходимости, причем 1-2-0-последовательность не может начинаться с 2. Полученную систему Прайор назвал логикой «случайного бытия» (см. *[Prior* 1967]), обозначив ее посредством **Q**.

В силу того, что модальные операторы здесь не являются дуальными друг к другу, как во всех рассмотренных выше модальных системах, то семантика и аксиоматизация системы **Q** (гильбертовская аксиоматизация представлена в *[Bull* 1964]) довольно-таки сложны. Система **Q** является нестандартной модальной логикой, поскольку было показано, что **Q** содержится в **S5**, но не является консервативным расширением **S4**.

Система **Q** вызывает к себе повышенный интерес. В *[Correia* 2001] и *[Akata and Nagata* 2007] построена семантика Крипке для **Q** такая, что в каждом возможном мире действует не двузначная логика **C**$_2$, а трехзначная логика $\mathbf{K}_3^W$. В *[Akama, Nagata and Yamada* 2008] система **Q** расширяется временными операторами, на возможность чего уже указывал Прайор, и рассматривается как подходящая логика для оперирования с будущими случайностями.

К. Сегерберг *[Segerberg* 1967], исходя из идей А. Прайора при построении последним системы **Q**, перестраивает льюисовские модальные системы таким образом, что они являются расширением его же трехзначной логики бессмысленности, т.е. логики Бочвара **B**$_3$, но с двумя выделенными значениями (см. выше раздел 3.3.3). В *[Schotch, Jensen, Lars en and Maclellan* 1978] строится модальная логика **K** на основе трехзначной логики Лукасевича **Ł**$_3$, т.е. аксиоматизация для **Ł**$_3$ расширяется аксиомами **K**, и для такой логика строится семантика Крипке, в каждом мире которой действует логика **Ł**$_3$. В *[Morikawa* 1989] этот результат обобщается и расширяется на модальные логики **M, S4** и **S5.** В *[Ostermann* 1988] строятся модальные логики **T, S4** и **S5,** основанные на *n*-значной логике Лукасевича **Ł**$_n$ и с семантикой Крипке, в которой каждый возможный мир ассоциируется с **Ł**$_n$, а в *[Oriowska and Iturrioz* 1999] каждый возможный мир ассоциируется с алгебрами Лукасевича.

С.К. Томасон *[Thomason* 1978] обобщает такой семантический подход, т.е. строит крипковскую семантику для модальных логик на случай, когда оценка задается на произвольном множестве истинностных значений. См. также *[Priest* 2008].

Однако, как отмечается в *[Hdhnle* 2001], возможно и обратное направление, от модальной логики к многозначной. Любая модальная логика с множеством возможных миров *W* и отношением достижимости $R \subseteq W \times W$ может быть переинтерпретирована в 2^w-значную логику посредством кодирования интерпретации с возможными мирами $\mathbf{I}^*\colon \Sigma \times W \to \{0,1\}$ как многозначной интерпретации $\mathbf{I}\colon \Sigma \to 2^W$, где ∑ есть множество пропозициональных переменных. Для модальных логик со свойством финитной аппроксимируемости эта конструкция дает систему с конечнозначной теорией доказательств, характеризующей эти модальные логики *[Caferra and Zabel* 1990].

О комбинировании модальной и многозначной логики см. также в *[Gottwald* 2001].

Добавим также, что в качестве основания для модальных логик могут быть взяты другие неклассические логики. Наиболее разработанным подходом являются *интуиционистские модальные логики* (см. об этом в обзоре *[Zakhaiyaschev, Wolter and Chagrov* 2001], а также раздел 2.4 в книге Д.П. Шкатова *[Шкатов* 2008]. Одной из первых работ в этой области была статья *[Bull* 1965].

В заключение обратим внимание на еще одно разветвленное направление в области бесконечнозначных логик — это *интуиционистские многозначные логики.* Отметим только работы *[Baaz and Fermilller* 1996], где модель Крипке для **Int** обобщается на случай многозначных оценок, и *[Reznik and Curmin* 2001]. Укажем еще статью О.М. Аншакова *[Аншаков* 1983], где производится конструктивизация трехзначных логик Бочвара **B**$_3$ и Холдена **H**$_3$. Одним из основных условий конструктивизации является наличие дизъюнктивного свойства (см. выше раздел 8.2.2) в новой логике.

8.7.4. Дуальность интуиционистских и паранепротиворечивых логик

С подобными дуальными логиками мы уже встречались. Это построенная нами трехзначная паранепротиворечивая логика Брауэра **G**$_3$ (см. раздел 3.2.1), дуальная к трехзначной логике Гейтинга **G**$_3$, а также слабая интуиционистская логика **I**^{1}, дуальная к трехзначной паранепротиворечивой логике Сетте **P**^{1} (см. раздел 3.5.4.1).

Известно, что интуиционистская логика **Int** может быть построена в виде секвенциального исчисления, с теми же правилами вывода, что и классическая логика, но с одним ограничением: сукцедент секвенции не может содержать более одной формулы. Мы получим систему, дуальную к **Int**, если потребуем, чтобы в отличие от классического случая, антецедент секвенции содержал не более одной формулы. Наверное, первая работа на эту тему принадлежит Дж.Чермаку *[Czermak* 1977], который сформулировал логику, дуальную **Int**, в терминах конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. В такой логике не имеет места секвенция вида $A \wedge \neg A \vdash B$. В *[Goodman* 1981] добавляется связка псевдоразности $\dot{-}$ и пропозициональная константа **T**. В этой работе используется понятие алгебры Брауэра, дуальной к алгебре

Гейтинга (см. выше раздел 4.4.2), для того чтобы принять адекватную топологическую семантику для нового исчисления. В *[Смирнов* 1984] (см. также *[Смирнов* 1987]) исчисление Гудмана несколько переформулируется и, что важно, предложены секвенциальные формулировки релевантной логики, т.е. построение дуальной **Int** связывается с релевантными логиками. В *[Urbas* 1996] предлагаются различные секвенциальные дуальные формулировки **Int**, и в итоге возникает вопрос, какая на самом деле паранепротиворечивая логика дуальна к **Int?** Понятно, что общим для всех дуальных к **Int** логикам является наличие закона исключенного третьего.

Этот вопрос и много других обсуждается в статье *[Bnmner and CarteJH* 2008]. Здесь строится дуальное к **Int** гильбертовское исчисление и для него семантика Крипке, которая является в точности дуальной к приведенной нами в разделе 8.2.2.1. В этой работе обобщаются идеи из *[Urbas* 1996] и развивается общий подход к дуализации логик.

(Интересна философская интерпретация такой семантики. Теперь вместо условия сохранности истинности постулируется условие сохранности ложности. Если нечто на данном этапе исследования признается за ложное, то с прогрессом познания оно никогда не может стать истинным.)

Строятся две основные иерархии антиинтуиционистских логик. Первая называется иерархией *антиконструктивных* логик (*AC*-иерархия). Вторая называется иерархией *анти-параполных* логик (*AP*-иерархия). *AC*-иерархия начинается с дуального исчисления логики Йохансона **J** (см. выше раздел 8.6), через дуальную **Int**, и заканчивается дуальными исчислениями $\mathbf{G}_n$, в том числе строится логика $\mathbf{G}_\omega^*$, дуальная к логике Гёделя—Даммита $\mathbf{G}_\infty$. Показывается, что ни одна из известных паранепротиворечивых систем, в том числе рассмотренных нами $(\mathbf{PCont}, \mathbf{J}_3, \mathbf{C}_n)$, не является членом этой иерархии. Таким образом, анти-конструктивные логики составляют новый класс паранепротиворечивых логик.

Вторая иерархия начинается с паранепротиворечивой логики Сетте $\mathbf{P}^1$ и, применяя общую процедуру дуализации параполных логик $\mathbf{I}^n$, получается иерархия паранепротиворечивых логик $\mathbf{P}^n$. Здесь важно то, что по аксиоматизации логик из одной иерархии, строится дуальная аксиоматизация логик из другой иерархии, и наоборот. Заметим, что теперь мы можем объединять две дуальные логики в одну, как это было сделано в *[Rauszer* 1977; 1980], где объединены логика Гейтинга и логика Брауэра и для такой логики строится семантика Крипке.

В итоге ставится глубокий философский вопрос о значении *дуализации* логик, а также вопрос о дуализации других систем логики.

---

9. ТЕОРИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И НЕЧЕТКИЕ ЛОГИКИ

9.1. Введение

С выходом статьи Л. Заде «Нечеткие множества» *[Zadeh* 1965] начинается исключительно бурное развитие новой теории, предназначенной для изучения и анализа систем, в которых основная роль принадлежит суждениям и решениям человека. Такие системы Заде называет «гуманистическими», и к ним относятся психология, социология, политические науки, философия, экономика, лингвистика, операционные исследования, наука управления, физиология и вообще все те системы и процессы, на поведение которых сильное влияние оказывают действия, решения, суждения, эмоции людей. Поскольку эти системы связаны с принципиально нечетким (размытым, расплывчатым) характером человеческих рассуждений (и тем более психики), то сама новая теория получила название «теории нечетких множеств», являющейся обобщением обычной (четкой) теории множеств.

Нечеткая логика, основанная на нечеткой теории множеств, позволяет определять промежуточные значения между стандартными оценками («истина/ложь», «да/нет», «верно/неверно», «холодно/тепло» и т.д.). Оказывается, что понятия «теплее/холоднее» можно сформулировать математически и обработать на компьютере. В этом случае нечеткая логика является попыткой применить в программировании человекоподобное мышление.

С конца 80-х и начала 90-х годов нечеткая логика, под которой зачастую понимается все, что связано с нечеткими подмножествами, занимает чуть ли не ведущее положение в информационных технологиях. Нечеткая логика оказалась очень пригодной для работы с аппроксимированной информацией: она применяется для управления нелинейных систем и для моделирования сложных систем, не имеющих простых математических моделей, где двусмысленность и неопределенность общеприняты. Сегодня нечеткая логика применяется как инструмент управления комплексными промышленными процессами, в экспертных системах и системах обнаружения ошибок. Нечеткие экспертные системы находят широкое применение в медицине и экономике. Области применения нечеткой логики стремительно расширяются, и она давно уже обеспечивает контроль рабочих параметров бытовой техники. Об изменении нашего мира и о применении нечеткой логики в повседневной жизни см. *[McNeill andFreiberger* 1993] и *[Van Pelt* 2008].

В настоящее время издаются более десяти специализированных журналов по нечетким множествам и системам. Один только международный журнал *«Fuzzy sets and systems»,* с 1970 г. начал издавать около 300 статей в год. Хорошим введением в теорию нечетких множеств является монография А. Кофмана *[Кофман* 1982]. Здесь приведена значительная библиография (с. 400-424) с добавлением русскоязычной литературы по этой теме (с. 424-427). См. также библиографию в *[Kandel and Yager* 1979], которая насчитывает 1799 названий. Имеются также обзоры в *[Dubois and Prade* 1994] и *[Dubois, Prade and Sessa* 1994, 1994]. В *[Hcihnle* 2001] отмечается, что поиск соответствующей литературы в Библиотеке Конгресса США обозначил, по крайней мере, 150 книг (включительно по 1999 г.), в заглавии которых встречаются термины *"fuzzy logic", "fuzzy systems"* и *"fuzzy set".* Отметим только некоторые из них, ставшие классическими: *[Nowak* 1989], *[Zimmermann* 1991 (2001)], *[Gottwald* 1993], *[Kruse, Gebhardt and Klawonn* 1994], *[Klir and Yuan* 1995 (2007)], *[Nguyen and Walker* 1999 (2005)]. На более поздние книги будем ссылаться по ходу изложения материала.

С середины 90-х годов стали выходить книжные серии, самая известная из которых *"Studies in Fuzziness and Soft Computing"* (245 томов по 2009 г.) Последний том посвящен основам теории нечетких множеств *[Wang, Da Ruan and Kerre* 2009]. С 1998 г. стала выходить фундаментальная серия справочников по нечетким множествам *("The Handbook of Fuzzy Sets Series").* Особо стоит отметить т. 7, *[Dubois and Prade* (eds.), 2000] с предисловием Л. Заде, в котором говорится, что издание этого тома является монументальным достижением в области теории нечетких множеств, ее границ и важных применений.

Интересна следующая оценка теории Л. Заде: «Концепция размытых можеств, сформулированная в работах Заде, прозвучала как вызов, брошенный европейской культуре с ее дихотомическим видением мира в жестко разграничиваемой системе понятий» *[Налимов* 1979].

Нас же во всем этом будут интересовать в основном соотношения с логикой.

9.2. Нечеткие множества и соответствующая логика

Исходным понятием обычной теории множеств является понятие принадлежности $x \in A$ элемента *x* некоторого множества *X* к определенному подмножеству $A \subset X$. Для выражения этой принадлежности можно использовать и другое понятие - характеристическую функцию μ_A, значение которой указывает, является ли (да или нет) *x* элементом *A:*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A \\ 0, \text{ если } x \notin A. \end{cases}$$

Однако как раз в гуманитарных науках это понятие принадлежности оказалось недостаточным для рассмотрения ситуаций, которые описываются с помощью нечетко определенных понятий типа «множество высоких людей», «множество хороших логиков», «множество чисел много больше 10», и т.д. Здесь дихотомия рассмотренной функции принадлежности не позволяет любому элементу или принадлежать, или не принадлежать данному множеству. Таким образом, дихотомия функции принадлежности должна быть отвергнута точно так же, как Я. Лукасевич отверг дихотомию функции приписывания истинностных значений (принцип бивалентности).

Тогда, следуя Л. Заде, в основе теории нечетких множеств лежит представление о том, что составляющие множество элементы, обладающие общим свойством, могут обладать этим свойством в различной степени и, следовательно, принадлежать данному множеству с различной степенью. При таком подходе высказывание типа «элемент принадлежит данному множеству *A»* теряет смысл, поскольку необходимо указать, с какой степенью элемент принадлежит данному множеству. Это множество степеней принадлежности может оцениваться на бесконечной шкале действительных (или рациональных) чисел от 0 до 1, или на части чисел интервала [0, 1], в том числе и конечной шкале. Например, объект, определяемый выражением $A = \{(x_1|0{,}2),\ (x_2|0),\ (x_3|0{,}3),\ (x_4|1),\ (x_5|0{,}8)\}$, где x_i — элемент универсального множества *X,* а число после вертикальной черты дает значение характеристической функции на этом элементе, будем называть *нечетким подмножеством множества X.* Следовательно, рассмотренное нечеткое подмножество *A* содержит в небольшой степени x_1, не содержит x_2, содержит x_3 в немного большей степени, чем x_{12}, полностью содержит x_4 и в значительной степени x_5. Итак, *A* является нечетким подмножеством, если там имеется по крайней мере один элемент *x,* который принадлежит *А* со степенью отличной от 1.

Дадим строгое определение понятия нечеткого множества. Пусть *X* — множество, счетное или нет, и *x* — элемент *X.* Тогда *нечеткое подмножество А* множества *X* определяется как множество упорядоченных пар $\{(x,\ \mu_A(x))\}$ для всякого $x \in X,$ где μ_A — *характеристическая функция принадлежности,* принимающая свои значения во множестве *М* (у Заде *М* есть интервал [0,1]), которая указывает степень принадлежности элемента *x* подмножеству *А.* Другими словами, *нечеткое подмнооюество А* множества *X* есть отображение $f\colon X \to [0,1].$ Обозначим посредством $Map(X,\ [0,1])$ множество всех таких отображений.

Если $M = \{0,\ 1\},$ то «нечеткое подмножество» становится «четким», обычным подмножеством. Таким образом, нечеткое подмножество является обобщением обычного подмножества.

Пример. Пусть *N*— множество натуральных чисел: $\{0,1,2,\ \ldots\}.$ Рассмотрим нечеткое подмножество «небольших» натуральных чисел: $A = \{(0|1),\ (1|0{,}8),\ (2|0{,}6),\ (3|0{,}4),\ (4|0{,}2),\ (5|0),\ \ldots\}.$ Здесь функциональные значения $\mu_A(x),$ где *x* = 0, 1, 2, ..., задаются, конечно, субъективно. Таким образом, 0 полностью принадлежит *А,* 1 принадлежит *А* со степенью 0,8, и т. д.

Определим простейшие операции пересечения $\cap$, объединения $\cup$ и дополнения $-$ над нечеткими подмножествами. Пусть *X*— множество и *А* и *В* два нечетких подмножества *X,* Тогда для всякого $x \in X$:

$$\mu_{A\cap B}(x) = min(\mu_A(x),\ \mu_B(x)),$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = max(\mu_A(x),\ \mu_B(x)),$$

$$\mu_{-A}(x) = 1\text{-}\mu_A(x),$$

$$A = B,\ если\ \mu_A(x) = \mu_B(x).$$

Теперь схематично построим *нечеткую логику,* утверждения которой в отличие от классической двузначной логики принимают любое значение в $M = [0,1]$, где *α* и *β*— нечеткое утверждение и $v(\alpha)$ обозначает истинностное значение *α.* Логические связки пропозициональной логики определяются обычным образом:

$$v(\alpha \wedge \beta) = min(v(\alpha),\ v(\beta)),$$

$$v(\alpha \vee B) = max(v(\alpha),\ v(\beta)),$$

$$v(\sim\alpha) = 1 - v(\alpha).$$

Для двух нечетких утверждений α и $\beta,$ если $v(\alpha) = v(\beta),$ то $\alpha \leftrightarrow \beta.$

Заметим, что здесь логические связки определяются как для логики Клини $\mathbf{K}_3$ и ее обобщений. Поэтому естествен следующий результат. Как известно, обычная теория множеств и законы классической логики являются примерами моделей, удовлетворяющих булевой алгебре (см. выше раздел 4.4.1). Возникает вопрос, моделями какой алгебры является теория нечетких множеств и нечеткая логика? Легко показать, что *нечеткой алгеброй* (типа 1) является алгебра Де Моргана, или, подругому, дистрибутивная решетка без дополнений, т.е. булева алгебра без закона исключенного третьего $(A \cup -A) = 1$ (и, соответственно, без закона непротиворечия $-(A \cap -A) = 1).$

Например, пусть $A = \{(x_1|0{,}2),\ (x_2|0{,}7),\ (x_3|1),\ (x_4|0)\}.$ Тогда $-A = \{(x_1|0{,}8),\ (x_2|0{,}3),\ (x_3|0),\ (x_4|1)\}.$ Отсюда, $A \cup -A = \{(x_1|0{,}8),\ (x_2|0{,}7),\ (x_3|1),\ (x_4|1)\},$ т. е. $A \cup -A \neq 1.$ Поскольку множеством истинностных значений у Заде является интервал [0, 1], как в бесконечнозначной логике Лукасевича $\mathbf{Ł}_\infty,$ и здесь не имеет места закон исключенного третьего, постольку в первом приближении $\mathbf{Ł}_\infty$ может рассматриваться в качестве нечеткой логики. Однако имеется существенное уточнение *[Mukaidano* 1981], что нечеткая алгебра есть не что иное, как алгебра Клини, которая получается заменой закона исключенного третьего в аксиомах булевой алгебры законом Клини, где последний есть ослабленное условие закона исключенного третьего:

$$(A \cap -A) \cup (B \cup -B) = B \cup -B^1.$$

Как раз важнейшей и простейшей моделью нечеткой алгебры (типа 1) является логика Клини $\mathbf{K}_3$.

Обратим внимание, что свойства нечеткой теории множеств, как и нечеткой логики, зависят от структуры множества *М.* В нашем случае это структура интервала [0,1], т.е. алгебра $I = <[0,1],\ \cup,\ \cap,\ -,\ 0,\ 1>$ есть алгебра Клини. Мы используем одни и те же символы, как для операций на нечетких подмножествах *Map(X,* [0,1]), так и для операций на [0,1], точно так же, как одни и те же переменные. Конечно, имеются и другие операции на [0,1], которые согласуются с фазификацией, предложенной Заде. Наибольший интерес для логики представляют **t**-нормы, которые мы рассмотрим в разделе 9.3.

Структура *М* не обязательно должна быть линейно-упорядоченной, как у Заде, где *М*= [0,1]. Уже в 1967 г. Дж. Гоген *[Goguen* 1967] сделал обобщение исходных идей Л. Заде, а именно предложил под множеством *М,* в котором функции принадлежности принимают свои значения, понимать множество, наделенное более общей структурой, например, *M* со структурой конечной или бесконечной дистрибутивной решетки и т.д. (см. *[Кофман* 1982]). Поскольку свойства структуры *M* индуцируются (сохраняются) на множестве отображений $\mu_A(x)\colon X \to M,$ мы в результате имеем различные теории нечетких множеств.

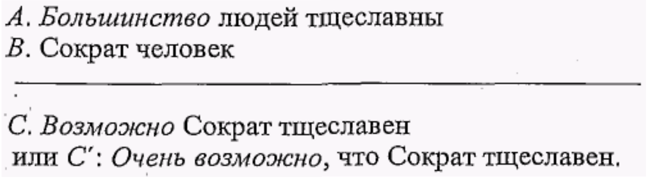
Нечеткая логика, построенная на основе некоторой теории нечетких множеств, является по существу многозначной логикой. Поскольку в основе нечетких множеств Заде лежит множество чисел в интервале [0,1], то это дало повод считать, что нечеткой логикой является именно бесконечнозначная логика Лукасевича Ł_∞. Например, Р. Джайлс *[Gils* 1976] утверждает, что Ł_∞ относится к теории нечетких множеств точно так же, как классическая логика к обычной теории множеств. Такого же мнения и Х. Скала *[Skala* 1978]. Однако заметим, что алгеброй Ł_∞ является *MV*-алгебра Чэна (см. выше раздел 8.1.1), которая значительно богаче алгебры Клини. Все дело в том, что при данном подходе мы никак не можем определить импликацию Лукасевича → посредством исходных операций. Как мы далее увидим, это можно сделать, но для этого нужно изменить определения исходных операций на множестве $Map(X, [0,1])$ (см. 9.3).

В связи с этим стоит согласиться с идеями, высказанными в работе О.М. Аншакова и В.К. Финна *[Аншаков и Финн* 1981], где говорится, что понятие произвольной нечеткой логики весьма неопределенно и может быть уточнено различными способами. В свою очередь авторы дают определение «начальной» нечеткой логики средствами квазибулевой алгебры. Как раз соответствующим уточнением и является алгебра Клини. Обратим внимание, что в этой работе в качестве формализации нечеткой логики предлагается одноимпликационная логика, потому что связки $\vee,\ \wedge,\ \sim$ имеют естественную интерпретацию, связанную с определением операций над нечеткими множествами, а столь же ясной интерпретации импликации как операции не имеется. Опять же заметим, что *пока* не имеется, но см. далее раздел 9.4.

9.3. Вторая стадия фазификации

С работы 1975 г. (см. *[Заде* 1976]), Л. Заде начал развивать так называемую *нечеткозначную логику.* Последняя является результатом двух стадий фазификации, и пока мы рассмотрели только первую стадию, которая состоит в переходе от двузначной к многозначной логике как результат учета степеней принадлежности элементов множеству. Однако фазификации подвергается и само понятие *Истинности* — вторая стадия, — которая состоит в переходе к счетному множеству нечетких истинностных значений в результате отнесения самого понятия *Истинности* к нечетким. Если, скажем, *«а* принадлежит со степенью 0,3 к множеству высоких людей», тогда высказыванию *«а* является высоким» следует приписать в базисной (многозначной) логике значение 0,3. Но поскольку, как уже говорилось, *Истинность* сама является нечетким предикатом, как и предикат «быть высоким», то и рассматривать ее следует аналогично предикату «быть высоким». Степень истинности, которую имеет высказывание *p,* может быть совсем низкой, очень высокой, и т.д. Поэтому, если *a* принадлежит к множеству высоких людей со степенью 0,3, так что высказывание *«а* является высоким» имеет значение 0,3 в некоторой многозначной логике, то оно будет иметь, скажем, значение *не очень истинный* в нечеткозначной логике, поскольку степень истинности этого высказывания в многозначной логике довольно низкая.

Каковы же особенности нечеткозначной логики? Эта логика является основой того, что можно было бы назвать приближенными рассуждениями, которыми пользуются в некорректно определенных или не поддающихся количественному описанию ситуациях, что особенно проявляется, например, в диалоге человека с человеком. Приближенные рассуждения характерны тем, что значения истинности и правила вывода являются не четкими, а не точными. Это в свою очередь требует гораздо более радикальной реконструкции всей логики, чем та, которая произошла в результате появления многозначной логики, поскольку на множестве нечетких истинностных значений не сохраняются обычные логические связки. В итоге все разработанные ранее логические системы (Заде называет их стандартными, включая и многозначную логику) не пригодны для формализации приближенных рассуждений. Примером такого рассуждения в нечеткозначной логике является следующий вариант известного аристотелевского силлогизма (пример Заде):



A. Большинство людей тщеславны
B. Сократ человек

C. Возможно Сократ тщеславен
или *C′*: *Очень возможно*, что Сократ тщеславен.

В этом примере как *C,* так и C′ являются допустимыми приближенными следствиями из *A* и *B* со степенью приближенности, зависящей от определения нечетких предикатов *большинство, воз-*

можно и *очень возможно* как нечетких подмножеств соответствующего универсума рассмотрения.

Согласно Заде, множеством истинностных значений в нечет-козначной логике является счетное множество лингвистических названий значений *Истинности,* понимаемой как лингвистическая переменная, т.е. такая переменная, значениями которой являются слова или предложения естественного или искусственного языка. Будем полагать, что множество значений переменной *Истинность* имеет вид:

Т(Истинностъ) = {истинный, ложный, не истинный, очень истинный, не очень истинный, более или менее истинный, очень очень истинный, не очень истинный и не очень ложный...}.

В свою очередь, переменная *Истинность* имеет также числовые значения, играющие роль различных степеней *Истинности.* При этом в качестве числовых значений берется множество истинностных значений некоторой многозначной логики, обычно континуальной логики Лукасевича $Ł_\infty$. Такая логика называется базовой логикой. Будем предполагать, что $V = [0,1]$, если не оговорено противное.

Теперь перейдем к рассмотрению смысла лингвистических значений *Истинности.* Смысл первичного лингвистического значения *истинный* отождествляется с нечетким подмножеством множества истинностных значений базовой логики. Как обычно, нечеткое подмножество характеризуется функцией принадлежности, которая каждому числовому значению *Истинности* ставит в соответствие число из интервала [0,1]. Таким образом, вторая стадия фазификации состоит в том, что функция принадлежности здесь сама является нечеткой, поскольку ее степень есть нечеткое подмножество в [0,1], а не точки (отдельные числа) из [0,1], т. е.

$$\mu_{\text{истинный}}: [0,1] \to [0,1].$$

Таким образом, в рассмотрение вводятся нечеткие подмножества с нечеткими функциями принадлежности, т.е., если *А* - нечеткое подмножество универсального множества *X,* то значениями функций принадлежности могут быть нечеткие подмножества из интервала [0,1].

9.3.1. Нечеткие множества типа 2

Чтобы отличить такие нечеткие подмножества от нечетких подмножеств, рассмотренных ранее, будем называть их *нечеткими подмножествами типа 2.* Более строго: нечеткое подмножество *А*

типа 2 в *X* есть нечеткое подмножество, которое характеризуется нечеткой функцией принадлежности μ_A как

$$\mu_A(x): X \to [0,1]^J,$$

где значение $\mu_A(x)$ называется нечеткой степенью и является нечетким подмножеством в [0, 1]. В качестве *J* обычно берется [0,1]. Тогда, если нечеткое подмножество типа 1 характеризуется функцией принадлежности $\mu_A(x): X \to [0,1]$, то нечеткое подмножество типа 2 характеризуется функцией принадлежности $\mu_A(x): X \to \mathcal{P}([0,1])$, где $\mathcal{P}([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to [0,1]\}$. По аналогии с этим определяются нечеткие подмножества типа 3, 4 и т. д.

Подчеркнем сразу, что сами нечеткие множества типа 2 являются трехмерными образованиями, а алгебра $\mathcal{P}([0,1])$ представляет собой довольно-таки сложный объект. Именно нечеткие подмножества типа 2, т.е. элементы множества $\mathcal{P}([0, 1])$, и выступают в качестве истинностных значений в *нечеткозначной логике,* понятие которой было введено в 1975 (см. *[Bellman and Zadeh* 1977]). Но для того чтобы строить какую-то нечеткозначную логику, надо выяснить хотя бы основные свойства структуры $\mathcal{P}([0, 1])$.

Как уже говорилось, структурой интервала [0,1] является алгебра Клини. Возникает следующий вопрос: какова решеточная структура множества $\mathcal{P}([0,1])$? Этому вопросу посвящена работа *[Mizumoto and Tanaka* 1976]. При определении операций на элементах множества $\mathcal{P}([0,1])$ применяется *принцип обобщения,* введенный Л. Заде *[Заде* 1976], который носит эвристический характер и позволяет расширить область определения исходного отображения *f* на класс нечетких множеств.

Пусть $A, B \in \mathcal{P}([0,1])$ и пусть * есть бинарная операция, определенная в [0,1]. Тогда для $\forall x,y,z \in [0,1]$ операция *, может быть расширена на нечеткие множества *А* и *В* посредством принципа обобщения следующим бразом:

$$\mu_{A*B}(z) = \bigvee_{z=x*y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)).$$

Отсюда расширенные операции $\max(A,B)$ и $\min(A,B)$ через их функции принадлежности запишем так:

$$\mu_{\max(A,B)}(z) = \bigvee_{z=\max(x,y)} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)),$$

$$\mu_{\min(A,B)}(z) = \bigvee_{z=\min(x,y)} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)),$$

$$\mu_{\neg A}(x) = \mu_{1-A}(x) = \mu_A(1-x).$$

Однако оказалось, что отличия от обычной теории нечетких множеств, т.е. от теории нечетких множеств типа 1, весьма существенны: имеет место квази-решетка с законами де Моргана, т.е. нет поглощения (IV) и дистрибутивности (V) и, конечно, законов (В1) и (В2). Не выполняются также тождества (X), но имеют место тождества (IX) (см. выше раздел 4.4)

(В *[Kamik and Mendel* 1998] результаты этой работы расширены и представлен практически применимый алгоритм для выполнения объединения, пересечения и дополнения нечетких множеств типа 2.)

В *[Nieminen* 1977] проведен более детальный анализ нечеткой алгебры типа 2. Тщательное исследование этой алгебраической структуры, с использованием стандартной математической нотации, проведено в *[Walker C. and Walker E.* 2005]. Особое внимание уделено подалгебрам этой алгебры, имеющим интересные приложения. Здесь устанавливаются некоторые, критерии для этих подалгебр быть решетками, дистрибутивными решетками, алгебрами Клини, алгебрами Де Моргана и т.д. См. также обзор данной тематики в *[Walker C. and Walker E.* 2008].

9.3.1.1. Ограничения и упрощения

Отсутствие законов дистрибутивности и поглощения очень затрудняет вычисление операций на множестве $\mathcal{P}([0,1])$. Поэтому используются различные конструкции, упрощающие технический аппарат нечетких множеств типа 2. Рассмотрим некоторые из них.

А. Наибольшее распространение получили *интервально-значные нечеткие множества* (IVFS), которые появились у разных авторов под разными названиями в одном и том же 1975 г., в том числе и в работе Л. Заде *[Zadeh* 1975]. Интересно, что IVFS переоткрывались и позже. Исходная идея заключается в том, что значениями функции принадлежности *f* являются не подмножества из [0,1], а замкнутые подинтервалы в [0. 1], т.е. отображения $f\colon X \to [0,1]^{[2]}$ есть IVFS. Тогда алгебра $\mathrm{I}^{[2]}$ состоит из пар (*a, b)* таких, что $0 \le a \le b \le 1,$ и соответствующих покомпонентных операций. Фундаментальные свойства этой алгебры исследованы в *[Gehrke, Walker C. and Walker E.* 1996], где показано, что она представляет собой алгебру Де Моргана.

IVFS нашли исключительное развитие и применение. По крайней мере, в монографии *[Mendel* 2001] особое внимание уделяется IVFS, где подчеркивается, что нет никаких разумных оснований не выбрать их. IVFS и основанным на них системам посвящена статья *[Mendel, John and Liu* 2006].

В. Очень содержательным оказался другой подход к моделированию нечеткости, когда стандартной теории нечетких множеств оказывается недостаточно. Основная идея заключается в том, чтобы использовать сразу пару функций принадлежности $(\mu_A^+(x), \mu_A^-(x)),$ обозначенную посредством *IF,* где $\mu_A^+(x)$ есть степень принадлежности *x* в *IF* и $\mu_A^-(x)$ есть степень непринадлежности этого элемента. При этом функции удовлетворяют условию $(I)\colon\ \mu_A^+(x) + \mu_A^-(x) \le 1.$

Такая конструкция впервые была предложена в 1983 г. К. Атанассовым (см, *[Atanassov* 1986] и его монографию *[Atanassov* 1999]) и названа *интуиционистскими нечеткими множествами* (IFS). В силу простоты и удобства применения IFS привлекла к себе большое внимание и уже через 20 лет список литературы насчитывал более 400 публикаций (см. обзор литературы по IVFS и IFS в *[Nikolova M, NikolovN., Cornells andDeschrijver* 2002]).

Однако, и это было уже отмечено самим Атанассовым и другими, IFS-конструкция изоморфна IVFS-конструкции. Использование инволютивного отрицания, действующего на пару функций $(\mu_A^+(x), \mu_A^-(x)),$ формально коллапсирует IFS-теорию в IVFS-теорию. В действительности, условие *(I)* всегда гарантирует существование интервала $[(\mu_A^+(x),\ 1-\mu_A^-(x))],$ который можно идентифицировать с соответствующим интервалом в IVFS-теории. К тому же IFS-теория является специальным случаем *L*-нечетких множеств в смысле Гогена *[Goguen* 1967].

Но в итоге все это ставит очень серьезные проблемы "относительно названия *«интуиционистские* нечеткие множества» и тем более относительно названия *«интуиционистская* нечеткая логика». Для логиков создавшееся положение оказалось совершенно неприемлемым, чем и была вызвана статья ведущих специалистов *[Dubous, Gottwald, Hdjek, Kacprzyk and Prade* 2005].

Здесь отмечается, что в интуиционистской нечеткой теории множеств, основанной на интуиционистской логике **Int** (см. выше раздел 8.2.2), не имеет места инволютивный закон снятия двойного отрицания, к тому же в **Int** имеет место закон непротиворечия, которого нет в IFS. Добавим, что в **Int,** как уже говорилось, не имеет места один из законов Де Моргана, в то время как алгебраической структурой IFS является именно алгебра Де Моргана. Статья носит весьма корректный характер, отмечаются преимущества IFS при интуитивной интерпретации и применении, и предлагается, совершенно справедливо, название IFS переименовать в *«биполярные нечеткие множества».*

С. Если же все-таки отдается предпочтение нечетким множествам типа 2, то обычно в качестве истинностных значений для так называемой нечеткозначной логики используются не просто элементы множества $\mathcal{P}([0,1])$, а так называемые нечеткие числа *[Bellman and Zadeh* 1977] (например, число «чуть больше 7»), т. е. элементы из $\mathcal{P}([0,1])$, но с дополнительными условиями:

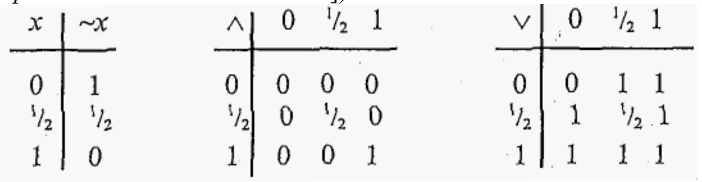
нормальность: $\exists x \in [0,1],\ \mu_A(x) = 1,$

выпуклость: $\forall x,y,z \in [0,1]^3,\ x \leq y \leq z \Rightarrow \mu_A(y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(z)).$

Как следует из *[Mizunioto and Tanaka* 1976], алгеброй нечеткой теории множеств типа 2 с условием нормальности является также деморгановская недистрибутивная квази-решетка, но в которой выполняются условия (IX) и (X). Если же добавить условие выпуклости, то алгеброй нормальных выпуклых чисел является алгебра Де Моргана (см. также *[Walker C. and Walker E.* 2005]).

9.3.1.2. Иерархия минимальных моделей для нечетких алгебр типа 2

Обратим внимание, что открытие в *[Mizumoto and Tanaka* 1976] того факта, что расширенные операции *max* и *min* на элементах множества $\mathcal{P}([0, 1])$ образуют квази-решетку, представляет собой особый интерес уже потому, что логики со структурой квази-решетки (например, трехзначная логика Бочвара **B**₃) получили широкое распространение. **B**₃ выполняет все условия для нечеткой алгебры типа 2, но кроме этого выполняются законы дистрибутивности. Поэтому представляет интерес матрица VII, которая появилась в результате классификации трехзначных логик значения (см. *[Финн, Аншаков, Григолия жЗабеоюайло* 1980]):



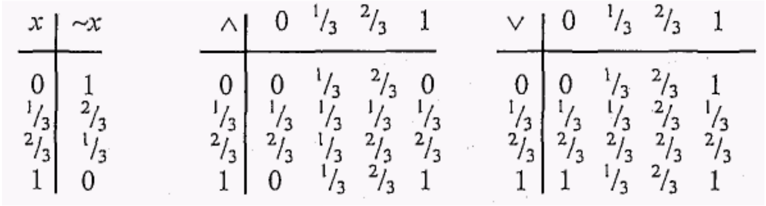
x	$\sim x$
0	1
1/2	1/2
1	0

$\wedge$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	0
1	0	0	1

$\vee$	0	1/2	1
0	0	1	1
1/2	1	1/2	1
1	1	1	1

Эти операции образуют деморгановскую квази-решетку без законов дистрибутивности, здесь выполняется IX(b), но не выполняется IX(a). В *{Карпенко и Шалак* 1997] показано (с помощью компьютерной программы), что не существует трехзначной матрицы, в точности выполняющей все условия из *[Mizumoto and Tanaka* 1976] для нечеткой алгебры типа 2. Однако найдены четыре пары подходящих

четырехзначных матриц, в которых две трехзначные подматрицы со значениями $\{0,\ {}^1/_3\ 1\}$ и $\{0,\ {}^2/_3,\ 1\}$ в точности моделируют слабые операции Клини (или внутренние операции Бочвара — см. выше раздел 3). Таким образом, во всех полученных четырехзначных матрицах обобщаются эти операции. Из этих четырех пар матриц выберем ту, в которой операции $\wedge$ и $\vee$ на множестве истинностных значений $\{{}^1/_3,\ \ {}^2/_3\}$ есть *min* и *max* соответственно. Рассмотрим эти истинностные таблицы:



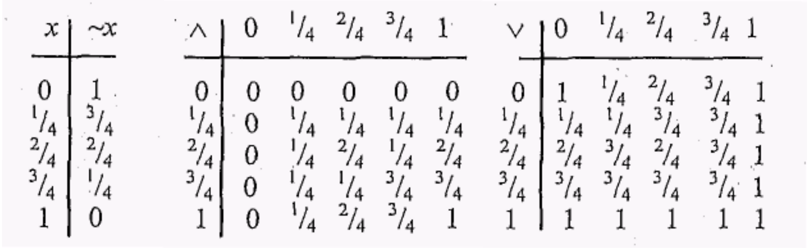
x	$\sim x$
0	1
1/3	2/3
2/3	1/3
1	0

$\wedge$	0	1/3	2/3	1
0	0	1/3	2/3	0
1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
2/3	2/3	1/3	2/3	2/3
1	0	1/3	2/3	1

$\vee$	0	1/3	2/3	1
0	0	1/3	2/3	1
1/3	1/3	1/3	2/3	1/3
2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
1	1	1/3	2/3	1

Суммируем свойства этой матрицы. Во-первых, две указанные трехзначные подматрицы образуют дистрибутивную квазирешетку. Во-вторых, подматрицы с истинностными значениями $\{0,\ 1\}$ и $\{{}^1/_3,\ \ {}^2/_3\}$ образуют булеву решетку. В результате это дает деморгановскую недистрибутивную квази-решетку. Таким образом, эта матрица является моделью для нечеткой алгебры типа 2, точно так же как трехэлементная матрица Клини является моделью для нечеткой алгебры типа 1.

Однако интересно рассмотреть модель для *нормальной* нечеткой алгебры типа 2. Оказывается, не существует не только трехэлементной, но и четырехэлементной модели для нормальной нечеткой алгебры типа 2 (!) С помощью компьютерной программы было найдено 14 пар подходящих пятизначных матриц. Рассмотрим одну из них, которая отличается от пятизначных сильных матриц Клини только тем, что ${}^2/_4 \wedge {}^3/_4 = {}^1/_4$ и ${}^2/_4 \vee {}^1/_4 = {}^3/_4$. Этого оказалось достаточно, чтобы разрушить дистрибутивность и закон поглощения:



x	$\sim x$
0	1
1/4	3/4
2/4	2/4
3/4	1/4
1	0

$\wedge$	0	1/4	2/4	3/4	1
0	0	0	0	0	0
1/4	0	1/4	1/4	1/4	1/4
2/4	0	1/4	2/4	1/4	2/4
3/4	0	1/4	1/4	3/4	3/4
1	0	1/4	2/4	3/4	1

$\vee$	0	1/4	2/4	3/4	1
0	1	1/4	2/4	3/4	1
1/4	1/4	1/4	3/4	3/4	1
2/4	2/4	3/4	2/4	3/4	1
3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	1
1	1	1	1	1	1

Заметим, что здесь подматрицы $\{0,\ {}^2/_4,\ 1\}$ и $\{0,\ {}^1/_4,\ {}^3/_4,\ 1\}$ являются в точности трехзначными и четырехзначными матрицами Клини.

В итоге мы имеем иерархию минимальных логических матриц, в основе которой лежат следующие соответствия:

- наивная теория множеств - алгебра Буля - *двузначные* матрицы классической логики;
- теория нечетких множеств типа 1 — алгебра Клини (деморгановская дистрибутивная решетка с законом Клини) — *трехзначные* матрицы Клини;
- теория нечетких множеств типа 2 - деморгановская недистрибутивная квази-решетка с невыполнением условия (X) - *четырехзначные* матрицы;
- теория нормальных нечетких множеств типа 2 - деморгановская недистрибутивная квази-решетка с выполнением условия (X) — *пятизначные* матрицы.

Отметим, что матрицами для теории интервально-значных нечетких множеств и матрицами для теории нормальных выпуклых множеств типа 2 являются четырехзначные матрицы, поскольку алгеброй этих множеств является алгебра Де Моргана. Эти матрицы являются минимальными для различения алгебры Де Моргана от алгебры Клини.

9.3.2. На пути к нечеткой логике

Бесчисленное употребление термина «нечеткая логика» в заглавии работ может ввести читателя в заблуждение. Как уже подчеркивалось, возникают серьезные технические трудности при оперировании объектами такой сложной природы, как нечеткие множества типа 2. В предисловии к сборнику *[Ягер* (ред.), 1986] Л. Заде обращает внимание на незатронутую область исследований в этой книге, а именно на важность таких понятий, как нечеткие множества высших типов, т.е. множества с нечеткими функциями принадлежности. Развитие эффективных средств анализа нечеткой арифметики и нечеткозначной логики Л. Заде считает проблемой первостепенной важности. Эти проблемы рассматриваются в сборнике *[Поспелов* (ред.), 1986] (см. в особенности гл. 6 «Нечеткая логика и приближенные рассуждения»). Прояснению природы нечетких множеств типа 2 и того, как можно их использовать, посвящена статья *[Mendel and John* 2002]. См. также обзор *[Mendel* 2007] и монографию *[Castillo and Melin* 2008].

В большинстве случаев термин «нечеткая логика» стал синонимом «теория нечетких множеств». Зачастую под системой нечеткой логики понимается описание сложных процессов, природа которых не может быть аппроксимирована традиционными математическими методами, а если и можно это сделать, то весьма сложным образом.

(Обратим внимание на то, что явным недостатком нечеткой логики Заде, основанной на теории нечетких множеств, является то, что истинностные значения приписываются высказываниям посредством априорно заданных μ-функций. В связи с этим обратим внимание на *ДСМ-метод автоматического порождения гипотез* (активно развиваемый с начала 80-х годов; см. *[Аниюков* (ред.), 2009]), где истинностные значения конструктивно определяются посредством правил правдоподобного вывода для индукции и аналогии.)

Однако возникает на самом деле логическая проблематика: как можно делать выводы на основе данных, не являющихся «четкими»? В этом случае человек имеет дело с *приблиэюенными рассуждениями.* В курсе лекций Г. Я. Яхъяевой «Основы нечетких множеств» (Интернет-Университет, 2006) говорится: «Приближенные рассуждения лежат в основе способности человека понимать естественный язык [...], в общем, принимать решения в сложной и не полностью определенной среде. Эта способность рассуждений в качественных, неточных терминах отличает интеллект человека от интеллекта вычислительной машины» (см. лекцию 10: «Теория приближенных рассуждений»). Главным понятием теории приближенных рассуждений является *композиционное правило вывода,* введенное Л. Заде в 1973 г. (см.. [Заде 1974], а также *[Круглое и Дли* 2002]). Пусть *U* и V-два универсальных множества с $u \in U$ и $v \in V$ соответственно. Пусть *A* и *R* — нечеткие подмножества множеств *U* и $U \times V$. Тогда *композиционное правило вывода,* введенное Заде в 1973 г., утверждает, что *из нечетких множеств A и R следует нечеткое множество* $B = A \circ R$, где $\circ$ есть операция композиции нечетких множеств. Если эту операцию распишем, то в общем случае получим следующую формулу:

$$\mu_B(v) = \sup_{u \in U_x}(\mu_A(u) * \mu_R(u,v)),$$

где * есть некоторая бинарная операция. Само правило получило название *«sup-star композиции».* Частным случаем этого правила является *modus ponehs.* Важным оказалось выяснить, что понимать под операцией * ? Оказалось, что этой операции соответствуют **t**-нормы (см. следующий раздел).

Заметим, что по аналогии с нечеткой логикой типа 1 вводятся нечеткозначные логические операции и обещается *sup-star композиция* на случай нечетких множеств типа 2. Специально этот вопрос рассматривается в статье *[Dubois and Prade* 1979], но их формула использует в качестве * только операцию min. Обобщенная формула для расширенной *sup-star композиции* в применении к нечетким множествам типа 2 была дана в статье *[Karnik, Mendel and Liang 1999].*

Однако строго о логической дедукции здесь говорить нельзя. Поэтому не случайно много усилий было потрачено на то, чтобы решить проблему импликации, т.е. выяснить, что является нечеткой импликацией. Отметим только статьи *[Mamdani and Sembi* 1979] и *[Fodor* 1991], главу в книге *[Klir and Yuan* 1995] и монографию *[Baczynski and Jayaram* 2008], а также книгу *[Батыришн* 2001], посвященную вообще операциям в нечеткой логике.

Как известно, в классической логике формулы $A \to B, \neg A \vee B$ и $\neg(A \wedge \neg B)$ логически эквивалентны. Но мы уже знаем, что в $\mathbf{K}_3$, являющейся простейшей моделью нечеткой алгебры типа 1, подобное определение импликации не является удовлетворительным: класс тавтологий пуст, а при двух выделенных значениях правило modus ponens не сохраняет тавтологичность. Импликация, определенная указанным образом, получила название S-импликации.

Проблемы, вызванные тем, что на самом деле надо понимать под нечеткой логикой (FL), сложности с логическими операциями и с дедукцией, а главное, огромное число пишущих людей о FL и не имеющих представления о самой логике, привело к дискуссии, вызванной статьей *[Elkan* 1993], где «доказывалось», что FL невозможна. Основная часть дискуссии отражена в специальном выпуске журнала "IEEE Expert " (1994).

В дискуссию пришлось вмешаться Л. Заде *[Zadeh* 1994], где он сделал разделение FL на два направления: *в узком смысле и в широком, смысле.* В узком смысле FL — это логическая система, являющаяся расширением многозначной логики. Однако даже, для FL в узком смысле список основных операций очень отличается как по духу, так и по содержанию от списка основных операций для систем многозначных логик. В ее широком смысле, который сегодня является преобладающим в использовании, FL равнозначна теории нечетких множеств. С этой точки зрения, FL в узком смысле является разделом FL в широком смысле. Примерно то же самое было сказано в статье 1998 г. (см. *[Заде* 2001]). К этой теме Заде вернется в предисловии к *[Dubois and Prade* (eds.), 2000], которое почти целиком посвящено разъяснению смысла термина «нечеткая логика». FL в ее широком смысле имеет четыре принципиальных аспекта: логический аспект, который по существу является FL в узком смысле; теоретико-множественный аспект, наиболее распространенный и связанный с исходной работой Заде *[Zadeh* 1965]; аспект нечетких отношений и зависимостей, где центральным является понятие лингвистической переменной и понятие нечеткого правила; эпистемический аспект. Также делается важное замечание, что FL в целом скорее дополняет, чем конкурирует с существующими логическими теориями.

Серьезный ответ на то, чем является FL в. узком смысле, был дан в монографии *[Hajek* 1998], где FL предстала в виде гильбертовских исчислений, а многозначная логика стала ядром или базисом FL в узком смысле. Более того, здесь показано, что средствами первопорядковой многозначной логики можно адекватно моделировать некоторые нечеткие правила (см. пример 7) или показывать, что некоторые правила FL не верны в системе многозначной логики, что ставит под сомнение их правильность в FL. На это специально также указывается в *[Hahnle* 2001: 333].

9.4. Логики, основанные на t-нормах

К концу XX в. появилась потребность в некоторой классификации бесконечнозначных логик и выделении соответствующей базисной логики, исходя из которой простым расширением можно было бы получать другие хорошо известные логики. Тогда в основе такой логики должна лежать очень элементарная логическая операция. Подходящим инструментом для этого оказались триангулярные нормы (**t**-нормы), которые расширяют аппарат нечеткой логики. Систематическое изучение нечетких логик, основанных на **t**-нормах, начато в монографии *[Hdjek* 1998], которая положила начало новому этапу в развитии многозначных логик. Здесь начато исследование нечетких логик как неклассических логик в виде гильбертовских пропозициональных и предикатных исчислений. См. также *[Тиггтеп* 1999], *[Nowak, Perfilieva and Mockor* 2000] (имеется перевод на рус. яз.) и *[Gottwald* 2001]. В статье для «Стэнфордской Философской Энциклопедии» нечеткая логика представлена именно в этом духе *[Hdjek* 2006] и несколько шире в *[Hdjek* 2002 (2006)].

9.4.1. Т-нормы

Т-нормы были введены в 1958 г. в рамках теории вероятностных метрических пространств (см. *[Schweizer and Sklar* I960]), исходя из идей К. Менгера (1942) о триангулярных неравенствах. Подробное изложение теории **t**-норм, их происхождение, развитие и применение имеется в монографии *[Klement, Mesiar and Pap* 2000] (см. также *[Klement and Mesiar* (eds.), 2005]). Класс **t**-норм исключительно обширен и имеет довольно-таки непростые примеры, но для нас важно то, что **t**-нормы есть вид бинарной операции, которая обобщает, с одной стороны, операцию решеточного пересечения, а с другой стороны, свойства обычной классической конъюнкции.

Т-нормой является бинарная операция *, которая определяется на интервале [0,1] и удовлетворяет следующим свойствам. Для всех $x, y, z \in [0, 1]$:

- *Коммутативность,*,$x * y = y * x.$
- *Ассоциативность,*$(x * y) \; * z = x * (y * z).$
- *Монотонность,* если $x \leq y$, то $x * z \leq x * y.$
- *Граничные условия,* $1 * x = x$ и $0 * x = 0.$ Таким образом, 1 есть нейтральный элемент.

В конце 70-х годов сразу несколько авторов предложили использовать **t**-нормы как подходящий класс функций для моделирования пересечения нечетких множеств (см. *[Dubois and Prade* 1979b] и *[Hohle* 1979]).

Т-норма называется *непрерывной,* если она непрерывна как функция, т.е. является непрерывным отображением $[0,1]^2$ в [0,1]. Это условие, среди других, обеспечивает «хорошую» импликацию $\mapsto$, которую назвали *R*-импликацией *[Trillas and Valverde* 1981] и которую в итоге стали определять как *резидуал* относительно конъюнкции *:

$$(x * y) \;\leq\; z \;\; \text{т.т.т., когда}\; x \leq y \mapsto z \qquad (R).$$

В этом случае говорят, что операции * и $\Rightarrow$ образуют *сопряженную пару.* Таким образом, условие сопряженности в действительности ограничивает **t**-нормы на случай непрерывности слева. Такие **t**-нормы будем называть *п-непрерывными (left-continuous)* **t**-нормами. В явном виде операция $\Rightarrow$ характеризуется следующим образом:

$$x \Rightarrow y = sup\{z \mid z * x \leq y\}.$$

Это обеспечивает следующее ее свойство:

$$x * (x \Rightarrow y) \leq y.$$

Последнее интерпретируется как *нечеткая* версия правила *modus ponens.* Понятно, что **t**-нормы, имеющие соответствующую хорошую импликацию, представляют для логики особый интерес.

Посредством **t**-нормы и ее резидуала могут быть определены другие операции, например, операция $\neg$, соответствующая пропозициональному отрицанию $\neg$, определяется следующим образом:

$$\neg x =: x \mapsto 0.$$

Также, ограничившись непрерывными **t**-нормами, можно определить операции *min* и *max,* что позволит рассматривать [0, 1] как решеточную структуру. Используя обычные обозначения, имеем:

$$x \cap y =: x * (x \mapsto y),$$
$$x \cup y =: ((x \mapsto y) \mapsto y) \cap ((y \mapsto x) \mapsto x).$$

Посредством этих операций определяются истинностные значения молекулярных формул на интервале [0,1]. Обычным образом, формулы, которые всегда принимают значение 1, называются тавтологиями, или *-тавтологиями. Множество всех *-тавтологий называется логикой, основанной на **t**-норме *. Такие логики будем называть **t**-логиками. Наиболее важные примеры **t**-логик следующие *[Hdjek* 1998]:

1. Бесконечнозначная логика Лукасевича Ł_∞, в которой **t**-нормой является $x \otimes y = \max(0, x + y - 1)$, а $\rightarrow$ есть резидуал относительно $\otimes$ (см. выше раздел 8.1.1).
2. Логика Гёделя-Даммита $\mathbf{G}_\infty$, в которой **t**-нормой является $x \wedge y = \min(x, y)$, а $\Rightarrow$ есть резидуал относительно $\wedge$ (см. выше раздел 8.2.3.1).
3. Логика произведений П *[Hdjek, Godo andEsteva* 1996], в которой **t**-нормой является $x \odot y = x{\cdot}y$ (обычное произведение действительных чисел); импликация $x \rightarrow_P y \;= 1$, если $x \leq y$ и $x \rightarrow_P y = y/x$ в остальных случаях; отрицание такое же, как в $\mathbf{G}_\infty$.

9.4.2. Семантический подход

Проблема адекватной аксиоматизации **t**-логик столкнулась с той трудностью, что не было стандартного подхода к семантическому обоснованию систем таких логик. Оказалось, что здесь нет единственной «стандартной» семантической матрицы с множеством истинностных значений [0,1], которую можно было бы использовать в качестве общего подхода. Поэтому первоначально усилия были направлены на то, чтобы найти такие абстрактные алгебраические структуры, которые улавливали бы различие между непрерывными **t**-нормами и *л*-непрерывными **t**-нормами, и затем построить соответствующие логические исчисления. Разработка такой семантики получила название общей *(general)* семантики, основанной на классе абстрактных алгебр.

Алгебраическая структура $<L, *, \mapsto, \cap, \cup, 0, 1>$ называется *резидуированной решеткой [Pavelka* 1979], если

- $<L, \cap, \cup, 0, 1>$ есть ограниченная решетка;
- $<L, *, 1>$ есть абелев моноид;
- Выполняется условие сопряженности (R) (см. выше).

На самом деле *резидуал* **t**-нормы существует т.т.т., когда **t**-норма является *л*-непрерывной. Таким образом, *л*-непрерывные

t-нормы характеризуются резидуированными решетками. Подобным образом можно дать алгебраическую характеризацию полностью непрерывных **t**-норм.

Резидуированная решетка $<L, *, \mapsto, \cap, \cup, 0, 1>$ называется *делимой {divisible)* т.т.т., когда для всех $x, y \in L\ (\dot{x} \leq y)$ существует некоторое $z \in L$ такое, что $x = y * z.$ Альтернативной характеризацией делимости в резидуированных решетках является введение слабой конъюнкции: $x \cap y = x * (x \mapsto y)$ для всех $x, y \in L$ (см. выше). Таким образом, резидуированная решетка, детерминированная **t**-нормой **,* является делимой т.т.т., когда * непрерывна.

Всё что остается, чтобы охарактеризовать непрерывные **t**-нормы, это условие предлинейности. Резидуированная решетка $<L, *, \mapsto, \cap, \cup, 0, 1>$ является *предлинейпой* т.т.т., когда

$(x \mapsto y) \cup (y \mapsto x) = 1$

для всех $x, y \in L.$

Делимые предлинейные резидуированные решетки получили название *BL-алтебр [Hajek* 1998], которые являются *многообразием.* Особый интерес представляют следующие три подкласса *BL*-алгебр. Пусть $\mathcal{A}$ есть *BL* -алгебра.

- $\mathcal{A}$ есть М*V*-алгебра, если $\mathcal{A}$ удовлетворяет тождеству: $x = -(-x).$
- $\mathcal{A}$ есть G-алгебра (алгебра логики Гёделя-Даммита $\mathbf{G}_\infty$), если $\mathcal{A}$ удовлетворяет тождеству: $x = x * x.$
- $\mathcal{A}$ есть *П* -алгебра, если .$\mathcal{A}$ удовлетворяет тождеству: $(y \mapsto 0) \cup ((y \mapsto x * y) \mapsto x) = 1$

Комбинирование этих тождеств позволяет определять другие алгебраические структуры, являющиеся расширением *BL* -алгебры (см. рисунок в *[Hahnle* 2001], где отображены алгебраические структуры между *BL* -алгебрами и *MV-, П-* и *G*-алгебрами).

Свойство предлинейности позволяет свести изучение *BL*-алгебр (и любое их подмногообразие, такое, как MV-алгебры, *G*-алгебры или *П* -алгебры) к изучению линейно-упорядоченных алгебр *[Hajek* 1998]:

1. *Каждая BL-алгебра является подпрямым произведением линейно-упорядоченных BL-алгебр.*
2. *Каждое многообразие BL-алгебр порождается линейно-упорядоченными BL-алгебрами,* т.е. *BL*-цепями.

Здесь же П. Хаек сформулировал гипотезу, что многообразие BL-алгебр на самом деле порождается всеми алгебрами вида $<[0,1], *, \mapsto, 0, 1>,$ где * есть непрерывная **t**-норма на [0,1]. Гипотеза была доказана в *[Cignoli, Esteva, Godo and Torrens* 2000]. Это позволяет доказывать полноту с оценкой формул в отрезке [0,1]. Такое

доказательство полноты для **t**-логик, называется *стандартным,* а сама семантика — *стандартной.*

9.4.3. Базисная нечеткая логика BL и ее расширения

В *[Hdjek* 1998] представлена гильбертовская аксиоматизация базисной логики **BL**, основанной на **t**-норме, в языке $\rightarrow$, $\&$ и $\bot$, соответствующему алгебраическим операциям $\mapsto$, $*$ и 0:

BL1. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)),$

BL2. $A \,\&\, B \rightarrow A,$

BL3. $A \,\&\, B \rightarrow B \,\&\, A,$

BL4. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \,\&\, B \rightarrow C),$

BL5. $(A \,\&\, B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)),$

BL6. $A \,\&\, (A \rightarrow B) \rightarrow B \,\&\, (B \rightarrow A),$

BL7. $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow C) \rightarrow C),$

BL8. $\bot \rightarrow A.$

Единственным правилом вывода является modus ponens.

(Здесь же дана аксиоматизация предикатной базисной логики **BL** $\forall$. Стоит заметить, что поскольку главные различия между нечеткой и классической логиками лежат на пропозициональном уровне, то нечеткие предикатные логики развивались замедленно. Этот пробел восполняется в *[Hajek and Cinlida* 2006].)

Дополнительные логические связки $\neg$, $\wedge$ и $\vee$ определяются точно так же, как соответствующие алгебраические операции $\neg$, $\cap$ и $\cup$. Как уже говорилось, в *[Hdjek* 1998] доказана общая теорема полноты с построением алгебры Линденбаума для **BL**, а в *[Cignoli, Esteva, Godo and Torrens* 2000] дано стандартное доказательство, откуда следует, что базисная логика **BL** является логикой непрерывных **t**-норм.

Расширениями **BL** П. Хаек получает адекватную аксиоматизацию следующих трех известных логик:

- Логика Лукасевича Ł_∞ есть $\mathbf{BL} + \neg\neg A \rightarrow A.$
- Логика Гёделя-Даммита $\mathbf{G}_\infty$ есть $\mathbf{BL} + A \rightarrow A \,\&\, A.$
- Логика произведений П есть $\mathbf{BL} + \neg(A \wedge \neg A),$ $\neg\neg A \rightarrow ((A \,\&\, C \rightarrow B \,\&\, C) \rightarrow (A \rightarrow B)).$
- Классическая логика $\mathbf{C}_2$ есть $\mathbf{BL} + \neg\neg A \rightarrow A,$

$A \to A \& A.$

Таким образом, логикой Лукасевича Ł_∞ является инволютивная **BL** логика. Интересное взаимоотношение между этими логиками на алгебраическом уровне дано в *[Vetterlein* 2008], где ставится задача построения альтернативной семантики для нечётких логик Ł_∞ и **BL**. Для этого берется класс булевых алгебр и класс алгебр Гейтинга. На каждом из этих классов вводится специальное отношение эквивалентности *(a-eqiiivalence),* которое при естественных допущениях в первом случае порождает структуру соответствующую MV-алгебре, а во втором случае, структуру соответствующую *BL*-алгебре. Теперь высказывания Ł_∞- и **BL**-логик оцениваются элементами из полученных классов эквивалентностей соответственно.

9.4.3.1. Базисная нечеткая логика предикатов $\mathbf{BL}\forall$

Формулы базисной нечеткой логики предикатов $\mathbf{BL}\forall$ определяются так же, как в первопорядковой логике (см. выше раздел 1.6.2), и строятся из переменных по индивидам, предикатных символов, связок $\&, \to, \perp$ (остальные связки определяются указанным выше образом) и кванторов $\forall$ и $\exists$. Стандартная интерпретация состоит из непустой области *D* и функции, которая отображает *n*-местный предикатный символ в *n*-местное нечеткое отношение *n*-местным нечетким отношением здесь является отображение из множества *n*-местных последовательностей элементов *D* в множество истинностных значений [0, 1] - значения, при которых *n*-местные последовательности удовлетворяют формуле $P(x_1, \ldots, x_n)).$ Теперь, с учетом непрерывной **t**-нормы, связки интерпретируются (в стиле Тарского), как в базисной пропозициональной логике **BL**. Степень истинности формулы вида $\forall xA$ определяется как *инфимум* (наибольшая нижняя грань) степеней истинности из *A,* и степень истинности формулы вида $\exists xA$ определяется как *супремум* (наименьшая верхняя грань) степеней истинности из *A*.

Эта интерпретация $\mathbf{BL}\forall$ обобщает алгебраическую семантику, основанную на линейно-упорядоченных *BL* -алгебрах (см, выше). Формула *A* есть обобщенная *BL*-тавтология в предикатной нечеткой логике $\mathbf{BL}\forall,$ если она принимает значение 1 при каждой интерпретации. В *[Hctjek* 1998] представлено доказательство, что следующая аксиоматизация $\mathbf{BL}\forall$ является адекватной:

0. Аксиомы пропозициональной логики **BL**.
1. $\forall xA(x) \to A(t)$
2. $A(t) \to \exists xA(x)$
3. $\forall x(B \to A) \to (B \to \forall xA)$
4. $\forall x(A \to B) \to (\exists xA \to B)$
5. $\forall x(A \vee B) \to (\forall xA \vee B),$

где *A(t)* есть результат правильной подстановки терма *t* вместо всех свободных вхождений переменной *x* в формулу *A* (подобная подстановка называется правильной, когда никакое из заменяемых вхождений *x* в *A* не находится в области действия квантора по переменной, входящей в состав терма *t)* и формула *B* не содержит свободных вхождений *x*.

Правилами вывода являются modus ponens и правило обобщения.

9.4.4. Моноидная логика, основанная на t-норме

Тот факт, что **t**-норма имеет резидуал т.т.т., когда она является *л*-непрерывной, послужил отправной точкой для построения логики *л*-непрерывных **t**-норм, которая была обозначена посредством **MTL.** В *[Esteva and Godo* 2001] **MTL** была аксиоматизирована как ослабление логики **BL**. Поскольку соответствующие алгебры не являются делимыми, т.е. мы не можем определить слабую конъюнкцию $\wedge$, то аксиоматизация логики **MTL** дается с двумя конъюнкциями:

MTL1. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)),$

MTL2. $A \& B \to A,$

$$\begin{aligned}
&\text{MTL3. } A \,\&\, B \to B \,\&\, A,\\
&\text{MTL4. } A \wedge B \to A,\\
&\text{MTL5. } A \wedge B \to B \wedge A,\\
&\text{MTL6. } A \,\&\, (A \to B) \to A \wedge B,\\
&\text{MTL7. } (A \to (B \to C)) \to (A \,\&\, B \to C),\\
&\text{MTL8. } (A \,\&\, B \to C) \to (A \to (B \to C)),\\
&\text{MTL9. } ((A \to B) \to C) \to (((B \to A) \to C) \to C),\\
&\text{MTL10. } \bot \to A.
\end{aligned}$$

Единственным правилом вывода является modus ponens. В *[Esteva and Godo* 2001] доказана общая полнота **MTL**, т.е. относительно *MTL*-алгебр (класса резидуированных предлинейных решеток), а в *[Jenej and Montagna* 2002] доказана стандартная полнота. Таким образом, логика **MTL** есть логика *л*-непрерывных **t**-норм. Поскольку *BL*-алгебры есть делимые *MTL* -алгебры, то другой адекватной аксиоматизацией базисной логики **BL** является **MTL** с дополнительной аксиомной схемой

$A \wedge B \to A \,\&\, (A \to B)$.

