Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

А. Е. Кононюк

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ МАТЕМАТИКА

Книга 9

Математическая логика

Часть 3

Киев
«Освіта України»
2017

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К213

Рецензенты:

В. В. Довгай — к-т физ.-мат. наук, доц. (Национальный тех— нический университет «КПІ»);

В. В. Гавриленко — д-р физ.-мат. наук, проф.,

О. П. Будя — к-т техн. наук, доц. (Киевский университет эко— номики, туризма и права);

Н. К. Печурин — д-р техн. наук, проф. (Национальный ави— ационный университет).

Кононюк А. Е.

К213 Дискретно-непрерывная математика. (Математическая логика). — В 12-и кн. Кн 9, ч. 3,— К.: 2017. — 416 с.

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-7 (книга 9, ч.3)

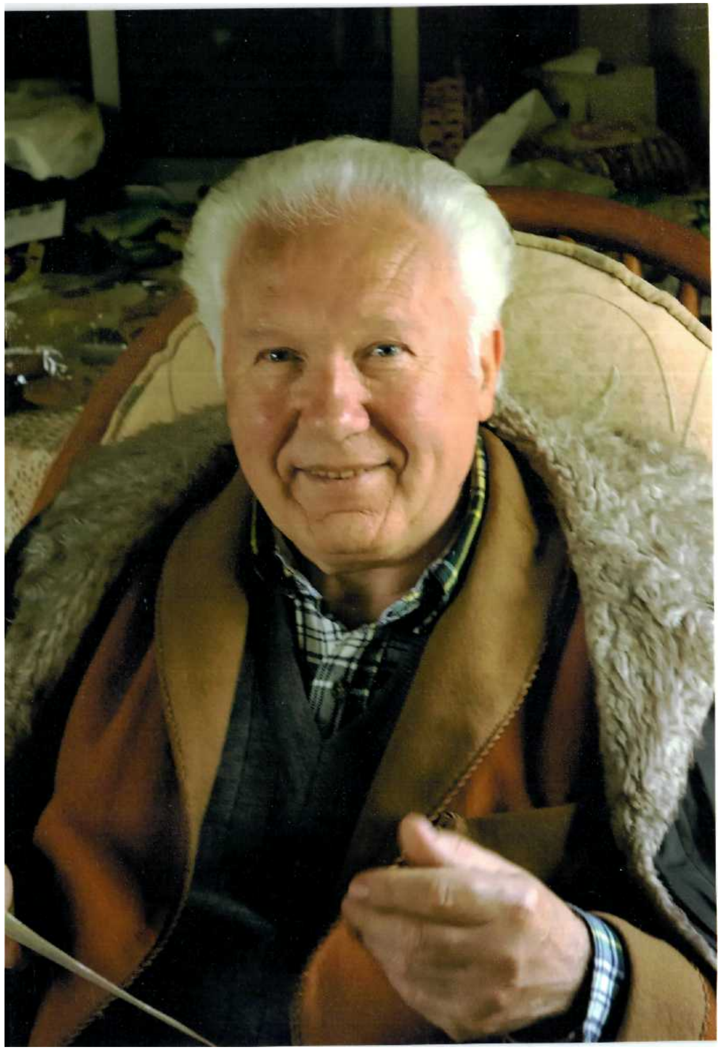
Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, используемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории вероятностей и массового обслуживания, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единную методолгически взамосвязанную математическую систему «Дискретно-непрерывная математика».

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов и просто ученых и специалистов всех специальностей.

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7

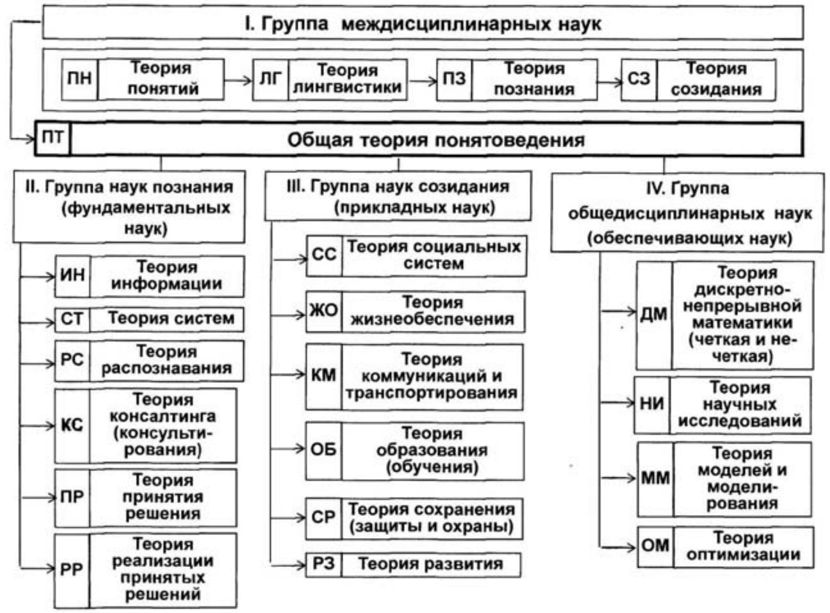
ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-7 (книга 9, ч.3)



Кононюк Анатолий Ефимович

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

Структурная схема развивающейся панмедийной системы наук



Структура
открытой развивающейся панмедийной системы математических наук (дисциплин)
"Дискретно-непрерывная математика"

Оглавление

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

1. Нечеткая логика — математические основы

Нечеткая логика это обобщение традиционной аристотелевой логики на случай, когда истинность рассматривается как лингвистическая переменная, принимающая значения типа: "очень истинно", "более-менее истинно", "не очень ложно" и т.п. Указанные лингвистические значения представляются нечеткими множествами.

Математическая теория нечетких множеств (fuzzy sets) и нечеткая логика (fuzzy logic) являются обобщениями классической теории множеств и классической формальной логики. Данные понятия были впервые предложены американским ученым Лотфи Заде (Lotfi Zadeh) в 1965 г. Основной причиной появления новой теории стало наличие нечетких и приближенных рассуждений при описании человеком процессов, систем, объектов.

Прежде чем нечеткий подход к моделированию сложных систем получил признание во всем мире, прошло не одно десятилетие с момента зарождения теории нечетких множеств. И на этом пути развития нечетких систем принято выделять три периода.

Первый период (конец 60-х–начало 70 гг.) характеризуется развитием теоретического аппарата нечетких множеств (Л. Заде, Э. Мамдани, Беллман). Во втором периоде (70–80-е годы) появляются первые практические результаты в области нечеткого управления сложными техническими системами (парогенератор с нечетким управлением). Одновременно стало уделяться внимание вопросам построения экспертных систем, построенных на нечеткой логике, разработке нечетких контроллеров. Нечеткие экспертные системы для поддержки принятия решений находят широкое применение в медицине и экономике. Наконец, в третьем периоде, который длится с конца 80-х годов и продолжается в настоящее время, появляются пакеты программ для построения нечетких экспертных систем, а области применения нечеткой логики заметно расширяются. Она применяется в автомобильной, аэрокосмической и транспортной промышленности, в области изделий бытовой техники, в сфере финансов, анализа и принятия управленческих решений и многих других.

Триумфальное шествие нечеткой логики по миру началось после доказательства в конце 80-х Бартоломеем Коско знаменитой теоремы FAT (Fuzzy Approximation Theorem). В бизнесе и финансах нечеткая логика получила признание после того как в 1988 году экспертная система на основе нечетких правил для прогнозирования финансовых индикаторов единственная предсказала биржевой крах. И количество успешных фаззи-применений в настоящее время исчисляется тысячами.

1.1. Математический аппарат

Характеристикой нечеткого множества выступает функция принадлежности (Membership Function). Обозначим через $MF_c(x)$ – степень принадлежности к нечеткому множеству C, представляющей собой обобщение понятия характеристической функции обычного множества. Тогда нечетким множеством C называется множество упорядоченных пар вида $C=\{MF_c(x)/x\}$, $MF_c(x)$ [0,1]. Значение $MF_c(x)=0$ означает отсутствие принадлежности к множеству, 1 – полную принадлежность.

Проиллюстрируем это на простом примере. Формализуем неточное определение "горячий чай". В качестве x (область рассуждений) будет выступать шкала температуры в градусах Цельсия. Очевидно, что она будет изменяется от 0 до 100 градусов. Нечеткое множество для понятия "горячий чай" может выглядеть следующим образом:

C={0/0; 0/10; 0/20; 0,15/30; 0,30/40; 0,60/50; 0,80/60; 0,90/70; 1/80; 1/90; 1/100}.

Так, чай с температурой 60 С принадлежит к множеству "Горячий" со степенью принадлежности 0,80. Для одного человека чай при температуре 60 С может оказаться горячим, для другого – не слишком горячим. Именно в этом и проявляется нечеткость задания соответствующего множества.

Для нечетких множеств, как и для обычных, определены основные логические операции. Самыми основными, необходимыми для расчетов, являются пересечение и объединение.

Пересечение двух нечетких множеств (нечеткое "И"): А В:
$MF_{AB}(x)=\min(MF_A(x), MF_B(x))$.
Объединение двух нечетких множеств (нечеткое "ИЛИ"): А В:
$MF_{AB}(x)=\max(MF_A(x), MF_B(x))$.

В теории нечетких множеств разработан общий подход к выполнению операторов пересечения, объединения и дополнения, реализованный в так называемых треугольных нормах и конормах. Приведенные выше реализации операций пересечения и объединения – наиболее распространенные случаи t-нормы и t-конормы.

Для описания нечетких множеств вводятся понятия нечеткой и лингвистической переменных.

Нечеткая переменная описывается набором (N,X,A), где N – это название переменной, X – универсальное множество (область рассуждений), A – нечеткое множество на X.
Значениями лингвистической переменной могут быть нечеткие переменные, т.е. лингвистическая переменная находится на более высоком уровне, чем нечеткая переменная. Каждая лингвистическая переменная состоит из:

- названия;
- множества своих значений, которое также называется базовым терм-множеством T. Элементы базового терм-множества представляют собой названия нечетких переменных;
- универсального множества X;
- синтаксического правила G, по которому генерируются новые термы с применением слов естественного или формального языка;
- семантического правила P, которое каждому значению лингвистической переменной ставит в соответствие нечеткое подмножество множества X.

Рассмотрим такое нечеткое понятие как "Цена акции". Это и есть название лингвистической переменной. Сформируем для нее базовое терм-множество, которое будет состоять из трех нечетких переменных: "Низкая", "Умеренная", "Высокая" и зададим область рассуждений в виде X=[100;200] (единиц). Последнее, что осталось сделать – построить функции принадлежности для каждого лингвистического терма из базового терм-множества T.

Существует свыше десятка типовых форм кривых для задания функций принадлежности. Наибольшее распространение получили: треугольная, трапецеидальная и гауссова функции принадлежности.

Треугольная функция принадлежности определяется тройкой чисел (a,b,c), и ее значение в точке x вычисляется согласно выражению:

$$MF(x)=\begin{cases}1-\dfrac{b-x}{b-a}, a\le x\le b\\ 1-\dfrac{x-b}{c-b}, b\le x\le c\\ 0, x\notin(a;c)\end{cases}$$

При (b-a)=(c-b) имеем случай симметричной треугольной функции принадлежности, которая может быть однозначно задана двумя параметрами из тройки (a,b,c).

Аналогично для задания трапецеидальной функции принадлежности необходима четверка чисел (a,b,c,d):

$$MF(x)=\begin{cases}1-\dfrac{b-x}{b-a}, a\le x\le b\\ 1, b\le x\le c\\ 1-\dfrac{x-c}{d-c}, c\le x\le d\\ 0, x\notin(a;d)\end{cases}$$

При (b-a)=(d-c) трапецеидальная функция принадлежности принимает симметричный вид.

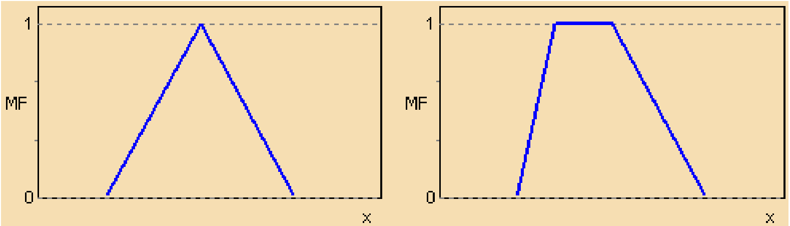


Рис. 1. Типовые кусочно-линейные функции принадлежности

Функция принадлежности гауссова типа описывается формулой

$$MF(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right]$$

и оперирует двумя параметрами. Параметр *c* обозначает центр нечеткого множества, а параметр отвечает за крутизну функции.

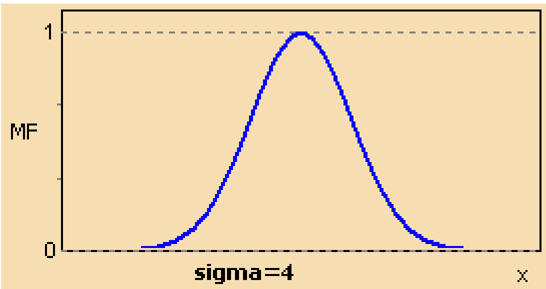


Рис. 2. Гауссова функция принадлежности

Совокупность функций принадлежности для каждого терма из базового терм-множества T обычно изображаются вместе на одном графике. На рисунке 3 приведен пример описанной выше лингвистической переменной "Цена акции", на рисунке 4 – формализация неточного понятия "Возраст человека". Так, для человека 48 лет степень принадлежности к множеству "Молодой" равна 0, "Средний" – 0,47, "Выше среднего" – 0,20.

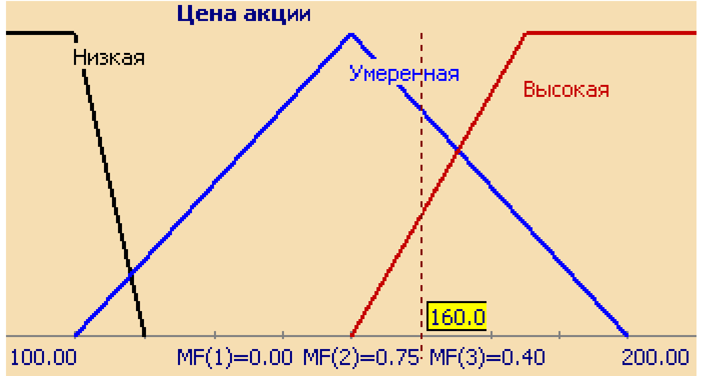


Рис. 3. Описание лингвистической переменной "Цена акции"

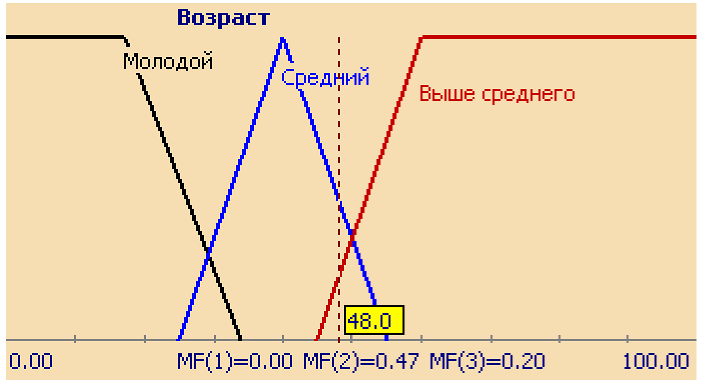


Рис. 4. Описание лингвистической переменной "Возраст"

Количество термов в лингвистической переменной редко превышает 7.

1.2. Нечеткий логический вывод

Основой для проведения операции нечеткого логического вывода является база правил, содержащая нечеткие высказывания в форме "Если-то" и функции принадлежности для соответствующих лингвистических термов. При этом должны соблюдаться следующие условия:

1. Существует хотя бы одно правило для каждого лингвистического терма выходной переменной.
2. Для любого терма входной переменной имеется хотя бы одно правило, в котором этот терм используется в качестве предпосылки (левая часть правила).

В противном случае имеет место неполная база нечетких правил.

Пусть в базе правил имеется m правил вида:
R_1: ЕСЛИ x_1 это A_{11} … И … x_n это A_{1n}, ТО y это B_1
…
R_i: ЕСЛИ x_1 это A_{i1} … И … x_n это A_{in}, ТО y это B_i
…
R_m: ЕСЛИ x_1 это A_{i1} … И … x_n это A_{mn}, ТО y это B_m,
где x_k , k=1..n – входные переменные; y – выходная переменная; A_{ik} – заданные нечеткие множества с функциями принадлежности.

Результатом нечеткого вывода является четкое значение переменной y^* на основе заданных четких значений x_k , k=1..n.

В общем случае механизм логического вывода включает четыре этапа: введение нечеткости (фазификация), нечеткий вывод, композиция и приведение к четкости, или дефазификация (см. рисунок 5).

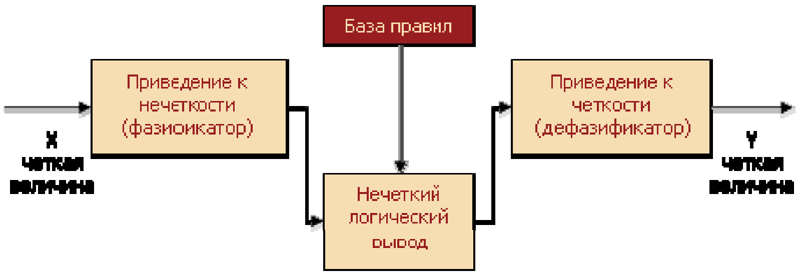


Рис. 5. Система нечеткого логического вывода

Алгоритмы нечеткого вывода различаются главным образом видом используемых правил, логических операций и разновидностью метода дефазификации. Разработаны модели нечеткого вывода Мамдани, Сугено, Ларсена, Цукамото.

Рассмотрим подробнее нечеткий вывод на примере механизма Мамдани (Mamdani). Это наиболее распространенный способ логического вывода в нечетких системах. В нем используется минимаксная композиция нечетких множеств. Данный механизм включает в себя следующую последовательность действий.

1. Процедура фазификации: определяются степени истинности, т.е. значения функций принадлежности для левых частей каждого правила (предпосылок). Для базы правил с m правилами обозначим степени истинности как $A_{ik}(x_k)$, i=1..m, k=1..n.
2. Нечеткий вывод. Сначала определяются уровни "отсечения" для левой части каждого из правил:

$$alfa_i=\min(A_{ik}(x_k)) \qquad i$$

Далее находятся "усеченные" функции принадлежности:

$$B^*_i(y)=\min(alfa_i,B_i(y)) \qquad i$$

3. Композиция, или объединение полученных усеченных функций, для чего используется максимальная композиция нечетких множеств:

$$MF(y)=\max\,(B^*_i(y)) \qquad i$$

где MF(y) – функция принадлежности итогового нечеткого множества.

4. Дефазификация, или приведение к четкости. Существует несколько методов дефазификации. Например, метод среднего центра, или центроидный метод:

$$MF(y)=\max\,(B^*_i(y)) \qquad i$$

Геометрический смысл такого значения – центр тяжести для кривой MF(y). Рисунок 6 графически показывает процесс нечеткого вывода по Мамдани для двух входных переменных и двух нечетких правил R1 и R2.

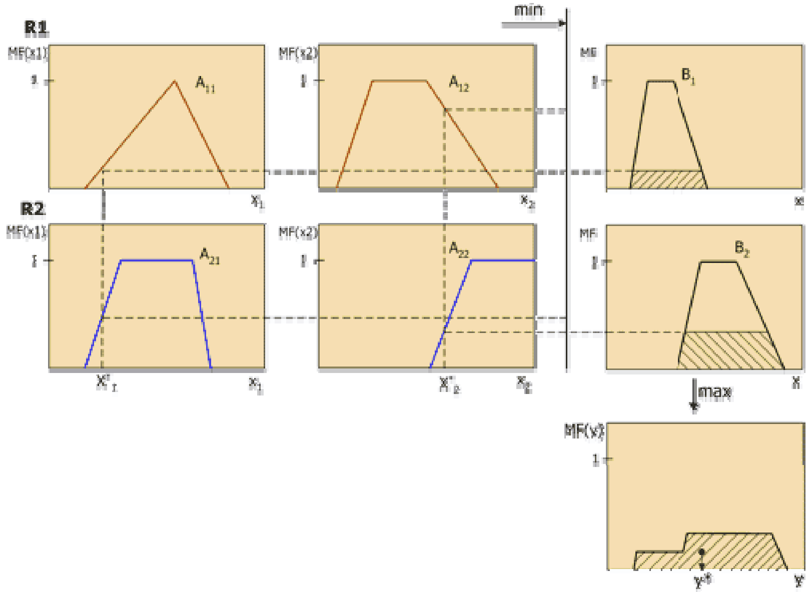


Рис. 6. Схема нечеткого вывода по Мамдани

1.3. Интеграция с интеллектуальными парадигмами

Гибридизация методов интеллектуальной обработки информации – девиз, под которым прошли 90-е годы у западных и американских исследователей. В результате объединения нескольких технологий искусственного интеллекта появился специальный термин – "мягкие вычисления" (soft computing), который ввел Л. Заде в 1994 году. **В настоящее время мягкие вычисления объединяют такие области как: нечеткая логика, искусственные нейронные сети, вероятностные рассуждения и эволюционные алгоритмы.** Они дополняют друг друга и используются в различных комбинациях для создания **гибридных интеллектуальных систем**.

Влияние нечеткой логики оказалось, пожалуй, самым обширным. Подобно тому, как нечеткие множества расширили рамки классической математическую теорию множеств, нечеткая логика "вторглась" практически в большинство методов Data Mining, наделив

их новой функциональностью. Ниже приводятся наиболее интересные примеры таких объединений.

1.3.1. Нечеткие нейронные сети

Нечеткие нейронные сети (fuzzy-neural networks) осуществляют выводы на основе аппарата нечеткой логики, однако параметры функций принадлежности настраиваются с использованием алгоритмов обучения НС. Поэтому для подбора параметров таких сетей применим метод обратного распространения ошибки, изначально предложенный для обучения многослойного персептрона. Для этого модуль нечеткого управления представляется в форме многослойной сети. Нечеткая нейронная сеть как правило состоит из четырех слоев: слоя фазификации входных переменных, слоя агрегирования значений активации условия, слоя агрегирования нечетких правил и выходного слоя.

Наибольшее распространение в настоящее время получили архитектуры нечеткой НС вида ANFIS и TSK. Доказано, что такие сети являются универсальными аппроксиматорами.

Быстрые алгоритмы обучения и интерпретируемость накопленных знаний – эти факторы сделали сегодня нечеткие нейронные сети одним из самых перспективных и эффективных инструментов **мягких вычислений**.

1.3.2. Адаптивные нечеткие системы

Классические нечеткие системы обладают тем недостатком, что для формулирования правил и функций принадлежности необходимо привлекать экспертов той или иной предметной области, что не всегда удается обеспечить. **Адаптивные нечеткие системы (adaptive fuzzy systems) решают эту проблему**. **В таких системах подбор параметров нечеткой системы производится в процессе обучения на экспериментальных данных.** Алгоритмы обучения адаптивных нечетких систем относительно трудоемки и сложны по сравнению с алгоритмами обучения нейронных сетей, и, как правило, состоят из двух стадий:

1. Генерация лингвистических правил;

2. Корректировка функций принадлежности.

Первая задача относится к задаче <u>переборного типа</u>, вторая – к оптимизации в <u>непрерывных пространствах</u>. При этом возникает определенное противоречие: для генерации нечетких правил необходимы функции принадлежности, а для проведения нечеткого вывода – правила. Кроме того, при автоматической генерации нечетких правил необходимо обеспечить их полноту и непротиворечивость.

Значительная часть методов обучения нечетких систем использует **генетические алгоритмы**. В англоязычной литературе этому соответствует специальный термин – Genetic Fuzzy Systems.

Значительный вклад в развитие теории и практики нечетких систем с эволюционной адаптацией внесла группа испанских исследователей во главе с Ф. Херрера (F. Herrera).

1.3.3. Нечеткие запросы

<u>Нечеткие запросы</u> к базам данных (fuzzy queries) – перспективное направление в современных системах обработки информации. Данный инструмент дает возможность формулировать запросы на естественном языке, например: «Вывести список недорогих предложений о съеме жилья близко к центру города», что невозможно при использовании стандартного механизма запросов. **Для этой цели разработана <u>нечеткая реляционная алгебра и специальные расширения языков SQL</u> для нечетких запросов**. Большая часть исследований в этой области принадлежит западноевропейским ученым Д. Дюбуа и Г. Праде.

1.3.4. Нечеткие ассоциативные правила

Нечеткие ассоциативные правила (fuzzy associative rules) – инструмент для извлечения из баз данных закономерностей, которые формулируются в виде лингвистических высказываний. Здесь введены специальные понятия нечеткой **транзакции, поддержки и достоверности нечеткого ассоциативного правила**.

1.3.5. Нечеткие когнитивные карты

Нечеткие когнитивные карты (fuzzy cognitive maps) были предложены Б. Коско в 1986 г. и **используются для моделирования причинных взаимосвязей, выявленных между концептами некоторой области**. В отличие от простых когнитивных карт, нечеткие когнитивные карты представляют собой **нечеткий ориентированный граф**, узлы которого являются нечеткими множествами. Направленные ребра графа не только отражают причинно-следственные связи между концептами, но и определяют степень влияния (вес) связываемых концептов. Активное использование нечетких когнитивных карт в качестве средства моделирования систем обусловлено возможностью наглядного представления анализируемой системы и легкостью интерпретации причинно-следственных связей между концептами. Основные проблемы связаны с процессом построения когнитивной карты, который не поддается формализации. Кроме того, необходимо доказать, что построенная когнитивная карта адекватна реальной моделируемой системе. Для решения данных проблем **разработаны алгоритмы автоматического построения когнитивных карт на основе выборки данных.**

1.3.6. Нечеткая кластеризация

Нечеткие методы кластеризации, в отличие от четких методов (например, нейронные сети Кохонена), позволяют одному и тому же объекту принадлежать одновременно нескольким **кластерам**, но с различной степенью. Нечеткая кластеризация во многих ситуациях более "естественна", чем четкая, например, для объектов, расположенных на границе кластеров. Наиболее распространены: **алгоритм нечеткой самоорганизации c-means и его обобщение в виде алгоритма Густафсона-Кесселя**.

Список можно продолжить и дальше: <u>нечеткие деревья решений, нечеткие сети Петри, нечеткая ассоциативная память, нечеткие самоорганизующиеся карты и другие гибридные методы</u>.

2. Лингвистические переменные

2.1. Понятие лингвистической переменной

При неформальном обсуждении понятия лингвистической переменной мы сформулировали, что лингвистическая переменная отличается от числовой переменной тем, что ее значениями являются не числа, а слова или предложения в естественном или формальном языке. Поскольку слова в общем менее точны, чем числа, понятие лингвистической переменной дает возможность приближенно описывать явления, которые настолько сложны, что не поддаются описанию в общепринятых количественных терминах. В частности, нечеткое множество, представляющее собой ограничение, связанное со значениями лингвистической переменной, можно рассматривать как совокупную характеристику различных подклассов элементов универсального множества. В этом смысле роль нечетких множеств аналогична той роли, которую играют слова и предложения в естественном языке. Например, прилагательное **красивый** отражает комплекс характеристик внешности индивидуума. Это прилагательное можно также рассматривать как название нечеткого множества, представляющего собой ограничение, обусловленное нечеткой переменной **красивый**. С этой точки зрения термины **очень красивый**, **некрасивый**, **чрезвычайно красивый**, **вполне красивый** и т. д. — названия нечетких множеств, образованных путем действия модификаторов **очень**, **не**, **чрезвычайно**, **вполне** и т. п. на нечеткое множество **красивый**. В сущности эти нечеткие множества вместе с нечетким множеством красивый играют роль значений лингвистической переменной **Внешность**.

Важным аспектом понятия лингвистической переменной является то, что эта переменная более высокого порядка, чем нечеткая переменная, в том смысле, что значениями лингвистической переменной являются нечеткие переменные. Например, значениями лингвистической переменной **Возраст** могут быть: **молодой, немолодой, старый, очень старый, немолодой и не старый, вполне старый** и т. п. Каждое из этих значений является названием нечеткой переменной. Если X — название нечеткой переменной, то ограничение, обусловленное этим названием, можно интерпретировать как смысл нечеткой переменной X. Так, если ограничение, обусловленное нечеткой переменной

старый, представляет собой нечеткое подмножество множества $U=[1,100]$ вида

$$R(\textit{старый})=\int_U^{100}\left(1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}\Big/u,\quad u\in U, \tag{2.1}$$

то это нечеткое множество можно считать смыслом нечеткой переменной **старый** (рис. 1).

Другой важный аспект понятия лингвистической переменной состоит в том, что лингвистической переменной соответствуют два правила: (1) синтаксическое правило, которое может быть задано в форме грамматики, порождающей названия значений переменной; (2) семантическое правило, которое определяет алгоритмическую процедуру для вычисления смысла каждого значения. Эти правила составляют существенную часть описания структуры лингвистической переменной.

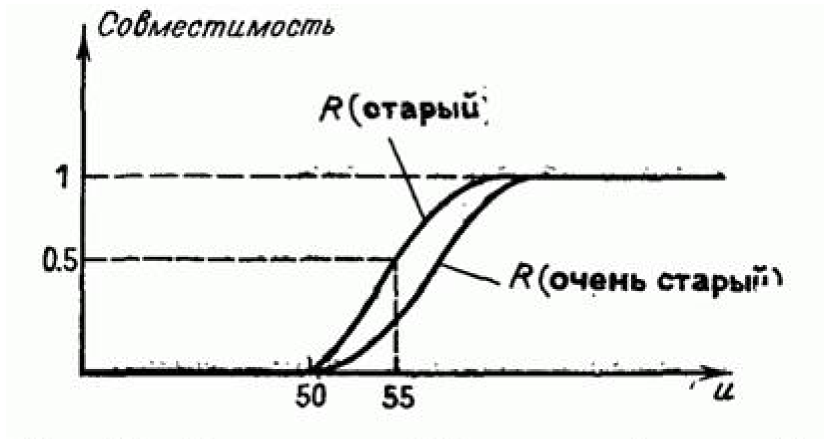


Рис. 2.1. Функции совместимости для значений **старый** и **очень старый**.

Поскольку лингвистическая переменная — переменная более высокого порядка, чем нечеткая переменная, то и ее описание должно быть сложнее описания нечеткой переменной.