В свою очередь логика **MTL** является расширением *моноидной логики* **ML** *[Hohle* 1994] (логика резидуированных решеток) посредством добавления аксиомы предлинейности. Интересно, что логика **ML** на самом деле есть интуиционистская логика **Int** без сокращения, если взять генценовскую формулировку **Int** под названием **LJ** (см. *[Takamura* 2004], или система **FL**$_{ew}$, которая есть расширение полного исчисления Ламбека посредством правил перестановки и ослабления (см. например, *[Ono and Komori* 1985]).

В *[Hahnle* 2001] приведена иерархия алгебраических структур (12 структур), имеющих отношение с **t**-нормами, а в *[Esteva and Godo* 2000] построена решетка **t**-логик. В *[Gottwald and Hajek* 2005] дается обзор пропозициональных **t**-логик, а в *[Cintula and Hajek* 2000] дается обзор предикатных **t**-логик.

9.4.5. Расширения t-логик новыми связками

Большую известность приобрела логика Павелки **RPŁ** *[Pavelka* 1979], которая является расширением логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_\infty$ посредством введения в пропозициональный язык бесконечного числа

логических констант вида *r* для каждого рационального числа $r \in [0,1]$. Предикатная версия **RPŁ** определяется аналогичным общазом. В логике **RPL** можно определить градуированную *(graded)* истину с помощью $r \to A$. Наличие в языке констант подобного вида используется при доказательстве теорем о полноте для целого класса логик (так называемый метод Павелки, упрощенный в *[Hajek* 1998]). В *[De Baets, Esteva, Fodor and Godo* 1999] аналогичным образом расширяется логика Гёделя—Даммита $\mathbf{G}_\infty$.

Фундаментальным расширением стандартного языка **t**-логик является добавление унарной пропозициональной связки $\triangle$ (о ее свойствах см. в разделе 8.3.1.1). В *[Hajek* 1998] аксиомы $(\triangle 1)$-($\triangle$ 5) добавляются к **BL**. О некоммутативных **t**-логиках см. в *[Hajek2003*]. Другие обобщения **t**-логик и их недавние применения см. в *Gottwald 2007]*.

. Наконец, сделаны обобщения обычных **t**-норм на случай интервально-значных нечетких множеств *[Gehrke, Walker C. and Walker E,* 1996] и на случай нечетких множеств типа 2 (см. *[Walker C and Walker E.* 2006]).

10. Истинностные значения: интерпретация многозначных логик

Почти после столетнего развития многозначной логики появилась необходимость в прояснении того, что *сейчас* понимается под истинностными значениями? В 2008 г. в Институте философии Дрезденского Технологического Университета состоялась Международная школа, посвященная проблематике истинностных значений. Приглашенные доклады опубликованы в двух специальных выпусках журнала *"Studia Logica",* 2009: 91(3) и 92(2). См. предисловие *[Shramko and Warning* 2009] редакторов этих выпусков. Наконец, Г. Ванзингом и Я. Шрамко и готовится фундаментальная работа под названием *«Истинностные значения»* для Стэнфордской Философской Энциклопедии.

Все это весьма примечательно и даже выглядит интригующе, поскольку вопрос о том, что представляют собой истинностные значения в многозначных логиках, все равно остается проблемой номер один. Некоторый обзор по данной проблематике на конец 80-х годов прошлого века был дан в *[Карпенко* 1989c]. А уже после того, когда была принята некоторая концепция истинностных значений, предложена сама интерпретация многозначных логик, получившая название «фактор-семантики» *[Karpenko* 1983].

10.1. Фиксация проблемы

Бесконечное разнообразие реального мира требует бесконечного разнообразия его моделей, примерами которых также служат многозначные логики. Появляются новые, все более необычные примеры как отдельных логик, так и целых классов логических систем. Поэтому вопрос об интерпретации многозначных логик становится все более актуальным, и не случайно поэтому обзоры по многозначной логике *[Rose* 1981] и *[Urquhart* 1986] заканчиваются именно этой темой; а проблема интерпретации истинностных значений является центральной и, видимо, сложнейшей проблемой для теории многозначных логик. В обзоре *[Hdhnle* 2001] раздел 2.5 называется «Каково смысловое значение истинностных значений?» Здесь в примечании 9 автор предлагает вообще не говорить об *истинностных значениях,* а только о *значениях.*

Суть последней проблемы была сформулирована еще 3. Иорданом: «Без интерпретации приписывания определенного логического значения числу *n* "истинностных значений" любое *n*-значное исчисление остается абстрактной структурой» *[Jordan* 1945]. Как мы уже знаем, в качестве истинностных значений используются натуральные числа, рациональные, действительные (могут быть комплексные), отрицательные и т.д. Специально теме истинностных значений впервые была посвящена статья А.А. Зиновьева *{Зиновьев* 1959], развивающая некоторый философский подход. Может показаться удивительным, что, несмотря на то исключительное развитие, которое получили многозначные логики Лукасевича, вопрос об интерпретации истинностных значений в этих логиках все еще обсуждается в литературе. Вот что пишет по этому поводу Данна Скотт: «Перед тем, как вы примете многозначную логику как долгожданного брата, попробуйте понять, что могут означать дробные истинностные значения. И имеют ли они какой-либо смысл? Каково концептуальное подтверждение "промежуточных значений"» *[Scott* 1976]. Остается также неясным, отмечает Д. Скотт, обоснование логических операций в $\mathbf{L}_n$. В *[Da Costa, Beziau and Bueno* 1996] указывается, что «фундаментальная проблема относительно многозначности - узнать, что она в реальности означает».

В монографии *[Bole and Borowik* 1992] ограничились лишь замечанием, что вопрос об истинностных значениях затруднителен, зато в монографии *[Gottwald* 2001] сделано несколько конструктивных предложений. Здесь отмечается, что если подходить философски, то не очевидно, как интуитивно интерпретировать эти (добавленные) истинностные значения. Чтобы избежать путаницы с классической двузначной логикой, предлагается в случае с многозначной логикой говорить о *степенях истины* и использовать выражение «истинностные значения» только для классической логики. При этом выделяются два совершенно отдельных аспекта:

- отрицательный аспект, поскольку не имеется никакого естественного понимания (значения) степеней истинности;
- положительный аспект, поскольку можно свободно интерпретировать степени истинности в зависимости от соответствующего применения многозначной логики.

Делается также важное замечание о возможности "редукции" степеней истинности к стандартным истинностным значениям Т (истина) и F (ложь). Этот вопрос будет рассмотрен нами специально, в частности, в виде ответа Д. Скотту, как можно проинтерпретировать дробные истинностные значения в многозначных логиках Лукасевича.

10.2. Логический мир Г. Фреге: два истинностных значения

Однако, как это ни покажется странным, проблемы возникают уже для самих классических истинностных значений: Т (истина) и F (ложь). Как отмечает А. Чёрч *[Чёрч I960,* примечание 67], впервые в явном виде два истинностных значения встречаются у Ч. Пирса в 1885 г. Г. Фреге впервые использовал истинностные значения в 1891 г., а в статье *[Фреге* 1977], относящейся к 1892 г., был сформулирован взгляд на высказывания как на имена истинностных значений. Это приводит к тому, что истинностными значениями являются два объекта, один из которых называется «истина», а другой — «ложь», и этими объектами оцениваются высказывания. Философские истоки такого подхода рассмотрены в *[Gabriel* 1984].

В последнее время оживилась дискуссия относительно теории истинностных значений Фреге, основным возражением против которой было то, что они постулируют *абстрактные* объекты типа истинностных значений. Отсюда, например, все истинностные высказывания имеют один и тот же денотат, как, впрочем, и все ложные. Но что тогда является смыслом высказывания? На этот вопрос пытались дать ответ многие работы, например *[Ray* 1979], *[Sengiipta* 1984], *[Sutara* 1982], в последней из которых предлагается считать денотатами (т.е. истинностными значениями) высказываний положения дел. Тогда положения дел, соответствующие любым двум истинным высказываниям, различны, а значит, высказывания имеют различный смысл. Также в *[Barwise and Perry* 1981], где разрабатывается "ситуационная семантика", не принимается существование одного и того же денотата для всех истинных предложений. Однако, заметим, для истинностно-функциональной семантики различие в смыслах является несущественным и им можно пренебречь.

Обратим также внимание на статью *[Bezian* 1999] и в особенности на работу Я. Шрамко *[Шрамко* 2009]. В последней дается глубокий философский анализ феномена введения в логику двух абстрактных объектов «истина» и «ложь» и высоко оцениваются последствия этого для развития современной логики.

Итак, существует два фундаментальных абстрактных объекта «истина» и «ложь» (наряду с числами, геометрическими фигурами, классами), которые образуют *логический мир Фреге.* Этот мир наиболее изучен (начиная с работ самого Г. Фреге, А. Уайтхеда и Б. Рассела), понятен, и два классических истинностных значения не вызывают никакого сомнения. Их можно считать константами логического мышления. К этому стоит также добавить, что имеется знаменитый *аргумент рогатки (slingshot),* предназначенный для того, чтобы формально строго доказать тезис, что все истинные предложения обозначают одну и ту же вещь и все ложные предложения обозначают одну и ту же вещь. Этими вещами как раз и являются истинностные значения *истина* или *ложь.* Указанный аргумент восходит уже к некоторым замечаниям Фреге и впервые сформулирован А. Чёрчем. См, об этом подробно в *[Шрамко* 2009, §4], где приводится соответствующая литература. Но существуют и *другие логические миры.*

10.3. Другие логические миры

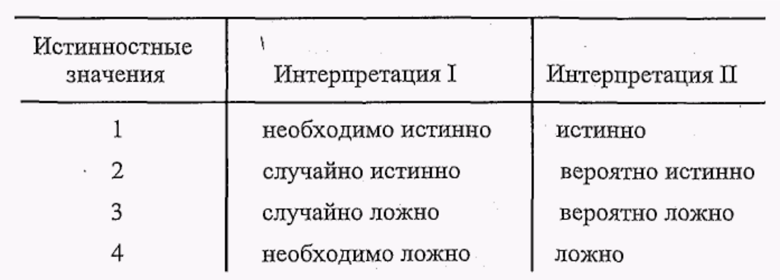
Уже в ближайшее к Фреге время его универсум истинностных значений оказался недостаточным, поскольку кроме действительного положения дел, которое имеет или не имеет места сейчас, зачастую приходится говорить о положении дел, которое может быть или не быть. Так появилась трехзначная логика Лукасевича. Подробно о введении в логику третьего истинностного значения см. выше гл. 3 (см. также *[Томова* 2009]).

Появление таких дополнительных истинностных значений, как «случайно», «возможно», «безразлично», «неопределено», «неизвестно», «бесмысленно», «парадоксально», «противоречиво», «антиномично» и т.д., говорит уже о преднамеренной содержательной интерпретации и привязывается к непосредственному применению той или иной трехзначной логики. Так появляются *трехзначные миры*

Лукасевича, Бочвара, Клини, Асеньо-Приста и т.д. Главное здесь то, что принятая интерпретация третьего истинностного значения позволяет соответствующим образом определять логические связки. Так появляется важное разделение на сильные и слабые связки в трехзначной логике Клини и на внутренние и внешние связки в трехзначной логике Бочвара. Обратим внимание также на то, что введение третьего истинностного значения может играть столь различную роль в приложениях самой трехзначной логики, что сравнение свойств этих значений привело к очень плодотворной идее о *типе* истинностных значений *[Финн и др.* 1980].

Появление логик с четырьмя истинностными значениями оказалось весьма удобным средством для определения и интерпретаций модальных операторов, а также для обоснования самих четырехзначных логик. Специально этому посвящена статья *[Caton* 1963], где обоснование дается в терминах *мобилизованных* истинностных значений. Как раз проблема обоснования логики в первую очередь требует интерпретации самого множества истинностных значений, в данном случае множества {1, 2, 3, 4}. В *[Caton* 1963] этими числами обозначаются соответственно «логическая истина», «случайная истина», «случайная ложь» и «логическая ложь».

В таком же духе дается интуитивная интерпретация истинностных значений четырехзначной логики Н. Решером *[Rescher* 1965]:



Истинностные значения	Интерпретация I	Интерпретация II
1	необходимо истинно	истинно
2	случайно истинно	вероятно истинно
3	случайно ложно	вероятно ложно
4	необходимо ложно	ложно

Н. Решер предлагает модификацию интерпретации I следующим образом. Пусть имеются два несовместимых положения дел, одно из которых есть актуальное положение x, а другое - возможное альтернативное положение y. Любое высказывание может принимать значение из множества {1, 2, 3, 4} согласно следующим правилам:

- истинно в x и в y (т. е. необходимо истинно),
- истинно в x, но не в y (т. е. актуально, но не необходимо истинно),
- ложно в x, но не истинно в y (т. е. актуально, но не необходимо ложно),
- ложно в x и в y (т. е. необходимо ложно).

Эта интерпретация истинностных значений непосредственно восходит к А. Прайору *[Prior* 1955], который при обосновании четырехзначных модальных логик пришел к идее семантики возможных миров. В данном случае А. Прайор полагает два возможных положения дел *x* и *y* таких, что в каждом из них высказывание может быть или истинным или ложным. В результате элементы множества истинностных значений {1, 2, 3, 4} соответственно интерпретируются двучленными последовательностями, состоящими из вхождений T (истина) и F (ложь):

1 – <T, T>, 2 – <T, F>, 3 – <F, T>,

4 – <F, F> ·

(Здесь А. Прайор исходит из идей Я, Лукасевича при построении последним четырехзначной Ł-модальной логики (см. выше раздел 5.4.1).)

Другие примеры четырехзначных логик мы подробно рассмотрели в гл. 5, где наиболее интересной и важной в применении оказалась четырехзначная логика Белнапа (см. *[Белнап* 1981; 1981]). Наиболее существенным оказалось то, что четыре истинностных значения Белнапа можно по-разному упорядочивать, в результате чего получаем или *логическую* решетку или *эпистемическую* решетку истинностных значений. Теперь можно соответствующим образом проинтерпретировать и логические связки. Несомненно, идея М. Данна о том, что в качестве истинностных значений в четырехзначной логике могут выступать подмножества классического множества истинностных значений {T, F}, оказалась революционной.

Хотя и немного, но имеются содержательные примеры интерпретации и применения конечнозначных логик со множеством истинностных значений, превосходящих 4. Последний пример, а именно четыре восьмизначных логики, исходя из идей Белнапа, представлены Д.В. Зайцевым *[Zaitsev* 2009]. Берется множество всех подмножеств трехэлементного множества истинностных значений логики Клини $\mathbf{K}_3$. В качестве истинностных значений получаем восемь подмножеств. На этом множестве вводятся четыре отношения порядка: относительно истины T, относительно лжи F, относительно неопределенности N и относительно включения $\subseteq$. Самое важное, что все четыре семантики моделируют следование первой ступени (см. выше раздел 5.4.4)..

Проблемы начинаются с интерпретации произвольных конечнозначных логик и в первую очередь - с осмысления того, чем являются в этих логиках истинностные значения. Поскольку, как выше было указано, проблема труднейшая, то не лучше ли её вообще элиминировать?

10.4. Тезис Сушко

В начале 70-х годов известный польский логик Р. Сушко озадачил сторонников и адептов многозначных логик тезисом, согласно которому *((каждая логика является (логически) двузначной» [Suszko* 1977]. Этот тезис вызвал дискуссию, которая продолжается по сей день (см. *[Da Costa, Beziau andBueno* 1996], *[Tsuji* 1998], *[Wan-sing and Shramko* 2008]).

Тезис Сушко имел бы только философское значение, если бы не предложенный им формальный метод, который должен показать, что *каждая логика имеет бивалентную семантику.* Это было названо *редукцией Сушко.* Сам математический аспект редукции вначале не был до конца прояснен, но идейная сторона того, что понимается под *двузначной семантикой,* состоит в следующем. Таковой является *произвольное* семейство *произвольных* функций, из множества пропозициональных формул в множество логических значений. Последнее множество идентифицируется с множеством классических истинностных значений {0, 1}, где 0 представляет значение «ложь», а 1 представляет значение «истина». В этой семантике указанные функции являются характеристическими функциями множества формул и называются *логическими оценками.* В отличие от логических оценок, оценки *v* в многозначных логиках (см. раздел 4.2) являются *алгебраическими оценками:* гомоморфизмами, отображающими алгебру формул в алгебру того же типа истинностных значений (в логическую матрицу).

В *[Suszko* 1975] построена бивалентная семантика для трехзначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$. Пусть *For* обозначает множество формул пропозиционального языка .$\mathcal{L}$, а {0, 1} - множество истинностных значений. Тогда LV$_3$ есть множество всех функций $t\colon Fm \to \{0, 1\}$ таких, что для любых $A, B, C \in Fm$ выполняются следующие условия:

(0) $t(C) = 0$ или $t(\sim C) = 0$

(1) $t(A \to B) = 1$ всегда, когда $t(B) = 1$

(2) если $t(A) = 1$ и $t(B) = 0$, то $t(A \to B) = 0$

(3) если $t(A) = t(B)$ и $t(\sim A) = t(\sim B)$, то $t(A \to B) = 1$

(4) если $t(A) = t(B) = 0$ и $t(\sim A) \neq t(\sim B)$, то $t(A \to B) = t(\sim A)$

(5) если $t(\sim A) = 0$, то $t(\sim\sim A) = t(A)$

(6) если $t(A) = 1$ и $t(B) = 0$, то $t(\sim(A \to B)) = t(\sim B)$

(7) если $t(A) = t(\sim A) = t(B)$ и $t(\sim B) = 1$, то $t(\sim(A \to B)) = 0$.

При таком подходе элементы 1, $^1/_2$ и 0 трехзначной матрицы Лукасевича не рассматриваются как *логические* значения; они предстают, по Сушко, именно как *алгебраические* значения. Очевидно, что представленная семантика является неистинностно-функциональной. Сам Сушко не пояснил, почему именно таковы условия истинности и как эту процедуру можно распространить на другие логики. В *[Malinowski* 1977] была построена бивалентная семантика для *n*-значных логик Лукасевича $\mathbf{L}_n$. Правда, отмечает Г. Малиновский, описание приемлемых оценок становится трудно-читаемым (illegible). Заметим, что в *[Caleiro, Carnielli, Coniglio and Marcos* 2005] представлен алгоритм построения бивалентной семантики для конечнозначных пропозициональных логик, а в *[Caleiro and Marcos* 2009] этот алгоритм усовершенствован.

Тезис Сушко вызвал определенную критику. У Сушко логика определяется в точности *структурной* операцией присоединения следствий, или структурным отношением выводимости $\vdash$ (см. раздел 4.2), При этом предполагается, что множество истинностных значений V разбивается на два непересекающихся класса: множество выделенных значений D^+, представляющее «истину», и множество антивыделенных значений D^-, представляющее «ложь». Эти два класса полностью исчерпывают универсум истинностных значений (поскольку один класс является дополнением другого) и в общем случае представляют собой два логических значения, одно из которых, а именно «истина» используется при определении логического следования. Заметим, что дуальным образом можно использовать и «ложь», но класс тавтологий останется тем же самым. Однако в *[Malinowski* 1994] сконструирована трехзначная *квазиматричная* логика, в которой пересечение $D^+ \cap D^- = \varnothing$ и отношение логического следования определяется относительно D^+ и D^-, но множества D^+ и D^- не исчерпывают всего множества истинностных значений. В силу этого редукция Сушко только к двум значениям не может быть применена.

В статье *[Tsuji* 1998] был поставлен вопрос о достаточных и необходимых условиях для того, чтобы логика имела бивалентную семантику, и доказан ряд утверждений (см. также *[Warning and Shramko* 2008]). Наконец, в статье *[Font* 2009] расставлены все акценты и редукция Сушко в наиболее общей форме выглядит следующим образом.

Пусть X есть множество и пусть $\vdash \subseteq \mathcal{P}(X) \times (X)$ *есть отношение, где* $\mathcal{P}(X)$ *есть множество всех подмножеапв множества X. Тогда* $\vdash$ *есть отногиение замыкания т.т.т., когда оно является двузначным.*

Доказательство. *Отношение замыкания* удовлетворяет трем аксиомам Тарского (1) — (3) (см. выше раздел 4.2). Отношение $\vdash \subseteq \mathcal{P}(X) \times (X)$ является *двузначным,* если существует такое множество функций $V \subseteq 2^X$, что для произвольных $Y \subseteq X$ и $a \in X$ выполняется условие

$Y \vdash a \Leftrightarrow \forall v \in V \forall y \in Y$, если $v(y) = 1$, то $v(a) = 1$. **(*)**

Лего видеть, что любое отношение, удовлетворяющее (*), удовлетворяет также аксиомам Тарского (1) - (3). В обратную сторону следует из того (см, *[Burris and Sankappanavar* 1981]), что отношение замыкания определяется ассоциированным с ним семейством замкнутых подмножеств $C = \{Y \subseteq X:$ если $Y \vdash a,$ то $a \in Y\}$. Если характеристическую функцию произвольного подмножества $Y \subseteq X$ обозначим посредством μ_Y, тогда $V = \{\mu_Y : Y \in C\}$ есть нужное семейство функций, удовлетворяющее (*).

Как отмечается в *[Font* 2009], *отношения замыкания и семантики Сушко представляют собой одно и то же.* Отсюда и возникают трудности в понимании того, что представляет собой семантика Сушко, поскольку здесь оказывается, что *семантика есть логика.* Поэтому, продолжает Дж. Фонт, очень трудно принять бивалентную семантику Сушко действительно как семантику. Семантика на самом деле должна что-то говорить о логике и помогать решать внутренние проблемы логики, например, ее разрешимость или финитную аппроксимируемость, или наличие интерполяционного свойства. Эту роль как раз выполняют матричная семантика, алгебраическая семантика, семантика Крипке и т.д.

Интересно, что многие авторы указывают на крайнюю *неконструктивность* бивалентной семантики и даже ее бесполезность, например, в *[Avron* 2009] для бесконечнозначных логик предлагается *семантика недетереминированных матриц* (введенная в *[Avron and Lev* 2005]), основанная на обобщенных матрицах Вуйицкого (см.

выше раздел 4.2). Поскольку эта семантика состоит из конечного семейство конечнозначных матриц, то отсюда следует разрешимость соответствующей логики. На самом деле, *семантика, недетерерминированных матриц* является частным случаем *семантики возможной переводимости* (мы упоминали ее в разделе 8.6.3.1). Существенной чертой всех этих новых семантик, и в первую очередь семантики Сушко, является то, что они не являются истинностно-функциональными, т.е. ослабляется принцип экстенсиональности (композиции). То, что сам этот принцип не является таким уж тривиальным, как кажется на первый взгляд, хорошо проанализировано в *[Marcos* 2009], где показывается как ослабление принципа композиции приводит к желаемым семантикам. Важно то, что одна и та же логика может иметь как функционально-истинностную семантику, так и нефункционально-истинностную семантику и, таким образом, не логика является неистинностно-функциональной, а такова семантика этой логики.

В связи с тезисом Сушко обратимся к конкретизации систем с замыканием, предложенной А.В. Кузнецовым и рассмотренной нами в разделе 7.2.1. Здесь *X* представляет собой множество *n*-значных функций и на этом множестве определяется оператор замыкания []. Известно, что существует взаимно-одназначное соответствие между отношениями замыкания, операторами замыкания и системами с замыканием. Оператор замыкания определяется посредством операции суперпопозици и если теперь представить логику в виде функциональной системы (P_n, C), то мы знаем, что уже на трехзначном уровне мощность множества замкнутых классов континуальна. Поэтому ни о каком сведении многозначной логики к двузначной не может быть и речи, поскольку в последней мощность множества замкнутых классов счетна.

Как отмечается в *[Font* 2009], один из способов понять различие между «алгебраическими значениями» и «логическими значениями» заключается в том, чтобы интерпретировать последние как *истинностные значения метатеории,* в то время как первые есть *истинностные значения теории.*

Трудности с интерпретацией самих истинностных значений и разделение значений на алгебраические и логические - все это привело к тому, чтобы использовать истинностные значения логических матриц в их собственном значении как *степени истинности,* оставляя за скобками вопрос об их природе. Обычно отношение логического следования определяется как сохраняющее *истину* от посылок к заключению, но теперь мы должны учитывать и другие истинностные значения, посредством введения множества выделенных значений D^+ и

множества антивыделенных значений D^-, где $D^+ \cap D^- = \varnothing$, и теперь при определении логического следования мы должны учитывать оба эти множества (см. *[Malinowski* 1994]). Обобщение этой идеи приводит к определению логического следования относительно каждого собственного подмножества *V*. Логико-математический аппарат для осуществления этой идеи известен — это обобщенные матрицы Вуйцицкого (см. выше раздел 4.2).

Пусть *Fm* есть множество формул пропозиционального языка, состоящего из счетного множества пропозициональных букв и конечного непустого множества финитарных связок *C*. *N*-значная *k*-мерная матрица (*k*-матрица) есть структура $\mathfrak{M} = <V, D_1, \ldots, D_k, f_c: c \in C>$, где *V* есть непустое множество мощности $n\ (2 \leq n),\ 2 \leq k$, каждое $D_i\ (1 \leq i \leq k)$ есть непустое собственное подмножество множества V, множества *D;* являются попарно различными и f_c есть функция на *V* с той же самой арностью, как *c*. Множества D_i называются выделенными множествами. Функция оценки *v* определяется обычным образом.

Отношение логического следования на множестве *Fm* определяется следующим образом:

$\Gamma \vDash_{i,\mathfrak{M}} A$ *т.т.т., когда* $v(\Gamma) \subseteq D_i$ *влечет* $v(A) \in D_i$.

Тогда под многозначной логикой понимается семейство $<Fm, \{\vDash_{i,\mathfrak{M}}: i \in I\}>$, где каждое $\vDash_i$ характеризует логику Тарского (см. выше раздел 4.2).

(У Р. Вуйцяцкого (см. *[Wqjcicki* 1988]) с обобщенной матрицей ассоциируется *единственное* отношение логического следования:
$\cap\{\vDash_{i,\mathfrak{M}} \mid \mathfrak{M} = <V, D_i, \{f_c: c \in C\}>, 1 \leq i \leq k\}$.
)

Такой подход развит в *[Warning and Shramko* 2008], соответственно которому степени истинности в многозначных логиках предстают в наиболее общем виде как подмножества множества истинностных значений, а отношение логического следования сохраняет эти степени истинности. Тогда множества D_i, играют роль «логических значений». Здесь интересной идеей является неразличение истинностных значений, если относительно их задается одно и то же отношение логического следования. Например, в классической логике можно определить логическое следование дуальным образом как сохраняющее не истину, а *ложь.* При этом класс тавтологий остается неизменным. В таком случае, считают авторы, классическая логика является *однозначной.* Таким образом, истинностные значения различаются при их использовании при определении логического следования.

В *[Font* 2009] подобные подходы, идентифицирующие логические значения со степенями истинности и различающие истинностные значения в указанном выше смысле, считаются весьма плодотворными для понимания общей сути многозначной логики, дается обзор (§3) и высвечиваются проблемы.
(Именно в таком духе в *[Font, Gil, Toirens and Verclu* 2006] рассматривается логика Лукасевича Ł_{∞}.)

Однако стоит подчеркнуть, что в 70-е годы идею редукции неклассических логик, в том числе многозначных, к двузначной пытались воплотить многие авторы. Наиболее близкой к Сушко стала *семантика оценок* Н. да Косты для бесконечнозначных паранепротиворечивых логик, изложенная в разделе 8.6.3 (см. также *[Kotas and da Costa* 1980]). Логическая бивалентная семантика стала главным семантическим инструментом для изучения «логик формальной противоречивости» (см. *[Da Costa, Krause and Bueno* 2007] и *[Carnielli, Coniglio and Marcos* 2007], где такая семантика названа *«семантикой биоценок»).*

Бивалентный подход к логике развивался также в *[Routley and Meyer* 1976] и *[Batens* 1982] и других работах. Особое внимание привлекло применение данного подхода к конечнозначным логикам Лукасевича Ł_n, как наиболее известным. Интересно, что 10-я глава монографии Г. Малиновского *[Malinowsld* 1993] называется «Классическая интерпретация многозначных логик». В качестве объекта для изучения берутся конечнозначные логики Лукасевича Ł_n и рассматриваются подходы Р. Сушко, Д. Скотта и А. Урквharta.
Однако подчеркнем, что в отличие от формального подхода Сушко были предприняты попытки *содержательно* проинтерпретировать истинностные значения Ł_n и сами логические связки.

10.5. Интуитивная интерпретация Ł_n.

Большую известность приобрела семантика крипковского типа
$\mathcal{K}_n = <S_n, \leq, \vdash>$
для Ł_n и некоторых других конечнозначных логик, предложенная А. Урквартом в *[Urquhart* 1973].
(Здесь также предложена семантика для *n*-значных логик Поста и для логики Бочвара с внутренними связками. См. также *[Dahn* 1974]. На логику Лукасевича Ł_{∞} свою семантику Урквarту распространить не удалось. Однако крипковская семантика для бесконечнозначных логик, основанных на *t*-нормах, куда входит и Ł_{∞} (см. выше раздел 9.4), как пропозициональных, так и предикатных, рассмотрена в *[Monlagna and Sacchetti* 2003]. См. также работу *[Bdziau* 2006], где сравниваются функции оценки как гомоморфизм между алгеброй языка и алгеброй истинностных значений в многозначных логиках и функции оценки в крипковских семантиках, использующих только два значения.)

Он определяет такое отношение $\vdash \subseteq S_n \times For$ между натуральными числами множества $S_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и формулами логики, что имеет место следующая
Лемма. *Если* $x \vdash A$ *и* $x \leq y \in S_n$, *то* $y \vdash A$.
Пусть *Var* есть множество пропозициональных переменных. Роль оценок в .$\mathcal{K}_n$ выполняется отображением $F\colon Var \to 2^{Sn}$, таким, что отношение $\vdash_F$, $x \vdash_F p$, т.т.т., когда $x \in F(p)$, удовлетворяет *лемме.* Отношение $\vdash_F$ расширяется на множество всех формул, соответствующих условиям, зависимым от связок. Тогда формула *A* является *x-истинной в* $\mathcal{K}_n$, $x \vdash A$, если $x \vdash_F A$ для произвольного *F* такого, как рассмотрено выше. Формула α является $\mathcal{K}_n$*-истинной* т.т.т., когда она истинна в точке 0, т.е. выполнено, что $0 \vdash A$. $\mathcal{K}_n$ является *семантикой* системы, определенной данной матрицей $\mathfrak{M}_n$, когда множество всех $\mathcal{K}_n$-истинных формул равно содержанию $\mathfrak{M}_n$, т.е. когда

$$E(\mathfrak{M}_n)=\{A \in For : 0 \vdash A\}.$$

Для *n*-значных логик Лукасевича $\vdash$ должно удовлетворять следующим условиям:

$$x \vdash A \to B, \text{ т.т.т., когда для всяких } x+y \in S_n \text{ из } y \vdash A$$
$$\text{следует } x+y \vdash B$$
$$x \vdash {\sim}A \quad \text{т.т.т., когда } (n-2)-x \nvdash A$$
$$x \vdash A \vee B \quad \text{т.т.т., когда} \quad x \vdash A \quad \text{или} \quad x \vdash B$$
$$x \vdash A \wedge B \quad \text{т.т.т., когда} \quad x \vdash A \quad \text{и} \quad x \vdash B$$
$$x \vdash A \equiv B \quad \text{т.т.т., когда} \quad x \vdash A \to B \text{ и } x \vdash B \to A.$$

Вместо приведения доказательства эквивалентности между этой моделью и матрицами Лукасевича посмотрим, каким образом Уркварт пытается установить связь между формальной семантикой и интуитивными соображениями.
Здесь множество точек (миров) $\{0, 1, \ldots, n\text{-}1\}$ в модели интерпретируется как множество моментов времени, где 0 есть момент настоящего времени, а *n*-1 - последний элемент в S_n- зафиксирован в качестве некоторой будущей даты. Таким образом, «$x \vdash_F A$» читается как «*A* доказуемо в момент *x*». Высказывание может быть доказуемым или не доказуемым в данный момент. Например, высказывание о будущем событии может быть доказуемым или не доказуемым сейчас.

Однако, если *A* доказуемо сейчас, то оно доказуемо и во все последующие моменты. Это означает, что мы думаем о высказываниях не как о неопределенных по времени *(temporally indefinite)* (например, «Сейчас Линкольн является президентом»), а как об определенных по времени (temporally definite) (например, «Линкольн является президентом в 1971 году н.э.»). До сих пор наше неформальное объяснение, считает Уркварт, находится в соответствии с философской мотивировкой, данной в *[Lukasiewicz* 1930].

При описанной выше интерпретации импликация Лукасевича $A \to A$ доказуема в *x,* если и только если всегда, когда *A* доказуема в момент *y, B* доказуема в момент *x+y* (т.е. в момент на *x* моментов отстоящий в будущее от *y).* Формула *~A* доказуема в момент *x,* если и только если *A* не доказуема в момент, который на *x* моментов предшествует последнему моменту в нашем временном ряду. Таким образом, обе связки Лукасевича — «импликация» и «отрицание» - проявляют значительные отличия от обычных операторов импликации и отрицания.

Уркварт говорит; что такой способ понимания выявляет источники трудностей в достижении полностью интуитивной интерпретации многозначных логик Лукасевича, и он утверждает, что «естественные» связки импликации и отрицания скорее должны удовлетворять следующим стандартным условиям:

$x \vdash A \to B$ т.т.т,, когда для некоторого $y \in S_n$ $(y \vdash B$ всегда, когда $x \leq y$ и $y \vdash A)$,

$x \vdash {\sim}A$ т.т.т., когда $y \vdash A$ не верно для любого $y \in S_n$.

Обратим внимание на рецензию Д. Райна *[Rine* 1974], в которой содержательная интерпретация для $\textbf{Ł}_n$ была подвергнута критике. Райн отмечает, что смысл *леммы* не всегда согласуется с синтаксисом естественного языка. Рассмотрим следующее утверждение α: «Джон играет в теннис»; и пусть {0, ..., *n}* обозначает временное пространство с того времени, когда Джон впервые играет в теннис (0), и до того времени, когда он последний раз играет в теннис *(n).* Тогда, продолжает Райн, не ясно, почему не могут существовать *x, y,* где $x < y$ такие, что *A* имеет место во всех $\{0; \ldots, n\text{-}x\}$ и $\{n\text{-}y, \ldots, n\}$,но не между *n-x* и *n-y.*

Очень схожая семантика предложена Д. Скоттом в *[Scott f*: 1973], где он предлагает равенство вида «$v_i(A) = t$», для $i \in \{0, \ldots;, n\text{-}1\}$, читать как «(утверждение) *A* истинно в степени *i*». Скотт предполагает, что числа в ряду $0 \leq i \leq n-2$ символизируют *степени заблуждения в отклонении от истины* (degrees of error in deviation i from the truth). Степень 0 - самая сильная и соответствует «совершенной» истине или отсутствию заблуждения: все тавтологии лот гики Лукасевича являются схемами утверждений, имеющих в качестве своей степени заблуждения 0. Таким образом, истинностные значения в логиках Лукасевича $\textbf{Ł}_n$ интерпретируются как степени заблуждения, а каждая $\textbf{Ł}_n$ есть *логика заблуждений* (logic of errors) *[Scott* 1976].

Проблемы возникают, когда в соответствии с данной интерпретацией истинностных значений мы пытаемся придать содержательный смысл логическим связкам из $\textbf{Ł}_n$. На это указывается в *[Smiley* 1976].

В итоге мы приходим к тому, что любая *содержательная* интерпретация истинностных значений в $\textbf{Ł}_n$ сталкивается с серьезными трудностями. И еще большие трудности возникают, когда это содержание мы пытаемся перенести на интерпретацию логических связок $\textbf{Ł}_n$. Все дело в том, и на это указывает сам А. Уркварт *[Urquhart* 1986], что логика неопределенностей, логика вероятностей и логика заблуждений не являются истинностно-функциональными логиками, и поэтому любая подобная интерпретация $\textbf{Ł}_n$ не является адекватной. Напомним, что уже А. Прайор *[Prior* 1957b], интерпретируя $\textbf{Ł}_3$ как логику случайности (т.е. третье истинностное значение интерпретируется как случайность), приходит к выводу, что при подобной интерпретации конъюнкция в $\textbf{Ł}_3$ не может быть истинностно-функциональной. Итак, основная трудность содержательной интерпретации многозначных логик состоит в том, что, вкладывая содержание (смысл) в определенное множество истинностных значений, мы затем пытаемся совместить этот смысл с истинностно-функциональной семантикой многозначных логик, Что же касается непосредственно самой $\textbf{Ł}_n$, то, как мы уже знаем из теоремы В.К. Финна (см. выше раздел 7.6.1), она имеет сугубо *теоретико-числовую природу* и связана со свойствами простых чисел. Тем не менее, есть выход из создавшейся ситуации, если полагать, что мы разобрались с тем, что считать классическими истинностными значениями T и F. Тогда представляется очень привлекательной идея проинтерпретировать многозначные логики, используя в явном виде именно эти два значения. Самое интересное, что впервые эта идея была высказана Э. Постом *[Post* 1921] и реализована для его же. функционально полной логики $\mathbf{P}_n$. Позже подобным образом была проинтерпретирована А.Н. Прайором модальная логика **S5** (см. выше раздел 8.4.2).

10.6. T-F-последовательности в качестве истинностных значений

Вначале введем следующие понятия. Пусть $B = \{T, F\}$, т. е. *B* есть множество классических истинностных значений. Посредством B^s обозначим *s*-кратное прямое произведение множества *B:*

$B^S = B \times B \times ... \times B$ (*s* сомножителей).

Тогда при $s \ge 2$ B^S есть множество всех T-F-последовательностей (булевых векторов) длины *s,* которое записывается так:

$B^S = \{<a_1, ..., a_s> | \ a_i \in B\}, 1 \le i \le s.$

Поскольку *B* есть двухэлементное множество, то число элементов множества B^s равно 2^s. Элементы множества B^s обозначим посредством α, β, γ с индексами или без них. Алгебра

$\mathcal{A}^B = < B^S, \neg^+, \supset^+, \vee^+, \wedge^+>$

есть булева алгебра, где операции $\neg^+, \supset^+, \vee^+, \wedge^+$ определяются на множестве B^s посредством булевых (т.е. классических) операций $\neg, \supset, \vee, \wedge$ следующим образом: для любых T-F-последовтельностей $\alpha = <a_1, ..., a_s>$ и $\beta = <b_1, ..., b_s>$

$$\neg^+\alpha = <\neg a_1, ..., \neg a_s>,$$

$$\alpha \supset^+ \beta = <a_1 \supset b_1, ..., a_s \supset b_s>,$$

$$\alpha \vee^+ \beta = <a_1 \vee b_1, ..., a_s \vee b_s>,$$

$$\alpha \wedge^+ \beta = <a_1 \wedge b_1, ..., a_s \wedge b_s>.$$

Поскольку компоненты a_i и b_i последовательностей α и β принимают классические истинностные значения T и F (или 1 и 0), то указанные операции над компонентами - это просто логические операции над двоичными переменными. Тогда.сами операции $\neg^+, \supset^+, \vee^+, \wedge^+$ естественно называть *покомпонентными* (булевыми) операциями. Тогда в реконструированном виде интерпретация Поста для $\mathbf{P}_n$ выглядит следующим образом. Рассмотрим логическую матрицу

$\mathfrak{M}^P_{s+1} = <B^S_F, \neg^P, \vee^+, \{T^S\}>,$

где B^S_F есть множество таких T-F-последовательностей, где все вхождения F стоят в начале последовательности. Легко видеть, что число таких T-F-последовательностей есть *s*+1 и равно числу истинностных значений логики $\mathbf{P}_n$, т.е. $n = s+1$. $\{T^S\}$ есть одноэлементное множество выделенных значений, где T^s есть T-F-последовательность, состоящая только из вхождений T с числом s.

Операция $\vee^+$ есть покомпонентная булева операция, а $\neg^P$ определяется следующим образом:

$\neg^P < F,F, ..., F,T,T, ..., T > = < F,F, ..., F,\neg T,T, ..., T >,$

т.е. только первое вхождение T отрицается (напомним, $\neg$ есть классическое отрицание); если вхождений T нет, то отрицаются все вхождения F.

Теорема 1. *Логические матрицы* $\mathfrak{M}^P_{s+1} = <B^S_F, \neg^P, \vee^+, \{T^S\}>$ и $\mathfrak{M}^P_n = <\{0,1,2, ..., n\text{-}1\}, \neg, \vee, \{n\text{-}1\}>$ *изоморфны, где* $\mathfrak{M}^P_n$ *есть матрица для n-значной логики Поста* (см. раздел 5.2.1).

Интерпретация Поста в какой-то степени осталась мало известной, но в [*Byrd* 1979] была предложена аналогичная интерпретация для многозначных логик Лукасевича $Ł_n$.

Для этого вначале вводится одноместный оператор d(α), который преобразует T-F-последовательности из B^s таким образом, что все вхождения T предшествуют вхождениям F, т.е.:

$d(\alpha) = < T,T, ..., T,F,F, ..., F >.$

Множество всех таких T-F-последовательностей обозначим посредством B^S_T. Элементы из B^S_T будем обозначать посредством $\alpha^T, \beta^T, ...$. Таким образом, $d(\alpha) = \alpha^T$. Рассмотрим логическую матрицу

$\mathfrak{M}^L_{s+1} = <B^S_T, \neg^d, \to^d, \{T^S\}>,$

где операции $\neg^d$ и $\to^d$ определяются следующим образом:

1. $\neg^d(\alpha^T) = d(\neg^+(\alpha^T)).$
2. $\alpha^T \to^d \beta^T = d(\alpha^T \supset^+ \beta^T).$

Теорема 2. *Логические матрицы* $\mathfrak{M}^L_{s+1} = <B^S_T, \neg^d, \to^d, \{T^S\}>$ и $\mathfrak{M}^L_n = <V_n, \sim, \to, \{1\}>$ *изоморфны, где* $\mathfrak{M}^L_n$ *есть матрица для n-значной логики Лукасевича* $Ł_n$ (см. раздел 5.1.1).

Таким образом, имеется интерпретация истинностных значений, будь то натуральные числа или дробные, в терминах классических истинностных значений T и F. Например, истинностное значение 0 интерпретируется T-F-последовательностью, в которой все вхождения есть F; 1/3 — последовательностью $<T, F, F>$, т. е. числитель указывает на число вхождений T, а знаменатель есть длина последовательности, обозначенная числом *s* (=*n*-1).

Обратим внимание, на то, что результат Теоремы 1 имеет также место, если множество истинностных значений B^S_T заменим на множество B^S_F, т.е. оператор d перерабатывает каждую T-F-последовательность в такую, что все вхождения F стоят в начале. Тогда истинностное значение 1/3 интерпретируется T-F-последовательностью $<F, F, T>$.

Заметим, что крипковскуго семантику А. Урквbooth \Urqnhart 1973] для Ł_n можно представить именно в таком виде, и соответственно крипковская семантика для $\mathbf{P}_n$ переводится в вышеприведенную.

10.7. Фактор-семантика: подмножества *versus* элементы

Имеет смысл обобщить приведенную выше интерпретацию так, чтобы она строилась независимо от выбора множества T-F-последовательностей в качестве истинностных значений. Такую интерпретацию мы назвали *фактор-семантикой* (см. *[Karpenko* 1983], [Карпенко 1989]), где в качестве истинностных значений выступают *подмножества* множества T-F-последовательностей. Строится она следующим образом. С булевой алгеброй

$\mathcal{A}^B = < B^S, \neg^+, \supset^+, \vee^+, \wedge^+ >$

ассоциируем логическую матрицу

$\mathfrak{M}^c_s = < B^S, \neg^+, \supset^+, \vee^+, \wedge^+, \{T^S\} >$.

Последняя есть не что иное, как прямое произведение классической двузначной матрицы

$\mathfrak{M}^c_2 = < \{T, F\}, \neg, \supset, \vee, \wedge, \{T\} >$

s раз на саму себя.

Для любого $\alpha \in B^S$ обозначим через $\eta(\alpha)$ число компонент элемента α, которые равны T. Тогда $\alpha \cong \beta$, если $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$ и $B^S/\cong$ есть фактор-множество множества B^s по отношению эквивалентности $\cong$. Очевидно, что мощность множества $B^S/\cong$ равна s+1. Если $\alpha \in B^S$, тогда $|\alpha|$ будет обозначать класс эквивалентности, определенный по α. Фактор-множество $B^S/\cong$ снабдим операциями $\neg^{\text{Ł}}$ и $\to^{\text{Ł}}$ следующим образом: для $|\alpha|, |\beta| \in B^S/\cong$ пусть $\neg^{\text{Ł}}|\alpha| = |\neg^+\alpha|$ и $|\alpha| \to^{\text{Ł}} |\beta| = |\alpha' \supset^+ \beta'|$, где $\alpha' \in |\alpha|, \beta' \in |\beta|$ и $\alpha' \mathrm{R}^{\text{Ł}} \beta'$, причем отношение $\mathrm{R}^{\text{Ł}}$ определяется так: $<a_1, ..., a_s> \mathrm{R}^{\text{Ł}} <b_1, ..., b_s>$ т.т.т., когда

1) $\forall i \leq s\ (a_i = T \Rightarrow b_i = T)$, если $\eta(\alpha) \leq \eta(\beta)$,

2) $\forall i \leq s\ (b_i = T \Rightarrow a_i = T)$, если $\eta(\alpha) > \eta(\beta)$.

Заметим, что отношение $\mathrm{R}^{\text{Ł}}$ является отношением толерантности, т.е. оно рефлексивно и симметрично, но в общем случае не транзитивно. В

этом обнаруживается еще один неожиданный аспект импликации Лукасевича.

Таким образом, после операции «факторизации» и определения логических операций на полученных классах эквивалентности матрица

$\mathfrak{M}^c_s = < B^S, \neg^+, \supset^+, \vee^+, \wedge^+, \{T^S\} >$

преобразуется в матрицу

$\mathfrak{N}^L_{s+1} = < B^S/\cong, \neg^{\text{Ł}}, \to^{\text{Ł}}, \{|T^S|\} >$

(операции дизъюнкции и конъюнкции как выразимые через исходные здесь опустим),

Теорема 3. *Логические матрицы* $\mathfrak{N}^L_{s+1} = < B^S/\cong, \neg^{\text{Ł}}, \to^{\text{Ł}}, \{|T^S|\} >$ и $\mathfrak{M}^L_n = <V_n, \sim, \to, \{1\}>$ *изоморфны.*

Доказательство. Требуемый изоморфизм достигается посредством отображения φ такого, что для $|\alpha| \in B^S/\cong$

$\varphi(|\alpha|) = \frac{\eta(\alpha)}{s}$.

Очевидно, что φ есть взаимнооднозначное соответствие. Покажем, что изоморфизм имеет место, т.е.

$$(*) \quad \varphi(\neg^{\text{Ł}}|\alpha|) = \sim\varphi(|\alpha|),$$
$$(**) \quad \varphi(|\alpha| \to^{\text{Ł}} |\beta|) = \varphi(|\alpha|) \to \varphi(|\beta|).$$

Следующая последовательность равенств является доказательством (*):

$$\varphi(\neg^{\text{Ł}}|\alpha|) = \varphi(|\neg^+\alpha|) = \frac{s-\eta(\alpha)}{s} = 1 - \frac{\eta(\alpha)}{s} = 1 - \varphi(|\alpha|) = \sim\varphi(|\alpha|).$$

Для доказательства (**) возьмем $\alpha' \in |\alpha|$ и $\beta' \in |\beta|$ такие, что $\alpha' \mathrm{R} \beta'$.

(1) $\eta(\alpha) \leq \eta(\beta)$. Тогда очевидно, что правая часть (**) равна 1. Далее, $|\alpha| \to^{\text{Ł}} |\beta| = |\alpha' \supset^+ \beta'| = |T^S|$. Следовательно, левая часть (**) равна $\varphi(|T^S|) = 1$, что и требовалось доказать.

(2) $\eta(\alpha) > \eta(\beta)$. Тогда правая часть (**) в силу определения φ и → равна $1 - \frac{\eta(\alpha)}{s} + \frac{\eta(\beta)}{s}$. Но согласно определению $\to^{\text{Ł}}$ и $\supset^+$ число вхождений T в $\alpha' \supset^+ \beta'$ равно $\eta(\beta) + (s - \eta(\alpha))$. Следовательно, левая часть (**) также равна $1 - \frac{\eta(\alpha)}{s} + \frac{\eta(\beta)}{s}$.

Таким образом, логическая матрица

$\mathfrak{N}^L_{s+1} = < B^S/\cong, \neg^{\text{Ł}}, \to^{\text{Ł}}, \{|T^S|\} >$

является характеристической для *n*-значного исчисления логики Лукасевича $\mathbf{Ł_n}$.

Главный смысл фактор-семантики заключается в том, что теперь в качестве истинностных значений выступают определенные подмножества s-членных T-F-последовательностей из множества B^s.

Например, истинностное значение 1/3 интерпретируется множеством $\{<T, F, F>, <F, T, F>, <F, F, T>\}$.

В общем случае мощность множества $|\alpha| \in B^S/\cong$ вычисляется по формуле для биноминальных коэффициентов

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

В нашем случае $k = \eta(\alpha)$ и $m = s$.Тогда, например, мощность множества $|\alpha|$, состоящего из T-F-последовательностей длиной $s = 5$, в каждую из которых число вхождений T есть $\eta(\alpha) = 3$, равно 10**.**

Рассмотрим еще один пример фактор-семантики, в данном случае для *n*-значной логики Клини $\mathbf{K}_n$ (см. раздел 5.1.1), представленную матрицей

$$\mathfrak{M}_n^K = < V_n, \sim, \supset, \{1\} >.$$

Операции $\vee$ и $\wedge$ определяются обычным образом посредством $\sim$ и $\supset$.

Определим матрицу $\mathfrak{N}_{s+1}^K$ следующим образом. Пусть $\eta_T(\alpha)$ обозначает число вхождений T в α и $\eta_F(\alpha)$ обозначает число вхождений F в α. Тогда отношение R^K на множестве B^s определяется так: $<a_1, ..., a_s> R^K <b_1, ..., b_s>$ т.т.т., когда

1) $\forall i \leq s\ (a_i = T \Rightarrow b_i = F)$, если $\eta_T(\alpha) \leq \eta_F(\beta)$,

2) $\forall i \leq s\ (b_i = F \Rightarrow a_i = T)$, если $\eta_T(\alpha) > \eta_F(\beta)$.

Заметим, что отношение R^K в общем случае нерефлексивно, симметрично и в общем случае нетранзитивно.

Матрицу $\mathfrak{N}_{s+1}^K$ определим следующим образом:

$$\mathfrak{N}_{s+1}^K = < B^S/\cong, \neg^{Ł}, \rightarrow^K, \{|T^S|\} >,$$

где $|\alpha| \rightarrow^K |\beta| = |\alpha' \supset^+ \beta'|$, где $\alpha' \in |\alpha|$, $\beta' \in |\beta|$ и $\alpha' R^K \beta'$.

В результате имеем:

Теорема *4.* *Логические матрицы* $\mathfrak{N}_{s+1}^K$ *и* $\mathfrak{M}_n^K$ *изоморфны.*

Доказательство аналогично Теореме 3.

Из этих двух примеров фактор-семантики видно, что между множеством двухместных операций фактор-матрицы и множеством отношений на множестве B^s существует функциональное соответствие, которым в каждом конкретном случае и определяются свойства логической фактор-матрицы. На вопрос о том, что будет, если это множество отношений пусто, отвечает

Теорема 5. *Фактор-матрица* $\mathfrak{N}_{s+1}^q = <B^S/\cong, \neg^{Ł}, \rightarrow^q, \vee^q, \wedge^q, \{|T^S|\}>$

есть модель для обобщенной квази-истиняостно-функционалъной логики Н. Решера [Rescher 1962].

Обратим внимание, что здесь при определении операций на элементах множества $B^S/\cong$ никакое отношение R не вводится. Это значит, что функции $\rightarrow^q$, $\vee^q$, и $\wedge^q$ не являются операциями на множестве $B^S/\cong$.

В трехзначной квази-истинностно-функциональной логике Решера $Ł_3^q$ *[Rescher* 1969], например, $^1/_2 \rightarrow {}^1/_2 = \{^1/_2, 1\}$.Таким образом, смысл вводимых отношений на множестве B^s заключается в том, чтобы функции, определяемые на множесте $B^S/\cong$, были операциями.

В связи с этим возникает естественный вопрос о границах применения фактор-семантики. Очевидно, что средства фактор-семантики недостаточны для определения операции $|\alpha| \otimes |\beta|$, не сохраняющей $|T^S|$ и $|F^S|$. Точно так же это имеет место и для унарных операций, т.е. мы не можем проинтерпретировать многозначную логику, связки которой не сохраняют истинностные значения 1 и 0, т.е. не являющейся **С**-расширяющей. Это следует из того, что в основе определения всех операций на элементах множества $B^S/\cong$ лежат покомпонентные *булевы* операции. Поэтому интерпретация Поста не является булевой, поскольку нельзя циклическое отрицание Поста определить покомпонентным булевым отрицанием без таких искусственных ограничений, вроде тех, что отрицается только первое вхождение Т. Из унарных операций покомпонентно определяется только отрицание Лукасевича (инволюция). Таким образом, для построения фактор-семантики исходные операции многозначной логики должны удовлетворять указанным выше требованиям.

Этим требованиям также отвечает максимальная непостовская логика $\mathbf{T}^*_n$. Пусть отношение R^{T^*} на множестве B^s определяется так:

$<a_1, ..., a_s> R^{T^*} <b_1, ..., b_s>$ т.т.т., когда

1) $\exists i \leq s\ (a_i = T \Rightarrow b_i = F)$, если $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$,

2) $\alpha R^{Ł} \beta$ в остальных случаях.

Матрицу $\mathfrak{N}_{s+1}^{T^*}$ определим следующим образом:

$$\mathfrak{N}_{s+1}^{T^*} = < B^S/\cong, \neg^{Ł}, \Rightarrow^{T^*}, \{|T^S| >,$$

где $|\alpha| \Rightarrow^{T^*} |\beta| = |\alpha' \supset^+ \beta'|$, где $\alpha' \in |\alpha|$, $\beta' \in |\beta|$ и $\alpha' R^{T^*} \beta'$.

В результате имеем:

Теорема 6. *Логические матрицы* $\mathfrak{N}_{s+1}^{T^*} = < B^S/\cong, \neg^{Ł}, \Rightarrow^{T^*}, \{|T^S|\} >$ *и* $\mathfrak{M}_n^{T^*} = < V_n, \sim, \rightarrow^{T^*}, \{1\}>$ *изоморфны,* Итак, фактор-семантика представляет собой интерпретацию многозначных логик средствами *булевой алгебры,* и этим определяются ограничения на применение самой фактор-семантики. Чтобы убрать эти ограничения, требуется другое семантическое основание для интерпретации. Такая универсальная семантика была предложена в *[Rasiowa* 1974], где в качестве семантического основания для интерпретации конечнозначных логик была взята алгебра Поста. Возникает еще один вопрос, можно ли распространить фактор-семантику на бесконечнозначный случай?

10.7.1. Фактор-семантика для бесконечнозначной логики $\L_{\Sigma}$

В основном для бесконечнозначных логик используются модели с множеством истинностных значений, обладающим свойством непрерывности или свойством плотности (см. гл. 8 и 9). Исключением является стандартная *дискретная* модель для логики **RM**. Здесь мы рассмотрим *нестандартную дискретную модель* для единственного предтабличного расширения $\L_{\infty}$.

Пусть, как и ранее, $B = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$, т.е. *B* есть множество классических истинностных значений. Посредством $B^{\aleph_0}$ обозначим прямое произведение $\aleph_0$ раз одинаковых множеств, равных *B:*

$B^{\aleph_0} = B \times B \times \ldots \times B$ ($\aleph_0$ сомножителей).

Поскольку *B* есть двухэлементное множество, то число элементов множества $B^{\aleph_0}$ равно $2^{\aleph_0}$, т.е. мощность этого множества есть континуум. Из этого множества выбросим те T-F-последовательности, в которых число вхождений T, как и число вхождений F, одинаково счетно. Полученное в результате множество (обозначим его посредством $Fin(\omega)$), есть такое множество бесконечных T-F-последовательностей из $.B^{\aleph_0}$, в которых или число вхождений T конечно (или равно 0), или число вхождений F конечно (или равно 0). Очевидно, что мощность множества $Fin(\omega)$ *счетна.* Элементы множества $Fin(\omega)$ будем обозначать посредством α, β, γ с индексами или без них, но при этом обозначения α_T и α_F указывают на то, что число вхождений T или F конечно (или равно 0).

Для любого $\alpha \in Fin(\omega)$ пусть $\eta(\alpha)$ есть конечное число вхождений T или F в α, такое, что

$$\eta(\alpha) = \begin{cases} m, \text{ если } \alpha \text{ есть } \alpha_T \\ -m, \text{ если } \alpha \text{ есть } \alpha_F, \end{cases}$$

где $m, \text{-}m \in \mathrm{Z}$ (Z — множество целых чисел). Тогда $\alpha \cong \beta$, если $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$ и $Fin(\omega)/\cong$ есть фактор-множество по отношению эквивалентности $\cong$.

Теперь элементы множества $\mathrm{Fin}(\omega)/\cong$ упорядочим *естественным* образом по числу нарастания вхождений T для классов, где число вхождений F бесконечно, и по числу убывания вхождений F для классов, где число вхождений T бесконечно. В результате полученное множество чисел, представляющее классы эквивалентности из $Fin(\omega)/\cong$ (обозначим его посредством X) есть множество с порядковым типом $\omega + \omega^*$, т. е.

$\Sigma = \{0^+, 1, 2, 3, \ldots \quad \ldots, -3, -2, -1, 0^-\}.$

Именно на этом пути была получена следующая логическая матрица *[Карпенко* 1985]:

$\mathfrak{M}_\Sigma = <\Sigma, \sim^\Sigma, \rightarrow^\Sigma, \{0^-\}>.$

Логические операции определяются так:

$$\sim^\Sigma x = -x,$$

$$x \rightarrow^\Sigma y = \begin{cases} 0^-, \text{ если } x \le y \\ y - x, \text{ если } x > y, \end{cases}$$

где «–» есть операция, арифметического вычитания, причем $\sim^\Sigma 0^+ = 0^-$ и $\sim^\Sigma 0^- = 0^+$.

Нетрудно проверить, что все аксиомы бесконечнозначной логики Лукасевича $\L_\infty$ общезначимы в этой матрице, т.е. матрица $\mathfrak{M}_\Sigma = <\Sigma, \sim^\Sigma, \rightarrow^\Sigma, \{0^-\}>$ является дискретной моделью для $\L_\infty$. Заметим, что эта модель является моделью без неподвижных точек относительно отрицания, т.е. $\sim^\Sigma x \ne x$. Логику, для которой матрица $\mathfrak{M}_\Sigma$ является характеристической, обозначим посредством $\L_\Sigma$.

Для этой логики имеет место фактор-семантика, которая строится аналогично тому, как это было сделано для $\L_n$ (см. также *[Karpenko* 1988] и *[Карпенко* 1989]).

Рассмотрим следующую логическую матрицу

$\mathfrak{M}_{Fin(\omega)} = < Fin(\omega)/\cong, \sim^\L, \rightarrow^\L, \{|\mathrm{T}^\omega|\} >,$

где множество истинностных значений $Fin(\omega)/\cong$ определено выше; $\{|\mathrm{T}^\omega|\}$ есть множество выделенных значений, которое представляет собой одноэлементное множество, состоящее из последовательности, в которую входят только T. Операции $\sim^\L$ и $\rightarrow^\L$ на множестве $Fin(\omega)/\cong$ определяются следующим образом (здесь операции $\neg^+$ и $\supset^+$ - обычные булевы покомпонентные операции): для $|\alpha|, \ |\beta| \in Fin(\omega)/\cong$ пусть $\sim^\L|\alpha| = |\neg^+\alpha|$ и $|\alpha| \rightarrow^\L |\beta| = |\alpha' \supset^+ \beta'|$, где $\alpha' \in |\alpha|$,

$\beta' \in |\beta|$ и $\alpha' \mathrm{R}^{\Sigma} \beta'$, причем отношение R^{Σ} на элементах $Fin(\omega)$ определяется так: $<a_1, \ldots, a_\omega> \mathrm{R}^{\Sigma} <b_1, \ldots, b_\omega>$ т.т.т., когда

1) $\forall \mathrm{i}(a_\mathrm{i} = \mathrm{T} \Rightarrow b_\mathrm{i} = \mathrm{T})$, если $\eta(\alpha_\mathrm{T}) \leq \eta(\beta_\mathrm{T})$ или α есть α_T и β есть β_F,

2) $\forall \mathrm{i}(b_\mathrm{i} = \mathrm{F} \Rightarrow a_\mathrm{i} = \mathrm{F})$, если $\eta(\alpha_\mathrm{F}) \leq \eta(\beta_\mathrm{F})$,

3) $\forall \mathrm{i}(b_\mathrm{i} = \mathrm{T} \Rightarrow a_\mathrm{i} = \mathrm{T})$, если $\eta(\alpha_\mathrm{T}) > \eta(\beta_\mathrm{T})$ или α есть α_F и β есть β_T,

4) $\forall \mathrm{i}(a_\mathrm{i} = \mathrm{F} \Rightarrow b_\mathrm{i} = \mathrm{F})$, если $\eta(\alpha_\mathrm{F}) > \eta(\beta_\mathrm{F})$.

Теорема 7. *Матрицы* $\mathfrak{M}_{\Sigma} = <\Sigma, \sim^{\Sigma}, \rightarrow^{\Sigma}, \{0^{-}\}>$ *и* $\mathfrak{M}_{Fin(\omega)} = <Fin(\omega)/\cong, \sim^{\text{Ł}}, \rightarrow^{\text{Ł}}, \{|\mathrm{T}^{\omega}|\}>$ *изоморфны.*

Таким образом, истинностные значения матрицы $\mathfrak{M}_{\Sigma}$ интерпретируются определенными счетными подмножествами из множества $Fin(\omega)/\cong$. Например, число 3 обозначает счетное множество T-F-последовательностей, в которые T входит по три раза в каждую, а число вхождений F бесконечно. Соответственно, —3 обозначает счетное множество T-F-последовательностей, в которые F входит по три раза в каждую, а число вхождений T бесконечно. В свою очередь, 0^{+} интерпретируется одноэлементным множеством $|\mathrm{F}^{\omega}|$, а 0^{-} - одноэлементным множеством $|\mathrm{T}^{\omega}|$.

Обратим внимание на следующий результат В.Л. Васюкова *[Vasyukov* 1993]: Ł_{∞} *полна относительно тернарной семантики Крипке с оценкой в матрице* $\mathfrak{M}_{\Sigma}$.

В *[Карпенко* 1997] аксиоматизация Ł_{Σ} поставлена в виде открытой проблемы, а в *[Карпенко* 2000] предложено следующее решение. Напомним, что исчисление **L** называется *предтабличным*, если все его собственные расширения табличны, т.е. являются конеч-нозначными логиками. Легко видеть, что наша логическая матрица $\mathfrak{M}_{\Sigma}$ есть не что иное, как линейно-упорядоченная MV-алгебра Чэна, которую он обозначает посредством C и приводит в качестве примера *непредставимой* MV-алгебры *[Chang* 1958b]. Ю. Комори *[Komori* 1981] обобщает алгебру C на случай $S_n^{\omega}\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$, где S_1^{ω} как раз и есть *C*. В *[Rose* 1953] было показано, что каждое собственное расширение Ł_{∞} является конечно-аксиоматизируемым. Из нового доказательства этой теоремы, предложенного Комори, можно извлечь следующую характеристическую аксиому для S_1^{ω}:

$[(p \rightarrow (p \rightarrow {\sim}p)] \rightarrow [({\sim}p \rightarrow p) \rightarrow ({\sim}p \vee p)]$.

Таким образом, Ł_{Σ} есть расширение Ł_{∞} за счет данной аксиомы.

Как уже отмечалось, из *[Beavers* 1993b] следует, что существует только одно предтабличное расширение Ł_{∞}. Это расширение есть логика Ł_{Σ}.

10.8. Структурализация истинностных значений

Обратим внимание на тенденцию развития многозначной логики, которая заключается в том, что происходит *структурализация* истинностных значений (см. *[Карпенко* 1997]). Мы бы сказали, что первый этап структурализации истиностных значений заключается в том, что в качестве истинностных значений выступают не «точечные» элементы, а подмножества некоторого исходного множества истинностных значений.

Наиболее простым примером являются подмножества классического множества истинностных значений {T, F}. Дж. Данну принадлежит идея отождествления четырех истинностных значений ***T*, *B*, *N*, *F*** с четырьмя подмножествами множества {T, F}, которое обозначается посредством $\mathcal{P}(\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\})$. В развернутом виде этот подход изложен им в *[Dunn* 1976] и связан с построением семантики для первопорядкового следования. О развитии этой идеи Н. Бенапом см. выше в разделе 5.4.4. Особо стоит отметить, что семантика, предложенная Дж. Данном, была распространена Р. Раутли *[Routley* 1984] на полные системы релевантных логик таким образом, что в каждом возможном мире значениями высказываний являются подмножества множества {T, F}. Этот подход был развит в работе *[Restal* 1995].

Поскольку релевантная логика тесно связана с паранепротиворечивой логикой, то для последней также используется семантика, где истинностными значениями являются подмножества множества {T, F} *[Priest* 1984]. Имеется целый ряд работ, где используются подобные истинностные значения, например, для решения парадокса «лжец» *[Visser* 1984].

Интересно посмотреть, что представляет собой обобщение такой семантики, т.е. когда в качестве истинностных значений берутся подмножества более богатого множества, чем {T, F}. На это указывалось в *[Карпенко* 1989], где отмечалось, что в *[Pappinghaus and Wifsing* 1983] рассматривается индетерминистский язык программирования, где формулы такого языка интерпретируются посредством непустого подмножества из {T, U, F}, где U в свою очередь интерпретируется как «неопределенно». Напомним, что в *[Zaitsev* 2009] в качестве истинностных значений берется множество всех подмножеств трехзначной логики Клини $\mathbf{K}_3$.

Уже в *[Shramko, Dunn and Takenaka* 2001] и *[Шрамко* 2002] в качестве истинностных значений берется множество всех подмножеств множества $\mathcal{P}(\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\})$. Как указывается в этих работах, это приводит к идее *обобщенного истинностного значения* как подмножества некоторого базисного множества значений. Конечно, возможны и дальнейшие обобщения (см. *[Ванзинг и Шрамко* 2005]).