Определение 2.1. Лингвистическая переменная характеризуется набором $(\mathfrak{X}, T(\mathfrak{X}), U, G, M)$, в котором $\mathfrak{X}$ — название переменной; $T(\mathfrak{X})$ (или просто T) обозначает терм-множество переменной $\mathfrak{X}$, т. е. множество названий лингвистических значений переменной $\mathfrak{X}$, причем каждое из таких значений является нечеткой переменной X со значениями из универсального множества U с базовой переменной u; G — синтаксическое правило (имеющее обычно форму грамматики), порождающее названия X значений переменной $\mathfrak{X}$, а M – семантическое правило, которое ставит в соответствие каждой нечеткой переменной X ее смысл $M(X)$, т. е. нечеткое подмножество $M(X)$ универсального множества U.
Конкретное название X, порожденное синтаксическим правилом G, называется <u>термом</u>. Терм, состоящий из одного слова или нескольких слов, всегда фигурирующих вместе друг с другом, называется <u>атомарным термом</u>. Терм, состоящий из одного или более атомарных термов, называется <u>составным термом</u>. **Конкатенация** некоторых компонент составного терма является **подтермом**. Если $X_1, X_2, \ldots$ — термы в T, то T можно представить в виде объединения

$$T = X_1 + X_2 + \ldots \tag{2.2}$$

При необходимости явно указать на то, что T был порожден грамматикой G, будем писать $T(G)$.

Смысл $M(X)$ терма X определяется как ограничение $R(X)$ на базовую переменную u, обусловленное нечеткой переменной X:

$$M(X) \triangleq R(X), \tag{2.3}$$

имея в виду, что $R(X)$ и, следовательно, $M(X)$ можно рассматривать как нечеткое подмножество множества U, имеющее название X.

Замечание 2.2. Для того чтобы избежать большого количества символов, целесообразно присваивать несколько значений некоторым символам, встречающимся в определении 2.1, полагаясь при этом на контекст для разрешения возможных неопределенностей. В частности:

а) Символ $\mathfrak{X}$ мы будем часто использовать для обозначения как названия самой переменной, так и общего названия ее значений. Аналогично, X будет обозначать как общее название значений переменной, так и название самой переменной.

б) Будем пользоваться одним и тем же символом для обозначения множества и его названия. Так, символы X, $M(X)$ и $R(X)$ будут взаимозаменяемыми, хотя, строго говоря, X как название $M(X)$ (или $R(X)$) не то же самое, что нечеткое множество $M(X)$. Другими словами, когда мы говорим, что терм X (например, **молодой)** есть значение переменной $\mathfrak{X}$ (например, **Возраст**), то имеем в виду, что действительное значение есть $M(X)$, а X — просто название этого значения.

Пример 2.3. Рассмотрим лингвистическую переменную **Возраст**, т. е. $\mathfrak{X} = \textbf{Возраст}$, и пусть $U = [0,100]$. Лингвистическим значением переменной **Возраст** может быть, например, **старый**, причем значение **старый** является атомарным термом. Другим значением может быть **очень старый**, т. е. составной терм, в котором **старый —** атомарный терм, а **очень** и **старый** — подтермы.

Значение **более или менее молодой** переменной **Возраст —** составной терм, в котором терм **молодой —** атомарный, а **более или менее** — подтерм. Терм-множество переменной **Возраст** можно записать следующим образом:

$$T(\text{Возраст}) = \textit{старый} + \textit{очень старый} + \textit{не старый} + \\ + \textit{более или менее молодой} + \textit{вполне молодой} + \\ + \textit{не очень старый и не очень молодой} + \ldots \tag{2.4}$$

Здесь каждый терм является названием нечеткой переменной в универсальном множестве $U = [0,100]$. Ограничение, обусловленное термом, скажем $R(\textit{старый})$, есть смысл лингвистического значения **старый**. Таким образом, если $R(\textit{старый})$ определяется согласно (2.1), то смысл лингвистического значения **старый** определяется выражением

$$M(\textit{старый}) = \int_{50}^{100} \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{2}\right)^{-1} \Big/ u, \tag{2.5}$$

или проще (см. замечание 2.2)

$$\textit{старый} = \int_{50}^{100} \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{2}\right)^{-1} \Big/ u. \tag{2.6}$$

Аналогичным образом смысл такого лингвистического значения, как **очень старый**, можно выразить так (см. рис. 2.1):

$$M(\textit{очень старый}) = \textit{очень старый} = \int_{50}^{100} \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2} \Big/ u. \tag{2.7}$$

Уравнение назначения в случае лингвистической переменной принимает вид

$$X = \text{терм в } T(\mathcal{X}) = \text{название, порожденное грамматикой } G \tag{2.8}$$

откуда следует, что смысл, назначенный терму X, выражается равенством

$$M(X) = R(\text{терм в } T(\mathcal{X})). \tag{2.9}$$

Другими словами, смысл терма X получается путем применения семантического правила M к значению терма X, назначенному согласно правой части уравнения (2.8). Более того, из определения (2.3) следует, что $M(X)$ идентично ограничению, обусловленному термом X.

Замечание 2.4. В соответствии с замечанием 2.2(а) уравнение назначения будет обычно записываться в виде

$$\mathcal{X} = \text{название в } T(\mathcal{X}), \tag{2.10}$$

а не в форме (2.8). Например, если $\mathcal{X} = \text{Возраст}$, а **старый —** терм в $T(\mathcal{X})$ мы напишем

$$\text{Возраст} = \textit{старый}, \tag{2.11}$$

понимая это так, что **старый** — ограничение на значения базовой переменной u, определяемое (2.1), — назначается лингвистической переменной **Возраст**. Важно отметить, что знак равенства в (2.10) не обозначает симметрического отношения, как в случае арифметического равенства. Так, бессмысленно записывать (2.11) в виде

$$\textit{старый} = \textbf{Немолодой}.$$

Чтобы проиллюстрировать понятие лингвистической переменной, мы рассмотрим сначала очень простой пример, в котором $T(\mathscr{X})$ содержит лишь небольшое число термов, а синтаксическое и семантическое правила тривиальны.

Пример 2.5. Рассмотрим лингвистическую переменную **Число**, конечное терм-множество которой имеет вид

$$T(\textbf{Число}) = \textit{немного} + \textit{несколько} + \textit{много}, \qquad (2.12)$$

где каждый терм представляет собой ограничение на значения базовой переменной u в универсальном множестве

$$U = 1+2+3+\ldots+10. \qquad (2.13)$$

Предполагается, что эти ограничения — нечеткие подмножества множества U и определяются они следующим образом:

$$\textit{немного} = 0.4/1+0.8/2+1/3+0.4/4, \qquad (2.14)$$

$$\textit{несколько} = 0.5/3+0.8/4+1/5+1/6+0.8/7+0.5/8, \qquad (2.15)$$

$$\textit{много} = 0.4/6+0.6/7+0.8/8+0.9/9+1/10. \qquad (2.16)$$

Таким образом,

$$R(\textit{немного}) = M(\textit{немного}) = 0.4/1+0.8/2+1/3-0.4/4 \qquad (2.17)$$

и аналогично для других термов в T. Смысл равенства (2.17) в том, что **немного** есть название нечеткой переменной, которая является значением лингвистической переменной **Число**. Смысл лингвистического значения **немного** или, что то же самое, ограничение, обусловленное этим термом, есть нечеткое подмножество универсального множества U и определяется правой частью равенства (2.17).

Чтобы назначить такое значение, как **немного**, лингвистической переменной **Число**, мы напишем

$$\textbf{Число} = \textit{немного}. \qquad (2.18)$$

Пример 2.6. В этом случае мы предполагаем, что имеем дело с составной лингвистической переменной $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, которой поставлена в соответствие базовая переменная (u,v), принимающая значения из универсального множества $U \times V$, где

$$\begin{aligned} U \times V &= (1+2+3+4)\times(1+2+3+4) = \\ &= (1,1)+(1,2)+(1,3)+(1,4)+ \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+(4,1)+(4,2)+(4,3)+(4,4), \end{aligned} \qquad (2.19\text{-}2.20)$$

причем

$$i \times j = (i,j), \quad i, \; j = 1,2,3,4. \qquad (2.21)$$

Кроме того, мы предполагаем, что терм-множество переменной $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ состоит лишь из двух термов:

$$\mathcal{T} - \textbf{приближенно равны} + \textbf{более или менее равны}, \qquad (2.22)$$

где **приближенно равны** и **более или менее равны** — названия бинарных нечетких отношений, определенных матрицами

$$\textbf{приближенно равны} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.23)$$

и

$$\textbf{более или менее равны} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.24)$$

В этих матрицах отношения (i,j)-й элемент есть значение совместимости пары (i,j) с рассматриваемым ограничением. Например, элемент $(2,3)$ в матрице **приближенно равны,** равный 0.6, есть значение совместимости упорядоченной пары $(2,3)$ с бинарным ограничением **приближенно равны.**

Чтобы назначить значение, скажем, **приближенно равны** лингвистической переменной $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, мы напишем

$$(\mathcal{X},\mathcal{Y}) - \textbf{приближенно равны}, \qquad (2.25)$$

где, как и в (2.18), имеется в виду, что в качестве значения переменной $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ назначается бинарное нечеткое отношение **приближенно равны**, являющееся бинарным ограничением на значения базовой переменной (u,v) в универсальном множестве (2.20).

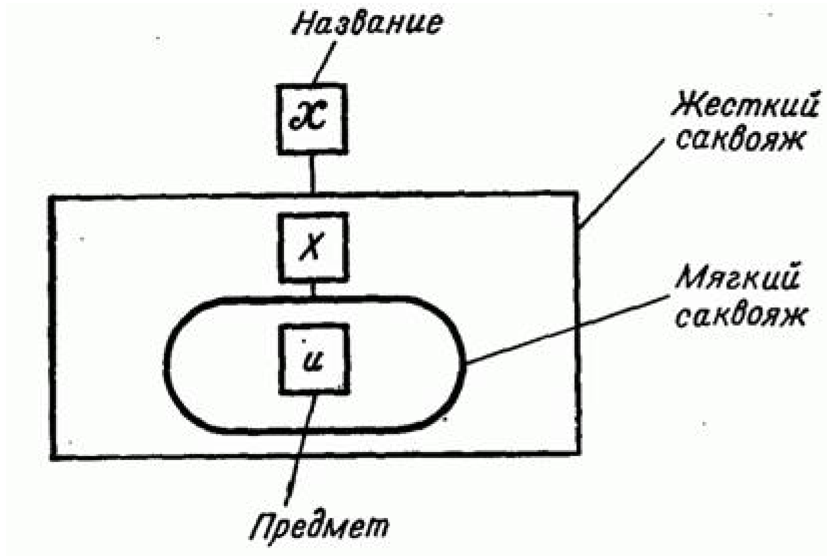


Рис. 2.2. Аналогия с саквояжем для лингвистической переменной

Замечание 2.7. Используя аналогию с саквояжем, лингвистическую переменную в смысле определения 2.1 можно уподобить жесткому саквояжу, в который можно помещать мягкие саквояжи, как показано на рис. 2.2. Мягкий саквояж соответствует нечеткой переменной, которая является лингвистическим значением переменной $\mathcal{X}$, а X играет роль ярлыка на мягком саквояже.

2.2. Структурированные лингвистические переменные

В обоих рассмотренных выше примерах терм-множество состояло лишь из небольшого числа термов, так что целесообразно было просто перечислить элементы терм-множества $T(\mathfrak{X})$ и установить прямое соответствие между каждым элементом и его смыслом. В более общем случае, однако, число элементов в $T(\mathfrak{X})$ может быть бесконечным, и тогда как для порождения элементов множества $T(\mathfrak{X})$, так и **для вычисления их смысла необходимо применять алгоритм, а не просто процедуру просмотра элементов терм-множества.**

Будем говорить, что **лингвистическая переменная** $\mathfrak{X}$ **структурирована, если ее терм-множество** $T(\mathfrak{X})$ **и функцию** M, **которая ставит в соответствие каждому элементу терм- множества его смысл, можно задать алгоритмически.** Из этих соображений **синтаксическое и семантическое правила, связанные со структурированной лингвистической переменной, можно рассматривать как алгоритмические процедуры для порождения элементов множества** $T(\mathfrak{X})$ **и вычисления смысла каждого терма в** $T(\mathfrak{X})$ **соответственно**. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что рассматриваемые лингвистические переменные являются структурированными.

Пример 2.8. В качестве очень простой иллюстрации той роли, которую играют синтаксическое и семантическое правила в случае структурированной лингвистической переменной, рассмотрим переменную **Возраст**, элементами терм-множества которой являются термы типа **старый, очень старый, очень очень старый, очень очень очень старый** и т. п. Таким образом, терм-множество переменной **Возраст** можно записать в виде

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

$$T(\text{Возраст}) = \text{старый} + \text{очень старый} + \text{очень очень старый} + \text{очень очень очень старый} + \ldots \tag{2.26}$$

В этом простом случае легко проверить, что каждый терм множества $T(\text{Возраст})$ имеет вид **старый** или **очень очень … очень.** Чтобы вывести это правило в более общем виде, поступим следующим образом.

Пусть xy обозначает конкатенацию символьных цепочек x и y, например, $x = \text{очень}$, $y = \text{старый}$, $xy = \text{очень старый}$. Если A и B — множества цепочек, например

$$A = x_1 + x_2 + \ldots, \tag{2.27}$$

$$B = y_1 + y_2 + \ldots, \tag{2.28}$$

где x_i и y_j — символьные цепочки, то конкатенация A и B обозначается AB и определяется как множество цепочек вида

$$AB = (x_1 + x_2 + \ldots)(y_1 + y_2 + \ldots) = \sum_{i,j} x_i y_j. \tag{2.29}$$

Например, если $A = \text{очень}$ и $B = \text{старый} + \text{очень старый}$, то

$$\text{очень}(\text{старый} + \text{очень старый}) = \text{очень старый} + \text{очень очень старый}. \tag{2.30}$$

Используя эти обозначения, данное представление для $T(\text{Возраст})$ можно рассматривать как решение уравнения

$$T = \textit{старый} + \textit{очень}\ T \tag{2.31}$$

которое означает, что множество T состоит из терма **старый** и термов, состоящих из слова **очень** и некоторого терма из T.

Уравнение (2.31) можно решать итеративным способом, используя рекуррентное соотношение

$$T^{i+1} = \textit{старый} + \textit{очень}\ T^{i},\ i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.32}$$

и взяв пустое множество θ в качестве начального значения T^{i}. Тогда

$$\begin{aligned} &T^0 = \theta, \\ &T^1 = \textit{старый}, \\ &T^2 = \textit{старый} + \textit{очень старый}, \\ &T^3 = \textit{старый} + \textit{очень старый} + \textit{очень очень старый}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2.33}$$

и решение уравнения (2.31) имеет вид

$$\begin{aligned} T = T^{\infty} = \textit{старый} + \textit{очень старый} + \textit{очень очень старый} + \\ + \textit{очень очень очень старый} + \ldots \end{aligned} \tag{2.34}$$

Для рассматриваемого примера синтаксическое правило выражается уравнением (2.31) и его решением (2.34). Эквивалентным образом синтаксическое правило можно охарактеризовать следующей системой подстановок:

$$T \to \textit{старый}, \tag{2.35}$$

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

$$T \to \textit{очень}\ T, \tag{2.36}$$

для которой (2.31) играет роль алгебраического представления. В этом случае терм в T может быть порожден при помощи стандартной процедуры, включающей в себя последовательное применение правил (2.35) и (2.36), начиная с символа T. Таким образом, если T заменить на $\textit{очень}\ T$ и затем T в $\textit{очень}\ T$ заменить на $\textit{старый}$, мы получаем терм **очень старый**. Аналогично терм **очень очень очень старый** можно получить из T по следующей цепочке подстановок:

$$\begin{aligned} T \to \textit{очень}\ T \to \textit{очень очень}\ T \to \textit{очень очень очень}\ T \to \\ \to \textit{очень очень очень старый}\ T \end{aligned} \tag{2.37}$$

Возвращаясь к семантическому правилу для переменной **Возраст**, отметим, что для вычисления смысла такого терма, как **очень…очень старый** требуется знать смысл терма **старый** и модификатора **очень**. Терм **старый** играет роль первичного терма, т. е. терма, смысл которого должен быть задан заранее с тем, чтобы можно было вычислять смысл составных термов в T. Что касается модификатора **очень**, то он действует как лингвистическая неопределенность, т. е. как модификатор смысла следующего за ним терма. Если в качестве очень простого приближения мы предположим, что модификатор **очень** действует как оператор концентрирования, то

$$\textit{очень старый} = \mathrm{CCN}(\textit{старый}) = \textit{старый}^2. \tag{2.58}$$

Следовательно, семантическое правило для переменной **Возраст** можно записать в виде

$$M(\textit{очень} \ldots \textit{очень старый}) = \textit{старый}^{2n}, \tag{2.39}$$

где n — число вхождений слова **очень** в терм **очень…очень старый**, $M(\text{очень} \quad \text{очень старый})$ — смысл терма **очень…очень старый**. Далее, если определить первичный терм **старый** по формуле

$$\text{старый} = \int_{50}^{100} \left(1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} \Big/ u \quad , \tag{2.40}$$

то получим

$$M(\text{очень}\ldots\text{очень старый}) = \int_{50}^{100} \left(1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2n} \Big/ u, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.41}$$

Это уравнение выражает в явном виде семантическое правило для вычисления смысла составных термов, образованных по формуле (2.31), если известны смысл первичного терма **старый** и смысл неопределенности **очень**.

2.3. Булевы лингвистические переменные

Лингвистическая переменная, рассмотренная в примере 2.8, является частным случаем того, что может быть названо булевой лингвистической переменной. Обычно такой переменной соответствует конечное число первичных термов, конечное число неопределенностей, союзы **и** и **или** и отрицание **не.** Например, терм-множество булевой переменной **Возраст** может иметь вид

$$\begin{aligned} T(\text{Возраст}) = {} & \text{молодой} + \text{старый} + \text{не молодой} + \\ & + \text{не старый} + \text{очень молодой} + \\ & + \text{очень очень молодой} + \\ & + \text{не очень молодой и не очень старый} + \\ & + \text{вполне молодой} + \text{более или менее старый} + \\ & + \text{чрезвычайно старый} + \ldots \end{aligned} \tag{2.42}$$

Более формально булеву лингвистическую переменную можно определить следующим образом.

Определение 2.9. Булевой лингвистической переменной называется такая лингвистическая переменная, термы X которой являются булевыми выражениями в переменных вида X_p, hX_p, X или hX, где h — лингвистическая неопределенность, X_p — первичный терм и hX — название нечеткого множества, являющегося результатом действия h на X.

Например, в случае лингвистической переменной **Возраст**, терм-множество которой определяется соотношением (2.42), терм **не очень молодой и не очень старый** имеет вид (2.9), где $h \triangleq \text{очень}$, $X_p \triangleq \text{молодой}$ и $X_p \triangleq \text{старый}$. Аналогично, в случае терма **очень очень молодой,** $h \triangleq \text{очень очень}$ и $X_p \triangleq \text{молодой}$.

Булевы лингвистические переменные особенно удобны, поскольку многое из нашего опыта в обращении с булевыми выражениями можно перенести на переменные этого типа. Чтобы проиллюстрировать эту мысль, рассмотрим простой пример, в котором участвуют два первичных терма и одна неопределенность.

Пример 2.10. Пусть **Возраст** — булева лингвистическая переменная с терм-множеством вида

$$
\begin{aligned}
T(\textbf{Возраст}) = {} & \textit{молодой} + \textit{не молодой} + \textit{старый} + \\
& + \textit{не старый} + \textit{очень молодой} + \\
& + \textit{очень очень молодой} + \\
& + \textit{не молодой и не старый} + \textit{молодой или старый} + \\
& + \textit{молодой или (не очень молодой и не очень старый)} + \ldots
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

Если отождествить союз **и** с операцией пересечения, **или** — с операцией объединения, отрицание **не** — с операцией взятия дополнения и модификатор **очень** — с операцией концентрирования (см. (2.38)), то нетрудно выписать смысл типичного значения переменной **Возраст**. Например:

$$
\begin{aligned}
& M(\textit{не молодой}) = \neg\textit{молодой}, \\
& M(\textit{не очень молодой}) = \neg\left(\textit{молодой}^2\right), \\
& M(\textit{не очень молодой и не очень старый}) = \neg\left(\textit{молодой}^2\right) \cap \neg\left(\textit{старый}^2\right), \\
& M(\textit{молодой или старый}) = \textit{молодой} \cup \textit{старый}.
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Эти уравнения выражают, по сути дела, смысл составного терма как функцию смысла составляющих его первичных термов. Так, если термы **молодой** и **старый** определить в виде

$$\textit{молодой} = \int_0^{25} 1/u + \int_{25}^{100} \left(1 + \left(\frac{u-25}{5}\right)^2\right)^{-1} \Big/ u, \tag{2.45}$$

$$\textit{старый} = \int_{50}^{100} \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} \Big/ u, \tag{2.46}$$

то (см. рис. 2.3)

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

$$
\begin{aligned}
M(\textit{молодой или старый}) = {} & \int_0^{25} 1/u + \int_{25}^{50} \left(1 + \left(\frac{u-25}{5}\right)^2\right)^{-1} \Big/ u + \\
& + \int_{50}^{100} \left(1 + \left(\frac{u-25}{5}\right)^2\right)^{-1} \vee \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} \Big/ u.
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Лингвистическая переменная, рассмотренная в этом примере, включает в себя лишь один тип неопределенности, а именно неопределенность **очень**. В общем же случае булевой переменной может соответствовать конечное число неопределенностей, как, например, в (2.42). Однако если операции, соответствующие лингвистическим неопределенностям, определены, то процедура вычисления смысла составного терма остается такой же.

Вопрос о подходящем представлении для той или иной неопределенности, например, **более или менее, вполне** или **существенно** ни в коем случае не является простым. В некоторых контекстах действие неопределенности **более или менее** можно приближенно выразить следующим образом:

$$M(\textit{более или менее } X) = \mathrm{DIL}(X) = X^{0.5}. \tag{2.48}$$

Например, если $X = \textit{старый}$ и терм **старый** определяется выражением (2.46), то

$$\textit{более или менее старый} = \int_{50}^{100} \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-0.5} \Big/ u. \tag{2.49}$$

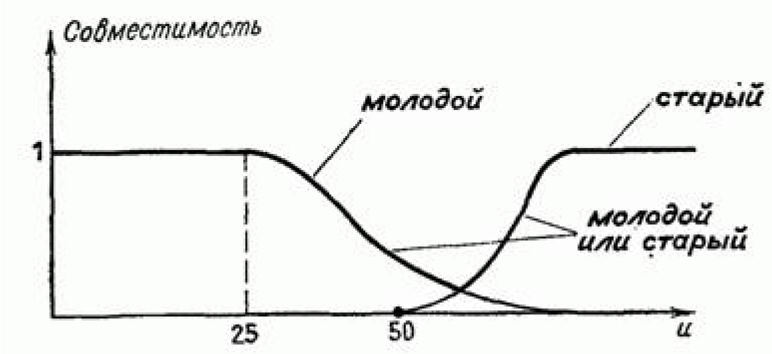


Рис. 2.3. Функция совместимости для значения **молодой или старый**.

Во многих случаях, однако, неопределенность **более или менее** действует как оператор увеличения нечеткости, а не как оператор растяжения. Предположим для иллюстрации, что смысл первичного терма **недавно** определяется выражением

$$\textbf{недавно} = 1/1974 + 0.8/1973 + 0.7/1972 \qquad (2.50)$$

и что терм **более или менее недавно** определяется результат действия оператора увеличения нечеткости F терм **недавно**, т. е.

$$\textbf{более или менее недавно} = F(\textbf{недавно};\ K), \qquad (2.51)$$

где ядро K оператора F определяется следующим образом:

$$K(1974) = 1/1974 + 0.9/1973,$$
$$K(1973) = 1/1973 + 0.9/1972,$$
$$K(1972) = 1/1972 + 0.8/1971. \qquad (2.52)$$

Подставив значение K в (2.48), получим смысл терма **более или менее недавно**, т. е.

$$\textbf{более или менее недавно} = 1/1974 + 0.9/1973 + 0.72/1972 + 0.56/1971 \ . \qquad (2.53)$$

С другой стороны, если предположить, что неопределенность **более или менее** является оператором растяжения, то мы получим

$$\textbf{более или менее недавно} = (1/1974 + 0.8/1973 + 0.7/1972)^{0.5} =$$
$$= 1/1974 + 0.9/1973 + 0.84/1972, \qquad (2.54)$$

что отличается от (2.53) главным образом отсутствием члена $0.56/1971$.

Таким образом, если бы этот член играл важную роль в определении терма **более или менее недавно**, то приближение неопределенности **более или менее** оператором растяжения не было бы хорошим.

В примере 2.10 при выводе семантического правила мы воспользовались тем, что знаем, как обращаться с булевыми выражениями. Чтобы проиллюстрировать более общий метод, рассмотрим ту же лингвистическую переменную, что и в примере 2.10, но применим метод, который представляет собой модификацию описанного Кнутом подхода для определения семантики контекстно-свободных языков.

Пример 2.11. Легко проверить, что терм-множество в примере 2.10 порождается контекстно-свободной грамматикой $G = (V_T, V_N, T, P)$, в которой нетерминальные символы (синтаксические категории) обозначаются через T, A, B, C, D, ..., т. е.

$$V_N = T + A + B + C + D + E, \qquad (2.55)$$

в то время как множество терминальных символов (компоненты термов в T) выражается в виде

$$V_N = молодой + старый + очень + не + и + или + (+),\qquad (2.56)$$

а система подстановок P имеет вид

$$\begin{array}{ll} T \to A, & C \to D, \\ T \to T \text{ или } A, & C \to E, \\ A \to B, & D \to \text{очень } D, \\ A \to A \text{ и } B, & E \to \text{очень } E, \\ B \to C, & D \to \text{молодой}, \\ B \to \text{не } C, & E \to \text{старый}. \\ C \to (T), & \end{array} \qquad (2.57)$$

Систему P можно представить и алгебраически в виде следующей системы уравнений

$$\begin{aligned} T &= A + T \text{ или } A, \\ A &= B + A \text{ или } B, \\ B &= C + \text{не } C, \\ D &= \text{очень } D + \text{молодой}, \\ E &= \text{очень } E + \text{старый}. \end{aligned} \qquad (2.58)$$

Решением этой системы уравнений относительно T является терм-множество T, описываемое выражением (2.43). Аналогично, решениями системы (2.58) относительно A, B, C, D и E являются множества термов, которые составляют синтаксические категории, обозначаемые через A, B, C, D и E соответственно. Решение системы (2.58) можно получить итеративно, как в случае уравнения (2.31), используя рекуррентное соотношение

$$(T, A, B, C, D, E)^{i+1} = f\left((T, A, B, C, D, E)^{i}\right), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (2.59)$$

и

$$(T, A, B, C, D, E)^{0} = (\theta, \ldots, \theta),$$

где (T, A, B, C, D, E) — набор нетерминальных символов системы (2.58), f — отображение, определяемое системой уравнений (2.58), θ — пустое множество, а $(T, A, B, C, D, E)^{i}$ — i-я итерация для (T, A, B, C, D, E). Решение системы (2.58), представляющее собой неподвижную точку отображения f, имеет вид $(T, A, B, C, D, E)^{\infty}$. Однако для всех i выполняется

$$(T, A, B, C, D, E)^{i} \subset (T, A, B, C, D, E), \qquad (2.60)$$

т. е. каждая компонента набора в левой части (2.60) является подмножеством соответствующей компоненты в правой части (2.60). Смысл выражения (2.60) состоит тогда в том, что итерирование по i порождает все больше и больше термов в каждой из синтаксических категорий T, A, B, C, D, E.

В более общепринятой процедуре терм в T, скажем, **не очень молодой и не очень старый** порождается грамматикой G путем последовательных замен (подстановок) с использованием системы P, причем каждая цепочка подстановок начинается с T и заканчивается термом, порожденным грамматикой G. Например, цепочка подстановок для терма **не очень молодой и не очень старый** имеет вид (см. также пример 2.8)

$$\begin{aligned}T &\to A \to A \text{ и } B \to B \text{ и } B \to \text{не } C \text{ и } B \to \text{не } D \text{ и } B \to \\ &\to \text{не очень } D \text{ и } B \to \text{не очень молодой и } B \to \\ &\to \text{не очень молодой и не } C \to \text{не очень молодой и не } E \to \\ &\to \text{не очень молодой и не очень } E \to \\ &\to \text{не очень молодой и не очень старый}\end{aligned} \qquad (2.61)$$

Эту цепочку можно получить, используя синтаксическое дерево, (рис. 2.4), представляющее структуру терма **не очень молодой и не очень старый** с использованием синтаксических категорий T, A, B, C, D, E. В сущности, описанная процедура порождения термов в T грамматикой G составляет синтаксическое правило для переменной **Возраст**.

Семантическое правило для переменной **Возраст** индуцируется описанным выше синтаксическим правилом, в том смысле, что смысл терма в T частично определяется его синтаксическим деревом.

В частности, каждому правилу подстановки в (2.57) ставится в соответствие некоторое отношение между нечеткими множествами, обозначенными соответствующими терминальными и нетерминальными символами. Результирующая двойственная система подстановок и связанных с ней уравнений имеет вид

$$T \to A \qquad \Rightarrow T_L = A_R, \qquad (2.62)$$

$$T \to T \text{ или } A \qquad \Rightarrow T_L = T_R + A_R, \qquad (2.63)$$

$$A \to B \qquad \Rightarrow A_L = B_R, \qquad (2.64)$$

$$A \to B \text{ и } B \qquad \Rightarrow A_L = A_R \cap B_R, \qquad (2.65)$$

$$B \to C \qquad \Rightarrow B_L = C_R, \qquad (2.66)$$

$$B \to \text{не } C \qquad \Rightarrow B_L = \neg C_R, \qquad (2.67)$$

$$C \to (T) \qquad \Rightarrow C_L = T_R, \qquad (2.68)$$

$$C \to D \qquad \Rightarrow C_L = D_R, \qquad (2.69)$$

$$C \to E \qquad \Rightarrow C_L = E_R, \qquad (2.70)$$

$$D \to \text{очень } D \qquad \Rightarrow D_L = (D_R)^2, \qquad (2.71)$$

$$E \to \text{очень } E \qquad \Rightarrow E_L = (E_R)^2, \qquad (2.72)$$

$$D \to \text{молодой} \qquad \Rightarrow D_L = \text{молодой}, \qquad (2.73)$$

$$E \to \text{старый} \qquad \Rightarrow E_L = \text{старый}, \qquad (2.74)$$

Здесь нижние индексы L и R введены для различения символов в левой и правой частях подстановки ($+ \triangleq$ объединение).

Эта двойственная система используется для вычисления смысла составных термов из T следующим образом.

1. Рассматриваемый терм, например, **не очень молодой и не очень старый** подвергается грамматическому разбору при помощи подходящего алгоритма грамматического разбора для G, в результате чего получается синтаксическое дерево типа показанного на рис. 2.5. Конечным вершинам этого синтаксического дерева соответствуют 1) первичные термы, смысл которых определяется априори, 2) названия модификаторов (т. е. неопределенностей, союзов, отрицания и т. п.) и 3) маркеры, такие, как скобки, которые облегчают грамматический разбор.

2. Сначала первичным термам, соответствующим конечным вершинам дерева (рис. 2.4), назначается их смысл и затем с помощью уравнений (2.62) — (2.74) вычисляется смысл ближайших к ним нетерминальных символов. После этого дерево урезают так, чтобы вычисленные терминальные символы оказались конечными вершинами оставшегося поддерева. Этот процесс повторяется до тех пор, пока не будет вычислен смысл терма, соответствующего корню исходного синтаксического дерева.

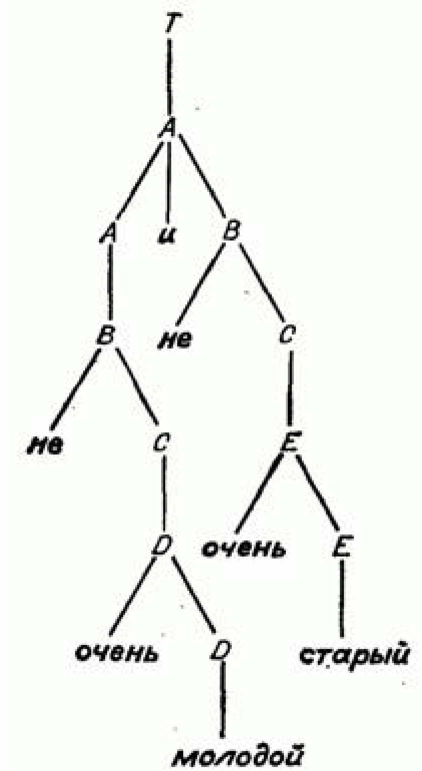


Рис. 2.4. Синтаксическое дерево для значения **не очень молодой и не очень старый**.

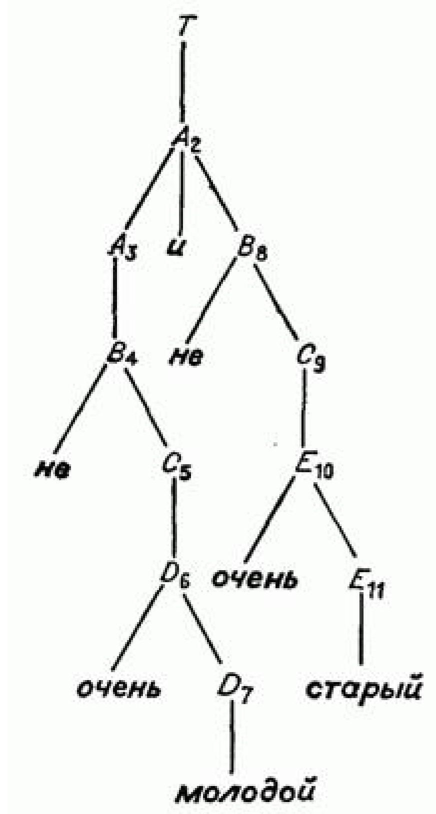


Рис. 2.5. Вычисление смысла значения **не очень молодой и не очень старый**

Применяя эту процедуру к синтаксическому дереву, показанному на рис. 2.5, мы сначала приписываем термам **молодой** и **старый** смысл, выраженный формулами (2.45) и (2.46). Затем, используя (2.73) и (2.74), находим

$$D_7 = \text{молодой} \qquad (2.75)$$

и

$$E_{11} = \text{старый}. \qquad (2.76)$$

Далее по (2.71) и (2.72) получаем

$$D_6 = D_7^2 = \text{молодой}^2 \qquad (2.77)$$

и

$$E_{10} = E_{11}^2 = \text{старый}^2. \qquad (2.78)$$

Следуя этой процедуре, получаем

$$C_6 = D_6 = \text{молодой}^2, \qquad (2.79)$$

$$C_9 = E_{10} = \text{старый}^2, \qquad (2.80)$$

$$B_4 = \neg C_5 = \neg\left(\text{молодой}^2\right), \qquad (2.81)$$

$$B_8 = \neg C_9 = \neg\left(\text{старый}^2\right), \qquad (2.82)$$

$$A_3 = B_4 = \neg\left(\text{молодой}^2\right), \qquad (2.83)$$

$$A_2 = A_3 \cap B_8 = \neg\left(\text{молодой}^2\right) \cap \neg\left(\text{старый}^2\right), \qquad (2.84)$$

и, следовательно,

$$\text{не очень молодой и не очень старый} = \neg\left(\text{молодой}^2\right) \cap \neg\left(\text{старый}^2\right)$$

что согласуется с ранее полученным выражением (2.44).

Основное назначение описанной выше процедуры состоит в том, чтобы связать смысл составного терма со смыслом составляющих его первичных термов посредством системы уравнений, определяемой грамматикой, порождающей термы в T. В случае булевой лингвистической переменной примера 2.10 это сделать довольно просто. В общем случае природа неопределенностей в лингвистической переменной и ее грамматика могут быть таковы, что вычисление смысла значений переменной окажется нетривиальной проблемой.

2.4. Графическое представление лингвистической переменной

Лингвистическую переменную можно представить графически аналогично графическому представлению объекта в венском языке. Переменная $\mathcal{X}$ при этом представляется кустом с корнем (см. рис. 2.6), обозначенным $\mathcal{X}$, и ребрами, обозначенными названиями значений переменной $\mathcal{X}$, т. е. X_1, X_2, …. Объект, приписанный ребру X_i, есть смысл значения X_i. Например, в случае переменной **Возраст** ребра можно обозначить как **молодой**, **старый**, **не молодой** и т. п., а смысл каждого такого названия можно представить в виде графика функции принадлежности нечеткого множества, которая является смыслом этого названия (рис. 2.7). Важно отметить, что в случае структурированной лингвистической переменной как названия ребер, так и названия приписанных к ним объектов порождаются алгоритмически синтаксическим и семантическим правилами, соответствующими этой переменной.

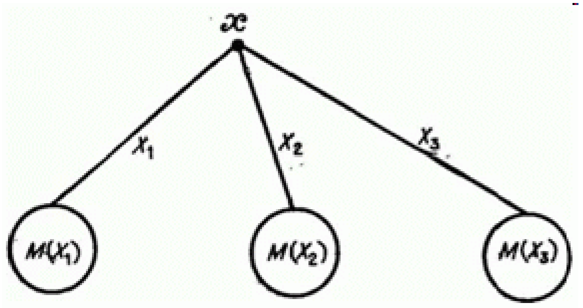


Рис. 2.6. Представления лингвистической переменной как объекта венского языка.

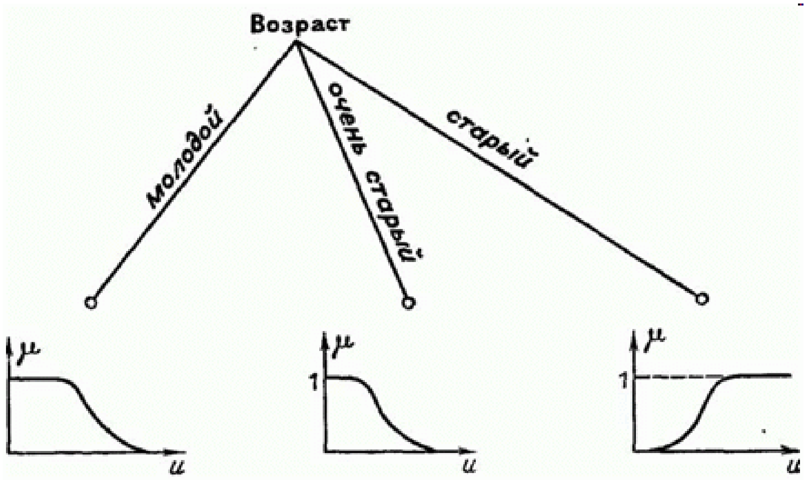


Рис. 2.7. Представление лингвистической переменной **Возраст** как объекта венского языка.

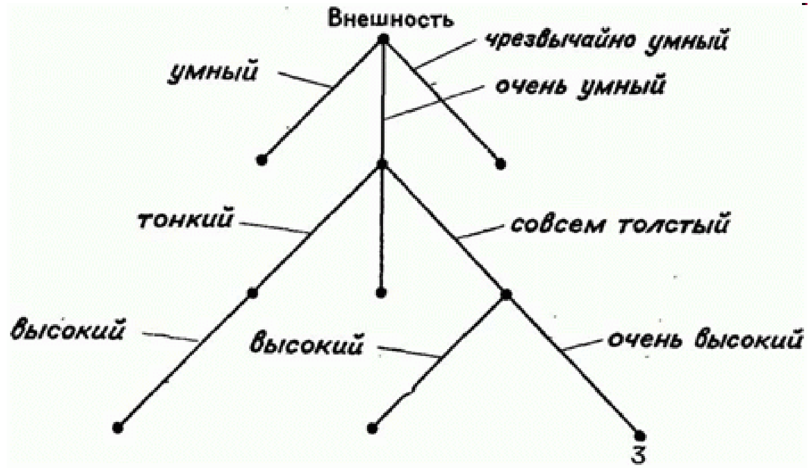


Рис. 2.8. Представление лингвистической переменной **Внешность** с помощью дерева.

В более общем случае граф лингвистической переменной может иметь вид не одиночного куста, а более сложного дерева (см. рис. 2.8). При этом название значения переменной порождается путем последовательного приписывания (конкатенации) названий ребер, составляющих цепь, которая соединяет с корнем соответствующую этому значению конечную вершину дерева.

Например, для дерева, изображенного на рис. 2.8, составным названием, соответствующим цепи от узла 3 к корню дерева, является **очень высокий**, **совсем толстый**, **очень умный**.

Особое место в нечеткой логике занимает лингвистическая переменная "истинность". В классической логике истинность может принимать только два значения: истинно и ложно. В нечеткой логике истинность "размытая". Нечеткая истинность определяется аксиоматически, причем разные авторы делают это по-разному. Интервал [0, 1] используется как универсальное множество для задания лингвистической переменной "истинность".

3. Лингвистические переменные истинности и нечеткая логика

В каждодневных разговорах мы часто характеризуем степень истинности утверждения посредством таких выражений, как очень верно, совершенно верно, более или менее верно, ложно, абсолютно ложно и т. д. Сходство между этими выражениями и значениями лингвистической переменной наводит на мысль о том, что в ситуациях, когда истинность или ложность утверждения определены не достаточно хорошо, может оказаться целесообразным трактовать **истинность** как лингвистическую переменную, для которой **истинно** и **ложно** — лишь два первичных терма в терм-множестве этой переменной, а не пара крайних точек в множестве значений истинности. Такую переменную будем называть лингвистической переменной истинности, а ее значения — лингвистическими значениями истинности.

Трактовка истинности как лингвистической переменной приводит к нечеткой лингвистической логике, или просто нечеткой логике, которая совершенно отлична от обычной двузначной или даже многозначной логики. Эта нечеткая логика является основой того, что можно было бы назвать приближенными рассуждениями, т. е. видом рассуждений, в которых значения истинности и правила вывода являются нечеткими, а не точными. Приближенные рассуждения во многом сродни рассуждениям, которыми пользуются люди в некорректно определенных или не поддающихся количественному описанию ситуациях. В самом деле, вполне возможно, что многие, если не большинство человеческих рассуждений по своей природе приближенны, а не точны.

В дальнейшем будем пользоваться термином высказывание для обозначения утверждений вида: «u есть A», где u – название предмета, а A — название нечеткого подмножества универсального множества U, например «Джон — молодой», «X — малый», «яблоко — красное» и т. п. Если интерпретировать A как нечеткий предикат, то утверждение «u есть A» можно перефразировать как «u имеет свойство A». Эквивалентно этому

высказывание «u есть A» можно интерпретировать как уравнение назначения, в котором лингвистической переменной, обозначающей какое-либо свойство элемента u, назначается в качестве значения нечеткое множество A, например

$$\text{Джон - молодой} \Leftrightarrow \text{Возраст}(\text{Джон}) = \textit{молодой};$$

$$X - \text{малый} \Leftrightarrow \text{Величина}(X) = \textit{малый};$$

$$\text{яблоко - красное} \Leftrightarrow \text{Цвет}(\text{яблоко}) = \textit{красный}.$$

Будем предполагать, что высказыванию типа «u есть A» соответствуют два нечетких подмножества: 1) $M(A)$ — смысл A, т. е. нечеткое подмножество с названием A универсального множества U, и 2) значение истинности утверждения «u есть A», или просто значение истинности A, которое обозначается как $\upsilon(A)$ и определяется как возможно нечеткое подмножество универсального множества значений истинности V. В случае двузначной логики $V = T + F$ ($T \triangleq \textit{истинно}$, $F \triangleq \textit{ложно}$). В дальнейшем, если не будет оговорено противное, будем предполагать, что $V = [0,1]$.

Значение истинности, являющееся числом в $[0,1]$, например $\upsilon(A) = 0.8$, будем называть числовым значением истинности. Числовые значения истинности играют роль значений базовой переменной для лингвистической переменной **Истинность.** Лингвистические значения переменной **Истинность** будем называть лингвистическими значениями истинности. Более точно будем предполагать, что **Истинность —** название булевой лингвистической переменной, для которой первичным является терм

истинный, а терм **ложный** определяется не как отрицание терма **истинный**, а как его зеркальное отражение относительно точки 0.5 в $[0,1]$. Обычно будем полагать, что терм-множество переменной **Истинность** имеет вид

$$
\begin{aligned}
T(\text{Истинность}) = {} & \text{истинный} + \text{не истинный} + \\
& + \text{очень истинный} + \\
& + \text{более или менее истинный} + \\
& + \text{очень очень истинный} + \\
& + \text{существенно истинный} + \\
& + \text{очень (не истинный)} + \\
& + \text{не очень истинный} + \\
& + \ldots + \text{ложный} + \text{не ложный} + \\
& + \text{очень ложный} + \ldots \\
& \ldots + \text{не очень истинный и не} \\
& \quad \text{очень ложный} + \ldots
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

где термы являются названиями значений истинности.

Предполагается, что смысл первичного терма **истинный** является нечетким подмножеством интервала $V=[0,1]$ с функцией принадлежности типа показанной на рис. 6.1. Более точно терм **истинный** следует рассматривать как название нечеткой переменной, ограничением для которой является нечеткое множество, изображенное на рис. 3.1.

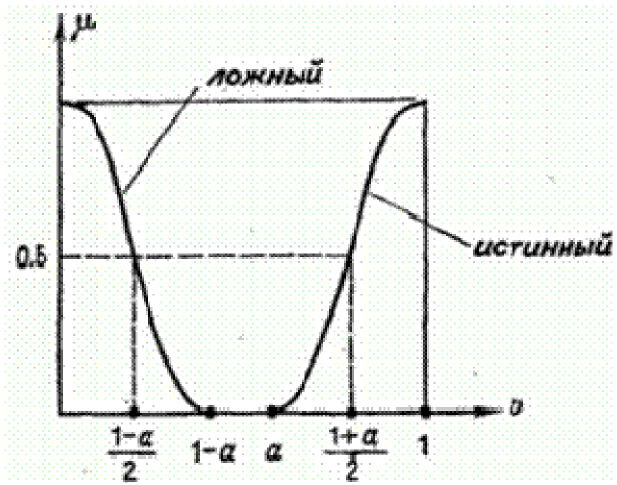


Рис. 3.1. Функции совместимости для лингствических значений истинности **истинный** и **ложный**.

Одно из возможных приближений функции принадлежности значения **истинный** определяется выражением

$$
\mu_{\text{истинный}}(\upsilon) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } 0 \le \upsilon \le a, \\ 2\left(\dfrac{\upsilon - a}{1-a}\right)^2 \quad \text{при } a \le \upsilon \le \dfrac{a+1}{2}, \\ 1-2\left(\dfrac{\upsilon - 1}{1-a}\right)^2 \quad \text{при } \dfrac{a+1}{2} \le \upsilon \le 1. \end{cases} \qquad (3.2)
$$

Здесь точка $\upsilon = \dfrac{1+a}{2}$ является точкой перехода. (Отметим, что носителем нечеткого множества **истинный** является интервал $[a,1]$). Соответственно для терма **ложный** имеем (см. рис. 3.1)

$$\mu_{\text{ложный}}(\upsilon) = \mu_{\text{истинный}}(1-\upsilon), \quad 0 \le \upsilon \le 1.$$

В некоторых случаях проще полагать, что терм **истинный** является подмножеством конечного универсального множества значений истинности

$$V = 0 + 0.1 + 0.2 + \ldots + 0.9 + 1, \qquad (3.3)$$

а не единичного интервала $V = [0,1]$. При таком предположении нечеткое множество **истинный** можно определить, например, так:

$$\text{истинный} = 0.5/0.7 + 0.7/0.8 + 0.9/0.9 + 1/1,$$

где такая пара, как, например, $0.5/0.7$, означает, что совместимость значения истинности 0.7 с термом **истинный** равна 0.5.

В последующем изложении мы будем интересоваться главным образом общими соотношениями вида

$$\upsilon(u - \text{лингвистическое значение булевой лингвистической переменной } \mathcal{X}) =$$
$$= \text{лингвистическое значение булевой лингвистической переменной истинности } \mathcal{T}, \qquad (3.4)$$

как, например,

$$\upsilon(\text{Джон} - \text{высокий и темный и красивый}) = \text{не очень истинный и не очень ложный},$$

где **высокий и темный и красивый** — лингвистическое значение переменной $\mathcal{X} \triangleq \text{Внешность}$, а **не очень истинный и не очень ложный** — лингвистическое значение переменной истинности $\mathcal{T}$. Сокращенно (3.4) будем записывать в виде

$$\upsilon(X) = T,$$

где X — лингвистическое значение переменной $\mathcal{X}$, а T — лингвистическое значение переменной $\mathcal{T}$.

Далее предположим, что X_1, X_2 и $X_1 * X_2$, где * обозначает бинарную связку, — лингвистические значения переменной $\mathcal{X}$ со значениями истинности $\upsilon(X_1)$, $\upsilon(X_2)$ и $\upsilon(X_1 * X_2)$ соответственно. Основной вопрос, возникающий в связи с этим, состоит в следующем: можно ли выразить $\upsilon(X_1 * X_2)$ как функцию $\upsilon(X_1)$ и $\upsilon(X_2)$, т. е. можно ли писать

$$\upsilon(X_1 * X_2) = \upsilon(X_1) *' \upsilon(X_2), \qquad (3.5)$$

где $*'$ обозначает бинарную связку, соответствующую лингвистической переменной истинности $\mathcal{T}$. Именно этот вопрос лежит в основе последующего изложения.

3.1. Логические связки в нечеткой логике

Чтобы заложить основу для нечеткой логики, необходимо расширить содержание таких логических операций, как отрицание, дизъюнкция, конъюнкция и импликация применительно к высказываниям, которые имеют не числовые, а лингвистические значения истинности. Другими словами, мы должны уметь вычислять значение истинности высказывания A **и** B, зная лингвистические значения истинности высказываний A и B. При рассмотрении этой проблемы полезно иметь в виду, что если A — нечеткое подмножество универсального множества U и $u \in U$, то два следующих утверждения эквивалентны:

1) Степень принадлежности элемента u нечеткому множеству A есть $\mu_A(u)$.
2) Значение истинности нечеткого предиката A есть $\mu_A(u)$.

(3.6)

Таким образом, вопрос «Что является значением истинности высказывания A и B, если заданы лингвистические значения истинности A и B ?» аналогичен вопросу, который мы поставили ранее: «Какова степень принадлежности элемента u множеству $A \cap B$, если заданы степени принадлежности элемента u множествам A и B ?»

Чтобы ответить на последний вопрос, мы использовали принцип обобщения. Будем придерживаться той же процедуры для обобщения смысла отрицания **не**, а также связок **и**, **или** и **влечет** применительно к лингвистическим значениям истинности.

В частности, если $\upsilon(A)$ — точка в $V=[0,1]$, представляющая значение истинности высказывания «u есть A» (или просто A), где u — элемент универсального множества U, то значение истинности высказывания **не** A (или $\neg A$) определяется выражением

$$\upsilon(\text{не}\,A)=1-\upsilon(A). \tag{3.7}$$

Предположим теперь, что $\upsilon(A)$ — не точка в $[0,1]$, а нечеткое подмножество интервала $[0,1]$, представленное в виде

$$\upsilon(A)=\mu_1/\upsilon_1+\ldots+\mu_n/\upsilon_n, \tag{3.8}$$

где υ_i — точки в $[0,1]$, а μ_i — их степени принадлежности множеству $\upsilon(A)$. Тогда, применяя принцип обобщения к (3.7),

получим выражения для $\upsilon(\text{не}\,A)$ как нечеткого подмножества интервала $[0,1]$, т. е.

$$\upsilon(\text{не}\,A)=\mu_1/(1-\upsilon_1)+\ldots+\mu_n/(1-\upsilon_n). \tag{3.9}$$

В частности, если значение истинности A есть **истинно**, т. е.

$$\upsilon(A)=\text{истинно}, \tag{3.10}$$

то значение истинности **ложно** можно записать в виде

$$\text{ложный}\triangleq\upsilon(\text{не}\,A). \tag{3.11}$$

Например, если

$$\text{истинный}=0.5/0.7+0.7/0.8+0.9/0.9+1/1, \tag{3.12}$$

то значение истинности высказывания **не** A имеет вид

$$\text{ложный}=\upsilon(\text{не}\,A)=0.5/0.3+0.7/0.2+0.9/0.1+1/0.$$

Замечание 3.1. Следует отметить, что если

$$\text{истинный}=\mu_1/\upsilon_1+\ldots+\mu_n/\upsilon_n, \tag{3.13}$$

или

$$\text{не истинный}=(1-\mu_1)/\upsilon_1+\ldots+(1-\mu_n)/\upsilon_n, \tag{3.14}$$

Однако если

$$\upsilon(A) = \text{истинный} - \mu_1/\upsilon_1 + \ldots + \mu_n/\upsilon_n, \qquad (3.15)$$

то

$$\text{ложный} = \upsilon(\text{не}\,A) = \mu_1/(1-\upsilon_1) + \ldots + \mu_n/(1-\upsilon_n). \qquad (3.16)$$

То же самое относится и к лингвистическим неопределенностям. Например, согласно определению неопределенности **очень** (см. (2.38)),

$$\text{очень истинный} = \mu_1^2/\upsilon_1 + \ldots + \mu_n^2/\upsilon_n. \qquad (3.17)$$

С другой стороны, значение истинности высказывания **очень** A равно

$$\upsilon(\text{очень}\ A) = \mu_1/\upsilon_1^2 + \ldots + \mu_n/\upsilon_n^2. \qquad (3.18)$$

Перейдем к бинарным связкам. Пусть $\upsilon(A)$ и $\upsilon(B)$ — лингвистические значения истинности высказываний A и B соответственно. Для простоты будем пользоваться теми же обозначениями, что и в случае, когда $\upsilon(A)$ и $\upsilon(B)$ – точки в $[0,1]$:

$$\upsilon(A) \wedge \upsilon(B) \ \text{вместо} \ \upsilon(A \ \text{и} \ B), \qquad (3.19)$$

$$\upsilon(A) \vee \upsilon(B) \ \text{вместо} \ \upsilon(A \ \text{или} \ B), \qquad (3.20)$$

$$\upsilon(A) \Rightarrow \upsilon(B) \ \text{вместо} \ \upsilon(A \Rightarrow B), \qquad (3.21)$$

$$\rceil\upsilon(A) \ \text{вместо} \ \upsilon(\text{не}\,A), \qquad (3.22)$$

имея при этом в виду, что в случае, когда $\upsilon(A)$ и $\upsilon(B)$ — точки в $[0,1]$, операции $\vee$, $\wedge$ и $\rceil$ сводятся к операциям min (конъюнкция), max (дизъюнкция) и вычитания из единицы соответственно.

Далее, если $\upsilon(A)$ и $\upsilon(B)$ — лингвистические значения истинности, заданные выражениями

$$\upsilon(A) = \alpha_1/\upsilon_1 + \ldots + \alpha_n/\upsilon_n, \qquad (3.23)$$

$$\upsilon(B) = \beta_1/\omega_1 + \ldots + \beta_m/\omega_m, \qquad (3.24)$$

где υ_i и ω_j — точки в $[0,1]$, а α_i и β_j — соответствующие им степени принадлежности множествам A и B, то, применяя принцип обобщения к $\upsilon(A \ \text{и} \ B)$, получим

$$\begin{aligned} &\upsilon(A \ \text{и} \ B) = \upsilon(A) \wedge \upsilon(B) = \\ &= (\alpha_1/\upsilon_1 + \ldots + \alpha_n/\upsilon_n) \wedge (\beta_1/\omega_1 + \ldots + \beta_m/\omega_m) = \sum_{i,j} (\alpha_i \wedge \beta_j)/(\upsilon_i \wedge \omega_j). \end{aligned} \qquad (3.25)$$

Таким образом, значение истинности высказывания A **и** B есть нечеткое подмножество интервала $[0,1]$, носитель которого состоит из точек вида

$$\upsilon_i \wedge \omega_j, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

с соответствующими степенями принадлежности $(\alpha_i \wedge \beta_j)$.
Отметим, что выражение (3.25) эквивалентно выражению для функции

принадлежности пересечения нечетких множеств, имеющих нечеткие функции принадлежности.

Пример 3.2. Предположим, что

$$\upsilon(A) - \text{истинный} = 0.5/0.7 + 0.7/0.8 + 0.9/0.9 + 1/1 \tag{3.26}$$

и

$$\upsilon(B) = \text{не истинный} = 1/0 + 1/0.1 + 1/0.2 + 1/0.3 + 1/0.4 + \\ + 1/0.5 + 1/0.6 + 0.5/0.7 + 0.3/0.8 + 0.1/0.9. \tag{3.27}$$

Тогда, используя (3.25), получаем

$$\begin{aligned}\upsilon(A \text{ и } B) &= \text{истинный} \wedge \text{не истинный} = \\ &= 1/(0+0.1+0.2+0.3+0.4+0.5+0.6) + \\ &+ 0.5/0.7 + 0.3/0.8 + 0.1/0.9 = \\ &= \text{не истинный}\end{aligned} \tag{3.28}$$

Аналогично, для значения истинности высказывания A **или** B получим

$$\begin{aligned}\upsilon(A \text{ или } B) &= \upsilon(A) \vee \upsilon(B) = \\ &= (\alpha_1/u_1 + \quad + \alpha_n/u_n) \vee (\beta_1/\omega_1 + \quad + \beta_m/\omega_m) = \\ &= \sum_{i,j} (\alpha_i \vee \beta_j)/(u_i \vee \omega_j).\end{aligned} \tag{3.29}$$

Значение истинности высказывания $A \Rightarrow B$ зависит от того, как определена связка $\Rightarrow$ для числовых значений истинности. Так, если для случая, когда $\upsilon(A)$ и $\upsilon(B)$ — точки в $[0,1]$, мы положим

$$\upsilon(A \Rightarrow B) = \neg\upsilon(A) \vee \upsilon(A) \wedge \upsilon(B), \tag{3.30}$$

то, применив принцип обобщения, получим

$$\begin{aligned}\upsilon(A \Rightarrow B) &= ((\alpha_1/u_1 + \ldots + \alpha_n/u_n) \Rightarrow (\beta_1\omega_1 + \ldots \beta_m\omega_m)) = \\ &= \sum_{i,j} (\alpha_i \wedge \beta_j)/(1-u_i) \vee (u_i \wedge \omega_j)\end{aligned} \tag{3.31}$$

для случая, когда $\upsilon(A)$ и $\upsilon(B)$ — нечеткие подмножества интервала $[0,1]$.

Замечание 3.3. Важно четко понимать разницу между связкой **и** в терме, скажем, **истинный** и **не очень истинный** и символом $\wedge$ в высказывании **истинный** $\wedge$ **не истинный**. В первом случае нас интересует смысл терма **истинный и не истинный**, и связка **и** определяется отношением

$$\begin{aligned}&M(\text{истинный и не истинный}) = \\ &= M(\text{истинный}) \cap M(\text{не истинный}),\end{aligned} \tag{3.32}$$

где $M(A)$ — смысл терма A (см. определение 2.1). Напротив, в случае терма **истинный** $\wedge$ **не истинный** нас в основном интересует значение истинности высказывания **истинный** $\wedge$ **не истинный**, которое получается из равенства (см. (3.19))

$$\upsilon(A \text{ и } B)=\upsilon(A)\wedge\upsilon(B). \qquad (3.33)$$

Таким образом, в (3.32)символ $\cap$ обозначает операцию пересечения нечетких множеств, а в (3.33) символ $\wedge$ обозначает операцию конъюнкции. Проиллюстрируем это различие на простом примере. Пусть $V=0+0.1+\ldots+1$, а P и Q — нечеткие подмножества множества V, определяемые следующим образом:

$$P=0.5/0.3+0.8/0.7+0.6/1, \qquad (3.34)$$

$$Q=0.1/0.3+0.6/0.7+1/1. \qquad (3.35)$$

Тогда

$$P\cap Q=0.1/0.3-0.6/0.7+0.6/1, \qquad (3.36)$$

в то время как

$$P\wedge Q=0.5/0.3+0.8/0.7+0.6/1. \qquad (3.37)$$

Отметим, что такое же различие имеет место и в случае отрицания **не** и операции $\neg$, как указывалось в замечании 3.1.

Замечание 3.4. Следует отметить, что, применяя принцип обобщения к вычислению значений $\upsilon(A \text{ и } B)$, $\upsilon(A \text{ или } B)$ и $\upsilon(A\Rightarrow B)$, мы молчаливо предполагали, что $\upsilon(A)$ и $\upsilon(B)$ — невзаимодействующие нечеткие переменные.