На самом деле первым «не точечным» представлением истинностных значений является матрица, полученная из алгебры Линденбаума (см. раздел 4.5), в которой элементы предстают в виде счетного множества эквивалентных формул.

Обратим также внимание на то, что *булевозначные модели* для теории множеств рассматриваются как многозначные логики *[Mostowsld* 1968,]. Соответственно многозначными логиками являются и *гейтинговозначные модели.* В первом случае формулам приписываются в качестве истинностных значений элементы булевых алгебр, а во втором - элементы псевдобулевых алгебр. Тогда в силу теоремы представления Стоуна для булевых алгебр формулам классической логики приписываются подмножества некоторого универсального множества, а формулам интуиционистской логики приписываются открытые множества топологических пространств *[Расёва и Сикорский* 1972]. В последнем случае в топологических моделях *M* истинностные значения сложных формул определяются так: ,

$$v(B \wedge C) = v(B) \cap v(C), v(B \vee C) = v(B) \cup v(C),$$

$$v(B \supset C) = Int(v(\overline{B}) \cup v(C)), v(\neg B) = Int(v(\overline{B})),$$

$$v(\forall x B(x)) = Int(\cap_{a \in M} v(B(a))),$$

$$v(\exists x B(x)) = \cup_{a \in M} (B(a)).$$

где *Int(X)* обозначает внутренность множества *X.*

Заметим, что в каждом случае теорема типа стоуновского представления дает косвенным образом ту или иную теоретико-множественную или топологическую интерпретацию истинностных значений.

Параллельно с этим структурализацию истинностных значений дает нам категорный анализ логики *[Голдблатт* 1983], который позволяет посмотреть на проблему истинностных значений как бы «извне».

Категория *Set является* топосом и имеeет два истинностных значения: Т и F.

Категория *Bn(J)* (категория всех расслоений над *J)* является топосом и может иметь бесконечно много истинностных значений, если множество *J* бесконечно. Но самое главное, что этими истинностными значениями являются все подмножества *J.*

Категория *Top(J)* пучков над *J* является топосом и истинностными значениями здесь являются открытые подмножества пространства над *J.*

В первых двух примерах множество истинностных значений, которое называется классифицирующим объектом, представляет собой булеву алгебру; в последнем примере - алгебру Гейтинга. Несомненна связь между топосами и булевозначными и гейтинговозначными моделями.

В других категориях, являющихся топосами, истинностными значениями могут быть самые неожиданные объекты, например, главные идеалы в категории *M-Set* для данного моноида *M.*

Итак, в качестве истинностных значений могут выступать различные *(четкие)* подмножества некоторого множества, или элементы различных топологических пространств, например истинностными значениями в непрерывных логиках *[Chang and Keisler* 1966] являются элементы компактного хаусдорфова пространства. В свою очередь, как мы видели, в нечеткозначной логике Л. Заде высказываниям приписываются *нечеткие* подмножества из интервала [0, 1], т. е. элементы множества $\mathcal{P}([0, 1])$.....(см. раздел 9.3.1).

Более наглядный пример структурализации истинностных значений дает нам фактор-семантика для *n*-значных логик, где в качестве истинностных значений выступают подмножества множества T-F-последовательностей (булевых векторов) конечной или бесконечной длины. Обратимся к последнему случаю *[Карпенко* 1989].

Рассмотрим элементы множества $Fin(\omega)/\cong$ (см. предыдущий раздел). Пусть $\alpha_i, \alpha_i \in |\alpha^T|$,где $|\alpha^T| \in Fin(\omega)/\cong$. Для любых двух элементов из $|\alpha^T|$ введем отношение лексиграфического порядка $\alpha_i < \alpha_j$, т.е. произведем упорядочение по принципу первого различия. Пусть T < F и пусть $\alpha_i = (a_1, ..., a_n, ...)$ и $\alpha_j = (b_1, ..., b_n, ...)$. Тогда $(a_1, ..., a_n, ...) < (b_1, ..., b_n, ...)$означает, что для некоторого *k*, $a_k < b_k$ и$a_m = b_m$ для всех *m < k.*

Как известно, отношение лексиграфического порядка является отношением линейного порядка, а множество, упорядоченное таким образом, называется *цепью.* Из результата М. Даммитта *[Dummett* 1959], который берется в качестве определения А. Хорном *[Hom* 1969], следует, что алгебраическая структура цепи с первым и последним элементом (в качестве последнего элемента может выступать порядковое число ω) есть линейно-упорядоченная алгебра Гейтинга (L-алгебра), т.е. алгебра Гейтинга с законом линейности (см. раздел 8.2.3.1). Здесь эту алгебру обозначим посредством *LH.* Таким образом, каждый элемент $|\alpha^T| \in Fin(\omega)/\cong$, упорядоченный отношением лексиграфического порядка <, есть *LH* -алгебра с первым элементом α_i и последним элементом α_{ω},т.е.

$LH = <|\alpha^{T}|, \vee, \wedge, \Rightarrow, \alpha_i, \alpha_\omega>$, где

$$\alpha_i \vee \alpha_j = max(\alpha_i, \alpha_j),$$

$$\alpha_i \wedge \alpha_j = \min(\alpha_i, \alpha_j),$$

$$\alpha_i \Rightarrow \alpha_j = \begin{cases} \alpha_\omega, \text{ если } \alpha_i \le \alpha_j, \\ \alpha_j, \text{ если } \alpha_i > \alpha_j. \end{cases}$$

Теперь двойственным образом определим отношение лексиграфического порядка < для элементов $\alpha_i, \alpha_j \in |\alpha^{F}|$, где $|\alpha^{F}| \in Fin(\omega)/\cong$. В этом случае F < T и первый элемент α_1 является наибольшим. Определяя двойственным образом операции на элементах из $|\alpha^{F}|$, получим линейно-упорядоченную алгебру, двойственную (double) к *LH-алгебре.* Такую алгебру назовем линейно-упорядоченной алгеброй Брауэра (LB-алгеброй):

$LB = <|\alpha^{F}|, \vee, \wedge, \Leftarrow, \alpha_i, \alpha_\omega>$, где

$$\alpha_i \vee \alpha_j = min(\alpha_i, \alpha_j),$$

$$\alpha_i \wedge \alpha_j = max(\alpha_i, \alpha_j),$$

$$\alpha_i \Leftarrow \alpha_j = \begin{cases} \alpha_1, \text{ если } \alpha_i \le \alpha_j, \\ \alpha_i, \text{ если } \alpha_i > \alpha_j. \end{cases}$$

В итоге мы получили, что в качестве множества истинностных значений для бесконечнозначной логики $Ł_\Sigma$ (см. предыдущий раздел) выступает объединение счетных множеств *LH-* и LB-алгебр. Отсюда можно сделать вывод, что в основе алгебраической структуры $Ł_\Sigma$ лежит линейная дважды гейтингова алгебра. Последние под названием «*P-алгебр*» изучаются в *[Epstein and Horn* 1974].

Обратим внимание, что импликацию логики $Ł_\Sigma$ можно определить следующим образом:

$$x \rightarrow^{\Sigma} y = (x \Rightarrow y) + \sim(y \Leftarrow x),$$

или, что то же самое:

$$x \rightarrow^{\Sigma} y = (x \Rightarrow y) + (\sim y \Rightarrow \sim x),$$

где + есть операция арифметического сложения и $0^{+} + 0^{+} = 0^{+}$, $0^{-} + 0^{-} = 0^{-}$.

Пусть $\mathcal{A}$ есть объединение счетных множеств абстрактных *LH-* и *LB*-алгебр. Заметим, что множество $\mathcal{A}$ может быть линейно упорядочено теоретико-категорными средствами, если взять множество $\mathcal{A}$ как множество объектов такой категории. В этом случае вырожденная *LH*-алгебра **0** и вырожденная *LB*-алгебра **1** являются подобъектом и фактор-объектом этой категории соответственно. Теперь обычным образом можно определить, операции $\Rightarrow$ и $\Leftarrow$ на элементах множества A. Тогда для любых $X, Y \in \mathcal{A}$

$$X \rightarrow^{A} Y = (X \Rightarrow Y) \oplus \sim^{A}(Y \Leftarrow X),$$

где $\oplus$, есть моноидная операция, а операция отрицания $\sim^{A}$ переводит *LH* -алгебру в *LB* -алгебру, и наоборот. Отсюда становится ясной роль двойственных алгебр.

Рассмотрим логическую матрицу $\mathfrak{M}_{A} = <\mathcal{A}, \sim^{A}, \rightarrow^{A}, \{1\}>$. Примером матрицы $\mathfrak{M}_{A}$ является матрица $\mathfrak{M}_{\Sigma}$ (см. выше). Таким образом, в матрице $\mathfrak{M}_{\Sigma}$ истинностные значения, состоящие из множества положительных и отрицательных чисел (с двумя нулями), интерпретируются соответственно линейно-упорядоченными алгебрами Рейтинга и Брауэра.

Из рассмотренного выше можно сделать по крайней мере два важных вывода. Во-первых, логика имеет два алгебраических уровня. Первый уровень (внутренний) — это алгебраические структуры истинностных значений в данной логике. Для бесконечнозначной логики $Ł_\Sigma$, как мы видели, такими структурами являютя *LH-* и *LB* -алгебры. В общем случае в качестве истинностных значений могут выступать различные алгебры *[Карпенко* 1986] и тогда возникает глобальная проблема определения логических операций на алгебрах. Операции на алгебрах определяют второй (внешний) уровень логики, а именно алгебру самой логики. В нашем примере это *Р*-алгебра с моноидной операцией $\oplus$ на ней и инволюцией. В итоге возникает проблема взаимоотношения этих двух уровней. Операции на алгебрах непосредственно приводят к категорному рассмотрению логики и построению топоса для нее. Так, в случае с $Ł_\Sigma$ классификатором подобъектов является объединение счетных множеств *LH-* и LB-алгебр.

Во-вторых, из *[Horn* 1969] следует, что *LH* -алгебра является соответствующей алгеброй для линейной интуиционистской логики **LC**. Таким образом, логику $Ł_\Sigma$ можно представить как логическое исчисление, в котором пропозициональные переменные пробегают по **LC** и дуальным к ним исчислениям, т.е. сама логика выступает в качестве истинностного значения *[Karpenko* 1987]. Философский смысл этого состоит в том, что рассуждения человека или работу компьютера можно было бы представить не в рамках некоторой логики, а как рассуждение целыми логическими системами с логическими операциями над ними.

Итак, что же такое логика? И здесь мы возвращаемся к определению логики, данному Лукасевичем *[Lukasiewicz* 1921]): *(.(Логика есть* *наука об объектах специального вида, а именно наука о логических значениях»,* т. е*. **наука об истинностных значениях**.*

Таким образом, применительно к многозначной логике из четырех основных определений: логика как исчисление, логика как алгебра, логика как функциональная система и логика как наука об | истинностных значениях, мы выбираем последнее. И в этом кроется глубокий философский смысл.

Часть II

БЕСКОНЕЧНОЗНАЧНАЯ И ПОРЯДКОВА ЛОГИКИ

1. Основы бесконечнозначной логики

1.1. Основные определения бесконечнозначной логики

Определим над множеством из двух элементов {0,1 } обычные операции двузначной логики: *конъюнкцию*

$$y \equiv x_1 \wedge x_2 = \begin{cases} 1 \text{ при } x_1 = x_2 = 1, \\ 0 \text{ в остальных случаях}; \end{cases} \qquad (1.1)$$

дизъюнкцию

$$y \equiv x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 0 \text{ при } x_1 = x_2 = 0, \\ 1 \text{ в остальных случаях} \end{cases} \qquad (1.2)$$

и отрицание

$$y \equiv \bar{x} = \begin{cases} 1 \text{ при } x = 0, \\ 0 \text{ при } x = 1. \end{cases} \qquad (1.3)$$

В определении конъюнкции (1.1) знак $\wedge$ опускается, если это не ведет к недоразумению.

Определение 1.1. *Булевой функцией* называется произвольная функция, которая совместно со своими аргументами принимает значения из множества {0,1}.

Множество всех булевых функций, рассматриваемых совместно с операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, называется *булевой алгеброй.* Булева алгебра играет важную роль в изучении работы многих систем и устройств, например вычислительных и управляющих. При этом сфера ее действия ограничена лишь изучением процессов, принимающих два значения. В то же время большинство процессов, изучаемых в технике и экономике, могут принимать несколько (или даже множество) значений. Таковы процессы в электрических цепях, в частности в аналоговых вычислительных машинах (АВМ), переходные процессы в дискретных вычислительных и управляющих устройствах, процессы последовательного выполнения совокупности работ в различных системах. Чтобы построить аналог булевой алгебры, пригодный для исследования названных процессов, следует обобщить двузначные логические операции (1.1) —(1.3) на случай, когда и переменные исходные величины, и результат операции принимают значения из бесконечного (непрерывного) множества. Это будет означать переход от двузначной к *бесконечнозначной логике* (БЛ).

Для того чтобы.получить нужное обобщение, заметим следующее. Операция (1.1) означает выбор меньшего из двух двоичных чисел, операция (1.2) - выбор большего из этих чисел, а операция (1.3) — замену имеющегося числа на симметричное с ним относительно середины отрезка [0,1]. Итак, пусть

$$C = [A, B] \qquad (1.4)$$

— некоторый замкнутый и ограниченный интервал множества всех вещественных чисел. Этот интервал образует бесконечное (непрерывное) множество чисел. Середине этого интервала соответствует точка

$$M = (A + B)/2. \qquad (1.5)$$

Будем действовать по аналогии с двузначной логикой. Тогда для любой пары чисел $a_1, a_2 \in C$ операция *конъюнкции БЛ* определяется как

$$a_1 \wedge a_2 = \min(a_1, a_2) \qquad (1.6)$$

а операция *дизъюнкции* — как

$$a_1 \vee a_2 = \max(a_1, a_2). \qquad (1.7)$$

В определении (1.6) знак $\wedge$, когда это не ведет к недоразумению, будет опускаться. Заметим, что в случае более чем двух переменных обе операции определяются аналогично. Далее для любого числа $a \in C$ операция *отрицания БЛ* определяется в виде

$$\bar{a} = 2M - a. \qquad (1.8)$$

Из (1.8) непосредственно видно, что отрицание точки *a* на числовой оси дает точку $\bar{a} \in C$, симметричную точке *a* относительно точки *M*. Операции конъюнкции и дизъюнкции остаются определенными согласно (1.6) и (1.7) и в тех случаях, когда интервал *C* не замкнут и не ограничен либо когда *C* представляет собой произвольное дискретное (конечное или счетное) множество чисел. Однако для определения операции отрицания, согласно (1.8), требование замкнутости и ограниченности интервала *C* существенно; если же *C* — дискретное множество чисел, то существенным является требование симметричности этого множества относительно имеющегося в нем центра (середины).

Определение 1.2. *Функцией БЛ* называется произвольная функция, которая: 1) совместно со своими аргументами принимает значения из множества $C = [A, B]$; 2) может выражаться через свои аргументы формулой в виде суперпозиции операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания БЛ и, возможно, обычных алгебраических операций. Множество всех функций БЛ, рассматриваемых совместно с операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания БЛ (и, возможно, обычными алгебраическими операциями) называется *алгеброй БЛ.*

1.2. Задание функций бесконечнозначной логики

Рассмотрим произвольную функцию БЛ $b = f(a_1, \ldots, a_m)$, которая может быть выражена суперпозицией операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания БЛ над аргументами $a_1, \ldots, a_m$. Такая функция при любом наборе аргументов $(a_i, \ldots, a_m)$ принимает значение одного из аргументов a_i или его отрицания $\bar{a}_i$. Действительно, операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания БЛ, суперпозицией которых представлено выражение функции, всегда имеют своим результатом одну из переменных, участвующих в операции, или ее отрицание (см. также § 1.9) . В соответствии с этим первичное задание функции БЛ $b = f(a_1, \ldots, a_m)$ обычно состоит в перечислении всех *m*! вариантов упорядочения множества аргументов $\{a_1, \ldots, a_m\}$ с указанием для каждого варианта того аргумента a_i или его отрицания $\bar{a}_i$, значение которого принимает функция.

От указанного первичного задания функции БЛ можно перейти к ее аналитическому представлению формулой, имеющей вид суперпозиции операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания БЛ. Методика перехода основана на последовательном объединении вариантов упорядочения множества аргументов с помощью операций БЛ. Поясним эту методику на примере.

Пример 1.1. Функция БЛ от трех переменных задана табл. 1. Найти аналитическое представление этой функции.

Согласно табл. 1 искомую функцию можно представить в виде

$$b = \begin{cases} a_1 & \text{при} \quad a_1 \leqslant a_2 \quad \text{и} \quad a_3 \leqslant a_1, \\ a_2 & \text{при} \quad a_2 \leqslant a_1 \quad \text{и} \quad a_3 \leqslant a_2. \\ a_3 & \text{при} \quad a_3 \geqslant a_1, a_2. \end{cases}$$

Используя операцию конъюнкции БЛ, объединим первые две строки в одну:

$$b = \begin{cases} a_1 a_2 & \text{при} \quad a_3 \leqslant a_1 a_2, \\ a_3 & \text{при} \quad a_3 \geqslant a_1 a_2. \end{cases}$$

Объединив теперь обе строки в одну с помощью операции дизъюнкции БЛ, получим искомое представление

$$b = a_1 a_2 \vee a_3.$$

Таблица 1

Упорядочение аргументов	Значение функции	Упорядочение аргументов	Значение функции
$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$	a_3	$a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_1$	a_3
$a_1 \leqslant a_3 \leqslant a_2$	a_3	$a_3 \leqslant a_1 \leqslant a_2$	a_1
$a_2 \leqslant a_1 \leqslant a_3$	a_3	$a_3 \leqslant a_2 \leqslant a_1$	a_2

1.3. Эквивалентные логические и логико-алгебраические преобразования

Эквивалентные преобразования в БЛ позволяют привести имеющееся выражение БЛ к наиболее простому или удобному виду. Эти преобразования основаны главным образом на следующих законах БЛ, полностью совпадающих с соответствующими законами двузначной логики:

- *закон тавтологии*

$$a \vee a = a, \quad aa = a; \tag{1.9}$$

- *переместительный закон*

$$a \vee b = b \vee a, \qquad ab = ba; \tag{1.10}$$

- *сочетательный закон*

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \qquad (ab)c = a(bc); \tag{1.11}$$

- *распределительный закон*

$$a(b \vee c) = ab \vee ac, \qquad a \vee bc = (a \vee b)(a \vee c); \tag{1.12}$$

- *закон отрицания* (де Моргана)

$$\overline{a \vee b} = \bar{a}\,\bar{b}. \qquad \overline{ab} = \bar{a} \vee \bar{b}; \tag{1.13}$$

- *закон поглощения*

$$a \vee ab = a, \qquad a(a \vee b) = a; \tag{1.14}$$

- *закон двойного отрицания*

$$\bar{\bar{a}} = a, \tag{1.15}$$

Проверка законов (1.9) — (1.14) легко осуществляется перебором всех возможных вариантов упорядочения переменных и установлением для каждого варианта равенства левой и правой частей. Например, у 1-го закона (1.13) есть два варианта: $a \geqslant b$ и $a < b$. В первом варианте$\bar{a} \leqslant \bar{b}$, и закон принимает вид $\bar{a} = \bar{a}$. Во втором варианте $\bar{a} > \bar{b}$, и закон принимает вид $\bar{b} = \bar{b}$. Таким образом, закон всегда справедлив. Формула (1.15) вытекает непосредственно из определения операции отрицания БЛ.

Кроме законов (1.9) - (1.15) важное значение в БЛ имеют следующие очевидные законы:

- *закон оценки величины логического выражения*

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant a_1, a_2, \ldots, a_n; \qquad a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n \geqslant a_1, a_2, \ldots, a_n; \tag{1.16}$$

закон сокращения конъюнкции

$$a_1 \ldots a_{i-1} a_i a_{i+1} \ldots a_n = a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n \,, \tag{1.17}$$

если $a_i \geqslant a_k$ при некотором $k \neq i$;

- *закон сокращения дизъюнкции*

$$a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_i \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_n = = a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_n \,, \tag{1.18}$$

если $a_i \leqslant a_k$ при некотором $k \neq i$.

В частности, из (1.16), (1.17) следует, что

$$xA = A, \tag{1.19}$$

$$xB = x, \tag{1.20}$$

$$x \vee A = x, \tag{1.21}$$

$$x \vee B = B. \tag{1.22}$$

Следует отметить, что некоторые законы Б Л имеют более сложную форму, чем соответствующие им законы двузначной логики.

Например, в двузначной логике справедливы законы:

— *исключенного третьего*

$$x \vee \bar{x} = 1; \tag{1.23}$$

— *противоречия*

$$x\bar{x} = 0; \tag{1.24}$$

— *ортогональности*

$$x \vee \bar{x}y = x \vee y. \tag{1.25}$$

В то же время непосредственно из определений (1.6) —1.8) легко получить соответствующие (1.23), (1.24) законы БЛ:

$$a \vee \bar{a} = \begin{cases} a, & a \geqslant M \\ \bar{a} = 2M - a, & a < M \end{cases} \Bigg| = M + |a - M|, \tag{1.26}$$

$$a\bar{a} = \begin{cases} a, & a < M \\ \bar{a} = 2M - a, & a \geqslant M \end{cases} \Bigg| = M - |a - M|. \tag{1.27}$$

Здесь и ниже $|D|$ - абсолютная величина числа D. Далее из соотношения (1.12) следует

$$a \vee \bar{a}b = (a \vee b)(a \vee \bar{a}),$$

что вместе с (1.26) дает соответствующий (1.25) закон БЛ

$$a \vee \bar{a}b = (a \vee b)(M + |a - M|). \tag{1.28}$$

Хорошо видно, что законы БЛ (1.26) — (1.28) сложнее соответствующих законов двузначной логики (1.23) — (1.25).

Относительно большая сложность ряда законов БЛ, включающих операцию отрицания, ведет к тому, что логические выражения БЛ часто не удается преобразовать к такому простому виду, как это бывает в двузначном случае. Эта сложность — неизбежная плата за получаемую возможность изучения с помощью БЛ более сложных процессов, могущих находиться в бесконечном множестве состояний.

Часто возникает необходимость приведения к наиболее простому виду выражений, содержащих, помимо операций БЛ, также и обычные алгебраические операции. Комбинирование этих двух классов операций закономерно, поскольку и те и другие оперируют с непрерывными величинами и формируют функции, принимающие непрерывные значения.

Эквивалентные преобразования логико-алгебраических выражений с целью их упрощения базируются на возможности представления операций Б Л через обычные алгебраические операции. Для логической операции отрицания такое представление содержится уже в ее определении (1.8). Что касается операций конъюнкции и дизъюнкции, то они представляются в терминах алгебраических операций следующим образом) :

$$a \wedge b = 0{,}5\,[a + b - |a - b|] = a\mathbf{1}(b - a) + b\,\mathbf{1}(a - b). \tag{1.29}$$

$$a \vee \bar{b} = 0{,}5\,[a + b + |a - b|] = a\mathbf{1}(a - b) + b\,\mathbf{1}(b - a). \tag{1.30}$$

Здесь **1** (•) - единичная функция, определяемая равенством

$$\mathbf{1}(d) = \begin{cases} 1, & d \geqslant 0, \\ 0, & d < 0. \end{cases} \qquad (1.31)$$

(В этом параграфе знак $\wedge$ конъюнкции БЛ нигде не опущен, чтобы не спутать эту опграцию с алгебраическим умножением.)

Справедливость соотношений (1.29) и (1.30) легко проверить, рассмотрев три возможных случая: $d = 0,\ d > 0,\ d < 0.$ Сама единичная функция может быть выражена через другие алгебраические операции или в терминах БЛ

$$\mathbf{1}(d) = \frac{d + |d|}{2d} = \frac{d}{|d|} \vee 0 \qquad (d \neq 0). \qquad (1.32)$$

Представление многоместных операций БЛ через алгебраические операции можно получить, используя последовательное объединение переменных по два и применяя на каждом шаге формулы (1.29) и (1.30). Однако можно и сразу записать общее представление многоместной конъюнкции и дизъюнкции БЛ, аналогичное представлению соответствующих двуместных операций, если воспользоваться единичными функциями

$$\bigwedge_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{r=1,\, r\neq i}^{n} \mathbf{1}(a_r - a_i), \qquad (1.33)$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{r=1,\, r\neq i}^{n} \mathbf{1}(a_i - a_r). \qquad (1.34)$$

Справедливость представления (1.33) следует из того, что функция $\prod_{r=1,\, r\neq i}^{n} \mathbf{1}(a_r - a_i)$ является индикатором минимальности a_i, т.е.

$$\prod_{r=1,\, r\neq i}^{n} \mathbf{1}(a_r - a_i) = \begin{cases} 1, & a_i = \bigwedge_{s=1}^{n} a_s, \\ 0 & \text{в противном случае}. \end{cases} \qquad (1.35)$$

Аналогично, справедливость представления (1.34) следует из того, что функция $\prod_{r=1,\, r\neq i}^{n} \mathbf{1}(a_i - a_r)$ является индикатором максимальности a_i, т.е.

$$\prod_{r=1,\, r\neq i}^{n} \mathbf{1}(a_i - a_r) = \begin{cases} 1, & a_i = \bigvee_{s=1}^{n} a_s, \\ 0 & \text{в противном случае}. \end{cases} \qquad (1.36)$$

Формулы (1.35), (1.36) и вытекающие из них представления (1.33), (1.34) предполагают наличие в числовом множестве $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ровно одного максимального и ровно одного минимального числа a_i.

Помимо приведенных соотношений между логическими и алгебраическими операциями, на практике могут быть полезны

различные другие законы, которым подчинены логико-алгебраические выражения. При сочетании логических операций с алгебраическим суммированием действует распределительный закон, имеющий ряд различных форм:

$$a + (b \vee c) = (a + b) \vee (a + c), \qquad (1.37)$$

$$a + (b \wedge c) = (a + b) \wedge (a + c), \qquad (1.38)$$

$$a - (b \vee c) = (a - b) \wedge (a - c), \qquad (1.39)$$

$$a - (b \wedge c) = (a - b) \vee (a - c), \qquad (1.40)$$

$$(a \vee b) + (c \vee d) = (a + c) \vee (a + d) \vee (b + c) \vee (b + d), \qquad (1.41)$$

$$(a \wedge b) + (c \wedge d) = (a + c) \wedge (a + d) \wedge (b + c) \wedge (b + d), \qquad (1.42)$$

$$(a \vee b) - (c \wedge d) = (a - c) \vee (a - d) \vee (b - c) \vee (b - d). \qquad (1.43)$$

$$(a \wedge b) - (c \vee d) = (a - c) \wedge (a - d) \wedge (b - c) \wedge (b - d). \qquad (1.44)$$

При комбинировании логических операций с арифметическим умножением (переменные *a, b, c, d* положительны) также справедлив распределительный закон, типичные формы которого:

$$a(b \vee c) = ab \vee ac, \qquad (1.45)$$

$$a(b \wedge c) = ab \wedge ac, \qquad (1.46)$$

$$-a(b \vee c) = (-ab) \wedge (-ac), \qquad (1.47)$$

$$-a(b \wedge c) = (-ab) \vee (-ac), \qquad (1.48)$$

$$(a \vee b)(c \vee d) = ac \vee ad \vee bc \vee bd, \qquad (1.49)$$

$$(a \wedge b)(c \wedge d) = ac \wedge ad \wedge bc \wedge bd, \qquad (1.50)$$

$$(a \vee b)(-c \wedge -d) = (-ac) \wedge (-ad) \wedge (-bc) \wedge (\ \ bd), \qquad (1.51)$$

$$(a \wedge b)(-c \vee -d) = (-ac) \vee (-ad) \vee (-bc) \vee (-bd), \qquad (1.52)$$

При сочетании логических операций с алгебраическим умножением (переменные *a, b, c* положительные, отрицательные и нули) распределительный закон выражается в разных формах в зависимости от знака множителя, что можно записать в единой форме с помощью единичной функции:

$$(a \vee b)c = (ac \vee bc)\mathbf{1}(c) + (ac \wedge bc)\mathbf{1}(-c), \qquad (1.53)$$

$$(a \wedge b)c = (ac \wedge bc)\mathbf{1}(c) + (ac \vee bc)\mathbf{1}(-c). \qquad (1.54)$$

И некоторых случаях оказываются полезными следующие формулы упрощения специальных логико-алгебраических выражений:

$$(a \vee b) + (a \wedge b) = a + b, \qquad (1.55)$$

$$(a \vee b) - (a \wedge b) = |a - b|, \qquad (1.56)$$

$$(a \vee b)(a \wedge b) = ab, \qquad (1.57)$$

$$(a \wedge b) \vee (\ \ a \wedge -b) = 0{,}5\,[\,|a + b| - |a - b|\,], \qquad (1.58)$$

$$(a \vee b) \wedge (-a \vee -b) = -\,0{,}5\,[\,|a + b| - |a - b|\,]. \qquad (1.59)$$

$$(a \vee 0) + (b \wedge 0) = (a \vee 0) \wedge b = a \vee (0 \wedge b),\ b \geqslant a. \qquad (1.60)$$

Приведенные формулы (1.37) - (1.60) можно проверить, перебрав все возможные варианты упорядочения переменных (см. § 1.3). Все эти формулы выражают интуитивно хорошо ощущаемые факты. Например, формула (1.37) показывает, что сумма максимума двух чисел с третьим числом равна максимальной из почленных сумм. Предыдущие правила преобразования относились к логико-алгебраическим выражениям, не содержащим операции отрицания БЛ. Приведем теперь важнейшее правило преобразования выражений, содержащих отрицание

$$\overline{a + b} = \bar{a} - b. \quad (1.61)$$

Доказательство соотношения (1.61) получается немедленно с помощью определения операции.отрицания (1.8).

1.4. Канонические представления функций бесконечнозначной логики

На практике часто возникает необходимость представить функцию БЛ в подходящей канонической форме. Наиболее удобными такими формами являются дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) и конъюнктивная нормальная форма (КНФ).

Определение 1.3. Пусть $F(a_1, \dots, a_m)$ — произвольная функция БЛ с множеством аргументов $a = \{a_1, \dots, a_m\}$. Условимся считать различными как буквы a_i и a_j, $i \neq j$, так и буквы a_i и $\bar{a}_i$, $i = \overline{1, m}$. *Элементарной конъюнкцией БЛ* над *a* называется конъюнкция любого конечного множества попарно различных букв a_i и $\bar{a}_i$, где $a_i \in a$. Например, элементарной конъюнкцией над $a = \{a_1, a_2\}$ служит $a_1 a_2 \bar{a}_2$. *Элементарной дизъюнкцией БЛ* над *a* называется дизъюнкция любого конечного множества попарно различных букв a_i и $\bar{a}_i$, где $a_i \in a$. Так, элементарной дизъюнкцией над $a = \{a_1, a_2\}$ является $a_1 \vee \bar{a}_1 \vee a_2$.

Определение 1.4. ДНФ в БЛ над множеством $a = \{a_1, \dots, a_m\}$ называется дизъюнкция БЛ любого конечного множества попарно различных элементарных конъюнкций БЛ над *a*. Аналогично, КНФ над множеством *a* называется конъюнкция БЛ любого конечного множества попарно различных элементарных дизъюнкций БЛ над *a*.

Теорема 1.1. *Произвольная функция БЛ* $F(a_1, \dots, a_m)$, *сформированная с помощью только операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания БЛ, может быть представлена:* 1) *в эквивалентной ДНФ над множеством а =* $\{a_1, \dots, a_m\}$; 2) *в эквивалентной КНФ над тем же множеством.*

Доказательство конструктивно и может быть проведено подобно соответствующему для булевых функций. Докажем только 1), а 2) доказывается аналогично. На 1-м шаге при помощи формул де Моргана (1.13) и закона двойного отрицания (1.15) производим "спуск отрицаний" на сами аргументы a_i, т.е. *F* придается вид выражения, построенного из букв $a_1, \dots, a_m$ и их отрицаний с помощью только конъюнкции и дизъюнкции БЛ, что, очевидно, всегда возможно. Если в результате 1-го шага получилось выражение *F,* не содержащее дизъюнкций, то оно является элементарной конъюнкцией, так что приведение *F* к ДНФ окончено. В противном глуше переходим ко 2-му шагу, состоящему в следующем.

Пусть в результате 1-го шага получилось выражение $F = F_1 F_2 \dots F_p$ (т.е. последняя операция в выражении *F* — конъюнкция); тогда часть из F_i — элементарные конъюнкции, а другая часть (обязательно непустая) — дизъюнкция. Раскрыв на основе распределительного закона все скобки, содержащие дизъюнкции, и выполнив в получившихся конъюнктивных членах необходимые упрощения, приведем выражение *F* к форме дизъюнкции, каждый конъюнктивный член которой содержит меньше операций дизъюнкции, чем исходная форма $F = F_1 F_2 \dots F_p$. После этого та же процедура проделывается с каждым конъюнктивным членом и т.д. Оканчивается 2-й шаг тогда, когда выражение *F* получает форму дизъюнкции, каждый конъюнктивный член которой уже не содержит собственных операций дизъюнкции, т.е. является элементарной конъюнкцией. Если же в результате 1-го шага получилось выражение $F = F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_p$ (т.е. последняя операция в выражении *F* — дизъюнкция), то приведение *F* к ДНФ сводится к уже решенной задаче приведения к ДНФ функций F_i, $i = \overline{1, p}$, в выражениях которых последней операцией является конъюнкция.

Для представления произвольной функции БЛ в ДНФ или КНФ удобно исходить из аналитического задания этой функции. Алгоритм перехода от такой формы представления функции к ее ДНФ состоит в поочередном выполнении двух операций: 1) спуск отрицаний с более сложных выражений на менее сложные в соответствии с законами де Моргана (1.13) и двойного отрицания (1.15); 2) раскрытие скобок в соответствии с распределительным законом (1.12). Алгоритм перехода от аналитической формы записи функций БЛ к ее КНФ состоит в поочередном выполнении двух операций: 1) спуск отрицаний с более сложных выражении на менее сложные согласии законам де Моргана (1.13) и двойного отрицания (1.15); 2) введение скобок согласно распределительному закону (1.12).

Пример 1.2. Привести к ДНФ функцию БЛ $F = (a_1 a_2 \vee \bar{a}_2 a_3)\, \overline{\bar{a}_1 a_4}$.

По формуле де Моргана $\overline{\bar{a}_1 a_4} = a_1 \vee \bar{a}_4$, раскрыв скобки согласно распределительному закону, находим

$$F = (a_1a_2 \vee \bar{a}_2a_3)(a_1 \vee \bar{a}_4) = a_1a_2 \vee a_1\bar{a}_2a_3 \vee a_1a_2\bar{a}_4 \vee \bar{a}_2a_3\bar{a}_4.$$

Пример 1.3. Привести к КНФ функцию *F* из примера 1.2. Применив дважды распределительный закон к скобке и подставив найденное в примере 1.2 выражение $\overline{\bar{a}_1 a_4}$, получим

$$F = (a_1a_2 \vee \bar{a}_2a_3)(a_1 \vee \bar{a}_4) =$$

$$= (a_1a_1 \vee \bar{a}_2)(a_1a_2 \vee a_3)(a_1 \vee \bar{a}_4) = (a_1 \vee \bar{a}_2)(a_2 \vee \bar{a}_2)(a_1 \vee a_3)(a_2 \vee a_3)\cdot$$

$$\cdot(a_1 \vee a_4).$$

1.5. Обыкновенные уравнения и неравенства в бесконечнозначной логике

Как будет видно из дальнейшего, изучение многих систем естественным образом приводит к уравнениям, в которых фигурируют операции БЛ. В связи с ним мы подробно изучим два больших класса таких уравнений, предсинлнющих наибольший практический интерес.

Определение 1.5. *Обыкновенным уравнением БЛ* называется уравнение вида

$$F(a_1, \ldots, a_k,\ x_1, \ldots, x_n) = L(a_1, \ldots, a_k,\ x_1, \ldots, x_n), \quad (1.62)$$

где *F* и *L* — заданные функции БЛ (вообще говоря, различные), $a_1, \ldots, a_k$-известные, а $x_1, \ldots, x_n$ - неизвестные (искомые) аргументы, лежащие в заданном замкнутом и ограниченном интервале *C = [A, B]* множества всех вещественных чисел. *Частным решением* этого уравнения называется любой набор $(x_1, \ldots, x_n)$, для которого равенство (1.62) справедливо.

Совокупность всех частных решений называется *общим решением.*

Примечание 1.1. Для дальнейшего нам достаточно ограничиться таким классом функций БЛ (F, *L),* в котором любая функция выражается аналитически суперпозицией трех операций БЛ, введенных выше — дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Из этих операций лишь одна (отрицание) существенно нуждается в том, чтобы оперируемый аргумент принадлежал ограниченному интервалу. Для двух других операций аргументы могут принимать любые значения из множества всех вещественных чисел. Поэтому в случае неиспользования в *F* и *L* операции отрицания определение 1.5 можно расширить, приняв $A = -\infty$, $B = \infty$.

Определение 1.6. *Неравенством БЛ* называется неравенство вида

$$F(a_1, \ldots, a_k,\ x_1, \ldots, x_n) \gtrless L(a_1, \ldots, a_k,\ x_1, \ldots, x_n), \quad (1.63)$$

где F, L, a_i, x_j удовлетворяют определению 1.5 и примечанию 1.1. Решение этого неравенства определяется аналогично решению уравнения (1.62).

Определение 1.7. *Системой обыкновенных уравнений и неравенств БЛ* называется совокупность рассматриваемых совместно конечного множества уравнений вида (1.62) и конечного множества неравенств вида (1.63) (одно из двух множеств может быть пустым). Уравнения и неравенства БЛ удобно записывать в терминах векторов параметров $a = (a_1, \ldots, a_k)$ и векторов неизвестных $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Перейдем к классификации обыкновенных уравнений и неравенств БЛ. Прежде всего, уравнение (1.62) может быть с одним неизвестным (*n* = 1) или с несколькими $(n \geqslant 2)$. Более подробная классификация проводится с использованием ДНФ функций, стоящих в левой и правой частях уравнения. Это использование позволяет, объединив элементарные конъюнкции, содержащие одно и то же подмножество множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ неизвестных, представить уравнение (1.62) в следующей канонической форме:

$$(\bigvee_{i=1}^{n} a_ix_i) \vee (\bigvee_{i=1}^{n} a_i'\bar{x}_i) \vee (\bigvee_{i>j}^{n} a_{ij}x_ix_j) \vee (\bigvee_{i>j}^{n} a_{ij}'x_i\bar{x}_j) \vee$$

$$\vee (\bigvee_{i>j}^{n} a_{ij}''\bar{x}_i\bar{x}_j) \vee \ldots \vee a_{12\ldots n}^{(n)} x_1 \ldots x_n \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n \vee c =$$

$$= (\bigvee_{i=1}^{n} d_ix_i) \vee (\bigvee_{i=1}^{n} d_i'\bar{x}_i) \vee (\bigvee_{i>j}^{n} d_{ij}x_ix_j) \vee$$

$$\vee (\bigvee_{i>j}^{n} d_{ij}'x_i\bar{x}_j) \vee (\bigvee_{i>j}^{n} d_{ij}''\bar{x}_i\bar{x}_j) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee d_{12\ldots n}^{(n)} x_1 \ldots x_n \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n \vee e,$$

(1.64)

где коэффициенты *a, d, c, e* — элементарные конъюнкции параметров $a_1, \ldots, a_k$. Здесь дизъюнкции, заключенные в скобки, берутся по всем наборам индексов (i, j), (i, j, k) и т.д., в которых любые два индекса *i*, *j* не могут быть равными, когда соответствующие им неизвестные x_i, x_j входят оба без отрицания или оба с отрицанием. Если же x_i входит с отрицанием, а x_j без него (или наоборот), то в число наборов индексов, по которым берутся дизъюнкции, входят и все наборы с $i = j$.

Из (1.64) сразу получаем общий вид уравнения с одним неизвестным

$$ax \vee a'\bar{x} \vee kx\bar{x} \vee c = dx \vee d'\bar{x} \vee lx\bar{x} \vee e. \quad (1.65)$$

Определение 1.8. *Порядком I* обыкновенного уравнения БЛ называется максимальное число различных неизвестных и их отрицаний, содержащихся в одной элементарной конъюнкции формы (1.64) этого уравнения.
Так, для полного уравнения с *n* неизвестными, согласно (1.64), *I*= 2*n*, в частности I=2 для полного уравнения с одним неизвестным (1.65). Уравнения с I = 1 назовем *линейными,* а с $I \geqslant 2$— *нелинейными.*
Общий вид линейного уравнения с *n* неизвестными получается из (1.64)

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{n} a'_i \bar{x}_i\right) \vee c = \left(\bigvee_{i=1}^{n} d_i x_i\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{n} d'_i \bar{x}_i\right) \vee e. \tag{1.66}$$

Отсюда линейное уравнение с одним неизвестным может быть представлено в общем виде следующим образом:

$$ax \vee a'\bar{x} \vee c = dx \vee d'\bar{x} \vee e. \tag{1.67}$$

Обыкновенные уравнения БЛ можно также разделить на уравнения с отрицаниями и без отрицаний неизвестных. Первый тип уравнения может быть представлен в общем виде (1.64), а второй —в следующем, вытекающем из (1.64)

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \vee \left(\bigvee_{i>j}^{n} a_{ij} x_i x_j\right) \vee \ldots \vee a_{12\ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n \vee c =$$
$$= \left(\bigvee_{i=1}^{n} d_i x_i\right) \vee \left(\bigvee_{i>j}^{n} d_{ij} x_i x_j\right) \vee \ldots \vee d_{12\ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n \vee e. \tag{1.68}$$

В частности, в случае одного неизвестного первый тип уравнения имеет общее представление (1.65), а второй тип — линейное представление

$$ax \vee c = dx \vee e. \tag{1.69}$$

Отметим, что при изучении большинства систем уравнения с отрицаниями неизвестых не появляются.
Неравенства БЛ классифицируются точно так же, как и уравнения. Что касается систем уравнений и неравенств, то отнесение к тому или иному классу производится в соответствии с типами входящих в них уравнений и неравенств. При этом за основу берется наиболее сложный тип уравнения (неравенства). Так, система из двух линейных и одного нелинейного уравнения считается нелинейной; система из двух уравнений с отрицаниями неизвестных и двух - без отрицаний считается системой уравнений с отрицаниями неизвестных и т.д.

1.6. Методы решения уравнений и неравенств

Определение 1.9. *Объединением уравнений* (неравенств, систем уравнений и неравенств) называется их совокупность, общим решением которой считается теоретико-множественное объединение общих решений входящих в нее уравнений (неравенств, систем уравнений и неравенств).
Основным методом решения уравнений (неравенств) БЛ является последовательное расчленение их правых и левых частей, базирующееся на определении операций БЛ и позволяющее заменять исходное уравнение (неравенство) эквивалентным объединением систем, состоящих из более простых уравнений и неравенств. Решение системы уравнений и неравенств получается как пересечение решений входящих в нее уравнений (неравенств) . Пусть, например, в системе из двух уравнений

$$\begin{aligned} F_1(a, x) &= L_1(a, x), \\ F_2(a, x) &= L_2(a, x) \end{aligned} \tag{1.70}$$

первое имеет решение

$$x = x'_1 \quad \text{при} \quad A'_1, \; \ldots, \; x = x'_r \quad \text{при} \quad A'_r, \tag{1.71}$$

а второе — решение

$$x = x''_1 \quad \text{при} \quad A''_1, \ldots, \; x = x''_q \quad \text{при} \quad A''_q \tag{1.72}$$

(здесь A'_i и A''_j, где $A'_i \cap A'_k = \phi, A''_j \cap A''_s = \phi$, означают конкретные области значений параметра *a,* в которых решение имеет свое определенное выражение). Тогда решение системы (1.70) можно записать в виде следующего правила пересечения решений

$$\begin{aligned} x = x'_1 \cap x''_1 \quad &\text{при} \quad A'_1 \cap A''_1, \ldots, \\ x'_1 \cap x''_q \quad &\text{при} \quad A'_1 \cap A''_q, \ldots, \\ x'_r \cap x''_q \quad &\text{при} \quad A'_r \cap A''_q. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Решение объединения уравнений (неравенств, систем уравнений и неравенств) получается на основании определения 1.9. Пусть, например, в объединении двух уравнений

$$[F_1(a, x) = L_1(a, x)] \cup [F_2(a, x) = L_2(a, x)] \tag{1.74}$$

решение первого — (1.71), а второго — (1.72). Тогда решение системы (1.74) можно записать в виде следующего правила объединения решений.

$$
\begin{aligned}
&x = x'_1 \text{ при } A'_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{q} A''_i, \;\ldots, x'_r \text{ при } A'_r \setminus \bigcup_{i=1}^{q} A''_i,\\
&x''_1 \text{ при } A''_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{r} A'_i, \ldots, x''_q \text{ при } A''_q \setminus \bigcup_{i=1}^{r} A'_i,\\
&x'_1 \cup x''_1 \text{ при } A'_1 \cap A''_1, \ldots, x'_1 \cup x''_q \text{ при } A'_1 \cap A''_q, \ldots,\\
&x'_r \cup x''_q \text{ при } A'_r \cap A''_q.
\end{aligned}
\tag{1.75}
$$

Остановимся теперь подробнее на методе расчленения. Пусть имеющееся уравнение (1.62) представлено в каноническом виде (1.64). Тогда в его левой и в правой частях последними операциями могут быть лишь дизъюнкция или конъюнкция (мы не учитываем операций конъюнкции, формирующих коэффициенты *a, c, d, e,* считая эти коэффициенты неделимым целым; мы также не учитываем крайней ситуации, когда левая или правая часть имеет вид c = const или x_i или $\bar{x}_t$). Пусть, например, в левой части последняя операция — дизъюнкция. Тогда уравнение можно записать в форме

$$F_1(a, x) \vee F_2(a, x) = L(a, x). \tag{1.76}$$

Теперь, согласно определению дизъюнкции БЛ (1.76), можно заменить эквивалентным объединением двух систем уравнений и неравенств

$$\left.\begin{matrix} F_1(a, x) \geqslant F_2(a, x) \\ F_1(a, x) = L(a, x) \end{matrix}\right\} \cup \left.\begin{matrix} F_1(a, x) < F_2(a, x) \\ F_2(a, x) = L(a, x) \end{matrix}\right\}. \tag{1.77}$$

Каждое уравнение или неравенство в (1.77) проще исходного уравнения (1.76), так как по крайней мере в одной части содержит меньше операций. Этот процесс упрощения может быть продолжен путем расчленения правой части (1.76). Пусть, например, правая часть (1.76) также имеет в качестве последней операции дизъюнкцию. Тогда (1.76) примет вид

$$F_1(a, x) \vee F_2(a, x) = L_1(a, x) \vee L_2(a, x), \tag{1.78}$$

Используя представление $L = L_1 \vee L_2$, можно каждое из двух уравненийв (1.77) $(F_1 = L$ и $F_2 = L)$ заменить эквивалентным объединением двух систем уравнений, подобно замене (1.76) на (1.77). В результате получим следующее объединение четырех систем уравнений и неравенств, эквивалентное уравнению (1.78)

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix} F_1(a, x) \geqslant F_2(a, x) \\ F_1(a, x) = L_1(a, x) \\ L_1(a, x) \geqslant L_2(a, x) \end{matrix}\right\} \cup \left.\begin{matrix} F_1(a, x) \geqslant F_2(a, x) \\ F_1(a, x) = L_2(a, x) \\ L_1(a, x) < L_2(a, x) \end{matrix}\right\} \cup\\
&\cup \left.\begin{matrix} F_1(a, x) < F_2(a, x) \\ F_2(a, x) = L_1(a, x) \\ L_1(a, x) \geqslant L_2(a, x) \end{matrix}\right\} \cup \left.\begin{matrix} F_1(a, x) < F_2(a, x) \\ F_2(a, x) = L_2(a, x) \\ L_1(a, x) < L_2(a, x) \end{matrix}\right\}.
\end{aligned}
\tag{1.79}
$$

В каждом уравнении или неравенстве в (1.79) и правая и левая части проще, чем соответствующая часть в исходном уравнении (1.78). Процесс последовательного упрощения исходного уравнения продолжается теперь путем расчленения правых и левых частей в уравнениях (неравенствах) (1.79) и т.д.

Если в исходном уравнении в какой-то части (например, левой) последним операция — конъюнкция, то его можно записать в форме (1.80)

$$F_1(a, x)\, F_2(a, x) = L(a, x).$$

Уравнение (1.80) по определению конъюнкции БЛ можно заменить эквивалентным объединением двух систем из более простых уравнений и неравенств

$$\left.\begin{matrix} F_1(a, x) \geqslant F_2(a, x) \\ F_2(a, x) = L(a, x) \end{matrix}\right\} \cup \left.\begin{matrix} F_1(a, x) < F_2(a, x) \\ F_1(a, x) = L(a, x) \end{matrix}\right\}. \tag{1.81}$$

Дальнейшее упрощение исходного уравнения следует намеченной выше схеме; расчленяется правая часть уравнения (1.80), что позволяет заменить (1.81) эквивалентным объединением четырех систем уравнений и неравенств. После этого левые и правые части полученных уравнений и неравенств сами подвергаются расчленению и т.д.

Процесс последовательного упрощения исходного уравнения (неравенств) может продолжаться либо до получения нерасчленяемых уравнений и неравенств (они имеют простейший вид $\tilde{x}_i \gtreqqless \tilde{x}_j$, $\tilde{x}_t \gtreqqless a$, где $\tilde{x} = x$ или $\bar{x}$, т.е. в совокупности уже составляют решение), либо до получения типовых уравнений и неравенств, решения которых заготовлены заранее. Второй путь связан с меньшим объемом вычислений и потому позволяет решать более сложные уравнения и неравенства.

1.7. Типовые обыкновенные уравнения и неравенства без отрицаний

Рассмотрим несколько типовых уравнений и неравенств с одним неизвестным, не содержащих операций отрицания. Простейшее из них

$$ax = b. \quad (1.82)$$

Уравнение (1.82) эквивалентно объединению систем $(x \geqslant a = b) \cup (x = b < a)$, что позволяет сразу записать его решение

$$\begin{cases} x = b \ \text{ при } \ a > b, \\ x \geqslant b \ \text{ при } \ a = b. \end{cases} \quad (1.83)$$

Как видно, решение уравнения (1.82) существует лишь при $a \geqslant b$.

Неравенство

$$ax > b \quad (1.84)$$

эквивалентно объединению систем $(x \geqslant a > b) \cup (b < x < a)$ и, следовательно, имеет решение

$$x > b \ \text{ при } \ a > b. \quad (1.85)$$

Симметричное с (1.84) неравенство

$$ax < b \quad (1.86)$$

можно заменить объединением систем

$(x \geqslant a, \ a < b) \cup (x < a, \ x < b)$,

что дает решение в виде $(x \geqslant a) \cup (x < a)$. При $a < b$ и $x < ab = b$ при $a \geqslant b$.

Итак, решение неравенства (1.86)

$$\begin{cases} x \in [A, B] \ \text{ при } \ a < b, \\ x < b \ \text{ при } \ a \geqslant b. \end{cases} \quad (1.87)$$

Видно, что решение неравенстве (1.86) существует при любых *a* и *b*.

Уравнение

$$c \vee x = b \quad (1.88)$$

эквивалентно объединению бистем *(b=x>c)* $\bigcup$ *(b=c≥x)*. Потому его решение можно записать как

$$\begin{cases} x = b \ \text{ при } b > c, \\ x \leqslant b \ \text{ при } b = c. \end{cases} \quad (1.89)$$

Неравенство

$$c \vee x < b \quad (1.90)$$

можно представить в виде объединения системой

(c ≤x< b) $\bigcup$ *(x < c < b).*

Это немедленно дает решение

$$x < b \ \text{ при } \ c < b. \quad (1.91)$$

Рассмотрим неравенство

$$c \vee x > b. \quad (1.92)$$

Для него эквивалентное объединение систем

$$(x \geqslant c, \ x > b) \cup (x < c, \ c > b) =$$

$$= (x \geqslant c > b) \cup (x > b \geqslant c) \cup (x < c, \ c > b).$$

Отсюда следует решение этого неравенства в виде

$$\begin{matrix} x \in [A, B], & c > b, \\ x > b, & c \leqslant b. \end{matrix} \quad (1.93)$$

Неравенство

$$ax \vee c > b \quad (1.94)$$

заменой *y* = *ax* сводится к предыдущему неравенству, что дает возможность найти значение *ax*. Определяя *x* с учетом (1.84) и (1.85), получим решение

$$\begin{matrix} x \in [A, B], & c > b, \\ x > b, & c \leqslant b < a. \end{matrix} \quad (1.95)$$

Неравенство

$$ax \vee c < b \quad (1.96)$$

той же заменой сводится к рассмотренному неравенству (1.90), что позволяет найти *ax*. После этого учет (1.86), (1.87) дает решение неравенства (1.96) в форме

$$\begin{matrix} x \in [A, B], & a \vee c < b, \\ x < b, & a \geqslant b > c. \end{matrix} \quad (1.97)$$

Нестрогое неравенство

$$ax \leqslant b \quad (1.98)$$

эквивалентно объединению уравнения (1.82) с неравенством (1.86). Поэтому объединение их решений (1.83) и (1.87) дает решение неравенства (1.98)

$$\begin{matrix} x \in [A, B], & a \leqslant b, \\ x \leqslant b, & a > b. \end{matrix} \quad (1.99)$$

Уравнение

$$ax = dx \quad (1.100)$$

эквивалентно объединению систем

$(x \leqslant a < d) \cup (x \leqslant d < a) \cup (a = d)$. Отсюда следует решение этого уравнения

$$x \in [A, B], \text{ если } a = d, \qquad x \leqslant ad, \text{ если } a \neq d. \tag{1.101}$$

Рассмотрим одно типовое неравенство с двумя неизвестными, не содержащее операции отрицания

$$x \vee a \leqslant y \vee b. \tag{1.102}$$

Расчленение левой части (1.102) дает систему неравенств $(x \leqslant y \vee b,\ a \leqslant y \vee b)$, решение которой находим отдельно для двух случаев:

1) $a \leqslant b$, тогда 2-е неравенство выполняется тождественно, и решением яляется 1-е неравенство, распадающееся на пару неравенств

$$x \leqslant y \tag{1.103а}$$

или

$$x \leqslant b; \tag{1.103б}$$

2) $a > b$, тогда система имеет решение $a \leqslant y,\ x \leqslant y \vee b = y$, т.е.

$$x \leqslant y,\ a \leqslant y. \tag{1.103в}$$

Заметим, что из трех данных решений неравенства (1.102), а именно, (1.103а) - (1.1033в) лишь одно (1.103а) не зависит явно от параметров *a* и *b*.

1.8. Уравнения и неравенства бесконечнозначной логики с отклоняющимися аргументами

Определение 1.10. *Уравнением БЛ с отклоняющимися аргументами* называется уравнение вида

$$F(a, x_1, x_1 + p_{11}, \ldots, x_1 + p_{1m_1}, \ldots, x_n, x_n + p_{n1}, \ldots, x_n + p_{nm_n}) =$$
$$= L(a, x_1, x_1 + p_{11}, \ldots, x_1 + p_{1m_1}, \ldots, x_n, x_n + p_{n1}, \ldots, x_n + p_{nm_n}), \tag{1.104}$$

где *F* и *L* — заданные функции БЛ (вообще говоря, различные); $a = (a_1 \ldots a_k)$ — вектор параметров; $p = (p_{11}, \ldots, p_{1m_1}, \ldots, p_{n1}, \ldots\ldots, p_{nm_n})$ — вектор отклонений; $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор неизвестных.

При этом a_i $(i = 1, \ldots, k), x_j$ и $x_j + p_{jr}$ $(j = 1, \ldots, n;\ r = 1, \ldots, m_j)$ лежат в заданном замкнутом и ограниченном интервале $C = [A, B]$ множества всех вещественных чисел. (По аналогии с § 1.5 в случае отсутствия в выражениях *F* и *L* операции отрицания БЛ можно принять $A = -\infty,\ B = \infty$).

Частным (общим) решением уравнения (1.104) называется любой вектор (совокупность всех векторов) *x,* для которого равенство (1.104) справедливо.

Отметим, что практически встречаются также уравнения, в которых операция сдвига на *p* выполняется не над самими неизвестными, как в (1.104), а над некоторыми функциями БЛ от них. Однако такие уравнения можно легко свести к типу (1,104). Для этого используются доказанные§ 1.3 соотношения (1.37), (1.38), (1.61), имеющие в данном случае вид

$$xy + p = (x + p)(y + p),$$
$$(x \vee y) + p = (x + p) \vee (y + p), \quad \overline{x + p} = \bar{x} - p, \tag{1.105}$$

и позволяющие последовательно переносить операцию сдвига с функции на аргументы. Например,

$$(xy \vee zu) + p = (xy + p) \vee (zu + p) = (x + p)(y + p) \vee (z + p)(u + p).$$

Определение 1.11. *Неравенством БЛ с отклоняющимися аргументами называется* неравенство, получаемое из (1.104) заменой знака ”=” на “>” или ”<”.

Определение 1.12. *Системой уравнений и неравенств БЛ с отклоняющимися аргументами* называется совокупность рассматриваемых совместно конечного множества уравнений и конечного множества неравенств этого класса (одно из двух множеств может быть пустым).

Введенный класс уравнений и неравенств появляется при изучении систем, обладающих внутренней инерционностью (задержками).

Классификация уравнений и неравенств БЛ с отклоняющимися аргументами подобна соответствующей для обыкновенных уравнений БЛ. Прежде всего выделяем уравнение с одним неизвестным (в (1.104) $n = 1$) и с несколькими неизвестными ($n \geq 2$). Далее, так как *F* и *L* — функции БЛ, по теореме 1.1. уравнение (1.104) можно представить в канонической форме с правой и левой частями в ДНФ, что позволяет разделять уравнения с отрицаниями и без отрицаний неизвестных и т. д.

Неравенства БЛ с отклоняющимися аргументами классифицируются так же, как и уравнения. Системы уравнений и неравенств БЛ с отклоняющимися аргументами классифицируются подобно системам обыкновенных уравнений и неравенств БЛ (§ 1.5).

Заметим, что при изучении реальных систем, как правило, приходится иметь дело только с уравнениями, которые не содержат операции отрицания БЛ. Для решения этих уравнений используем метод последовательного расчленения (§ 1.6)

1.9. Проблема полноты в бесконечнозначной логике

Проблема полноты в БЛ по своей формулировке аналогична проблеме полноты для двузначной и *K*-значной логик.

Определение 1.13. Система функций БЛ $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ называется *полной* (базисом) *в классе R,* если любую функцию из *R* можно представить суперпозицией функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Базис называется *минимальным,* если удаление хотя бы одной из его функций f_i превращает систему функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ в неполную.

В отличие от конечнозначных логик, где в качестве *R* рассматривают класс всех логических функций от *n* аргументов, а объектом поиска являются различные возможные базисы, в БЛ обычно задается та или иная система функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ и ищется класс *R* всех функций непрерывных переменных, для которого эта система есть базис. Основные результаты, полученные в этой области к настоящему времени, заключены в следующих теоремах.

Теорема 1.2. *Система функций* $\{\vee, \wedge\}$ *является базисом для класса* R_c *всех тех и только тех функций БЛ, которые сохраняют значение одного из своих аргументов.*

Теорема 1.3. *Система функций* $\{\vee, \wedge, -\}$ *является базисом для класса* R'_c *всех тех и только тех функций БЛ, которые сохраняют значения одного из своих аргументов или его отрицания.*

Введем функцию включения БЛ по формуле

$$x \supset y = (\bar{x} + y) \wedge 2M = \begin{cases} 2M, & x \leqslant y, \\ \bar{x} + y, & x > y. \end{cases} \quad (1.106)$$

где $M = (A + B)/2$ (1.5).

Теорема 1.4. *Система функций* $\{\vee, \wedge, \supset\}$ *является базисом для класса* R_n *всех функций от n переменных вида*

$$y = [A \vee (b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i)] \wedge 2M, \quad (1.107)$$

где A из (1 4), *M из* (1.5), *а коэффициенты* b_i $(i = 0, 1, \;\, .., n)$ *- произвольные целые числа.*

Теорема 1.5. *Система функций* $\{\vee, \wedge, \supset\}$ *является базисом для класса* R'_π *всех тех и только тех функций F от n переменных* x_i*, которые удовлетворяют двум условиям:* 1)*функции F однозначны, непрерывны и* $A \leqslant F \leqslant B$ *при* $A \leqslant x_i \leqslant B$ $(i = 1, \ldots, n)$; 2) *существует конечное множество линейных форм* $L_j = b_{0j} + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_i$ $(j = 1, \ldots, k)$ *с целочисленными*

коэффициентами b_{ij} $(i = 0, 1, \ldots, n)$ *такое, что для любого набора* $(x_1 \ldots x_n)$*, где* $A \leqslant x_i \leqslant B,\ i = 1, \ldots, n,$ *значение F совпадает со значением одной из форм.*

Фигурирующие в теоремах классы функций непрерывных переменных с математической точки зрения весьма узки. Поэтому синтезировать устройства, реализующие все практически встречающиеся функции непрерывных переменных с помощью элементов, реализующих базисные операции БЛ ($\vee, \wedge$ и т д.), вряд ли возможно. Вместе с тем базисные операции БЛ адекватно отражают элементарные операции, происходящие во многих реальных системах. Благодаря этому аппарат БЛ может быть успешно применен для изучения таких систем.

Впервые основные положения БЛ введены в статье Р. Мак-Нотона в 1951 г. Последующее развитие БЛ, вплоть до конца 60-х годов, было связано в основном с практическими потребностями представления и генерации функций одной или нескольких переменных. Соответствующие результаты собраны С А. Гинзбургом .

Определенное развитие в этот период получила БЛ в связи с задачами аналитического описания сложных геометрических объектов (В.Л. Рвачев) и моделирования деятельности нейронных структур при распознавании образов (Н.В. Позин). К начале 70-х годов исследователи стали активно изучать свойства функций БЛ с целью их применения при проектировании цифровых автоматов и в задачах повышения надежности аналоговых устройств. В частности, были введены уравнения БЛ и методы их решения. И лишь к концу 70-х годов появились первые работы по применению БЛ к сложным системам.

2. Порядковая логика и порядковые логические определители

2.1. Вводные замечания

При построении БЛ в качестве базовых операций фигурировали выделение максимального (дизъюнкция) и минимального (конъюнкция) из нескольких элементов. Практические потребности часто приводят к необходимости более общих построений, когда нужно использовать выделение произвольного порядкового элемента из заданного множества. Эти новые построения составляют основу порядковой логики. БЛ и порядковая логика являются адекватным математическим аппаратом при изучении многих систем. Однако этот аппарат не учитывает проблемы размерности системы. Для решения этой проблемы целесообразен переход от детального описания системы к блочному, укрупненному описанию. Подобный подход широко применяется в теории линейных систем, где функции блочных параметров выполняют соответствующие матрицы. Однако для решения нашей задачи матричное исчисление непригодно, поскольку, как будет видно дальше, изучаемые здесь системы нелинейны. Поэтому возникает необходимость дальнейшего развития математического аппарата БЛ и порядковой логики с целью получения возможности блочного описания систем. Элементарными понятиями являются понятия квазиматрицы и ее числовой характеристики — логического определителя, которые для изучаемых нелинейных систем играют ту же роль, что и обычная квадратная матрица с ее определителем для линейной системы. Вводимые порядковые логические определители позволяют решать проблему размерности при изучении тех систем, моделью которых служит автомат с дискретными состояниями и непрерывным временем.

2.2. Порядковая логика

Рассмотрим конечное множество $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ из n элементов
.
$a_i,\ a_i \in [\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$. Расположим элементы в порядке неубывания $a^{(1)} \leqslant a^{(2)} \leqslant \dots \leqslant a^{(n)},\ a^{(r)} \in A$. Введем над множеством A операцию выделения произвольного порядкового элемента $a^{(r)}$ этого множества (r-операцию)

$$y \equiv f^{(r)}(a_1, \dots, a_n) = a^{(r)}, \qquad r = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Здесь r называется *рангом операции.* Функция $f^{(r)}$ называется *r-функцией.* Легко видеть, что r-операция обобщает операции конъюнкции и дизъюнкции БЛ, переходя в них соответственно при $r = 1$ и $r = n$.
Результатом r-операции над элементами множества A является один из элементов этого же множества

Определение 2.1. Произвольная функция, аргументы которой $a_1, \dots, a_n$ взяты из множества A и которая представляется в виде суперпозиции r-операций над A с различными значениями ранга r, называется *функцией порядковой логики.*
Простейший пример такой функции - сама r-функция (2.1) Более сложный пример — функция
$y = f^{(2)}[f^{(2)}(a_1, a_2, a_3), f^{(3)}(a_1, a_2, a_3, a_4)]$.

Любая функция порядковой логики $y = f(a_1, \dots, a_n)$ на любом наборе аргументов $a_1, \dots, a_n$ принимает значение одного из аргументов. Это связано с тем, что r-операции, суперпозицией которых представляется выражение y, всегда имеют своим результатом одну из переменных, участвующих в операции. Таким образом, область значений функции f— множество A.
Задать функцию порядковой логики $y = f(a_1, \dots, a_n)$ можно, перечислив все $n!$ вариантов упорядочения аргументов $a_1, \dots, a_n$ и указав для каждого варианта аргумент a_i, значение которого принимает функция. Такое задание функции порядковой логики - частный случай первичного задания любой функции БЛ (см. § 1.2). Поэтому от такого, первичного задания функции порядковой логики можно перейти к ее аналитическому представлению с помощью суперпозиции операций БЛ —конъюнкции (1.6) и дизъюнкции (1.7) (операция отрицания (1.8) здесь не участвует, так как r--операция всегда имеет своим результатом значение одной из переменных, но не ее отрицания).
Методика перехода та же, что и для функций Б Л.

Пример 2.1. Функция порядковой логики $y = f^{(2)}(a_1, a_2, a_3)$ — медиана — задана табл. 2.