Если $\upsilon(A)$ и $\upsilon(B)$ — взаимодействующие переменные, то необходимо применять принцип обобщения не в форме (3.96), а в форме (3.97). Интересно заметить, что вопрос о возможном

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

взаимодействии между $\upsilon(A)$ и $\upsilon(B)$ возникает даже в том случае, когда $\upsilon(A)$ и $\upsilon(B)$ — точки в $[0,1]$, а не нечеткие переменные.

Замечание 3.5. Применяя принцип обобщения с целью определения операций $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ и $\urcorner$ применительно к лингвистическим значениям истинности, мы в сущности рассматриваем нечеткую логику как обобщение многозначной логики. В таком же смысле можно рассматривать классическую трёхзначную логику как обобщение двузначной логики (см. (3.64)).

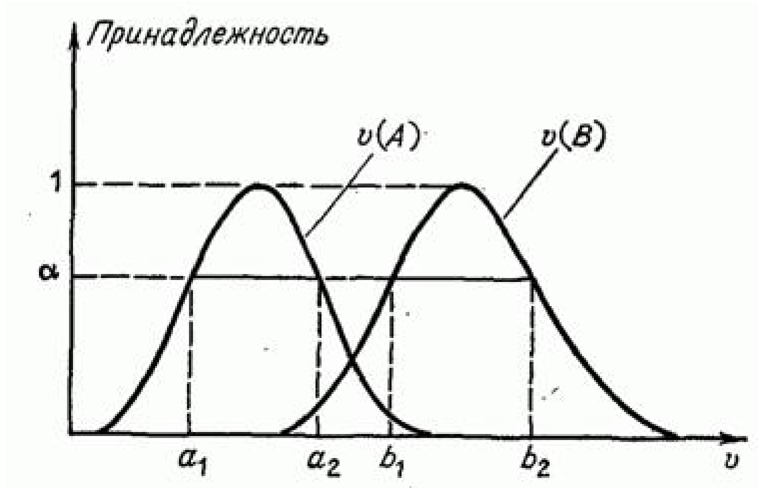


Рис. 3.2. Множества уровня значений истинности высказываний A и B.

Приведенные выше выражения для $\upsilon(\text{не } A)$, $\upsilon(A \text{ и } B)$ и $\upsilon(A\Rightarrow B)$ становятся более ясными, если мы сначала разложим $\upsilon(A)$ и $\upsilon(B)$ по множествам уровня и затем применим принцип обобщения в форме множеств уровня к операциям $\urcorner$, $\vee$, $\wedge$ и $\Rightarrow$. Это дает нам простое графическое правило вычисления значений истинности (см. рис. 3.2). Пусть интервалы $[a_1, a_2]$ и $[b_1, b_2]$ суть множества α-уровня для $\upsilon(A)$ и $\upsilon(B)$. Тогда, используя обобщения операций $\urcorner$, $\wedge$ и $\vee$ на интервалы

$$\urcorner[a_1, a_2] = [1 - a_2, 1 - a_1], \qquad (3.38)$$

$$[a_1, a_2] \wedge [b_1, b_2] = [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2], \qquad (3.39)$$

$$[a_1, a_2] \vee [b_1, b_2] = [a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2], \qquad (3.40)$$

можно легко найти множества α-уровня для $\upsilon(\text{не } A)$, $\upsilon(A \text{ и } B)$ и $\upsilon(A \text{ или } B)$. После того как эти множества уровня найдены, легко определить $\upsilon(\text{не } A)$, $\upsilon(A \text{ и } B)$ и $\upsilon(A \text{ или } B)$, варьируя α от 0 до 1.

В качестве простой иллюстрации рассмотрим определение конъюнкции лингвистических значений истинности $\upsilon(A) \triangleq \text{истинный}$ и $\upsilon(B) \triangleq \text{ложный}$, функции принадлежности которых имеют вид, показанный на рис. 3.1.

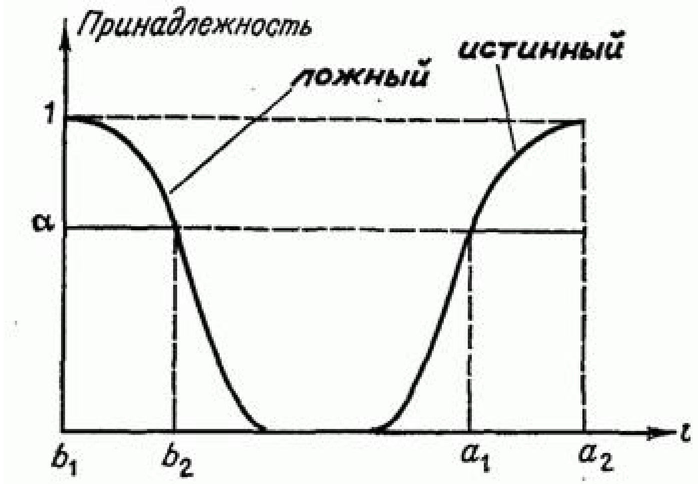


Рис. 3.3. Вычисления значения истинности конъюнкции значений **истинный** и **ложный**.

Видно (рис. 3.3), что для всех значений α

$$[a_1, a_2] \wedge [b_1, b_2] = [b_1, b_2], \qquad (3.41)$$

откуда следует, что

$$[b_1, b_2] \le [a_1, a_2]. \qquad (3.42)$$

Таким образом, зная лишь форму функций принадлежности значений **истинный** и **ложный**, можно заключить, что

$$\text{истинный} \wedge \text{ложный} = \text{ложный}, \qquad (3.43)$$

что согласуется с (3.25).

3.2. Таблицы истинности и лингвистическая аппроксимация

В двузначной, трехзначной и вообще n-значной логиках бинарные связки $\vee$, $\wedge$ и $\Rightarrow$ обычно определяются таблицей значений истинности высказываний A **и** B, A **или** B или $A \Rightarrow B$ в терминах значений истинности высказываний A и B.

Поскольку в нечеткой логике число значений истинности, вообще говоря, бесконечно, операции $\vee$, $\wedge$ и $\Rightarrow$ нельзя определить табулированием. Однако может быть желательным протабулировать, скажем, операцию $\wedge$ для некоторого представляющего интерес конечного множества значений истинности, например: **истинный**, **не истинный**, **ложный**, **очень истинный**, **очень (не истинный)**, **более или менее истинный** и т. п. Если каждый элемент i-й строки такой таблицы соответствует, скажем, значению не истинный, каждый элемент j-го столбца — значению **более или менее истинный**, то

$$\begin{aligned}&(i,j)\text{-й элемент} = \text{значение элемента } i\text{-й строки } (\triangleq \text{не истинный}) \wedge \\ &\wedge \text{значение элемента } j\text{-го столбца } (\triangleq \text{более или менее истинный}).\end{aligned} \quad (3.44)$$

При заданном определении первичного терма **истинный** и определениях модификаторов **не** и **более или менее** можно вычислить правую часть выражения (3.44)

$$\text{не истинный} \wedge \text{более или менее истинный}, \quad (3.45)$$

используя (3.25). Однако трудность состоит в том, что в большинстве случаев результатом вычисления будет нечеткое подмножество универсального множества значений истинности, которое может не соответствовать ни одному из значений истинности в терм-множестве переменной **Истинность**. Таким образом, если мы хотим иметь таблицу лингвистических значений истинности, нам придется довольствоваться приближенным значением (i,j)-го элемента

таблицы, т. е. выражения (элемент i-й строки $\wedge$ элемент j-го столбца). Такое приближение будем называть лингвистическим приближением.

Предположим для иллюстрации, что универсальное множество значений истинности имеет вид

$$V = 0 + 0.1 + 0.2 + \ldots + 1 \quad (3.46)$$

и что

$$\text{истинный} = 0.7/0.8 + 1/0.9 + 1/1, \quad (3.47)$$

$$\text{более или менее} = 0.5/0.6 - 0.7/0.7 + 1/0.8 + 1/0.9 + 1/1, \quad (3.48)$$

$$\text{почти истинный} = 0.6/0.8 + 1/0.9 + 0.6/1. \quad (3.49)$$

Предположим, что в таблице истинности для связки $\vee$ i-й строке соответствует значение **более или менее истинный**, а j-му столбцу — **почти истинный**. Тогда для (i,j)-го элемента таблицы получаем

$$\begin{aligned}&\text{более или менее истинный} \vee \text{почти истинный} = \\ &\quad (0.5/0.6 + 0.7/0.7 + 1/0.8 + 1/0.9 + 1/1) \vee \\ &\vee (0.6/0.8 + 1/0.9 + 0.6/1) = \\ &= 0.6/0.8 + 1/0.9 + 1/1.\end{aligned} \quad (3.50)$$

Теперь видно, что правая часть (3.50) приближенно равна значению **истинный**, определенному выражением (3.47). Следовательно, в таблице истинности для связки $\vee$ лингвистическим приближением (i,j)-го элемента будет значение истинный.

3.3. Значения истинности

Среди возможных значений истинности лингвистической переменной два значения привлекают особое внимание, а именно пустое множество θ и единичный интервал $[0,1]$, которые соответствуют наименьшему и наибольшему элементам (по отношению включения) решетки нечетких подмножеств интервала $[0,1]$. Важность именно этих значений истинности обусловлена тем, что их можно интерпретировать как значения истинности **не определено** и **неизвестно** соответственно. Для удобства будем обозначать эти значения истинности символами θ и $?$, понимая при этом, что θ и $?$ определяются выражениями

$$\theta \triangleq \int_0^1 0/\upsilon \tag{3.51}$$

и

$$? \triangleq V = \text{универсальное множество значений истинности} = [0,1] = \int_0^1 1/u \tag{3.52}$$

Значения **неизвестно** и **не определено**, интерпретируемые как степени принадлежности, используются также в представлении нечетких множеств типа 1. В этом случае имеются три возможности выражения степени принадлежности точки u в U: 1) число из интервала $[0,1]$; 2) θ (**не определено**); 3) $?$ (**неизвестно**).

Рассмотрим простой пример. Пусть

$$U = a + b + c + d + e\,. \tag{3.53}$$

Возьмем нечеткое подмножество множества U вида

$$A = 0.1a + 0.9b + ?c + \theta d\,. \tag{3.54}$$

В этом случае степень принадлежности элемента c множеству A есть **неизвестно**, а степень принадлежности d есть **не определено**. В более общем случае A может быть

$$A = 0.1a + 0.9b + 0.8?c + \theta d\,, \tag{3.55}$$

где имеется в виду, что степень принадлежности элемента c множеству A частично неизвестна, причем член $0.8?c$ интерпретируется следующим образом:

$$0.8?c = \left(\int_0^1 0.8/\upsilon\right)\Big/ c\,. \tag{3.56}$$

Важно четко понимать разницу между 0 и θ. Когда мы говорим, что степень принадлежности точки u множеству A есть θ, мы имеем в виду, что функция принадлежности $\mu_A: U \to [0,1]$ не определена в точке u. Предположим, например, что U — множество действительных чисел, а μ_A — функция, определенная на множестве целых чисел, причем $\mu_A(u)=1$, если u — четное, и $\mu_A(u)=0$, если u — нечетное. Тогда степень принадлежности числа $u=1.5$ множеству A есть θ, а не 0. С другой стороны, если бы μ_A была определена на множестве действительных чисел и $\mu_A(u)=1$ тогда и только тогда, когда u — четное число, то степень принадлежности числа 1.5 множеству A была бы равна 0.

Поскольку мы умеем вычислять значения истинности высказываний A **и** B, A **или** B и **не** B по заданным лингвистическим значениям истинности высказываний A и B, нетрудно вычислить и значения $\upsilon(A \text{ и } B)$, $\upsilon(A \text{ или } B)$, $\upsilon(\text{не } B)$, когда $\upsilon(B) = ?$.

Предположим, например, что

$$\upsilon(A) = \int_0^1 \mu(\upsilon)/\upsilon, \qquad (3.57)$$

$$\upsilon(B) = ? = \int_0^1 1/\omega. \qquad (3.58)$$

Применяя принцип обобщения, как в (3.25), получим

$$\upsilon(A) \wedge ? = \int_0^1 \mu(\upsilon)/\upsilon \wedge \int_0^1 1/\omega = \int_0^1\int_0^1 \mu(\upsilon)/(\upsilon \wedge \omega), \qquad (3.59)$$

где

$$\int_0^1\int_0^1 \triangleq \int_{[0,1]\times[0,1]}. \qquad (3.60)$$

После упрощения (3.59) сводится к выражению

$$\upsilon(A) \wedge ? = \int_0^1 \left(\bigvee_{[\omega,1]} \mu(\upsilon) \right) \Big/ \omega. \qquad (3.61)$$

Другими словами, значение истинности высказывания A **и** B, где $\upsilon(B)$ – неизвестно, есть нечеткое подмножество интервала $[0,1]$, степень принадлежности которому точки ω равна $\sup \mu(\upsilon)$ (функции принадлежности A) на интервале $[\omega,1]$.

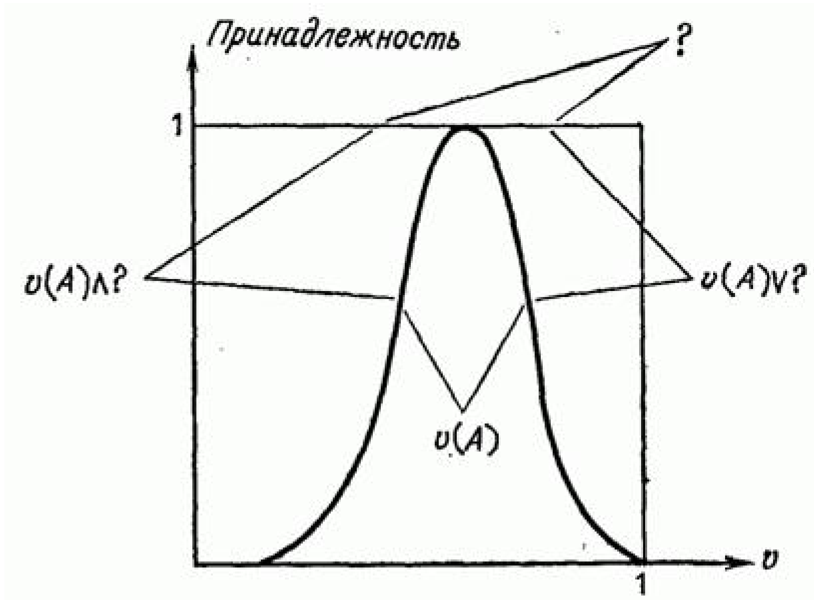


Рис. 3.4. Конъюнкция и дизъюнкция значений истинности высказывания A со значением истинности неизвестно ($= ?$).

Аналогично находим, что значение истинности высказывания A **или** B выражается в виде

$$\upsilon(A \text{ или } B) = \int_0^1\int_0^1 \mu(\upsilon)/(\upsilon \vee \omega) = \int_0^1 \left(\bigvee_{[0,\omega]} \mu(\upsilon) \right) / \omega. \qquad (3.62)$$

Следует отметить, что выражения (3.61) и (3.62) легко получить с помощью описанной выше графической процедуры (см. (3.38) и далее). Пример, иллюстрирующий это, показан на рис. 3.4.

Обращаясь к случаю $\upsilon(B)=\theta$, находим

$$\upsilon(A)\wedge\theta=\int_0^1\int_0^1 0/(\upsilon\wedge\omega)=\int_0^1 0/\omega=\theta \qquad (3.63)$$

и аналогично для $\upsilon(A)\vee\theta$.

$$\upsilon(A \text{ и } B)=\begin{cases}1, & 0<\upsilon<\sup\limits_{[0,1]}\mu(\upsilon),\\ \mu(\upsilon), & \upsilon>\sup\limits_{[0,1]}\mu(\upsilon).\end{cases}$$

$$\upsilon(A \text{ или } B)=\begin{cases}\mu(\upsilon), & 0\le\upsilon\le\sup\limits_{[0,1]}\mu(\upsilon),\\ 1, & \upsilon>\sup\limits_{[0,1]}\mu(\upsilon).\end{cases}$$

Поучительно проследить, что происходит с приведенными выше соотношениями, когда мы применяем их к частному случаю двузначной логики, т. е. к случаю, когда универсальное множество имеет вид

$$V=0+1, \qquad (3.64)$$

или в более привычном виде

$$V=T+F, \qquad (3.65)$$

где T означает **истинный**, а F — **ложный**. Поскольку ? есть V, мы можем отождествить значение истинности **неизвестно** со значением **истинный** или **ложный**, т. е.

$$?=T+F. \qquad (3.66)$$

Результирующая логика имеет четыре значения истинности θ, T, F и $T+F(\triangleq ?)$ и является обобщением двузначной логики в смысле замечания 3.5.

Поскольку универсальное множество значений истинности состоит лишь из двух элементов, целесообразно построить таблицы истинности для операций $\vee$, $\wedge$ и $\Rightarrow$ в этой четырехзначной логике непосредственно, т. е. без использования общих формул (3.25), (3.29) и (3.31). Так, применяя принцип обобщения к операции $\wedge$, сразу получаем

$$T\wedge\theta=\theta, \qquad (3.67)$$

$$T\wedge(T+F)=T\wedge F+T\wedge F=T+F, \qquad (3.68)$$

$$F\wedge(T+F)=F\wedge T+F\wedge F=F+F=F, \qquad (3.69)$$

$$(T+F)\wedge(T+F)=T\wedge T+T\wedge F+F\wedge T+F\wedge F=$$
$$=T+F+F+F=T+F, \qquad (3.70)$$

и поэтому расширенная таблица истинности для операции $\wedge$ имеет следующий вид (см. табл. 3.5).

Таблица 3.5

$\wedge$	θ	T	F	$T+F$
θ	θ	θ	θ	θ
T	θ	T	F	$T+F$
F	θ	F	F	F
$T+F$	θ	$T+F$	F	$T+F$

Выбросив из нее элементы θ, получим табл. 3.6.

Таблица 3.6.

$\wedge$	T	F	$T+F$
T	T	F	$T+F$
F	F	F	F
$T+F$	$T+F$	F	$T+F$

Аналогично, для операции $\vee$ получим табл. 3.7

Таблица 3.7

$\vee$	T	F	$T+F$
T	T	T	T
F	T	F	$T+F$
$T+F$	T	$T+F$	$T+F$

Как и следовало ожидать, эти таблицы согласуются с таблицами истинности для операций $\wedge$ и $\vee$ в обычной трехзначной логике.

Описанный выше подход проливает некоторый свет на определение операции $\Rightarrow$ в двузначной логике — в некотором смысле спорный вопрос, который мотивировал развитие **модальной логики**. В

частности, вместо общепринятого определения связки $\Rightarrow$ мы можем определить ее как связку в трехзначной логике с помощью неполной таблицы истинности (табл. 3.8), которая отражает интуитивно понятную

Таблица 3.8

$\Rightarrow$	T	F	$T+F$
T	T	F	
F			T

идею о том, что если $A \Rightarrow B$ **истинно** и A **ложно**, то значение истинности высказывания B **неизвестно**. Теперь можно поставить вопрос: как следует заполнить пустые клетки в табл. 3.8, чтобы в результате применения принципа обобщения получить значение (2,3)-го элемента, равное T? Итак, обозначая неизвестные (2,1)-й и (2,2)-й элементы через x и y соответственно, мы должны получить

$$F \Rightarrow (T \mid F) = (F \Rightarrow T) \mid (F \Rightarrow F) = x \mid y = T, \tag{3.71}$$

откуда с необходимостью следует, что

$$x = y = T. \tag{3.72}$$

На этом пути мы приходим к обычному определению связки □ в двузначной логике в виде следующей таблицы истинности:

$\Rightarrow$	T	F
T	T	F
F	T	T

Как показывает рассмотренный выше пример, понятие значения истинности **неизвестно** в сочетании с принципом обобщения помогает уяснить некоторые из понятий и соотношений обычных двузначной и трехзначной логик. Эти логики, конечно, можно рассматривать как вырожденные случаи нечеткой логики, в которой значением истинности **неизвестно** является весь единичный интервал, а не множество 0 + 1.

3.4. Составные переменные истинности и распределения значений истинности

В предыдущем изложении мы ограничились рассмотрением унарных в смысле определения лингвистических переменных истинности. Ниже мы определим понятие составной переменной истинности и коротко остановимся на некоторых его свойствах.

Итак, пусть

$$\Im \triangleq (\Im_1, \ldots, \Im_n) \qquad (3.73)$$

обозначает n-арную составную лингвистическую переменную истинности, где $\Im_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — унарная лингвистическая переменная истинности с терм-множеством T_i, универсальным множеством V_i и базовой переменной v_i (см. определение 2.1). Для простоты будем иногда пользоваться символом $\Im_i$ для обозначения как названия i-й переменной в (3.73), так и общего названия значений истинности переменной $\Im_i$. Кроме того, будем предполагать, что $T_1 = T_2 = \ldots = T_n$ и $V_1 = V_2 = \ldots = V_n = [0,1]$. Если рассматривать $\Im$ как составную переменную, компоненты которой — переменные $\Im_1, \ldots, \Im_n$ — принимают значения из соответствующих множеств $T_1, \ldots, T_n$, то $\Im$ является n-арной обычной (не нечеткой) переменной (см. (2.3) и далее). Таким образом, ограничение $R(\Im)$, обусловленное переменной $\Im$, есть обычное (не нечеткое) отношение в декартовом

произведении $T_1 \times \ldots \times T_n$, которое можно представить как неупорядоченный перечень упорядоченных наборов вида

$$R(\Im) = (\text{истинный, очень истинный, ложный, ... , вполне истинный}) + (\text{вполне истинный, истинный, очень истинный, ... , очень истинный}) + (\text{истинный, истинный, более или менее истинный, ... , истинный}) + \ldots \qquad (3.74)$$

Наборы из n термов в $R(\Im)$ будем называть списками назначенных значений истинности, так как каждый такой набор можно интерпретировать как результат назначения значений истинности списку высказываний $A_1, \ldots, A_n$, причем

$$A \triangleq (A_1, \ldots, A_n) \qquad (3.75)$$

представляет собой составное высказывание. Если, например,

$$A \triangleq (\text{Скотт высокий, Пит темноволосый, Тина очень хорошенькая}),$$

то тройка значений в $R(\Im)$ вида (**очень истинный, истинный, очень истинный**) соответствует следующим уравнениям назначения:

$$v(\text{Скотт высокий}) = \text{очень истинно}, \qquad (3.76)$$

$$v(\text{Пит темноволосый}) = \text{истинно}, \qquad (3.77)$$

$$v(\text{Тина очень хорошенькая}) = \text{очень истинно}. \qquad (3.78)$$

Основываясь на этой интерпретации наборов в $R(\Im)$, мы будем часто называть $R(\Im)$ распределением значений истинности. Соответственно этому ограничение $R(\mathfrak{T}_{i_1}, \dots, \mathfrak{T}_{i_k})$, обусловленное k-арной переменной $(\mathfrak{T}_{i_1}, \dots, \mathfrak{T}_{i_k})$, где $q = (i_1, \dots, i_k)$ — подпоследовательность последовательности индексов $(1, \dots, n)$, будем называть маргинальным распределением значений истинности, индуцированным распределением $R(\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_n)$. Далее, соотношение между

$$R(\mathfrak{T}_{i_1}, \dots, \mathfrak{T}_{i_k}) \text{ и } R(\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_n)$$

сокращенно можно выразить формулой

$$R(\mathfrak{T}_{(q)}) = P_q R(\mathfrak{T}),$$

где P_q обозначает операцию проектирования на декартово произведение $T_{i_1} \times \dots \times T_{i_k}$.

Пример 3.6. Предположим, что $R(\mathfrak{T})$ имеет вид

$$\begin{aligned} R(\mathfrak{T}) \triangleq R(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3) = \\ &= (\text{истинный, вполне истинный, очень истинный}) + \\ &+ (\text{очень истинный, истинный, очень очень истинный}) + \\ &+ (\text{истинный, ложный, вполне истинный}) + \\ &+ (\text{ложный, ложный, очень истинный}). \end{aligned} \tag{3.80}$$

Чтобы получить $R(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$, вычеркнем компоненту $\mathfrak{T}_3$ в каждой тройке и получим

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

$$\begin{aligned} R(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = &(\text{истинный, вполне истинный}) + \\ &+ (\text{очень истинный, истинный}) + \\ &+ (\text{истинный, ложный}) + (\text{ложный, ложный}). \end{aligned} \tag{3.81}$$

Аналогичным образом, вычеркивая компоненты $\mathfrak{T}_2$ в $R(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$, получим

$$R(\mathfrak{T}_1) = \text{истинный} + \text{очень истинный} + \text{ложный}. \tag{3.82}$$

Если рассматривать $\mathfrak{T}$ как n-арную обычную (не нечеткую) переменную, значениями которой являются лингвистические значения истинности, то для случая лингвистических переменных истинности определение невзаимодействия примет следующий вид.

Определение 3.7. Компоненты n-арной лингвистической переменной истинности $\mathfrak{T} = (\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_n)$ являются λ-невзаимодействующими (λ обозначает «лингвистический») тогда и только тогда, когда распределение значений истинности $R(\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_n)$ сепарабельно в том смысле, что

$$R(\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_n) = R(\mathfrak{T}_1) \times \dots \times R(\mathfrak{T}_n). \tag{3.83}$$

Смысл этого определения в том, что если $\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_n$ суть λ-невзаимодействующие переменные, то назначение конкретных лингвистических значений истинности переменным $\mathfrak{T}_{i_1}, \dots, \mathfrak{T}_{i_k}$ не влияет на значения истинности, которые могут быть назначены дополнительным компонентам в $(\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_n)$, т. е. компонентам $\mathfrak{T}_{j_1}, \dots, \mathfrak{T}_{j_m}$. Прежде чем иллюстрировать понятие λ-

невзаимодействия на примерах, определим другой тип невзаимодействия, который будем называть β-невзаимодействием (β означает базовую переменную).

Определение 6.8. Компоненты n-арной лингвистической переменной истинности $\Im = (\Im_1, \dots, \Im_n)$ являются β-невзаимодействующими тогда и только тогда, когда соответствующие им базовые переменные $\nu_1, \dots, \nu_n$ — невзаимодействующие, т. е. переменные ν_i не связаны общими ограничениями.

Чтобы проиллюстрировать определенные выше понятия невзаимодействия, рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 3.9. Для распределения значений истинности примера 3.6 имеем

$$\begin{aligned}
R(\Im_1) &= \text{истинный} + \text{очень истинный} + \text{ложный},\\
R(\Im_2) &= \text{вполне истинный} + \text{истинный} + \text{ложный},\\
R(\Im_3) &= \text{очень истинный} + \text{очень очень истинный} + \text{вполне истинный}
\end{aligned} \tag{3.84}$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned}
R(\Im_1)\times R(\Im_2)\times R(\Im_3) = {}&(\text{истинный, вполне истинный,}\\
&\text{очень истинный}) + (\text{очень истинный,}\\
&\text{вполне истинный, очень истинный}) +\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+ (\text{ложный, ложный, вполне истинный}) \neq R(\Im_1, \Im_2, \Im_3),
\end{aligned} \tag{3.85}$$

откуда следует, что $R(\Im_1, \Im_2, \Im_3)$ — не сепарабельно и, следовательно, $\Im_1, \Im_2, \Im_3$ суть λ-взаимодействующие переменные.

Пример 3.10. Рассмотрим составное высказывание вида $(A, \text{не } A)$ и предположим для простоты, что $T(\Im) = \text{истинный} + \text{ложный}$. С точки зрения (3.11), если значение истинности высказывания A есть **истинно**, то значение истинности высказывания **не** A есть **ложно**, и обратно. Следовательно, распределение значений истинности для рассматриваемого высказывания должно иметь вид

$$R(\Im_1, \Im_2) = (\text{истинный, ложный}) + (\text{ложный, истинный}) \tag{3.86}$$

Это распределение индуцирует маргинальные распределения

$$R(\Im_1) = R(\Im_2) = \textit{истинный} + \textit{ложный}. \tag{3.87}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
R(\Im_1)\times R(\Im_2) &= (\textit{истинный} + \textit{ложный}) \times (\textit{истинный} + \textit{ложный})\\
&= (\textit{истинный, истинный}) + (\textit{истинный, ложный}) +\\
&\quad + (\textit{ложный, истинный}) + (\textit{ложный, ложный}),
\end{aligned} \tag{3.88}$$

и поскольку

$$R(\Im_1, \Im_2) \neq R(\Im_1)\times R(\Im_2),$$

то отсюда следует, что $\Im_1$ и $\Im_2$ являются λ-взаимодействующими переменными.

Пример 3.11. Пример, рассмотренный выше, можно использовать и в качестве иллюстрации β-взаимодействия. В частности, независимо от значений истинности, назначенных высказываниям A и **не** A, из определения отрицания **не** следует, что базовые переменные ν_1 и ν_2 связаны между собой уравнением

$$\nu_1 + \nu_2 = 1. \qquad (3.89)$$

Другими словами, в случае составного высказывания вида $(A, \text{не } A)$ сумма численных значений истинности высказываний A и **не** A должна равняться единице.

Замечание 3.12. Следует отметить, что в примере 3.11 β-взаимодействие является следствием того, что высказывание A_2 связано с высказыванием A_1 отрицанием. Вообще же $\Im_1, \dots, \Im_n$ могут быть λ-взаимодействующими переменными, не будучи β-взаимодействующими.

Полезное применение понятия взаимодействия связано со значением истинности **неизвестно** (см. (3.12)). Полагая для простоты $V = T + F$, предположим, что

$$A_1 \triangleq \text{Пэт живет в Берлине}, \qquad (3.90)$$

$$A_2 \triangleq \text{Пэт живет в Сан-Франциско}, \qquad (3.91)$$

причем одно и только одно из этих высказываний истинно. Отсюда вытекает, что хотя значения истинности высказываний A_1 и A_2 суть **неизвестно** $(\blacktriangle ? = T+F)$, т. е.

$$\begin{aligned} \nu(A_1) &= T+F, \\ \nu(A_2) &= T+F, \end{aligned} \qquad (3.92)$$

они связаны между собой соотношениями

$$\nu(A_1) \vee \nu(A_2) = T, \qquad (3.93)$$

$$\nu(A_1) \wedge \nu(A_2) = F. \qquad (3.94)$$

Распределение значений истинности для соотношений (3.90) и (3.91) можно рассматривать как решение системы уравнений

$$\nu(A_1) \vee \nu(A_2) = T, \qquad (3.95)$$

$$\nu(A_1) \wedge \nu(A_2) = F. \qquad (3.96)$$

Это решение имеет вид

$$R(\Im_1, \Im_2) = (T, F) + (F, T). \qquad (3.97)$$

Отметим, что из (3.97) вытекает

$$\nu(A_1) = R(\Im_1) = T + F, \qquad (3.98)$$

$$\nu(A_2) = R(\Im_2) = T + F, \qquad (3.99)$$

что согласуется с (3.92). Отметим также, что $\Im_1$ и $\Im_2$ суть β-взаимодействующие переменные в смысле определения 3.8, где $V = T + F$.

Далее, если A_1 и A_2 заменить на

$$A_1 \triangleq \text{Пэт жил в Берлине}, \qquad (3.100)$$

$$A_2 \triangleq \text{Пэт жил в Сан-Франциско} \tag{3.101}$$

и допустить, что и A_1 и A_2 могут быть истинными, то мы по-прежнему будем иметь

$$v(A_1) = ? = T + F, \tag{3.102}$$

$$v(A_2) = ? = T + F, \tag{3.103}$$

но уравнение связи примет вид

$$v(A_1) \vee v(A_2) = T. \tag{3.104}$$

В этом случае распределение значений истинности является решением уравнения (3.104) и имеет вид

$$R(\Im_1, \Im_2) = (\text{истинный}, \text{истинный}) + \\ + (\text{истинный}, \text{ложный}) + (\text{ложный}, \text{истинный}). \tag{3.105}$$

Важный вывод, который можно сделать из рассмотренных выше примеров, состоит в том, что в некоторых случаях распределение значений истинности может быть задано в неявном виде, например как решение системы уравнений, а не как список упорядоченных наборов n значений истинности. Как правило, это бывает в том случае, когда лингвистические значения назначаются не каждому высказыванию A_i в $A = (A_1, \dots, A_n)$, а булевым выражениям, содержащим две или большее число компонент A.

Следует также отметить, что распределения значений истинности могут быть вложенными. Так, в случае унарного высказывания мы можем иметь вложенную последовательность высказываний вида

$$\text{«««Вера очень очень умна» – очень истинно» – истинно»}. \tag{3.106}$$

Ограничения, индуцированные высказываниями такого типа, можно вычислять следующим образом.

Пусть базовой переменной в (3.106) является $КИ$, и пусть $R_0(КИ)$ обозначает ограничение на переменную $КИ$. Тогда высказывание «Вера очень очень умна» означает, что

$$R_0(КИ) = \text{очень очень умна}. \tag{3.107}$$

Далее, утверждение ««Вера очень очень умна» — очень истинно» означает, что значение степени принадлежности Веры нечеткому множеству. $R_0(КИ)$ есть **очень истинно** (см. (3.6)). Пусть $\mu_{\text{очень истинно}}$ обозначает функцию принадлежности нечеткого множества **очень истинно** (см. (3.17)) и пусть μ_{R_0} обозначает функцию принадлежности $R_0(КИ)$. Будем рассматривать μ_{R_0}, как отношение: $[\text{область значений } КИ] \to [0,1]$, и пусть $\mu_{R_0}^{-1}$ обозначает обратное отношение. Тогда $\mu_{R_0}^{-1}$ индуцирует нечеткое множество $R_1(КИ)$, определяемое равенством

$$R_1(КИ) = \mu_{R_0}^{-1}(\text{очень истинно}), \tag{3.108}$$

причем $R_1(КИ)$ можно вычислить при помощи принципа обобщения. Нечеткое множество $R_1(КИ)$ представляет собой ограничение на

$KИ$, индуцированное высказыванием ««Вера **очень очень умна» — очень истинно».**

Продолжая рассуждать аналогичным образом, приходим к выводу о том, что ограничение на $KИ$, индуцированное высказыванием «««Вера **очень очень умна» — очень истинно» — истинно**», можно выразить следующим образом:

$$R_2(KИ) = \mu_{R_1}^{-1}(\text{истинно}), \qquad (3.109)$$

где $\mu_{R_1}^{-1}$ обозначает отношение, обратное к μ_{R_1} — функции принадлежности ограничения $R_1(KИ)$, имеющего вид (6.108). Итак, мы получили способ вычисления ограничения, индуцированного вложенной последовательностью высказываний типа (6.106).

Основная идея изложенного выше метода состоит в том, что высказывание вида ««и есть A» есть T», где A — нечеткий предикат и T — лингвистическое значение истинности, видоизменяет ограничение, связанное с A, в соответствии с выражением

$$A' = \mu_A^{-1}(T),$$

где μ_A^{-1} — функция, обратная функции принадлежности A, а A' — ограничение, индуцированное высказыванием ««и есть A » есть T».

Обычная, четкая истинность может быть представлена нечеткими множествами-синглтонами. В этом случае четкому понятию истинно будет соответствовать функция принадлежности

$$\mu^{''}\text{истинно}^{''}(u) = \begin{cases} 0, & u \neq 1 \\ 1, & u = 1 \end{cases}$$, а четкому понятию ложно - ;

$$\mu^{''}\text{ложно}^{''}(u) = \begin{cases} 0, & u \neq 0 \\ 1, & u = 0 \end{cases}, \quad u \in [0,1].$$

Для задания нечеткой истинности Заде предложил такие функции принадлежности термов "истинно" и "ложно":

$$\mu^{''}\text{истинно}^{''}(u) = \begin{cases} 0, & 0 \le u \le a \\ 2\cdot\left(\dfrac{u-a}{1-a}\right)^2, & a < u \le \dfrac{a+1}{2} \\ 1-2\cdot\left(\dfrac{u-1}{1-a}\right)^2, & \dfrac{a+1}{2} < u \le 1 \end{cases};$$

$$\mu^{''}\text{ложно}^{''}(u) = \mu^{''}\text{истинно}^{''}(1-u), \quad u \in [0,1],$$

где $a \in [0,1]$ - ; параметр, определяющий носители нечетких множеств "истинно" и "ложно". Для нечеткого множества "истинно" носителем будет интервал $(a, 1]$, а для нечеткого множества ложно" - ; $[0, a)$.

Функции принадлежности нечетких термов "истинно" и "ложно" изображены на рис. 3.5. Они построены при значении параметра $a = 0.4$. Как видно, графики функций принадлежности термов "истинно" и "ложно" представляют собой зеркальные отображения.

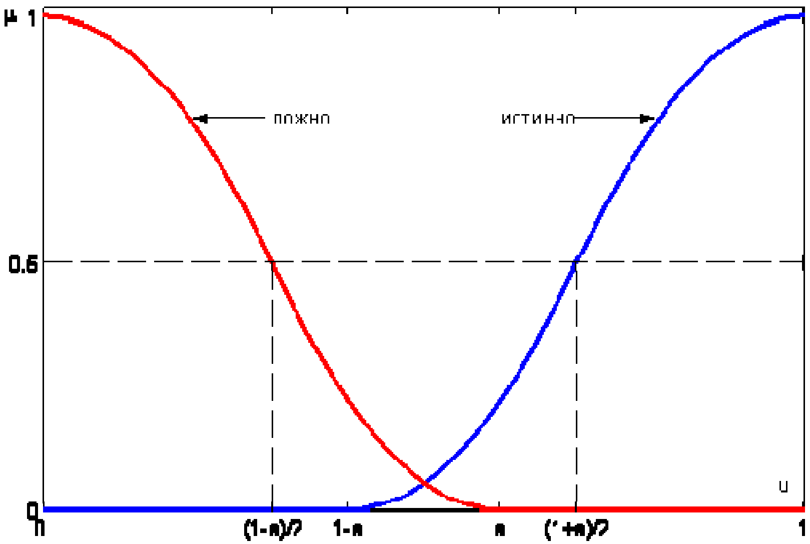


Рис. 3.5. Лингвистическая переменная "истинность" по Заде

Для задания нечеткой истинности Балдвин предложил такие функции принадлежности нечетких "истинно" и "ложно":

$$\mu_{\text{"истинно"}}(u) = u;$$

$$\mu_{\text{"ложно"}}(u) = 1 - u;$$

где $u \in [0, 1]$.

Квантификаторы "более-менее" и "очень" часто применяют к нечеткими множествами "истинно" и "ложно", получая таким образом термы "очень ложно", "более-менее ложно", "более-менее истинно", "очень истинно", "очень, очень истинно", "очень, очень ложно" и т.п. Функции принадлежности новых термов получают, выполняя операции концентрации и растяжения нечетких множеств "истинно" и "ложно". Операция концентрации соответствует возведению функции принадлежности в квадрат, а операция растяжения - возведению в

степень ½. Следовательно, функции принадлежности термов "очень, очень ложно", "очень ложно", "более-менее ложно", "более-менее истинно", "истинно", "очень истинно" и "очень, очень истинно" задаются так:

$$\mu_{\text{"очень ложно"}}(u) = (\mu_{\text{"ложно"}}(u))^2;$$

$$\mu_{\text{"очень, очень ложно"}}(u) = (\mu_{\text{"очень ложно"}}(u))^2$$

$$\mu_{\text{"более-менее ложно"}}(u) = (\mu_{\text{"ложно"}}(u))^{1/2};$$

$$\mu_{\text{"более-менее истинно"}}(u) = (\mu_{\text{"истинно"}}(u))^{1/2};$$

$$\mu_{\text{"очень истинно"}}(u) = (\mu_{\text{"истинно"}}(u))^2;$$

$$\mu_{\text{"очень, очень истинно"}}(u) = (\mu_{\text{"очень истинно"}}(u))^2.$$

Графики функций принадлежности этих термов показаны на рис. 3.6.

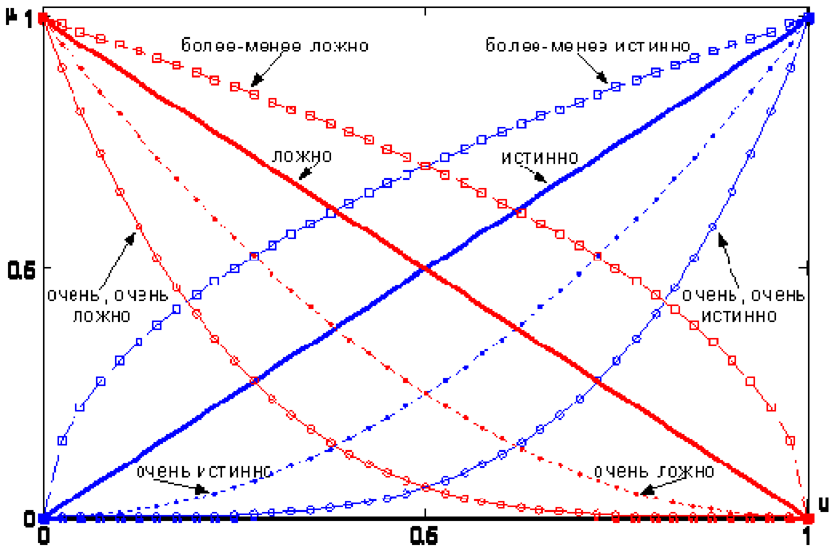


Рис. 3.6. Лингвистическая переменная "истинность" по Балдвину

3. 5. Нечеткие логические операции

Вначале кратко напомнить основные положения обычной (булевой) логики. Рассмотрим два утверждения А и В, каждое из которых может быть истинным или ложным, т.е. принимать значения "1" или "0". Для этих двух утверждений всего существует $2^{2^2} = 16$ различных логических операций, из которых содержательно интерпретируются лишь пять: И ($\wedge$), ИЛИ ($\vee$), исключающее ИЛИ ($\oplus$), импликация ($\rightarrow$) и эквивалентность ($\leftrightarrow$). Таблицы истинности для этих операций приведены в табл. 1.

Таблица 1 - Таблицы истинности булевой логики

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Предположим, что логическое утверждение может принимать не два значения истинности, а три, например: "истинно", "ложно" и "неопределенно". В этом случае мы будем иметь дело не с двухзначной, а трехзначной логикой. Общее количество бинарных операций, а, следовательно, и таблиц истинности, в трехзначной логике равно $3^{3^2} = 729$. Нечеткая логика является разновидностью многозначной логики, в которой значения истинности задаются лингвистическими переменными или термами лингвистической переменной "истинность". Правила выполнения нечетких логических операций получают из булевых логических операций с помощью принципа обобщения.

Определение. Обозначим нечеткие логические переменные через $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, а функции принадлежности, задающие истинностные значения этих переменных через $\mu_{\tilde{A}}(u)$ и $\mu_{\tilde{B}}(u)$, $u \in [0,1]$. *Нечеткие логические операции* И ($\wedge$), ИЛИ ($\vee$), НЕ ($^-$) и импликация ($\rightarrow$) выполняются по таким правилам:

$$\mu_{\tilde{A} \wedge \tilde{B}}(u) = \min[\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)];$$

$$\mu_{\tilde{A} \vee \tilde{B}}(u) = \max[\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)];$$

$\mu_{\bar{\tilde{A}}}(u) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(u)$;

$\mu_{\tilde{A}\Rightarrow\tilde{B}}(u) = \max\{1 - \mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)\}$.

В многозначной логике логические операции могут быть заданы таблицами истинности. В нечеткой логике количество возможных значений истинности может быть бесконечным, следовательно в общем виде табличное представление логических операций невозможно. Однако, в табличной форме можно представить нечеткие логические операции для ограниченного количества истинностных значений, например, для терм-множества {"истинно", "очень истинно", "не истинно", "более-менее ложно", "ложно"}. Для трехзначной логики с нечеткими значениями истинности T - ; "истинно", F - ; "ложно" и T+F - "неизвестно" Л Заде предложил такие лингвистические таблицы истинности:

$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\bar{\tilde{A}}$	$\tilde{A}\wedge\tilde{B}$	$\tilde{A}\vee\tilde{B}$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
T	T+F	F	T+F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F
F	T+F	T	F	T+F
T+F	T	T+F	T+F	T
T+F	F	T+F	F	T+F
T+F	T+F	T+F	T+F	T+F

Применяя правила выполнения нечетких логических операций из определения можно расширить таблицы истинности для большего

количества термов. Как это сделать рассмотрим на следующем примере.

Пример . Заданы следующие нечеткие истинностные значения:

$истинно = 0/0 + 0/0.2 + 0.25/0.4 + 0.5/0.6 + 0.9/0.8 + 1/1$;

$более-менее\ истинно = 0/0 + 0/0.2 + 0.5/0.4 + 0.7/0.6 + 0.95/0.8 + 1/1$;

$почти\ истинно = 0/0 + 0/0.05 + 0.4/0.4 + 0.7/0.6 + 1/0.8 + 0.8/1$.

Применяя правило из определения , найдем нечеткую истинность выражения "почти истинно ИЛИ истинно":

$почти\ истинно \vee истинно = 0/0 + 0.05/0.2 + 0.4/0.4 + 0.7/0.6 + 1/0.8 + 1/1$.

Сравним полученное нечеткое множество с нечетким множеством "более-менее истинно". Они почти равны, значит:

$почти\ истинно \vee истинно \approx более-менее\ истинно$.

В результате выполнения логических операций часто получается нечеткое множество, которое не эквивалентно ни одному из ранее введенных нечетких значений истинности. В этом случае необходимо среди нечетких значений истинности найти такое, которое соответствует результату выполнения нечеткой логической операции в максимальной степени. Другими словами, необходимо провести так называемую *лингвистическую аппроксимацию*, которая может рассматриваться как аналог аппроксимации эмпирического статистическими распределения стандартными функциями распределения случайных величин.

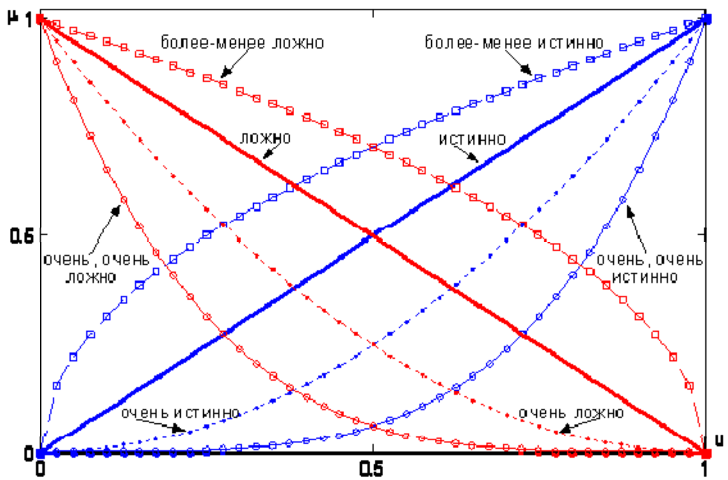


Рис. 3.6 Лингвистическая переменная "истинность" по Балдвину

В качестве примера приведем предложенные Балдвином лингвистические таблицы истинности для показанных на рис. 3.6 нечетких значений истинности:

$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\tilde{A}\wedge\tilde{B}$	$\tilde{A}\vee\tilde{B}$
ложно	ложно	ложно	ложно
истинно	ложно	ложно	истинно
истинно	истинно	истинно	истинно
неопределенно	ложно	ложно	неопределенно
неопределенно	истинно	неопределенно	истинно
неопределенно	неопределенно	неопределенно	неопределенно
истинно	очень истинно	истинно	очень истинно
истинно	более-менее истинно	более-менее истинно	истинно

4. Операции ЗАДЕ и алгебры КЛИНИ

4.1. Операции Заде

Обычному подмножеству *A* универсального множества *X* можно поставить в соответствие его характеристическую функцию

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad x\in A\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}.$$

Операциям пересечения, объединения и дополнения множеств взаимно однозначным образом ставятся в соответствие операции над их характеристическими функциями, определяемые поэлементно (для всех

$x\in X$):

$$(\chi_A\cap\chi_B)(x)=\chi_A(x)\wedge\chi_B(x),$$
$$(\chi_A\cup\chi_B)(x)=\chi_A(x)\vee\chi_B(x),$$
$$(\chi_{\neg A})(x)=\neg\chi_A(x),$$

где $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ - булевы функции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания такие, что

$$0\wedge0=0;\quad 0\wedge1=0;\quad 1\wedge0=0,\quad 1\wedge1=1;$$
$$0\vee0=0;\quad 0\vee1=1;\quad 1\vee0=1;\quad 1\vee1=1;$$
$$\neg0=1,\quad \neg1=0.$$

Для отношения включения множеств выполняется: $A\subseteq B$ тогда и только тогда, когда $\chi_A(x)\le\chi_B(x)$ для всех $x\in X$.

Таким образом, понятие множества можно заменить понятием характеристической функции, вместо булевой алгебры множеств рассматривать булеву алгебру характеристических функций и т.д. Понятие нечеткого множества введено как обобщение понятия характеристической функции множества. Нечеткое подмножество *A* универсального множества X задается функцией принадлежности $\mu_A: X\to L$, где L = [0,1]. Для каждого $x\in X$ величина $\mu_A(x)$ интерпретируется как степень принадлежности элемента *x* нечеткому множеству *A*. Существуют и другие интерпретации функции принадлежности. Нечеткое множество обычно имеет некоторую лингвистическую метку, соответствующую содержательной интерпретации самого нечеткого множества. Например, если X = [0,120] - множество числовых значений возраста, то на X могут быть определены нечеткие множества с лингвистическими метками МОЛОДОЙ, СТАРЫЙ, ОЧЕНЬ СТАРЫЙ и т.д. На рис. 1. показаны возможные способы представления понятия МОЛОДОЙ с помощью характеристической функции множества и функции принадлежности нечеткого множества.

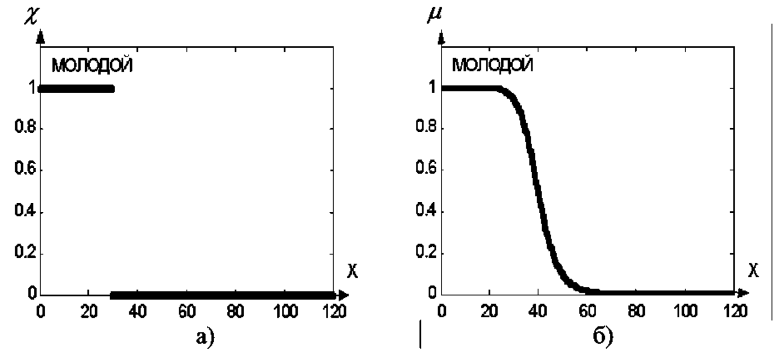


Рис. 1. а) Характеристическая функция обычного множества
б) Функция принадлежности нечеткого множества

В отличие от обычного множества нечеткое множество позволяет учитывать степени принадлежности понятиям-классам, не имеющим четких границ, которые характерны для человеческого мышления. Вопросы интерпретации и задания функций принадлежности исследуются во многих работах и здесь не рассматриваются. Заметим лишь, что при нечетком моделировании систем, задаваемых набором экспериментальных данных, функции принадлежности могут изначально определяться достаточно произвольно в виде треугольных, трапециевидных, гауссовских и др. типа параметрических функций принадлежности, которые в дальнейшем могут настраиваться для уменьшения ошибки рассогласования между нечеткой моделью и моделируемой системой.
При исследовании алгебраических свойств нечетких множеств удобно отождествлять их с функциями принадлежности, поэтому там, где это не будет вызывать недоразумений, под нечетким множеством A будет пониматься сама функция принадлежности $A: X \to L$, и величина $A(x)$ будет интерпретироваться как степень принадлежности элемента x нечеткому множеству A.

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

Операции над нечеткими множествами задаются аналогично операциям над характеристическими функциями поэлементно:

$$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x),$$
$$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x),$$
$$(\neg A)(x) = -A(x).$$

В качестве операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания на [0,1] Заде предложил следующее обобщение булевых функций:

$$x \wedge y = \min(x, y),$$
$$x \vee y = \max(x, y),$$
$$\neg x = 1 - x.$$

В общем случае операции и отношения на множестве нечетких множеств определяются также поэлементно с помощью операций и отношений на элементах из X. В частности имеем

$A = B$ тогда и только тогда, когда $A(x) = B(x)$ для всех $x \in X$,
$A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A(x) \leq B(x)$ для всех $x \in X$.

Как обычно, пишут $A \subset B$, если $A \subseteq B$ и $A \neq B$. Очевидно, что отношение включения нечетких множеств является отношением частичного порядка, т.е. удовлетворяет условиям:

$A \subseteq A$	**(рефлексивность),**
из $A \subseteq B$ **и** $B \subseteq A$ **следует** $A = B$	**(антисимметричность),**
из $A \subseteq B$ **и** $B \subseteq C$ **следует** $A \subseteq C$	**(транзитивность).**

Пусть $F(X)$ - множество всех нечетких подмножеств множества X. Обозначим $\varnothing$ и U следующие нечеткие множества:
$\varnothing(x) = 0$ и $U(x) = 1$ для всех $x \in X$. $\varnothing$ и U являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами по отношению частичного порядка $\subseteq$.
Нетрудно убедиться, что введенные операции удовлетворяют на $F(X)$ следующим тождествам:

$A \cap A = A$, $A \cup A = A$ **(идемпотентность),**
$A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ **(коммутативность),**
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ **(ассоциативность),**
$A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ **(поглощение),**
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **(дистрибутивность),**
$\rceil(\rceil A) = A$ **(инволютивность),**
$\rceil(A \cap B) = \rceil A \cup \rceil B$, $\rceil(A \cup B) = \rceil A \cap \rceil B$ **(законы Де Моргана),**
$A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = \varnothing$, $A \cup U = U$, $A \cap U = A$ **(граничные условия).**

Первые четыре тождества определяют решетку. Дистрибутивная решетка с инволютивной операцией дополнения, на которой выполняются законы Де Моргана называется решеткой Де Моргана. Решетка Де Моргана с наименьшим $\varnothing$ и наибольшим U элементами называется алгеброй Де Моргана.
Отношение частичного упорядочения $\subseteq$ элементов решетки связано с решеточными операциями $\cap$ **и** $\cup$ следующим образом:

$A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A \cap B = A$, $A \cup B = B$. (1)

Отметим также следующие свойства решеток, которые будут в дальнейшем использоваться в доказательствах:
из $A \subseteq B$, $A \subseteq C$ следует. $A \subseteq B \cap C$,
из $A \subseteq C$, $B \subseteq C$ следует $A \cup B \subseteq C$.
В алгебре Де Моргана выполняется:

$$\rceil\varnothing = U, \qquad \rceil U = \varnothing;$$
$$\text{из } A \subseteq B \text{ следует } \rceil B \subseteq \rceil A. \quad (2)$$

Как известно, алгебра обычных множеств является булевой алгеброй, операции которой кроме перечисленных тождеств алгебры Де Моргана удовлетворяют тождествам

$$A \cap \rceil A = \varnothing, \qquad A \cup \rceil A = U. \quad (3)$$

Для алгебры нечетких множеств выполняется в общем случае лишь следующее более слабое условие

$(A \cap \rceil A) \cap (B \cup \rceil B) = A \cap \rceil A$ (условие нормальности).

Это тождество часто записывают в виде:

$A \cap \rceil A \subseteq B \cup \rceil B$ (условие Клини).

Нормальная алгебра Де Моргана $<F; \cap, \cup, \rceil, \varnothing, U>$ называется алгеброй Клини. Алгебры Де Моргана и алгебры Клини играют важную роль при изучении неклассических логик.
Элемент A алгебры Де Моргана F, удовлетворяющий условиям (3), будет называться булевым. В алгебрах Клини выполняются следующие соотношения:

$$(A \cap \rceil A) \cup (B \cap \rceil B) \subseteq (A \cap \rceil B) \cup (\rceil A \cap B) = (A \cup B) \cap (\rceil A \cup \rceil B) \subseteq (A \cup \rceil A) \cap (B \cup \rceil B),$$
$$(A \cap \rceil A) \cup (B \cap \rceil B) \subseteq (A \cap B) \cup (\rceil A \cap \rceil B) = (A \cup \rceil B) \cap (\rceil A \cup B) \subseteq (A \cup \rceil A) \cap (B \cup \rceil B).$$

4.2. Фокальные алгебры Клини

Пусть $<F; \cap, \cup, \rceil, \varnothing, U>$ - алгебра Де Моргана, и Z является подалгеброй F по операциям $\cap$, $\cup$, $\rceil$, т.е. из $A, B \in Z$ следует $A \cap B \in Z$ **и** $A \cup B \in Z$, и из $A \in Z$ следует $\rceil A \in Z$. Подалгебра Z будет называться интервальной подалгеброй F, если Z является интервалом $Z = [C, D]$, где C и D - некоторые элементы из F такие, что $C \subseteq D$, и Z состоит из всех элементов $A \in F$ таких, что $C \subseteq A \subseteq D$.

***Теорема* 4.1**. Алгебра Де Моргана F является алгеброй Клини тогда и только тогда, когда пересечение любых ее двух интервальных подалгебр не пусто, и F является булевой алгеброй тогда и только тогда, когда она содержит лишь одну непустую интервальную подалгебру (совпадающую с F).
Для доказательства теоремы докажем ряд вспомогательных утверждений.

***Лемма* 4.2.** Для любого элемента $C \in F$ интервал $[C \cap \rceil C, C \cup \rceil C]$ является интервальной подалгеброй F, и любая интервальная подалгебра Z алгебры Де Моргана F представима в виде $Z = [C \cap \rceil C, C \cup \rceil C]$ для некоторого $C \in F$.

Доказательство. Пусть $Z = [C \cap \rceil C, C \cup \rceil C]$ для некоторого $C \in F$.
Поскольку любой интервал решетки F является ее подалгеброй по операциям $\cap$ **и** $\cup$, достаточно показать, что Z замкнуто относительно операции дополнения $\rceil$. Из $A \in Z$ следует

$C\cap\neg C \subseteq A\subseteq C\cup\neg C,$ из (2) получаем

$\neg(C\cup\neg C) \subseteq \neg A\subseteq \neg(C\cap\neg C),$ откуда следует

$C\cap\neg C \subseteq \neg A\subseteq C\cup\neg C,$ т.е. $\neg A\in Z.$

Пусть Z = *[C,D]* - интервальная подалгебра *F.* Тогда $\neg C, \neg D\in Z,$ что дает $C\subseteq \neg D,$ $\neg C\subseteq D,$ и из (2) получим $\neg(\neg D)=D \subseteq \neg C,$ что приводит к $\neg C= D.$ Из $C\subseteq D=\neg C$ и (1) следует

$C=C\cap\neg C,$ $C\cup\neg C =D$ и $Z= [C\cap\neg C, C\cup\neg C].$

Лемма доказана.

Интервальная подалгебра $Z = [C\cap\neg C,\ C\cup\neg C]$ алгебры Де Моргана *F* будет обозначаться *Z(C)* и называться интервальной подалгеброй *F,* порожденной элементом $C\in F,$ а элемент *C* - элементом, порождающим интервальную подалгебру *Z(C).* Ясно, что Z является подмножеством любой интервальной подалгебры, содержащей *C.*

На множестве *F* можно задать отношение эквивалентности ≈ такое, что *A* ≈ *B,* если *A* и *B* порождают одну и ту же интервальную подалгебру.

***Лемма* 4.3**. Каждый класс эквивалентности *E* отношения ≈ в алгебре Де Моргана *F* образует булеву алгебру с операциями $\cap, \cup, \neg$ из *F.*

Доказательство. Пусть *E* - произвольный класс эквивалентности отношения ≈ в алгебре Де Моргана *F,* и *A, B* -произвольные элементы из *E.* Тогда *A и B* порождают одну и ту же интервальную подалгебру

$Z= [A\cap\neg A,\ A\cup\neg A] = [B\cap\neg B,\ B\cup\neg B],$ причем из

$A,B\in Z$ следует, что $E\subseteq Z.$ Из инволютивности $\neg$ следует, что

$\neg A, \neg B\in E.$

Покажем, что $A\cap B$ принадлежит *E.* Обозначим $C = A\cap B.$ Тогда, учитывая (1) и $A\cap\neg A \subseteq B,$ $B\cap\neg B \subseteq A,$ $A\cap\neg A = B\cap\neg B,$

получим: $C\cap\neg C = (A\cap B)\cap\neg(A\cap B)$

$= A\cap B\cap(\neg A\cup\neg B) = (A\cap B\cap\neg A)\cup(A\cap B\cap\neg B) = (A\cap\neg A)\cup(B\cap\neg B) = (A\cap\neg A),$

далее имеем $C\cup\neg C =\neg(C\cap\neg C) =\neg(A\cap\neg A) = A\cup\neg A,$ что

дает $Z= [C\cap\neg C,\ C\cup\neg C]= Z(C),$ откуда следует

$C\in E$ и $A\cap B\in E.$ Аналогично показывается, что $A \cup B \in E.$

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

Таким образом, *E* является подалгеброй алгебры Де Моргана *F.*

Учитывая, что для произвольного $A \in E$ элементы $A\cap\neg A$ и $A\cup\neg A$ являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами в *E,* получаем, что *E* образует булеву алгебру.