Таблица 2

Упорядочение аргументов	Значение функции	Упорядочение аргументов	Значение функции
$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$	a_2	$a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_1$	a_3
$a_1 \leqslant a_3 \leqslant a_2$	a_3	$a_3 \leqslant a_1 \leqslant a_2$	a_1
$a_2 \leqslant a_1 \leqslant a_3$	a_1	$a_3 \leqslant a_2 \leqslant a_1$	a_2

Найти аналитическое представление этой функции с помощью БЛ.
Согласно табл. 2 искомую функцию можно представить так:

$$y = \begin{cases} a_1 & \text{при} \quad a_2 \leqslant a_1 \leqslant a_3 \quad \text{или} \quad a_3 \leqslant a_1 \leqslant a_2, \\ a_2 & \text{при} \quad a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \quad \text{или} \quad a_3 \leqslant a_2 \leqslant a_1, \\ a_3 & \text{при} \quad a_1 \leqslant a_3 \leqslant a_2 \quad \text{или} \quad a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_1. \end{cases}$$

Объединяя при помощи операций конъюнкции БЛ первую строку при втором условии со второй строкой при втором условии, первую строку при первом условии с третьей строкой при втором условии и вторую строку при первом условии с третьей строкой при первом условии, найдем

$$y = \begin{cases} a_1a_2 & \text{при} \quad a_1a_2 \geqslant a_3 \quad (\text{т.е. при } a_1a_2 \geqslant a_1a_3, a_2a_3), \\ a_1a_3 & \text{при} \quad a_1a_3 \geqslant a_2 \quad (\text{т.е. при } a_1a_3 \geqslant a_1a_2, a_2a_3), \\ a_2a_3 & \text{при} \quad a_2a_3 \geqslant a_1 \quad (\text{т.е. при } a_2a_3 \geqslant a_1a_2, a_1a_3). \end{cases}$$

Объединяя теперь три строки в одну с помощью операции дизъюнкции БЛ, получим искомое представление

$y = a_1a_2 \vee a_1a_3 \vee a_2a_3.$

Из сказанного выше ясно, что функции порядковой логики — это специальный класс функций БЛ. Поэтому логические выражения порядковой логики можно подвергать эквивалентным преобразованиям с целью их приведения к наиболее простому или удобному виду, используя общие законы БЛ (§ 1.3). Однако есть и ряд специфических законов порядковой логики. Это

— закон тавтологии

$$f^{(r)}(a, \ldots, a) = a; \quad (2.2)$$

— переместительный закон

$$f^{(r)}(a_1, \ldots, a_n) = f^{(r)}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}), \quad (2.3)$$

где $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ — любая перестановка множества аргументов $\{a_1, \ldots, a_n\}$;

—распределительный закон

$$f^{(r)}[\varphi^{(q_1)}(a_1, \ldots, a_n), \varphi^{(q_2)}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \varphi^{(q_p)}(a_1, \ldots, a_n)] =$$
$$= \varphi^{(q_r)}(a_1, \ldots, a_n), \quad (2.4)$$

где $q_1 < q_2 < \ldots < q_p$, $1 \leqslant r \leqslant p$, и два его важнейших частных случая:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} f^{(r_i)}(a_1, \ldots, a_n) = f^{(\bigwedge_{i=1}^{n} r_i)}(a_1, \ldots, a_n),$$
$$\bigvee_{i=1}^{n} f^{(r_i)}(a_1, \ldots, a_n) = f^{(\bigvee_{i=1}^{n} r_i)}(a_1, \ldots, a_n). \quad (2.5)$$

Эти законы позволяют преобразовать исходные представления функций порядковой логики, не обязательно имеющие вид выражений БЛ.

2.3. Понятие порядкового логического определителя

Рассмотрим некоторое множество из непересекающихся подмножеств:

$$A_q = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_q, \quad Q_i = \{a_{i1}, \ldots, a_{im_i}\}, \quad i = 1, \ldots, q, \quad (2.6)$$

содержащее $n = \sum_{i=1}^{q} m_i$ числовых элементов $a_{ij} \in [A, B]$. Элементы каждого подмножества Q_i упорядочены:

$$a_{i1} \leqslant a_{i2} \leqslant \ldots \leqslant a_{im_i}, \quad i = 1, \ldots, q. \quad (2.7)$$

Элементы различных подмножеств Q_i могут находиться между собой в любом отношении $(>, <, =)$. Некоторые подмножества Q_i могут быть бесконечными $(m_i = \infty)$. Не исключается случай, когда

$A = -\infty, B = \infty,$

так что возможно $a_{ij} = \pm\infty$.

Множество (2.6) удобно записать в виде квазиматрицы q-го порядка:

$$A_q = \begin{Vmatrix} a_{11} \ldots a_{1m_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1} \ldots a_{qm_q} \end{Vmatrix} = \| a_{ij} \|, \quad i = 1, \ldots, q, \quad j = 1, \ldots, m_i, \quad (2.8)$$

в которой различные строки представляют различные упорядоченные подмножества Q_i. Видим, что квазиматрица (2.8) отличается от обычной прямоугольной матрицы неодинаковой длиной строк, упорядоченностью элементов в каждой строке согласно (2.7). Представление произвольного множества A_q в виде объединения (2.6) упорядоченных подмножеств Q_i является способом учета его частичной упорядоченности. На языке матричной записи (2.8) множества A_q такое представление означает, что элементы в строках уже упорядочены и новые задачи могут быть связаны лишь с взаимным упорядочением элементов различных строк.

В частном случае, когда множество A_q неупорядоченное, все подмножества Q_i / содержат по одному элементу и матричная запись множества A_q принимает вид матрицы-столбца

$$A_n = \begin{Vmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{Vmatrix}.$$

В другом частном случае, когдамножество A_q упорядоченное, оно содержит всего лишь одно подмножество Q_i, включающее все элементы множества A_q, матричная запись множества A_q принимает вид матрицы-строки $A_1 = \| a_1 \ldots a_n \|$.

Расположим все элементы a_{ij} квазиматрицы общего вида (2.8) в порядке убывания

$$a^{(1)} \leqslant a^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant a^{(n)}, \quad a^{(r)} \in A_q = \{a_{11}, \ldots, a_{1m_1}, \ldots, a_{qm_q}\}. \tag{2.9}$$

Здесь $a^{(r)}$ — *r-й* порядковый элемент множества A_q.

Определение 2.2. *Порядковым логическим определителем r-го ранга от квазиматрицы* $A_q = \| a_{ij} \|$ называется *r*-функция $f^{(r)}\{a_{ij}\}$ от множества $\{a_{ij}\}$ элементов квазиматрицы.

Таким образом, порядковый логический определитель *r*-го ранга выделяет *r*-й по величине элемент исходной квазиматрицы A_q.

Логический определитель (ЛО) служит некоторой числовой характеристикой квазиматрицы. Его порядок *q* по определению тот же, что и квазиматрицы A_q. Обозначается ЛО *r*-го ранга от квазиматрицы A_q так:

$$A_q^r = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1m_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1} \ldots a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = | a_{ij} |^{(r)}, \quad r = 1, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Для каждой квазиматрицы A_q имеется целое семейство определителей A_q^r, получаемых варьированием параметра *r*. Последовательное вычисление определителей этого семейства означает взаимное упорядочение элементов различных строк исходной квазиматрицы.

По числу элементов в строках квазиматрица A_q и соответствующие ей определители A_q^r могут быть конечными, бесконечными и полубесконечными. Последнее означает, что имеются строки с конечными бесконечным числом элементов. Специально отметим определитель-столбец, соответствующий квазиматрице-столбцу:

$$A_n^r = \begin{vmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{vmatrix}^{(r)}, \quad r = 1, \ldots, n, \tag{2.11}$$

и определитель-строку, соответствующий квазиматрице-строке

$$A_1^r = | a_1 \ldots a_n |^{(r)} = a_r, \quad r = 1, \ldots, n. \tag{2.12}$$

В (2.11) и (2.12) *n* может быть конечной величиной или бесконечностью.

2.4. Свойства логических определителей

Эти свойства устанавливаются следующими предложениями.

Лемма 2.1. *Величина ЛО является монотонно неубывающей функцией ранга, т.е.* $A_q^r \geqslant A_q^p$, *если r>p.*

Лемма 2.2. *Перестановка местами любых двух строк ЛО* A_q^r *не меняет его величины.*

Доказательства лемм 2.1 и 2.2 следуют из определения ЛО A_q^r.

Лемма 2.3. *Общее для всех элементов слагаемое можно вынести за знак ЛО, не изменив при этом его величины*

$$| a_{ij} + c |^{(r)} = | a_{ij} |^{(r)} + c. \tag{2.13}$$

Доказательство вытекает из того, что прибавление общего слагаемого ко всем элементам a_{ij} не изменяет взаимной упорядоченности элементов согласно (2.9).

Лемма 2.4. *Общий для всех элементов* a_{ij} *дизъюнктивный член можно вынести за знак ЛО, при этом величина ЛО не изменится*

$$| a_{ij} \vee c |^{(r)} = | a_{ij} |^{(r)} \vee c. \tag{2.14}$$

Лемма 2.5. *Общий для всех элементов* a_{ij} *конъюнктивный член можно вынести за знак ЛО, не изменив его величины*

$$| a_{ii} \wedge c |^{(r)} = | a_{ij} |^{(r)} \wedge c. \tag{2.15}$$

Доказательства лемм 2.4 и 2.5 следуют из того, что введение общего для всех элементов a_{ij} дизъюнктивного (конъюнктивного) члена *c* не изменяет взаимной упорядоченности элементов, а лишь приводит к замене на с тех из них, которые первоначально были меньше (больше) *c*.

Лемма 2.6. *Общий для всех элементов* a_{ij} *сомножитель с можно вынести за знак ЛО с сохранением первоначального ранга r, если c* > 0, *и с заменой его на дополнительный n* — *r* + 1, *если c* < 0; *в результате величина ЛО не изменится:*

$$| a_{ij} c |^{(r)} = \begin{cases} c | a_{ij} |^{(r)}, & c > 0, \\ c | a_{ij} |^{(n-r+1)}, & c < 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Доказательство. Действительна, при с > 0 упорядоченность множества величин $a_{ij}c$ и a_{ij} $(i = 1, \ldots, q; j = 1, \ldots, m_i)$ одинаковая, а при *c* < 0 — противоположная (т.е. при умножении на *c* < 0 максимальное из a_{ij} переходит в минимальное из $a_{ij}c$, предмаксимальное из a_{ij} - в послеминимальное из $a_{ij}c$ и т.д.).

Доказательства лемм 2.7 — 2.10 вытекают непосредственно из определения ЛО.

Лемма 2.7. *Величина ЛО не меняется при добавлении к нему справа столбца из равных по величине элементов*

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}\ldots a_{1m_1}c \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1}\ldots a_{qm_q}c \end{array}\right|^{(r)} = \begin{cases} \left|\begin{array}{l} a_{11}\ldots a_{1m_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1}\ldots a_{qm_q} \end{array}\right|^{(r)}, & r=1,\ldots,n; \\ c, & r=n+1,\ldots,n+q. \end{cases} \tag{2.17}$$

Здесь элементы *с* в силу (2.7) должны удовлетворять условию

$c > a_{im_i}$, $i = 1,\ldots,q$.

Лемма 2.8. *При добавлении к ЛО слева столбца из равных по величине элементов величина ЛО остается неизменной, если ранг уменьшить на число его строк:*

$$\left|\begin{array}{l} c\quad a_{11}\ldots a_{1m_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c\quad a_{q1}\ldots a_{qm_q} \end{array}\right|^{(r)} = \begin{cases} c, & r=1,\ldots,q; \\ \left|\begin{array}{l} a_{11}\ldots a_{1m_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1}\ldots a_{qm_q} \end{array}\right|^{(r-q)}, & r=q+1,\ldots,q+n. \end{cases} \tag{2.18}$$

Здесь элементы *с* в силу (2.7) должны удовлетворять условию $c < a_{i1}$, $i = 1,\ldots,q$.

Лемма 2.9. *Величина ЛО не меняется при исключении из него элемента ∞, расположенного в конце какой-либо строки:*

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}\ldots a_{1m_1}\ \infty \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1}\ldots a_{qm_q} \end{array}\right|^{(r)} = \begin{cases} \left|\begin{array}{l} a_{11}\ldots a_{1m_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1}\ldots a_{qm_q} \end{array}\right|^{(r)}, & r=1,\ldots,n; \\ \infty & r=n+1 \end{cases} \tag{2.19}$$

Лемма 2.10. *Величина ЛО не изменится, если из него исключить элемент $-\infty$, стоящий в начале какой-либо строки, а ранг уменьшить на единицу:*

$$\left|\begin{array}{l} -\infty\quad a_{11}\ldots a_{1m_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a_{q1}\ldots a_{qm_q} \end{array}\right|^{(r)} =$$

$$= \begin{cases} -\infty, & r=1; \\ \left|\begin{array}{l} a_{11}\ldots a_{1m_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1}\ldots a_{qm_q} \end{array}\right|^{(r-1)}, & r=2,\ldots,n+1. \end{cases} \tag{2.20}$$

Формулы (2.17) —(2.20) можно применять повторно, если в ЛО имеется несколько столбцов или элементов указанных типов.

Лемма 2.11. *Величина ЛО не изменится, если произвольную совокупность строк $i_1,\ldots,i_k$ заменить строкой расположенных в порядке*

возрастания ранга р блочных ЛО $\left|\begin{array}{l} i_1 \\ \ldots \\ i_k \end{array}\right|^{(p)}$*,составленных из указанных строк:*

$$A_q^r = \left|\begin{array}{l} A_q\backslash i_1\ldots i_k \\ \\ A^1_{i_1\ldots i_k}\ A^2_{i_1\ldots i_k}\ldots A^{\sum_{s=1}^{k} m_{i_s}}_{i_1\ldots i_k} \end{array}\right|^{(r)} \tag{2.21}$$

Здесь $A_q\backslash i_1\ldots i_k$ - квазиматрица, полученная из исходной квазиматрицы A_q исключением строк $i_1,\ldots,i_k$; $A^p_{i_1\ldots i_k} = \left|\begin{array}{l} i_1 \\ \ldots \\ i_k \end{array}\right|^{(p)}$ - ЛО *р*-го ранга *k*-го порядка, составленный из строк $i_1\ldots i_k$ квазиматрицы A_q.

Доказательство. Действительно, указанная замена означает лишь совместное упорядочение элементов строк $i_1,\ldots,i_k$ и потому не может влиять на величину любого порядкового элемента $a^{(r)}$ множества A_q, а следовательно, и на величину ЛО A_q^r. Формулу (2.21) можно рассматривать как правило разложения, позволяющее путем последовательного понижения порядка привести любой ЛО к ЛО второго порядка.

Лемма 2.12. *Любой ЛО q-го порядки с двумя одинаковыми строками можно представить в виде ЛО (q - 1)-го порядка, не имеющего одинаковых СТРОК:*

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}\quad\ldots a_{1m_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q-1,1}\ldots a_{q-1,m_{q-1}} \\ a_{q-1,1}\ldots a_{q-1,m_{q-1}} \end{array}\right|^{(r)} =$$

$$= \left|\begin{array}{l} a_{11}\quad\ldots\qquad\qquad\qquad a_{1m_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q-1,1}a_{q-1,1}\ldots a_{q-1,m_{q-1}}a_{q-1,m_{q-1}} \end{array}\right|^{(r)}. \tag{2.22}$$

Доказательство немедленно следует из леммы 2.11, если принять $k = 2,\ i_1 = q-1,\ i_2 = q$ и учесть, что

$A^1_{q-1,q} = A^2_{q-1,q} = a_{q-1,1}, A^3_{q-1,q} =$

$= A^4_{q-1,q} = a_{q-1,2},\ldots$

Лемма2.13. *Любой конечный ЛО можно представить как некоторый бесконечный или полубесконечный ЛО того же порядка и ранга:*

$$\left|\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1m_1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{q1} \dots a_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)} = \left|\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1m_1} & \infty & \infty & \dots \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{q1} \dots a_{qm_q} & \infty & \infty & \dots \end{matrix}\right|^{(r)}, \tag{2.23}$$

$$\left|\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1m_1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{q1} \dots a_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)} = \left|\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1m_1} & \infty & \infty & \dots \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{l1} \dots a_{lm_l} & \infty & \infty & \dots \\ a_{l+1,1} \dots a_{l+1,m_{l+1}} & & & \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{q1} \dots a_{qm_q} & & & \end{matrix}\right|^{(r)}$$

Доказательство соотношений (2.23), получается повторным применением формулы (2.19). Заметим, что ∞ в (2.23) можно заменить любыми конечными элементами $a_{ik}, k > m_i$, такими, чтобы сохранилась упорядоченность (2.7) элементов каждой строки и выполнялись неравенства $a_{ik} \geqslant$

$$\geqslant \bigvee_{i=1}^{q} a_{im_i}, \quad i = 1, \dots, q.$$

Лемма 2.14. *Величина ЛО r-го ранга не изменится, если в любой его i-й строке исключить элементы* $a_{i,r+1}, a_{i,r+2}, \dots$, *т.е.*

$$\left|\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1m_1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{q1} \dots a_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)} = \left|\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1r_1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{q1} \dots a_{qr_q} \end{matrix}\right|^{(r)}, \tag{2.24}$$

где m_i — конечные величины или бесконечности, а $r_i = \min(r, m_i)$.

Доказательство. Действительно, *r-м* порядковым элементом $a^{(r)}$ любой квазиматрицы A_q может быть только один из r первых элементов какой-либо ее строки.

Лемма 2.15. *Пусть* $A_q^r = \left|\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1m_1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{q1} \dots a_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)}$ *- некоторый конечный ЛО,*

$aB_q^r = \left|\begin{matrix} 1/a_{1m_1} \dots 1/a_{11} \\ \dots\dots\dots\dots \\ 1/a_{qm_q} \dots 1/a_{q1} \end{matrix}\right|^{(r)}$ *- конечный ЛО, полученный из* A_q^r *инверсией всех строк и переходом к обратным величинам элементов. Тогда ЛО* $B_q^r = 1/A_q^{n-r+1}$ *для всех* $r = 1, \dots, n$.

Доказательство следует из того, что упорядоченность множеств величин a_{ij} и $1/a_{ij}$ $(i = 1, \dots, q;\ j = 1, \dots, m_i)$ противоположная (максимальному a_{ij} соответствует минимальное $1/a_{ij}$ и т.д.).

Лемма 2.16 (распределительный закон).

$$\left|\begin{matrix} A_q^{p_{11}} A_q^{p_{12}} \dots A_q^{p_{1m_1}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_q^{p_{s1}} A_q^{p_{s2}} \dots A_q^{p_{sm_s}} \end{matrix}\right| = A_q^{P_s^r}, \quad где \quad P_s^r = \left|\begin{matrix} p_{11} \dots p_{1m_1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_{s1} \dots p_{sm_s} \end{matrix}\right|^{(r)} \tag{2.25}$$

$и\ p_{i1} < p_{i2} < \dots < p_{im_i}, \ r = 1, \dots, n, \ n = \sum_{i=1}^{s} m_i.$

В частности,

$$\bigwedge_{i=1}^{n} A_q^{p_i} = A_q^{\bigwedge_{i=1}^{n} p_i}, \qquad \bigvee_{i=1}^{n} A_q^{p_i} = A_q^{\bigvee_{i=1}^{n} p_i}. \tag{2.25a}$$

Доказательство следует из леммы 2.1, по которой упорядочение множества ЛО .A_q^r различных рангов r от одной и той же квазиматрицы A_q можно заменить упорядочением множества рангов.

2.5. Раскрытие логических определителей в дизъюнктивной форме

Раскрыть ЛО - значит указать функцию, выражающую его величину через величины его элементов.

Теорема 2.1. *ЛО-столбец r-го ранга с n элементами выражается следующей дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) БЛ:*

$$A_n^r = \left|\begin{matrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{matrix}\right|^{(r)} = \bigvee_{i_1 \neq \dots \neq i_{n-r+1}} a_{i_1} \dots a_{i_{n-r+1}}, \quad где \quad a_i \in \{a_1, \dots, a_n\}, \tag{2.26}$$

а также следующей конъюнктивной нормальной формой (КНФ) БЛ:

$$A_n^r = \left|\begin{matrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{matrix}\right|^{(r)} = \bigwedge_{i_1 \neq \dots \neq i_r} (a_{i_1} \vee \dots \vee a_{i_r}), \quad где \quad a_{i_k} \in \{a_1, \dots, a_n\}. \tag{2.27}$$

Доказательство. Пусть $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$- упорядоченные согласно (2.9) элементы $a_1, \dots, a_n$. Каждая конъюнкция в (2.26) состоит из n - r + 1 различных элементов: одна конъюнкция

$b = a^{(r)} a^{(r+1)} \dots a^{(n)}$,

остальные конъюнкции вида $b_i = a^{(s)} b_i'$, где $s < r$. Отсюда в силу (1.16), (1.17) $b = a^{(r)}$, $b_i \leqslant a^{(r)}$ и правая часть (2.26) равна $a^{(r)}$, т.е. равна левой части.

Каждая дизъюнкция в (2.27) состоит из r различных элементов: одна дизъюнкция $c = a^{(1)} \vee a^{(2)} \vee \dots \vee a^{(r)}$, остальные дизъюнкции вида $c_i = a^{(s)} \vee c_i'$, где $s > r$. Отсюда в силу (1.16), (1.18)

$c = a^{(r)}$, $c_i \geqslant a^{(r)}$ и правая часть (2.27) равна $a^{(r)}$, т.е. равна левой части.

Теорема 2.2. *Общий бесконечный ЛО r-го ранга второго порядка выражается следующей ДНФ БЛ:*

$$A_2^r = \left|\begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1i_1} \ldots \\ a_{21} \ldots a_{2i_2} \ldots \end{matrix}\right|^{(r)} = \bigvee_{i=1}^{r} a_{1i}a_{2,r+1-i}, \quad (2.28)$$

т.е. равен дизъюнкции всех конъюнкций, включающих по одному элементу из каждой строки, таких, что сумма их вторых индексов постоянна и равна $r + 1$.

Доказательство. Согласно лемме 2.14 рассматриваемый ЛО можно представить в виде конечного ЛО с r элементами в каждой строке

$$A_2^r = \left|\begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1r} \\ a_{21} \ldots a_{2r} \end{matrix}\right|^{(r)}.$$

Последний, не учитывая условий (2.7) упорядоченности элементов в строках, можно представить как ЛО-столбец

$$A_2^r = \left|\begin{matrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{1r} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{2r} \end{matrix}\right|^{(r)}$$

Раскроем этот ЛО-столбец по формуле (2.26). В данном случае каждая конъюнкция в (2.26) включает $r + 1$ различных элементов, из них хотя бы один вида a_{1i} и хотя бы один вида a_{2j}. Пусть B_k^s есть s-я из конъюнкций, включающих k элементов вида a_{2j} *и* $r + 1 - k$ элементов вида a_{1i}. Тогда, согласно (2.26), $A = \bigvee_{k=1}^{r} \bigvee_{s} B_k^s$. По условию (2.7) максимальна та из конъюнкций B_k^s, $s = 1, 2, \ldots,$ в которую входят элементы $a_{1k}, \ldots, a_{1r}$; $a_{2,r+1-k}, \ldots, a_{2r}$; она равна $a_{1k}a_{2,r+1-k}$. Подставив это значение конъюнкции в последнее выражение, получим (2.28).

Теорема 2.3. *Общий бесконечный ЛО r-го ранга q-го порядка выражается следующей ДНФ БЛ:*

$$A_q^r = \left|\begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1i_1} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1} \ldots a_{qi_q} \ldots \end{matrix}\right|^{(r)} = \bigvee_{\sum_{s=1}^{q} i_s = r+q-1} a_{1i_1} \ldots a_{qi_q}, \quad (2.29)$$

т.е. равен дизъюнкции всех конъюнкций, включающих по одному элементу из каждой строки, таких, что сумма их вторых индексов постоянна и равна $r + q - 1$.

Доказательство проведем индукцией по q. При $q = 1$ (2.29) переходит в установленное ранее соотношение $A_1^r = |a_{11} \ldots a_{1i_1} \ldots|^{(r)} = a_{1r}$ (2.12), а при $q = 2$ - в уже доказанное соотношение (2.28). Допустим, что формула (2.29) верна для некоторого $q = p$. Покажем, что тогда она верна и при $q = p + 1$. Представим A_{p+1}^r по правилу разложения (2.21) в виде блочного ЛО второго порядка

$$A_{p+1}^r = \left|\begin{matrix} a_{11} & \ldots a_{1i_1} \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{p1} & \ldots a_{pi_p} \ldots \\ a_{p+1,1} & \ldots a_{p+1,i_{p+1}} \ldots \end{matrix}\right|^{(r)} = \left|\begin{matrix} A_p^1 \ldots A_p^{i_1} \ldots \\ a_{p+1,1} \ldots a_{p+1,i_{p+1}} \ldots \end{matrix}\right|^{(r)}.$$

Раскроем последний по формуле (2.28) $A_{p+1}^r = \bigvee_{k=1}^{r} A_p^k a_{p+1,r+1-k}$.

Согласно допущению A_p^k можно выразить в виде (2.29). Отсюда

$$A_{p+1}^r = \bigvee_{k=1}^{r} \Big(\bigvee_{\sum_{s=1}^{p} i_s = k+p-1} a_{1i_1} \ldots a_{pi_p} \Big) a_{p+1,r+1-k} =$$

$$= \bigvee_{k=1}^{r} \bigvee_{\substack{\sum_{s=1}^{p+1} i_s = r+p \\ i_{p+1} = r+1-k}} a_{1i_1} \ldots a_{pi_p} a_{p+1,r+1-k} =$$

$$= \bigvee_{\sum_{s=1}^{p+1} i_s = r+p,\ 1 \leqslant i_{p+1} \leqslant r} a_{1i_1} \ldots a_{p+1,i_{p+1}},$$

или опустив условие $1 \leqslant i_{p+1} \leqslant r$ (лемма 2.14)

$$A_{p+1}^r = \bigvee_{\sum_{s=1}^{p+1} i_s = r+p} a_{1i_1} \ldots$$

$\ldots a_{p+1,i_{p+1}}$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.4. *Общий конечный ЛО r-го ранга q-го порядка выражается следующей ДНФ БЛ:*

$$A_q^r = \left|\begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1m_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{q1} & \ldots & a_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)} = \bigvee_{\sum_{s=1}^{q} i_s = r+q-1} a_{1i_1}^{m_1} \ldots a_{qi_q}^{m_q}. \quad (2.30)$$

Здесь запись $a^{m}_{ki_k}$ означает, что элемент a_{ki_k} не входит в те конъюнкции, для которых из условия на сумму вторых индексов формально получается $i_k > m$.

Доказательство. Конечный ЛО *r*-го ранга *q-го* порядка по формуле (2.23) можно представить в виде бесконечного ЛО того же ранга и порядка. Применив к последнему правило раскрытия (2.29) и учитывая, что $a \wedge \infty = a$, получим (2.30). Аналогично (2.30) получается правило раскрытия полубесконечного определителя; в этом случае ограничение накладывается лишь на вхождение элементов, принадлежащих строкам с конечным числом элементов.

Теорема 2.5. *Общий полубесконечный ЛО r-го ранга q-го порядка выражается следующей ДНФ БЛ:*

$$A_q^r = \left| \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1i_1} \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1} \dots a_{ki_k} \dots \\ a_{k+1,1} \dots a_{k+1,m_{k+1}} \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{q1} \dots a_{qm_q} \quad \dots \end{matrix} \right|^{(r)} =$$

$$= \bigvee_{\sum_{s=1}^{q} i_s = r+q-1} a_{1i_1} \dots a_{ki_k} a^{m_{k+1}}_{k+1,i_{k+1}} \dots a^{m_q}_{qi_q}. \quad (2.31)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.4. Заметим, что из выражения (2.30) общего определителя нетрудно формально получить выражение (2.26) определителя-столбца. Действительно, для последнего *q* = *n* и из условия $\sum_s i_s = n + r - 1$ следует, что каждая конъюнкция в (2.30) из *n* конъюнктивных членов a_{ki_k} содержит лишь *n-r* + 1 членов, отвечающих условию $i_k = m_k = 1$ и потому реально присутствующих; остальные *r —1* членов a_{ki_k} отвечают условию $i_k = 2 > m_k = 1$, т. е. отсутствуют.

Пример 2.2. Раскроем два определителя-столбца при всевозможных шачениях ранга, используя для этого формулу (2.26):

$$\left| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right|^{(r)} = \begin{cases} a_1 a_2, & r = 1, \\ a_1 \vee a_2, & r = 2. \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\left| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right|^{(r)} = \begin{cases} a_1 a_2 a_3, & r = 1, \\ a_1 a_2 \vee a_1 a_3 \vee a_2 a_3, & r = 2, \\ a_1 \vee a_2 \vee a_3, & r = 3. \end{cases} \quad (2.33)$$

Пример 2.3. По формуле (2.30) раскроем два общих определителя второго порядка при всевозможных значениях ранга

$$\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right|^{(r)} = \begin{cases} a_{11} a_{21}, & r = 1, \\ a_{11} a_{22} \vee a_{12} a_{21}, & r = 2, \\ a_{12} a_{22} \vee a_{11} a_{21}, & r = 3, \\ a_{12} \vee a_{22}, & r = 4. \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{i2} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \right|^{(r)} = \begin{cases} a_{11} a_{21}, & r = 1, \\ a_{11} a_{22} \vee a_{12} \quad a_{21}, & r = 2, \\ a_{11} a_{23} \vee a_{12} \quad a_{22} \vee a_{13} a_{21}, & r = 3, \\ a_{12} a_{23} \vee a_{13} \quad a_{22} \vee a_{11} \vee a_{21}, & r = 4, \\ a_{13} a_{23} \vee a_{12} \vee a_{22}, & r = 5, \\ a_{13} \vee a_{23}, & r = 6. \end{cases} \quad (2.35)$$

2.6. Раскрытие логических определителей в конъюнктивной форме

Все приведенные в § 2.5 формулы, кроме (2.27), выражают ЛО в ДНФ БЛ. На практике иногда полезно иметь двойственные формулы, выражающие логический определитель в КНФ БЛ. Для ЛО-столбца такой формулой является (2.27) . Для других типов ЛО выражения в КНФ можно получить исходя из (2.27).

Теорема 2.6. *Общий бесконечный ЛО r-го ранга второго порядка выражается в следующей КНФ БЛ:*

$$A_2^r \equiv \left| \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1k} \dots \\ a_{21} \dots a_{2j} \dots \end{matrix} \right|^{(r)} = \bigwedge_{k=0}^{r} (a_{1k} \vee a_{2,r-k}) = \bigwedge_{\substack{i+j=r \\ 0 \leqslant i, j \leqslant r}} (a_{1i} \vee a_{2j}), \quad (2.36)$$

где a_{10} и a_{20}- пустые буквы, которые можно опустить.

Доказательство. ЛО A_2^r равен одному из *r* первых элементов первой или второй строки. Поэтому его можно записать как конечный ЛО:

$$A_2^r = \left| \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1r} \\ a_{21} \dots a_{2r} \end{matrix} \right|^{(r)}.$$

Записанный ЛО, если не учитывать упорядоченности элементов в строках, можнопредставить в виде ЛО-столбца:

$$A_2^r \equiv \left| \begin{matrix} a_{11} \\ \cdots \\ a_{1r} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{2r} \end{matrix} \right|^{(r)}$$

Раскроем данный ЛО-столбец по формуле (2.27). В ней каждая дизъюнкция включает r различных элементов. Пусть B_{ks} означает s-ю $(s = 1, 2, \ldots)$ дизъюнкцию, включающую k элементов вида a_{1i} и r -k элементов вида a_{2j} $(k = 0, 1, \ldots, r)$. На основании (2.27)

$$A_2^k = \bigwedge_{k=0}^{r} \bigwedge_{s} B_{ks}.$$

По условию (2.7) минимальна та из дизъюнкций B_{ks} $(s = 1, 2, \ldots)$, которая состоит из элементов $a_{11}, \ldots, a_{1k}, a_{21}, \ldots, a_{2,r-k}$; она равна $a_{1k} \vee a_{2,r-k}$. Подставив ее значение в выражение A_2^r, получим (2.36).

Учитывая, что a_{10} и a_{20} в (2.36) можно опустить, эту формулу перепишем в виде

$$A_2^r \equiv \left| \begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1k} \ldots \\ a_{21} \ldots a_{2j} \ldots \end{matrix} \right|^{(r)} = a_{1r} \wedge a_{2r} \wedge \bigwedge_{k=1}^{r-1} (a_{1k} \vee a_{2,r-k}). \quad (2.37)$$

Теорема 2.7. *Общий бесконечный ЛО r-го ранга q-го порядка выражается в следующей КНФ БЛ:*

$$A_q^r \equiv \left| \begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1i_1} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1} \ldots a_{qi_q} \ldots \end{matrix} \right|^{(r)} = \bigwedge_{\substack{\sum\limits_{s}^{q} i_s = r \\ 0 \leqslant i_1, \ldots, i_q \leqslant r}} (a_{1i_1} \vee \ldots \vee a_{qi_q}), \quad (2.38)$$

где $a_{10}, \ldots, a_{q_0}$ *— пустые буквы, которые можно опустить.*

Доказательство. Проведем его индукцией по q. При $q = 1$ (2.38) принимает вид соотношения $| a_{11} \ldots a_{1i_1} \ldots |^{(r)} = a_{1r}$, подобного (2.12), при $q = 2$ - вид уже доказанного соотношения (2.36). Допустим, что (2.38) справедливо при некотором $q = p$. Покажем, что тогда (2.38) справедливо и при $q = p + 1$. Представим A_{p+1}^r как блочный определитель второго порядка, в котором роль новых элементов играют блоки-определители A_p^r, $r = 1, 2, \ldots$

$$A_{p+1}^r = \left| \begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1i_1} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1} \ldots a_{pi_p} \ldots \\ a_{p+1,1} \ldots a_{p+1,i_{p+1}} \ldots \end{matrix} \right|^{(r)} = \left| \begin{matrix} A_p^1 \quad A_p^2 \ldots A_p^{i_p} \ldots \\ a_{p+1,1}\; a_{p+1,2} \ldots a_{p+1,i_{p+1}} \ldots \end{matrix} \right|^{(r}.$$

Раскрыв теперь ЛО в правой части по формуле (2.36), получим

$$A_{p+1}^r = \bigwedge_{\substack{i+j=r \\ 0 \leqslant i, j \leqslant r}} (A_p^i \vee a_{p+1,j}).$$

Согласно допущению A^i_p можно выразить в виде (2.38) . Отсюда

$$A_{p+1}^r = \bigwedge_{\substack{i+j=r \\ 0 \leqslant i, j \leqslant r}} \Big[\bigwedge_{\substack{\sum\limits_{s=1}^{p} i_s = i \\ 0 \leqslant i_1, \ldots, i_p \leqslant i}} (a_{1i_1} \vee \ldots \vee a_{pi_p}) \vee a_{p+1,j} \Big] =$$

$$= \bigwedge_{i+j=r} \bigwedge_{\substack{\sum\limits_{s=1}^{p} i_s = i \\ 0 \leqslant i_1, \ldots, i_p \leqslant i, i_{p+1} = j}} (a_{1i_1} \vee \ldots \vee a_{pi_p} \vee a_{p+1,i_{p+1}}) \equiv$$

$$\equiv \bigwedge_{\substack{\sum\limits_{s=1}^{p+1} i_s = r \\ 0 \leqslant i_1, \ldots, i_{p+1} \leqslant r}} (a_{1i_1} \vee \ldots \vee a_{p+1,i_{p+1}}),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.8. *Общий конечный ЛО r-го ранга q-го порядка выражается в следующей КНФ БЛ:*

$$A_q^r \equiv \left| \begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1m_1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{q1} \ldots a_{qm_q} \end{matrix} \right|^{(r)} = \bigwedge_{\substack{\sum\limits_{s=1}^{q} i_s = r \\ i_1 \leqslant m_1, \ldots, i_q \leqslant m_q; \\ 0 \leqslant i_1, \ldots, i_q \leqslant r}} (a_{1i_1} \vee \ldots \vee a_{qi_q}). \quad (2.39)$$

Доказательство. Представим по формуле (2.23) конечный ЛО A_q^r как бесконечный. Раскрывая получившийся ЛО по формуле (2.38) и учитывая, что в данном случае любая буква a_{ki_k} при $i_k > m_k$ равна ∞, а потому содержащая эти буквы дизъюнкция $a_{1i_1} \vee \cdots \vee a_{qi_q}$ тоже равна ∞ и может быть исключена из выражения (2.38), получим (2.39) .

2.7. Логические определители второго порядка

ЛО второго порядка занимают особое место среди всех ЛО, так как минимальное число q упорядоченных подмножеств в множестве A_q (2.1) равно двум (случай q = 1 является тривиальным). Общий бесконечный ЛО второго порядка раскрывается по формуле (2.28), конечный —по следующей, вытекающей из (230):

$$A_2^r = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m_1} \\ a_{21} \dots a_{2m_2} \end{vmatrix}^{(r)} = \bigvee_{i+j=r+1} a_{1i}^{m_1} a_{2j}^{m_2} . \tag{2.40}$$

Практически более интересен вариант формулы (2.40), включающий в явном виде все элементы ЛО. Для получения такой формулы рассмотрим три случая, соответствующие трем областям значений r в предположении, что $m_1 \geqslant m_2$.

Случай 1. Выполняется $i + j = r + 1 \leqslant m_2 + 1$. Тогда в каждой конъюнкции формулы (2.40) $i \leqslant m_1,\ j \leqslant m_2$, и потому формула приобретает такой же явный вид, как для бесконечного ЛО:

$$A_2^r = \bigvee_{i+j=r+1} a_{1i} a_{2j} = \bigvee_{i=1}^{r} a_{1i} a_{2,r+1-i} .$$

Случай 2. Выполняется $m_2 + 1 \leqslant r \leqslant m_1$. При этом в (2.40) $m_2 + 2 \leqslant \leqslant i + j \leqslant m_1 + 1$, так что $i \leqslant m_1$, но при некоторых i возможно

$j \geqslant m_2 + 1$.

Легко видеть, что такими являются i, удовлетворяющие условию $i \leqslant \leqslant (r + 1) - (m_2 + 1) = r - m_2$. Формула (2.40) теперь переписывается в следующем виде:

$$A_2^r = \Big(\bigvee_{i=1}^{r-m_2} a_{1i}\Big) \vee \Big(\bigvee_{i=r-m_2+1}^{r} a_{1i} a_{2,r+1-i}\Big) =$$

$$= a_{1,r-m_2} \vee \Big(\bigvee_{i=r-m_2+1}^{r} a_{1i} a_{2,r+1-i}\Big).$$

Случай 3. Выполняется $m_1 + 1 \leqslant r \leqslant m_1 + m_2$. В этом случае в (2.40) $m_1 + 2 \leqslant i + j \leqslant m_1 + m_2 + 1$, так что возможно $i \geqslant m_1 + 1$ и $j \geqslant m_2 + 1$. Именно, при $i \leqslant r - m_2$ в конъюнкции $j \geqslant (r + 1) - (r - m_2) = m_2 + 1$, при $r - m_2 + 1 \leqslant i \leqslant m_1$ выполняется условие $j \leqslant (r + 1) - (r - m_2 + 1) = m_2$, при $m_1 + 1 \leqslant i \leqslant m_1 + m_2$ справедливо $j \leqslant r + 1 - (m_1 + 1) = r - m_1 \leqslant m_2$.

В соответствии с этим формула (2.40) приобретает вид

$$A_2^r = \Big(\bigvee_{i=1}^{r-m_2} a_{1i}\Big) \vee \Big(\bigvee_{i=r-m_2-1}^{m_1} a_{1i} a_{2,r+1-i}\Big) \vee$$

$$\vee \Big(\bigvee_{i=m_1+1}^{r} a_{2,r+1-i}\Big) = a_{1,r-m_2} \vee a_{2,r-m_1} \vee \Big(\bigvee_{i=r-m_2+1}^{m_1} a_{1i} a_{2,r+1-i}\Big).$$

Сведя все три случая вместе, получим требуемую формулу

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m_1} \\ a_{21} \dots a_{2m_2} \end{vmatrix}^{(r)} =$$

$$= \begin{cases} \bigvee\limits_{i=1}^{r} a_{1i} a_{2,r+1-i}, & r = 1, \dots, m_2; \\ a_{1,r-m_2} \vee \Big(\bigvee\limits_{i=r-m_2+1}^{r} a_{1i} a_{2,r+1-i}\Big), & r = m_2 + 1, \dots, m_1; \\ a_{1,r-m_2} \vee a_{2,r-m_1} \vee \Big(\bigvee\limits_{i=r-m_2-1}^{m_1} a_{1i} a_{2,r+1-i}\Big), & r = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2. \end{cases} \tag{2.41}$$

В случае $m_1 = m_2 = m$ вторая строка в (2.41) опускается и формула приобретает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ a_{21} \dots a_{2m} \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{cases} \bigvee\limits_{i=1}^{r} a_{1i} a_{2,r+1-i}, & r = 1, \dots, m, \\ a_{1,r-m} \vee a_{2,r-m} \vee \Big(\bigvee\limits_{i=r-m+1}^{m} a_{1i} a_{2,r+1-i}\Big), & \\ & r = m + 1, \dots, 2m. \end{cases} \tag{2.42}$$

При вычислении по формуле (2.41) полубесконечного определителя $(m_1 = \infty)$ в ней опускается третья строка. Можно получить аналогичное (2.41) выражение A_2^r в КНФ.

2.8. Раскрытие логических определителей путем их разложения по элементам

Одним из способов раскрытия ЛО является использование формул разложения, представляющих данный ЛО через ЛО меньших размеров. Простейшей такой формулой является (2.21) . Покажем на примере ее использование для раскрытия ЛО.

Пример 2.4. ЛО 4-го порядка

$$A_4^r = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & & \\ a_{41} & & \end{matrix} \right|^{(r)} \qquad (2.43)$$

можно записать как блочный ЛО 2-го порядка

$$A_4^r = \left| \begin{matrix} B_2^1 & B_2^2 \dots B_2^6 \\ C_2^1 & C_2^2 \end{matrix} \right|^{(r)},$$

в котором блоки

$$B_2^r = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \right|^{(r)}, \qquad C_2^r = \left| \begin{matrix} a_{31} \\ a_{41} \end{matrix} \right|^{(r)}$$

выражаются соответственно формулами (2.35), (2.32), и раскрыть его по правилу (2.41). Очевидно, возможны и другие блочные разбиения ЛО (2.43) . Эта неопределенность группирования элементов в блоки неудобна.

Ниже приводятся регулярные правила раскрытия больших ЛО разных типов с помощью формул разложения.

Определение 2.3. *Логическим дополнением* $A_{q\backslash a_{ij}}^r$ *элемента* a_{ij} *в ЛО* A_q^r называется ЛО, полученный из A_q^r исключением элемента a_{ij}.

Таким образом, для общего ЛО A_q^r логическое дополнение

$$A_{q\backslash a_{ij}}^r = \left| \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1m_1} \\ \dots\dots\dots \\ a_{q1} \dots a_{qm_q} \end{matrix} \right|_{\backslash a_{ij}}^{(r)} = \qquad (2.44)$$

$$= \left| \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1m_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \dots a_{i,j-1} a_{i,j+1} \dots a_{im_i} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{q1} \dots a_{qm_q} \end{matrix} \right|^{(r)}.$$

В частности, для ЛО-столбца A_n^r

$$A_{n\backslash a_i}^r = \left| \begin{matrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{matrix} \right|_{\backslash a_i}^{(r)} = \left| \begin{matrix} a_1 \\ \dots \\ a_{i-1} \\ a_{i+1} \\ \dots \\ a_n \end{matrix} \right|^{(r)} \qquad (2.45)$$

Теорема 2.9. *ЛО-столбец r-го ранга с n элементами может быть представлен в виде следующей ДНФ БЛ:*

$$A_n^r = \left| \begin{matrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{matrix} \right|^{(r)} = \bigvee_{i=1}^{n} a_i A_{n\backslash a_i}^r. \qquad (2.46)$$

Доказательство. Раскроем ЛО $A_{n\backslash a_i}^r$, $i = 1, \dots, n$, правой части (2.46) по правилу (2.26) — получим раскрытый по тому же правилу ЛО левой части A_n^r.

Теорема 2.10. *Общий ЛО r-го ранга q-го порядка может быть представлен в виде следующей ДНФ БЛ:*

$$A_q^r = \left| \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1m_1} \\ \dots\dots\dots \\ a_{q1} \dots a_{qm_q} \end{matrix} \right|^{(r)} = \bigvee_{i,j} a_{ij} A_{q\backslash a_{ij}}^r. \qquad (2.47)$$

Доказательство. Рассматривая ЛО A_q^r **без** учета упорядоченности элементов в его строках

$$\left(\text{т.е. как } \textbf{ЛО-столбец } A_q^r = \left| \begin{matrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{qm_q} \end{matrix} \right|^{(r)} \right),$$

применим к нему формулу (2.46). Получим *(*2.47*)*.

Согласно (2.46), (2.47) любой ЛО разлагается на дизъюнкцию конъюнкций его элементов и их логических дополнений. Поэтому (2.46), (2.47) можно назвать формулами разложения ЛО по элементам его строк или столбцов. Последовательное применение этих разложений приводит к понижению порядка ЛО, чем облегчает его вычисление. Однако логическое дополнение элемента в ЛО получается исключением из ЛО только данного элемента. Для уменьшения сложности (числа операций БЛ) раскрытия ЛО с помощью разложений (2.46), (2.47) желательно так видоизменить эти разложения, чтобы каждый раз из ЛО исключалось максимальное число элементов. Эта задача рассматривается в следующих параграфах, где помимо разложения ЛО собственно по элементам изучаются также разложения ЛО по блокам, т.е. по совокупностям элементов.

2.9. Минимальное разложение логического определителя-столбца по элементам

Найдем минимальное разложение ЛО-столбца по его элементам, т.е. тжое, подобное (2.46), разложение в ДНФ БЛ

$$A_n^r = \left|\begin{matrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{matrix}\right|^{(r)} = \bigvee_i a_i \tilde{A}^{r}_{n\setminus a_i}, \quad (2.48)$$

в котором содержится минимальное число конъюнкций *аА*; здесь— $\tilde{A}^{r}_{n\setminus a_i}$ - минимальное логическое дополнение элемента a_i в ЛО A_n^r, т.е. ЛО, полученный из A_n^r исключением максимально возможного (зависящего от a_i) числа элементов и соответствующим изменением ранга *r*. Будем исходить из формулы раскрытия ЛО-столбца (2.26), конкретизировав ее в виде

$$A_n^r = \bigvee_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_{n-r+1} \leqslant n} a_{i_1} \dots a_{i_{n-r+1}}, \quad a_{i_k} \in \{a_1, \dots, a_n\}. \quad (2.49)$$

Положив в (2.49) $r = n$, получим разложение ЛО

$$A_n^n = \bigvee_{i=1}^{n} a_i, \quad (2.50)$$

которое, очевидно, минимально. Далее, положив в (2.49) $r = n — 1$, найдем разложение ЛО

$$A_n^{n-1} = \bigvee_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} a_{i_1} a_{i_2} =$$

$$= \underbrace{a_1 a_2 \vee \dots \vee a_1 a_n}_{} \vee \underbrace{a_2 a_3 \vee \dots \vee a_2 a_n}_{} \vee \dots \vee a_{n-1} a_n. \quad (2.51)$$

Вынесем за скобки общий элемент в каждой выделенной дизъюнкции. В результате, учитывая формулу (2.50), найдем разложение

$$A_n^{n-1} = \bigvee_{i=1}^{n-1} a_i \Big(\bigvee_{j=i+1}^{n} a_j \Big) = \bigvee_{i=1}^{n-1} a_i \left|\begin{matrix} a_{i+1} \\ \dots \\ a_n \end{matrix}\right|^{(n-i)} = \bigvee_{i=1}^{n-1} a_i \tilde{A}^{n-1}_{n\setminus a_i}, \quad (2.52)$$

которое является искомым минимальным разложением для определителя $\bar{A}_n^{n-1}$. Действительно, из разложения любого логического дополнения в (2.52)

$$\tilde{A}^{n-1}_{n\setminus a_i} = \bigvee_{j=i+1}^{n-1} a_j$$

нельзя исключить ни одного элемента a_j, так как соотношения между элементами a_j с различными индексами *j* неизвестны. Последнее показывает, что неизвестны и соотношения между различными конъюнкциями в (2.52), так что ни одну из них нельзя исключить из разложения (2.52).

Аналогично, положив в (2.49) $r = n — 2$, найдем выражение ЛО

$$A_n^{n-2} = \bigvee_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} =$$

$$= a_1 \Big(\bigvee_{2 \leqslant i_2 < i_3 \leqslant n} a_{i_2} a_{i_3} \Big) \vee a_2 \Big(\bigvee_{3 \leqslant i_2 < i_3 \leqslant n} a_{i_2} a_{i_3} \Big) \vee \dots$$

$$\dots \vee a_{n-2} (a_{n-1} a_n),$$

в котором каждая скобка, согласно (2.51), является некоторым ЛО, причем из нее нельзя уже исключить ни одного элемента a_{i_k}; нельзя также исключить ни одной из *n*-2 изменяющихся конъюнкций. Отсюда с учетом (2.52) получаем минимальное разложение для ЛО

$$A_n^{n-2} = \bigvee_{i=1}^{n-2} a_i \Big[\bigvee_{j=i+1}^{n-1} a_j \Big(\bigvee_{k=j+1}^{n} a_k \Big) \Big] =$$

$$= \bigvee_{i=1}^{n-2} a_i \left|\begin{matrix} a_{i+1} \\ \dots \\ a_n \end{matrix}\right|^{(n-1-i)} = \bigvee_{i=1}^{n-2} a_i \tilde{A}^{n-2}_{n\setminus a_i}. \quad (2.53)$$

Рассмотрим общий случай.

Теорема 2.11. *ЛО-толбец r-го ранга с n элементами* A_n^r *может быть представлен в виде следующей ДНФ БЛ, являющейся минимальным разложением типа* (2.48) :

$$A_n^r = \left|\begin{matrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{matrix}\right|^{(r)} = \bigvee_{i=1}^{r} a_i \tilde{A}^{r}_{n\setminus a_i}, \quad (2.54)$$

в которой $\tilde{A}^{r}_{n\backslash a_i}$ *- минимальное логическое дополнение элемента* a_i *в ЛО* A^{r}_{n}, *выражаемое как*

$$\tilde{A}^{r}_{n\backslash a_i} = \left|\begin{matrix} a_{i+1} \\ \cdots \\ a_n \end{matrix}\right|^{(r+1-i)} \qquad (2.55)$$

Доказательство. Положим в (2.49) $r = n\text{-}p$, где p - любое натуральное число в интервале $0 \leqslant p \leqslant n-1$. Получим такое выражение:

$$A_n^{n-p} = \bigvee_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{p+1} \leqslant n} a_{i_1} \ldots a_{i_{p+1}} =$$

$$= a_1 \Big(\bigvee_{2 \leqslant i_2 < \ldots < i_{p+1} \leqslant n} a_{i_2} \ldots a_{i_{p+1}} \Big) \vee$$

$$\vee a_2 \Big(\bigvee_{3 \leqslant i_2 < \ldots < i_{p+1} \leqslant n} a_{i_2} \ldots a_{i_{p+1}} \Big) \vee \ldots \vee a_{n-p} \left(a_{n-p+1} \ldots a_n\right). \qquad (2.56)$$

Поскольку соотношения между элементами a_{i_k} с различными индексами i_k неизвестны, то из любой скобки в (2.56) нельзя исключить ни одного элемента. С другой стороны, эти скобки являются некоторыми ЛО. Действительно, согласно (2.49)

$$\bigvee_{2 \leqslant i_2 < \ldots < i_{p+1} \leqslant n} a_{i_2} \ldots a_{i_{p+1}} = \bigvee_{2 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} a_{i_1} \ldots a_{i_p} =$$

$$= \bigvee_{2 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} a_{i_1} \ldots a_{i_{(n-1)-(n-p)+1}} = \left|\begin{matrix} a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{matrix}\right|^{(n-p)}$$

$$\bigvee_{3 \leqslant i_2 < \ldots < i_{p+1} \leqslant n} a_{i_2} \ldots a_{i_{p+1}} = \bigvee_{3 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} a_{i_1} \ldots a_{i_p} =$$

$$= \bigvee_{3 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} a_{i_1} \ldots a_{i_{(n-2)-(n-p-1)+1}} = \left|\begin{matrix} a_3 \\ \cdots \\ a_n \end{matrix}\right|^{(n-p-1)}$$

и т.д. Далее, соотношения величин различных скобок оказываются тоже неизвестными. Поэтому неизвестны и соотношения величин $n — p$ конъюнкций в (2.56), так что ни одна из них не может быть исключена. Таким образом, из (2.49) вытекает следующая ДНФ представления произвольного ЛО-столбца с минимальным числом конъюнкций:

$$A_n^{n-p} = \bigvee_{i=1}^{n-p} a_i \tilde{A}^{n-p}_{n\backslash a_i}, \qquad (2.57)$$

где $\tilde{A}^{n-p}_{n\backslash a_i}$ - минимальное логическое дополнение элемента a_i в ЛО A_n^{n-p}.

представляющее собой ЛО

$$\tilde{A}^{n-p}_{n\backslash a_i} = \left|\begin{matrix} a_{i+1} \\ \cdots \\ a_n \end{matrix}\right|^{[(n-p)+1-i]} \qquad (2.58)$$

Заменив в (2.57), (2.58) n - p на r, получим (2.54), (2.55).
Последовательное применение разложения (2.54) или (2.57) позволяет получать выражения ЛО меньшей сложности (т.е. с меньшим числом элементарных двухместных операций БЛ), чем с помощью разложения (2.46).
Основываясь на формуле (2.54) или (2.57), можно также получить явное и с меньшим числом операций, чем в (2.26) и (2.27), выражение произвольного ЛО-столбца через его элементы. Действительно, явное выражение ЛО A_n^n, A_n^{n-1}, A_n^{n-2} уже получены в (2.50), (2.52), (2.53).
Далее, для ЛО A_n^{n-3}, согласно (2.57), можно записдть

$$A_n^{n-3} = \bigvee_{s=1}^{n-3} a_s \left|\begin{matrix} a_{s+1} \\ \cdots \\ a_n \end{matrix}\right|^{[(n-s)-2]} \qquad (2.59)$$

Здесь s-е логическое дополнение

$$\tilde{A}^{n-3}_{n\backslash a_s} = \left|\begin{matrix} a_{s+1} \\ \cdots \\ a_n \end{matrix}\right|^{[(n-s)-2]}, \qquad s = 1, \ldots, n-3,$$

является ЛО с n - s элементами ранга (n -s) - 2, которое можно вычислить по формуле (2.53) :

$$\left|\begin{matrix} a_{s+1} \\ \cdots \\ a_n \end{matrix}\right|^{[(n-s)-2]} = \bigvee_{i=s+1}^{n-2} a_i \Big[\bigvee_{j=i+1}^{n-1} a_j \Big(\bigvee_{k=j+1}^{n} a_k \Big) \Big].$$

В результате получаем явное выражение определителя

$$A_n^{n-3} = \bigvee_{s=1}^{n-3} a_s \Big\{ \bigvee_{i=s+1}^{n-2} a_i \Big[\bigvee_{j=i+1}^{n-1} a_j \Big(\bigvee_{k=j+1}^{n} a_k \Big) \Big] \Big\}. \qquad (2.60)$$

Этим же путем отыскиваются явные выражения ЛО последующих рангов: n—4, n — 5 и т.д. Общее явное выражение ЛО-столбца произвольного (n -р)-го ранга с n элементами

$$A_n^{n-p} = \bigvee_{k_p=1}^{n-p} a_{k_p} \Big(\bigvee_{k_{p-1}=k_p+1}^{n-p+1} a_{k_{p-1}} \Big(\bigvee_{k_{p-2}=k_{p-1}+1}^{n-p+2} a_{k_{p-2}} \ldots$$

$$\ldots \Big(\bigvee_{k_1=k_2+1}^{n-1} a_{k_1} \Big(\bigvee_{k_0=k_1+1}^{n} a_{k_0} \Big)\Big) \ldots \Big)\Big). \qquad (2.61)$$

Заменив здесь *n* — *p* на *r,* получим симметричную с (2.61) формулу

$$A_n^r = \bigvee_{k_{n-r}=1}^{r} a_{k_{n-r}} \Big(\bigvee_{k_{n-r-1}=k_{n-r}+1}^{r+1} a_{k_{n-r-1}} \times$$

$$\times \Big(\bigvee_{k_{n-r-2}=k_{n-r-1}+1}^{r+2} a_{k_{n-r-2}} \ldots$$

$$\ldots \Big(\bigvee_{k_1=k_2+1}^{n-1} a_{k_1} \Big(\bigvee_{k_0=k_1+1}^{n} a_{k_0} \Big)\Big) \ldots \Big)\Big). \qquad (2.62)$$

Формулы (2.62) обозримы лишь для ЛО A_n^r с большими ($r \approx n$) либо малыми ($r \approx 1$) значениями ранга *r*. ЛО со средними значениями ранга удобнее раскрывать с помощью итерационного разложения (2.54)

2.10. Минимальное разложение общего логического определителя по элементам

Найдем минимальное разложение общего ЛО по элементам

$$A_q^r = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1m_1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{q1} \ldots a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \bigvee_{i,j} a_{ij} \tilde{A}^r_{q \backslash a_{ij}}, \qquad (2.63)$$

которое подобно (2.47), но содержит минимальное число конъюнкций и в котором $\tilde{A}^r_{q \backslash a_{ij}}$ — минимальное логическое дополнение элемента a_{ij} в ЛО A_q^r (см. § 2.9).

Введем единую нумерацию элементов a_{ij} ЛО A_q^r. Пусть $|a_{ij}|$ — номер элемента a_{ij}. Нумерация элементов может быть строчной

$$|a_{11}| = 1, \ldots, |a_{1m_1}| = m_1, \quad |a_{21}| = m_1 + 1, \ldots, \qquad (2.64)$$

столбцевой

$$|a_{11}| = 1, \ldots, |a_{q1}| = q, \quad |a_{12}| = q + 1, \ldots, \qquad (2.65)$$

или смешанной. Если не учитывать имеющуюся в ЛО A_q^r упорядоченность элементов в строках, считая A_q^r условно ЛО-столбцом, то, согласно (2.57), такой ЛО можно разложить следующим образом (полагаем *r* = *n* — *p,* где $0 \leqslant p \leqslant n-1$):

$$A_q^{n-p} = \bigvee_{\substack{i,j \\ |a_{ij}| \leqslant n-p}} a_{ij} A_{q \backslash a_{ij}}^{n-p-|a_{ij}|+1}, \quad n = \sum_{i=1}^{q} m_i. \qquad (2.66)$$

В (2.66) логическое дополнение $A_{q \backslash a_{ij}}^{n-p-|a_{ij}|+1}$ — это ЛО, полученный из ЛО A_q^{n-p} исключением всех элементов с номерами, не превышающими номер $|a_{ij}|$ элемента a_{ij}, и изменением ранга с $(n-p)$ на $(n-p-|a_{ij}|+1)$.

Теорема 2.12. *Общий ЛО* (*n* - *p* - 1)-го *ранга q-го порядка можно представить в следующем виде, являющемся (после раскрытия всех скобок) минимальным разложением типа* (2.63) :

$$A_q^{n-p-1} = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1m_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1} \ldots a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(n-p-1)} = \bigvee_{i=m_1-p-1}^{m_1-1} a_{1i} A_{q \backslash a_{1i}}^{n-p-|a_{1i}|} \vee$$

$$\vee (a_{1m_1} \vee a_{2,m_2-p-1}) A_{q \backslash a_{2,m_2-p-1}}^{n-p-|a_{2,m_2-p-1}|} \vee \bigvee_{i=m_2-p}^{m_2-1} a_{2i} A_{q \backslash a_{2i}}^{n-p-|a_{2i}|} \vee$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vee (a_{k-2,m_{k-2}} \vee a_{k-1,m_{k-1}-p-1}) A_{q \backslash a_{k,m_k-p-1}}^{n-p-|a_{k,m_k-p-1}|} \vee$$

$$\vee \bigvee_{i=m_{k-1}-p}^{m_{k-1}-1} a_{ki} A_{q \backslash a_{k-1,i}}^{n-p-|a_{k-1,i}|} \vee (a_{k-1,m_{k-1}} \vee a_{k,m_k-p-1}) \times$$

$$\times A_{q \backslash a_{k,m_k-p-1}}^{n-p-|a_{k,m_k-p-1}|} \vee \bigvee_{i=m_k-p}^{i:\, n-p-|a_{ki}|=1} a_{ki} A_{q \backslash a_{ki}}^{n-p-|a_{ki}|}. \qquad (2.67)$$

В формуле (2.67) *k* означает номер той строки ЛО A_q^{n-p-1}, на элементах которой разложение (2.67) обрывается; при этом *k* определяется из неравенств

$$\sum_{i=1}^{k-1} m_i \leqslant n-p-1 \leqslant \sum_{i=1}^{k} m_i. \qquad (2.68)$$

Структура правой части формулы (2.67) такова: в ее первой строке имеется дизъюнкция конъюнкций *p* + 1 крайних справа элементов первой строки ЛО A_q^{n-p-1} (исключая последний, m_1-й элемент) и их минимальных логических дополнений; во второй строке имеется дизъюнкция конъюнкций *p* + 1 крайних справа элементов второй строки ЛО (исключая последний, m_2-й элемент) и их минимальных логических дополнений, при этом первый учтенный элемент второй строки ЛО заменен его дизъюнкцией с последним элементом первой строки; в третьей строке стоит дизъюнкция конъюнкций $p + 1$ крайних справа элементов третьей строки ЛО (исключая последний, m_3-й, элемент) и их минимальных логических дополнений, но первый учтенный элемент третьей строки ЛО заменен его дизъюнкцией с последним элементом второй строки и т.д. Последняя k-я строка разложения (2.67) отличается лишь тем, что в ней дизъюнкция "усечена", и оканчивается конъюнкцией такого элемента a_{ki} определителя и его минимального дополнения, что $|a_{ki}| = n - p - 1.$

Доказательство. Обратимся к разложению (2.66). Оно лишь условно минимальное, так как в нем не учтена взаимная упорядоченность элементов ЛО. Для получения минимального разложения общего ЛО достаточно в разложении (2.66) учесть упорядоченность элементов в строках ЛО. Развернем разложение (2.66) для ЛО A_q^{n-p-1}, имея в виду построчную нумерацию элементов

$$A_q^{n-q-1} = a_{11}A_{q\setminus a_{11}}^{n-p-|a_{11}|} \vee a_{12}A_{q\setminus a_{12}}^{n-p-|a_{12}|} \vee \dots$$

$$\dots \vee \; a_{1,m_1-p-1}A_{q\setminus a_{1,m_1-p-1}}^{n-p-|a_{1,m_1-p-1}|} \vee$$

$$\vee \; a_{1,m_1-p}A_{q\setminus a_{1,m_1-p}}^{n-p-|a_{1,m_1-p}|} \vee \dots$$

$$\dots \vee a_{1,m_1-1}A_{q\setminus a_{1,m_1-1}}^{n-p-|a_{1,m_1-1}|} \vee a_{1m_1}A_{q\setminus a_{1m_1}}^{n-p-|a_{1m_1}|} \vee$$

$$\vee \; a_{21}A_{q\setminus a_{21}}^{n-p-|a_{21}|} \vee \dots \vee \; a_{2,m_2-p-1}A_{q\setminus a_{2,m_2-p-1}}^{n-p-|a_{2,m_2-p-1}|} \vee$$

$$\vee \; a_{2,m_2-p}A_{q\setminus a_{2,m_2-p}}^{n-p-|a_{2,m_2-p}|} \vee \dots \vee a_{2,m_2-1}A_{q\setminus a_{2,m_2-1}}^{n-p-|a_{2,m_2-1}|} \vee$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\vee \, a_{k-1,m_{k-1}}A_{q\setminus a_{k-1,m_{k-1}}}^{n-p-|a_{k-1,m_{k-1}}|} \vee \; a_{k1}A_{q\setminus a_{k1}}^{n-p-|a_{k1}|} \vee \dots$$

$$\dots \vee \; a_{k,m_2-p-1}A_{q\setminus a_{k,m_k-p-1}}^{n-p-|a_{k,m_2-p-1}|} \vee$$

$$\vee \; a_{k,m_k-p}A_{q\setminus a_{k,m_k-p}}^{n-p-|a_{k,m_k-p}|} \vee \dots$$

$$\dots \vee \; a_{k,n-p-1-\sum\limits_{i=1}^{k-1} m_i} A_{q\setminus a_{k,n-p-1-\sum\limits_{i=1}^{k-1} m_i}}^{n-p-a_{k,n-p-1-\sum\limits_{i=1}^{k-1} m_i}}$$

(2.69)

Здесь k означает номер той строки ЛО A_q^{n-p-1}, на элементе которой разложение обрывается. Так как этот элемент, согласно (2.66), имеет номер $n - p$, то k можно найти из (2.68).

Рассмотрим ЛО A_M^r в первой строке разложения (2.69). Они обладают различными рангами и числом элементов, но имеют три общих свойства. Именно: 1) ранг s-го ЛО $(s = 1, \dots, m_1 - p - 1)$ с числом элементов n_s равен $n_s - p$. Действительно, в ЛО $A_{q\setminus a_{1s}}^{n-p-|a_{1s}|}$ число элементов равно $n_s = n - |a_{1s}|$, откуда ранг $r_s = n - p - |a_{1s}| = n_s - p$; 2) ЛО имеют один и тот же порядок q и различаются лишь первыми строками; 3) число элементов первой строки во всех ЛО $\geqslant m_1 - (m_1 - p - 1) = p + 1$, причем $p + 1$ крайних справа элементов являются общими для всех ЛО. Согласно

(2.24) любой ЛО A_q^r выражается через *r* первых элементов всех его строк; аналогично, ЛОA_q^{n-p} (где *n*— общее число элементов ЛО) выражается через *p* + 1 последних элементов всех строк. Из этого и трех перечисленных выше свойств вытекает равенство всех ЛО в первой строке разложения (2.69). ЛО в третьей, пятой,.. ., предпоследней строках разложения (2.69) рассматриваются аналогично. В результате устанавливаем, что в каждой из указанных строк все ЛО равны между собой.