***Лемма* 4.4.** Для произвольных элементов *A,B* алгебры Де Моргана *F* выполняется $Z(A)\cap Z(B) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда выполняется

$$(A\cap\neg A)\cup(B\cap\neg B)\subseteq(A\cup\neg A)\cap(B\cup\neg B) \quad (4)$$

Доказательство. Отметим, что пересечение интервальных подалгебр алгебры Де Моргана *F,* если оно не пусто, является интервальной подалгеброй *F,* так как пересечение подалгебр является подалгеброй, а пересечение интервалов является интервалом. Пусть

$Z(A)\cap Z(B) \neq \varnothing,$ тогда

$Z(A)\cap Z(B) = \{C\in F \mid A\cap\neg A\subseteq C\subseteq A\cup\neg A$ и

$B\cap\neg B\subseteq C\subseteq B\cup\neg B\} \neq \varnothing,$ откуда следует

$Z(A)\cap Z(B) = \{C\in F \mid (A\cap\neg A)\cup(B\cap\neg B)\subseteq C\subseteq$

$(A\cup\neg A)\cap(B\cup\neg B)\} \neq \varnothing,$ что приводит к (4). Обратным путем показывается, что если существуют *A,B* ∈ *F,* для которых выполняется

(4), то $Z(A)\cap Z(B)\neq \varnothing.$

***Лемма* 4.5.** В алгебре Де Моргана условие Клини, условие (4) и условие

$$\text{из } A\subseteq\neg A,\ B\subseteq\neg B \text{ следует } A\cup B \subseteq\neg A\cap\neg B \quad (5)$$

попарно эквивалентны.

Доказательство. $(5) \Rightarrow (4).$ Из свойств операций $\cap$ и $\cup$ и законов Де Моргана следует:

$A\cap\neg A\subseteq A\cup\neg A = \neg(A\cap\neg A),$ $B\cap\neg B\subseteq B\cup\neg B =$

$\neg(B\cap\neg B),$ что совместно с (5) приводит к (4).

(4) $\Rightarrow$ (условие Клини).

$A\cap\neg A\subseteq (A\cap\neg A)\cup(B\cap\neg B)\subseteq (A\cup\neg A)\cap(B\cup\neg B)\subseteq$

$B\cup\neg B.$

(Условие Клини) $\Rightarrow$ (5). Пусть выполняется $A\subseteq \neg A,$ $B\subseteq \neg B,$ тогда

$A=A\cap\rceil A\subseteq B\cup\rceil B=\rceil B$, и $B=B\cap\rceil B\subset A\cup\rceil A=\rceil A$. Из $A\subseteq\rceil A$, $B\subseteq\rceil B$ и из $A\subseteq\rceil B$, $B\subseteq\rceil A$ следует

$A\subseteq\rceil A\cap\rceil B$ и $B\subseteq\rceil A\cap\rceil B$, что дает $A\cup B\subseteq\rceil A\cap\rceil B$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1.

1) Если пересечение любых двух интервальных подалгебр F не пусто, то из лемм 4.4 и 4.5 следует, что F - нормальна.

2) Пусть F - алгебра Клини, и Z_1, Z_2 - произвольные ее интервальные подалгебры. Из леммы 4.2 следует, что существуют некоторые $A,B\in F$, порождающие эти интервальные подалгебры, а из лемм 4.5 и 4.4 следует, что пересечение интервальных подалгебр Z_1, Z_2 не пусто.

3) Пусть F - булева алгебра. Тогда для всех $A\in F$ выполняется

$A\cap\rceil A=\varnothing, A\cup\rceil A=U$ и $Z(A)=[\varnothing,U]=F$.

4) Пусть F содержит лишь одну интервальную подалгебру. Тогда отношение $\approx$ содержит лишь один класс эквивалентности, совпадающий с F, который в соответствии с леммой 3.3 является булевой алгеброй.

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что алгебра Де Моргана, не являющаяся алгеброй Клини, содержит по крайней мере две интервальные подалгебры, пересечение которых пусто. Простейшим примером такой алгебры является множество из четырех элементов $F=\{\varnothing, A, B, U\}$, с диаграммой Хассе, представленой на рис. 2, и с операцией отрицания:

$\rceil A=A,\ \rceil B=B,\ \rceil\varnothing=U,\ \rceil U=\varnothing.$

Тогда $Z(A)=\{A\}$, $Z(B)=\{B\}$, $Z(\varnothing)=Z(U)=F$, и $Z(A)\cap Z(B)=\varnothing$.

***Определение* 4.6.** Интервальная подалгебра, содержащаяся во всех других интервальных подалгебрах алгебры Клини F, называется центральной подалгеброй F или фокусом F, а алгебра Клини, содержащая фокус, называется фокальной алгеброй Клини.

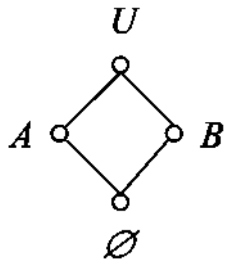


Рис. 2. Диаграмма Хассе четырехэлементного множества

Из теоремы 4.1 следует следующий результат.

***Следствие* 4.7.** Фокус алгебры Клини, если он существует, является булевой алгеброй.

***Теорема* 4.8.** В полных алгебрах Клини фокус всегда существует.

Доказательство. Пусть F - полная алгебра Клини. Из полноты F следует существование в F элементов

$$G=\sup_{A\in F}\{A\cap\rceil A\},\qquad H=\inf_{B\in F}\{B\cup\rceil B\}.\quad (6)$$

Из условия Клини и определения *sup* и *inf* следует $G\subseteq B\cup\rceil B$ для всех $B\in F$ и $G\subseteq H$. Из леммы 4.2 следует, что произвольная интервальная подалгебра представима в виде $[C\cap\rceil C,\ C\cup\rceil C]$ для некоторого $C\in F$, и из(6) и $G\subseteq H$ следует

$C\cap\rceil C\subseteq G\subseteq H\subseteq C\cup\rceil C$, т.е. интервал *[G,H]* содержится в любой интервальной подалгебре алгебры Клини F.

Из $A\cap\rceil A\subseteq G$ для всех $A\in F$ и из (2) следует $\rceil G\subseteq A\cup\rceil A$ для всех $A\in F$, и из (6) и определения *inf* получим $\rceil G\subseteq H$. Двойственно получаем $G\subseteq\rceil H$, и из (2) и инволютивности отрицания следует $H\subseteq\rceil G$. Сравнивая $\rceil G\subseteq H$ и $H\subseteq\rceil G$, получим $\rceil G=H$. Таким образом, имеем $[G,H]=[G,\rceil G]=[G\cap\rceil G,\ G\cup\rceil G]$,

т.е. *[G,H]* есть интервальная подалгебра F.

Теорема доказана.

Из теоремы 4.8 в частности следует, что полная алгебра Клини является фокальной алгеброй Клини.

Теорема 4.9. Алгебра Де Моргана F является фокальной алгеброй Клини тогда и только тогда, когда в F существует элемент W такой, что на F выполняется тождество:

$$(A\cap\rceil A)\cup(W\cap\rceil W)=W. \quad (7)$$

Докажем предварительно следующую лемму.

***Лемма* 4.10.** Пусть W - некоторый элемент алгебры Де Моргана F. Тогда на F выполняется (7) тогда и только тогда, когда выполняется

$$W\cap\rceil W=W, \quad (8)$$

$$(A\cap\rceil A)\cup W=W. \quad (9)$$

Доказательство. Из (7), подставляя W вместо A и применяя идемпотентность, получим (8). Подставляя (8) в (7), получим (9). Подставляя $W\cap\rceil W$ из (8) в левую часть (9) вместо W, получим (7).

Лемма 4.10 доказана.

Доказательство теоремы 4.9. Пусть в алгебре Де Моргана F существует элемент W такой, что (7) выполняется для всех элементов A из F, тогда на F выполняется (8), (9), что совместно с (1) дает:

$$W\subseteq\rceil W, \quad (10)$$

$$A\cap\rceil A\subseteq W. \quad (11)$$

Из (11) и (2), получим: $\rceil W\subseteq A\cup\rceil A$, что совместно с (11) и (10) дает:

$A\cap\rceil A\subseteq W\subseteq\rceil W\subseteq A\cup\rceil A$, т.е.

$[W,\rceil W]=[W\cap\rceil W,W\cup\rceil W]$, есть интервальная подалгебра, которая содержится в любой интервальной подалгебре

$[A\cap\rceil A,A\cup\rceil A]$, и из теоремы 4.1 и определения следует, что F - фокальная алгебра Клини.

Пусть F - фокальная алгебра Клини с фокусом

$Z=[C\cap\rceil C,C\cup\rceil C]$.

Обозначим $W=C\cap\rceil C$, тогда $\rceil W=C\cup\rceil C$, $Z=[W,\rceil W]$ и выполняется (10).

Для каждого $A\in F$ фокус Z содержится в интервальной подалгебре $Z(A)=[A\cap\rceil A,A\cup\rceil A]$ и выполняется

$A\cap\rceil A\subseteq W\subseteq\rceil W\subseteq A\cup\rceil A$, откуда следует (11). Из (10) и (11) следует (8), (9) и (7). Теорема доказана.

Как следует из теоремы 4.9, тождество (7) совместно с тождествами алгебры Де Моргана определяет многообразие фокальных алгебр Клини $\langle F;\cap,\cup,\rceil,\varnothing,U,W\rangle$ с фокусом $[W,\rceil W]$.

Очевидно, что любая булева алгебра с выделенным элементом $W=\varnothing$ также является фокальной алгеброй Клини.

Элемент W алгебры Де Моргана, удовлетворяющий условию

$$\rceil W=W, \quad (12)$$

будет называться центральным элементом, а алгебры $\langle F;\cap,\cup,\rceil,\varnothing,U,W\rangle$, определяемые системой тождеств алгебр Клини и тождеством (12) будут называться алгебрами Клини с центральным элементом (иногда алгебрами Клини называются именно такие алгебры).

Алгебра Клини с центральным элементом является фокальной алгеброй Клини с фокусом, состоящим из единственного элемента W: условие Клини и (12) приводят к $A\cap\rceil A\subseteq W\cup\rceil W=W$, к (9), (8) и (7).

В алгебрах Де Моргана с центральным элементом W условие Клини эквивалентно условию

$$A\cap\rceil A\subseteq W. \quad (13)$$

В самом деле, из условия Клини и (12) следует (13):

$A\cap\rceil A\subseteq W\cup\rceil W=W$.

Из (13) и (12) получаем, учитывая (2):

$W=\rceil W\subseteq\rceil(B\cap\rceil B)=B\cup\rceil B$ для всех B из F, что совместно с (13) приводит к условию Клини.

***Теорема* 4.11.** Алгебра Де Моргана F с центральным элементом W нормальна (является алгеброй Клини), тогда и только тогда, когда W является единственным центральным элементом в F.

Доказательство. Если F является алгеброй Клини с центральным элементом, то из того, что центральный элемент является интервальной подалгеброй, и из теоремы 4.1. следует его единственность.

Пусть W единственный центральный элемент в алгебре Де Моргана F. Покажем, что F нормальна. Предположим, что это не так, тогда в F существует элемент A, для которого не выполняется (13). Обозначим

$T = A\cup\rceil A,\ P = A\cap\rceil A,\ B = (W\cap T)\cup P.$ Из законов Де Моргана и инволютивности отрицания имеем $\rceil T = P$ и $\rceil P = T,$ что совместно с (12) и дистрибутивностью дает:

$\rceil B = \rceil[(W\cap T)\cup P] = \rceil(W\cap T)\cap\rceil P = (\rceil W\cup\rceil T)\cap T = (W\cup P)\cap T = (W\cap T)\cup(P\cap T) = (W\cap T)\cup P = B.$ Таким образом, B - центральный элемент. Имеем

$A\cap\rceil A = P \subseteq (W\cap T)\cup P = B,$ т.е. $A\cap\rceil A \subseteq B$.

Поскольку в силу предположения для W (13) не выполняется, получаем $B \neq W,$ и F имеет более одного центрального элемента, что противоречит тому, что W -единственный центральный элемент в F. Теорема доказана.

4.3. Метрические алгебры Клини и меры нечеткости

Мерой нечеткости (мерой энтропии) на алгебре Клини $<F;\cap,\cup,\rceil,\varnothing,U>$ называется вещественная функция на Fтакая, что:

$$Q1.\ d(\varnothing) = 0;$$
$$Q2.\ d(A) = d(\rceil A);$$
$$Q3.\ \text{из } A\cap\rceil A \subset B\cap\rceil B \text{ следует } d(A)<d(B);$$
$$Q4.\ d(A\cup B) + d(A\cap B) = d(A) + d(B).$$

Первоначально мера нечеткости была введена Де Люка и Термини как аналог меры энтропии, как мера неопределенности, связанной с частичной принадлежностью элементов нечеткому множеству, как мера отличия нечеткого множества от обычного множества. В дальнейшем эта мера была обобщена на алгебры Клини и было показано, что она характеризует алгебры Клини и булевы алгебры в классе метрических алгебр Де Моргана.

Из *Q1, Q3,* граничных условий и из (12) следует неотрицательность меры нечеткости. Условие *Q2* требует, чтобы мера нечеткости принимала одинаковые значения для нечеткого множества и его дополнения. Условие *Q3* фактически оценивает близость нечетких множеств к обычным множествам, для которых выполняется $A\cap\rceil A=\varnothing.$ Условие *Q4* характеризует аддитивность меры

нечеткости. В частности, при $A\cap B=\varnothing$ оно приводит к $d(A\cup B)= d(A)+ d(B).$

Вещественная функция v на решетке F такая, что

$$v(A\cup B) + v(A\cap B) = v(A) + v(B), \quad (14)$$
$$\text{из } A \subset B \text{ следует } v(A)<v(B),$$

называется положительной оценкой на F. Из теории решеток известно, что положительная оценка v определяет метрическую решетку F с метрикой:

$$\rho(A,B) = v(A\cup B) - v(A\cap B).$$

Например, на алгебре $F(X)$ нечетких множеств, определенных на конечном универсуме $X = \{x_1,\dots,x_n\},$ мощность нечеткого множества $v(A) = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)$ является положительной оценкой, а определяемой ею метрикой является функция

$\rho(A,B) = \sum_{k=1}^{n}\left|A(x_k) - B(x_k)\right|.$ Заметим, что в практических приложениях теории нечетких множеств, как правило, рассматриваются нечеткие множества, определенные на конечном универсуме X.

***Теорема* 4.1.** Метрическая алгебра Де Моргана $<F;\cap,\cup,\rceil,\varnothing,U>$ является алгеброй Клини тогда и только тогда, когда на F может быть задана мера нечеткости d, причем, эта алгебра является булевой тогда и только тогда, когда d всюду на F равна нулю.

Для доказательства теоремы установим предварительно ряд свойств мер нечеткости на F.

***Предложение* 4.2.**

$$d(A) = d(\rceil A) = d(A\cap\rceil A) = d(A\cup\rceil A), \quad (15)$$

$d(A) = 0$ тогда и только тогда, когда A - булев элемент в F. (16)

Доказательство. (15) следует из *Q2,* инволютивности, законов Де Моргана и из *Q4.*

(16) следует из (15), (3), *Q1* и из *Q3,* (3), (15), *Q1.*

***Предложение* 4.3.** Функции

$$d(A) = \nu(A \cap \neg A) - \nu(\varnothing), \quad (17)$$

$$d(A) = 0.5(\rho(\varnothing, U) - \rho(A, \neg A)). \quad (18)$$

$$d(A) = \nu(U) - \nu(A \cup \neg A), \quad (19)$$

являются мерами нечеткости на метрической алгебре Клини F с положительной оценкой ν и определяемой ею метрикой ρ.

Доказательство. Выполнение *Q1 - Q3* для функции (17) очевидно. Покажем, что (17) удовлетворяет условию Q4. Из законов Де Моргана, (14) и свойств дистрибутивных решеток следует:

$$\begin{aligned}
&d(A \cup B) + d(A \cap B) = \nu[(A \cup B) \cap \neg(A \cup B)] - \nu(\varnothing) + \nu[(A \cap B) \cap \neg(A \cap B)] - \nu(\varnothing) = \\
&\nu[(A \cup B) \cap (\neg A \cap \neg B)] + \nu[(A \cap B) \cap (\neg A \cup \neg B)] - 2\nu(\varnothing) = \\
&\nu[(A \cup B) \cap (\neg A \cap \neg B) \cup (A \cap B) \cap (\neg A \cup \neg B)] + \nu[(A \cup B) \cap (\neg A \cap \neg B) \cap (A \cap B) \cap (\neg A \cup \neg B)] - \\
&2\nu(\varnothing) = \nu[(A \cap \neg A \cap \neg B) \cup (B \cap \neg A \cap \neg B) \cup (A \cap B \cap \neg A) \cup (A \cap B \cap \neg B)] + \\
&\nu(\neg A \cap \neg B \cap A \cap B) - 2\nu(\varnothing) = \\
&\nu[(A \cap \neg A \cap B) \cup (A \cap \neg A \cap \neg B) \cup (B \cap \neg B \cap A) \cup (B \cap \neg B \cap \neg A)] + \nu[(A \cap \neg A) \cap (B \cap \neg B)] - \\
&2\nu(\varnothing) = \nu[(A \cap \neg A) \cap (B \cup \neg B) \cup (B \cap \neg B) \cap (A \cup \neg A)] + \nu[(A \cap \neg A) \cap (B \cap \neg B)] - 2\nu(\varnothing).
\end{aligned}$$

Применяя условие нормальности к первому слагаемому и используя (14), получим:

$$\begin{aligned}
&d(A \cup B) + d(A \cap B) = \nu[(A \cap \neg A) \cup (B \cap \neg B)] + \nu[(A \cap \neg A) \cap (B \cap \neg B)] - 2\nu(\varnothing) = \\
&\nu(A \cap \neg A) + \nu(B \cap \neg B) - 2\nu(\varnothing) = d(A) + d(B).
\end{aligned}$$

Выполнение *Q1 - Q4* для функции (19) проверяется аналогично. Функция (18) является полусуммой (17) и (19). Как это нетрудно увидеть, сумма мер нечеткости, взятых с положительными коэффициентами, также будет мерой нечеткости. Поэтому функция (18) также будет мерой нечеткости.

(18) дает естественную интерпретацию меры нечеткости как функции от расстояния между нечетким множеством и его дополнением.

Простейшая мера нечеткости вида (17) определяется мощностью нечеткого множества: $d(A) = \sum_{k=1}^{n} \min(A(x_k), (1 - A(x_k)))$.

***Лемма* 4.4**. Если алгебра Де Моргана F не является нормальной, то не существует вещественной функции d на F, удовлетворяющей условиям

Доказательство. Предположим, что F не нормальна, и на ней определена функция d, удовлетворяющая условиям *Q1 - Q4.* Тогда существуют $A, B \in F$, для которых условие нормальности не выполняется, и из выполнения $(A \cap \neg A) \cap (B \cup \neg B) \subseteq A \cap \neg A$ для

всех *A, B* следует строгое неравенство $(A \cap \neg A) \cap (B \cup \neg B) \subset A \cap \neg A$. Обозначим $(A \cap \neg A) \cap (B \cup \neg B)$ через *C*, тогда получаем:

$C \subset A \cap \neg A \subseteq A \cup \neg A \subseteq (A \cup \neg A) \cup (B \cap \neg B) = \neg C$, откуда следует $C \cap \neg C = C \subset A \cap \neg A$, и из *Q3* имеем $d(C) < d(A)$.

Учитывая (15), получаем

$d(\neg C) = d(C) < d(A \cap \neg A) = d(A \cup \neg A)$, откуда следует

$$\begin{aligned}
&d(C) + d(\neg C) = \\
&d[(A \cap \neg A) \cap (B \cup \neg B)] + d[(A \cup \neg A) \cup (B \cap \neg B)] < d(A \cap \neg A) + d(A \cup \neg A). \quad \textbf{(20)}
\end{aligned}$$

Так как для *A и B* условие Клини не выполняется, то из (2), инволютивности и законов Де Моргана следует, что не выполняется и двойственное соотношение $B \cap \neg B \subseteq A \cup \neg A$, откуда аналогично предыдущему получаем

$$d[(B \cap \neg B) \cap (A \cup \neg A)] + d[(B \cup \neg B) \cup (A \cap \neg A)] < d(B \cap \neg B) + d(B \cup \neg B).$$

Складывая последнее неравенство с (20), получаем противоречие с равенством:

$$\begin{aligned}
&d(A \cap \neg A) + d(A \cup \neg A) + d(B \cap \neg B) + d(B \cup \neg B) = d[(A \cap \neg A) \cap (B \cup \neg B)] + \\
&d[(A \cap \neg A) \cup (B \cup \neg B)] + d[(A \cup \neg A) \cap (B \cap \neg B)] + d[(A \cup \neg A) \cup (B \cap \neg B)],
\end{aligned}$$

которое следует из *Q4,* что доказывает лемму.

Теорема 4.1. следует из предложений 4.2, 4.3 и леммы 4.4.

Из свойств меры нечеткости (15) и свойств фокуса следует, что в метрических фокальных алгебрах Клини все элементы фокуса имеют максимальное значение нечеткости. Например, в алгебре *F(X)* нечетких множеств, определенных на конечном универсуме $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ со значениями в $L = [0,1]$, центральным элементом является нечеткое множество *W* с функцией принадлежности $W(x) = 0.5$ для всех $x \in X$, которое и имеет максимальную нечеткость. Если в качестве *L* взять $L = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$, определив операции на *L* так же, как и на [0,1], то *F(X)* будет фокальной алгеброй Клини с фокусом $[W, \neg W]$, где $W(x) = 0.4$ и $\neg W(x) = 0.6$ для всех $x \in X$. Все нечеткие множества из этого интервала имеют одинаковое максимальное значение меры нечеткости.

Метрика, удовлетворяющая на алгебре Де Моргана *F* условию

$$\rho(A,B)=\rho(\rceil A, \rceil B),$$

называется симметричной. Можно показать, что метрика симметрична тогда и только тогда, когда определяющая ее оценка является симметричной, т.е. удовлетворяет на *F* условию

$$v(A) + v(\rceil A) = v(\varnothing) + v(U).$$

Если оценка v симметрична, и ρ - определяемая ею метрика, то выражения (17) - (19) определяют одну и ту же меру нечеткости. На алгебре Клини *F* с центральным элементом *W* и симметричной метрикой мера нечеткости на *F* может быть задана как расстояние от центрального элемента:

$$d(A) = 0.5\rho(\varnothing,U) - \rho(A,W).$$

Оценка *v* называется нормализованной, если $v(\varnothing)= 0.$ Если на алгебре Клини *F* с центральным элементом *W* задана мера нечеткости *d,* то с ее помощью можно задать на *F* нормализованную симметричную оценку:

$$v(A) = 2d(A\cap W) - d(A),$$

и соответствующую ей симметричную метрику.
С помощью последнего соотношения можно вводить на алгебре Клини с центральным элементом положительные оценки и метрики, соответствующие логарифмической энтропии и другим мерам нечеткости, рассматриваемым на множестве нечетких множеств.
Можно показать справедливость следующего утверждения.
***Теорема* 4.5.** В алгебре Клини с центральным элементом устанавливается взаимно однозначное соответствие между мерами нечеткости и нормализованными симметричными положительными оценками, между мерами нечеткости и симметричными метриками.

4.4. Система аксиом для операций Заде

Введенные Заде операции конъюнкции $x\wedge y = min(x,y)$ и дизъюнкции $x\vee y = max(x,y)$ однозначно определяются следующими аксиомами:
P1. Дистрибутивность.
P2. Монотонность (неубывание):

$$x\wedge y \le z\wedge u \quad \text{и} \quad x\vee y \le z\vee u, \qquad \text{если} \quad x\le z,\ y\le u.$$

P3. Граничные условия:

$$x\wedge 1 = 1\wedge x = x,\ \ x\vee 0 = 0\vee x = x.$$

Из монотонности и граничных условий следует выполнение условий:

$$0\wedge x = 0, \qquad 1\vee x = 1.$$

Далее выводится условие идемпотентности дизъюнкции:

$$x = x\wedge 1= x\wedge(1\vee 1)=(x\wedge 1)\vee(x\wedge 1)= x\vee x,$$

и из

$$max(x,y) = max(x,y)\vee max(x,y) \ge x\vee y \ge max(x\vee 0,0\vee y) = max(x,y)$$

следует $x\vee y = max(x,y).$ Аналогично выводится $x\wedge y = min(x,y).$ Операция отрицания Заде может быть определена как функция $n{:}L\to L,$ удовлетворяющая следующим аксиомам:

$$N1.\ n(0) = 1, \qquad n(1) = 0,$$

$$N2.\ x - y = n(y) - n(x), \text{ для всех } x,y \in L.$$

Первая аксиома обобщает соответствующее свойство булева отрицания. Вторая означает, что приращение значений принадлежности и их отрицаний равны по величине и противоположны по знаку. Из этих аксиом следует $x + n(x) = 1$ для всех $x \in L,$ что приводит к $n(x) = 1- x$.
Однако, в нечеткой логике исследуется более широкий класс отрицаний, определяемых аксиомой *N1* и аксиомой невозрастания:

$$N3.\ n(y) \le n(x), \quad \text{если} \ x \le y.$$

Особый интерес представляют отрицания, удовлетворяющие также аксиоме инволютивности. Такие отрицания называются сильными отрицаниями. Кроме отрицания Заде $n(x) = 1 - x$ этим условиям удовлетворяет, например, отрицание: $n(x)=(1-x^2)^{1/2}.$ Более подробно нечеткие отрицания будут рассматриваться в следующей главе.

5. Операции отрицания

5.1. Операции отрицания на линейно упорядоченном множестве

5.1.1. Основные понятия

Пусть L - множество значений принадлежности (правдоподобности, уверенности, возможности, истинности), упорядоченное отношением линейного порядка $\leq$, с наименьшим 0 и наибольшим I элементами. Будем предполагать, если не оговорено противное, что $|L| > 2$. Таким образом, кроме условий рефлексивности, антисимметричности и транзитивности для всех $x,y \in L$ выполняется: $x \leq y$ или $y \leq x$ (линейность) и $0 \leq x,\ y \leq I$. Отношение $\leq$ определяет на L операции $\wedge = min$ и $\vee = max$ обычным образом: $x \wedge y = x$ и $x \vee y = y$, если $x \leq y$; $x \wedge y = y$ и $x \vee y = x$, если $y \leq x$. $x<y$ означает, что $x \leq y$ и $x \neq y$.

Примером L может служить интервал вещественных чисел [0,1], шкала лингвистических оценок правдоподобности L = {неправдоподобно, мало правдоподобно, средняя правдоподобность, большая правдоподобность, наверняка}, шкала балльных оценок $L = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ и др.

***Определение* 1.1**. Операцией отрицания на L называется функция $n: L \to L$, удовлетворяющая на L условиям:

$$n(0) = I, \qquad n(I) = 0, \quad (1)$$
$$n(y) \leq n(x), \qquad \text{если } x \leq y. \quad (2)$$

В зависимости от выполнения на L дополнительных условий рассматривают следующие типы отрицаний:

$n(y) < n(x)$, если $x < y$	(строгое отрицание),
если $x < y$ и $n(y) = n(x)$, то $n(x), n(y) \in \{0, I\}$	(квазистрогое отрицание
$n(n(x)) = x$	(инволюция),
$n(n(x)) \leq x$	(обычное отрицание),
$x \leq n(n(x))$	(слабое отрицание).

Слабое отрицание называется также интуиционистским отрицанием. Элемент x из L будет называться инволютивным элементом, если $n(n(x)) = x$, в противном случае он будет называться неинволютивным.

Отрицание будет называться неинволютивным, если L содержит неинволютивные по этому отрицанию элементы.

Нетрудно увидеть, что если n обычное или слабое отрицание, то n удовлетворяет на L соотношению:

$$n(n(n(x))) = n(x).$$

Элемент $s \in L$, удовлетворяющий условию

$$n(s) = s, \quad (3)$$

называется фиксированной точкой. Этот элемент будет центральным элементом (фокусом) L. Очевидно, что если фиксированная точка существует, то она единственна и $0 < s < I$.

Пусть $T, S: L \times L \to L$ - операции, удовлетворяющие на L условиям:

$$T(x,y) = T(y,x), \qquad S(x,y) = S(y,x), \quad (4)$$
$$T(x,y) \leq x, \qquad x \leq S(x,y). \quad (5)$$

В качестве операций T и S могут рассматриваться операции конъюнкции и дизъюнкции, соответственно, в частности операции $\wedge = min$ и $\vee = max$.

***Предложение* 1.2**. Операция отрицания n удовлетворяет на L неравенству Клини:

$$T(x,n(x)) \leq S(y,n(y)). \quad (6)$$

Доказательство. Если $x \leq y$, то $T(x,n(x)) \leq x \leq y \leq S(y,n(y))$. Если $y \leq x$, то $n(x) \leq n(y)$ и $T(x,n(x)) \leq n(x) \leq n(y) \leq S(y,n(y))$.

***Предложение* 1.3**. Если n - инволюция, то один из законов Де Моргана

$$n(S(x,y)) = T(n(x),n(y)), \quad (7)$$
$$n(T(x,y)) = S(n(x),n(y)). \quad (8)$$

выполняется на L тогда и только тогда, когда выполняется второй закон. Если $T = min$ и $S = max$, то законы Де Моргана выполняются для любого отрицания n.

Доказательство. Пусть n - инволюция. Подставив в одно из соотношений (7), (8) вместо x и y соответственно $n(x)$ и $n(y)$ и взяв отрицание от обеих частей полученного равенства из выполнения $n(n(x)) = x$ на L получим второе соотношение. Если $T = min$ и $S = max$, то выполнение законов Де Моргана следует из линейной

упорядоченности L. Пусть, например, $x \le y$, тогда и $n(y) \le n(x)$ обе части (7) совпадают:
$n(S(x,y)) = n(y)$ и $T(n(x),n(y)) = n(y)$. Аналогично совпадение получим для (8).

5.1.2. Сжимающие и разжимающие отрицания

***Теорема* 1.4.** Для любого отрицания n и для любого $x \in L$ выполняется по крайней мере одно из соотношений

$$x \wedge n(x) \le n(n(x)) \le x \vee n(x), \quad (9)$$

$$n(x) \wedge n(n(x)) \le x \le n(x) \vee n(n(x)). \quad (10)$$

Оба соотношения выполняются одновременно тогда и только тогда, когда x - инволютивный элемент.

Доказательство. Пусть $x \le n(x)$, тогда из (2) получим $n(n(x)) \le n(x)$, откуда следует либо $x \le n(n(x)) \le n(x)$, либо $n(n(x)) \le x \le n(x)$, что приводит к (9) и (10), соответственно.
Двойственно, $n(x) \le x$ также приводит к (9) и (10).
Если x - инволютивно, то (9) и (10) очевидно совпадают. Пусть (9) и (10) выполняются одновременно. Тогда из $x \le n(x)$ следует $n(n(x)) \le n(x)$, и из (9), (10) получаем $x \le n(n(x))$ и $n(n(x)) \le x$, откуда следует инволютивность x . Двойственно, из $n(x) \le x$ также следует $n(n(x)) = x$.

***Определение* 1.5**. Отрицание n называется сжимающим (разжимающим) в точке $x \in L$, если выполняется неравенство (9) (соответственно (10)), и сжимающим (разжимающим) (на L), если соответствующее неравенство выполняется на L.

***Следствие* 1.6.** Отрицание n является инволюцией тогда и только тогда, когда оно сжимающее и разжимающее одновременно.
Классическим примером инволютивного отрицания на [0,1] является отрицание $n(x) = 1 - x$ с фиксированной точкой $s = 0.5$.
Обозначим $n^0(x) = x,\ n^1(x) = n(x), \ldots,\ n^{k+1}(x) = n\left(n^k(x)\right)$
для $k = 1, 2, \ldots$

Структура множества элементов $n^k(x)$, $(k = 0, 1, \ldots)$, порождаемых некоторым элементом x из L с помощью отрицания n на L, характеризуется следующим образом.

***Предложение* 1.7.** Отрицание n является сжимающим в x тогда и только тогда, когда для всех целых $0 \le k \le j$ выполняется:

$$n^{2k}(x) \le n^{2j}(x) \le n^{2j+1}(x) \le n^{2k+1}(x), \text{ если } x \le n(x), \quad (11)$$

$$n^{2k+1}(x) \le n^{2j+1}(x) \le n^{2j}(x) \le n^{2k}(x), \text{ если } n(x) < x. \quad (12)$$

Отрицание n является разжимающим в x тогда и только тогда, когда (11), (12) выполняются для всех целых $0 \le j \le k$.
Доказательство следует непосредственно из теоремы 1.4 и (2).

***Следствие* 1.8.** Если для некоторого $k \ge 0$ элемент $n^k(x)$ является x

фиксированной точкой отрицания n, то n является сжимающим в x.

Заметим, что разжимающее отрицание также может иметь фиксированную точку.

***Предложение* 1.9**. Отрицание n является сжимающим тогда и только тогда, когда на L из

$$x \wedge n(x) \le y \le x \vee n(x) \quad (13)$$

следует:

$$x \wedge n(x) \le n(y) \le x \vee n(x), \quad (14)$$

и n является разжимающим тогда и только тогда, когда из (13) следует:

$$n(x) \wedge n(n(x)) \le y \le n(x) \vee n(n(x)). \quad (15)$$

Доказательство. Если из (13) следует (14), то из выполнения (13) для $y = n(x)$ следует (9), т.е. n - сжимающее отрицание. Пусть n - сжимающее отрицание и (13) выполнено для некоторых x и y. Тогда выполняется $x \le y \le n(x)$ или $n(x) \le y \le x$, откуда, применяя (2), получим соответственно $n(n(x)) \le n(y) \le n(x)$ или $n(x) \le n(y) \le n(n(x))$ и из выполнения (9) для n получим соответственно $x \le n(n(x)) \le n(y) \le n(x)$ или $n(x) \le n(y) \le n(n(x)) \le x$, откуда следует (14).
Аналогично доказывается вторая часть предложения для разжимающего отрицания.

***Следствие* 1.10**. Из выполнения (13) следует для всех $k > 0$:

$x \wedge n(x) \le n^k(y) \le x \vee n(x)$, **если n сжимающее на L и**
$n^k(x) \wedge n^{k+1}(x) \le y \le n^k(x) \vee n^{k+1}(x)$, **если n разжимающее на L.**

Таким образом, если y находится "между" x и $n(x)$, и n - сжимающее отрицание, то и все элементы $n^k(y)$, порождаемые элементом y, также будут находиться "между" x и $n(x)$; а если x и $n(x)$ находятся "по разные стороны" *от* y, и n - разжимающее отрицание, то и все элементы $n^k(x)$ и $n^{k-1}(x)$, порождаемые из x, также будут "по разные стороны" от y.

***Определение* 1.11**. Пусть n - отрицание на L и $x \in L$. Множество

$$G(x) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{n^k(x)\}$$ называется множеством элементов,

порождаемым элементом x. Мощность этого множества $R = |G(x)|$ будет называться рангом элемента x. ЕСЛИ G(x) содержит бесконечное число элементов, то будем писать $R(x) = \infty$. Ранг отрицания n определяется как $R(n) = \sup_{x \in L} R(x)$.

Отметим следующие очевидные свойства отрицаний.

***Следствие* 1.12.**
1) $R(x) = 1$ тогда и только тогда, когда x - фиксированная точка отрицания n, т.е. $x = s$.
2) $R(n) = 2$, если n - инволюция.
3) $R(n) \leq 3$, если n - обычное или слабое отрицание.
Далее, если для n существует обратное отрицание n^{-1}, то для введенныхвыше понятий будем использовать соответственно обозначения

$$n^{-k}(x),\ G^{-1}(x),\ R^{-1}(x) \text{ и } R^{-1}(n).$$

***Предложение* 1.13.** Пусть n - отрицание на L и $x \in L$. Если $R(x) = k$, где $1 < k < \infty$, то $G(x) = \{x, n(x), \ldots, n^{k-1}(x)\}$, и либо выполняется $n^j(x) = n^{k-1}(x)$ для всех $j \geq k$ и n - сжимающее в x с фиксированной точкой $s = n^{k-1}(x)$, либо

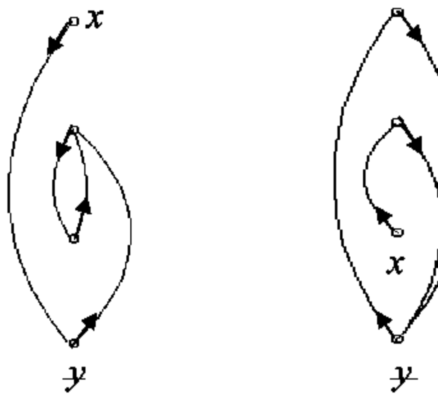
$$n^{k+2j}(x) = n^{k-2}(x) \text{ и } n^{k+2j+1}(x) = n^{k-1}(x)$$

для всех $j \geq 0$. Если $R(x) = \infty$, то $n^k(x) \neq n^j(x)$ для всех $k \neq j,\ k, j \geq 0$.

Доказательство. Из $R(x) = k$ следует $n^j(x) \neq n^i(x)$ для всех $i<j<k$ и $G(x) = \{x, n(x), \ldots, n^{k-1}(x)\}$, так как в противном случае $n^j(x) = n^i(x),\ n^{j+1}(x) =$

$n^{i+1}(x), \ldots,\ n^{2j-i}(x) = n^j(x) = n^i(x)$ и т.д., т.е. все $n^{j+p}(x),\ (p \geq 0)$, принадлежат множеству $\{n^i(x),\ n^{i+1}(x),\ \ldots,\ n^{j-1}(x)\}$, откуда следует $R(x) \leq j < k$, что противоречит тому, что $R(x) = k$.
Из $R(n) = k$ и $G(x) = \{x, n(x), \ldots, n^{k-1}(x)\}$ следует, что $n^k(x) = n^i(x)$ для некоторого $i < k$. Если $n^k(x) = n^{k-1}(x)$, то $n^{k+j}(x) = n^{k-1}(x)$ для всех $j \geq 0$, $n^{k-1}(x)$ является фиксированной точкой, и по следствию 1.8. отрицание n является сжимающим в x.
Если n сжимающее в x, то из предложения 1.7 следует, что $n^k(x)$ находится «между» элементами $\{n^{k-1}(x),\ n^{k-2}(x)\}$, которые в свою очередь находятся «между» $\{n^{k-3}(x),\ n^{k-4}(x)\}$ и т.д. Таким образом, равенство $n^k(x) = n^i(x)$ для некоторого $i < k$, возможно лишь если $i = k-1$ или $i = k-2$. Случай $n^k(x) = n^{k-1}(x)$ рассмотрен выше. Из $n^k(x) = n^{k-2}(x)$, последовательно применяя к обеим частям отрицание, получим
$n^{k+2j}(x) = n^{k-2}(x)$ и $n^{k+2j+1}(x) = n^{k-1}(x)$ для всех $j \geq 0$.
Если n разжимающее в x, то из предложения 1.7 следует, что все элементы из $R(x)$ находятся «между» элементами $\{n^{k-2}(x),\ n^{k-1}(x)\}$, которые в свою очередь находятся «между» $\{n^k(x),\ n^{k+1}(x)\}$ и т.д., Таким образом, равенство $n^k(x) = n^i(x)$ для некоторого $i < k$, возможно для разжимающего отрицания лишь если $i = k - 2$. Из $n^k(x) = n^{k-2}(x)$, получаем
$n^{k+2j}(x) = n^{k-2}(x)$ и $n^{k+2j+1}(x) = n^{k-1}(x)$ для всех $j \geq 0$.
Если $R(x) = \infty$, то $n^k \neq n^j$ для всех $k \neq j;\ k, j \geq 0$, поскольку из $n^k(x) = n^j(x)$ для некоторых $k \neq j$ следует $R(x) \leq \max\{j, k\}$.
Предложение 1.13 доказано.
Предыдущие утверждения формализуют представление об элементах, порождаемых сжимающими и разжимающими отрицаниями в точках, как о спиралях, соответственно «закручиваемых внутрь» или «раскручиваемых наружу», причем эти спирали либо бесконечные, либо в конечном случае имеют петлю на конце, состоящую из двух

элементов, которые для сжимающих отрицаний могут совпадать, образуя неподвижную точку отрицания. Спирали, порождаемые разными элементами, либо вложены друг в друга, либо совпадают, начиная с некоторого элемента.
На рис. 1 представлены примеры сжимающего и разжимающего в точке x отрицаний. Элементы L представлены вершинами соответствующего графа и упорядочены снизу вверх, в частности, $y < x$. Для обоих примеров отрицаний $R(x) = 4$. Элементы y орождаются элементами x так, что $y= n(x)$ для рис. 1а) и $y = n^2(x)$ для рис. 1,б).



а) б)

Рис. 1. а) Отрицание n - сжимающее в точке X. б) Отрицание n - разжимающее в точке X.

Если ввести индекс нечеткости $d(x)$ элементов из L как $d(x)= x \wedge n(x)$, то несложно увидеть, что имеет место $d(x) \leq d(n(x))$ для сжимающих отрицаний и $d(x) \geq d(n(x))$ для разжимающих отрицаний. Для инволюций нечеткость элемента и его отрицания совпадают. Следовательно, если из контекста ясно, что операция отрицания изменяет нечеткость формулы (высказывания), то тогда, в зависимости от характера этого изменения, нужно использовать сжимающие или разжимающие отрицания.

5.1.3. Примеры

Рассмотрим простейшие примеры отрицаний, иллюстрирующие введенные понятия. Во всех примерах, если не оговорено противное, предполагается, что L содержит элементы, отличные от 0 и I.
Пусть n - отрицание на L, L_2 = {0,I}, L_3 = {0, c, I}, где $0 \leq c \leq I$, и n_2, n - отрицания на L_2 и L_3, соответственно, причем c - фиксированная точка отрицания n3, т.е. $n3(c)= c$. Связь между простейшими отрицаниями n на L и отрицаниями n_2, $щ$ на L_2 и L_3 может быть задана с помощью морфизмов $\phi_k: L \rightarrow L_k$ таких, что $\phi_k(n(x))=n_k(\phi_k(x)),\ (k=2,3)$. При интерпретации 0, / и c как "ложь", "истина" и "неопределенность", соответствующие морфизмы определяют интерпретацию элементов из L.
Пример 1. Пусть L линейно, и c - некоторый элемент из L.

$$n(x)=\begin{cases} I, & \textit{если } x=0 \\ c, & \textit{если } x \notin \{0, I\} \\ 0, & \textit{если } x=I \end{cases}$$

При $c \notin \{0,\ I\}$ это отрицание является сжимающим, ни обычным, ни слабым, с фиксированной
точкой $s = c,\ R(n) = 2.\ \phi_3(0)=0,\ \phi_3(I)=I,\ \phi_3(x)=c,$
если $x \notin \{0,\ I\}$. Интерпретация: «Все, что не истина и не ложь является
неопределенностью»
Пример 2. При $c = I$, отрицание из примера 1 станет таким:

$$n(x)=\begin{cases} I, & \textit{если } x \neq I \\ 0, & \textit{если } x = I \end{cases}.$$

Это отрицание является обычным, разжимающим, квазистрогим, без фиксированной точки, $R(n) = 3$, на L
выполняется: $x \vee n(x)= I.\ \phi_2(I)=I,$
$\phi_2(x)=0,$ если X < I. "Все, что не истина, есть ложь".
Пример 3. При c = 0, из отрицания примера 1 получим:

$$n(x)=\begin{cases} I, & \textit{если } x = 0 \\ 0, & \textit{если } x \neq 0 \end{cases}.$$

Это отрицание является слабым, разжимающим, квазистрогим, без фиксированной точки, $R(n)$ =3. На L выполняется: $x \wedge n(x) = 0. \phi_2(0)=0,$ $\phi_2(x)=I,$ если $x > 0$. "Все, что не ложь, есть истина".

Пример 4. Примером разжимающего отрицания, которое не является ни обычным, ни слабым является отрицание

$$n(x)=\begin{cases} I, & \text{если } x<c \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases},$$

где $c \notin \{0, I\}$. Фиксированная точка отсутствует, $R(n) = 3$. $\phi_2(x)=0,$ если $x < c,$ $\phi_2(x)=I,$ если $c \le x$. "Все или истина, или ложь". Некоторые подходы к формализации нечеткой логики, основанные на подобной интерпретации, сводят ее к двузначной, используя $c = 0.5$.

Пример 5. Примером разжимающего отрицания с фиксированной точкой является отрицание

$$n(x)=\begin{cases} I, & \text{если } x<c \\ c, & \text{если } x=c \\ 0, & \text{если } c<x \end{cases},$$

где $c \notin \{0, I\}$. Элемент $x = c$ является фиксированной точкой, отрицание не является ни обычным, ни слабым, $R(n)$ =3.

Пример 6.

$L=\{a_1, a_2,\ldots, a_m\}, a_k < a_{k+1}, (k= 1,\ldots, m-1).$ Здесь $0 = a_1$, $1= a_m$. Элементами шкалы L могут быть, например, лингвистические оценки правдоподобности, истинности, принадлежности.

Отрицание $n(a_k)=a_{m-k+1},$ $(k= 1,\ldots, m-1)$ является инволютивным. При нечетном $m = 2p+1$ фиксированной точкой отрицания (центральным элементом L) является элемент $s= a_p+1$. Мера нечеткости на этом элементе принимает максимальное значение. При четном $m = 2p$ фиксированная точка отрицания отсутствует. Фокус L состоит из элементов $\{a_p, a_{p+1}\}$, имеющих максимальную нечеткость.

5. 2. Отрицания на [0,1]

5. 2.1. Инволютивные отрицания

Отрицания на L= [0,1] являются частным случаем отрицаний на линейно упорядоченном множестве, рассмотренных в предыдущем разделе, поэтому все свойства отрицаний, определяемые линейным упорядочением элементов из L, имеют место и для отрицаний на [0,1]. В этом и следующих разделах исследуются свойства отрицаний как вещественных функций. В дальнейшем, отрицание Заде будет обозначаться заглавной буквой:

Щ(x) = 1-x.

Определение 2.1. Отрицание $n:[0,1]\to[0,1]$ называется биективным, если функция n биективная.

Из определения биективной функции как взаимно-однозначной функции и из условия невозрастания отрицания $n(y) \le n(x)$, если $x \le y$, следует, что биективное отрицание является строго убывающей непрерывной функцией.

Строго убывающие непрерывные отрицания на [0,1] называют также строгими отрицаниями, а инволютивные отрицания на [0,1] называют сильными отрицаниями.

У биективного отрицания существует обратная функция n^{-1}, которая также будет биективным отрицанием.

Биективное отрицание имеет фиксированную точку, для нее выполняется $n(s) = s = n^{-1}(s)$. Очевидно, что точка (s,s) является точкой пересечения графиков функций $y(x)= n(x)$ и $y(x)= x$.

Инволютивное отрицание является биективным. Для инволютивного отрицания из $n(n(x) = x$ следует $n^{-1}(x)= n(x)$ для всех $x\in[0,1]$. Таким образом, график инволютивного отрицания симметричен относительно прямой линии $y(x) = x$.

Определение 2.2. Непрерывная строго возрастающая функция $f:[0,1]\to[0,1]$ такая, что $f(0)= 0$, $f(1)= 1$ называется автоморфизмом интервала [0,1].

Теорема 2.3. Функция $n:[0,1]\to[0,1]$ является инволюцией тогда и только тогда, когда существует автоморфизм f интервала [0,1] такой, что

$n(x) = f^{-1}(1 - f(x)).$ (16)

Доказательство. Очевидно, что (16) удовлетворяет условиям (1), (2) и условию инволютивности $n(n(x))=f^{-1}(1- f(f^{-1}(1-f(x))))= x.$

Доказательство того, что любая инволюция представима в виде (16), основано на следующей лемме.

Лемма 2.4. Пусть n_1и n_2- две инволюции на [0,1]. Тогда существует автоморфизм f интервала [0,1] такой, что

$$n_1(x) = f^{-1}(n_2(f(x))). \quad (17)$$

Доказательство. Пусть s_1 и s_2 - фиксированные точки отрицаний n_1и n_2, соответственно, и пусть $g:[0,s_1]\to[0,s_2]$ - возрастающая биективная функция, тогда функция

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & если\ x \le s_1 \\ n_2(g(n_1(x))), & если\ s_1 < x \end{cases}$$

является биективной возрастающей функцией, отображающей [0,1] на [0,1] так, что $f(s_1) = s_2$. Покажем, что для нее выполняется (17). Из определенияf следует,

что$f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$ при$x \le s_2$ и $f^{-1}(x) = n_1 (g^{-1}(n_2(x)))$ при $s_2 < x$.

Тогда при $x< s_2$

получим$f(x)= g(x)< s_2$, $n_2(f(x))= n_2(g(x))> s_2$ и

$f^{-1}(n_2(f(x)))=$

$n_1(g^{-1}(n_2(n_2(g(x))))) = n_1(x).$ Аналогично показывается,

что $f^{-1}(n_2(f(x))) =$

$n_1(x)$ при $s_1 < x$.

Полагая в условиях леммы $n_2(x) = N(x) = 1-x$, получим (16).

Теорема доказана.

Функция $f(x)$ в условиях теоремы 2.3. называется аддитивным генератором инволютивного отрицания. Нетрудно увидеть, для фиксированной точки инволютивного отрицания, генерируемого аддитивным генератором / выполняется:

$$f(s) = 0.5, \qquad s = f^{-1}(0.5).$$

Таким образом, любое инволютивное отрицание *n* является сопряженным отрицанию Заде, т.е. существует автоморфизм fинтервала [0,1] такой, что $n = f^{-1}\circ N\circ f.$ Более обще, пусть, *М*-группа композиций всех монотонных биективных функций из [0,1] на [0,1], *S* - множество инволюций на [0,1] и *(N)* - класс функций из *М,* сопряженных *N.*

Теорема 2.5. *S = (N).*

Доказательство. Достаточно показать, что из$h\in(N)$следует $h\in S.$ Из $h\in(N)$ следует существование функции $g\in M$ такой, что$h= g^{-1}\circ N\circ g,$

откуда следует, что *h* - строго убывающая функция, $h(h(x))= g^{-1}(1- g(h(x)))= g^{-1}(1- g(h(x)))= x,$ и из $\{g(0),g(1)\}=\{0,1\}$следует$h(1) = 0, h(0) = 1,$ т.е. $h\in S.$

Предложение 2.6. Пусть *n* - инволюция. Тогда

$$n(x) = f^{-1}(1 - f(x)) = g^{-1}(1 - g(x))$$

где f и *g* - автоморфизмы интервала [0,1], тогда и только тогда, когда существует автоморфизм *h* интервала [-0.5,0.5] такой, что

$$g(x) = 0.5 + h(f(x) - 0.5).$$

Доказательство. Предположим,

что$f^{-1}(1 - f(x)) = g^{-1}(1 - g(x)).$ Обозначая $y=f(x)$, получим, что это равенство выполняется тогда и только тогда, когда,$g(f^{-1}(1- y)) = 1- g(f^{-1}(y)).$Определим функцию $h: [-0.5,0.5] \to [-0.5,0.5]$ так, что$h(z) = g(f^{-1}(z+0.5)) - 0.5.$Ясно, что эта функция является автоморфизмом [-0.5,0.5] и для нее выполняется $g(f^{-1}(y))= 0.5 + h(y - 0.5),$ откуда следует

$$g(x) = 0.5 + h(f(x) - 0.5).$$

Примером параметрического класса инволюций, построенных по правилу (16), является отрицание Сугено:

$$n(x) =(1-x)/(1+px), \qquad (p > -1),$$

генерируемое генератором $f(x) = log(1+px)/log(1+p)$. Это отрицание является единственным рациональным отрицанием вида $(ax+b)/(cx+d)$. Фиксированная точка отрицания Сугено равна $s= ((1+p)^{1/2}-1)/p$.

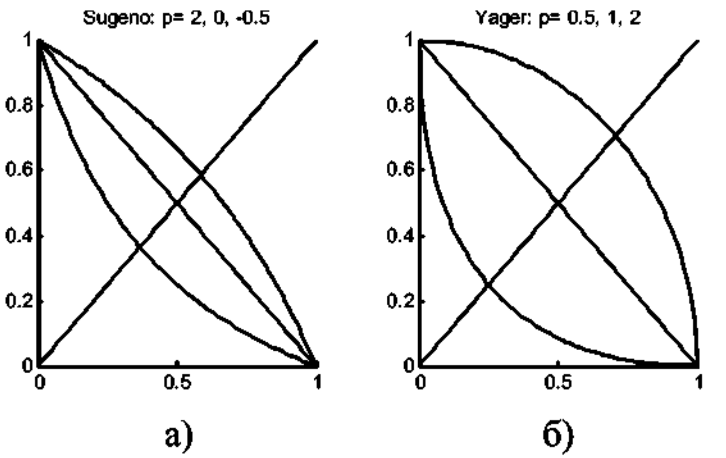


Рис. 2. Графики отрицаний Сугено и Ягера: а) отрицание Сугено,p = 2, 0, -0.5; б) отрицание Ягера,p = 0.5, 1, 2.

Другим примером построенного таким образом отрицания является отрицание Ягера:

$$n(x) = \sqrt[p]{1-x^p}, \qquad p \in (0,\infty),$$

генерируемое генератором $f(x) = x^p$. Фиксированная точка отрицания Ягера

равна $s = \sqrt[p]{0.5}$.

Графики отрицаний Сугено и Ягера для разных значений параметра *p* приведены на рис. 2, где приведен также график функции *y = x*. Рассматриваемые ниже методы генерации инволютивных отрицаний используют свойство инволюций $n(x) = n^{-1}(x)$, которое определяет симметрию графика инволютивного отрицания относительно прямой *y= x.* Эти методы будут в следующем разделе использоваться при

характеризации сжимающих и разжимающих отрицаний на [0,1]. Эти методы представляют также самостоятельный интерес при построении инволютивных отрицаний в задачах нечеткого моделирования.

Пустьf- произвольное монотонное биективное отображение [0,1] на [0,1]. Введем обозначения

$$f_{[-]}(x) = min\{f(x), f^{-1}(x)\},$$
$$f_{[+]}(x) = max\{f(x), f^{-1}(x)\}.$$

Отметим следующие свойства введенных функций.

1) Еслиf- автоморфизм интервала [0,1], то $f_{[-]}$ и $f_{[+]}$ также являются автоморфизмами интервала [0,1],

причем, $f_{[-]}^{-1} = f_{[+]}$, $f_{[+]}^{-1} = f_{[-]}$ и для всех $x\in[0,1]$ выполняется

$$f_{[-]}(x) \le x \le f_{[+]}.$$

2) Если *n* - инволюция, то

$n_{[-]} = n_{[+]} = n$.

Предложение 2.7. Если *n* - биективное отрицание, то функции $n_{[-]}$ и $n_{[+]}$ являются инволюциями.

Доказательство. Из определения $n_{[-]}$ и $n_{[+]}$ следует, что они являются биективными отрицаниями. Имеем

$$n_{[-]}(x) = \begin{cases} n(x), & если \;\; n(x) \le n^{-1}(x) \\ n^{-1}(x), & если \; n^{-1}(x) < n(x) \end{cases},$$
$$n_{[+]}(x) = \begin{cases} n^{-1}(x), & если \;\; n(x) \le n^{-1}(x) \\ n(x), & если \; n^{-1}(x) < n(x) \end{cases}. \qquad (18)$$

Покажем, что $n_{[-]}$ является инволюцией.

Если $n(x) \le n^{-1}(x)$, то $n_{[-]}(x) =$

$n(x)$. Обозначим *y = n(x).* Тогда

$$n(y)= n(n(x)) \ge n(n^{-1}(x))= x= n^{-1}(n(x))= n^{-1}(y).$$

Из $n(y) \geq n^{-1}(y)$ следует $n_{[-]}(y) = n^{-1}(y)$ и

$n_{[-]}(n_{[-]}(x)) = n_{[-]}(n(x)) = n_{[-]}(y) = n^{-1}(y) =$

$n^{-1}(n(x)) = x.$ Аналогично,

из $n^{-1}(x) \leq n(x),$ выводится $n_{[-]}(n_{[-]}(x)) = x.$

Доказательство инволютивности $n_{[+]}$ проводится аналогично.

Теорема 2.8. Функции $n_1, n_2 : [0,1] \to [0,1]$ являются инволюциями тогда
и только тогда, когда существует автоморфизм f интервала [0,1] такой, что

$$n_1(x) = (1 - f)_{[-]}(x), \quad (19)$$

$$n_2(x) = (1 - f)_{[+]}(x). \quad (20)$$

Доказательство. Пусть *n* - инволюция. Тогда *f(x)* = 1 - *n(x)* является автоморфизмом

$$n(x) \text{ и } (1 - f)_{[+]}(x) = n_{[+]}(x) = n(x).$$

интервала [0,1] таким, что $(1 - f)_{[-]}(x) = n_{[-]}(x) =$

Пустьf- автоморфизм интервала [0,1]. Тогда *n(x) = 1- f(x)* является биективным отрицанием и из предложения 2.7 следует справедливость теоремы.

Учитывая, что $(1 - f(x))^{-1} = f^{-1}(1 - x),$ представим (19), (20) также в виде:

$$n_1(x) = min\{1 - f(x), f^{-1}(1 - x)\},$$
$$n_2(x) = max\{1 - f(x), f^{-1}(1 - x)\}.$$

Предложение 2.9. Пусть *n* - биективное отрицание, и *s* - его фиксированная точка. Тогда функции

$$n_1(x) = \begin{cases} n(x), & \text{если } x \leq s \\ n^{-1}(x), & \text{если } s < x \end{cases}, \quad (21)$$

$$n_2(x) = \begin{cases} n^{-1}(x), & \text{если } x \leq s \\ n(x), & \text{если } s < x \end{cases}. \quad \textbf{(22)}$$

являются инволютивными отрицаниями.

Доказательство. Из построения n_1 и n_2 следует, что они являются биективными отрицаниями с фиксированной точкой *s*. Если Х< *s,* то *n(x) > n(s) = sn* $n_1(n_1(x)) = n_1(n(x)) = n^{-1}(n(x)) = x.$ Если Х > *s,* то $n^{-1}(x) <$

$n^{-1}(s) = s$ и $n_1(n_1(x)) = n_1(n^{-1}(x)) =$

$= n(n^{-1}(x)) = x.$ Аналогично доказывается инволютивность n2.

Заметим, что соотношения (18) и (21), (22) в общем случае определяют разные отрицания. Однако, если $n(x) \leq n^{-1}(x)$ для всех $x \leq s$,

либо $n^{-1}(x) \leq n(x)$ для всех $x \leq s$, *то* определяемые (18) и (21), (22) пары отрицаний $\{n_1, n_2\}$ совпадают.

Примером отрицаний, построенных по правилам (19), (20) с генераторомf(x) = *xp,* являются отрицания:

$$n_1(x) = \min\left(1 - x^p, \sqrt[p]{1 - x}\right)$$

$$n_2(x) = \max\left(1 - x^p, \sqrt[p]{1 - x}\right)$$

Графики этих отрицаний для разных значений параметров *p* приводятся на рис. 3.

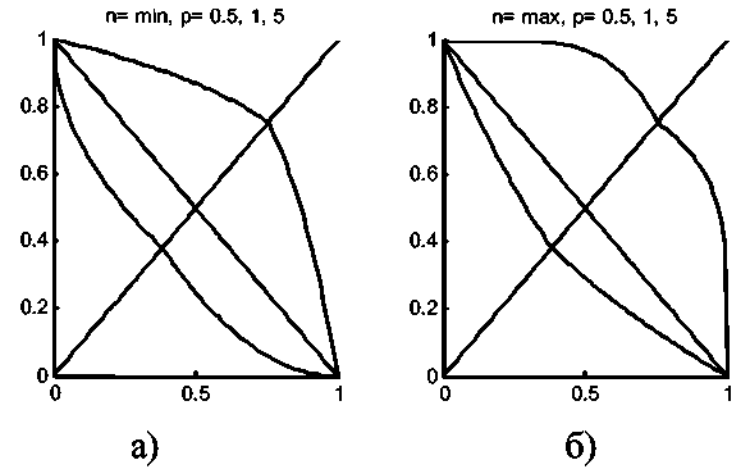


Рис. 3. Графики инволютивных отрицаний с генератором f(x) = x^p*:* а) формула (19),*p*= 0.5, 1, 5; б) формула (20), *p*= 0.5, 1, 5.