Рассмотрим ЛО A_M^r во второй строке разложения (2.69). Они обладают общими свойствами 1) и 2). Однако в первом из ЛО число элементов в первой строке равно *p,* во втором *p* — 1, ... , в последнем 1. Но *s*-й ЛО имеет ранг n_s — *p* и потому выражается через *p* + 1 последних элементов строки, т.е. в нашем случае все элементы строки. Таким образом, ЛО во второй строке разложения (2.69), вообще говоря, не равны между собой, ЛО в четвертой, шестой, . .. , последней строках разложения (2.69) рассматриваются аналогично. В результате находим, что в каждой из указанных строк ЛО в общем случае не равны между собой.

Из проведенного рассмотрения следует, что для того, чтобы учесть упорядоченность элементов в строках общего ЛО, нужно в каждой строке разложения (2.69) вынести за скобки равный для всех конъюнкций ЛО A_M^r и произвести необходимые упрощения в каждой скобке, имея в виду, что из условия упорядоченности элементов в строках общего ЛО следует

$\bigvee_{j=1}^{m_i-p-1} a_{ij} = a_{i,m_i-p-1},\ i = 1, \ldots, k.$ После этой операции число конъюнкций $a_{ij}A_M^r$ в разложении (2.69) становится минимальным. Очевидно, что при выполнении этой операции за скобки следует выносить крайний справа ЛО каждой нечетной строки, как содержащий наименьшее число элементов среди всех равных между собой ЛО. При этом в получающемся из (2.69) разложении типа (2.63) ЛО A_M^r являются минимальными логическими дополнениями соответствующих элементов a_{ij}. В результате всех преобразований, проделанных над (2.69), получаем разложение (2.67), которое, как следует из вышесказанного, минимально.

Последовательное использование разложения (2.67) позволяет получать выражения ЛО меньшей сложности, чем при помощи разложения (2.47). Этим же путем можно находить явные выражения ЛО последовательных рангов, содержащие меньшее число операций, чем соответствующие выражения (2.30).Действительно,

$$A_q^n = \bigvee_{i=1}^{q} a_{im_i}. \quad (2.70)$$

Далее, положив в (2.67) *p* = 0, получим выражение для A_q^{n-1}. При этом все дизъюнкции вида $\bigvee_{i=m_s-p}^{m_s-1}$ в (2.67) исчезают, а согласно (2.68) $\sum_{i=1}^{k-1} m_i \leqslant n - 1 \leqslant \sum_{i=1}^{k} m_i$, так что, учитывая выражение *n* из (2.66), получаем *k* = *q*. Кроме того, каждый ЛО в правой части (2.67) имеет ранг $n_s - p = n_s$, равный числу элементов в нем и, следовательно, вычисляется по формуле типа (2.70). Таким образом, находим

$$A^{n-|a_{1,m_1-1}|}_{q\setminus a_{1,m_1-1}} = \left|\begin{matrix} a_{1m_1} \\ a_{21}\ldots a_{2m_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1}\ldots a_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(n-|a_{1,m_1-1}|)} = \bigvee_{i=1}^{q} a_{im_i},$$

$$A^{n-|a_{2,m_2-1}|}_{q\setminus a_{2,m_2-1}} = \left|\begin{matrix} a_{2m_2} \\ a_{31}\ldots a_{3m_3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1}\ldots a_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(n-|a_{2,m_2-1}|)} = \bigvee_{i=2}^{q} a_{im_i},$$

. . . .

$$A^{n-|a_{q,m_q-1}|}_{q\setminus a_{q,m_q-1}} = |a_{qm_q}|^{(n-|a_{q,m_q-1}|)} = a_{qm_q}.$$

Подставив эти результаты в (2.67), получим нужное выражение

$$A_q^{n-1} = \bigvee_{i=0}^{q-1} (a^{\underline{1}}_{im_i} \vee a_{i+1,m_{i+1}-1})(\bigvee_{j=i+1}^{q} a_{jm_j}). \quad (2.71)$$

Здесь символ $\underline{1}$ показывает, что соответствующий член присутствует только при $i \geqslant 1$.

Аналогично, но уже с использованием формул типа (2.71), находится выражение A_q^{n-2} и т.д.

2.11. Разложение логических определителей по блокам

Возможны более общие разложения ЛО, чем предложенные выше разложения по элементам, а именно разложения по блокам.

Теорема2.13. *Пусть*

$$A_q^r = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i_1} \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{q1} \dots a_{qi_q} \dots \end{vmatrix}^{(r)}$$

— общий бесконечный ЛО q-го порядка r-го ранга. Пусть $A_{d,b}^s$ *— блок ЛО s-го ранга, составленный из строк* $d,\ d+1, \dots, b$ *в ЛО* A_q^r*. Тогда справедливо следующее разложение ЛО* A_q^r *вДНФ БЛ:*

$$A_q^r = \bigvee_{\sum_{i=1}^{p} S_i = r+p-1} A_{1,k_1}^{s_1} A_{k_1+1,k_2}^{s_2} \dots A_{k_{p-1}+1,q}^{s_p}. \quad (2.72)$$

Доказательство. Представим A_q^r по лемме 2.11 в блочном виде:

$$A_q^r = \begin{vmatrix} A_{1,k_1}^1 & \dots & A_{1,k_1}^{i_1} & \dots \\ A_{k_1+1,k_2}^1 & \dots & A_{k_1+1,k_2}^{i_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k_{p-1}+1,q}^1 & \dots & A_{k_{p-1}+1,q}^{i_p} & \dots \end{vmatrix}^{(r)}$$

Рассматривая теперь блоки $A_{d,b}^s$ как элементы ЛО A_q^r, раскрываем его по формуле (2.29). В результате получим (2.72).

Теорема 2.14. *Пусть*

$$A_q^r = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m_1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{q1} \dots a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)}$$

—общий конечный ЛО q-го порядка r-го ранга. Тогда справедливо следующее разложение определителя A_q^r *в ДНФ БЛ:*

$$A_q^r = \bigvee_{\sum_{i=1}^{p} s_i = r+p-1} \overset{\underline{M}_1}{A}{}_{1,k_1}^{s_1} \overset{\underline{M}_2}{A}{}_{k_1+1,k_2}^{s_2} \dots \overset{\underline{M}_p}{A}{}_{k_{p-1}+1,q}^{s_p}. \quad (2.73)$$

Здесь M_i — число элементов в соответствующем блок-ЛО — $A_{k_{i-1}+1,k_i}^{s_i}$, а запись $\overset{\underline{M}_i}{A}{}_{k_{i-1}+1,k_i}^{s_i}$ означает, что ЛО $A_{k_{i-1}+1,k_i}^{s_i}$ не входит в те конъюнкции, для которых из условия на Σs_i формально

получается $s_i > M_i$. Доказательство повторяет ход доказательства теоремы 2.13, но с раскрытием ЛО по формуле (2.30).

Изменяя число *p* блок-ЛО $A_{d,b}^s$ правой части (2.72), (2.73) и их порядок, можно получить разные выражения для ЛО A_q^r. Например, при *p* = *q* (тогда порядок блок-ЛО равен единице и $\overset{\underline{M}_i}{A}{}_{k_{i-1}+1,k_i}^{s_i} = \overset{\underline{m}_i}{a}{}_{2s_i}$, получим выражение общего ЛО A_q^r через его элементы в виде ДНФ (2.29) или (2.30). Отсюда уже обычным путем получается выражение ЛО-столбца в аналогичной форме (2.26) (см. замечание в конце § 2.5) . Полагая, что в правой части формул (2.72), (2.73) имеется произвольное число ЛО $A_{d,b}^s$ произвольного порядка, получаем наиболее общее представление ЛО A_q^r через ЛО $A_{d,b}^s$ низшего порядка. Это представление не содержит в явном виде элементов a_{ij} ЛО A_q^r.

Однако ЛО $A_{d,b}^s$ в (2.72), (2.73) можно снова представить по таким же формулам — например, для бесконечного ЛО

$$A_{db}^{s*} = \bigvee_{\sum_{i=1}^{c} t_i = s+c-1} A_{d,l_1}^{t_1} A_{l_1+1,l_2}^{t_2} \dots A_{l_{c-1}+1,b}^{t_c}, \quad (2.74)$$

выразив их тем самым через ЛО еще меньшего порядка и т.д., пока не придем к ЛО первого порядка, т.е. элементам a_{ij}.

Описанную процедуру вычисления общего логического определителя естественно назвать иерархической. С ее помощью, варьируя порядок и число блок-ЛО $A_{d,b}^s$, выбираемые на каждом шаге, можно получить разнообразные выражения ЛО A_q^r через его элементы, различающиеся по виду и сложности друг от друга и от ранее полученных выражений.

2.12. Минимальное разложение логического определителя по блокам

В многошаговой иерархической процедуре раскрытия ЛО, предложенной в § 2.11, мы не определили порядок блок-ЛО, выбираемых на каждом шаге, и соответствующее общее число шагов. Выберем теперь эти параметры так, чтобы минимизировать получаемое выражение ЛО. С этой целью рассмотрим указанную процедуру подробнее.

Согласно § 2.11 алгоритм вычисления общего бесконечного ЛО *q*-го порядка *r*-го ранга A_q^r, основанный на разложении (2.72), состоит в следующем. На 1-м этапе строки в A_q^r группируются так: первые q_1 строк образуют 1-ю группу, следующие q_2 строк — 2-ю,..., последние

q_p строк — p-ю группу. Из каждой группы строк составляются соответствующие ЛО $A^s_{q_1}(1),\ A^s_{q_2}(1),\ \ldots,\ A^s_{q_p}(1)$, которые затем выражаются по формуле (2.29) через элементы a_{ij} для всех значений ранга s, не превышающих r.

В результате получаются p $(p < q)$ новых строк, составленных из найденных ЛО, расположенных в порядке возрастания ранга

$$\begin{array}{l} A^1_{q_1}(1)\ \ A^2_{q_1}(1)\ldots\ A^r_{q_1}(1), \\ A^1_{q_2}(1)\ \ A^2_{q_2}(1)\ldots\ A^r_{q_2}(1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^1_{q_p}(1)\ \ A^2_{q_p}(1)\ldots\ A^r_{q_p}(1). \end{array} \tag{2.75}$$

На 2-м этапе группируются строки (2.75) из ЛО, полученные на 1-м этапе: первые l_1 строк образуют 1-ю группу, следующие l_2 строк -2-ю, . . . , последние l_d строк — d-ю группу. Эти группы образуют соответствующие ЛО $A^s_{l_1}(2), A^s_{l_2}(2), \ldots, A^s_{l_d}(2)$. Последние по формуле (2.72) выражаются через найденные на 1-м этапе ЛО меньших порядков $A^k_{q_i}(1)$ для всех значений ранга $k \leqslant r$. В результате получаем $d(d<p)$ новых строк, составленных из полученных ЛО, упорядоченных по возрастанию ранга

$$\begin{array}{l} A^1_{l_1}(2)\ \ A^2_{l_1}(2)\ldots\ A^r_{l_1}(2), \\ A^1_{l_2}(2)\ \ A^2_{l_2}(2)\ldots\ A^r_{l_2}(2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^1_{l_d}(2)\ \ A^2_{l_d}(2)\ldots\ A^r_{l_d}(2). \end{array} \tag{2.76}$$

Последующие этапы выполняются аналогично 2-му: группируются строки (2.76) из ЛО $A^k_{l_i}(2)$ и т.д. Наконец, на последнем, v-м этапе строки из упорядоченных по рангам ЛО

$$\begin{array}{l} A^1_{f_1}(v-1)\quad A^2_{f_1}(v-1)\ldots\ A^r_{f_1}(v-1), \\ A^1_{f_2}(v-1)\quad A^2_{f_2}(v-1)\ldots\ A^r_{f_2}(v-1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^1_{f_m}(v-1)\quad A^2_{f_m}(v-1)\ldots\ A^r_{f_m}(v-1), \end{array} \tag{2.77}$$

полученные на (v — 1)-м этапе, не группируются, а рассматриваются как одно множество строк. Из множества (2.77) составляется единственный ЛО $A^r_m(v)$ порядка m ранга r, который по формуле

(2.72) выражается через найденные на (v - 1)-м этапе ЛО $A^k_{f_i}(v-1)$.
В результате получается искомое выражение ЛО A^r_q через его элементы. Вычислив это выражение, тем самым мы вычислим ЛО A^r_q.
Определим число этапов и число строк в группе на каждом этапе так, чтобы минимизировать сложность выражения (вычисления) ЛО A^r_q. Пусть на каждом этапе строки объединились в группы по k строк. Найдем значение $k = k_{\text{опт}}$, минимизирующее указанную сложность. На 1-м этапе имеем $p_1 = q/k$ различных ЛО $A^s_{q_i}$, $i = 1, \ldots, p_1$, каждый из которых надо вычислить для значений ранга $s \leqslant r$. Поэтому сложность 1-го этапа

$$(q/k)\sum_{i=1}^{r}\tilde{N}^i_k,$$

где $\tilde{N}^i_k$ — сложность вычисления по формуле (2.29) общего бесконечногоЛО порядка k ранга i. На 2-м этапе имеем $p_2 = p/k = q/k^2$ различных ЛО $A^s_{l_i}$, $i = 1, \ldots, p_2$, вычисляемых для рангов $s \leqslant r$. Отсюда сложность 2-го этапа $(q/k^2)\sum\limits_{i=1}^{r}\tilde{N}^i_k$. Аналогично анализируется 3-й этап - его сложность $(q/k^3)\sum\limits_{i=1}^{r}\tilde{N}^i_k$ и т.д. На предпоследнем этапе имеем k различных ЛО (каждый рангов $s \leqslant r$) с общей сложностью вычислений $k\sum\limits_{i=1}^{r}\tilde{N}^i_k$. На последнем этапе имеем $k/k = 1$ ЛО k-го порядка, единственного ранга r. Сложность его вычисления $\tilde{N}^r_k$. Таким образом, сложность вычисления ЛО A^r_q по предложенной процедуре

$$\tilde{N} = (k + k^2 + \ldots + q/k)\sum_{i=1}^{r}\tilde{N}^i_k + \tilde{N}^r_k. \tag{2.78}$$

С учетом выражения (3.7) для $\tilde{N}^i_k$ имеем

$$\sum_{i=1}^{r}\tilde{N}^i_k = \sum_{i=1}^{r}(kC^{k-1}_{k+i-2} - 1) = kC^{r-1}_{k+r-1} - r.$$

Подставляя это значение и значение $\tilde{N}^r_k$ в (2.78), после суммирования прогрессии найдем

$$\tilde{N} = \frac{(kC^{r-1}_{k+r-1} - r)(q-k)}{k-1} + kC^{r-1}_{k+r-2} - 1. \tag{2.79}$$

Выразив в (2.79) C^n_m через факториалы, найдем, что при $q, r \to \infty$

$$\tilde{N} \approx \frac{r^k(q-k)}{(k-1)(k-1)!} \quad (2.80)$$

Из (2.80) следует, что $\tilde{N}$ минимально при $k = k_{\text{опт}} = 2$. Таким образом, минимальной по сложности оказывается та из многоэтапных процедур отыскания выражения бесконечного ЛО, у которой на каждом этапе в группы объединяются по две строки (общее число строк уменьшается вдвое). Это дихотомическая процедура. Формула, по которой вычисляются получающиеся на этапе ЛО 2-го порядка

$$A_2^r = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots \\ \\ a_{21}a_{22}\ldots \end{vmatrix}^{(s)} = \bigvee_{i+j=s+1} a_{1i}a_{2j}. \quad (2.81)$$

Поскольку на каждом этапе общее число строк уменьшается вдвое, общее число этапов в оптимальной процедуре составляет

$$L = \log_2 q. \quad (2.82)$$

Согласно § 2.11 алгоритм вычисления общего конечного ЛО *q*-го порядка *r*-го ранга A_q^r, основанный на разложении (2.73), принципиально не отличается от рассмотренного алгоритма вычисления бесконечного ЛО на основе разложения (2.72) и сводится к выполнению двух операций: 1) группировка строк имеющегося ЛО и образование из каждой группы строк своего ЛО; 2) вычисление полученных ЛО для последовательных значений ранга *s* = 1, 2, . . . , что дает новые строки. При этом на последнем этапе все имеющиеся строки образуют единый ЛО, который вычисляется для единственного значения ранга *s = r*. Некоторые отличия алгоритма, обусловленные конечностью ЛО A_q^r, таковы: а) на каждом этапе, включающем две указанные выше операции, операция 2) выполняется не по формуле (2.72), а по формуле (2.73); б) на 1-м, 2-м . . . , *k-м,* . . . , предпоследнем этапах вычисление каждого ЛО ведется для значений ранга $s = 1, 2, \ldots, r$, если $r \leqslant n(k)$ (где *n (k)* - число элементов в ЛО на *k-м* этапе), и для значений ранга $s = 1, 2, \ldots, n(k)$, если $r > n(k)$. Как и для бесконечного ЛО, примем, что на каждом этапе строки ЛО объединяются в группы по две, полагая, что такая процедура вычисления ЛО минимальна по сложности. Формула, по которой вычисляются получающиеся на этапе ЛО 2-го порядка, аналогична (2.81)

$$A_2^s = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1m_1} \\ a_{21}\ldots a_{2m_2} \end{vmatrix}^{(s)} = \bigvee_{i+j=s+1} a_{1i}^{m_1} a_{2j}^{m_2}. \quad (2.83)$$

Общее число этапов в процедуре дается прежней формулой (2.82). Определитель-столбец

$$A_n^r = \begin{vmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{vmatrix}^{(r)} \quad (2.84)$$

— частный случай общего ЛО

$$A_q^r = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1}\ldots a_{qm} \end{vmatrix}^{(r)}$$

при *m* = 1, *q* = *n*. Поэтому ЛО A_n^r вида (2.84) можновы числить с помощью изложенного алгоритма. Именно, на 1-м этапе, сгруппировав элементы в A_n^r по два, получим *n*/2 ЛО-столбцов A_2^s с двумя элементами. Вычислив каждый A_2^s для всех значений ранга s = 1,2, получим *n*/2 новых строк длины 2. Составим из них общий ЛО $A_{n/2}^r$ с *m* = 2. На 2-м этапе, сгруппировав строки в $A_{n/2}^r$ по две, получим $n/2^2$ ЛО A_2^s 2-го порядка с 2^2 элементами (в каждой строке по 2 элемента). Вычислив каждый A_2^s, для всех значений ранга s =1, 2, . . . , 2^2, получим $n/2^2$ новых строк длины 2^2, из которых составим новый ЛО и т.д. На *k-м* этапе вычисляется $n/2^k$ ЛО 2-го порядка A_2^s с *n(k)* = 2 $A_{n/2^2}^r$ элементами (по 2^{k-1} элементов в каждой строке). Каждый Л О A_2^s вычисляется: а) на 1-м, 2-м, . . . , $(\log_2 n - 1)$-м этапе - для всех значений ранга $s = 1, 2, \ldots, \min(r, n(k))$; б) на последнем $(\log n)$-м этапе - для единственного значения ранга *s - r*. Покажем преимущества вычисления ЛО путем их блочного разложения.

Пример 2.5. Рассмотрим ЛО-столбец

$$A_4^2 = \begin{vmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_4 \end{vmatrix}^{(2)}.$$

Его раскрытие по формуле (2.26) приводит к выражению

$$A_4^2 = a_1a_2a_3 \vee a_1a_2a_4 \vee a_1a_3a_4 \vee a_2a_3a_4,$$

сложность которого 11 элементарных операций БЛ. Раскроем тот же ЛО по иерархическому правилу разложения:

$$A_4^2 = B_2^1Q_2^2 \vee B_2^2Q_2^1, \text{ где } B_2^r = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}^{(r)},$$

$$Q_2^r = \begin{vmatrix} a_3 \\ a_4 \end{vmatrix}^{(r)}$$

После раскрытия B_2^r и Q_2^r по формуле (2.26) получим выражение

$A_4^2 = a_1a_2(a_3 \vee a_4) \vee a_3a_4(a_1 \vee a_2)$
со сложностью всего семь элементарных операций БЛ.

Понятие порядковой логики в неявной форме встречаются во многих работах. Однако явная форма порядковой логической функции и порядкового ЛО введена только в 1976 г. Основное применение созданные методы нашли при изучении динамики цифровых автоматов, а позднее - в системных задачах надежности, поиска информации, принятия решения, анализа сцен и др.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОРЯДКОВЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ И ЕГО СЛОЖНОСТЬ

3.1. Вводные замечания

При практическом применении порядковой логики для исследования сложных систем возникает необходимость вычисления достаточно больших, т.е. содержащих много элементов, порядковых ЛО. Здесь и ниже под вычислением ЛО понимается отыскание численного значения ЛО по заданным численным значениям его элементов. Будем оценивать сложность вычисления ЛО количеством элементарных двухместных операций БЛ, необходимых для получения численного значения ЛО. Для вычисления ЛО методически проще всего использовать готовые формулы раскрытия ЛО (§ 2.5 - 2.7). При этом вычисление ЛО сводится к вычислению значения соответствующей функции БЛ, полученной в результате раскрытия данного ЛО. Вместо указанных формул для раскрытия ЛО можно использовать процедуры их последовательного разложения на меньшие ЛО (§ 2.8 — 2.12). Однако в связи с этим возникают такие вопросы: 1) какова сложность указанных процедур вычисления ЛО; 2) в каких случаях эти процедуры можно рекомендовать как приемлемые по сложности;
3) что делать, если эти процедуры неприемлемы по сложности. Ответам на эти вопросы посвящена настоящая глава.

3.2. Сложность вычисления логических определителей по формулам раскрытия

Начнем с процедур вычисления ЛО-столбца по готовым формулам раскрытия (2.26), (2.27). Каждая конъюнкция в (2.26) для своего вы-

числения требует *n* - *r* элементарных операций сравнения двух чисел, а общее количество конъюнкций равно $C_n^{n-r+1} = C_n^{r-1}$, где C_a^b- число сочетаний из *a* элементов по *b*. Далее, для вычисления дизъюнкции в (2.26) требуется $C_n^{n-r} - 1$ элементарных операций. Суммируя, найдем, что сложность N_n^r вычисления ЛО-столбца A_n^r ранга *r* с *n* элементами по формуле (2.26) равна

$$N_n^r = C_n^{r-1}(n-r+1) - 1. \quad (3.1)$$

Каждая дизъюнкция (2.27) для вычисления требует *r* - 1 элементарных операций сравнения двух чисел, а число всех дизъюнкций C_n^r. Для вычисления конъюнкции требуется $C_n^r - 1$элементарных операций. Отсюда сложность вычисления ЛО-столбца A_n^r с *n* элементами ранга *r* по формуле (2.27)

$$N_n^r = C_n^r r - 1. \quad (3.2)$$

Легко убедиться (например, выразив C_a^b через факториалы), что выражения (3.1), (3.2) тождественно равны. С помощью формулы Стерлинга можно получить асимптотику выражения (3.1) при $n \to \infty$ (см. § 3.9)

$$N_n^r \approx n^r/(r-1)!, \quad r \text{ фиксировано;} \quad (3.3)$$

$$N_n^r \approx \frac{s^{n/s-0,5}\sqrt{n}}{e\sqrt{2\pi}}\left(\frac{s}{s-1}\right)^{n-r+0,5}, \quad s = n/r, \ s \text{ фиксировано.} \quad (3.4)$$

Из (3.2), (3.4) следует, что при фиксированном *n/r* сложность вычисления ЛО-столбца по формулам (2.26), (2.27) растет экспоненциально по *n,* что делает нереальными вычисления при больших *n:* при фиксированном *r* эта сложность растет как степенная функция n^r, что дает возможность вычисления даже больших ЛО невысокого ранга *r*. Оценим сложность вычислений общего бесконечного ЛО по формуле (2.29) и общего конечного ЛО по формуле (2.30). Сложность вычисления одной конъюнкции в (2.29) равна *q* — 1 элементарных операций сравнения. Подсчитаем общее число *L (q, r*) таких конъюнкций. В образовании этих конъюнкций в силу леммы 2.14 участвуют лишь *r* первых элементов каждой строки ЛО. Зафиксируем некоторый элемент *q-й* строки $a_{qk}, \ k \leqslant r$. Соответствующих ему конъюнкций в (2.29) столько, сколько есть конъюнкций $a_{1i_1} \dots a_{q-1, i_{q-1}}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{s=1}^{q-1} i_s = r + q - 1 - k = (r - k + 1) + (q - 1) - 1,$$ т.е.

$L(q-1, r-k+1)$. Отсюда, суммируя по *k* от 1 до *r*, получаем общее число конъюнкций в (2.29)

$$L(q,r) = \sum_{k=1}^{r} L(q-1,\ r-k+1) = \sum_{s=1}^{r} L(q-1,s). \qquad (3.5)$$

Теперь для отыскания функции *L(q, r)* надо решить уравнение (3.5). Используем с этой целью рекуррентную по *q* процедуру. Во-первых, *L* (1, *r*) = 1, так как при *q* = 1 формула (2.29) имеет вид $A_1^r = a_{1r}$. Далее, с помощью (3.5) последовательно находим

$$L(2,r) = \sum_{s=1}^{r} L(1,s) = r,$$

$$L(3,r) = \sum_{s=1}^{r} L(2,s) = \sum_{s=1}^{r} s = \frac{r(r+1)}{2},$$

$$L(4,r) = \sum_{s=1}^{r} L(3,s) = \sum_{s=1}^{r} \frac{s(s+1)}{2} = \frac{r(r+1)(r+2)}{6}.$$

Полученные формулы подсказывают общее выражение

$$L(q,r) = C_{q+r-2}^{q-1}. \qquad (3.6)$$

Докажем (3.6) индукцией по *q*. Справедливость (3.6) при *q* = 1, 2, 3, 4 уже доказана. Допустим, что (3.6) верно при некотором *q = p*. Докажем, что тогда оно верно и при *q* = *p* + 1. Имеем, согласно (3.5) и нашему предположению,

$$L(p+1,r) = \sum_{s=1}^{r} L(p,s) = \sum_{s=1}^{r} C_{p+s-2}^{p-1} = C_{p+r-1}^{p}$$

Таким образом, выражение (3.6) осталось справедливо и при *q* = *p* + 1, следовательно, оно справедливо при любом *q*.

Сложность $\tilde{N}_q^r$ вычисления общего бесконечного ЛО A_q^r *r*-го ранга *q*-го порядка по формуле (2.29) равна произведению сложности *q* — 1 вычисления одной конъюнкции в (2.29) на число *L(q, r)* конъюнкций плюс сложность *L(q, r)* - 1 вычисления дизъюнкции (2.29). Отсюда с учетом (3.6) находим

$$\tilde{N}_q^r = qC_{q+r-2}^{q-1} - 1 = qC_{q+r-2}^{r-1} - 1. \qquad (3.7)$$

Выражение (3.7) определяет также оценку сверху сложности вычисления общего конечного ЛО A_q^r *r*-го ранга *q*-го порядка по формуле (2.30). Действительно, вычисление общего конечного ЛО по формуле (2.30) отличается от вычисления общего бесконечного ЛО по формуле (2.29) отсутствием части операций.

Асимптотика выражения (3.7) при $q \to \infty$

$$\tilde{N}_q^r \approx q^r/(r-1)!, \quad r \text{ фиксировано}, \qquad (3.8)$$

отсюда

$$\tilde{N}_q^r = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{q+r-2}{2\pi}}\, S^{\frac{q+r-2}{s}-0,5}\left(\frac{s}{s-1}\right)^{q-1,5}, \quad s = \frac{q+r-2}{r};$$

s фиксировано. (3.9)

Соотношение (3.8) находим, заменив в формуле (3.72) *n* на q + *r* - 2 и получив в результате оценку для C_{q+r-2}^{r-1}, которую подставляем в (3.7).

Соотношение (3.9) находим, заменив в формуле (3.73) *n* на q + *r* — 2 и подставив получившуюся оценку qC_{q+r-2}^{r-1} в (3.7). Из (3.8), (3.9) видно, что при фиксированном *q/r* сложность вычисления общего ЛО по формулам (2.29), (2.30) растет экспоненциально по *q*; однако при фиксированном *r* эта сложность растет как степенная функция q^r, и потому процедура приемлема для вычисления больших ЛО низкого ранга *r* .

3.3. Сложность вычисления логических определителей методом последовательного разложения

Оценим сложность N_n^r вычисления ЛО-столбца A_n^r с помощью последовательного оптимального разложения ЛО по элементам (2.54). Вычисление правой части (2.54) требует N_{n-i}^{r+1-i} элементарных операций при отыскании каждого ЛО-столбца $A_{i+1,n}^{r+1-i}$, $i = 1,\ldots,r$, далее *r* операций при отыскании всех конъюнкций и *r* —1 операций при отыскании дизъюнкции. Отсюда

$$N_n^r = 2r - 1 + \sum_{i=1}^{r} N_{n-i}^{r+1-i}. \qquad (3.10)$$

Формула (3.10) позволяет находить N_n^r для последовательно возрастающих *r*. Положив в (3.10) *r* = 1, получим $N_n^1 = 1 + N_{n-1}^1$, откуда при очевидном начальном условии $N_1^1 = 0$ следует

$$N_n^1 = n + 1 \qquad (3.11)$$

Далее, положив в (3.10) *r* = 2, получим $N_n^2 = 3 + N_{n-1}^2 + N_{n-2}^1$, или с учетом (3.11) $N_n^2 = n + N_{n-1}^2$. Решая уравнение в соответствии с очевидным начальным условием $N_2^2 = 1$, получим

$$N_n^2 = \frac{(n+3)(n-2)}{2} + 1. \qquad (3.12)$$

При *r* = 3 из (3.10) получаем $N^3 = 5 + N_{n-1}^3 + N_{n-2}^2 + N_{n-3}^1$, откуда после подстановки значений N_{n-3}^1 и N_{n-2}^2 из (3.11) и (3.12) и необходимых действий следует уравнение

$N^3 = (n+1)(n-2)/2 + 1 + N^3_{n-1}$. Решая его (начальное условие $N^3_3 = 2)$, найдем

$$N^3_n = (n+1)(n+2)(2n+3)/12 - (n-3)(1{,}5n-10) - 13. \quad (3.13)$$

Аналогично определяются $N^4_n, N^5_n, \ldots$, и т.д. Из (3.11) — (3.13) следует, что при $n \to \infty$

$$N^1_n \approx n, \quad N^2_n \approx n^2/2!, \quad N^3_n \approx n^3/3! \quad (3.14)$$

Поэтому естественно полагать, что и для любого r при $n \to \infty$

$$N^r_n \approx n^r/r! \quad (3.15)$$

Оценка (3.15) может быть доказана индукцией по r . Действительно, пусть (3.15) верно при всех $r \leq s$. Докажем, что тогда оно верно и при $r = s + 1$. Из нашего предположения и (3.10) имеем

$$N^{s+1}_n = 2s + 1 + N^{s+1}_{n-1} + N^s_{n-2} + \ldots + N^1_{n-s-1} \approx$$

$$\approx N^{s+1}_{n-1} + \frac{(n-2)^s}{s!} + \ldots + \frac{(n-s-1)^1}{1!} \approx N^{s+1}_{n-1} + \frac{(n-2)^s}{s!}. \quad (3.16)$$

Ищем решение уравнения (3.16) в форме $N^{s+1}_n = k(s+1)n^{a(s+1)}$, где *k(s)* и *a(s)* — неизвестные функции от *s.* Уравнение, с учетом того, что при $n \to \infty$ приближенно

$(n-1)^{a(s+1)} = n^{a(s+1)} - a(s+1)n^{a(s+1)-1}$, а $(n-2)^s = n^s$,

принимает вид

$$k(s+1)a(s+1)n^{a(s+1)-1} = n^s/s! \quad (3.17)$$

Из (3.17) однозначно определяются искомые коэффициенты

$a(s+1) = s+1, \quad k(s+1) = 1/s!(s+1) = 1/(s+1)!$

Итак, решение уравнения (3.16) $N^{s+1}_n = n^{s+1}/(s+1)!$, что и требовалось доказать.

Сравнив асимптотику (3.15) с (3.3), заключаем, что вычисление ЛО-столбца *r* -го ранга с помощью последовательного оптимального разложения по элементам в *r* раз менее сложно, чем его вычисление по готовым формулам типа (2.26), (2.27). Аналогичное положение имеет место при вычислении общего ЛО.

Оценим сложность вычисления ЛО с помощью оптимальной последовательной дихотомии на основе блочных разложений (2.72), (2.73) (см. §2.12).

Сложность $\tilde{N}^r_q$ вычисления общего бесконечного ЛО A^r_q получим из общего выражения (2.79) сложности вычисления A^r_q с помощью последовательных блочных разложений, положив в нем k = 2, что соответствует случаю дихотомии:

$$\tilde{N}^r_q = r^2(q-2) + 2r - 1. \quad (3.18)$$

Из (3.18) видно, что вычисление бесконечного ЛО A^r_q с помощью последовательной дихотомии требует степенного (квадратичного по *r* и линейного по *q)* числа элементарных операций. Однако при *q = 2* зависимость $\tilde{N}^r_q$ от *r* линейна

$$\tilde{N}^r_q = 2r - 1. \quad (3.19)$$

Оценим теперь сложность N^r_q вычисления общего конечного ЛО A^r_q. Для простоты примем, что строки в A^r_q содержат одинаковое число элементов *m,* т.е.

$$A^r_q = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1} \ldots a_{qm} \end{vmatrix}^{(r)}, \quad qm = n. \quad (3.20)$$

Здесь *n* -общее число элементов в A^r_q. Учтем приведенные в § 2.12 особенности процедуры вычисления конечного ЛО A^r_q. В силу равенства длин строк в вычисленном ЛО (3.20) каждый ЛО 2-го порядка A^s_2, составленный на любом *k-м* этапе процедуры, также имеет равные длины двух своих строк: $m_1 = m_2 = n(k)/2$. .

Тогда из (2.83) вытекает следующая развернутая формула для вычисления получившихся на *k-м* этапе ЛО A^s_2:

$$A^s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1,n(k)/2} \\ a_{21} \ldots a_{2,n(k)/2} \end{vmatrix}^{(s)} =$$

$$= \begin{cases} \bigvee\limits_{i=1}^{s} a_{1i}a_{2,s+1-i}, & s \leqslant n(k)/2, \\ a_{1,n(k)/2} \vee a_{2,n(k)/2} \vee \Big(\bigvee\limits_{i=s-n(k)/2+1}^{n(k)/2} a_{1i}a_{2,s+1-i} \Big), & n(k)/2 < s \leqslant n(k). \end{cases} \quad (3.21)$$

На 1-м этапе, сгруппировав строки вычисляемого ЛО A^r_q по две, получим *q/2* ЛО A^s_2 2-го порядка с *2m* элементами (в каждой строке по *m* элементов) . Вычислив каждый из ЛО A^s_2 для всех значений ранга *s = 1,2,... ,2m* (по формуле (3.21)), получим *q/2* новых строк длины *2m.* Составим из них ЛО $A^r_{q/2}$. На 2-м этапе, сгруппировав строки в $A^r_{q/2}$ по две, получим $q/2^2$ ЛО A^s_2 2-го порядка с 2^2m элементами (в каждой строке по *2m* элементов) . Вычислив каждый из A^s_2 для всех значений ранга $s = 1,2, ..., 2^2 m$, получим $q/2^2$ новых строк длины 2^2m, из которых составим новый ЛО $A^r_{q/2^2}$ и т.д. Таким образом, на *k*-м этапе вычислению подлежат $q/2^K$ ЛО 2-го порядка A^s_2с $n = 2^k m$ элементами (по 2^{k-1} *m* элементов в каждой строке). При этом в согласии с ранее сделанными замечаниями (§ 2.12) каждый ЛО A^s_2 вычисляется: на 1-м, 2-м,..., предпоследнем, $(\log_2 q - 1)$-м этапе - для всех значений ранга $s = 1, 2, \ldots, \min\,[r, n(k)]$;на последнем $(\log_2 q)$-м этапе — для единственного значения ранга *s*= *r*. Следовательно, суммарная сложность процедуры вычисления ЛО (3.20)

$$N_q^r = \sum_{k=1}^{\log_2 q-1} \frac{q}{2^k} \sum_{s \leqslant \min(r, 2^k m)} N_{ks} + N_{\log_2 q, r}. \qquad (3.22)$$

Здесь N_{ks} - сложность вычисления ЛО A_2^s на *k-м* этапе. Как видно из формулы (3.21) (с учетом значения *n(k)),*

$$N_{ks} = \begin{cases} 2s-1, & s \leqslant 2^{k-1}m, \\ 2(2^k m - s)+1, & 2^{k-1}m < s \leqslant 2^k m. \end{cases} \qquad (3.23)$$

Будем считать, что ранг *r* вычисляемого ЛО A_q^r удовлетворяет условию

$$r \leqslant n/2 = qm/2 = 2^{\log_2 q - 1}m. \qquad (3.24)$$

Условие (3.24) не ограничивает общности отыскиваемой оценки сложности. Действительно, в силу леммы 2.15 вычисление ЛО A_q^r при $r > n/2$ сводится к вычислению нового ЛО $B_q^{r_1}$ с тем же числом элементов *n,* но с рангом $r_1 = n - r + 1 \leqslant n/2.$

Из (3.24) следует, что последнее слагаемое в (3.22) определяется всегда первой строкой выражения (3.23): $N_{\log_2 q, r} = 2r - 1.$ Если $r \leqslant m,$ то по условию суммирования в (3.22) $s \leqslant r \leqslant m \leqslant 2^{k-1}m$ для всех *k*. Это значит, что остальные слагаемые в (3.22) определяются первой строкой выражения (3.23) $N_{ks} = 2s - 1.$ Подставляя эти результаты в (3.22), после суммирования найдем

$$N_q^r = r^2(q-2) + 2r - 1, \quad r \leqslant m. \qquad (3.25)$$

Если $r \geqslant m,$ то выражение (3.23) N_{ks} зависит от соотношения *k* и s, и для суммирования в (3.22) удобно положить

$$r = 2^p m, \quad 0 < p \leqslant \log_2 q - 1. \qquad (3.26)$$

При этом множество С этапов процедуры естественным образом разбивается на три подмножества C_1, C_2, C_3. В C_1 входят этапы с номерами *k,* для которых количество *n (k)* элементов в вычисляемых ЛО 2-го порядка A_2^s не превышает *r*, т.е. $2^k m \leqslant 2^p m,$ откуда $k \leqslant]p[,$ где $]x[$— целая часть *x.*

На каждом таком этапе необходимо вычислять ЛО A_2^s для всех возможных значений ранга $s = 1, 2, \ldots, n(k),$ реализуя при этом сложность, указываемую первой или второй строкой (3.23) - в зависимости от значения s. В C_2 входит один этап с номером *k,* для которого количество *n (k)* элементов в вычисляемых ЛО A_2^s впервые превзошло *r,* т.е. $2^{k-1}m < 2^p m < 2^k m,$ откуда $k - 1 < p < k$ или $k = [p],$ где $[\cdot]$ — символ округления до ближайшего большего

целого числа. На этом этапе ЛО A_2^s вычисляется лишь для значений ранга $s \leqslant r$ (т.е. $s \leqslant 2^p m$), причем сложность вычисления при $s \leqslant 2^{k-1}$ определяется первой строкой, а при $2^{k-1}m < s \leqslant 2^p m$ — второй строкой (3.23). Очевидно, что C_2 непусто лишь для *r*, которым в (3.26) соответствует дробное значение *p.* В C_3 входят этапы с последующими номерами *k,* для которых количество элементов *n (k)* в ЛО A_2^s превосходит *r*, т.е. $2^{k-1}m \geqslant 2^p m,$ откуда $k \geqslant [p] + 1.$ На каждом таком этапе ЛО A_2^s вычисляется для значений ранга $s \leqslant r$ (т.е. $s \leqslant 2^p m \leqslant 2^{k-1}m$) и соответствующая сложность определяется первой строкой (3.23).

В соответствии с разбиением множества этапов вычисляем внутреннюю сумму в (3.22):

– при $k \leqslant]p[$

$$\sum_{s \leqslant \min(r, 2^k m)} N_{ks} = \sum_{s=1}^{2^k m} N_{ks} = \sum_{s=1}^{2^{k-1}m} (2s-1) + \sum_{s=2^{k-1}m+1}^{2^k m} [2(2^k m - s) + 1] = 2^{2k-1}m^2; \qquad (3.27)$$

– при $k = [p]$

$$\sum_{s \leqslant \min(r, 2^k m)} N_{ks} = \sum_{s=1}^{2^p m} N_{ks} = \sum_{s=1}^{2^{k-1}m} (2s-1) + \sum_{s=2^{k-1}m+1}^{2^p m} [2(2^k m - s) + 1] =$$

$$= m^2 [2^{p+[p]+1} - 2^{2[p]-1} - 2^{2p}]; \qquad (3.28)$$

– при $k \geqslant [p] + 1$

$$\sum_{s \leqslant \min(r, 2^k m)} N_{ks} = \sum_{s=1}^{2^p m} N_{ks} = \sum_{s=1}^{2^p m} (2s-1) = 2^{2p}m^2. \qquad (3.29)$$

Подставляя выражения (3.27)- (3.29) в (3.22), после суммирования по *k* найдем оценку сложности вычисления ЛО A_q^r в (3.20) при *r*> *m*

$$N_q^r = qm^2 \{(2^{[p]} - 1)_{p > 1} + (2^{p+1} - 2^{[p]-1} - 2^{2p-[p]})_{p \text{ дробное}} + (2^{2p-[p]} - 2^{p+1}q^{-1})_{[p] \leqslant \log_2 q - 2}\} + 2r - 1, \quad r > m. \qquad (3.30)$$

Совместно с уже найденной оценкой (3.25) для случая $r \leqslant m$ формула

(3.30) и есть требуемый результат. В (3.30) *p* - соответствующий *r* показатель, равный, согласно (3.26), $p = \log_2 (r/m)$, а символы справа от каждой скобки показывают условия, при которых эта скобка присутствует в общем выражении. Полагая для простоты, что *p* в (3.30) целое, и учитывая (3.25), найдем упрощенную оценку (в которой *n=qm)*

$$N_q^r = \begin{cases} r^2 (q-2) + 2r - 1 = \alpha rn - (r-1)^2, \ \alpha = r/m \leqslant 1, & \text{при } r \leqslant m, \\ r(n - 2/m) + 2r - 1, & \text{при } m < r < 2m, \\ (2r - m)n + 2r - 1 - 2r/m, & \text{при } 2m \leqslant r \leqslant n/4, \\ (r - m)n + 2r - 1, & \text{при } n/4 < r \leqslant n/2. \end{cases} \tag{3.31}$$

Сложность вычисления ЛО-столбца A_n^r методом последовательной блочной дихотомии получается из выражений (3.25), (330), (3.31) при условии *m* = 1, *q* = *n*. При этом общая оценка сложности (в предположении *r* > 1) имеет вид

$$N_n^r = n \ \{ (2^{[p]} - 1) + (2^{p+1} - 2^{[p]-1} - 2^{2p-[p]})_{p\ \text{дробное}} + \\ + (2^{2p+[p]} - 2^{p+1} n^{-1} \}_{[p] \leqslant \log_2 n - 2} + 2r - 1, \tag{3.32}$$

где, в согласии с (3.26), $p = \log_2 r$, а частная (в предположении, что *p* — целое):

$$N_n^r = \left\{ \begin{array}{ll} n - 1, & r = 1 \\ (2r - 1)n - 1, & 2 \leqslant r \leqslant n/4 \\ (r - 1)n + 2r - 1, & n/4 < r \leqslant n/2 \end{array} \right| = cnr, \tag{3.33}$$

где $c \leqslant 2, c = \text{const}.$

Как видно из формул (3.31), (3.33), сложность вычисления конечного ЛО (как общего вида, так и столбцевого) растет линейно при увеличении ранга *r* и числа элементов *n*. Таким образом, последовательная блочная дихотомия позволяет вычислять конечные ЛО высоких рангов с большим числом элементов.

3.4. Приближенное вычисление логических определителей. Случай определителя-столбца

Часто значения элементов ЛО известны неточно. В таких случаях точные методы вычисления ЛО, рассмотренные выше, не оправданы. Здесь целесообразен переход к приближенным методам — таким, которые обеспечивают необходимую точность вычисления, но обладают меньшей сложностью, что позволяет вычислять большие ЛО. Эти методы являются также довольно действенным средством вычисления больших ЛО с точно заданными значениями элементов в тех случаях, когда точные методы вычисления ЛО малоприемлемы из-за их большой сложности.

Принцип получения приближенного выражения ЛО прост. Пусть имеется точное выражение ЛО в ДНФ БЛ. Опустим в этом выражении часть конъюнкций. Тогда заключительная дизъюнкция (максимум) будет браться по суженной (сравнительно с первоначальной) области, так что ее значение может лишь уменьшиться либо остаться неизменным. В результате получим выражение, являющееся оценкой ЛО снизу. Аналогично, имея точное выражение ЛО в КНФ Б Л и опустив в нем часть дизъюнкций, придем к ситуации, когда заключительная конъюнкция (минимум) берется по суженной (сравнительно с первоначальной) области, так что ее значение может только увеличиться или остаться неизменным. В итоге получаем выражение-оценку ЛО сверху.

Существует много вариантов исключения членов из точного выражения ЛО. Однако к любому варианту естественно предъявить требование согласованности, по которому получаемые оценки являются достижимыми и переходят в точные выражения ЛО каждый раз, когда последний принимает некоторую вырожденную форму, так что величина ЛО (и притом любого ранга) очевидна без всякого вычисления. В качестве такого вырожденного ЛО выберем ЛО

$$^*4_q^r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{q1} & a_{q2} \dots \end{vmatrix}^{(r)}$$ (конечный или бесконечный), строки

которого совпадают, т.е.

$$a_{11} = a_{21} = \dots = a_{q1} = a_1; \ a_{12} = a_{22} = \dots = a_{q2} = a_2; \dots \tag{3.34}$$

Величина такого ЛО для различных рангов *r*

$$A_a^1 = A_a^2 = \dots = A_a^q = a_1; \ A_q^{q+1} = A_q^{q+2} = \dots = A_q^{2q} = a_2; \dots \tag{3.34a}$$

В частности, вырожденный ЛО-столбец $A_n^r = \begin{vmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{vmatrix}^{(r)}$, согласно (2.117), имеет равные элементы

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = a. \tag{3.35}$$

В силу (3.35) для всех *r* верно $A_n^1 = A_n^2 = \dots = A_n^n = a.$ Рассмотрим относительно простые задачи отыскания оценок ЛО-столбца. Оценки для общих ЛО будут даны в двух следующих параграфах. Начнем с получения оценки снизу. Используем выражение ЛО в ДНФ БЛ (2.26). Сохраним в этом выражении все конъюнкции вида $(a_1 a_2 \dots a_{n-r+1}), (a_{n-r+2} a_{n-r+3} \dots a_{2(n-r+1)}), \dots$ Всего таких конъюнкций будет

$$M_1 =]\, n/(n-r+1) [, \quad (3.36)$$

где $]x[$ означает целую часть x. Остаются неиспользованными $R \leqslant n - r + 1$ элементов a_i со старшими номерами i. Чтобы они фигурировали в оценке, сохраним в выражении (2.26) еще конъюнкцию $(a_r a_{r+1} \dots a_n)$. В итоге получим оценку

$$\left|\begin{matrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{matrix}\right|^{(r)} \geqslant (a_1 a_2 \dots a_{n-r+1}) \vee (a_{n-r+2} a_{n-r+3} \cdots a_{2(n-r+1)}) \vee \dots$$
$$\vee (a_{(M_1-1)(n-r+1)+1} a_{(M_1-1)(n-r+1)+2} \cdots a_{M_1(n-r+1)}) \vee (a_r a_{r+1} \dots a_n). \quad (3.37)$$

Для получения оценки сверху используем точное выражение ЛО в КНФ БЛ (2.27). Сохраним в этом выражении все дизъюнкции вида $(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_r), (a_{r+1} \vee a_{r+2} \vee \dots \vee a_{2r}), \dots$ Всего таких дизъюнкций

$$M_2 =]\, n/r [, \quad (3.38)$$

так что неиспользованными останутся $R \leq r$ элементов со старшими номерами i. Поэтому сохраним в выражении (2.27) еще дизъюнкцию $(a_{n-r+1} \vee a_{n-r+2} \vee \dots \vee a_n)$. В результате получим оценку

$$\left|\begin{matrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{matrix}\right|^{(r)} \leqslant (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_r) \wedge (a_{r+1} \vee a_{r+2} \vee \dots \vee a_{2r}) \wedge \dots$$
$$\wedge (a_{(M_2-1)r+1} \vee a_{(M_2-1)r+2} \vee \dots \vee a_{M_2 r}) \wedge (a_{n-r+1} \vee a_{n-r+2} \vee \dots \vee a_n). \quad (3.39)$$

Очевидно, что оценки (3.37) - (3.39) удовлетворяют условию согласованности, т.е. переходят в строгие равенства в случае (3.35). Они переходят в строгие равенства и в более общем случае, когда элементы ЛО упорядочены в виде

$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$ или $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n$.

Собрав вместе оценки (3.37), (3.39). получим такой результат.

Теорема 3.1. *Значение ЛО-столбца r-го ранга, содержащего n элементов, заключено в границах*

$$\bigvee_{\substack{i=1+k(n-r+1)\\ k=0,1,\dots,M_1-1}} (a_i a_{i+1} \dots a_{i+n-r}) \vee (a_r a_{r+1} \dots a_n) \leqslant \left|\begin{matrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{matrix}\right|^{(r)} \leqslant$$
$$\leqslant \bigwedge_{\substack{i=1+kr\\ k=0,1,\dots,M_2-1}} (a_i \vee a_{i+1} \vee \dots \vee a_{i+r-1}) \wedge$$
$$\wedge (a_{n-r+1} \vee a_{n-r+2} \vee \dots \vee a_n). \quad (3.40)$$

Сложность вычисления нижней и верхней оценок (3.40), измеряемая числом двухместных операций дизъюнкции и конъюнкции БЛ, равна

$$\begin{aligned} N_1 &= (n-r)(M_1+1) + M_1 =]\, n/(n-r+1) \{ (n-r+1) + n - r, \\ N_2 &= (r-1)(M_2+1) + M_2 =]\, n/r [\, r + r - 1. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Как видно из (3.41), суммарная сложность вычисления обеих оценок растет как $3n$ (линейно) с увеличением числа элементов n в ЛО. Напомним, что сложность точного вычисления ЛО-столбца по готовым формулам (2.26), (2.27) растет как n^r (см. (3.3)), а по методу дихотомического блочного разложения — как nr (см. (3.33)). Так что переход к приближенным оценкам позволяет существенно уменьшить сложность вычисления ЛО. Погрешность вычисления ЛО, обусловленную приближенным характером используемых оценок, легко контролировать — она равна разности между верхней и нижней оценками.

3.5. Приближенное вычисление общего бесконечного логического определителя

Для общего бесконечного ЛО A_q^r найдем сначала оценку снизу, используя точное выражение ЛО в ДНФ БЛ (2.29). Введем в рассмотрение среднее арифметическое значение d второго индекса элемента a_{ij} одной конъюнкции в (2.29). Так как в конъюнкции q элементов, а сумма их вторых индексов равна $q + r$ — 1, то

$$d = (q + r - 1)/q = 1 + (r - 1)/q. \quad (3.42)$$

Сохраним в выражении (2.29) одну конъюнкцию:

$a_{1]d[} a_{2]d[} \cdots a_{q-1,\,]d[} a_{qk}$, где k - неизвестный второй индекс, определяемый из условия, налагаемого на сумму вторых индексов:

$$]d[\, (q-1) + k = q + r - 1. \quad (3.43)$$

Тогда для оцениваемого ЛО $A^r{}_q$ получается неравенство

$A_q^r \geqslant a_{1]d[} a_{2]d[} \cdots \cdots a_{q-1,\,]d[} a_{qk}$. Но из (3.43) с учетом

неравенства $]d\,[q \leqslant dq = q + r - 1$ следует $k \geqslant\,]d[$. Отсюда, поскольку элементы в каждой строке ЛО упорядочены по величине, имеем $a_{qk} \geqslant a_{q\,]d[}$. Теперь в выписанном неравенстве для A_q^r можно заменить a_{qk} на $a_{q\,]d[}$, от этого неравенство лишь усилится.
В итоге получим оценку

$$A_q^r \equiv \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i_1} \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{q1} \dots a_{qi_q} \dots \end{vmatrix}^{(r)} \geqslant a_{1\,]d[}\,a_{2\,]d[} \dots a_{q\,]d[}. \tag{3.44}$$

Найдем оценку ЛО A_q^r сверху, используя для этого его точное выражение в КНФ БЛ (2.38). Введем среднее арифметическое значение *l* второго индекса элемента a_{ij} одной дизъюнкции в (2.38). Поскольку в дизъюнкции *q* элементов, а сумма их вторых индексов равна *r*, то

$$l = r/q. \tag{3.45}$$

Сохраним в выражении (2.38) одну дизъюнкцию: $a_{1[l]} \vee a_{2[l]} \vee \dots\dots \vee a_{q-1,[l]} \vee a_{qk}$. Здесь *[l]* означает округление *l* до ближайшего большего целого числа, а *k* - неизвестный второй индекс, определяемый из условия, налагаемого на сумму вторых индексов:

$$[l]\,(q - 1) + k = r. \tag{3.46}$$

В результате для оцениваемого ЛО A_q^r получим неравенство

$$A_q^r \leqslant a_{1[l]} \vee a_{2[l]} \vee \dots \vee a_{q-1,[l]} \vee a_{qk}.$$

Так как $[l]\,q \geqslant lq = r$, то из (3.46) имеем $k \leqslant [l]$. Отсюда, учитывая, что элементы в строке ЛО упорядочены по величине, находим $a_{qk} \leqslant a_{q[l]}$. Если теперь в выписанном неравенстве для A_q^r заменить a_{qk} на $a_{q[l]}$, то неравенство лишь усилится. Окончательно получим оценку

$$A_q^r \equiv \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i_1} \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{q1} \dots a_{qi_q} \dots \end{vmatrix}^{(r)} \leqslant a_{1[l]} \vee a_{2[l]} \vee \dots \vee a_{q[l]}. \tag{3.47}$$

Лемма 3.1. *Средние d и l связаны соотношением*

$$]d[\, = [l]. \tag{3.48}$$

Доказательство. Рассмотрим по отдельности три возможных случая, полагая $q \geqslant 2$: (1) r/q — целое; (2) $(r - 1)/q$ — целое; (3) *r/q* и *(r — l)/q* - дробные. В случае (1)

$$[l] = [r/q] = r/q,$$

$$]d[\, = 1 +](r - 1)/q[\, = 1 +]r/q - 1/q[\, = 1 + r/q - 1 = r/q,$$

так что (3.48) справедливо. В случае (2)

$$]d[\, = 1 +](r - 1)/q[\, = 1 + (r - 1)/q,$$

$$[l] = [r/q] = [(r - 1)/q + 1/q] = (r - 1)/q + 1,$$

так что (3.48) тоже справедливо. В случае (3) $r/q = k + \alpha$, где *k* — целое и $1 > \alpha \geqslant 1/q$. Поэтому

$$[l] = [r/q] = [k + \alpha] = k + 1,$$

$$]d[\, = 1 +](r - 1)/q[\, = 1 +]r/q - 1/q[\, = 1 +]k + \alpha - 1/q[\, = 1 + k,$$

и (3.48) снова справедливо. Заметим, чго в общем случае *d ≠l.*

Теорема 3.2. *Значение общего бесконечного ЛО q-го порядка r-го ранга заключено в симметричных границах:*

$$a_{1[l]}a_{2[l]} \dots a_{q[l]} \leqslant \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i_1} \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{q1} \dots a_{qi_q} \dots \end{vmatrix}^{(r)} \leqslant \tag{3.49}$$

$$\leqslant a_{1[l]} \vee a_{2[l]} \vee \dots \vee a_{q[l]},$$

где $l = r/q$.

Доказательство получается соединением оценок (3.44), (3.47) и с учетом (3.48).

Для вырожденного ЛО в силу (3.34) $a_{1[l]} = a_{2[l]} = \dots = a_{q[l]}$, и потому нижняя и верхняя оценки (3.49) совпадают, давая точное значение ЛО, т.е. найденные оценки удовлетворяют условию согласованности. Сложность вычисления этих оценок растет как *q* - 1 (линейно) с увеличением порядка ЛО *q*. В то же время сложность точного вычисления общего бесконечного ЛО по формулам (2.29), (2.38) растет как q^r (выражение (3.8)), по методу дихотомического блочного разложения - как qr^2 (выражение (3.18)). Таким образом, и здесь переход к приближенным оценкам позволяет резко уменьшать сложность вычисления ЛО.

3.6. Приближенное вычисление общего конечного логического определителя

Общий конечный ЛО можно расширить до бесконечного (см, § 2.4):

$$A_q^r \equiv \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m_1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{q1} \dots a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m_1} & a & a \dots \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{q1} \dots a_{qm_q} & a & a \dots \end{vmatrix}^{(r)}, \text{ где } a = \bigvee_{i=1}^{q} a_{im_i}. \tag{3.50}$$

Согласно (3.50) для оценивания конечного ЛО можно использовать неравенства (3.49). Однако так как $1 \leqslant r \leqslant \sum_{i=1}^{q} m_i$, то величина [*l*] из

(3.49) находится в интервале $[1, m_{cp}]$, где $m_{cp} = \sum_{i=1}^{q} m_i/q$. Значит, при $m_1 \neq m_2 \neq \ldots \neq m_q$, когда существуют как $m_i < m_{cp}$, так и $m_i > m_{cp}$, есть конечные ЛО A_q^r таких рангов *r*, что соответствующее значение $[l]$ превышает некоторое m_k. Согласно (3.50) это означает, что элемент $a_{k[l]}$ *k-й* строки ЛО, фигурирующий в оценках (3.49), равен элементу $a = \bigvee_{i=1}^{q} a_{im_i}$ нового, расширенного ЛО. Численно *a* равен максимальному элементу исходного ЛО. Поэтому оценки (3.49) преобразуются к виду

$$a_{1[l]} \ldots a_{k-1,[l]} a_{k+1,[l]} \ldots a_{q[l]} \leqslant A_q^r \leqslant a. \quad (3.51)$$

Но факт $A_q^r \leqslant a$ в (3.51) следует непосредственно из определения ЛО. Видим, что верхняя оценка (3.49) в применении к общему конечному ЛО с неравными m_i $(i = 1, \ldots, q)$ может оказаться тривиальной и малополезной.

Теорема 3.3. *Значение общего конечного ЛО q-го порядка т-го ранга с равными длинами строк т заключено в следующих симметричных границах:*

$$a_{1[l]} a_{2[l]} \ldots a_{q[l]} \leqslant \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1} \ldots a_{qm} \end{vmatrix}^{(r)} \leqslant a_{1[l]} \vee a_{2[l]} \vee \ldots \vee a_{q[l]}, \quad (3.52)$$

где $l = r/q$.

Доказательство. Для конечного ЛО с $m_1 = \ldots = m_q = m$ все m_i равны m_{cp}. Поэтому всегда $[l] \leq m$ и по (3.50) все элементы $a_{k[l]}$ *(k* = 1,..., *n)* из оценок (3.49) — это элементы исходного (нерасширенного) ЛО. Таким образом, в этом случае оценки (3.49) бесконечного ЛО сохраняют свой вид и для конечного ЛО.

Рассмотрим общий случай конечного ЛО A_q^r, с произвольными соотношениями m_i $(i = 1, \ldots, q)$. Найдем оценку A_q^r сверху, используя точное выражение ЛО в КНФ БЛ (2.39). Действуем по аналогии со случаем бесконечного ЛО. Введем усредненное взвешенное значение l_p второго индекса i_p элемента a_{pi_p} одной дизъюнкции в (.2.39). Это значит, что сумма вторых индексов i_p элементов одной дизъюнкции, равная *r,* теперь распределится между *q* индексами не поровну, как в (3.45), а пропорционально их весам k_p, удовлетворяющим условию $\sum_{p=1}^{q} k_p = 1$. Выбрав веса по формуле $k_p = m_p / \sum_{i=1}^{q} m_i$, получим

$$l_p = r\left(m_p / \sum_{i=1}^{q} m_i\right), \quad p = 1, \ldots, q. \quad (3.53)$$

Из (3.53) с учетом $r \leqslant \sum_{i=1}^{q} m_i$ следует

$$\sum_{p=1}^{q} l_p = r, \quad l_p \leqslant m_p, \quad p = 1, \ldots, q, \quad (3.54)$$

так что новые индексы l_p $(p = 1, \ldots, q)$ в сумме по-прежнему дают *r,* однако уже не превосходят соответствующих m_p. Сохраним в выражении (2.39) лишь дизъюнкцию $a_{1[l_1]} \vee a_{2[l_2]} \vee \ldots \vee a_{q-1,[l_{q-1}]} \vee a_{qk}$. Здесь *k* — неизвестный индекс, определяемый условием, налагаемым на сумму всех вторых индексов:

$$\sum_{p=1}^{q-1} [l_p] + k = r. \quad (3.55)$$

Тогда для оцениваемого ЛО A_q^r получим неравенство $A_q^r \leqslant a_{1[l_1]} \vee \vee a_{2[l_2]} \vee \ldots \vee a_{q-1,[l_{q-1}]} \vee a_{qk}$.

Поскольку $\sum_{p=1}^{q-1} [l_p] \geqslant \sum_{p=1}^{q-1} l_p = r \sum_{p=1}^{q-1} m_p / \sum_{p=1}^{q} m_p$, то из (3.55) следует $k \leqslant r - r \sum_{p=1}^{q-1} m_p / \sum_{p=1}^{q} m_p = rm_q / \sum_{p=1}^{q} m_p = l_q \leqslant [l_q]$. Отсюда $a_{qk} \leqslant a_{q[l_q]}$, так что, заменив в выписанном неравенстве для A_q^r элемент a_{qk} на $a_{q[l_q]}$, получим оценку

$$A_q^r \equiv \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1m_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1} \ldots a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} \leqslant a_{1[l_1]} \vee a_{2[l_2]} \vee \ldots \vee a_{q[l_q]}, \quad . \quad (3.56)$$

где l_p из (3.53).

Найдем оценку ЛО A_q^r снизу, используя точное выражение определителя в ДНФ БЛ (2.30). Введем среднее взвешенное значение d_p второго индекса i_p элемента a_{pi_p} одной конъюнкции. Так как сумма вторых индексов всех элементов конъюнкции равна *q* + *r* — 1, то, сохраняя те же, что и в (3.53), весовые коэффициенты (чтобы обеспечить симметричность верхней и нижней оценок), найдем

$$d_p = (q + r - 1)\left(m_p / \sum_{i=1}^{q} m_i\right), \quad \text{где} \quad \sum_{p=1}^{q} d_p = q + r - 1. \quad (3.57)$$

Сохраним в выражении (2.30) одну конъюнкцию $a_1]d_1[a_2]d_2[\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot a_{q-1,}]d_{q-1}[a_{qk},$ где k — неизвестный индекс, определяемый условием, налагаемым на сумму вторых индексов:

$$\sum_{p=1}^{q-1}]d_p[+k=q+r-1. \quad (3.58)$$

Тогда для оцениваемого ЛО получим неравенство

$A_q^r \geqslant \overset{m_1}{\overline{a_1]d_1[}}\overset{m_2}{\overline{a_2]d_2[}}\cdots\cdot\overset{m_{q-1}}{\overline{a_{q-1,}]d_{q-1}[}}\overset{m_q}{\overline{a_{qk}}}.$ Так как

$\sum_{p=1}^{q-1}]d_p[\leqslant\sum_{p=1}^{q-1}d_p=(q+r-1)\sum_{p=1}^{q-1}m_p/\sum_{p=1}^{q}m_p,$

то из (3.58) следует

$$k\geqslant(q+r-1)-(q+r-1)\sum_{p=1}^{q-1}m_p/\sum_{p=1}^{q}m_p=(q+r-1)\,m_q/\sum_{p=1}^{q}m_p=$$

$$=d_q\geqslant]d_q[.$$

Отсюда $a_{qk}\geqslant a_q]d_q[$, и после замены a_{qk} на $a_q]d_q[$ в записанном неравенстве для A_q^r получим оценку

$$A_q^r\equiv\begin{vmatrix}a_{11}\ldots a_{1m_1}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{q1}\ldots a_{qm_q}\end{vmatrix}^{(r)}\geqslant\overset{m_1}{\overline{a_1]d_1[}}\overset{m_2}{\overline{a_2]d_2[}}\cdots\overset{m_q}{\overline{a_q]d_q[}}. \quad (3.59)$$

Теорема 3.4. *Значение общего конечного ЛО q-го порядка r-го ранга ограничено следующими симметричными границами:*

$$\overset{m_1}{\overline{a_1]d_1[}}\overset{m_2}{\overline{a_2]d_2[}}\cdots\overset{m_q}{\overline{a_q]d_q[}}\leqslant\begin{vmatrix}a_{11}\ldots a_{1m_1}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{q1}\ldots a_{qm_q}\end{vmatrix}^{(r)}\leqslant \quad (3.60)$$

$$\leqslant a_{1[l_1]}\vee a_{2[l_2]}\vee\ldots\vee a_{q[l_q]},$$

где

$$l_p=rm_p/\sum_{i=1}^{q}m_i,\quad d_p=(q+r-1)\,m_p/\sum_{i=1}^{q}m_i.$$

Доказательство получается соединением оценок (3.56), (3.59). Для определителя с равными длинами строк $m_1=m_2=\ldots=m_q=m$ имеем $l_1=l_2=\ldots=l_q=l=r/q,$ $d_1=d_2=\ldots=d_a=d=(q+r-1)/q,$ причем в силу $r\leq mq$ справедливо $]d[\leqslant](q+mq-1)/q[=]1+m-1/q[=m,$ так что символы $\underline{m}_k$ в (3.60) можно опустить. Учитывая еще (3.48), видим, что для названного ЛО оценки (3.60) переходят в полученные ранее оценки (3.52).

Вырожденный конечный ЛО — это частный случай ЛО с равными длинами строк, в котором в силу (3.34) $a_{1[l]}=a_{2[l]}=\ldots=a_{q[l]},$ так что нижняя и верхняя оценки (3.52) совпадают, давая точное значение ЛО. Таким образом, полученные оценки (3.52), (3.60) удовлетворяют условию согласованности.

Сложность вычисления найденных оценок растет как q — 1.

Сложность точного вычисления общего конечного ЛО по формулам (2.30), (2.39) растет как q^r (см. (3.8)), а по методу дихотомического блочного разложения - как qr^2 (при $r\leq m$) или mqr (при $r>m$) (см. (3.31)). Опять видим резкое уменьшение сложности вычисления ЛО при переходе к приближенным оценкам.

Пример 3.1. Оценить ЛО

$$A_3^{13}=\begin{vmatrix}1&2&3&3&7&8&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\5&5&5&6&6&6&6&7&7&8&8&8&8&9&9\\2&5&6&7&7&7&7&7&8&8&8&9&9&9&9\end{vmatrix}^{(13)}.$$

Так как длины строк одинаковы (m = 15), то используем оценки (3.52). Здесь $[l]=[13/3]=5,\ a_{15}=7, a_{25}=6, a_{35}=7,$ так что

$a_{15}\wedge a_{25}\wedge a_{35}\leqslant A_3^{13}\leqslant a_{15}\vee a_{25}\vee a_{35},$

или $6\leqslant A_3^{13}\leqslant 7.$ Применение к данному примеру наиболее экономного из точных методов — блочной дихотомии потребовало бы выполнения $qr^2=3\cdot13^2=507$ операций.

3.7. Вычисление семейств логических определителей

На практике часто необходимо вычислить не один ЛО, а целое семейство ЛО $A_q^r,\ r=1,\ldots,n,$ где n — число элементов ЛО. Использование для этого даже наименее трудоемкого из точных методов — метода последовательных блочных разложений — приводит к суммарной сложности вычислений порядка n^3 (см. (3.31), (3.32)), что не всегда приемлемо. Применение же приближенного метода здесь не проходит, так как при этом можно получить одинаковые границы для группы ЛО с несколькими последовательными значениями ранга r. Выходом из положения во многих случаях оказывается использование для вычислений усеченных поэлементных разложений ЛО. Эти разложения отличаются от полных поэлементных разложений (§2.8 — 2.10) тем, что содержат фиксированное, не зависящее от n число конъюнкций элементов с их логическими дополнениями. Мы рассмотрим усеченное разложение только ЛО-столбца.

Теорема 3.5. *ЛО-столбец r-го ранга с n+ 1 элементами*

$$A_{n+1}^{r} = \left| \begin{matrix} a_1 \\ \dots \\ a_{n+1} \end{matrix} \right|^{(r)}$$

можно выразить через ЛО-столбцы с n элементами $A_n^r = \left| \begin{matrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{matrix} \right|^{(r)'}$ *в виде*

$$A_{n+1}^{r} = \begin{cases} a_{n+1}A_n^1, & r = 1, \\ a_{n+1}A_n^r \vee A_n^{r-1}, & r = 2, \dots, n, \\ a_{n+1} \vee A_n^{r-1}, & r = n + 1. \end{cases} \qquad (3.61а)\ (3.61б)\ (3.61в)$$

Доказательство. Обозначим $a^{(r)}(n)$ r-й порядковый элемент $a^{(r)}$ множества $A_n = \{ a_1, \dots, a_n \}$ из n элементов. По определению ЛО $a^{(r)}(n) = A_n^r$. Поэтому формулы (3.61) можно трактовать в терминах порядковых элементов $a^{(r)}(n)$, $a^{(r)}(n+1)$ множеств A_n и $A_{n+1} = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$. Запишем с помощью многоместной конъюнкции БЛ

$$a^{(1)}(n+1) = a_1 a_2 \dots a_{n+1} = (a_1 a_2 \dots a_n)a_{n+1} = a^{(1)}(n)a_{n+1}.$$

Это доказывает формулу (3.61а). Аналогично с использованием многоместной дизъюнкции БЛ имеем

$$a^{(n+1)}(n+1) = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_{n+1} =$$

$$= (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n) \vee a_{n+1} = a^{(n)}(n) \vee a_{n+1},$$

что доказывает формулу (3.61в).

Докажем формулу (3.61б). То, какой из элементов множества A_{n+1} окажется в нем r-м $(r = 2, 3, \dots, n)$ порядковым элементом $a^{(r)}(n+1)$, зависит от положения дополнительного элемента a_{n+1}, введение которого в множество A_n превращает его в множество A_{n+1}. Если a_{n+1} больше элемента $a^{(r)}(n)$, то $a^{(r)}(n+1)$ совпадает с $a^{(r)}(n)$. Если a_{n+1} заключено между $a^{(r-1)}(n)$ и $a^{(r)}(n)$, то $a^{(r)}(n+1)$ совпадает с a_{n+1}. Наконец, если a_{n+1} меньше $a^{(r-1)}(n)$, то $a^{(r)}(n+1)$ совпадает с $a^{(r-1)}(n)$. Таким образом,

$$a^{(r)}(n+1) = \begin{cases} a^{(r)}(n), & \text{если} \quad a_{n+1} \geqslant a^{(r)}(n), \\ a_{n+1}, & \text{если} \quad a^{(r-1)}(n) \leqslant a_{n+1} < a^{(r)}(n), \\ a^{(r-1)}(n), & \text{если} \quad a_{n+1} < a^{(r-1)}(n). \end{cases} \qquad (3.62)$$

Первые две строки выражения (3.62) можно объединить в одну, используя конъюнкцию БЛ:

$$a^{(r)}(n+1) = \begin{cases} a^{(r)}a_{n+1}, & \text{если} \quad a_{n+1} \geqslant a^{(r-1)}(n). \\ a^{(r-1)}(n), & \text{если} \quad a_{n+1} < a^{(r-1)}(n). \end{cases} \qquad (3.63)$$

Условие первой строки в (3.63) эквивалентно следующему:

$$\{a_{n+1} \geqslant a^{(r-1)}(n)\} \rightleftarrows \{a^{(r)}(n)a_{n+1} \geqslant a^{(r-1)}(n)\}. \qquad (3.64)$$

Действительно, из левого условия (3.64) следует правое, так как по определению $a^{(r)}(n) \geqslant a^{(r-1)}(n)$. С другой стороны, из правого условия следует левое, так как первое, рассматриваемое как неравенство, имеет решение (см. гл. 1) :

$a_{n+1} \geqslant a^{(r)}(n) \geqslant a^{(r-1)}(n)$ или $a^{(r)}(n) > a_{n+1} \geqslant a^{(r-1)}(n)$.

Условие второй строки в (3.63) тоже эквивалентно другому

$$\{a_{n+1} < a^{(r-1)}(n)\} \rightleftarrows \{a^{(r)}(n)a_{n+1} < a^{(r-1)}(n)\}. \qquad (3.65)$$

В самом деле, из левого условия (3.65) следует правое, так как по определению конъюнкции БЛ $a^{(r)}(n)a_{n+1} \leqslant a_{n+1}$. Из правого условия следует левое, поскольку правое есть неравенство, имеющее единственное решение $a_{n+1} \leqslant a^{(r)}(n)$, $a^{(r-1)}(n)$ (второе формальное решение $a_{n+1} > a^{(r)}(n) < a^{(r-1)}(n)$ противоречит определению $a^{(r)}(n)$). Заменим условия в формуле (3.63) эквивалентными им согласно (3.64) и (3.65) и получим

$$a^{(r)}(n+1) = \begin{cases} a^{(r)}(n)a_{n+1}, & \text{если} \quad a^{(r)}(n)a_{n+1} \geqslant a^{(r-1)}(n), \\ a^{(r-1)}(n), & \text{если} \quad a^{(r)}(n)a_{n+1} < a^{(r-1)}(n). \end{cases} \qquad (3.66)$$

Обе строки в (3.66) объединим в одну, используя дизъюнкцию БЛ:

$$a^{(r)}(n+1) = a^{(r)}(n)a_{n+1} \vee a^{(r-1)}(n). \qquad (3.67)$$

Полученное выражение есть записанная в других обозначениях формула (3.61 б), что завершает доказательство теоремы.

Формулы (3.61) позволяют вычислять ЛО A_n^r итерацией по числу элементов n. Такая процедура вычислений особенно эффективна, когда, помимо отыскания ЛО A_n^r, $r = 1, \dots, n$, для множества A_n требуется находить ЛО для некоторых подмножеств множества A_n.

Оценим сложность $N(n)$ вычисления семейства ЛО-столбцов $\{A_n^1, \dots, A_n^n\}$ с n элементами при помощи разложения (3.61). Допустим, что указанное семейство уже вычислено, и на его основе требуется вычислить новое семейство $\{A_{n+1}^1, \dots, A_{n+1}^{n+1}\}$. Как видно из (3.61), для этого придется выполнить одну операцию БЛ (двухместную конъюнкцию) для вычисления ЛО A_{n+1}^1, одну операцию БЛ (двухместную дизъюнкцию) для вычисления ЛО A_{n+1}^{n+1} и по две операции БЛ (конъюнкция и дизъюнкция) для вычисления каждого из ЛО $A^2_{n+1}, A^3_{n+1}, \ldots, A^n_{n+1}$. Общее число выполненных операций $1+1+2(n-1) = 2n$. Таким образом, искомая функция сложности *N(n)* удовлетворяет разностному уравнению

$$N(n+1) = N(n) + 2n. \quad (3.68)$$

Положим в (3.68) *n* равными последовательно 1, 2,...,*n* —1и просуммируем все полученные равенства:

$$N(2) - N(1) + N(3) - N(2) + \ldots + N(n) - N(n-1) = 2(1+2+3+\ldots+n-1).$$

После приведения подобных в левой и суммирования в правой частях найдем с учетом очевидного начального условия *N(1)* =0 (ЛО с одним элементом не надо вычислять)

$$N(n) = 0{,}5\,n(n-1). \quad (3.69)$$

Итак, сложность вычисления семейства ЛО-столбцов по разложению (3.61) растет как квадрат числа элементов ЛО, что во многих случаях приемлемо.

3.8. Вычисление логических определителей методом упорядочения

Дальнейшего снижения сложности вычисления ЛО достигаем, переходя к алгоритмам вычисления с запоминанием промежуточных результатов. Из этих алгоритмов наиболее известна процедура упорядочения, которая состоит в следующем. Пусть необходимо вычислить семейство ЛО-столбцов A^r_n, $r = 1, \ldots, n$, от заданного множества элементов $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Упорядочим множество A_n. В результате получим упорядоченное множество $A'_n = \{a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}\}$, $a^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant a^{(n)}$. Это множество и содержит искомое семейство ЛО-столбцов A^r_n, $r = 1, \ldots, n$. Именно

$$A^r_n = a^{(r)}, \quad r = 1, \ldots, n. \quad (3.70)$$

Для упорядочения множества A_n используем итеративный метод вставок. Он основан на том, что если множество A_n уже упорядочено, то для упорядочения нового множества $A_{n+1} = \{A_n, a_{n+1}\}$, полученного добавлением в A_n нового элемента a_{n+1}, достаточно вставить этот новый элемент в нужное место между элементами упорядоченного множества A_n. Это место находится так. Сначала a_{n+1} сравнивается с центральным элементом $a^{(n/2)}$ множества A_n. Этим устанавливается, в какой из двух половин A_n должен находиться a_{n+1}: если $a_{n+1} > a^{(n/2)}$, то во второй половине, если $a_{n+1} < a^{(n/2)}$, то в первой. Далее a_{n+1} сравнивается с центральным элементом

"подозрительной" половины и т.д. Сложность процедуры упорядочения составляет

$$N(n) = n \log_2 n \quad (3.71)$$

двухместных операций сравнения, что заметно меньше сложности всех других изложенных ранее процедур вычисления ЛО.

3.9. Вычисление асимптотики выражения (3.1)

Выведем оценки (3.3), (3.4). По формуле Стерлинга при больших ***n*** и фиксированных *r* получим

$$C_n^{r-1} = \frac{n}{(r-1)!\,(n-r+1)!} \approx \frac{n^n \sqrt{2\pi n}\, e^{n-r+1}}{(r-1)!\, e^n (n-r+1)^{n-r+1} \sqrt{2\pi(n-r+1)}} =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!\, e^{r-1}} \sqrt{\frac{n}{n-r+1}}\; \frac{(n-r+1)^{r-1}}{\left(\frac{n-r+1}{n}\right)^n}.$$

Но

$$\left(\frac{n-r+1}{n}\right)^n = \left\{\left[1 - \frac{1}{n/(r-1)}\right]^{n/(r-1)}\right\}^{r-1} \approx e^{-(r-1)},$$

так что

$$C_n^{r-1} \approx (1/(r-1)!)\sqrt{n/(n-r+1)}\,(n-r+1)^{r-1}. \quad (3.72)$$

Подставив выражение (3.72) в (3.1), придем к оценке (3.3). Далее при больших *n, r* и *n-r*.

$$(n-r+1)\,C_n^{r-1} = \frac{n!}{(r-1)!\;(n-r)!} \approx$$

$$\approx \frac{n^n \sqrt{2\pi n}\, e^{r-1} e^{n-r}}{e^n (r-1)^{r-1} \sqrt{2\pi(r-1)}\,(n-r)^{n-r} \sqrt{2\pi(n-r)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{e\sqrt{2\pi}}\; \frac{n^{r-0,5}\, n^{n-r+0,5}}{(r-1)^{r-0,5}\,(n-r)^{n-r+0,5}}.$$

Обозначив *s = n/r,* получим $(n/(r-1))^{r-0,5} \approx (n/r)^{r-0,5} = s^{r-0,5}$;
n = rs, так что
$(n/(n-r))^{n-r+0,5} = [rs/r(s-1)]^{n-r+0,5} = s^{n-r+0,5}/(s-1)^{n-r+0,5}$.
Таким образом,

$$(n-r+1)\,C_n^{r-1} \approx \frac{\sqrt{n}\, s^n}{e\sqrt{2\pi}\,(s-1)^{n-r+0,5}} = \frac{\sqrt{n}}{e\sqrt{2\pi}} \left(\frac{s}{s-1}\right)^{n-r+0,5} s^{n/s-0,5}$$

(3.73)

Подставив выражение (3.73) в (3.1), получим оценку (3.4).
Проблема сложности вычисления больших ЛО была сформулирована в связи с задачей поиска информации в больших массивах. Были приведены простейшие оценки сложности. Подробные оценки сложности вычисления ЛО по готовым формулам раскрытия и по формулам разложения были даны позднее при изучении динамики сложных цифровых автоматов. Эти оценки выявили случаи как приемлемости, так и неприемлемости по сложности точных методов вычисления ЛО, что сделало целесообразной разработку приближенных методов, а также специальных методов вычисления семейств ЛО.

4. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СУММЫ ЭЛЕМЕНТОВ

4.1. Вводные замечания

Порядковые логические определители (ЛО), введенные в гл. 2, не являются единственным классом блочных конструкций, предназначенных для упрощения анализа высокоразмерных нелинейных систем. Опыт изучения таких систем показывает, что рассмотрение каждого нового класса систем приводит обычно к необходимости введения нового класса ЛО, предназначенного для решения проблемы размерности именно в рассматриваемом случае.
В этой главе рассмотрен большой класс ЛО, которые вводятся как та или иная экстремальная характеристика прямоугольной матрицы, точнее, как максимальная (минимальная) из сумм элементов матрицы, удовлетворяющих некоторому ограничению. ЛО с ограничениями, в отличие от порядковых ЛО, выражаются через свои элементы при помощи двух типов операций. 1) дизъюнкции и конъюнкции БЛ;
2) алгебраического сложения. Рассматриваемые ЛО с ограничениями позволяют решать проблему размерности при изучении тех систем, все возможные варианты действия которых задаются прямоугольной матрицей, причем выбор какого-то одного варианта сводится к выбору одной из сумм элементов матрицы, удовлетворяющих заданному ограничению, а выбор наилучшего варианта - к отысканию максимальной (минимальной) из сумм.

4.2. Логические определители первого рода и их свойства

Рассмотрим произвольную прямоугольную матрицу

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1P} \\ \dots\dots\dots \\ a_{M1} \dots a_{MP} \end{matrix} \right\| \quad (4.1)$$

с числовыми элементами a_{ij}. Будем оперировать суммами элементов $\Sigma' a_{ij}$, удовлетворяющими ограничению каждая включает ровно по одному элементу из каждого столбца *A*. При этом из одной строки в сумму может включаться любое число элементов: 0, 1,..., *P*. Общее число различных сумм равно M^p. Обозначим *q*-ю сумму через $\Sigma'_q a_{ij}$ $(q = 1, \dots, M^P)$.

Определение 4.1. Будем называть ЛО с ограничениями первого рода для матрицы *A* выражения вида

$$\overset{1}{A}{}^{\vee} = \left| \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1P} \\ \dots\dots\dots \\ a_{M1} \dots a_{MP} \end{matrix} \right|^{\vee} = | a_{ij} |^{\vee} = \bigvee_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q a_{ij}, \quad \mathbf{(4.2)}$$

$$\overset{1}{A}{}^{\wedge} = \left| \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1P} \\ \dots\dots\dots \\ a_{M1} \dots a_{MP} \end{matrix} \right|^{\wedge} = | a_{ij} |^{\wedge} = \bigwedge_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q a_{ij}, \quad \mathbf{(4.3)}$$

т.е. дизъюнкцию (конъюнкцию) БЛ всех сумм элементов *A*, содержащих каждая ровно один элемент из каждого столбца *A*.
Любая матрица *A* всегда имеет непустое множество сумм $\{ \Sigma'_1 a_{ij}, \dots$ $\dots, \Sigma'_{MP} a \}$, а отсюда — и ЛО $\overset{1}{A}{}^{\vee}$ и $\overset{1}{A}{}^{\wedge}$.
Ниже изучается в основном дизъюнктивный ЛО (4.2). Однако, так как операции дизъюнкции и конъюнкции БЛ подчиняются одним и тем же законам (1.9) — (1.12), (1.14), все получаемые результаты верны и для конъюнктивного ЛО (4.3), если заменить в них операции $\vee$ на $\wedge$.
Свойства введенных ЛО определяются следующими предложениями.
Лемма 4.1. *Перестановка местами двух строк не меняет величины ЛО:*

$$\left| \begin{matrix} \dots\dots\dots \\ a_{i1} \dots a_{iP} \\ \dots\dots\dots \\ a_{k1} \dots a_{kP} \\ \dots\dots\dots \end{matrix} \right|^{\vee} = \left| \begin{matrix} \dots\dots\dots \\ a_{k1} \dots a_{kP} \\ \dots\dots\dots \\ a_{i1} \dots a_{iP} \\ \dots\dots\dots \end{matrix} \right|^{\vee}. \quad \mathbf{(4.4)}$$

Доказательство следует из того, что при указанной перестановке множество сумм $\{\Sigma'_q a_{ij}\}$, $q = 1, \ldots, M^P$, фигурирующее в определении ЛО (4.2), остается неизменным.

Лемма 4.2. *Перестановка местами двух столбцов не меняет величины ЛО:*

$$\begin{vmatrix} \cdots a_{1i} \cdots a_{1j} \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots a_{Mi} \cdots a_{Mj} \cdots \end{vmatrix}^{\vee} = \begin{vmatrix} \cdots a_{1j} \cdots a_{1i} \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots a_{Mj} \cdots a_{Mi} \cdots \end{vmatrix}^{\vee} \cdot \quad (4.5)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.1.

Лемма 4.3. *Общий для всех (положительных) элементов положительный множитель можно вынести за знак ЛО:*

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} \cdots \lambda a_{1P} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda a_{M1} \cdots \lambda a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1P} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{M1} \cdots a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee}; \ \lambda > 0; \ a_{ij} > 0 \ \ \forall i, j.$$

(4.6)

Доказательство. При $\lambda > 0$, $a_{ij} > 0$, учитывая распределительный закон (1.45), имеем

$$|\lambda a_{ij}|^{\vee} = \bigvee_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q \lambda a_{ij} =$$

$$= \bigvee_{q=1}^{M^P} \lambda \Sigma'_q a_{ij} = \lambda \bigvee_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q a_{i,j} = \lambda\, |a_{ij}|^{\vee}.$$

Лемма 4.4. *Общий для всех положительных элементов отрицателъный множитель можно вынести за знак ЛО, изменив тип ЛО ж противоположный* $(\overset{1}{A}{}^{\vee}$ *на* $\overset{1}{A}{}^{\wedge}$ *и* $\overset{1}{A}{}^{\wedge}$ *на* $\overset{1}{A}{}^{\vee})$:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} \cdots \lambda a_{1P} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda a_{M1} \cdots \lambda a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1P} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{M1} \cdots a_{MP} \end{vmatrix}^{\wedge}; \ \lambda < 0; \ a_{ij} > 0 \ \ \forall i, j.$$

(4.7)

Доказательство. При $\lambda < 0$, $a_{ij} > 0$, учитывая распределительный закон (1.48), получаем

$$|\lambda a_{ij}|^{\vee} = \bigvee_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q \lambda a_{ij} = \bigvee_{q=1}^{M^P} \lambda \Sigma'_q a_{ij} = \lambda \bigwedge_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q a_{ij} = \lambda\, |a_{ij}|^{\wedge}.$$

Лемма 4.5. *Знак минус, присутствующий во всех элементах ЛО, можно вынести за знак ЛО, изменив тип ЛО на противоположный:*

$$\begin{vmatrix} -a_{11} \cdots -a_{1P} \\ \cdots\cdots\cdots \\ -a_{M1} \cdots -a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee} = -\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1P} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{M1} \cdots a_{MP} \end{vmatrix}^{\wedge}; \ a_{ij} > 0 \ \ \forall i, j. \quad \mathbf{(4.8)}$$

Доказательство следует из (4.7) при λ = —1.

Лемма 4.6. *Общее для всех элементов слагаемое можно вынести за знак ЛО, предварительно умножив на число Р столбцов в нем:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a \cdots a_{1P} + a \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{M1} + a \cdots a_{MP} + a \end{vmatrix}^{\vee} = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1P} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{M1} \cdots a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee} + aP. \quad (4.9)$$

Доказательство. Имеем с учетом распределительного закона (1.37) и того, что в каждой сумме $\Sigma' a_{ij}$ присутствует ровно один элемент от каждого из *Р* столбцов ЛО:

$$|a_{ij} + a|^{\vee} = \bigvee_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q (a_{ij} + a) = \bigvee_{q=1}^{M^P} [(\Sigma'_q a_{ij}) + aP] =$$

$$= \bigvee_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q a_{ij} + aP = |a_{ij}|^{\vee} + aP.$$

Лемма 4.7. *Общее для всех элементов уменьшаемое можно вынести за знак ЛО, предварительно умножив на число столбцов Р в нем*; *при этом тип ЛО меняется на противоположный:*

$$\begin{vmatrix} a - a_{11} \cdots a - a_{1P} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a - a_{M1} \cdots a - a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee} = aP - \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1P} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{M1} \cdots a_{MP} \end{vmatrix}^{\wedge}. \quad (4.10)$$

Доказательство. Учитывая распределительный закон (1.39) и присутствие в каждой сумме $\Sigma' a_{ij}$ ровно одного элемента от каждого из *Р* столбцов ЛО, имеем

$$|a - a_{ij}|^{\vee} = \bigvee_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q (a - a_{ij}) = \bigvee_{q=1}^{M^P} (aP - \Sigma'_q a_{ij}) =$$

$$= aP - \bigwedge_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q a_{ij} = aP - |a_{ij}|^{\wedge}.$$

Лемма 4.8. *ЛО, все элементы которого равны, равен произведению элемента на число столбцов*

$$\begin{vmatrix} a & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a & \ldots & a \end{vmatrix}^{\vee} = aP. \quad (4.11)$$

Доказательство. На основании определения ЛО (4.2) при $a_{ij} = a \quad \forall\, i, j$ имеем $|a_{ij}|^{\vee} = \bigvee\limits_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q\, a_{ij} = \bigvee\limits_{q=1}^{M^P} aP = aP.$

Лемма 4.9. *ЛО, содержащий в качестве элемента бесконечность, сам равен бесконечности*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & & a_{1k} & \ldots & & a_{1P} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{r,\,k-1} & \infty & a_{r,\,k+1} & \ldots & a_{rP} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{M1} & \ldots & & a_{Mk} & \ldots & & {}^{u}{}_{MP} \end{vmatrix}^{\vee} = \sum_{j \neq k}{}' a_{ij} + a_{rk} = \infty.$$

(4.12)

Доказательство. Оно следует непосредственно из определения ЛО (4.2), ибо для каждого данного ЛО множество сумм $\Sigma' a_{ij}$ разбивается на два подмножества: 1) суммы, включающие от k-го столбца элемент $a_{rk} = \infty$ и потому равные ∞; 2) конечные по величине суммы, включающие из k-го столбца элемент, отличный от a_{rk}.

Для изложения последующих свойств ЛО используется разложимость ЛО по любому столбцу (4.13) и следующее

Определение 4.2. Пусть $\overset{1}{A}^{\vee}$ - произвольный M×P-ЛО (4.2). ЛО, полученный из $\overset{1}{A}^{\vee}$ вычеркиванием j-го (j = 1,..., P) столбца, называется логическим дополнением этого столбца и обозначается $\overset{1}{A}{}_j^{\vee}$.

Лемма 4.10. *ЛО со столбцом из равных элементов равен сумме этого элемента и логического дополнения столбца*

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1,j-1} a & a_{1,j+1} \ldots a_{1P} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{M1} \ldots a_{M,j-1} a & a_{M,j+1} \ldots a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee} =$$

$$= a + \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1,j-1} a_{1,j+1} \ldots a_{1P} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{M1} \ldots a_{M,j-1} a_{M,j+1} \ldots a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee}. \quad (4.13)$$

Доказательство формулы (4.13) следует из разложения (4.18), так как в данном случае $a_{kj} = a,\ k = 1, \ldots, M.$

Лемма 4.11. *Общее для всех элементов некоторого столбца слагаемое можно вынести за знак ЛО*

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1j} + a \ldots a_{1P} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{M1} \ldots a_{Mj} + a \ldots a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee} = a + \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1j} \ldots a_{1P} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{M1} \ldots a_{Mj} \ldots a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee}.$$

(4.14)

Доказательство. Согласно (4.18) левый ЛО в **(4.14)**

$$\overset{1}{A}^{\vee} = \bigvee_{k=1}^{M} (a_{kj} + a) + \overset{1}{A}{}_j^{\vee} = a + [(\bigvee_{k=1}^{M} a_{kj}) + \overset{1}{A}{}_j^{\vee}],$$

где $\overset{1}{A}{}_j^{\vee}$ - огическое дополнение j-го столбца левого и правого ЛО. Но квадратная скобка в полученном выражении - это ЛО правой части (4.14), разложенный по формуле (4.18).

Лемма 4.12. *Общий для всех положительных элементов некоторого j-го столбца положительный множитель λ можно вынести за знак ЛО в виде слагаемого* $(\lambda - 1) \bigvee\limits_{k=1}^{M} a_{kj}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots \lambda a_{1j} \ldots a_{1P} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{M1} \ldots \lambda a_{Mj} \ldots a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee} = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1j} \ldots a_{1P} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{M1} \ldots a_{Mj} \ldots a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee} + (\lambda - 1) \bigvee_{k=1}^{M} a_{kj};$$

$$\lambda > 0; \quad a_{ij} > 0 \quad \forall i, j.$$

(4.15)

Доказательство. Применив разложение (4.18) к левому ЛО в $\overset{1}{A}^{\vee}\ \lambda, a_{ij} > 0,$ и учитывая, что λ, $a_{ij}>0$, получаем

$$\overset{1}{A}^{\vee} = \bigvee_{k=1}^{M} \lambda a_{kj} + \overset{1}{A}{}_j^{\vee} = \lambda \bigvee_{k=1}^{M} a_{kj} + \overset{1}{A}{}_j^{\vee} =$$

$$= (\lambda - 1) \bigvee_{k=1}^{M} a_{kj} + [(\bigvee_{k=1}^{M} a_{kj}) + \overset{1}{A}{}_j^{\vee}].$$

Квадратная скобка в полученном выражении есть ЛО правой части (4.15), разложенный согласно (4.18).

Лемма 4.13. *Общий для всех положительных элементов некоторого j-го столбца отрицательный множитель λ можно вынести за знак ЛО в виде слагаемого* $\lambda \bigwedge\limits_{k=1}^{M} a_{kj} - \bigvee\limits_{k=1}^{M} a_{kj}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots \lambda a_{1j} \ldots a_{1P} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{M1} \ldots \lambda a_{Mj} \ldots a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee} = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1j} \ldots a_{1P} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{M1} \ldots a_{Mj} \ldots a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee} + \lambda \bigwedge_{k=1}^{M} a_{kj} - \bigvee_{k=1}^{M} a_{kj};$$

$$\lambda < 0; \quad a_{ij} > 0 \quad \forall i, j. \qquad (4.16)$$

Доказательство. Разложив левый ЛО $\overset{1}{A}^{\vee}$ (4.16) и учитывая, что $\lambda < 0,\ a_{ij} > 0,$ получим

$$\overset{1}{A}^{\vee} = \bigvee_{k=1}^{M} \lambda a_{kj} + \overset{1}{A}{}_{j}^{\vee} = \lambda \bigwedge_{k=1}^{M} a_{kj} + \overset{1}{A}{}_{j}^{\vee} =$$

$$= (\lambda \bigwedge_{k=1}^{M} a_{kj} - \bigvee_{k=1}^{M} a_{kj}) + [(\bigvee_{k=1}^{M} a_{kj}) + \overset{1}{A}{}_{j}^{\vee}].$$

Квадратная скобка полученного выражения - это ЛО правой части (4.16), разложенный по формуле (4.18).

Лемма 4.14 (сложение ЛО). *ЛО суммы двух M × P-матриц* $A = \| a_{ij} \|$ *и* $B = \| b_{ij} \|$ *не превосходит СУММЫ ЛО этих матриц:*

$$(A \overset{1}{+} B)^{\vee} \leqslant \overset{1}{A}^{\vee} + \overset{1}{B}^{\vee}. \qquad (4.17)$$

Доказательство. Согласно определению ЛО (4.2) имеем

$$(A \overset{1}{+} B)^{\vee} = \bigvee_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q (a_{ij} + b_{ij}) = \bigvee_{q=1}^{M^P} (\Sigma'_q a_{ij} + \Sigma'_q b_{ij}) \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q a_{ij} + \bigvee_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q b_{ij} = \overset{1}{A}^{\vee} + \overset{1}{B}^{\vee}.$$

4.3. Разложение логических определителей первого рода

ЛО с ограничениями первого рода, как и порядковые ЛО (§ 2.8 - 2.12), можно представить через ЛО меньших размеров. Начнем с примера.

Пример 4.1. Рассмотрим некоторый 2 × 3-ЛО и распишем его согласно (4.2):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}^{\vee} = (a_{11} + a_{12} + a_{13}) \vee (a_{11} + a_{12} + a_{23}) \vee$$

$$\vee (a_{11} + a_{22} + a_{13}) \vee (a_{11} + a_{22} + a_{23}) \vee (a_{21} + a_{22} + a_{23}) \vee (a_{21} + a_{22} + a_{13}) \vee$$
$$\vee (a_{21} + a_{12} + a_{23}) \vee (a_{21} + a_{12} + a_{13}).$$

В этом исходном выражении ЛО 23 элементарных операций $\vee$ и $+$. Воспользовавшись распределительным законом (1.37), вынесем из первых четырех скобок общее слагаемое a_{11}, а из следующих четырех скобок - общее слагаемое a_{21}:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}^{\vee} = \{ a_{11} + [(a_{12} + a_{13}) \vee (a_{12} + a_{23}) \vee (a_{22} + a_{13}) \vee$$

$$\vee (a_{22} + a_{23})]\} \vee \{ a_{21} + [(a_{22} + a_{23}) \vee (a_{22} + a_{13}) \vee (a_{12} + a_{23}) \vee$$

$$\vee (a_{12} + a_{13})]\}.$$

Обе квадратные скобки здесь равны и потому могут быть вынесены за знак фигурных скобок. Окончательное выражение для ЛО:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}^{\vee} = (a_{11} \vee a_{21}) +$$

$$+ [(a_{12} + a_{13}) \vee (a_{12} + a_{23}) \vee (a_{22} + a_{13}) \vee (a_{22} + a_{23})].$$

Оно содержит девять элементарных операций $\vee$ и $+$. Фигурные скобки здесь - это дизъюнкция всех элементов первого столбца ЛО, а квадратные скобки — это ЛО, полученный из исходного ЛО вычеркиванием первого столбца. Таким образом, можно записать:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}^{\vee} = (a_{11} \vee a_{21}) + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}^{\vee},$$

что является, очевидно, разложением ЛО по первому столбцу. Комбинируя скобки, из которых выносится общее слагаемое, по-другому, получим разложения ЛО по второму и третьему столбцам. Важность полученного в примере 4.1 разложения в том, что оно: 1 Понизило размерность ЛО с 2 × 3 до 2 × 2; 2) уменьшило число элементарных операций $\vee$ и $+$ в выражении ЛО (с 23 до 9) благодаря вынесению за скобки общих слагаемых. Оказывается, что такому разложению можно подвергнуть любой ЛО с ограничениями первого рода.

Теорема 4.1. *ЛО* $\overset{1}{A}^{\vee}$ *вида* (4.2) *можно разложить по любому j-му столбцу, представив его в виде суммы двух слагаемых: дизъюнкции БЛ всех элементов j-го столбца и логического дополнения j-го столбца:*

$$\overset{1}{A}^{\vee} = (\bigvee_{i=1}^{M} a_{kj}) + \overset{1}{A}{}_{j}^{\vee}, \qquad j = 1, \ldots, P. \qquad (4.18)$$

Доказательство. Обозначим $\Sigma'_q a_{is}$ q-ю $(q = 1, \ldots, M^{P-1})$ сумму вида $\Sigma' a_{is}$ для матрицы *A,* из которой вычеркнут *j*-й столбец. Тогда ЛО $\overset{1}{A}^{\vee}$ можно расписать в виде

$$\overset{1}{A}{}^{\vee} = \bigvee_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q a_{ij} = \underline{(a_{1j} + \sum_{s\neq j}{}'_1 a_{is})} \vee \underline{\underline{(a_{1j} + \sum_{s\neq j}{}'_2 a_{is})}} \vee \dots \vee \utilde{(a_{1j} + \sum_{s\neq j}{}'_{M^P-1} a_{is})} \vee$$

$$\vee \underline{(a_{2j} + \sum_{s\neq j}{}'_1 a_{is})} \vee \underline{\underline{(a_{2j} + \sum_{s\neq j}{}'_2 a_{is})}} \vee \dots \vee \utilde{(a_{2j} + \sum_{s\neq j}{}'_{M^{P-1}} a_{is})} \vee$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\vee \underline{(a_{Mj} + \sum_{s\neq j}{}'_1 a_{is})} \vee \underline{\underline{(a_{Mj} + \sum_{s\neq j}{}'_2 a_{is})}} \vee \dots \vee \utilde{(a_{Mj} + \sum_{s\neq j}{}'_{M^P-1} a_{is})}.$$

После вынесения за скобки общих слагаемых из одинаково подчеркнутых выражений получим

$$\overset{1}{A}{}^{\vee} = (\bigvee_{k=1}^{M} a_{kj} + \sum_{s\neq j}{}'_1 a_{is}) \vee (\bigvee_{k=1}^{M} a_{kj} + \sum_{s\neq j}{}'_2 a_{is}) \vee \dots \vee (\bigvee_{k=1}^{M} a_{kj} + \sum_{s\neq j}{}'_{M^P-1} a_{is}).$$

Вынося теперь за скобки общее слагаемое $\bigvee_{k=1}^{M} a_{kj}$, найдем

$$\overset{1}{A}{}^{\vee} = (\bigvee_{k=1}^{M} a_{kj}) + (\bigvee_{q=1}^{M^{P-1}} \sum_{s\neq j}{}'_q a_{is}). \quad \text{Но} \bigvee_{q=1}^{M^{P-1}} \sum_{s\neq j}{}'_q a_{is} = \overset{1}{A}{}^{\vee}_j.$$

Подставив последнее выражение в предыдущее, получим (4.18).
Разложение (4.18) можно рассматривать как некоторый принцип оптимальности, по которому максимальная сумма элементов вида $\Sigma' a_{ij}$ в M × P-матрице $A = \| a_{ij} \|$ равна сумме максимального элемента произвольного j-го столбца и максимальной суммы элементов вида $\Sigma' a_{is}$ в оставшейся M × (P - 1)-матрице, получаемой из матрицы A вычеркиванием j-го столбца.
Разложение ЛО по столбцу (4.18) можно обобщить.

Определение 4.3. Пусть *A*- произвольный *M* × *P*-ЛО вида (4.2) для матрицы *A* (4.1). ЛО, образованный столбцами $j_1, \dots, j_r$ ЛО $\overset{1}{A}{}^{\vee}$, называется *минором r-го порядка* и обозначается $A^{\vee}_{\{j_1 \dots j_r\}}$, а ЛО, полученный из $\overset{1}{A}{}^{\vee}$ вычеркиванием столбцов $j_1, \dots, j_r$, называется логическим дополнением указанных стобцов и обозначается $\overset{1}{A}{}^{\vee}_{j_1 \dots j_r}$.

Теорема 4.2. ЛО $\overset{1}{A}{}^{\vee}$ вида (4.2) можно разложить по любой совокупности столбцов $j_1, \dots, j_r$, представив в виде суммы двух слагаемых – минора из этих столбцов и их логического дополнения:

$$\overset{1}{A}{}^{\vee} = \overset{1}{A}{}^{\vee}_{\{j_1 \dots j_r\}} + \overset{1}{A}{}^{\vee}_{j_1 \dots j_r}. \quad (4.19)$$

Разложение по столбцу (4.18) — частный случай разложения (4.19) при $\{j_1, \dots, j_r\} = \{j\}$, когда $\overset{1}{A}{}^{\vee}_{\{j_1 \dots j_r\}} = \overset{1}{A}{}^{\vee}_{\{j\}} = \bigvee_{k=1}^{M} a_{kj}$, $\overset{1}{A}{}^{\vee}_{j_1 \dots j_r} = \overset{1}{A}{}^{\vee}_j$.

Доказательство. Обозначим ${}^1\Sigma'_q a_{ij}$ q-ю $(q = 1, 2, \dots, M^r)$ сумму вида $\Sigma' a_{ij}$ для матрицы, образованной столбцами $j_1, \dots, j_r$ исходной матрицы *A*; ${}^2\Sigma'_q a_{ij}$ q-ю $(q = 1, 2, \dots, M^{P-r})$ сумму вида $\Sigma' a_{ij}$ для матрицы, полученной из *A* вычеркиванием столбцов $j_1, \dots, j_r$.

Распишем ЛО $\overset{1}{A}{}^{\vee}$ в виде

$$\overset{1}{A}{}^{\vee} = \bigvee_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q a_{ij} = \underline{({}^1\Sigma'_1 a_{ij} + {}^2\Sigma'_1 \dot{a}_{ij})} \vee \underline{\underline{({}^1\Sigma'_1 a_{ij} + {}^2\Sigma'_2 a_{ij})}} \vee \dots$$

$$\dots \vee \utilde{({}^1\Sigma'_1 a_{ij} + {}^2\Sigma'_{M^{P-r}} a_{ij})} \vee$$

$$\vee \underline{({}^1\Sigma'_2 a_{ij} + {}^2\Sigma'_1 a_{ij})} \vee \underline{\underline{({}^1\Sigma'_2 a_{ij} + {}^2\Sigma'_2 a_{ij})}} \vee \dots \vee \utilde{({}^1\Sigma'_2 a_{ij} + {}^2\Sigma'_{M^{P-r}} a_{ij})} \vee$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\vee \underline{({}^1\Sigma'_{M^r} a_{ij} + {}^2\Sigma'_1 a_{ij})} \vee \underline{\underline{({}^1\Sigma'_{M^r} a_{ij} + {}^2\Sigma'_2 a_{ij})}} \vee \dots \vee \utilde{({}^1\Sigma'_{M^r} a_{ij} + {}^2\Sigma'_{M^{P-r}} a_{ij})}.$$

Вынося за скобки общие слагаемые в одинаково подчеркнутых выражениях, получим

$$\overset{1}{A}{}^{\vee} = [({}^2\Sigma'_1 a_{ij}) + (\bigvee_{q=1}^{M^r} {}^1\Sigma'_q a_{ij})] \vee [({}^2\Sigma'_2 a_{ij}) +$$

$$+ (\bigvee_{q=1}^{M^r} {}^1\Sigma'_q a_{ij})] \vee \dots \vee [({}^2\Sigma'_{M^{P-r}} a_{ij}) + (\bigvee_{q=1}^{M^r} {}^1\Sigma'_q a_{ij})].$$

Вынося теперь за скобки общее слагаемое $\bigvee_q {}^1\Sigma'_q a_{ij}$, найдем

$$\overset{1}{A}{}^{\vee} = (\bigvee_{q=1}^{M^r} {}^1\Sigma'_q a_{ij}) + (\bigvee_{q=1}^{M^{P-r}} {}^2\Sigma'_q a_{ij}).$$

Но

$$\bigvee_{q=1}^{M^r} {}^1\Sigma'_q a_{ij} = \overset{1}{A}{}^{\vee}_{\{j_1 \dots j_r\}}, \qquad \bigvee_{q=1}^{M^{P-r}} {}^2\Sigma'_q a_{ij} = \overset{1}{A}{}^{\vee}_{j_1 \dots j_r}.$$

Последние два выражения в совокупности дают (4.19).
Разложение ЛО по совокупности столбцов понижает размерность ЛО и уменьшает число элементарных операций в его выражении в еще большей степени, чем разложение ЛО по одному столбцу.
Разложение (4.19) можно рассматривать как принцип оптимальности, по которому максимальная сумма элементов вида $\Sigma' a_{ij}$ в M × P-матрице

$A = \| a_{ij} \|$ состоит из двух подсумм того же вида, из которых одна относится к подматрице, образованной произвольными r столбцами матрицы A, а вторая — к подматрице, образованной остальными $P—r$ стобцами.

4.4. Простейшее выражение логического определителя первого рода

Мы видели (§ 4.3), что разложение ЛО по столбцу (по совокупности столбцов) понижает размерность ЛО и уменьшает число элементарных операций в его выражении. Поэтому естественно ожидать, что, продолжив это разложение, в конце концов получим выражение ЛО через его элементы, содержащее минимальное число операций.
Воспользуемся разложением ЛО $\overset{1}{A}{}^{\vee}$ по столбцу (4.18). Разложим в нем логическое дополнение $\overset{1}{A}{}^{\vee}_{j}$, по некоторому r-му $(r \neq j)$ столбцу $\overset{1}{A}{}^{\vee}_{j} = (\bigvee_{k=1}^{M} a_{kr}) + \overset{1}{A}{}^{\vee}_{jr}$. Здесь $\overset{1}{A}{}^{\vee}_{jr}$ — ЛО, полученный из исходного ЛО $\overset{1}{A}{}^{\vee}$ вычеркиванием j-го и r-го столбцов, т.е. логическое дополнение этих столбцов. Далее разложим $\overset{1}{A}{}^{\vee}_{jr}$ и т.д. В итоге получим искомое выражение ЛО

$$\overset{1}{A}{}^{\vee} = \bigvee_{k=1}^{M} a_{k1} + \ldots + \bigvee_{k=1}^{M} a_{kP} = \sum_{j=1}^{P} \bigvee_{k=1}^{M} a_{kj}. \qquad (4.20)$$

Согласно выражению (4.20) ЛО $\overset{1}{A}{}^{\vee}$ равен просто сумме максимальных элементов всех своих стобцов. Сложность (число элементарных операций $\vee$ и $+$) выражения (4.20)

$$N = (M-1)P + P - 1 = MP - 1. \qquad (4.21)$$

Она пропорциональна размерам матрицы A и во много раз меньше сложности $M^P \times P - 1$ выражения ЛО согласно его определению (4.2). Из сравнения (4.2) и (4.20) видно, что

$$\bigvee_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q a_{ij} = \sum_{j=1}^{P} \bigvee_{i=1}^{M} a_{ij} = \overset{1}{A}{}^{\vee}, \qquad (4.22)$$

т.е. в данном случае операции $\vee$ и $+$ в некотором смысле коммутативны.

4.5. Логические определители второго рода и их свойства

Будем рассматривать $M \times P$-матрицу $A = \| a_{ij} \|$ (4.1) и все возможные ее суммы элементов $\Sigma'_q a_{ij}$, содержащие каждая ровно один элемент из каждого столбца A.
Однако теперь введем дополнительное ограничение: из произвольной i-й строки в сумму может входить лишь определенное число элементов p_i, ограниченное снизу и сверху согласно

$$b_i \leqslant p_i \leqslant c_i, \quad i = 1, \ldots, M, \quad \sum_{i=1}^{M} p_i = P. \qquad (4.23)$$

Суммы $\Sigma'_q a_{ij}$, удовлетворяющие дополнительным ограничениям (4.23), обозначим $\Sigma''_q a_{ij}$, а их число — R.

Определение 4.4. Будем называть ЛО с ограничениями второго рода для матрицы A выражения вида

$$\overset{2}{A}{}^{\vee} = \left| \begin{array}{c} a_{11} \ldots a_{1P} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{M1} \ldots a_{MP} \end{array} \right|^{\vee} \begin{array}{c} (b_1, c_1) \\ \ldots\ldots\ldots \\ (b_M, c_M) \end{array} = | a_{ij} |^{\vee}_{(b_i, c_i)} = \bigvee_{q=1}^{R} \Sigma''_q a_{ij}, \qquad (4.24)$$

.

$$\overset{2}{A}{}^{\wedge} = \left| \begin{array}{c} a_{11} \ldots a_{1P} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{M1} \ldots a_{MP} \end{array} \right|^{\wedge} \begin{array}{c} (b_1, c_1) \\ \ldots\ldots\ldots \\ (b_M, c_M) \end{array} = | a_{ij} |^{\wedge}_{(b_i, c_i)} = \bigwedge_{q=1}^{R} \Sigma''_q a_{ij}, \qquad (4.25)$$

т.е. дизъюнкцию (конъюнкцию) БЛ всех сумм элементов A, содержащих каждая ровно один элемент из каждого столбца A и p_i элементов из i-й строки A $(i = 1, \ldots, M)$, где p_i ограничены неравенствами (4.23).
По той же причине, что и в случае ограничений первого рода (4.2), ниже из двух типов ЛО изучается только ЛО (4.24). ЛО (4.24), (4.25) существуют не всегда, так как ограничения (4.23) могут быть такими, что для заданной матрицы $A = \| a_{ij} \|$ нет ни одной суммы вида $\Sigma''_q a_{ij}$.

Теорема 4.3. *Дая существования у* $M \times P$*-матрицы* $A = \| a_{ij} \|$ *ЛО вида* (4.24) *или* (4.25) *необходимо и достаточно, чтобы ограничения* (4.23) *удовлетворяли условию*

$$\sum_{i=1}^{M} c_i \geqslant P. \qquad (4.26)$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (4.26). Тогда область (4.23) не пуста, т.е. можно выбрать такие значения $\bar{p}_i$ параметров p_i в

(4.23), что $b_i \leqslant \bar{p}_i \leqslant c_i,\ i = 1, \ldots, M,$ и $\sum\limits_{i=1}^{M} \bar{p}_i = P.$ При этом можно образовать по крайней мере одну сумму элементов вида $\Sigma'' a_{ij}$ для заданной матрицы $A = \| a_{ij} \|,$ взяв из первой строки $\bar{p}_1$ элементов, расположенных в первых $\bar{p}_1$ столбцах, из второй строки $\bar{p}_2$ элементов, расположенных в следующих $\bar{p}_2$ столбцах,..., из *M*-й строки $\bar{p}_M$ элементов, расположенных в последних $\bar{p}_M$ столбцах. Следовательно, ЛО (4.24) как максимум (ЛО (4.20) как минимум) всех сумм вида $\Sigma'' a_{ij}$ существует. Допустим теперь, что условие (4.26) не выполнено. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{M} c_i < P,$ и потому область (4.23) пуста, т.е. нельзя подобрать такие значения $\bar{p}_i$ параметров p_i, чтобы $b_i \leqslant \bar{p}_i \leqslant c_i,\ i = 1, \ldots, M$ и $\sum\limits_{i=1}^{M} \bar{p}_i = P.$ Значит, для матрицы $A = \| a_{ij} \|$ нельзя образовать ни одной суммы элементов вида $\Sigma'' a_{ij}$ и ЛО (4.24), (4.25) не существуют.

ЛО с ограничениями второго рода обладают свойствами ЛО с ограничениями первого рода, содержащимися в леммах 4.2 — 4.8, что доказывается точно так же. Кроме того, они обладают двумя свойствами, уточняющими соответствующие свойства ЛО с ограничениями первого рода. Именно, свойство, выражаемое леммой 4.1, уточняется так.

Лемма 4.15. *Перестановка местами двух строк совместно с их ограничениями не меняет величины ЛО* (4.24), (4.25):

$$\left|\begin{array}{ccc} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{iP} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kP} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right|^{\vee} \begin{array}{c} \cdots \\ (b_i, c_i) \\ \cdots \\ (b_k, c_k) \\ \cdots \end{array} = \left|\begin{array}{ccc} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kP} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{iP} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right|^{\vee} \begin{array}{c} \cdots \\ (b_k, c_k) \\ \cdots \\ (b_i, c_i) \\ \cdots \end{array} \qquad (4.27)$$

Доказательство формулы (4.27) совпадает с доказательством формулы (4.4). Свойство, выражаемое леммой 4.9, уточняется таким образом.

Лемма 4.16. *ЛО* (4.24), *содержащий в качестве элемента некоторой i- й строки бесконечность, сам равен бесконечности, если область ограничений для i-й строки* (b_i, c_i) *не пуста.*

Доказательство повторяет ход доказательства леммы 4.9, но учитывает нижеследующее свойство, типичное только для ЛО с ограничениями второго рода.

Лемма 4.17. *Строка, область ограничений которой пуста, может быть вычеркнута без изменения величины ЛО* (4.24), (4.25):

$$\left|\begin{array}{ccc} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,P} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kP} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,P} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right|^{\vee} \begin{array}{c} \cdots \\ (c_{k-1}, b_{k-1}) \\ (c_k, b_k) \\ (c_{k+1}, b_{k+1}) \\ \cdots \end{array} = \left|\begin{array}{ccc} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,P} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,P} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right|^{\vee} \begin{array}{c} \cdots \\ (c_{k-1}, b_{k-1}) \\ (c_{k+1}, b_{k+1}) \\ \cdots \end{array} .$$

Доказательство следует из того, что по определению (4.24) в выражение левого ЛО (4.28) не входят элементы *k*-й строки.

4.6. Разложения логаческих определителей второго рода

Разложения ЛО с ограничениями второго рода на меньшие ЛО получаются аналогично соответствующим у ЛО с ограничениями первого рода.

Определение 4.5. Пусть $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ - произвольный *M* × *P*- ЛО (4.24). ЛО, полученный из $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ вычеркиванием *k*-го столбца и сдвигом области значений параметра p_r в (4.23) на единицу влево, называется логическим дополнением элемента a_{rk} в $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ и обозначается $\overset{2}{A}{}^{\vee}_{rk}$. Таким образом,

$$\overset{2}{A}{}^{\vee}_{rk} = \left|\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1P} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots a_{r,k-1} & a_{r,k+1} & \cdots & a_{rP} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{M1} & \cdots a_{M,k-1} & a_{M,k+1} & \cdots & a_{MP} \end{array}\right|^{\vee} \begin{array}{c} (b_1, c_1) \\ \cdots \\ (b_r \dot{-} 1, c_r \dot{-} 1) \\ \cdots \\ (b_M, c_M) \end{array} =$$

$$= \bigvee_{q} \sum\nolimits_{q}'' \ a_{ij}. \qquad (4.29)$$
$$\scriptstyle b_i \leqslant p_i \leqslant c_i \atop {i \neq r,\ j \neq k \atop b_r \dot{-} 1 \leqslant p_r \leqslant c_r \dot{-} 1}$$

Здесь $\dot{-}$ означает усеченную разность, т.е.

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x > y, \\ 0, & x \leqslant y, \end{cases}$$

используемую вместо обычной разности для того, чтобы область значений p_r не стала отрицательной.

Теорема 4.4. *ЛО* $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ *вида* (4.24) *можно разложить по любому j-му столбцу, представив его как дизъюнкцию БЛ сумм всех возможных элементов этого столбца и их логических дополнений*

$$\overset{2}{A}{}^{\vee} = \bigvee_{i=1}^{M} (a_{ij} + \overset{2}{A}{}^{\vee}_{ij}), \quad j = 1, \ldots, P. \qquad (4.30)$$

Доказательство. Распишем ЛО $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ в виде

$$\overset{2}{A}{}^{\vee} = \bigvee_{q} \sum\nolimits''_{q\, \substack{b_i \leq p_i \leq c_i \\ i=1,\dots,M}} a_{is} = [\bigvee_{q} (a_{1j} + \sum\nolimits''_{q\, \substack{b_i \leq p_i \leq c_i \\ i \neq 1,\ s \neq j \\ b_1 \mp 1 \leq p_1 \leq c_1 \mp 1}} a_{is})] \vee \dots$$

$$\dots \vee [\vee (a_{Mj} + \sum\nolimits''_{q\, \substack{b_i \leq p_i \leq c_i \\ i \neq M,\ s \neq j \\ b_M \mp 1 \leq p_M \leq c_M \mp 1}} a_{is})].$$

Вынесем за знаки $\bigvee_{q}$ не зависящие от q слагаемые

$$A^{\vee} = (a_{1j} + \bigvee_{q} \sum\nolimits''_{q\, \substack{b_i \leq p_i \leq c_i \\ i \neq 1,\ s \neq j \\ b_1 \mp 1 \leq p_1 \leq c_1 \mp 1}} a_{is}) \vee \dots \vee (a_{Mj} + \bigvee_{q} \sum\nolimits''_{q\, \substack{b_i \leq p_i \leq c_i \\ i \neq M,\ s \neq j \\ b_M - 1 \leq p_M \leq c_M \mp 1}} a_{is}).$$

Сравнив вторые слагаемые скобок с выражением (4.29), получим (4.30).

Разложение ЛО по столбцу (4.30) можно обобщить. Пусть $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ - произвольный $M \times$ Р-ЛО (4.24) для матрицы $A = \| a_{ij} \|$ (4.1). Рассмотрим подматрицы B_r и $\overline{B}_r$ матрицы A, образованные множеством $B_r = \{ j_1, \dots, j_r \}$ из r произвольных столбцов A и дополнительным множеством $\overline{B}_r$ из P—r остальных столбцов. Определение (4.24) ЛО $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ матрицы A включает ограничения (4.23) на числа элементов из различных строк A. Отсюда - ограничения на числа элементов из различных строк подматриц B_r и $\overline{B}_r$. Пусть $\tilde{p}_i,\ i = 1, \dots, M,$ - число элементов i-й строки B_r, включаемых в выражение ЛО $\overset{2}{A}{}^{\vee}$(4.24), а $\hat{p}_i,\ i = 1, \dots, M,$ - аналогичное число для $\overline{B}_r$. Ясно, что

$$\tilde{p}_i + \hat{p}_i = p_i, \quad i = 1, \dots, M, \tag{4.31}$$

где p_i, $i = 1, \dots, M$, - число элементов i-й строки всей матрицы A, включаемых в выражение ЛО $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ (4.24). При задании ЛО $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ вектор ограничений $p = (\bar{p}_1, \dots, p_M)$ по матрице A фиксируется согласно (4.23).

Поэтому, выбрав некоторую допустимую область U_k $(k = 1, \dots, Q)$ для вектора ограничений $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_M)$ по подматрице B_r, тем самым в силу (4.31) устанавливаем соответствующую допустимую

область V_k для вектора ограничений $\hat{p} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_M)$ по дополнительной подматрице $\overline{B}_r$.

Определение 4.6. Пусть $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ - произвольный $M \times P$- ЛО (4.24). Тогда ЛО, образованный множеством столбцов $B_r = \{ j_1, \dots, j_r \}$ ЛО $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ при ограничениях на числа элементов из различных строк B_r в виде $\tilde{p} \in U_k$, $k = 1, \dots, Q$, т.е. выражение

$$\overset{2}{A}{}^{\vee}_{\{B_r\},\, U_k} = \bigvee_{q} \sum\nolimits''^{M}_{q\, \substack{i=1 \\ j \in B_r,\ \tilde{p} \in U_k}} a_{ij}, \tag{4.32}$$

называется *минором r-го порядка,* соответствующим множеству столбцов B_r исходного ЛО $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ и ограничению $\tilde{p} \in U_k$. Тогда также ЛО, полученный из $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ вычеркиванием множества столбцов B_r и заданием ограничений на числа элементов из различных строк оставшейся подматрицы $\overline{B}_r$ в виде $\tilde{p} \in V_k,\ k = 1, \dots, Q$, т.е. выражение

$$\overset{2}{A}{}^{\vee}_{B_r,\, V_k} = \bigvee_{s} \sum\nolimits''^{M}_{s\, \substack{i=1 \\ j \in B_r \\ \hat{p} \in V_k}} a_{ij}, \tag{4.33}$$

называется *логическим дополнением минора* $\overset{2}{A}{}^{\vee}_{\{B_r\} U_k}$ в $\overset{2}{A}{}^{\vee}$.

Теорема 4.5. *Произвольный ЛО* $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ (4.24) *можно разложить по любой совокупности столбцов* $B_r = \{ j_1, \dots, j_r \}$, *представив его в виде дизъюнкции БЛ сумм всех возможных для данного* B_r *миноров и их логических дополнений*

$$\overset{2}{A}{}^{\vee} = \bigvee_{k=1}^{Q} (\overset{2}{A}{}^{\vee}_{\{B_r\},\, U_k} + \overset{2}{A}{}^{\vee}_{B_r,\, V_k}). \tag{4.34}$$

Доказательство. Используя введенные обозначения, распишем ЛО $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ в виде

$$\overset{2}{A}{}^{\vee} = \bigvee_{q=1}^{R} \sum\nolimits''_{q} a_{ij} =$$

$$= \bigvee_{q} \bigvee_{s} (\sum\nolimits''^{M}_{q\, \substack{i=1 \\ j \in B_r \\ \tilde{p} \in U_1}} a_{ij} + \sum\nolimits''^{M}_{s\, \substack{i=1 \\ j \notin B_r \\ \hat{p} \in V_1}} a_{ij}) \vee \dots \bigvee_{q} \bigvee_{s} (\sum\nolimits''^{M}_{q\, \substack{i=1 \\ j \in B_r \\ \tilde{p} \in U_Q}} a_{ij} + \sum\nolimits''^{M}_{s\, \substack{i=1 \\ j \notin B_r \\ \hat{p} \in V_Q}} a_{ij}).$$

Вынося за знаки $\bigvee\limits_{s}$ не зависящие от s слагаемые, получим

$$\overset{2}{A}{}^{\vee}=\bigvee_{q}\Big(\sum\nolimits''_{q}\limits_{\substack{i=1\\ j\in B_r\\ \tilde{p}\in U_1}}^{M}a_{ij}+\bigvee_{s}\sum\nolimits''_{s}\limits_{\substack{i=1\\ j\notin B_r\\ \hat{p}\in V_1}}^{M}a_{ij}\Big)\vee\ldots\vee\bigvee_{q}\Big(\sum\nolimits''_{q}\limits_{\substack{i=1\\ j\in B_r\\ \tilde{p}\in U_Q}}^{M}a_{ij}+\bigvee_{s}\sum\nolimits''_{s}\limits_{\substack{i=1\\ j\notin B_r\\ \hat{p}\in V_Q}}^{M}a_{ij}\Big).$$

Теперь вынесем за знаки $\bigvee\limits_{q}$ слагаемые, не зависящие от *q:*

$$\overset{2}{A}{}^{\vee}=\Big(\bigvee_{q}\sum\nolimits''_{q}\limits_{\substack{i=1\\ j\in B_r\\ \tilde{p}\in U_1}}^{M}a_{ij}+\bigvee_{s}\sum\nolimits''_{s}\limits_{\substack{i=1\\ j\notin B_r\\ \hat{p}\in V_1}}^{M}a_{ij}\Big)\vee\ldots\vee\Big(\bigvee_{q}\sum\nolimits''_{q}\limits_{\substack{i=1\\ j\in B_r\\ \tilde{p}\in U_Q}}^{M}a_{ij}+\bigvee_{s}\sum\nolimits''_{s}\limits_{\substack{i=1\\ j\notin B_r\\ \hat{p}\in V_Q}}^{M}a_{ij}\Big).$$

Полученное выражение с учетом обозначений (4.32), (4.33) совпадает с (4.34). Разложение по столбцу (4.30) - частный случай разложения (4.34) при $\{B_r\}=\{j\}$.

Разложения ЛО $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ по столбцу (4.30) и по совокупности столбцов (4.34) можно, аналогично § 4.4, рассматривать как некоторые принципы оптимальности. Так как эти разложения понижают размерность ЛО и уменьшают сложность (число элементарных операций БЛ) его выражения, их целесообразно применять повторно, вплоть до получения выражения, содержащего достаточно простые ЛО, например ЛО-столбцы, определяемые по очевидной формуле

$$\overset{2}{A}{}^{\vee}=\left|\begin{array}{l}a_1\\ \ldots\\ a_M\end{array}\right|^{\vee}\begin{array}{c}(0,1)\\ \ldots\ldots\\ (0,1)\end{array}=\bigvee_{i=1}^{M}a_i. \qquad (4.35)$$

В процессе последовательного разложения ЛО ужесточаются ограничения на строки ЛО, что часто приводит к появлению фиктивных (несуществующих) ЛО. Их (и содержащие их суммы) следует исключать из разложения. Это ведет к дополнительному уменьшению сложности выражения ЛО.

Оценим сложность представления M × Р-ЛО, получаемого последовательным разложением по столбцу. Считаем, что в процессе разложения фиктивные ЛО не появляются. Такое допущение завышает оцениваемую сложность. Учитывая это, из (4.30) получаем следующее уравнение для числа *N(P)* элементарных операций ∨, + в представлении ЛО:

$$N(P)=MN(P-1)+M+M-1=MN(P-1)+2M-1. \qquad (4.36)$$

Отсюда, учитывая следующее из (4.35) начальное условие $N(1)=M-1,$ последовательно найдем *N(2), N(3)*.....и, наконец, при $M\to\infty$ или $P\to\infty$

$$N(P)=\frac{3M^{P}-2M^{P-1}-2M+1}{M-1}\approx 3M^{P-1}. \qquad (4.37)$$

Реально сложность получаемого представления ЛО обычно существенно меньше верхней оценки (4.37). Разложение по совокупности столбцов еще уменьшает эту сложность (см. ниже § 4.8,4.10).

Сложность представления ЛО, полученного в результате разложения, во много раз меньше сложности прямого выражения ЛО согласно его определению (4.24).

4.7. Логические определители третьего рода и их свойства

Рассмотрим снова M × Р-матрицу $A=\|a_{ij}\|$ (4.1) при $M = P$ и все возможные суммы ее элементов $\Sigma'_q a_{ij}$, содержащие каждая один элемент из каждого столбца *A*. Введем дополнительное ограничение: из любой строки *A* в сумму должен входить тоже один элемент. Суммы $\Sigma'_q a_{ij}$, удовлетворяющие этому дополнительному ограничению, обозначим $\Sigma'''_q a_{ij}$. Число таких сумм равно *M!*

Определение 4.7. Будем называть ЛО с ограничениями третьего рода для квадратной M × M-матрицы $A=\|a_{ij}\|$ выражения вида

$$\overset{3}{A}{}^{\vee}=\left|\begin{array}{l}a_{11}\ldots a_{1M}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{M1}\ldots a_{MM}\end{array}\right|^{\vee}=|\,a_{ij}\,|^{\vee}=\bigvee_{q=1}^{M!}\Sigma'''_q a_{ij}, \qquad (4.38)$$

$$\overset{3}{A}{}^{\wedge}=\left|\begin{array}{l}a_{11}\ldots a_{1M}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{M1}\ldots a_{MM}\end{array}\right|^{\wedge}=|\,a_{ij}\,|^{\wedge}=\bigwedge_{q=1}^{M!}\Sigma'''_q a_{ij}, \qquad (4.39)$$

т.е. дизъюнкцию (конъюнкцию) БЛ всех сумм элементов *A,* содержащих каждая точно по одному элементу из каждого столбца и каждой строки *A*. Как и для ЛО первого и второго рода, здесь достаточно ограничиться изучением дизъюнктивного ЛО $\overset{3}{A}{}^{\vee}$. Сравнив (4.38), (4.39) с (4.24), (4.25), устанавливаем, что ЛО третьего рода $\overset{3}{A}{}^{\vee}$, $\overset{3}{A}{}^{\wedge}$ — частные случаи ЛО второго рода $\overset{2}{A}{}^{\vee}, \overset{2}{A}{}^{\wedge}$ при $M = P$ и вырожденных ограничениях (4.23):

$$b_i = p_i = c_i = 1, \quad i = 1, \ldots, M, \quad \sum_{i=1}^{M} p_i = M. \quad (4.40)$$

Этим определяются все свойства ЛО третьего рода.

Теорема 4.6. *ЛО вида* (4.38), (4.39) *всегда существуют.*

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условия (4.26), определяющего существование более общих ЛО вида (4.24), (4.25). В данном случае $P = M, c_1 = \ldots = c_M = 1$, и (4.26) принимает вид $M \geqslant M$, что всегда выполняется. Поэтому ЛО (4.38), (4.39) всегда существуют.

ЛО третьего рода обладают свойствами ЛО первого рода, сформулированными в леммах 4.1 — 4.9, что доказывается точно так же. Кроме того, они обладают некоторыми специальными свойствами, вытекающими из равноправия их строк и столбцов. Так, справедлива

Лемма 4.18. *Перестановка местами строк и столбцов с одинаковыми номерами (транспонирование) не меняет величины ЛО.*

Доказательство. При указанной перестановке множество сумм $\Sigma_q^{'''} a_{ij}$ остается прежним, и, согласно определениям (4.38), (4.39), ЛО не меняет величины.

4.8. Разложение логических определителей третьего рода

Разложение ЛО с ограничениями третьего рода на меньшие ЛО преследуют ту же цель, что и выше (§ 4.3,4.6).

Определение 4.8. Пусть $\overset{3}{A}^{\vee}$— произвольный *M* × *M*-ЛО (4.38) ЛО, полученный из $\overset{3}{A}^{\vee}$ вычеркиванием *i*-й строки *j*-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, называется логическим дополнением этого элемента в ЛО $\overset{3}{A}^{\vee}$ и обозначается $\overset{3}{A}^{\vee}_{ij}$.

Теорема 4.7. *Произвольный ЛО* $\overset{3}{A}^{\vee}$ (4.38) *можно разложить:*

1) по любому j-му столбцу, представив его в виде дизъюнкции БЛ сумм всех элементов этого столбца и их логических дополнений

$$\overset{3}{A}^{\vee} = \bigvee_{i=1}^{M} (a_{ij} + \overset{3}{A}^{\vee}_{ij}), \quad j = 1, \ldots, M; \quad (4.41)$$

2) по любой i-й строке, представив его в виде дизъюнкции БЛ сумм всех элементов этой строки и их логических дополнений

$$\overset{3}{A}^{\vee} = \bigvee_{j=1}^{M} (a_{ij} + \overset{3}{A}^{\vee}_{ij}), \quad i = 1, \ldots, M. \quad (4.42)$$

Доказательство. Так как ЛО $\overset{3}{A}^{\vee}$— частный случай ЛО $\overset{2}{A}^{\vee}$, по теореме 4.4

$$\overset{3}{A}^{\vee} = \bigvee_{i=1}^{M} (a_{ij} + \overset{2}{A}^{\vee}_{ij}), \quad j = 1, \ldots, M,$$

где $\overset{2}{A}^{\vee}_{ij}$- логическое дополнение элемента a_{ij} в ЛО $\overset{3}{A}^{\vee}$, понимаемое в смысле определения 4.5. Но область значений параметра p_i в $\overset{3}{A}^{\vee}$ есть (1,1) и ее сдвиг влево на 1 дает область (0,0), что равносильно исключению *i*-й строки $\overset{3}{A}^{\vee}$. Поэтому здесь определение 4.5 совпадает с определением 4.8, т.е. $\overset{2}{A}^{\vee}_{ij} = \overset{3}{A}^{\vee}_{ij}$, и выписанное равенство переходит в (4.41). Доказательство разложения (4.42) получается, если воспользоваться леммой 4.18 и переставить местами строки и столбцы ЛО с одинаковыми номерами, а полученный ЛО разложить согласно (4.41).

Интересно заметить, что полученные разложения по столбцу (4.41) и по строке (4.42) совершенно аналогичны; это объясняется равноправностью строк и столбцов ЛО $\overset{3}{A}^{\vee}$ в смысле наложенных на них ограничений.

В то же время ЛО $\overset{1}{A}^{\vee}$ и $\overset{2}{A}^{\vee}$, введенные в § 4.2 — 4.6, этого равноправия не имеют, так что их предполагаемые разложения по строке должны были бы отличаться от полученных выше их разложений по столбцу. Разложения по столбцу (4.41) и по строке (4.42) обобщаются так.

Определение 4.9. Пусть $\overset{3}{A}^{\vee}$ - произвольный *M* × М-ЛО (4.38). ЛО, полученный из $\overset{3}{A}^{\vee}$ выделением всех элементов, стоящих на пересечении множества строк $D_r = \{i_1, \ldots, i_r\}$ с множеством столбцов $B_r = \{j_1, \ldots, j_r\}$, где $1 \leqslant r \leqslant M$, назовем *минором r-го порядка* и обозначим $\overset{3}{A}^{\vee}_{\{D_r B_r\}}$. ЛО, полученный из $\overset{3}{A}^{\vee}$ вычеркиванием множества-строк D_r и множества столбцов B_r, назовем *логическим дополнением минора* $\overset{3}{A}^{\vee}_{\{D_r, B_r\}}$ в ЛО $\overset{3}{A}^{\vee}$ и обозначим $\overset{3}{A}^{\vee}_{D_r B_r}$.

Теорема 4.8. *Произвольный ЛО* $\overset{3}{A}^{\vee}$ (4.38) *можно разложить:*

1) по любой совокупности столбцов B_r, представив его в виде дизъюнкции БЛ сумм всех миноров с данным B_r и их логических дополнений

$$\overset{3}{A}^{\vee} = \bigvee_{D_r} (\overset{3}{A}^{\vee}_{\{D_r B_r\}} + \overset{3}{A}^{\vee}_{D_r B_r}); \quad B_r \subset \{1, \ldots, M\}; \quad (4.43)$$

2) по любой совокупности строк D_r, представив его в виде дизъюнкции БЛ сумм всех миноров с данным D_r и их логических дополнений

$$\overset{3}{A}{}^{\vee} = \bigvee_{B_r} (\overset{3}{A}{}^{\vee}_{\{D_r,B_r\}} + \overset{3}{A}{}^{\vee}_{D_r,B_r}); \quad D_r \subset \{1, \dots, M\}. \quad (4.44)$$

Доказательство можно получить с помощью теоремы 4.5, ибо ЛО $\overset{3}{A}{}^{\vee}$ - частный случай ЛО $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ (см. выше подобное доказательство теоремы 4.7).

Но есть и прямое доказательство. Действительно, минор $\overset{3}{A}{}^{\vee}_{\{D_r\, B_r\}}$ — это максимальная сумма элементов, содержащая точно по одному элементу из каждой строки $i_1, \dots, i_r \in D_r$ и из каждого столбца $j_1, \dots, j_r \in B_r$ матрицы *A*. Логическое дополнение $\overset{3}{A}{}^{\vee}_{D_r\, B_r}$ - это максимальная сумма элементов, содержащая точно по одному элементу из каждой строки $i \notin D_r$ и из каждого столбца $j \notin B_r$.

Поэтому сумма $\overset{3}{A}{}^{\vee}_{\{D_r\, B_r\}} + \overset{3}{A}{}^{\vee}_{D_r\, B_r}$ — это максимальная условная сумма элементов, содержащая ровно по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца всей матрицы *A* и взятая при условии, что для любого элемента суммы a_{ij} из $i \in D_r$ следует $j \in B_r$ и обратно. Для получения максимальной безусловной суммы, т.е. ЛО $\overset{3}{A}{}^{\vee}$, остается взять еще максимум по D_r или по B_r; первое дает формулу (4.43), второе - (4.44).

В частном случае при $D_r = \{i\},\ B_r = \{j\}$ формулы (4.43), (4.44) переходят соответственно в (4.41), (4.42). Разложения (4.41) - (4.44), как и (4.30), (4.34) нужно применять повторно, пока не получится выражение, содержащее небольшие, легко выражаемые ЛО. Эти разложения, подобно предыдущим, можно рассматривать как некоторые принципы оптимальности.

Оценим сложность (число *N(M)* элементарных операций $\vee, +$) представления *M* × М-ЛО, получаемого последовательным разложением по строке или столбцу. Как видно из разложений (4.41), (4.42), *N(M)* удовлетворяет разностному уравнению

$$N(M) = MN(M-1) + 2M - 1,$$

где $N(1) = Q$. (4.45)

Решая уравнение (4.45) индукцией по *M,* находим

$$N(M) = M! \sum_{k=2}^{M} \frac{2k-1}{k!} \approx M!e \quad \text{при } M \to \infty. \quad (4.46)$$

Оценим также сложность $N_r(M)$ представления *M* × *M*-ЛО, полученного последовательным разложением по совокупности *r* строк или *r* столбцов. При фиксированной совокупности D_r из *r* строк (совокупности B_r из *r* столбцов) имеется C^r_M различных миноров размера *r* × *r* и столько же соответствующих им логических дополнений размера $(M-r) \times (M-r)$ в разложении (4.44) (разложении (4.43)). Таким образом, $N_r\,(M)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$N_r(M) = [N(r) + N_r(M-r)]\,(2C^r_M - 1), \quad \text{где} \quad N(1) = 0. \quad (4.47)$$

Полагаем, что *r* фиксировано и не зависит от *M; M* имеет вид *M =kr,* $k = 1, 2, \dots;$ $N(r)$ задано, ибо получающиеся в результате последовательного разложения по (4.43), (4.44) *r* × *r* -ЛО уже нельзя вычислить разложением по *r* строкам (столбцам). В этих условиях из (4.47) можно последовательно найти $N_r(2r), N_r(3r), \dots;$

$$N_r(kr) = (2C^r_{kr} - 1)\,((2C^r_{(k-1)r} - 1)\,((2C^r_{(k-2)r} - 1) \dots$$
$$\dots ((2C^r_{3r} - 1)\,(2(2C^r_{2r} - 1) + \underbrace{1) \dots + 1)}_{k-2}\, N(r). \quad (4.48)$$

Заменив в (4.48) *kr* на *M,* выразив C^r_{mr} через факториалы и отбросив константы 1 (что завышает оценку *N)*, после упрощения получим окончательно

$$N_r(M) \approx \frac{2^{M/r} M! N(r)}{(r!)^M}, \quad M = kr, \quad \text{где } k \text{ велико}. \quad (4.49)$$

Сравнив оценки сложности (4.46) и (4.49), видим, что разложение по совокупности *r* строк или столбцов приводит к существенно более простому представлению ЛО, чем разложение по строке или столбцу.

4.9. Логические определители четвертого рода и их свойства

Будем рассматривать вместе с основной *M* ×*P*"-матрицей $A = \| a_{ij} \|$ (4.1) также *M* × Р-матрицу ограничений

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} \dots b_{1P} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{M1} \dots b_{MP} \end{Vmatrix}. \quad (4.50)$$

В обеих матрицах вводим все возможные суммы элементов $\Sigma'_q a_{ij}, \Sigma'_q b_{ij}$, содержащие каждая точно один элемент из каждого столбца своей матрицы. Общее число таких сумм M^p. Номера *q* сумм $\Sigma'_q a_{ij}$ и $\Sigma'_q b_{ij}$ считаются одинаковыми, если эти суммы образованы соответственными элементами матриц *A и B.*

Определение 4.10. Назовем ЛО с ограничениями четвертого рода для матрицы *A* при матрице ограничений *B* и границе *b* выражения

$$\overset{4}{A}{}^{\vee} = \left|\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1P} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{M1} \dots a_{MP} \end{matrix}\right|^{\vee}_{\Sigma' b_{ij} \leqslant b} = |a_{ij}|^{\vee}_{\Sigma' b_{ij} \leqslant b} = \bigvee_{q=1}^{M^P} \quad \underset{\Sigma'_q b_{ij} \leqslant b}{\Sigma'_q} a_{ij}, \quad (4.51)$$

$$\overset{4}{A}{}^{\wedge} = \left|\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1P} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{M1} \dots a_{MP} \end{matrix}\right|^{\wedge}_{\Sigma' b_{ij} \leqslant b} = |a_{ij}|^{\wedge}_{\Sigma' b_{ij} \leqslant b} = \bigwedge_{q=1}^{M^P} \quad \underset{\Sigma'_q b_{ij} \leqslant b}{\Sigma'_q} a_{ij}, \quad (4.52)$$

т.е. дизъюнкцию (конъюнкцию) БЛ всех сумм элементов *A*, содержащих каждая ровно один элемент из каждого столбца *A* и таких, что соответствующая сумма элементов *B* не превосходит границы *b*. Как и выше, не ограничивая общности, можно рассматривать только один ЛО - (4.51).

Теорема 4.9. *Для существования у матрицы A ЛО* $\overset{4}{A}{}^{\vee}$ *вида* (4.51) *и* $\overset{4}{A}{}^{\wedge}$ *вида* (4.52) *при матрице ограничений B и границе b необходимо и достаточно, чтобы ЛО* $\overset{1}{B}{}^{\wedge}$ *вида* (4.3) *от матрицы B удовлетворял неравенству*

$$\overset{1}{B}{}^{\wedge} \leqslant b. \quad (4.53)$$

Доказательство. Согласно (4.51), (4.52) ЛО $\overset{4}{A}{}^{\vee}$ и $\overset{4}{A}{}^{\wedge}$ равны соответственно максимальной и минимальной из множества сумм $\Sigma'_q a_{ij}$, удовлетворяющих ограничениям $\Sigma'_q b_{ij} \leqslant b (q = 1, \dots, M^P)$. Поэтому указанные ЛО существуют, только если множество сумм не пусто. Последнее выполняется, только если хотя бы одна сумма $\Sigma'_q a_{ij}$ удовлетворяет ограничению $\Sigma'_q b_{ij} \leqslant b$. Это значит, что хотя бы одна из сумм $\Sigma'_q b_{ij}$ должна не превосходить *b*, что имеет место, лишь когда минимальная из сумм не превосходит *b*, т.е. $\bigwedge_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q b_{ij} \leqslant b$. Последнее неравенство — развернутая запись неравенства (4.53).

ЛО четвертого рода обладают свойствами ЛО первого рода, сформулированными в леммах 4.3 - 4.8, что доказывается так же. Далее, они обладают тремя нижеследующими свойствами, аналогичными свойствам из лемм 4.1, 4.2, 4.9.

Лемма 4.19. *Перестановка местами двух строк основной матрицы A одновременно с перестановкой соответствующих строк матрицы ограничений B не меняет величины ЛО:*

$$\left|\begin{matrix} \dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} \dots a_{rP} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{k1} \dots a_{kP} \end{matrix}\right|^{\vee}_{\Sigma' b_{ij} \leqslant b} = \left|\begin{matrix} \dots\dots\dots\dots \\ a_{k1} \dots a_{kP} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} \dots a_{rP} \end{matrix}\right|^{\vee}_{\Sigma' b_{ij}^{rk} \leqslant b}. \quad \mathbf{(4.54)}$$

Здесь $B^{r,k} = \| b_{ij}^{rk} \|$ - новая матрица ограничений, полученная из исходной $B = \| b_{ij} \|$ путем перестановки *r*-й и *k*-й строк.

Доказательство. При указанной перестановке множество сумм $\{ \Sigma'_q a_{ij} \}, q = 1, \dots, M^P$, из определения ЛО (4.51) не меняется.

Лемма 4.20. *Перестановка местами двух столбцов основной матрицы A одновременно с перестановкой соответствующих столбцов матрицы ограничений B не меняет величины ЛО:*

$$\left|\begin{matrix} \dots a_{1r} \dots a_{1k} \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots a_{Mr} \dots a_{Mk} \dots \end{matrix}\right|^{\vee}_{\Sigma' b_{ij} \leqslant b} = \left|\begin{matrix} \dots a_{1k} \dots a_{1r} \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots a_{Mk} \dots a_{Mr} \dots \end{matrix}\right|^{\vee}_{\Sigma' \overline{b}_{ij}^{r,k} \leqslant b}. \quad (4.55)$$

Здесь $\overline{B}^{r,k} = \| \overline{b}_{ij}^{r,k} \|$ — новая матрица ограничений, полученная из исходной $B = \| b_{ij} \|$ перестановкой *r*-го и *k*-го столбцов.

Доказательство аналогично предыдущему.

Лемма 4.21. *ЛО, содержащий в качестве элемента* a_{rk} *бесконечность, сам равен бесконечности, если среди сумм* $\Sigma'_q b_{ij}$, *включающих элемент* b_{rk}, *есть хотя бы одна, удовлетворяющая ограничению* $\Sigma'_q b_{ij} \leqslant b$.

Доказательство следует непосредственно из определения ЛО (4.51).

Нижеследующие два свойства ЛО вытекают из разложимости ЛО по любому столбцу (4.59) и используют

Определение 4.11. Пусть $\overset{4}{A}{}^{\vee}$ - произвольный *M*×*P*- ЛО (4.51). Логическим дополнением $\overset{4}{A}{}^{\vee}_{rk}$ элемента a_{rk} в этом ЛО называется ЛО, полученный из $\overset{4}{A}{}^{\vee}$ вычеркиванием *k*-го столбца, в котором расположен элемент a_{rk} (при этом вычеркивается и *k-й* столбец матрицы ограничений *B)* и уменьшением границы *b* на b_{rk}. Таким образом,

$$\overset{4}{A}{}^{\vee}_{rk} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,k-1}\, a_{1,k+1} \dots a_{1P} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{M1} \dots a_{M,k-1}\, a_{M,k+1} \dots a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee}_{\substack{\Sigma' \; b_{ij} \leqslant b - b_{rk} \\ j \neq k}} =$$

$$= \bigvee_{q=1}^{M^{P-1}} \mathop{\Sigma'_q}\limits_{\substack{j \neq k \\ \Sigma'_q \; b_{ij} \leqslant b - b_{rk} \\ j \neq k}} a_{ij}. \tag{4.56}$$

Лемма 4.22. *ЛО со столбцом из равных элементов равен сумме этого элемента и дизъюнкции БЛ логических дополнений всех элементов столбца*

$$\overset{4}{A}{}^{\vee} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,k-1}\, a\, a_{1,k+1} \dots a_{1P} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{M1} \dots a_{M,k-1}\, a\, a_{M,k+1} \dots a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee}_{\Sigma' b_{ij} \leqslant b} = a + \bigvee_{r=1}^{M} \overset{4}{A}{}^{\vee}_{rk}. \tag{4.57}$$

Доказательство (4.57) получается из разложения (4.59) с учетом того, что в данном случае $a_{rk} = a,\ r = 1, \dots, M,$ и потому *a* можно вынести за знак $\vee$.

Лемма 4.23. *Общее для всех элементов некоторого столбца слагаемое можно вынести за знак ЛО:*

$$\overset{4}{A}{}^{\vee} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} + d \dots a_{1P} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{M1} \dots a_{Mk} + d \dots a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee}_{\Sigma' b_{ij} \leqslant b} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} \dots a_{1P} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{M1} \dots a_{Mk} \dots a_{MP} \end{vmatrix}^{\vee}_{\Sigma' b_{ij} \leqslant b} + d. \tag{4.58}$$

Доказательство. Согласно (4.59) левый ЛО в (4.58)

$$\overset{4}{A}{}^{\vee} = \bigvee_{r=1}^{M} (a_{rk} + d + \overset{4}{A}{}^{\vee}_{rk}) = [\bigvee_{r=1}^{M} (a_{rk} + \overset{4}{A}{}^{\vee}_{rk})] + d,$$

где $\overset{4}{A}{}^{\vee}_{rk}$—логическое дополнение *(r, k)*-го элемента левого и правого ЛО. Но квадратная скобка в полученном выражении — это ЛО правой части (4.58), разложенный согласно (4.59).

4.10. Разложение логических определителей четвертого рода

Разложение ЛО с ограничениями четвертого рода на меньшие ЛО по своим целям аналогично разложениям уже рассмотренных ЛО.

Теорема 4.10. *Произвольный ЛО* $\overset{4}{A}{}^{\vee}$ (4.51) *можно разложить по любому j-му столбцу, представив его в виде дизъюнкции БЛ сумм всех элементов этого столбца и их логических дополнений:*

$$\overset{4}{A}{}^{\vee} = \bigvee_{r=1}^{M} (a_{rk} + \overset{4}{A}{}^{\vee}_{rk}), \quad k = 1, \dots, P. \tag{4.59}$$

Доказательство. Распишем ЛО $\overset{4}{A}{}^{\vee}$ в виде

$$\overset{4}{A}{}^{\vee} = \bigvee_{q=1}^{M^P} \mathop{\Sigma'_q}\limits_{\Sigma' b_{ij} \leqslant b} a_{ij} = [\bigvee_{q=1}^{M^{P-1}} (a_{1k} + \mathop{\Sigma'_q}\limits_{\substack{j \neq k \\ \Sigma'_q \; b_{ij} \leqslant b - b_{1k} \\ j \neq k}} a_{ij})] \vee \dots$$

$$\dots \vee [\bigvee_{q=1}^{M^{P-1}} (a_{Mk} + \mathop{\Sigma'_q}\limits_{\substack{j \neq k \\ \Sigma'_q \; b_{ij} \leqslant b - b_{Mk} \\ j \neq k}} a_{ij}).$$

Вынесем за знаки $\bigvee_q$ не зависящие от *q* слагаемые

$$\overset{4}{A}{}^{\vee} = (a_{1k} + \bigvee_{q=1}^{M^{P-1}} \mathop{\Sigma'_q}\limits_{\substack{j \neq k \\ \Sigma'_q \; b_{ij} \leqslant b - b_{1k} \\ j \neq k}} a_{ij}) \vee \dots$$

$$\dots \vee (a_{Mk} + \bigvee_{q=1}^{M^{P-1}} \mathop{\Sigma'_q}\limits_{\substack{j \neq k \\ \Sigma'_q \; b_{ij} \leqslant b - b_{Mk} \\ j \neq k}} a_{ij}).$$

Сравнив вторые слагаемые скобок с выражением (4.56), получим (4.59).

Определение 4.12. Пусть $\overset{4}{A}{}^{\vee}$-произвольный *M×P*- ЛО (4.51). Назовем *p-м минором r-го порядка* $\overset{4}{A}_{p\{B_r\}}$, образованным из множества столбцов $B_r = \{j_1, \dots, j_r\}$ ЛО $\overset{4}{A}{}^{\vee}$, *p*-ю сумму вида

$$\mathop{\Sigma'_p}\limits_{j \in B_r} a_{ij},$$

удовлетворяющую ограничению $\mathop{\Sigma'_p}\limits_{j \in B_r} b_{ij} \leqslant b.$ Таким образом,

$$\overset{4}{A}{}^{\vee}_{p}\{B_r\} = \underset{\substack{j \in B_r \\ \underset{j\in B_r}{\Sigma'_p}\ b_{ij} \leqslant b}}{\Sigma'_p} a_{ij}, \qquad p = 1, \dots, M^r. \qquad (4.60)$$

Назовем далее *логическим дополнением* $\overset{4}{A}{}^{\vee}_{p,\,B_r}$ минора $\overset{4}{A}{}^{\vee}_{p}\{B_r\}$ в ЛО $\overset{4}{A}{}^{\vee}$ ЛО, полученный из $\overset{4}{A}{}^{\vee}$:

1) вычеркиванием всех столбцов множества B_r;

2) отнесением ограничений к столбцам оставшегося множества $\bar{B}_r$;

3) уменьшением границы на величину левой части ограничений в миноре. Таким образом,

$$\overset{4}{A}{}^{\vee}_{p,\,B_r} = \bigvee_{s=1}^{M^{P-r}} \underset{\substack{j \in \bar{B}_r \\ \underset{j \neq \bar{B}_r}{\Sigma'_s}\ b_{ij} \leqslant b -- \underset{j\in B_r}{\Sigma'_p} b_{ij}}}{\Sigma'_s} a_{ij}, \qquad p = 1, \dots, M^r. \qquad (4.61)$$

Теорема 4.11. *Произвольный ЛО* $\overset{4}{A}{}^{\vee}$ (4.51) *можно разложить по любой совокупности столбцов* $B_r = \{j_1, \dots, j_r\}$, *представив его в виде дизъюнкции БЛ сумм всех миноров, образованных на базе множества* B_r, *и их логических дополнений:*

$$\overset{4}{A}{}^{\vee} = \bigvee_{p=1}^{M^r} \left(\overset{4}{A}{}^{\vee}_{p}\{B_r\} + \overset{4}{A}{}^{\vee}_{p,\,B_r}\right). \qquad (4.62)$$

Доказательство. В определении (4.51) q-ю сумму $\Sigma'_q a_{ij}$ и $\Sigma'_q b_{ij}$ ЛО $\overset{4}{A}{}^{\vee}$ можно разбить на две:

$$\Sigma'_q a_{ij} = \underset{j\in B_r}{\Sigma'_p} a_{ij} + \underset{j\in \bar{B}_r}{\Sigma'_s} a_{ij}, \qquad \Sigma'_q b = \underset{j\in B_r}{\Sigma'_p} b_{ij} + \underset{j\in \bar{B}_r}{\Sigma'_s} b_{ij}.$$

Здесь p и s - номера частичных сумм правой части, соответствующие номеру q полной суммы левой части. Учитывая эти разбиения, распишем ЛО $\overset{4}{A}{}^{\vee}$ ввиде

$$\overset{4}{A}{}^{\vee} = \bigvee_{q=1}^{M^P} \Sigma'_q a_{ij} = \bigvee_{p=1}^{M^r} \bigvee_{s=1}^{M^{P-r}} \Bigg(\underset{\substack{j \in B_r \\ \underset{j\in B_r}{\Sigma'_p} b_{ij} \leqslant b}}{\Sigma'_p} a_{ij} + \underset{\substack{j \in \bar{B}_r \\ \underset{j\in \bar{B}_r}{\Sigma'_s} b_{ij} \leqslant b - \underset{j\in B_r}{\Sigma'_p} b_{ij}}}{\Sigma'_s} a_{ij}\Bigg).$$

Вынеся за знак $\bigvee\limits_{s}$ не зависящее от s первое слагаемое, получим

$$\overset{4}{A}{}^{\vee} = \bigvee_{p=1}^{M^r} \Bigg(\underset{\substack{j \in B_r \\ \underset{j\in B_r}{\Sigma'_p} b_{ij} \leqslant b}}{\Sigma'_p} a_{ij} + \bigvee_{s=1}^{M^{P-r}} \underset{\substack{j \in \bar{B}_r \\ \underset{j\in \bar{B}_r}{\Sigma'_s} b_{ij} \leqslant b - \underset{j\in B_r}{\Sigma'_p} b_{ij}}}{\Sigma'_s} a_{ij}\Bigg).$$

Первое слагаемое в скобке есть, согласно (4.60), минор $\overset{4}{A}{}^{\vee}_{p}\{B_r\}$; а второе, согласно (4.61), -логическое дополнение этого минора $\overset{4}{A}_{p,\,B_r}$.
Таким образом.полученное соотношение есть развернутая запись разложения (4.62).
В частном случае при $B_r = \{k\}$ формула (4.62) переходит в (4.59). Разложения (4.59), (4.62), как и предыдущие, есть некоторые принципы оптимальности. Они применяются повторно, пока не получится выражение ЛО через простейшие ЛО-столбцы, определяемые по формуле

$$\overset{4}{A}{}^{\vee} = \left|\begin{matrix} a_1 \\ \dots \\ a_M \end{matrix}\right|^{\vee}_{b_a \leqslant b} = \bigvee_{\substack{q=1 \\ b_q \leqslant b}}^{M} a_q. \qquad (4.63)$$

В процессе последовательного разложения ЛО ужесточаются ограничения на суммы $\Sigma'_q a_{ij}$, что приводит к появлению фиктивных ЛО, которые (вместе с содержащими их суммами) исключаются из разложения.
Оценим сложность представления $M \times P$-ЛО, полученного последовательным разложением по столбцу (4.59). Полагая, что в процессе разложения не появляются фиктивные ЛО (это завышает оцениваемую сложность), получим из (4.59) уравнение для числа $N(P)$ элементарных операций $\vee$, $+$ в представлении ЛО в виде (4.36) с начальным условием $N(1) = 2M — 1$, вытекающим из (4.63). Решение этого уравнения

$$N(P) = \frac{(2M-1)(M^P-1)}{M-1} \approx 2M^P \ \text{при} \ P \to \infty. \qquad (4.64)$$

Оценим еще сложность представления $M \times P$-ЛО, полученного последовательным разложением по совокупности r столбцов (4.62).
При фиксированном множестве B_r этих столбцов имеется M^r различных миноров $\overset{4}{A}{}^{\vee}_{p}\{B_r\}$ с r столбцами (в представлении каждого содержится $2r$ элементарных операций +) и столько же соответствующих им логических дополнений с $P - r$ столбцами.
Отсюда получаем уравнение для искомой сложности

$$N_r(P) = M^r N_r(P-r) + M^r(2r+1) - 1, \text{ где } N(1) = 0. \qquad (4.65)$$

Пусть аналогично уравнению (4.47):

1) r фиксировано и не зависит *от P;*

2) P имеет вид $P = kr,\ k = 1, 2, \dots,$;

3) $N(r)$ задано. Тогда из (4.65) последовательно найдем $N_r(2r), N_r(3r), \dots,$

$$N_r(kr)=M^{r(k-1)}N(r)+[M^r(2r+1)-1]\left(\frac{M^{r(k-1)}-1}{M^r-1}\right). \qquad (4.66)$$

Заменив в (4.66) *kr* на *P,* после упрощений получим

$$N_r(P)=\frac{M^P[N(r)+2r+1]-M^{P-r}[N(r)+1]-M^r(2r+1)+1}{M^r-1}\approx$$

$$\approx M^{P-r}[N(r)+2r+1].$$

Сравнив оценки (4.64) и (4.66), заключаем, что разложение по совокупности *r* столбцов приводит к гораздо более простому представлению ЛО, чем разложение по столбцу. Оба дают существенно более простое выражение ЛО, чем непосредственное его выражение по определению (4.51).

4.11. Вычисление логических определителей

Под вычислением ЛО с ограничением понимается отыскание численного значения ЛО по заданным численным значениям его элементов. Каждый такой ЛО, как следует из приведенных определений, равен максимальной или минимальной из сумм его элементов $\Sigma_q a_{ij}, q = 1, 2, \ldots$, отвечающих определенному ограничению. Поэтому понятие вычисления ЛО с ограничениями может включать отыскание номера *q* (поэлементного состава) максимальной или минимальной суммы $\Sigma_q a_{ij}$, которой равен наш ЛО; эту сумму назовем определяющей.

Методически проще всего вычислять ЛО по их определениям (4.2), (4.3), (4.24), (4.25), (4.38), (4.39), (4.51), (4.52), рассматривая последние как формулы раскрытия ЛО. Однако сложность такого вычисления с увеличением размеров ЛО растет слишком быстро. Поэтому будем вычислять ЛО с помощью их разложения.

Дизъюнктивный ЛО первого рода $\overset{1}{A}{}^{\vee}$ вычисляется по разложению (4.20), а конъюнктивный ЛО $\overset{1}{A}{}^{\wedge}$— по двойственному к (4.20) разложению ($\vee$заменяется на $\wedge$). Отсюда следует, что

$$\Sigma'_* a_{ij}=\sum_{j=1}^{P} a_j^*, \qquad (4.67)$$

где a^*_j—экстремальный элемент *j*-го столбца: максимальный для ЛО $\overset{1}{A}{}^{\vee}$ и минимальный для ЛО $\overset{1}{A}{}^{\wedge}$. Сложность такого способа вычисления ЛО равна выражению (4.21). Из него следует возможность вычисления ЛО практически неограниченных размеров *M*× *P*.

Дизъюнктивный ЛО второго рода $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ можно вычислить последовательным разложением по столбцу (4.30), а конъюнктивный $\overset{2}{A}{}^{\wedge}$— по двойственному разложению. При этом для отыскания определяющей суммы ЛО следует запоминать элементы a_{ij}, по которым идет разложение. Такой способ вычисления ЛО, как видно из оценки его сложности (4.37), пригоден для ЛО большой высоты *M,* но ограниченной ширины *P*.

Пример 4.2. Вычислим ЛО $\overset{2}{A}{}^{\vee}=\left|\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{matrix}\right|^{\vee}\begin{matrix}(0,2)\\(0,2).\end{matrix}$

Шаг 1. Разлагаем $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ по первому столбцу:

$$\overset{2}{A}{}^{\vee}=(a_{11}+\overset{2}{A}{}^{\vee}_{11})\vee(a_{21}+\overset{2}{A}{}^{\vee}_{21}),$$

$$\overset{2}{A}{}^{\vee}_{11}=\left|\begin{matrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{matrix}\right|^{\vee}\begin{matrix}(0,1)\\(0,2)\end{matrix}, \qquad \overset{2}{A}{}^{\vee}_{21}=\left|\begin{matrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{matrix}\right|^{\vee}\begin{matrix}(0,2)\\(0,1)\end{matrix}.$$

Шаг 2. Разлагаем логические дополнения $\overset{2}{A}{}^{\vee}_{11}$, $\overset{2}{A}{}^{\vee}_{21}$ по первому столбцу:

$$\overset{2}{A}{}^{\vee}_{11}=(a_{12}+\overset{2}{A}{}'^{\vee}_{12})\vee(a_{22}+\overset{2}{A}{}'^{\vee}_{22}), \quad \overset{2}{A}{}^{\vee}_{21}=(a_{12}+\overset{2}{A}{}''^{\vee}_{12})\vee(a_{22}+\overset{2}{A}{}''^{\vee}_{22}).$$

Новые логические дополнения — ЛО-столбцы, вычисляемые непосредственно по определению ЛО (4.24), (4.35):

$$\overset{2}{A}{}'^{\vee}_{12}=\left|\begin{matrix}a_{13}\\ a_{23}\end{matrix}\right|^{\vee}\begin{matrix}(0,0)\\(0,2)\end{matrix}=a_{23}, \quad \overset{2}{A}{}'^{\vee}_{22}=\left|\begin{matrix}a_{13}\\ a_{23}\end{matrix}\right|^{\vee}\begin{matrix}(0,1)\\(0,1)\end{matrix}=a_{13}\vee a_{23},$$

$$\overset{2}{A}{}''^{\vee}_{12}=\left|\begin{matrix}a_{13}\\ a_{23}\end{matrix}\right|^{\vee}\begin{matrix}(0,1)\\(0,1)\end{matrix}=a_{13}\vee a_{23}, \quad \overset{2}{A}{}''^{\vee}_{22}=\left|\begin{matrix}a_{13}\\ a_{23}\end{matrix}\right|^{\vee}\begin{matrix}(0,2)\\(0,1)\end{matrix}=a_{13}.$$

Шаг 3. Подставив последующие выражения в предыдущие, найдем

$$\overset{2}{A}{}^{\vee}=\{a_{11}+(a_{12}+a_{23})\vee[a_{22}+(a_{13}\vee a_{23})]\}\vee$$

$$\vee\{a_{21}+(a_{13}+a_{22})\vee[a_{12}+(a_{13}\vee a_{23})]\}.$$

Для получения численного значения ЛО $\overset{2}{A}{}^{\vee}$остается подставить численные значения его элементов a_{ij} и выполнить операции $\vee, +$.

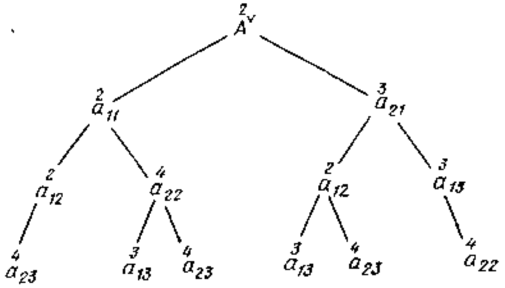
Например, для

$a_{11}=a_{12}=2,\ a_{13}=a_{21}=3, a_{22}=a_{23}=4$ имеем $\overset{2}{A}{}^{\vee}=10$.

Если при вычислении ЛО второго рода требуется найти не только численное значение ЛО, но его определяющую сумму, то надо на каждом шаге вычисления ЛО по его аналитическому выражению запоминать, какому из двух элементов оказывается равен каждый двучлен вида $a_{ij}\vee a_{rs}$, так как именно этот элемент участвует в дальнейших вычислениях и включается в состав определяющей суммы.

Разлагать ЛО можно не аналитически (как в примере 4.2), а с помощью дерева. Корнем этого дерева служит сам ЛО $\overset{2}{A}{}^{\vee}$, а последовательно удаляющимися от него вершинами — элементы a_{ij}, получаемые в результате последовательных шагов разложения. Найдя ветвь дерева с максимальной суммой элементов, тем самым получим определяющую сумму ЛО. Численное значение этой суммы и есть численное значение ЛО.

Пример 4.3. Для ЛО $\overset{2}{A}{}^{\vee}$ из примера 4.2 дерево разложения имеет вид



При указанных значениях элементов определяющей является сумма $\Sigma''_{*} a_{ij} = a_{11} + a_{22} + a_{23} = 10$ и сумма

$\Sigma''_{*} a_{ij} = a_{21} + a_{13} + a_{22} = 10$, так что ЛО $\overset{2}{A}{}^{\vee} = 10$. Мы нашли, таким образом, как значение ЛО, так и состав определяющих сумм $\Sigma'' a_{ij}$, которым равен наш ЛО.

ЛО второго рода можно также вычислять последовательным разложением по совокупности столбцов (4.34). Это позволяет вычислять ЛО больших размеров. Процедура вычислений совпадает с процедурой при разложении по столбцу (пример 4.2). При этом минимальным по сложности вычислений обычно оказывается дихотомический вариант процедуры, в котором разложение на любом шаге выполняется по половине общего числа столбцов ЛО (см. ниже).

ЛО третьего рода $\overset{3}{A}{}^{\vee}$ вычисляется последовательным разложением по столбцу (4.41) или строке (4.42) либо по совокупности столбцов (4.43) или строк (4.44) (ЛО $\overset{3}{A}{}^{\wedge}$ вычисляется по двойственным разложениям). Процедура вычислений совпадает с аналогичной для ЛО второго рода. Остановимся лишь на определении оптимального числа $r_{\text{опт}}$ строк (столбцов) , по которым выполняется разложение ЛО. Этому числу соответствует минимальная сложность вычисления ЛО. Как видно из оценки (4.49) сложности $N_r(M)$ вычисления $M \times M$-ЛО последовательным разложением по r строкам (столбцам), функция $f(r) = N_r(M)$ с ростом r убывает, когда $N(r)$ растет медленнее, чем $(r!/2^{1/r})^M$ (такой рост можно обеспечить, например, вычислением $r \times r$-ЛО разложением по столбцу, когда по (4.46)

$$N(r) = r!e).$$

Однако из уравнения (4.47) также видно, что значение $f(r)$ не меняется при замене r на $M- r$, т.е. функция $f(r)$ симметрична относительно прямой $r = M/2$ и потому при $r > M/2$ возрастает. Итак,

$$r_{\text{опт}} = M/2, \quad (4.68)$$

т.е. оптимальной процедурой вычислений ЛО третьего рода оказывается последовательная дихотомия - разложение ЛО на любом шаге по половине общего числа его строк (столбцов). Заметим, что разложение по строке (столбцу) позволяет вычислять ЛО порядка $M = 15$, а дихотомическое разложение по совокупности строк (столбцов) - ЛО порядка $M = 20$.

ЛО четвертого рода $\overset{4}{A}{}^{\vee}$ вычисляются последовательным разложением по столбцу (4.59) или по совокупности столбцов (4.62) (ЛО $\overset{4}{A}{}^{\wedge}$ вычисляются по двойственным разложениям). Процедура вычислений - как у ЛО второго рода. Дня определения оптимального числа столбцов, по которым выполняется разложение (4.62), распишем соответствующую оценку (4.67) сложности $N_r(P)$ вычисления $M \times P$-ЛО, полагая, что заключительный $M \times r$-ЛО будет вычисляться разложением по столбцу (так что $N(r) = 2M^r$ согласно (4.64)) и пренебрегая —1 в знаменателе (4.67). Мы получим

$$N_r(P) = M^P((2r - 1)/M^r - 1/M^{2r} + 2) - 2r - 1. \quad (4.69)$$

Из (4.69) следует, что $N_r(P)$ монотонно убывает по r. Следовательно,

$$r_{\text{опт}} = P. \quad (4.70)$$

Согласно (4.70) оптимальной процедурой оказывается вычисление ЛО путем его разложения по совокупности всех P столбцов, или, что то же самое (см. (4.62)), без разложения. В этом случае заключительным становится весь $M \times P$-ЛО; его по нашему соглашению будем вычислять разложением по столбцу. Итак, оптимальной процедурой вычислений ЛО четвертого рода является последовательное разложение по столбцу.

4.12. Приближенное вычисление логических определителей

Сложность вычисления ЛО методами § 4.11 растет с увеличением размеров ЛО. Поэтому вычисление больших ЛО нередко затруднительно. В этих случаях, целесообразен переход к приближенному вычислению ЛО, сложность которого растет с увеличением размеров ЛО достаточно медленно.

Рассмотрим, например, ЛО третьего рода $\overset{3}{A}^{\vee}$. Исходим из формулы (4.42) разложения ЛО. Опустим в разложении (4.42) часть двучленных сумм. Тогда заключительный максимум (дизъюнкция БЛ) будет браться по суженной сравнительно с первоначальной области так, что ее значение может лишь уменьшиться. В итоге получим разложение — оценку ЛО снизу, выраженное через меньшие ЛО. Последовательно применяя это разложение, получим явное выражение, служащее оценкой исходного ЛО снизу. По нему и вычисляется приближенно ЛО.

Возможны различные принципы исключения двучленных сумм в разложении (4.42). Примем такой принцип: в первую очередь опускаем в (4.42) суммы с относительно малыми значениями элементов a_{ij}, т.е. считаем, что в определяющую сумму $\Sigma'_{*}\, a_{ij}$ в первую очередь должны попадать максимальные элементы своих строк ЛО. Обозначим $k_r\,(i)$ номер столбца, в котором стоит r-й порядковый элемент i-й строки ЛО $\overset{3}{A}^{\vee}$. Этот элемент обозначим $a^{(r)}_{i,k_r(i)}$, так что $a^{(1)}_{i,k_1\,(i)}$ — минимальный, а $a^{(M)}_{i,k_M(i)}$ — максимальный элементы г-й строки. По нашему принципу можно в разложении (4.42) сохранить лишь одну сумму — ту, которая содержит максимальный элемент i-й строки. При этом получим для ЛО $\overset{3}{A}^{\vee}$ приближенное разложение первого порядка по i-й строке

$$\overset{3}{A}^{\vee} \geqslant a^{(M)}_{i,k_M(i)} + \overset{3}{A}^{\vee}_{i,k_M(i)}. \quad (4.71)$$

Сохранив в разложении (4.42) две суммы - те, которые содержат максимальный и предмаксимальный элементы i-й строки, — получим приближенное разложение второго порядка по i-й строке

$$\overset{3}{A}^{\vee} \geqslant [a^{(M)}_{i,k_M(i)} + \overset{3}{A}^{\vee}_{i,k_M(i)}] \vee [a^{(M-1)}_{i,k_{M-1}(i)} + \overset{3}{A}^{\vee}_{i,k_{M-1}(i)}] \quad (4.72)$$

и т.д. Разложим ЛО $\overset{3}{A}^{\vee}$ по i-й строке с порядком p_i. Получившиеся в разложении ЛО $\overset{3}{A}^{\vee}_{i,k_r(i)}$, $r = 1, \ldots, p_1$, снова разложим по j-й строке с порядком p_2 и т.д. В итоге получим явное выражение — оценку ЛО снизу, по которому можно вычислить приближенно ЛО.

Рассмотрим простейший случай, когда все разложения первого порядка $(p_1 = . \quad . = p_M = 1)$. Тогда в разложении участвуют только максимальные элементы строк. Обозначим их $a^{*}_{ik\,(i)}$. Разложим $\overset{3}{A}^{\vee}$ по первой строке:

$\overset{3}{A}^{\vee} \geqslant a^{*}_{1k\,(1)} + \overset{3}{A}^{\vee}_{1k\,(1)}$. Логическое дополнение $\overset{3}{A}^{\vee}_{1k(1)}$ снова разложим по его первой строке (по второй строке $\overset{3}{A}^{\vee}$): $\overset{3}{A}^{\vee}_{1k\,(1)} \geqslant a^{*}_{2k\,(2)\setminus\,k\,(1)} + \overset{3}{A}^{\vee}_{12,k\,(1)\,k\,(2)}$. Здесь $a^{*}_{2k\,(2)\setminus\,k\,(1)}$ — максимальный элемент второй строки ЛО, полученного из $\overset{3}{A}^{\vee}$ вычеркиванием k(1)-го столбца (элемент стоит в *k(2)-м* столбце $\overset{3}{A}^{\vee}$); $\overset{3}{A}^{\vee}_{12,k\,(1)\,k\,(2)}$ - ЛО, полученный вычеркиванием в $\overset{3}{A}^{\vee}$ строк 1, 2 и столбцов *k(1), k(2).* Последний ЛО можно разложить по его первой строке и т. д. Подставив каждое следующее разложение в предыдущее, найдем выражение — оценку

$$\overset{3}{A}^{\vee} \geqslant a^{*}_{1k(1)} + a^{*}_{2k(2)\setminus k(1)} + a^{*}_{3k(3)\setminus k(1)k(2)} + \cdots$$
$$\cdots + a^{*}_{M-1,k\,(M-1)\setminus k(1)\ldots k(M-2)} + a_{M\setminus k(1)\ldots k(M-1)}. \quad (4.73)$$

Согласно (4.73) алгоритм приближенного вычисления $M \times M$ –ЛО $\overset{3}{A}^{\vee}$ таков: 1) выделить в первой строке $\overset{3}{A}^{\vee}$ максимальный элемент $a^{*}_{1k\,(1)}$, вычеркнуть столбец k (1), содержащий этот элемент; 2) во второй строке получившегося $M \times (M$ — 1)-ЛО выделить максимальный элемент $a^{*}_{2k(2)\setminus\,k(1)}$ и вычеркнуть столбец k *(2),* содержащий этот элемент; 3) в третьей строке получившегося $M \times (M$ - 2)-ЛО выделить максимальный элемент $a^{*}_{3k\,(3)\setminus\,k\,(1)\,k\,(2)}$ и вычеркнуть столбец k (3), содержащий этот элемент;...; *M)* взять единственный элемент $a_{M\setminus\,k\,(1)\ldots k\,(M-1)}$, оставшийся в последней, M-й строке ЛО после указанных вычеркиваний столбцов *k(1),... ...,* *k(M*— 1). Совокупность всех выделенных элементов дает приближенно определяющую сумму $\Sigma'_{*}\, a_{ij}$ ЛО $\overset{3}{A}^{\vee}$, а сумма этих элементов - приближенное значение $\overset{3}{A}^{\vee}$. Изменив порядок просмотра строк, получим другое приближенное значение $\overset{3}{A}^{\vee}$. Алгоритм приближенного вычисления ЛО $\overset{3}{A}^{\wedge}$ отличается от изложенного тем, что выделяются минимальные элементы строк. Сложность изложенного способа вычисления ЛО

$$N\,(M) = 0{,}5\,M\,(M-1). \quad (4.74)$$

Таким образом, этим способом можно вычислять ЛО практически неограниченного размера *M.* Точность способа тем выше, чем больше в ЛО строк, максимальные (минимальные) элементы которых расположены в столбцах, не содержащих аналогичных элементов других строк. Заметим, что вместо строк можно просматривать столбцы.

Понятие ЛО с ограничениями впервые было сформулировано в связи с задачей оптимального распределения работ между исполнителями (ЛО первого рода). ЛО с ограничениями второго, третьего и четвертого рода были введены при решении задач оптимального распределения работ между исполнителями с ограниченной нагрузкой, назначения и оптимального выбора режимов операций в технологическом процессе.

5. Логические определители с ограничениями на область

5.1. Вводные замечания

Кроме ЛО с ограничениями на суммы элементов (гл. 4), можно ввести еще один большой класс ЛО, служащих для упрощения анализа соответствующего класса высокоразмерных нелинейных систем. Эти новые ЛО, подобно ЛО гл. 4, вводятся как некоторая экстремальная характеристика прямоугольной матрицы, точнее, как максимальная (минимальная) из сумм элементов матрицы, удовлетворяющих определенному ограничению. Однако, в отличие от ЛО гл. 4, где ограничения относились непосредственно к сумме элементов матрицы (например, эта сумма не должна превышать заданной границы), здесь ограничения накладываются на область матрицы, элементы которой могут быть включены в указанную сумму. ЛО с ограничениями на область (как и ЛО гл. 4) выражаются через свои элементы с помощью дизъюнкции и конъюнкции БЛ и алгебраического сложения. Эти ЛО облегчают решение проблемы размерности при изучении тех систем, все возможные варианты действия которых задаются прямоугольной матрицей, причем выбор какого-то одного варианта сводится к выбору одной перестановки столбцов (строк), а выбор наилучшего варианта - к отысканию оптимальной перестановки, которой соответствует максимальное (минимальное) значение ЛО. Наиболее характерным классом таких систем являются последовательные системы обслуживания календарного типа, основная задача синтеза которых - выбор оптимального порядка обслуживания поступающих работ.

5.2. Понятие логического определителя с ограничениями на область

Пусть $A = \| a_{ij} \|$— произвольная прямоугольная $m \times n$-матрица с числовыми элементами. Будем рассматривать в A всевозможные нисходящие ступенчатые пути вдоль клеток, начинающиеся верхней левой клеткой (1,1) и оканчивающиеся нижней правой клеткой *(m, n).* Эти пути можно представить в виде

$$\begin{array}{llll}
(1.1) \to \ldots \to (1, k_1) & & & \\
\qquad\qquad\vdots & & & \\
 & (p, k_1) \to \ldots \to (p, k_2) & & \\
 & \qquad\qquad\qquad\downarrow & & \\
 & & \ldots & \\
 & & \qquad\downarrow & \\
 & & & (m, k_{m-1}) \to \ldots \to (m, n).
\end{array}$$

Пусть M - общее число таких путей. Обозначим через $\Sigma'_q a_{ij}, q = 1, \ldots, M,$ сумму элементов матрицы A, расположенных вдоль q-го пути и через $\Sigma''_q a_{ij}$ — сумму ее элементов, расположенных вне q- го пути. Будем называть их ступенчатыми суммами первого и второго рода.

Определение 5.1. Выражения вида

$$A^{\vee} \equiv | a_{ij} |^{\vee} = \bigvee_{q=1}^{M} \Sigma'_q a_{ij}, \quad (5.1)$$

$$A^{\wedge} \equiv | a_{ij} |^{\wedge} = \bigwedge_{q=1}^{M} \Sigma''_q a_{ij}, \quad (5.2)$$

т.е. дизъюнкцию (конъюнкцию) БЛ всех ступенчатых сумм первого (второго) рода матрицы A назовем соответственно *ЛО первого (второго) рода с ограничениями для матрицы А.* Будем также называть их дизъюнктивным ЛО и конъюнктивным ЛО.

Определение 5.2. Выражение вида

$$A^{+} \equiv | a_{ij} |^{+} = \sum_{t=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad (5.3)$$

т.е. сумму всех элементов матрицы A назовем *суммирующим ЛО матрицы А.* Каждая матрица A всегда имеет непустые множества сумм $\Sigma'_q a_{ij}$ и $\Sigma''_q a_{ij}$, а отсюда и ЛО $A^{\vee}$ и $A^{\wedge}$. Очевидно и существование у любой матрицы *АЛОА*$^{+}$.

5.3. Свойства логических определителей

Свойства введенных ЛО определяются нижеследующими предложениями. Ограничимся доказательством свойств дизъюнктивного и конъюнктивного ЛО, ибо соответствующие свойства суммирующего ЛО следуют непосредственно из его определения (5.3).

Лемма 5.1. *Общее для всех элементов слагаемое можно вынести за знак ЛО с соответствующим коэффициентом:*

$$|a_{ij}+c|^{\vee}=|a_{ij}|^{\vee}+c\,(m+n-1), \quad (5.4)$$

$$|a_{ij}+c|^{\wedge}=|a_{ij}|^{\wedge}+c\,(mn-m-n+1), \quad (5.5)$$

$$|a_{ij}+c|^{+}=|a_{ij}|^{+}+cmn.$$

Доказательство. Имея в виду, что каждая сумма $\Sigma'_q a_{ij}$ содержит $m+n$ — 1 слагаемых a_{ij} и учитывая распределительный закон (1.37), найдем соотношение

$$|a_{ij}+c|^{\vee}=\bigvee_q\ (a_{ij}+c)=\bigvee_q\ [\Sigma'_q a_{ij}+c\,(m+n-1)]=$$

$$=\bigvee\ \Sigma'_q a_{ij}+c\,(m+n-1)=|a_{ij}|^{\vee}+c\,(m+n-1),$$

совпадающее с (5,4). Соотношение (5.5) для конъюнктивного ЛО доказывается аналогично с учетом того, что каждая сумма $\Sigma''_q a_{ij}$ содержит mn — m — n + 1 слагаемых a_{ij} и учитывая распределительный закон (1.38). Аналогично доказывается соотношение (5.5) для суммирующего ЛО.

Лемма 5.2. *Общий для всех элементов положительный сомножитель можно вынести за знак ЛО*

$$|a_{ij}c|^{\vee}=|a_{ij}|^{\vee}c,\quad |a_{ij}c|^{\wedge}=|a_{ij}|^{\wedge}\ c,\quad |a_{ij}c|^{+}=|a_{ij}|^{+}c,\ \ c>0, \quad (5.6)$$

Доказательство. Имеем, учитывая распределительный закон (1.45)

$$|a_{ij}c|^{\vee}=\bigvee_q\ \Sigma'_q a_{ij}c=\bigvee_q\ c\,\Sigma'_q a_{ij}=c\bigvee_q\ \Sigma'_q a_{ij}=|a_{ij}|^{\vee}c,$$

что совпадает с первым соотношением (5.6). Доказательство второго и третьего соотношений аналогично (используется закон (1.46)).

Лемма 5.3. *Общий для всех элементов отрицательный сомножитель можно вынести за знак ЛО в виде*

$$|a_{ij}c|^{\vee}=[|a_{ij}|^{\vee}-\Delta]\,c,\qquad |a_{ij}c|^{\wedge}=[|a_{ij}|^{\wedge}+\Delta]\,c, \quad (5.7)$$

$$|a_{ij}c|^{+}=|a_{ij}|^{+}c,\qquad c<0,$$

где Δ — размах ступенчатых сумм первого рода, равный

$$\Delta=\bigvee_{q=1}^{M}\ \Sigma'_q a_{ij}-\bigwedge_{q=1}^{M}\ \Sigma'_q a_{ij}. \quad (5.8)$$

Доказательство. С учетом распределительного закона (1.48) и формулы (5.8) имеем

$$|a_{ij}c|^{\vee}=\bigvee_q\ \Sigma'_q a_{ij}c=\bigvee_q\ c\,\Sigma'_q a_{ij}=$$

$$=c\bigwedge_q \Sigma'_q a_{ij}=c[\bigvee_q \Sigma'_q a_{ij}-\Delta]=c[|a_{ij}|^{\vee}-\Delta].$$

Аналогично, учитывая закон (1.47), формулу (5.8) и равенство размахов ступенчатых сумм первого и второго рода, найдем

$$|a_{ij}c|^{\wedge}=\bigwedge_q \Sigma''_q a_{ij}c=\bigwedge_q c\,\Sigma''_q a_{ij}=c\bigvee_q \Sigma''_q a_{ij}=$$

$$=c[\bigwedge_q\ \Sigma''_q a_{ij}+\Delta]=c[|a_{ij}|^{\wedge}+\Delta].$$

В частном случае при c = -1 соотношения (5.7) принимают вид

$$|-a_{ij}|^{\vee}=\Delta-|a_{ij}|^{\vee},\qquad |-a_{ij}|^{\wedge}=-|a_{ij}|^{\wedge}-\Delta,\qquad |-a_{ij}|^{+}=-|a_{ij}|^{+}, \quad (5.9)$$

показывающий, что общий для всех элементов знак минус можно вынести за знак ЛО, прибавив к нему постоянную Δ для дизъюнктивного ЛО или - Δ для конъюнктивного.

Лемма 5.4. *Слагаемые угловых элементов a_{11} и a_{mn} ЛО $A^{\vee}$ можно вынести за знак ЛО*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+c & a_{12}\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots a_{mn}+d \end{vmatrix}^{\vee}=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}^{\vee}+c+d. \quad (5.10)$$

Доказательство. Угловые элементы, стоящие в (1,1) -й и *(m, n)*-й клетках левого ЛО, входят в каждую сумму вида $\Sigma'_q a_{ij}$. Отсюда, учитывая распределительный закон (1.37), получаем выражение левой части (5.10)

$$\bigvee_q \Sigma'_q \tilde{a}_{ij}=\bigvee_q\ (c+d+\Sigma'_q a_{ij})=(\bigvee_q \Sigma'_q a_{ij})+c+d,$$

которое равно правой части.

Частным случаем формулы (5.10) являются формулы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}^{\vee}=\begin{vmatrix} 0 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}^{\vee}+a_{11}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & 0 \end{vmatrix}^{\vee}+a_{mn}=\begin{vmatrix} 0 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & 0 \end{vmatrix}^{\vee}+a_{11}+a_{mn}, \quad (5.11)$$

показывающие, что угловые элементы a_{11} и a_{mn} можно вынести за знак дизъюнктивного ЛО.

Лемма 5.5. *Слагаемые угловых элементов a_{11} и a_{mn} конъюнктивного ЛО $A^{\wedge}$ можно вычеркнуть, не изменив величины ЛО*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+c & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}+d \end{vmatrix}^{\wedge} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}^{\wedge}. \quad (5.12)$$

Доказательство. Угловые элементы, стоящие в клетках (1,1) и *(m, n)* левого ЛО, не входят ни в одну сумму вида $\Sigma''_q a_{ij}$. Поэтому по определению (5.2) конъюнктивного ЛО любое изменение величин этих элементов не влияет на величину ЛО.

Частным случаем соотношения (5.12) являются соотношения

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}^{\wedge} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}^{\wedge} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m,n-1} & 0 \end{vmatrix}^{\wedge} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m,n-1} & 0 \end{vmatrix}^{\wedge}, \quad (5.13)$$

показывающее, что угловые элементы a_{11} и a_{mn} ЛО $A^{\wedge}$ можно вычеркнуть, не изменив величины ЛО.

Лемма 5.6. *Соотношение дизъюнктивного, конъюнктивного и суммирующего ЛО одной и той же матрицы A дается формулой*

$$A^{\vee} + A^{\wedge} = A^{+}. \quad (5.14)$$

Доказательство. Учитывая очевидное равенство $\Sigma'_q a_{ij} + \Sigma''_q a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ и распределительные законы (1.37), (1.48), найдем

$$A^{\vee} = \bigvee_q \Sigma'_q a_{ij} = \bigvee_q \Big(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \Sigma''_q a_{ij} \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \bigvee_q \left(-\Sigma''_q a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \bigwedge_q \Sigma''_q a_{ij} = A^{+} - A^{\wedge},$$

что совпадает с (5.14).

Лемма 5.7. *Пусть a_i, a_j - есть пара строк $m \times n$-матрицы A, симметричных относительно середины A, т.е. $i + j = m + 1$, и a^i, a^j — пара симметричных столбцов матрицы A (для них $i+j=n+1$). Тогда перестановка местами каждой пары симметричных строк и каждой пары симметричных столбцов не меняет величин ЛО $A^{\vee}$ и $A^{\wedge}$. Величина ЛО A^{+} не меняется при любой перестановке строк или столбцов.*

Доказательство. Указанные перестановки строк и столбцов означают преобразование матрицы $A = \| a_{ij} \|$ в матрицу $B = \| b_{ij} \|$ по правилу $b_{ij} = a_{m+1-i,n+1-j}$. При этом каждая ступенчатая сумма матрицы *A*

$$\begin{array}{llll} \Sigma'_q a_{ij} = a_{11} + \dots + a_{1k_1} + & & & \\ & \dot{a}_{pk_1} + \dots + \underset{\downarrow}{a_{pk_2}} & & \\ & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \downarrow & \\ & & & a_{m,k_{m-1}} + \dots + a_{mn} \end{array}$$

преобразуется в равную ей ступенчатую сумму матрицы *B*

$$\begin{array}{lll} \Sigma'_q b_{ij} = b_{11} + \dots + \underset{\downarrow}{b_{1,n+1-k_{m-1}}} + & & \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \downarrow & \\ & b_{m+1-p,n+1-k_2} + \dots + & b_{m+1-p,n+1-k_1} \\ & & \vdots \\ & & \dot{b}_{m,n+1-k_1} + \dots \\ & & \dots + b_{mn}. \end{array}$$

Поэтому $A^{\vee} = B^{\vee}$. Отсюда, учитывая соотношение ЛО (5.14) и очевидное свойство $A^{+} = B^{+}$, находим $A^{\wedge} = B^{\wedge}$.

Лемма 5.8. *В суммирующем ЛО слагаемое любого отдельного элемента можно вынести за знак ЛО*

$$\begin{vmatrix} & \vdots & \\ \dots & a_{ij} + c & \dots \\ & \vdots & \end{vmatrix}^{+} = \begin{vmatrix} & \vdots & \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{vmatrix}^{+} + c. \quad (5.15)$$

Доказательство следует из определения (5.3) суммирующего ЛО.

5.4. Разложения логических определителей

ЛО с ограничениями на область разлагаются на ЛО меньших размеров, подобно ЛО уже рассмотренных типов (гл. 3,4).

Определение 5.3. Пусть $A^{\vee}$ - произвольный $m \times n$-ЛО (5.1). ЛО, полученный из $A^{\vee}$ вычеркиванием *i*- й строки, называется логическим дополнением этой строки и обозначается $A^{\vee}_{i,-}$, а ЛО, полученный из $A^{\vee}$ вычеркиванием *j*-го столбца, — логическим дополнением этого столбца и обозначается $A^{\vee}_{-,j}$. Аналогично определяются логические дополнения $A^{\wedge}_{i,-}$ *i*-й строки и $A^{\wedge}_{-,j}$ *j*-го столбца в ЛО $A^{\wedge}$.

Теорема 5.1. *ЛО $A^{\vee}$ вида* (5.1) *можно разложить по его угловому элементу a_{11} или a_{mn}, представив в виде суммы этого элемента, и дизъюнкции БЛ логических дополнений строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент:*

$$A^{\vee} = a_{11} + (A^{\vee}_{1,-} \vee A^{\vee}_{-,1}); \quad A^{\vee} = a_{mn} + (A^{\vee}_{m,-} \vee A^{\vee}_{-,n}). \qquad (5.16)$$

Доказательство. Множество всех нисходящих ступенчатых путей (1,1) $\to \ldots \to \ldots \to (m,\ n)$ в матрицей можно разделить на два класса $I_1 : (1,\ 1) \to (1, 2) \to \ldots \to (m, n)$ и $I_2 : (1,\ 1) \to (2,\ 1) \to \ldots \to (m, n)$. В соответствии с этим имеем

$$A^{\vee} = \bigvee_q \Sigma'_q a_{ij} = (\bigvee_{q \in I_1} \Sigma'_q a_{ij}) \vee (\bigvee_{q \in I_2} \Sigma'_q a_{ij}) =$$

$$= (a_{11} + \bigvee_q \Sigma'_q a_{ij} |_{j \geqslant 2}) \vee (a_{11} + \bigvee_q \Sigma'_q a_{ij} |_{i \geqslant 2}) =$$

$$= (a_{11} + A_{-,1}) \vee (a_{11} + A^{\vee}_{1,-}) = a_{11} + (A^{\vee}_{1,-} \vee A^{\vee}_{-,1}),$$

что доказывает первое соотношение. Аналогично, но с разбиением множества путей на классы $I_1 :\ (1,\ 1) \to \ldots \to (m-1,\ n) \to (m,\ n)$ и $I_2 :\ (1,\ 1) \to \ldots\ldots \to (m, n-1) \to (m, n)$ доказывается второе соотношение.

Теорема 5.2. *ЛО* $A^{\wedge}$ *вида* (5.2) *можно разложить по первой строке и первому столбцу или по последней строке и последнему столбцу, представив в виде конъюнкции БЛ сумм элементов указанных строк или столбцов и их логических дополнений:*

$$A^{\wedge} = (\sum_{j=2}^{n} a_{1j} + A^{\wedge}_{1,-}) \wedge (\sum_{i=2}^{m} a_{i1} + A^{\wedge}_{-,1}),$$

$$A^{\wedge} = (\sum_{j=1}^{n-1} a_{mj} + A^{\wedge}_{m,-}) \wedge (\sum_{i=1}^{m-1} a_{in} + A^{\wedge}_{-,n}). \qquad (5.17)$$

Доказательство. Используя соотношение (5.14) между дизъюнктивным, конъюнктивным и суммирующем ЛО, разложение (5.16) и распределительные законы (1.38), (1.47), получим

$$A^{\wedge} = A^{+} - A^{\vee} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - a_{11} - (A^{\vee}_{1,-} \vee A^{\vee}_{-,1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - a_{11} - [(\sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - A^{\wedge}_{1,-}) \vee (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=2}^{n} a_{ij} - A^{\wedge}_{-,1})] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - a_{11} + [(-\sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + A^{\wedge}_{1,-}) \wedge (-\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=2}^{n} a_{ij} + A^{\wedge}_{-,1})]$$

и после внесения в скобки внешних слагаемых получаем первое соотношение (5.17). Доказательство второго соотношения аналогично.

Определение 5.4. Пусть $A^{\vee}$ — произвольный $m \times n$-ЛО (5.1). ЛО, полученный из $A^{\vee}$ вычеркиванием столбцов, стоящих правее элемента a_{rk}, и строк, стоящих ниже a_{rk}, называется левым логическим дополнением элемента a_{rk} в ЛО$A^{\vee}$ и обозначается $A^{\vee,\text{лев}}_{rk}$. Далее, ЛО, полученный из $A^{\vee}$ вычеркиванием столбцов, стоящих левее a_{rk}, и строк, стоящих выше a_{rk}, называется правым логическим дополнением a_{rk} в ЛО $A^{\vee}$ и обозначается $A^{\vee,\text{пр}}_{rk}$. Аналогично определяются левое $A^{\wedge,\text{лев}}_{rk}$ и правое $A^{\wedge,\text{пр}}_{rk}$ логические дополнения элемента a_{rk} в ЛО$A^{\wedge}$.

Теорема 5.3. *ЛО* $A^{\vee}$ *вида* (5.1) *можно разложить по произвольной строке или столбцу в виде*

$$A^{\vee} = \bigvee_{k=1}^{n} (A^{\vee,\text{лев}}_{rk} + A^{\vee,\text{пр}}_{rk} - a_{rk}), \qquad r = 2, \ldots, m,$$

$$A^{\vee} = \bigvee_{r=1}^{m} (A^{\vee,\text{лев}}_{rk} + A^{\vee,\text{пр}}_{rk} - a_{rk}), \qquad k = 2, \ldots, n. \qquad (5.18)$$

Доказательство. Обозначим $(\Sigma'_q a_{ij})^{(p,s)-(l,t)}_{(r,k)}$ сумму элементов матрицы *A,* расположенных вдоль *q*-го нисходящего ступенчатого пути, начинающегося клеткой *(p, s),* оканчивающегося клеткой (*l*, *t)* и проходящего через клетку *(r, k)* (если прохождение через клетку *(r, k)* не оговаривается, символ *(r, k)* опускается). Тогда ЛО $A^{\vee}$ можно выразить р виде

$$A^{\vee} = \bigvee_q \Sigma'_q a_{ij} = \bigvee_{r=1}^{m} \bigvee_q (\Sigma'_q a_{ij})^{(1,1)-(m,n)}_{(r,k)} =$$

$$= \bigvee_{r=1}^{m} [\bigvee_q (\Sigma'_q a_{ij})^{(1,1)-(r,k)} + \bigvee_q (\Sigma'_q a_{ij})^{(r,k)-(m,n)} - a_{rk}] =$$

$$= \bigvee_{r=1}^{m} (A^{\vee,\text{лев}}_{rk} + A^{\vee,\text{пр}}_{rk} - a_{rk}),$$

что доказывает второе соотношение (5.18). Первое соотношение доказывается аналогично.

Теорема 5.4. *ЛО* $A^{\vee}$ *вида* (5.1) *можно разложить по произвольной строке или столбцу в виде следующего варианта разложения* (5.17) :

$$A^{\vee} = \bigvee_{k=1}^{n} (A^{\vee,\text{лев}}_{rk} + A^{\vee,\text{пр}}_{r+1,k}), \qquad r = 1, \ldots, m-1;$$

$$A^{\vee} = \bigvee_{r=1}^{m} (A^{\vee,\text{лев}}_{rk} + A^{\vee,\text{пр}}_{r,k+1}), \quad k = 1, \ldots, n-1. \qquad (5.19)$$

Доказательство. ЛО $A^{\vee}$ можно выразить в виде

$$A^{\vee} = \bigvee_{q} \Sigma'_q u_{ij} = \bigvee_{r=1}^{m} \bigvee_{q} (\Sigma'_q a_{ij})^{(1,1)-(m,n)}_{(r,k),(r,k+1)} =$$

$$= \bigvee_{r=1}^{m} [\bigvee_{q} (\Sigma'_q a_{ij})^{(1,1)-(r,k)} + \bigvee_{q} (\Sigma'_a a_{ij})^{(r,k+1)-(m,n)}] =$$

$$= \bigvee_{r=1}^{m} (A^{\vee,\text{лев}}_{rk} + A^{\vee,\text{пр}}_{r,k+1}),$$

что дает второе соотношение (5.19). Первое соотношение доказывается аналогично.

Теорема 5.5. *ЛО* $A^{\wedge}$ *вида* (5.2) *можно разложить по произвольной строке и столбцу в виде*

$$\begin{aligned} A^{\wedge} &= \bigwedge_{k=1}^{n} (A^{\wedge,\text{лев}}_{rk} + A^{\wedge,\text{пр}}_{rk} + \sum_{i,j \in I_{rk}} a_{ij}), \quad r = 2, \ldots, m; \\ A^{\wedge} &= \bigwedge_{r=1}^{m} (A^{\wedge,\text{лев}}_{rk} + A^{\wedge,\text{пр}}_{rk} + \sum_{i,j \in I_{rk}} a_{ij}), \quad k = 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Здесь $I_{rk} = \{(i \leqslant r-1, j \geqslant k+1)$ или $(i \geqslant r+1, j \leqslant k-1)\}$.

Доказательство. Используя соотношение (5.14) между дизъюнктивным, конъюнктивным и суммирующим ЛО, разложение (5.18) и распределительные законы (1.38), (1.47), запишем

$$A^{\wedge} = A^{+} - A^{\vee} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \bigvee_{r=1}^{m} (A^{\vee,\text{лев}}_{rk} + A^{\vee,\text{пр}}_{rk} - a_{rk}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \bigvee_{r=1}^{m} (\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} - A^{\wedge,\text{лев}}_{rk} + \sum_{i=r}^{m} \sum_{j=k}^{n} a_{ij} - A^{\wedge,\text{пр}}_{rk} - a_{rk}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \bigwedge_{r=1}^{m} (A^{\wedge,\text{лев}}_{rk} + A^{\wedge,\text{пр}}_{rk} - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} - \sum_{i=r}^{m} \sum_{j=k}^{n} a_{ij} + a_{rk})$$

и после внесения в скобки внешних слагаемых получаем второе соотношение (5.20). Доказательство первого соотношения аналогично. Отметим, что можно вывести родственные (5.20) разложения, базируясь не на (5.18), а на (5.19).

5.5. Вычисление логических определителей

Вычисление ЛО с ограничениями на область понимается в том же смысле, что и вычисление ЛО с ограничениями на сумму элементов (§ 4.11).

Суммирующий ЛО A^{+} можно вычислять непосредственно по определению (5.3). Сложность такого вычисления (количество двухместных операций сложения)

$$N_{+}(m,n) = mn - 1 \tag{5.21}$$

растет достаточно медленно с увеличением размеров $m \times n$ ЛО,что позволяет вычислять большие суммирующие ЛО.

Дизъюнктивный ЛО $A^{\vee}$ можно вычислять непосредственно по определению (5.1) (путем перечисления всех ступенчатых сумм и последующего выбора максимальной суммы) либо с помощью последовательных разложений на меньшие ЛО на основании формул разложения (из которых наиболее удобны формулы (5.16)). В первом случае сложность вычислений (суммарное число двухместных операций $\vee$, $+$)

$$N(m,n) = [M(m,n) - 1] (m + n - 1), \tag{5.22}$$

где $M(m, n)$ — число нисходящих ступенчатых путей в $m \times n$ -матрице A. Это число удовлетворяет разностному уравнению

$$M(m+1,n) = \sum_{k=1}^{n} M(m,k). \tag{5.23}$$

Действительно, при добавлении к $m \times n$-матрице A снизу одной строки каждый нисходящий ступенчатый путь $(1, 1) \to \ldots \to (m, k)$ в A, где $k = 1, 2, \ldots, n$, формирует один нисходящий ступенчатый путь $(1, 1) \to \ldots \ldots \to (m, k) \to (m+1, k) \to \ldots \to (m+1, n)$ из левой верхней в правую нижнюю клетку новой матрицы. Решая уравнение (5.23), последовательно находим

$$M(1,n) = 1, M(2,n) = n, M(3,n) = n(n+1)/2!, \ldots.$$

$$M(m,n) = n(n+1) \ldots (n+m-2)/(m-1)! = C^{m-1}_{n+m-2}. \tag{5.24}$$

Из (5.22), (5.24) видно, что при $n \to \infty$ и фиксированных m сложность N растет как $n^{m} \,\check{}/(m-1)!$ Аналогично растет T при $m \to \infty$ и фиксированном n. Это принципиально позволяет вычислять довольно большие ЛО. Однако для практической реализации этого метода вычислений надо еще иметь алгоритм перечисления всех ступенчатых путей (сумм) матрицы, что обычно бывает громоздко.

Вычисление ЛО $A^{\vee}$ с помощью разложений (5.16) оказывается идейно более простым и лучше приспособленным для машинного и ручного счета. Оно основано на следующей интерпретации указанных разложений. Обозначим через $A^{\vee}_{rk}$ дизъюнктивный ЛО, образованный r первыми строками и k первыми столбцами матрицы A, где $1 \leqslant r \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда разложение (5.16) ЛО $A^{\vee}_{rk}$ по его нижнему правому элементу a_{rk} таково:

$$A^{\vee}_{rk} = (A^{\vee}_{r,k-1} \vee A^{\vee}_{r-1,k}) + a_{rk}. \tag{5.25}$$

Ясно, что искомый ЛО $A^{\vee}$ есть ЛО $A^{\vee}_{mn}$. Поэтому для вычислений $A^{\vee}$ достаточно ввести в рассмотрение присоединенную к A матрицу

$$A^{*} = \| A^{\vee}_{rk} \|, \quad 1 \leqslant r \leqslant m, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad (5.26)$$

и вычислить ее нижний правый элемент $A^{\vee}_{mn}$. Вычисление элементов матрицы A^* производится по следующему рекуррентному *правилу 1,* вытекающему из (5.25): *элемент* $A^{\vee}_{rk}$ *равен максимальному из элементов, стоящих слева от него и над ним, сложенному с соответствующим элементом* a_{rk} *матрицы А.* При этом элементы первой строки и первого столбца матрицы A^* должны задаваться в виде некоторых начальных условий. Эти условия получаются непосредственно из определения ЛО $A^{\vee}$:

$$A^{\vee}_{11} = a_{11}, \quad A^{\vee}_{12} = a_{11} + a_{12}, \dots, A^{\vee}_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j},$$

Таким образом, процедура вычисления дизъюнктивного ЛО $A^{\vee}$такова 1) по формулам (5.27) вычисляются все элементы первой строки и первого столбца присоединенной матрицы A^*; 2) по правилу 1 вычисляются рекуррентно остальные элементы матрицы A , при этом вычисление идет в направлении от левого верхнего к правому нижнему углу матрицы, так что последним вычисляется элемент $A^{\vee}_{mn}$, равный искомому ЛО $A^{\vee}$.

Изложенный алгоритм естественно назвать *волновым.*

Пример 5.1. Вычислить ЛО $A^{\vee}$ для матрицы *А,* заданной табл. 3. Вычисление ведем прямо в таблице, располагая подсчитываемые элементы $A^{\vee}_{ij}$ присоединенной матрицы A^* в углах соответствующих клеток таблицы. Последовательно находим

$$A^{\vee}_{11} = 2, A^{\vee}_{12} = 2 + 4 = 6, A^{\vee}_{13} = 2 + 4 + 7 =$$
$$= 13, A^{\vee}_{14} = 2 + 4 + 7 + 8 = 21, A^{\vee}_{15} = 2 + 4 + 7 + 8 + 10 = 31,$$
$$A^{\vee}_{21} = 11, A^{\vee}_{31} = 13, A^{\vee}_{41} = 19, A^{\vee}_{22} = (11 \vee 6) + 6 = 17, A^{\vee}_{32} = 20$$

и т.д. В итоге получаем

$$A^{\vee} = A^{\vee}_{45} = 40.$$

Существует двойственная по отношению к изложенной процедура вычисления дизъюнктивного ЛО. Она основана на введении присоединенной к A матрицы $\tilde{A} = \| \tilde{A}^{\vee}_{rk} \|, \ 1 \leqslant r \leqslant m, \ 1 \leqslant k \leqslant n,$, где $\tilde{A}^{\vee}_{rk}$ — ЛО, образованный *r* последними строками и *k* последними столбцами матрицы $\tilde{A}$. Далее применяется рекуррентное *правило 2* вычисления элементов матрицы $\tilde{A}$: *элемент* $\tilde{A}^{\vee}_{rk}$ *равен максимальному из элементов, стоящих справа от него и под ним, сложенному с соответствующим элементом* a_{rk} *матрицы А.* Это позволяет вычислить рекуррентно все элементы матрицы *А*, двигаясь в направлении от правого нижнего к левому верхнему углу матрицы.

Последним вычисляется элемент $\tilde{A}^{\vee}_{mk}$, равный, очевидно, искомому ЛО $A^{\vee}$.

Сложность $N_{\vee}(m, n)$ вычисления $m \times n$-ЛО $A^{\vee}$ с помощью изложенного волнового алгоритма складывается из *п* - 1 двухместных операций + на вычисление первой строки матрицы A^* и *т* — 1 таких операций на вычисление ее первого столбца; двух двухместных операций (одна $\vee$ и одна +) на вычисление любого другого элемента в A^*.

Таблица 3

Элемент матрицы *А*	Номер столбца *i*				
	1	2	3	4	5
a_{1i}	2 ^{2}	4 ^{6}	7 ^{13}	8 ^{21}	10 ^{31}
a_{2i}	9 ^{11}	6 ^{17}	3 ^{20}	2 ^{23}	1 ^{32}
a_{3i}	2 ^{13}	3 ^{20}	4 ^{24}	3 ^{27}	1 ^{33}
a_{4i}	6 ^{19}	5 ^{25}	2 ^{27}	4 ^{31}	7 ^{40}

Таким образом,

$$N_{\vee}(m, n) = (n - 1) + (m - 1) + 2(n - 1)(m - 1) = 2mn - m - n. \qquad (5.28)$$

Из (5.28) следует возможность вычисления с помощью разложений ЛО $A^{\vee}$ практически неограниченных размеров $m \times n$.

Конъюнктивный ЛО $A^{\wedge}$ проще всего вычислять, сводя, согласно (5.14), к вычислению пары ЛО A^{+} и $A^{\vee}$ от той же самой матрицы *А.* Сложность *N(m,n)* такого вычисления $m \times n$ -ЛО $A^{\wedge}$ в предположении, что ЛО $A^{\vee}$ будет вычисляться разложением, равна

$$N_{\wedge}(m, n) = N_{+}(m, n) + N_{\vee}(m, n) + 1 =$$
$$= mn - 1 + 2mn - m - n + 1 = 3mn - m - n. \qquad (5.29)$$

Из (5.29) видна возможность вычисления ЛО $A^{\wedge}$ практически любых размеров $m \times n$.

ЛО с ограничениями на область формирования сумм элементов был введен при решении задачи об оптимальном порядке запуска *п* работ в систему из *т* последовательно соединенных блоков. Там же были приведены некоторые свойства указанных ЛО. Различные типы введенных выше ЛО (порядковые ЛО - гл. 2, ЛО с ограничениями на сумму элементов - гл. 4, ЛО с ограничениями на область — гл. 5) обусловлены различием классов нелинейных систем, для которых мы пытаемся решить проблему размерности системы путем перехода к ее блочному описанию. Интересно отметить, что и в классе линейных систем, где решение проблемы размерности уже давно связано с определенной блочной конструкцией - матрицей, дальнейшего продвижения ищут на том же пути - дифференциации систем и математических конструкций для их изучения (структурные числа

Беллерта-Возняцки для изучения электрических схем, структурные матрицы Шатихина для исследования систем автоуправления).

ПРИЛОЖЕНИЕ

БУЛЕВЫ РЕШЕТКИ ИМПЛИКАТИВНЫХ ЛОГИК

Импликативные логики, т.е. логики, в которых единственной логической связкой является импликация →, по вполне понятным причинам всегда вызывали особый интерес. Периодически делались попытки классифицировать импликативные логики, но всегда наталкивались на проблему расширения интуиционистской импликации $\mathbf{H}_{\to}$ до классической $\mathbf{TV}_{\to}$.

((Ранее классическая логика обозначалась нами посредством $\mathbf{C}_2$, а интуиционистская логика посредством **Int**.)

Для решения этой проблемы потребуется метод доказательства независимости аксиом, использующий многозначные логические матрицы (см. выше раздел 2.3). В результате будут построены различные булевы решетки наиболее интересных импликативных логик (см. *[Кагрепко* 2000]).

1. Проблема классификации импликативных логик. Комбинаторы

В *[Смирнов* 1979] проведена двоякая классификация импликативных систем: по виду теорем дедукции и по структурным правилам в секвенциальной форме.

Однако В.А. Смирнов в этой статье обращает внимание на ту важную проблему, что оба способа классификации не охватывают классической логики. В первом случае теорема дедукции, которая имеет место для интуиционистской логики, имеет место также и для классической, т.е. не различает первую от второй. Во втором случае — нет такого структурного правила, которое отвечало бы за переход от интуиционистской импликации к классической.

В гильбертовских исчислениях переход от интуиционистской импликации $\mathbf{H}_{\to}$ к классической $\mathbf{TV}_{\to}$ обычно осуществляется за счет добавления закона Пирса

$((p \supset q) \supset p) \supset p.$

Но структурного правила, соответствущего этой формуле, не существует, а переход от интуиционистской логики к классической осуществляется трансформацией односукцедентного секвенциального исчисления в многосукцендетное.

К классификации импликативных логик можно подойти с совершенно иной стороны, используя свойства базисных (исходных) *комбинаторов* **I, B, C, W, K и S**, впервые введенных М. Шейнфинкелем в 1924 г. (см. *Шейфинкель* 2009]), а затем Х. Карри (см. *[Cwiy and Feys* 1958]). Комбинаторы можно рассматривать как простейшие операции, которые переставляют местами, берут в скобки, сокращают и/или воспроизводят термины, к которым они применены, т.е.

$$\mathbf{I}\,x = x. \qquad \mathbf{W}\,xy = xyy,$$
$$\mathbf{B}\,xyz = x(yz), \qquad \mathbf{K}\,xy = x,$$
$$\mathbf{C}\,xyz = xzy, \qquad \mathbf{S}\,xyz = xz(yz).$$

для произвольных терминов *x, y, z.* Из исходных комбинаторов получают другие комбинаторы, например **B'** *xyz = x(zy)* (= **CB**), **K'** *xy = y* (= **CK**), **I'** *xy =yx* (= **CI**). Следующие исходные множества комбинаторов {**B, C; W, K**}, {**B', W, K**}, **и** {**S, K**} являются эквивалентными и для последнего (а значит и для остальных) доказана комбинаторная полнота, т.е. все другие возможные комбинаторы можно построить из исходных (см. *[Cuny and Feys* 1958] и *[Энгелер* 1987]. Оказалось, что между комбинаторами и импликативными формулами существует однозначное соответствие. Главным результатом этого соответствия является следующий важный факт: полное множество исходных комбинаторов определяет собой импликативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики $\mathbf{H}_{\rightarrow}$.

(Уже Гильбертом в 1922 г. была построена логическая система, получившая название «позитивная импликативная логика», которая в качестве импликативных формул содержит аксиомы **B, C, W, K**. Из доказательства М. Вайсберга *[Wajsberg* 1938] об *отделимости* импликации в интуиционистской логике следует, что система Гильберта есть $\mathbf{H}_{\rightarrow}$. Для гильбертовского исчисления **L** *отделимость* связок имеет место, если для любой доказуемой формулы в **L** существует ее доказательство, которое использует только аксиомы для импликации и аксиомы для других логических связок, действительно входящих в эту формулу.)

В силу указанного соответствия (оно еще называется *изоморфизмом Карри-Ховарда)* можно классифицировать импликативные логики посредством комбинаторов, и наоборот, и, главное, изучать свойств импликативных логик, используя свойства комбинаторов и свойства λ-исчиления (см. *[Bunder* 2002]). Однако эта классификация, как и классификация В.А. Смирнова, не охватывает классической импликативной логики $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$, поскольку нет такого комбинатора, который соответствовал бы закону Пирса и вообще любой *неинтуиционистской* импликативной формуле. Это объясняет главную цель работы *[Gabbay and de Queiroz* 1992]: распространить изоморфизм Карри-Ховарда до $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$, т.е. сконструировать такой "комбинатор" **P**, который соответствовал бы закону Пирса.

Итак, перед нами стоит следующая исходная проблема: найти единое основание для классификации импликативных логик. Пусть $\mathcal{L}$ есть пропозициональный язык, единственной логической связкой которого является импликация →. Под *импликатывной логикой* будем понимать множество всех правильно построенных формул, замкнутое относительно правил MP и постановки.

2. Решетка импликативных логик $L(H_{\rightarrow})$

Решение проблемы мы видим в построении такой *логической конструкции,* которая позволит из ее элементов конструировать искомые импликативные логики. Более того, при применении к самой конструкции простейших *операций* можно будет получать (порождать) новые логики и даже целые их классы.

В качестве *элементарных объектов,* из которых будет строиться конструкция, возьмем следующие импликативные формулы, которые для удобства будем обозначать посредством соответствующих комбинаторов:

$$\mathbf{I}.\ (p \rightarrow p) \qquad (\textit{тождество})$$
$$\mathbf{B}.\ (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \ (\textit{слабая транзитивность})$$
$$\mathbf{C}.\ (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)) \ \ (\textit{перестановка}).$$
$$\mathbf{W}.\ (p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q) \qquad (\textit{сокращение})$$
$$\mathbf{K}.\ p \rightarrow (q \rightarrow p) \qquad (\textit{утверждение консеквента}).$$

Операциями являются два логических правила вывода: *modus ponens* и *подстановка.*

Доказуемость формулы *A* будем обозначать посредством $\vdash A$. Сами доказательства будем записывать способом, предложенным Я. Лукасевичем в *[Lukasiewicz* 1929], однако в наших обозначениях. Каждый доказанный тезис будет иметь свой номер и предшествующую строку доказательства, которая состоит из двух частей, разделенных звездочкой *. Слева стоит формула (или ее номер), в которую произведена подстановка и которая является большой посылкой. Справа указывается малая посылка, которая также может быть получена за счет подстановки. Результат применения MP указывается

посредством тире, затем указывается номер новой формулы.
Например, докажем

Утверждение 1. $\mathbf{I}, \mathbf{C} \vdash \mathbf{I}'$.

1. **I.**

2. **C.**

$2\ p/p \to q,\ q/p,\ r/q * 1\ p/p \to q - 3,$

3. $p \to ((p \to q) \to q)$ (=**I′**).

Теперь самое главное. Основным требованием к элементарным объектам, т.е. к импликативным формулам, будет требование их *независимости* друг от друга (см, выше раздел 2.3). Легко показать, что формула **I** не является независимой в приведенном выше исходном множестве объектов, поскольку она доказуема из **С, К** или **W, К**. Например,

Утверждение 2. $\mathbf{W}, \mathbf{K} \vdash \mathbf{I}$.

1. **W.**

2. **K.**

$1\ q/p * 2\ q/p - 3,$

3. $p \to p$.

Очевидно, что формулу **К** нужно как-то ослабить, например, подстановкой в нее других переменных (или их отождествлением). Этим способом можно получить формулу **К**$_1$:

$(p \to q) \to (r \to (p \to q)$

($p/p \to q$ и q/r в **K**).

Теорема 1. *Множество формул* ***I, B, C, W, K****$_1$ является независимой аксиоматизацией* $\mathbf{H}_{\rightarrow}$.

Доказательство теоремы состоит из двух частей:
(i) доказательство независимости формул **I, B, C, W, K**$_1$;
(ii) доказательство того, что **I, B, C, W, K**$_1$ есть аксиоматизация $\mathbf{H}_{\rightarrow}$.
(i). Доказательство независимости производится матричным методом, причем используемые матрицы должны быть *нормальными* в смысле Лукасевича—Тарского (см. выше раздел 4.2), т.е. они должны быть согласованы с правилом МР.

Матрица 1 *[Sobocinski* 1952]:

$$\begin{array}{c|ccc} \to & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ {*2} & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

верифицирует	фальсифицирует
B,C,W,K$_1$	**I** (*p* есть 1)

Матрица 2 [Anderson andBelnap 1975]:

$$\begin{array}{c|ccc} \to & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ {*2} & 0 & 2 & 2 \end{array}$$

верифицирует	фальсифицирует
I,C,W,K$_1$	**B** (*p* есть 2, *q* есть1, *r* есть 0)

Матрица 3 [Sobocinski 1952]:

$$\begin{array}{c|ccc} \to & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ {*2} & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

верифицирует	фальсифицирует
I,B,W,K$_1$	**C** (*p* есть 2, *q* есть1, *r* есть 1)

Матрица 4 [Lukasiewicz 1920]:

$$\begin{array}{c|ccc} \to & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ {*2} & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

верифицирует	фальсифицирует
I,B,C,K$_1$	**W** (*p* есть 1, *q* есть 0)

Матрица 5. [Sobocinski 1952]:

$$\begin{array}{c|ccc} \to & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 2 \\ {*1} & 0 & 1 & 2 \\ {*2} & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

верифицирует	фальсифицирует
I,B,C,W	**K**$_1$ (*p* есть 0, *q* есть 0, *r* есть 1)

Интересно заметить, что хотя логика $\mathbf{H}_{\rightarrow}$ является бесконечно-значной *[Thomas* 1962], тем не менее независимость ее аксиом доказывается средствами трехзначной логики.
(ii). Надо показать, что $\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{W}, \mathbf{K}_1 \vdash \mathbf{K}$. Доказательством является **Утверждение 3.** $\mathbf{I}, \mathbf{C}, \mathbf{K}_1 \vdash \mathbf{K}$ *[Смирнов* 1972].

1. **I.**
2. **C.**
3. $\mathbf{K}_1$.

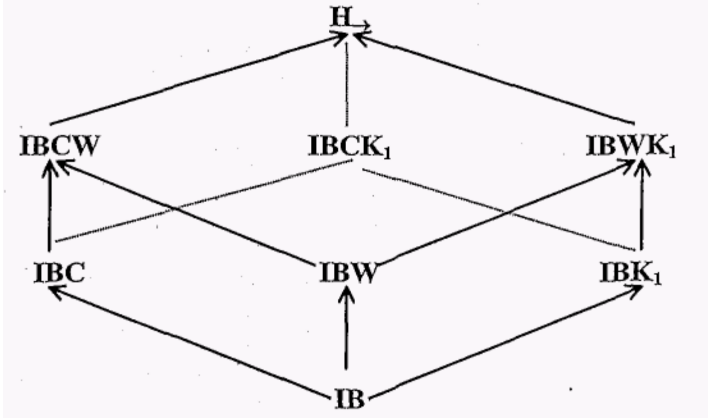
$\quad 3\ q/p,\ r/q * 1-4,$

4. $q \to (p \to p)$.

$\quad 2\ p/q,\ q/p,\ r/p * 4-5,$

5. $p \to (q \to p)$ (= **K**).

Таким образом, теорема 1 доказана.
Теперь, в силу доказательства независимости элементов множества $\{\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{W}, \mathbf{K}_1\}$, мы можем перейти к построению того, что будем называть *логической конструкцией.* Рассмотрим семейство всех подмножеств этого множества. Как известно, семейство всех подмножеств некоторого конечного множества образует булеву решетку, упорядоченную отношением включения. В нашем случае булева решетка имеет 32 (=2^5) элементов с единицей $\mathbf{H}_\to$. Остальные вершины решетки представляют собой подлогики $\mathbf{H}_\to$. Полученную конечную булеву решетку обозначим посредством $L(\mathbf{H}_\to)$ и назовем $\mathbf{H}_\to$ -конструкцией.
Для простоты изображения в качестве нуля решетки возьмем логику **IB**. В результате имеем следующую 8-элементную решетку импликативных логик:



Система **IBCW** есть слабая импликация Чёрча **R→** *[Church* 1951]. В силу Утверждений 2 и 3 и того, что $\mathbf{K}_1$ есть подстановочный случай **K**, $\mathbf{IBCK}_1 \equiv \mathbf{BCK}$. Как сообщает А. Прайор *[Prior* 1962], система **IBC** (под названием **BCI)** и **ВСК** были введены К.А. Мередитом в 1956

г. Более подробно об элементах решетки $L(H_\to)$ и вообще об импликативных логиках см. в *[Карпенко* 1993].
Заметим, что, по-видимому, первая попытка (и не совсем успешная) решеточно упорядочить импликативные логики принадлежит *[More* 1964].
Обратим внимание на то, что на данной диаграмме изображена булева решетка *подмножеств аксиом* относительно включения, но в общем случае не решетка импликативных логик относительно выводимости из аксиом. Например, логика **IBC** не является пересечением множеств теорем, выводимых в **IBCW** и $\mathbf{IBCK}_1$, поскольку

$\mathbf{IK}_1 \vdash \mathbf{W}^*$:

1. **I.**
2. $\mathbf{K}_1$.

$\quad 2\ q/p,\ r/p \to (p \to p) * 1-3,$

3. $(p \to (p \to p)) \to (p \to p)$ (=$\mathbf{W}^*$).

Но **W*** является пдстановочным случаем аксиомы **W** из **IBCW.** Однако **W*** не выводима из **IBC.** Последнее следует из свойств матрицы 6:

→	0	1		
0	1	0	верифицирует	фальсифицирует
1	0	1	**I,B,C,**	$\mathbf{W}^*$ (*p* есть 1).

3. Решетка импликативных логик $L(TV_\to)$: классические версии BCI, BCK и $\mathbf{R}_\to$

Теперь мы можем уточнить, что мы понимаем под *подходящим* расширением $\mathbf{H}_\to$ до $\mathbf{TV}_\to$: *существует ли независимая аксиоматизация* $\mathbf{TV}_\to$ *формулами* **I, B, C, W, K₁** *и* **X**? *[Карпенко* 1992].
В силу теоремы Тарского-Бернайса (см. *[Lukasiewicz and Tarski* 1930]) импликативный фрагмент $\mathbf{TV}_\to$ классической пропозициональной логики аксиоматизируем посредством формул **B', К и Р** с правилами МР и подстановкой, где

B′. $(p\to q)\to((q \to r) \to (p \to r))$ (сильная транзитивность),

P. $((p \to q) \to p) \to p$ (закон Пирса).

Как уже отмечалось, обычно $\mathbf{TV}_\to$ получают за счет добавления к $\mathbf{H}_\to$ формулы **P**, но закон Пирса в качестве кандидата на место формулы **X** явно не пригоден, поскольку **I, B, C + P** уже является аксиоматизацией $\mathbf{TV}_\to$, т.е. $\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{P} \vdash \mathbf{W}, \mathbf{K}_1$ и, значит, множество формул $\mathbf{I, B, C, W, K_1, P}$ не является независимой аксиоматизацией $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$. Покажем, что $\mathbf{I, B, C, P} \vdash \mathbf{B}', \mathbf{K}$.

Утверждение 4. $\mathbf{B, C} \vdash \mathbf{B}'$.

1. $\mathbf{B}$.
2. $\mathbf{C}$.

$2\ p/q \to r,\ q/p \to q,\ r/p \to r * 1 - 3,$

3. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ $(=\mathbf{B}')$.

Утверждение 5. $\mathbf{I, B, C, P} \vdash \mathbf{K}$. (см. *[Wajsberg* 1937], *[Prior* 1962], *[Tanaka* 1967]).

1. $\mathbf{I}$.
2. $\mathbf{B}$.
3. $\mathbf{C}$.
4. $\mathbf{P}$.
5. $\mathbf{I, C} \vdash \mathbf{I}'$ (Утверждение 1).
6. $\mathbf{B, C,} \vdash \mathbf{B}'$ (Утверждение 4).

$6\ p/p{\to}q,\ q/(q{\to}r){\to}(p{\to}r),\ r/s * 6 - 7,$

7. $(((q \to r) \to (p \to r)) \to s) \to ((p \to q) \to s)$.

$7\ q/q{\to}r,\ r/s{\to}r,\ s/(s{\to}q){\to}(p{\to}(s{\to}r)) *$

$7\ p/s,\ s/p{\to}(s{\to}r) - 8,$

8. $(p \to (q \to r)) \to ((s \to q) \to (p \to (s \to r)))$.

$7\ s/((p{\to}r){\to}s){\to}((q{\to}r){\to}s) * 6\ p/q{\to}r,\ q/p{\to}r,\ r/s - 9,$

9. $(p \to q) \to (((p \to r) \to s) \to ((q \to r) \to s))$.

$9\ p/p{\to}q,\ r/p,\ s/p * 10,$

10. $((p \to q) \to q) \to (\mathbf{P} \to ((q \to p) \to p))$.

$3\ p/(p{\to}q){\to}q,\ q/\mathbf{P},\ r/(q{\to}p){\to}p * 10 - 4 - 11,$

11. $((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p)$ $(=\mathbf{D})$.

$6\ q/(p{\to}q){\to}q,\ r/(q{\to}p){\to}p * 5 - 11 - 12,$

12. $p \to ((q \to p) \to p)$.

$8\ q/(q{\to}p){\to}p,\ r/p,\ s/q * 12\ q/q{\to}p - 5\ p/q,\ q/p - 13,$

13. $p \to (q \to p)$ $(=\mathbf{K})$.

Отсюда, в силу теоремы Тарского-Бернайса, $\mathbf{I, B, C, P}$ есть $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$.

Таким образом, решение проблемы надо искать посредством ослабления формулы **P**. При этом **X** должна быть достаточно «сильной», чтобы формулы $\mathbf{I, B, C, W, K_1, X}$ аксиоматизировали $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$, и достаточно «слабой», чтобы все формулы $\mathbf{I, B, C, W, K_1, X}$ были независимы.

Найдена подходящая формула $\mathbf{X}_1$:

$$((p{\to}q){\to}((r{\to}r){\to}(p{\to}q))) \to (\mathbf{W_1} \to \mathbf{P_1}),$$

где $((p{\to}q){\to}((r{\to}r){\to}(p{\to}q)))$ есть подстановочный случай формулы $\mathbf{K_1}$: $r/r{\to}r$; $\mathbf{W_1}$ есть подстановочный случай формулы $\mathbf{W}$: $p/p{\to}q,\ q/r$; $\mathbf{P_1}$ есть подстановочный случай формулы $\mathbf{P}$: $p/p{\to}q,\ q/r$.

Теорема 2. *Множество формул $\boldsymbol{I, B, C, W, K_1, X_1}$ является независимой аксиоматизацией $\boldsymbol{TV}_{\rightarrow}$* (см. *[Карпенко* 1993; 1997]).

Заметим, что здесь при доказательстве независимости **I, B, C, W, K**$_1$ используются те же самые матрицы, что и в Теореме 1. Для доказательства независимости аксиомы $\mathbf{X}_1$ нужна

Матрица 6 (трехзначная импликация Рейтинга):

→	0	1	2		
0	2	2	2		
1	0	2	2	верифицирует	фальсифицирует
*2	0	1	2	$\mathbf{I,B,C,W,K_1}$	$\mathbf{X_1}$ (p есть 2, q есть1, r есть 0).

Итак, поставленная выше проблема расширения $\mathbf{H}_{\rightarrow}$ до $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$ решена. Правда, формула $\mathbf{X}_1$ содержит 21 переменную и 5 ее подформул являются тавтологиями классической пропозициональной логики **TV**, т.е. аксиома $\mathbf{X}_1$ является *неорганической* в смысле Вайсберга и Лесневского (см. *[Чёрч* I960]). Поэтому желательно было бы упростить формулу $\mathbf{X}_1$.

Заметим, что вся формула $(\mathbf{W_1} \to \mathbf{P_1})$ есть подстановочный случай формулы

$$((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p)$$

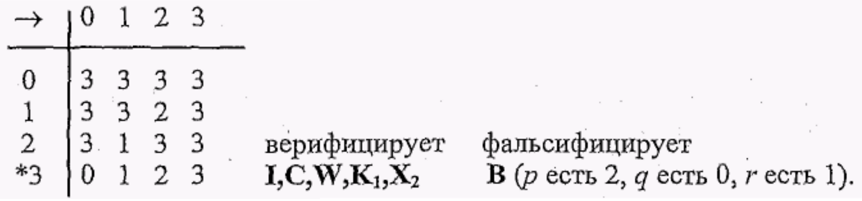
(Данная формула является одной из аксиом в аксиоматизации бесконечнозначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_\infty$ (см. выше раздел 8,1).) которую мы обозначили посредством **D** (см. Утверждение 5, формула 11). В итоге, формула $\mathbf{X}_2$ выглядит следующим образом:

$$(p \to ((q \to q) \to p)) \to (((p \to q) \to q) \to (q \to p) \to p)).$$

Теорема 3. *Множество формул $\boldsymbol{I, B, C, W, K_1, X_2}$ является независимой аксиоматизацией $\boldsymbol{TV}_{\rightarrow}$ [Карпенко* 1993].

(*i*). Проблемы возникают с доказательством независимости аксиомы **B**. В указанных работах при доказательстве этого случая использована метатеорема С. Яськовского *[Jaskowski* 1948]. Из ее доказательства следует, что имеется шестиэлементная матрица, которая фальсифицирует аксиому **B**. Однако в *[Ulrich* 1994] была найдена подходящая четырехэлементная

Матрица 7:

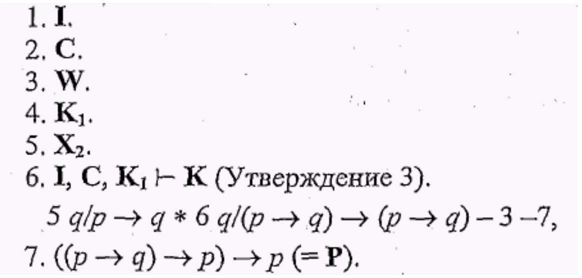


$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	3	3	2	3
2	3	1	3	3
*3	0	1	2	3

верифицирует	фальсифицирует
I,C,W,K$_1$,X$_2$	**B** (p есть 2, q есть 0, r есть 1).

(*ii*). **I, B, C, W, K$_1$, X$_2$** есть **TV$_\to$**;

Утверждение 7.



1. **I**.
2. **C**.
3. **W**.
4. **K$_1$**.
5. **X$_2$**.
6. **I, C, K$_1$** $\vdash$ **K** (Утверждение 3).

$5\ q/p \to q * 6\ q/(p \to q) \to (p \to q) - 3 - 7,$

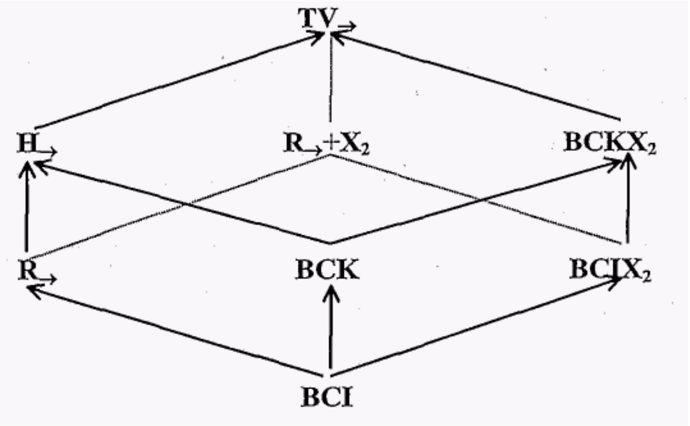
7. $((p \to q) \to p) \to p$ (= **P**).

I, C, W, K$_1$, X$_2$ $\vdash$ **P.**

Таким образом, теорема 3 доказана.

Формула **X**$_2$ тоже является неорганической (три ее подформулы есть тавтологии **TV**), но она состоит из вхождений только двух различных переменных, число их вхождений 10 и к тому же тривиально доказывается пункт *(ii).*

Теперь построим решетку $L(\mathbf{TV}_\to)$ подлогик множества {**I, B, C, W, K$_1$, X$_2$**}. Для простоты изображения в качестве нуля решетки возьмем логику **BCI**:



Импликативные логики, указанные на вершинах этой решетки, хорошо известны и описаны в литературе (кроме **BCIX$_2$** и **R$_\to$+X$_2$**). Особый интерес представляет логика **BCKX**$_2$.

Утверждение 8. **IBCK$_1$X$_2$ ≡ BCKD.**

Доказательство очевидно.

Логика **BCKD** является фрагментом бесконечнозначной логики Лукасевича **Ł$_\infty$**, и впервые изучались в *[Rose and Rosser* 1958]. В *[Dyrda* 1985] эта логика получила название "коммутативная **BCK**-логика" и рассмотрены ее расширения.

Заметим, что

BCKD ≡ BCID ≡ B'KD ≡ BKD.

Логика **B'KD** примечательна тем, что добавление к ней закона линейности

L. $((p \to q) \to (q \to p)) \to (q \to p)$

дает импликативный фрагмент **Ł$_{\infty\to}$** логики **Ł$_\infty$**(см. *[Rose* 1956] (в Другой формулировке) и *[Meyer* 1966]).

(В *[Wozniakowska* 1978] дается другая аксиоматизация **Ł$_{\infty\to}$** как результат отделимости: **K, D** и

$((p \to q) \to (p \to r)) \to ((q \to p) \to (q \to r)).$

Обратим внимание на следующий весьма важный факт. Хотя формулы **X**$_1$ и **X**$_2$ эквивалентны при наличии **I, B, C, W, K$_1$,** но конструкции получаются разные, поскольку они содержат разные подлогики.

Например, имеет место

Утверждение 9. **BCKX$_1$ ≠ BCKX$_2$.**

Для доказательства используется

Матрица 8:

$\to$	0	1	2	3		
0	3	3	3	3		
1	2	3	3	3		
2	2	2	3	3	верифицирует	фальсифицирует
*3	0	1	2	3	**I**,**B**,**C**,$\mathbf{K}_1$,$\mathbf{X}_1$	$\mathbf{X}_2$ (p есть 1, q есть 0).

Очевидно, что $\mathbf{X}_1$ доказуема в $\mathbf{BCKX}_2$.

4. Максимальная решетка $L(TV_{\to})$: логики $\mathbf{RM}_{\to}$ и $\mathbf{Ł}_{\infty\to}$

В связи с тем, что имеются разные $\mathbf{TV}_{\to}$-конструкции, возникает естественный вопрос о классе формул $\mathbf{X}_1$. В *[Slaney and Bunder* 1994] ставятся следующие две конкретные проблемы:

(1) Существует ли бесконечное число различных систем $\mathbf{BCIX}_i$, $\mathbf{BCKX}_i$ и $\mathbf{BCIWX}_i$?

(2) Имеются ли наиболее *слабая,* и наиболее сильная системы $\mathbf{BCIX}_i$, $\mathbf{BCKX}_i$ и $\mathbf{BCIWX}_i$?

Постановка проблемы обязана тому, что указанные авторы в качестве кандидата на место формулы **X** предложили формулу

$\mathbf{X}_3$. $((((p\to q)\to q)\to p)\to r)\to(((((q\to p)\to p)\to q)\to r)\to r)$

(Эта формула под названием U появляется в разделе 8.5.3.1 и является одной из аксиом в аксиоматизации импликативного фрагмента $\mathbf{RM}_{\to}$ логики **RM.)**

Ими, например, было показано, что

$\mathbf{BCKX}_2 \neq \mathbf{BCKX}_3$

и $\mathbf{X}_2$ доказуема в $\mathbf{BCKX_3}$.

Поскольку доказать независимость аксиомы **I** от **B**, **C**, **W**, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{X}_3$ не удавалось, то $\mathbf{X}_3$ была заменена на

$\mathbf{X}_4$. $(p\to p)\to \mathbf{X}_3$.

(Заметим, что только в *[Комендантский* 2001] с помощью прувера OTTER была доказана выводимость закона тождества **I** из **B**, **C**, **W**, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{X}_3$.)

Теорема 4, *Множество формул* I, B, C, W, K_1, X_4 *является независимой аксиоматизацией* $TV_{\to}$.

(*i*). Независимость доказывается теми же самыми матрицами, что и для множества аксиом **I**, **B**, **C**, **W**, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{X}_1$ (Теорема 2).

(*ii*). **I**, **B**, **C**, **W**, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{X}_4$ есть $\mathbf{TV}_{\to}$:

Утверждение 10. $\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{W}, \mathbf{K}_1, \mathbf{X}_4 \vdash \mathbf{P}$.

1. $(p\to p)$ (= **I**).

2. $(q\to r)\to((p\to q)\to(p\to r))$ (= **B**).

3. $(p\to(q\to r))\to(q\to(p\to r))$ (= **C**).

4. $(p\to(p\to q))\to(p\to q)$ (= **W**).

5. $(p\to q)\to(r\to(p\to q))$ (= $\mathbf{K}_1$).

6. $(p\to p)\to((((p\to q)\to q)\to p)\to r)\to(((((q\to p)\to p)\to q)\to r)\to r)$ (= $\mathbf{X}_4$).

$6 * 1 - 7$,

7. $((((p\to q)\to q)\to p)\to r)\to(((((q\to p)\to p)\to q)\to r)\to r)$ (= $\mathbf{X}_3$).

$5\ q/p,\ r/q\to p * 1 - 8$,

8. $(q\to p)\to(p\to p)$.

$3\ p/q\to p,\ q/p,\ r/p * 8 - 9$,

9. $p\to((q\to p)\to p)$.

$2\ q/p,\ r/(q\to p)\to p,\ p/(p\to q)\to q * 9 - 10$,

10. $(((p\to q)\to q)\to p)\to\mathbf{D}$.

$3\ p/q\to r,\ q/p\to q,\ r/p\to r * 2 - 11$,

11. $(p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$ (= $\mathbf{B}'$).

$11\ q/(q\to p)\to p,\ r/q * 9 - 12$,

12. $(((q\to p)\to p)\to q)\to(p\to q)$.

$3\ p/q\to p,\ r/p * 1\ p/q\to p - 13$,

13. $q\to((q\to p)\to p)$.

2 $r/(q\to p)\to p,\ p/(p\to q)\to q)$ * 13 – 14,

14. $(((p\to q)\to q)\to q)\to(((p\to q)\to q)\to((q\to p)\to p))$.

2 $q/((p\to q)\to q)\to q,\ r/\mathbf{D},\ p/p\to q$ * 14 – 15,

15. $((p\to q)\to(((p\to q)\to q)\to q))\to((p\to q)\to\mathbf{D})$.

15 * 13 $q/p\to q,\ p/q$ – 16,

16. $(p\to q)\to\mathbf{D}$.

2 $q/p\to q,\ r/\mathbf{D},\ p/((q\to p)\to p)\to q$ * 16 – 12 – 17,

17. $(((q\to p)\to p)\to q)\to\mathbf{D}$.

7 $r/\mathbf{D}$ * 10 – 17 – 18,

18. $((p\to q)\to q)\to((q\to p)\to p)$ (= $\mathbf{D}$).

18 $q/p\to q$ * 4 – 19,

19. $((p\to q)\to p)\to p$ (= $\mathbf{P}$).

(Доказано вместе с В.М. Поповым. Впервые Утверждение 10 (в виде $\mathbf{I, B, C, W, K, X_3} \vdash \mathbf{P}$) было доказано в *[Slaney and Bunder* 1994] с помощью компьютерной программы. В этой же работе отдельно доказывется Утверждение $\mathbf{I, B, C, K, X_3} \vdash \mathbf{D}$. Как и в первом случае, приведена только довольно-таки непростая схема доказательства. Заметим, что в нашем доказательстве сначала доказывается $\mathbf{I, B, C, K_1, X_3} \vdash \mathbf{D}$, а затем за один шаг из **D** и **W** получаем **P**.)

Таким образом, теорема 4 доказана.

Особый интерес представляют подлогики $\mathbf{IBCWX_4}$ и $\mathbf{IBCK_1X_4}$.

Утверждение 11. $\mathbf{IBCWX_4}$ есть $\mathbf{RM_\to}$.

Напомним (см. выше раздел 8.5.3.1), $\mathbf{RM_\to}$ есть $\mathbf{B', W, I', X_3}$ *[Meyer and Parks* 1972]. Матрица 5 с матрицей для инволюции ~ (отрицание Лукасевича) являются характеристическими для импликативно-негативного фрагмента RM *[Parks* 1972]. Поскольку формула $\mathbf{X}_4$ общезначима здесь, то в силу отделимости импликации в $\mathbf{RM_{\to,\sim}}$ *[Meyer and Parks* 1972] формула $\mathbf{X}_4$ доказуема в $\mathbf{RM_\to}$. Теперь надо показать, что формулы **B', I'** и $\mathbf{X}_3$ доказуемы в $\mathbf{IBCWX_4}$. Первая и вторая формулы доказываются Утверждениями 4 и 1 соответственно. $\mathbf{X}_3$ получается из $\mathbf{X}_4$ по правилу **MP.**

Утверждение 12. $\mathbf{IBCK_1X_4}$ есть $\mathbf{Ł_{\omega\to}}$.

Поскольку $\mathbf{IBCK_1X_4}$ есть $\mathbf{BCKX_3}$, а $\mathbf{Ł_{\omega\to}}$ есть $\mathbf{B'KDL}$ (см. выше), то в *[Карпенко и Попов* 1997] доказано, что

$\mathbf{BCKX_3}$ есть $\mathbf{B'KDL}$, т.е.

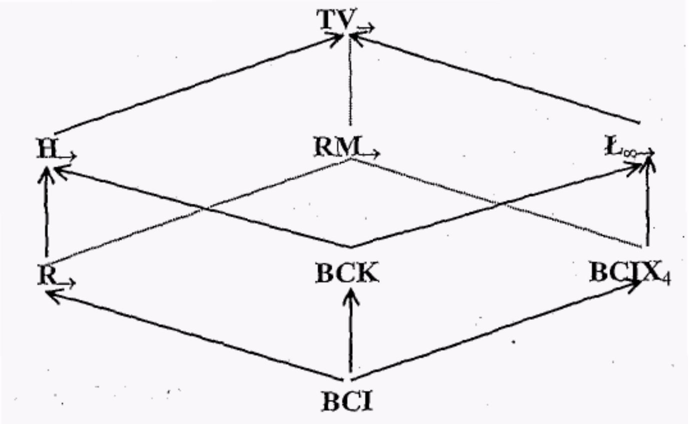
(*a*) $\mathbf{B, C, K, X_3} \vdash \mathbf{B', D, L}$ и

(*b*) $\mathbf{B', K, D, L} \vdash \mathbf{B, C, X_3}$.

Таким образом, найдена новая аксиоматизация $\mathbf{Ł_{\infty\to}}$.

(В *[Карпенко 2000*] с помощью компьютерной программы MaGIC (см. *[Slaney and Meglicki* 1991]) была доказана также независимость аксиом **B, C, K** и$\mathbf{X_3}$.)

Теперь представим решетку $L(\mathbf{TV_\to})$ с аксиомой $\mathbf{X}_4$:



Все логики, указанные на вершинах этой решетки (кроме $\mathbf{BCIX}_4$), являются импликативными логиками, лежащими в основе наиболее фундаментальных логических систем. Из результата А. Аврона *[Avron* 1984] следует, что $\mathbf{TV_\to}$ является *единственным* собственным расширением $\mathbf{RM_\to}$. Отсюда следует ответ на вопрос (2) Дж. Слэни и М. Бундера (см. выше) относительно наиболее сильной системы $\mathbf{BCIWX_1}$. Таковой как раз и является система $\mathbf{RM_\to}$. В силу этого, приведенная решетка была названа *максимальной [Karpenko* 1998]. Обратим внимание на то, что если между $\mathbf{RM_\to}$ и $\mathbf{TV_\to}$ нет промежуточных импликативных логик, то между $\mathbf{Ł_{\infty\to}}$ и $\mathbf{TV_\to}$ их счетное множество *[Komori* 1978], а между '$\mathbf{H_\to}$ и $\mathbf{TV_\to}$ их континуум *[Верхозина* 1986].

Имеется также частичный положительный ответ и на первый вопрос. Для этого введем следующие определения. Следуя *[Pahi* 1971; 1972], пусть α и β обозначают произвольные правильно построенные формулы, α называется переменно-подобной *{variable-like),* если и только если никакая пропозициональная переменная не входит в α больше одного раза. Если β есть результат подстановки в формулу $\alpha\ (p_1/\beta_1,\ p_2/\beta_2,\ \ldots,\ p_k/\beta_k)$,такой, что каждая β_i является переменно-подобной и для $i \neq j$, β_i и β_j не имеют общих пропозициональных переменных $(1 \leq i \leq k)$,тогда формула β называется *ограниченным подстановочным случаем (о.п.с.)* формулы α. Напрмер, формула $\mathbf{K}_1$ есть *о.п.с.* формулы **К**. Из *[Pahi* 1971] (см. также *[Pahi* 1972]) следует, что если α* есть любая импликативная формула, которая является *о.п.с.* α, тогда $\mathbf{R}_{\rightarrow} + \alpha$ и $\mathbf{R}_{\rightarrow} + \alpha^*$определяют эквивалентные системы. А это значит, что любое ослабление, которое есть *о.п.с.* формул $\mathbf{X}_1$ — $\mathbf{X}_4$, опять же есть искомая формула **X**.

Рассмотрим для примера формулу $\mathbf{X}^{*}_{2_1}$:

$$((p\rightarrow q)\rightarrow((r\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow q)))\rightarrow$$
$$((((p\rightarrow q)\rightarrow r)\rightarrow r)\rightarrow((r\rightarrow(p\rightarrow q))\rightarrow(p\rightarrow q))),$$

которя есть *о.п.с.* формулы $\mathbf{X}_2$: $p/p\rightarrow q,\ q/r$. Используя Теорему 1, можно показать, что $\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{W}, \mathbf{K}_1, \mathbf{X}_{2_1}$ есть$\mathbf{TV}_{\rightarrow}$. В итоге мы имеем, например, бесконечное число новых импликативных логик $\mathbf{BCIX}^{*}_{2_i}$.

Обратим внимание на статью *[Ernst* 2002], где предложено *девять* формул, выполняющих роль нашего **X**, например, под номером 5 выступает формула

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (((((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q).$$

Установлены некоторые взаимоотношения между этими формулами. Также показано (с помощью Компьютерной программы), что $\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{X}_3 \vdash \mathbf{X}_2$.

5. Решетка импликативных логик $L(TV_{\rightarrow})$: логики $\mathbf{E}_{\rightarrow}$, $\mathbf{S4}_{\rightarrow}$ и $\mathbf{S5}_{\rightarrow}$

А как быть с импликацией в логике следования **E** и с импликацией в льюисовских модальных логиках **S4** и **S5**?

Рассмотрим следующие импликативные формулы:

A. $((p \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow q$

B'. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

W. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$

$\mathbf{K}_1$. $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q))$

$\mathbf{X}_2$. $(p \rightarrow ((q \rightarrow q) \rightarrow p)) \rightarrow (((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p))$

C*. $p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$.

Правила вывода: **MP** и подстановка,

Формулы **A, B', W** представляют собой импликативный фрагмент $\mathbf{E}_{\rightarrow}$ логики следования **E** (см. *[Anderson and Belnap* 1975]). Здесь же показано, что $\mathbf{A} \vdash \mathbf{I}$. В *[Mendez* 1988] показано, что $\mathbf{A}, \mathbf{B'}, \mathbf{W}, \mathbf{K}_1$ есть импликативный фрагментмодальной $\mathbf{S4}_{\rightarrow}$ логики **S4.**

Наконец, $\mathbf{A}, \mathbf{B'}, \mathbf{W}, \mathbf{K}_1, \mathbf{X}_2$есть импликативный фрагмент $\mathbf{S5}_{\rightarrow}$ модальной логики **S5**. Обычно $\mathbf{S5}_{\rightarrow}$ аксиоматизируется как $\mathbf{S4}_{\rightarrow} + \mathbf{P}_1$, где $\mathbf{P}_1$ есть ослабленный закон Пирса:

$$(((p\rightarrow q)\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow q))\rightarrow(p\rightarrow q)$$

Покажем, что $\mathbf{S4}_{\rightarrow} + \mathbf{X}_2 = \mathbf{S4}_{\rightarrow} + \mathbf{P}_1$.

В *[Ulrich* 1990] предложена следующая характеристическая матрица для $\mathbf{S5}_{\rightarrow}$. Множеством значений является множество натуральных чисел: 1, 2, 3, ... с 0. Единственным выделенным значением является 1. Импликация $x \rightarrow y$ в $\mathbf{S5}_{\rightarrow}$определяется так: $x \rightarrow y = 1$, если *x* есть кратное *y,* и$x \rightarrow y = 0$в остальных случаях. Нетрудно вычислить, что $\mathbf{X}_2$ общезначима в этой матрице, т.е. $\mathbf{X}_2$ есть теорема $\mathbf{S5}_{\rightarrow}$. Остается показать, что из $\mathbf{S4}_{\rightarrow} + \mathbf{X}$ выводима формула $\mathbf{P}_1$: ,

1. **W**.
2. $\mathbf{K}_1$.
3. $\mathbf{X}_2$.

$$3\ p/p\rightarrow q,\ q/(p\rightarrow q)\rightarrow r * 2\ r/((p\rightarrow q)\rightarrow r)\rightarrow((p\rightarrow q)\rightarrow r) -$$
$$1\ p/p\rightarrow q,\ q/(p\rightarrow q)\rightarrow r - 4,$$

4. $(((p\rightarrow q)\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow q))\rightarrow(p\rightarrow q)\ (= \mathbf{P}_1)$.

В *[Anderson andBelnap* 1962] установлено, что логики $\mathbf{R}_{\rightarrow}, \mathbf{H}_{\rightarrow}$ и $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$ получаются из $\mathbf{E}_{\rightarrow}$, $\mathbf{S4}_{\rightarrow}$ и $\mathbf{S5}_{\rightarrow}$ соответственно за счет добавления к последним формулы **C*.**

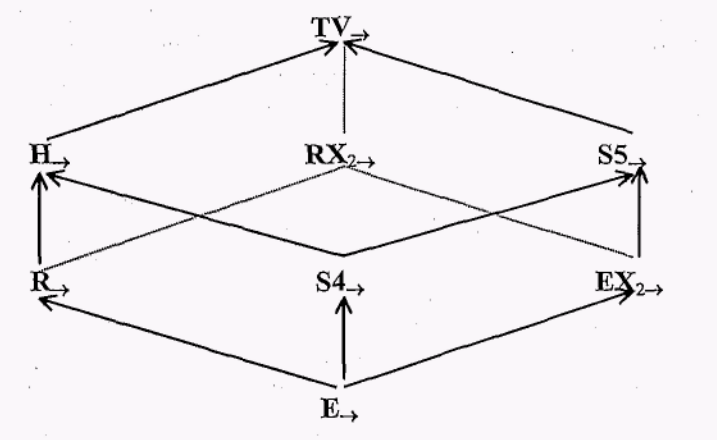
Теорема 5. *Множество формул* $\mathbf{A}, \mathbf{B'}, \mathbf{W}, \mathbf{K}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{C}^*$ *является независимой аксиоматизацией* $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$.

(i). Для доказательства независимости **A** используется матрица 1; для $\mathbf{B}^1$ матрица 7; для **W** матрица 4; для $\mathbf{K}_I$ матрица 5; для $\mathbf{X}_2$ матрица 6; для **C*** матрица 3.

(ii) **A, B', W, K$_1$, X$_2$, C*** есть **TV**$_\to$ (см. выше).

Заметим, что формула **X**$_3$ в матрице Ульрича не имеет места: *p* есть 2 , *q* есть 3 , *r* есть 0,

В результате имеем следующую булеву решетку импликативных логик *[Карпенко* 1999], если в качестве нуля возьмем логику **E**$_\to$:



6. Некоторые полные пропозициональные логики

Теперь рассмотрим конструкцию для классической пропозициональной логики **TV**.

Из работы Вайсберга *[Wajsberg* 1937] следует, что добавление формулы 0 → *p* (где 0 является константой, интерпретируемой как ложь) к произвольной **TV**$_\to$ дает **TV**, где отрицание $\neg$ определяется стандартным образом: $\neg p =: p \to 0$.

Обозначим формулу 0→ *p* посредством **N**.

Теорема 6. *Множество формул* ***I, B, C, W, K, X$_4$, N*** *является независимой аксиоматизацией* ***TV****.*

(i). Используются все матрицы из теоремы 4 и

Матрица 9

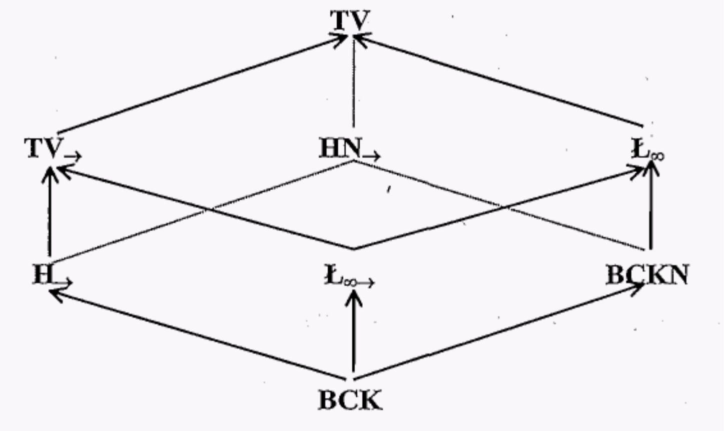
→	0	1	2		
0	2	1	2		
1	0	2	2	верифицирует	фальсифицирует
*2	0	1	2	**I,B,C,W,K$_1$,X$_4$,**	**N** (*p* есть 1).

(ii). **I, B, C, W, K, X$_4$, N** есть **TV** *[Wajsberg* 1937] (см. также *[Turquette* 1966]).

Таким образом, Теорема 6 доказана.

Обратим внимание, что **B', К, D, N** есть аксиоматизация **Ł**$_\infty$ *[Turquette* 1963]. Отсюда **BCKX$_2$N, BCKX$_3$N** и **BCKX$_4$N** есть **Ł**$_\infty$.

Теперь мы можем построить решетку L(**TV**), где в качестве нуля решетки возьмем логику **ВСК**:



Из этой конструкции видно, что бесконечнозначная логика Лукасевича **Ł**$_\infty$ имеет фундаментальное значение после классической логики **TV**.

Напомним, что логики **TV** и **Ł**$_\infty$ имеют хорошо известные решеточные структуры: булеву решетку и решетку де Моргана соответственно. Это является следствием того, что в импликативных фрагментах указанных логик имеет место

$p \vee q =: (p \to q) \to q.$

Как показано в *[Torrens* 1988], это только те логики, которые содержат аксиомы **B, C, К, D**. Поэтому возникает вопрос, как получить другие *полные (full)* логические системы, т.е. с логическими связками $\neg, \to, \vee, \wedge$? Этот вопрос имеет смысл, так как в отличие от **TV** и **Ł**$_\omega$, например, в интуиционистской логике **H**, посредством $\neg$ и $\to$ нельзя определить $\vee$ и $\wedge$.

Поскольку в наших конструкциях появились полные логики, то определенные решеточные структуры можно добавлять к полученным импликативным (импликативно-негативным) логикам. Например, добавление к **Ĥ**$_\to$ только решеточной структуры уже делает решетку дистрибутивной *[Rasiowa* 1974], а вместе с отрицанием $\neg p\ (= p \to 0)$ мы получаем полную интуиционистскую пропозициональную логику. Правда, это выглядит несколько искусственно и ниже мы увидим, как эта проблема решается за счет структурных правил.

7. Несколько замечаний о классификации логик

Подводя итог, можно сказать, что рассмотренные конструкции в виде решеток пропозициональных логик хорошо показывают взаимоотношения между различными логиками и то, какое место они занимают по отношению к классической двузначной логике **TV**.

Теперь выделим два основных принципа порождения импликативных логик и целых их классов:

1. В каждом случае нахождение *нового* $\mathbf{X}_i$ определяет различные подлогики из множества $\{\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{W}, \mathbf{K}_1, \mathbf{X}_i\}$;
2. Ограниченная подстановка порождает целые классы подлогик в $\mathbf{TV}_{\to}$ -конструкциях.

Тогда классификация импликативных логик в нашем понимании предстает в виде построения различных булевых решеток, с помощью которых можно порождать новые импликативные логики.

Но, конечно, встает вопрос вообще о классификации логик. Здесь стоит согласиться с О. М, Аншаковым и С. В. Рычковым *[Анишков и Рынков* 1984b], «что создание жесткой законченной всеобъемлющей классификации неклассических логик представляется задачей невыполнимой». Это уже следует из наличия континуальных классов самих логик. Поэтому классификация логик проводится относительно каких-либо «хороших» свойств, например, в классе всех суперинтуиционистских логик (см. выше раздел 8.2.3) выделяются класс конечно аксиоматизируемых логик, финитно аппроксимируемых, с дизъюнктивным свойством и т.д. (см, *[Кузнецов* 1975]).

В последнее время исключительное развитие получили *подструктурные логики.* Это такие логики, секвенциальная формулировка которых получается из генценовских исчислений **LK** (классической логики) и **LJ** (интуиционистской логики) за счет элиминации и/или ограничения различных структурных правил: утончения, сокращения и перестановки. Одной из первых работ в этой области является книга *{Смирнов* 1972]. В *[Ono* 1990] строится иерархия таких логик в виде *куба,* где в качестве исходного исчисления берется полное исчисление Ламбека **FL** (грубо говоря, это **LJ** без структурных правил).

Интересной работой является *[Battilotti and Sambin* 1999], где вводится *базисная логика* **B.** Эта логика вообще не имеет структурных правил и может рассматриваться как *«логика связок»,* из которой различные более богатые логики могут быть получены посредством добавления

соответствующих структурных правил, В результате строится куб логик с наиболее сильной классической логикой. В этот куб также входят паранепротиворечивая квантовая логика, линейная логика Жирара, интуиционстская логика.

С другой стороны, алгебраическая логика является хорошим инструментом для выяснения такого сложного вопроса, как взаимоотношение между различными логическими системами и, главное, их классификация. Здесь в зависимости от свойств отношения конгруэнтности строится так называемая иерархия Лейбница *[Font, Jansana and Pigozzi* 2003] (см. выше раздел 4,5), Ометим, что обобщение этой иерархии приводит к алгебраической классификации импликативных логик (см. *[Cintula andNoguera2010]),*

Что касается непосредственно многозначных логик, то первое, что напрашивается, - это классификация относительно их функциональных свойств. Классификация многозначных логик относительно свойств аксиоматизируемости, предложенная в *[Аншаков и Рынков* 1984] (см. выше раздел 6.3), основывается именно на их функциональных свойствах:

- логики сигнатуры δ,
- расширение сигнатуры δ,
- все остальные.

Но такая классификация очень упрощает мир многозначных логик. И поэтому мы опять обратим внимание на два частных случая классификации. Это построение в *[Ермолаева и Мучник* 1979] девятиэлементной решетки расширений четырехзначной классической логики (см. выше раздел 5.4.3) и построение в *[Томова* 2010] 7-элементной решетки базовых трехзначных логик, представляющих собой импликативные расширения регулярных логик Клини.

(Напомним, что в *[Финн, Апшаков, Григолия и Забежжайло* 1980] перечислен и классифицирован в виде дерева класс трехзначных логик *беетыопенноетнаго типа.* Этот класс состоит из 10 логик (все с одним выделенным значением); соответствующие алгебры которых не слабее квази-решетки.)

Три из этих базовых логик выявлены *впервые* (см. выше раздел 3.9).

При этом, если в первом случае к восьмиэлементной *булевой решетке* добавляется один элемент, то во втором случае из восьмиэлементной *булевой решетки* убирается один элемент, хотя внешний куб остается.

Все эти построения, и в особенности различные решетки и кубы логик, можно прокомментировать так, что логика превращается в науку *о конструкциях логик.*

Литература

1. *Булос Дж., Джеффри Р.* Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.

2. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.

3. *Лавров И. А, Максимова Л. Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.

4. *Роджерс X.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., Мир, 1972.

5. *Столл Р.* Множества, логика, аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968.

6. *Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е.* Вводный курс математической логики. М.: МГУ, 1991

7. Справочная книга по математической логике / Под ред. Дж. Барвайза. Часть 1, Теория моделей. М.: Наука, 1982.

8. *Гейтинг А.* Интуиционизм. М., Мир, 1965.

9. *Катленд Н.* Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М.: Мир, 1983.

10. *Клини С. К.* Математическая логика. М.: Мир, 1973.

11. *Линдон Р.* Заметки по логике. М.: Мир, 1968.

12. *Успенский В. А.* Лекции о вычислимых функциях. М., Физматгиз, 1960.

13. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Наука, 1983.

14. *Фейс Р.* Модальная логика. М.: Наука

15. *Van Benthem J.* Essays in Logical Semantics. Studies in Linguistics and Philosophy. Dordrecht: D.Reidel Publishing Company, 1986.

16. *Van Dalen D.* Logic and Structure. Universitext. Springer-Verlag, 1994

17. *Gamut L. T. F.* Logic, Language, and Meaning. University of Chicago Press, Chicago, 1991

18. *McCawley J. D.* Everything that linguists have always wanted to know about logic. Chicago: University of Chicago Press. 1981.

19. Карпенко А.С. Логика Лукасевича и простые числа. М.: Наука. 2000

20. Карпенко А.С. Многозначная логика. М.: Наука. 2008