С практической точки зрения может возникнуть задача построения инволютивного отрицания с заданной фиксированной точкой *s*. Решение этой задачи может быть основано на следующей теореме.

Теорема 2.10. Функция $n:[0,1]\to[0,1]$ является инволюцией с
фиксированной точкой $s\in(0,1)$ тогда и только тогда, когда существует автоморфизм f интервала [0,1] такой, что

$$n(x)=\begin{cases}1-(1-s)f\left(\dfrac{x}{s}\right), & \text{если } x\le s\\ sf^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1-s}\right), & \text{если } s<x\end{cases}\qquad (23)$$

Доказательство. Пусть /- автоморфизм и *n* определяется по (23). Монотонное убывание *n* и выполнение условий n(0) = 1, n(1) = 0, *n(s)= s,* очевидно.
Обозначим

$$g_1(x) = 1-(1-s)f(x/s),\; g_2(x) = sf^{-1}((1-x)/(1-s)),$$

тогда $g_2(x) = g_1^{-1}(x)$. Доказательство инволютивности *n* аналогично
доказательству инволютивности отрицания в предложении 2.9.
Пусть *n* - инволюция с фиксированной точкой *s.* Тогда функция *f(x)= (1-n(xs))/(1-s)* биективная, строго возрастающая и f(0)=0, f(1)=1. $f^{-1}(x)= n(1-(1-s)x)/s.$ Если $x\le s$, то (23) определяет $n(x)$: $1-(1-s)f(x/s) = 1-(1-s)(1-n(xs/s))/(1-s) = n(x).$

Если $s<x$, то также

$$sn(1-(1-s)(1-x)/(1-s))/s = n(x).$$

получаем $n(x)$: $sf^{-1}((1-x)/(1-s)) =$

Примером отрицания, построенного по правилу (23) с генератором *f(x) = xp,* является отрицание:

$$n(x)=\begin{cases}1-(1-s)\left(\dfrac{x}{s}\right)^p, & \text{если } x\le s\\ s\sqrt[p]{\dfrac{1-x}{1-s}}, & \text{если } s<x\end{cases}\qquad (24)$$

Графики этого отрицания для *s* = 0.3 и различных значений параметра *p* приведены на рис. 4. При *p* = 1 это отрицание задается двумя отрезками прямых, соединяющими точки (0,1) и (1,0) с точкой *(s,s),* лежащей на прямой *y = x.*

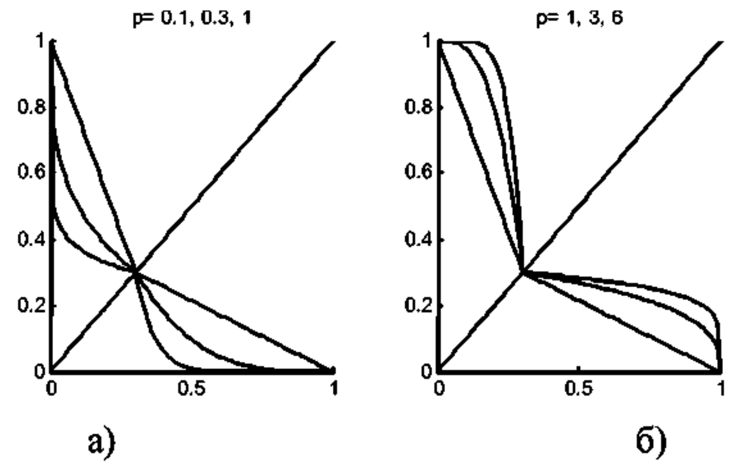


Рис. 4.
Графики инволютивных отрицаний (24) с фиксированной точкой s=0.3 для значений параметрар: *а)p*= 0.1, 0.3 и 1; *б)p*= 1, 3 и 6.

Предложение 2.11. Если n_1 и n_2 - инволютивные отрицания с фиксированной точкой *s1= s2= s,* то $n_1(x)\le n_2(x)$ для всех $x\le s$ тогда и только тогда, когда $n_1(x)\le n_2(x)$ для всех $x>s$.

Доказательство. Пусть $n_1(x)\le n_2(x)$ для всех $x<s$ и пусть $y>s$. Обозначим $x= n2(y)$, тогда

$x\le s$ и $n_2(y) = x = n_1(n_1(x)) \ge n_1(n_2(x))= n_1(n_2(n_2(y)))= n_1(y)$. Аналогично показывается, что из $n_1(x)\le n_2(x)$ для всех $x>s$ следует $n_1(y)\le n_2(y)$ для любого

$y < s$.
Указанное в предложении 2.11 свойство инволюций наглядно демонстрируется на приведенных выше графиках. В следующем разделе будет показано, что сжимающие и разжимающие отрицания обладают в определенном смысле противоположным свойством.

5.2.2. Сжимающие и разжимающие отрицания на [0,1]

Из определения сжимающих и разжимающих отрицаний следует, что *n* является сжимающим в $x \in [0,1]$ (сжимающим на [0,1]) тогда и только тогда, когда в $x \in [0,1]$ (на [0,1]) выполняется одно из условий:

$$x \le n(n(x)) \le n(x), \quad (25) \qquad n(x) \le n(n(x)) \le x. \quad (26)$$

Аналогично, *n* является разжимающим в $x \in [0,1]$ (разжимающим на [0,1]) тогда и только тогда, когда в $x \in [0,1]$ (на [0,1]) выполняется одно из условий:

$$n(n(x)) \le x \le n(x), \quad (27)$$
$$n(x) \le x \le n(n(x)). \quad (28)$$

Теорема 2.12. Биективное отрицание *n* является сжимающим в $x \in [0,1]$ (сжимающим на [0,1]) тогда и только тогда, когда n^{-1} является разжимающим в $x \in [0,1]$ (разжимающим на [0,1]).

Доказательство. Очевидно, что двукратное применение n^{-1} к элементам неравенств (25), (26) преобразует их в (27), (28) для отрицания $^{-1}$ и наоборот. Например, из (25), (26) получим:

$$n^{-1}(n^{-1}(x)) \le x \le n^{-1}(x),$$
$$n^{-1}(x) \le x \le n^{-1}(n^{-1}(x)).$$

Для биективных, а значит строго убывающих отрицаний на [0,1], следующее предложение устанавливает простой признак, характеризующий сжимающие и разжимающие отрицания.
Предложение 2.13. Биективное отрицание *n* является сжимающим тогда и только тогда, когда для всех $x \in [0,1]$

$$\text{из } x \le n(x) \text{ следует } x \le n(n(x)), \quad (29)$$

и является разжимающим тогда и только тогда, когда для всех $x \in [0,1]$

$$\text{из } x \le n(x) \text{ следует } n(n(x)) \le x. \quad (30)$$

Доказательство. Ясно, что если *n* - сжимающее, то на [0,1] выполняется (29). Пусть на [0,1] имеет место (29). Покажем, что *n* сжимающее. Если $x \le n(x)$, то применяя отрицание, получим $n(n(x)) \le n(x)$, и из (29) следует (25). Покажем, что для всех x таких, что $n(x) \le x$, выполняется (26). Предположим, что это не так, и для некоторого $x1 \in [0,1]$ имеет место $n(x1) \le x1$ и $x1 < n(n(x1))$. Обозначим $y = n(x1)$, тогда $y < n(y)$ и из (29) следует $n(x1) = y \le n(n(y)) = n(n(n(x1)))$. В то же время из $x1 < n(n(x1))$ и строгого убывания *n* следует $n(n(n(x1))) < n(x1)$. Полученное противоречие доказывает выполнение (26). Таким образом, *n* - сжимающее отрицание.
Аналогично доказывается предложение для разжимающих отрицаний.
Так как для инволютивных отрицаний выполняется $n(n(x)) = x$, а условия $x \le n(x)$ и $n(x) \le x$ эквивалентны для биективных отрицаний условиям $x \le s$ и $s \le x$, где *s* - фиксированная точка отрицания, то указанные выше свойства сжимающих и разжимающих отрицаний дают основание для следующей характеризации этих отрицаний.
Теорема 2.14. Биективное отрицание *n* с фиксированной точкой *s* является сжимающим тогда и только тогда, когда существует инволюция *щ* такая, что для всех $x \in [0,1]$ выполняется

$$\begin{aligned} &n(x) \le n_1(x), \text{ если } x < s, \\ &n_1(s) = n(s) = s, \\ &n_1(x) \le n(x), \text{ если } x > s, \end{aligned} \quad (31)$$

и отрицание *n* является разжимающим тогда и только тогда, когда существует инволюция *щ* такая, что для всех $x \in [0,1]$ выполняется

$$\begin{aligned} &n_1(x) \le n(x), \text{ если } x < s, \\ &n_1(s) = n(s) = s, \\ &n(x) \le n_1(x), \text{ если } x > s. \end{aligned} \quad \mathbf{(32)}$$

Доказательство. Пусть *щ* - инволюция с фиксированной точкой *s,* и выполняется (31). Покажем, что *n* - сжимающее. Пусть $x < s$, тогда $n(x) \le n1(x)$ и $n(x) > s$, что дает $n(n(x)) \ge n1(n(x)) \ge n1(n1(x)) = x$, и из предложения 2.13 следует, что *n* - сжимающее.
Пусть *n* - сжимающее отрицание. Рассмотрим функцию:

$$n_1(x) = \begin{cases} n(x), & \text{если } x \le s \\ n^{-1}(x), & \text{если } x > s \end{cases}.$$

Из предложения 2.9 следует, что эта функция является инволютивным отрицанием. Очевидно, что она удовлетворяет первым двум условиям из (31). Поскольку n - сжимающее, то для него выполняется (26) и из $n(n(x)) \le x$ для $x > s$ следует $n(x) \ge n^{-1}(x) = n1(x)$, т.е. выполняется третье условие из (31). Аналогично проводится доказательство для разжимающих отрицаний.

Теорема 2.14 дает способ построения сжимающих и разжимающих отрицаний на основе инволютивного отрицания и обобщает следующий способ построения сжимающих и разжимающих отрицаний из [54].

Предложение 2.15. Пусть g и h автоморфизмы интервала [0,1], и $s \in (0,1)$, тогда функция

$$n(x) = \begin{cases} 1-(1-s)g\left(\frac{x}{s}\right), & \text{если } x \le s \\ s - s\cdot h\left(\frac{x-s}{1-s}\right), & \text{если } s < x \end{cases} \qquad \textbf{(33)}$$

является сжимающим отрицанием, если $h(x) \le x \le g(x)$ на [0,1], и разжимающим отрицанием, если $g(x) \le x \le h(x)$ на [0,1].

Доказательство. Очевидно, что n(0) = 1, n(1) = 0, $n(s) = s$,иn-биективное отрицание. Если $h(x) \le x \le g(x)$ на [0,1], то в соответствии с теоремой 2.14 отрицание n - является сжимающим по отношению к инволютивному отрицанию

$$n_1(x) = \begin{cases} 1-(1-s)\frac{x}{s}, & \text{если } x \le s \\ s - s\cdot\frac{x-s}{1-s}, & \text{если } s < x \end{cases} = \begin{cases} 1-(1-s)\frac{x}{s}, & \text{если } x \le s \\ s\cdot\frac{1-s}{1-s}, & \text{если } s < x \end{cases}, \qquad \textbf{(34)}$$

получаемому из (23) приf(x) = x. Аналогично, если $g(x) \le x \le h(x)$ на [0,1], то в соответствии с теоремой 2.14 отрицание n - является разжимающим по отношению к инволютивному отрицанию $n1$.

Поскольку из $x \le g(x)$ на [0,1] следует $g^{-1}(x) \le x$ на [0,1], то в условиях

теоремы 2.15 вместо функции h может использоваться функция g^{-1} и наоборот. Если f - произвольный автоморфизм интервала [0,1], то в условиях теоремы 2.15 вместо функций g и h могут использоваться соответственно функции $f_{[-]}$ и $f_{[+]}$.

Простым признаком сжимаемых и разжимаемых отрицаний, который следует из предложения 2.15 является следующий: если отрицание вогнуто слева от точки его пересечения с прямой $y = x$ и выпукло справа от этой точки, то оно сжимающее, и наоборот, если выполняются противоположные свойства, то оно разжимающее.

Примеры сжимающих и разжимающих отрицаний, построенных по правилу (33) с генераторами $g(x) = x^{p}$, и $h(x) = x^{1/p}$ приведены на рис. 5. Там же приведены также графики кусочно-линейной инволюции (34), получаемой при значении параметраp = 1.

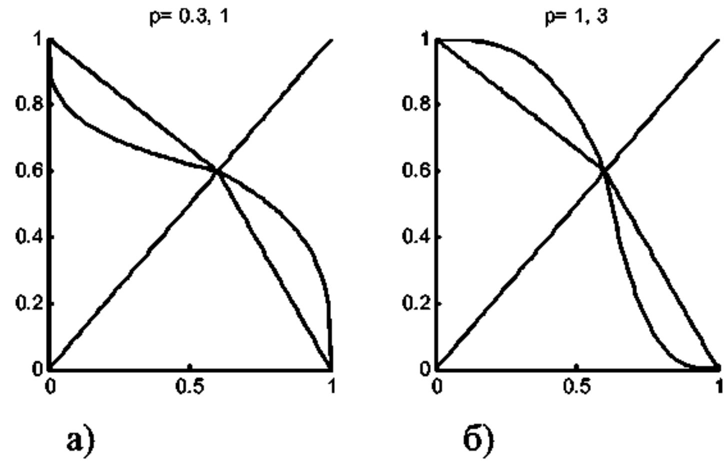


Рис. 5. Отрицания, построенные по правилу (33) с фиксированной точкой s = 0.6 и генераторами $g=x^p$ и $h=g^{-1}=x^{1/p}$: а) сжимающие сp= 0.3 и 1; б) разжимающие сp= 1 и 3.

Модификацией формулы (33) построения сжимающих и разжимающих отрицаний является следующая:

$$n(x)=\begin{cases}1-(1-s)g\left(\dfrac{x}{s}\right), & \text{если } x\le s\\ s\cdot g\left(\dfrac{1-x}{1-s}\right), & \text{если } s<x\end{cases}$$

определяющая сжимающее отрицание, если $g(x)\ge x$ для всех $x\in[0,1]$, и

разжимающее отрицание, если $g(x)\le x$ для всех $x\in[0,1]$.

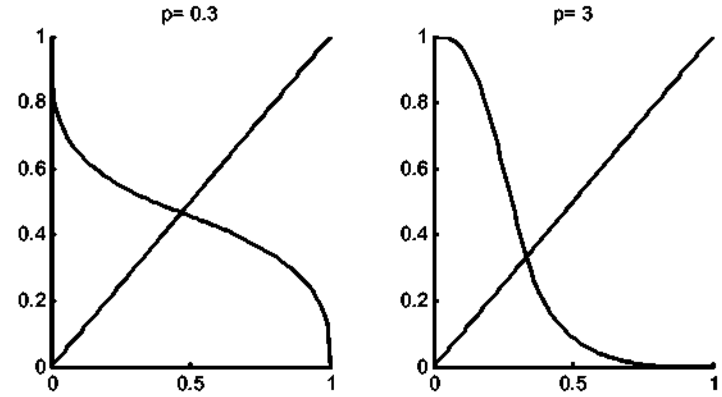
Следующие способы построения сжимающих отрицаний непосредственно основаны на теореме 2.14.

Предложение 2.16. Пусть щ - инволютивное отрицание с фиксированной точкой *s,* и *g* - автоморфизм интервала [0,1], тогда функция

$$n(x)=\begin{cases}n_1\left(s\cdot g\left(\dfrac{x}{s}\right)\right), & \text{если } x\le s\\ n_1\left(1-(1-s)g\left(\dfrac{1-x}{1-s}\right)\right), & \text{если } s<x\end{cases}\qquad(35)$$

является сжимающим отрицанием, если $g(x)\ge x$ на [0,1], и разжимающим отрицанием, если $g(x)\le x$ на [0,1]. Доказательство. Из построения следует, что *n* является биективным отрицанием с фиксированной точкой *s.* Из $g(x)\ge x$ следует $sg(x/s)\ge x$, и из убывания щ следует, что $n(x)\le n1(x)$, если $x\le s$. Аналогично, из $g(x)\ge x$ следует $(1-(1-s)g((1-x)/(1-s)))\le x$, и $n(x)\ge n1(x)$, если $s<x$, и из теоремы 2.14 следует, что $n(x)$ - сжимающее отрицание. Двойственно, $n(x)$ - разжимающе отрицание, если $g(x)\le x$ на [0,1].

Пример отрицаний, построенных по формуле (35) на основе отрицания Сугено с параметром *p* и автоморфизмом $g(x) = xp$ для значений параметрар: *а)p* = 0.3; *б)p=3,* приведен на рис. 6.



а) б)

Рис. 6. Сжимающие и разжимающие отрицания, построенные по формуле (35) на основе отрицания Сугено и автоморфизма *g(x)= xp* с параметрами: *а)p* = 0.3; *б)p=3.*

Другой способ построения сжимающих и разжимающих отрицаний дает формула

$$n(x)=\begin{cases}n_1\left(s\cdot g\left(\dfrac{x}{s}\right)\right), & \text{если } x\le s\\ n_1\left(s+(1-s)h\left(\dfrac{x-s}{1-s}\right)\right), & \text{если } s<x\end{cases}$$

где *g* и *h* - автоморфизмы интервала [0,1]. Это отрицание является сжимающим, если $h(x)\le x\le g(x)$ для всех $x\in[0,1]$. Отрицание является разжимающим, если *g(x)* и *h(x)* удовлетворяют противоположным неравенствам.

Если в предыдущих двух методах построения сжимающих и разжимающих отрицаний на основе теоремы 2.14 использовалась модификация аргумента инволютивного отрицания, то в следующих методах осуществляется модификация самих значений инволютивных отрицаний.

Предложение 2.17. Пусть *n(x)* - инволютивное отрицание с фиксированной точкой *s,* и *g, h* - автоморфизмы интервала [0,1], тогда функция

$$n(x) = \begin{cases} s + (1-s)g\left(\dfrac{n_1(x)-s}{1-s}\right), & \textit{если } x \le s \\ s \cdot h\left(\dfrac{n_1(x)}{s}\right), & \textit{если } s < x \end{cases}$$

является сжимающим отрицанием, если $g(x) \le x \le h(x)$ для всех $x \in [0,1]$, и n

является разжимающим отрицанием, если имеют место противоположные неравенства.

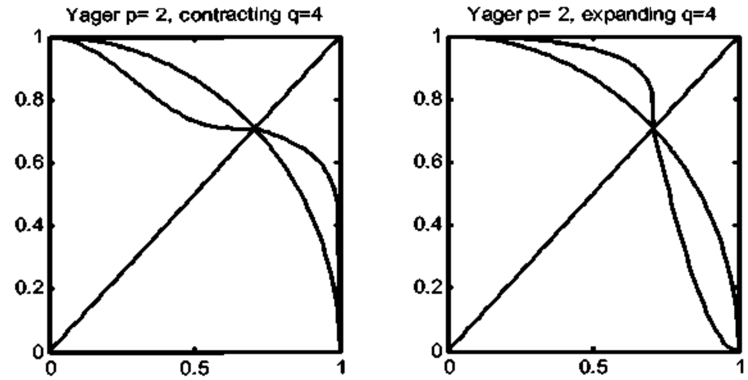
Доказательство. Из построения следует, что n(0) = 1, n(1) = 0, $n(s) = s$. Если $h(x) = x = g(x)$ для всех Х$\in$[0,1], то очевидно, что $n = n1$. При выполнении $g(x) \le x \le h(x)$ на [0,1] следует выполнение условий (31), т.е. n является сжимающим отрицанием, и при выполнении $h(x) \le x \le g(x)$ на [0,1] следует выполнение условий (32), т.е. n является разжимающим отрицанием.

Заметим, что в качестве автоморфизмов в последних формулах могут использоваться автоморфизмы f[-] иf[+], соответствующие автоморфизмуf порождающему инволютивное отрицание $n1$. Таким образом, предложенные методы позволяют генерировать сжимающие и разжимающие отрицания с помощью произвольного автоморфизма f интервала [0,1].

Приведем пример генерации сжимающих и разжимающих отрицаний на основе метода, рассмотренного в предложении 2.17. В качестве инволютивного отрицания возьмем отрицание Ягера с генератором f= xp и фиксированной точкой $s = (0.5)^{1/p}$. Положим где $g = e_{[-]}$, $h = e_{[+]}$, $e = x^q$. При $q \ge 1$ имеем, $g = x^q$, $h = x^{1/q}$. Тогда получим такое сжимающее отрицание:

$$n(x) = \begin{cases} s + (1-s)\left(\dfrac{\sqrt[p]{1-x^p} - s}{1-s}\right)^q, & \textit{если } x \le s \\ s \cdot \sqrt[q]{\left(\dfrac{\sqrt[p]{1-x^p}}{s}\right)}, & \textit{если } s < x \end{cases} .$$

На рис 7а) приведен график этого отрицания с параметром q = 4 вместе с графиком соответствующего отрицания Ягера с параметромр = 2. Если в формуле предложения 2.17 g и h поменять местами, то получим разжимающее отрицание, приведенное на рис. 7б). Заметим, что если в этом случае в качестве генератора e взять генератор f, используемый для построения отрицания Ягера, т.е. положить $q = p$, то справа от фиксированной точки формула разжимающего отрицания будет иметь более простой вид.



а) б)

Рис. 7. Сжимающее и разжимающее отрицания, построенные из отрицания Ягера с параметром p= 2: а) сжимающее; б) разжимающее.

Ясно, что на основе теоремы 2.14 могут быть предложены и другие методы генерации сжимающих и разжимающих отрицаний.

$$n^{-2j}(x) \le n^{-2k}(x) \le x \le n^{2k}(x) \le n^{2j}(x) \quad (36)$$

и

$$n^{2j+1}(x) \le n^{2k+1}(x) \le n(x) \le n^{-2k-1}(x) \le n^{-2j-1}(x) \quad (37)$$

или

$$n^{2j}(x) \le n^{2k}(x) \le x \le n^{-2k}(x) \le n^{-2j}(x) \quad (38)$$

и

$$n^{-2j-1}(x) \le n^{-2k-1}(x) \le n(x) \le n^{2k+1}(x) \le n^{2j+1}(x) \quad (39)$$

Доказательство. Так как n^{-1} является отрицанием, то для него выполняется

$$n^{-1}(y) \le n^{-1}(x), \text{ если } x \le y. \quad (40)$$

Обозначим $y = n(x)$. Тогда $n^{-2}(y) = x,\ n^{-4}(y) = n^{-2}(x)$. Если $x < n(x)$, то $n(y) < y$, и дважды применяя (40), получим, $n^{-4}(y) \le n^{-2}(y) \le y$, т.е. $n(x) < x < n(x)$. Многократно применяя отрицания к обеим частям неравенств, получим (36) и (37). Аналогично, если $n^2(x) \le x$, получим (38) и (39).

Предложение 2.24. Пусть n - биективное отрицание. Тогда для любого $x \in [0,1]$ последовательности

$$a_k = n^{2k}(x),\ b_k = n^{2k+1}(x),\ a_k^{-1} = n^{-2k}(x),$$
$$b_k^{-1} = n^{-2k-1}(x)$$

имеют пределами некоторые инволютивные элементы a, b, a^1 и b^{-1}, соответственно, такие, что $n(a)=b$ и $n^{-1}(a^{-1})=b^{-1}$.

Доказательство. Из предложения 2.23 следует, что последовательности $a_k = n^{2k}(x),\ b_k = n^{2k+1}(x)$ будут невозрастающими или неубывающими, и из их ограниченности следует существование

$$a = \lim_{k\to\infty} a_k \quad \text{и} \quad b = \lim_{k\to\infty} b_k.$$

Из биективности и, следовательно, непрерывности n получим

$$n(a) = n\left(\lim_{k\to\infty} a_k\right) = \lim_{k\to\infty} n(a_k) = \lim_{k\to\infty} n^{2k+1}(x) = b,$$

и аналогично $n(n(a) = n(b) = a$. Аналогичный результат имеет место и для n^{-1}.

Определение 2.25. Пусть n - некоторое биективное отрицание и $x \in [0,1]$.

Обозначим

$$a^L(x) = min(a^{-1},a),\ a^R(x) = max(a^{-1},a),\ b^L(x) = min(b^{-1},b),$$
$$b^R(x) = max(b^{-1},b),$$

где a^{-1}, a, b^{-1}, b определены выше.

Интервалы $A(x) = [a^L(x), a^R(x)]$ и $B(x) = [b^L(x), b^R(x)]$ будут называться интервалами, порождаемыми элементом х. Для неинволютивных элементов х $A°(x)$ и $B°(x)$ будут обозначать соответствующие открытые интервалы $(a^L(x),a^R(x))$ и $(b^L(x),bR(x))$. Для инволютивных элементов х обозначим $A°(x)=\{x\}$, $B°(x)=\{n(x)\}$.

Отметим следующие очевидные свойства этих интервалов.

Предложение 2.26. Для всех $x \in [0,1]$ выполняется:

1) $x \in A^o(x)$,
2) $B^o(x) = A^o(n(x))$,
3) $G(x) \cup G^{-1}(x) \subseteq A(x) \cup B(x)$.

Предложение 2.27. В $A(x)$ и $B(x)$ инволютивными элементами являются только концы этих интервалов.

Доказательство. Предположим, что y^$A\{x\}$ является инволютивным элементом отрицания n. Если $x \le y$, тогда, последовательно применяя отрицание, получим $n^2(x) \le n^2(y) = y$ и $n^{2k}(x) \le y$ для всех $к > 1$. Из инволютивности y по отрицанию n следует инволютивность y по отрицанию n^{-1}, откуда также получаем $n^{-2k}(x) \le y$ для всех $k \ge 1$. Из обоих полученных неравенств, непрерывности n и n^{-1} и из предложения 2.24 получаем $a^R(x) \le y$, что дает $a^R(x) = y$. Если $y \le x$, аналогично получаем $a^L(x) = y$. Инволютивность $a^R(x)$ и $a^L(x)$ следует из предложения 2.24. Из предложения 2.26 следует аналогичный результат и для $B(x)$.

Предложение 2.28. Для любых $x, y \in [0,1]$ следующие соотношения эквивалентны:

1) $A^o(x) = A^o(y)$,
2) $B^o(x) = B^o(y)$,
3) $x \in A^o(y)$,
4) $y \in A^o(x)$.

Доказательство. Из 1) следует $A\{x\} = A(y)$, и применяя отрицание n к $aL(x) = a^L(y)$, $a^R(x) = a^R(y)$, из предложения 2.24 получим $B(x) = B(y)$,

откуда следует 2). Обратно, из 2) следует 1). Из 1) и предложения 2.25 следует 3) и 4).
Покажем, что из 3) следует 1). Если *A°(y) ={y},* тогда 1) очевидно. Предположим, что *A°(y) ≠ {y},* т.е. *y* неинволютивно. Тогда из предложения 2.26 следует, что все элементы *A°(y)* и, следовательно, x неинволютивны. Из $x \in A°(y)$ и $x \in A°(x)$ следует, что интервалы *A(x)* и *A(y)* пересекаются, и это пересечение содержит только неинволютивные точки. Тогда из предложения 2.27 следует, что граничные точки обоих интервалов совпадают, что даетA°(x) = *A°(y).*
Аналогично, 1) следует из 4).

Предложение 2.29. Для каждого $x \in [0,1]$ биективное отрицание является сжимающим или разжимающим на *A°(x).*
Доказательство. Для инволютивного x заключение предложения очевидно. Пусть x - неинволютивно и выполнено, например,
(36)
и $a^L(x) = \lim\limits_{k\to\infty} n^{-2k}(x), \ a^R(x) = \lim\limits_{k\to\infty} n^{2k}(x).$ Для любого $y \in A^o(x)$
выполяется $a^L(x) < y < a^R(x),$ и из (36) следуют две возможности:

$$n^{2k}(x) \le y \le n^{2k+2}(x) \quad (41) \text{ или}$$

$$n^{-2k-2}(x) \le y \le n^{-2k}(x) \quad (42)$$

для некоторого $k \in \{0,1,2,...\}.$ Если выполняется (41), то, применяя

отрицание, получим $n^{2k+3}(x) \le n(y) \le n^{2k+1}(x),$ (43) что дает

$$n^{2k}(x) \le y \le n^{2k+2}(x) \le n^2(y) \le n^{2k+4}(y). \quad (44)$$

Если *n* - сжимающее в x, то из (44) следует (11) и из (43), (44) следует сжимаемость *nвx.* Если *n* - разжимающее в x, тогда из (42) следует (12) и из (43) следует, что *n* также разжимающее в *y*. Аналогично, если *y* удовлетворяет (42), получим, что n^{-1} одинаковое в x *и y* и из теоремы 2.12 следует, что *n* также одинаковое *в x иy.* Доказательство для случая

$a^L(x) = \lim\limits_{k\to\infty} n^{2k}(x)$ и $a^R(x) = \lim\limits_{k\to\infty} n^{-2k}(x)$ аналогично.
Полученные результаты доказывают теорему 2.18.

6 . Операции конъюнкции и дизъюнкции

6.1. Предварительные замечания

Операции конъюнкции $\wedge = min$ и $\vee = max,$ введенные Заде, обладают почти всеми свойствами соответствующих булевых операций. Это позволяет легко обобщать на нечеткий случай многие понятия «четкой» логики и, более обще, «четкой» математики. Однако с многих точек зрения эти операции являются ограничительными. Возможность рассмотрения более «мягких» операций конъюнкции и дизъюнкции обсуждал Заде еще в своих первых работах.
Целесообразность применения тех или иных операций конъюнкции и дизъюнкции в нечеткой логике может рассматриваться с разных позиций в зависимости от области приложений нечеткой логики.
Во-первых, эти операции могут рассматриваться с точки зрения моделирования лингвистических связок «и» и «или», используемых человеком. С одной стороны, операции *min* и *max* являются адекватными в порядковых шкалах, в которых обычно измеряются лингвистические оценки. Это обуславливает их широкое применение в нечетких лингвистических моделях. Однако недостатком этих операций является то, что их результат равен значению одного операнда и не меняется при изменении значений второго операнда в определенном диапазоне величин. Например, $0.2 \wedge y = 0.2$ для всех значений $y \ge 0.2$. Кроме этого, в ряде экспериментальных работ было установлено, что операции *min* и *max* не являются достаточно удовлетворительными с точки зрения моделирования лингвистических связок. Это привело к появлению работ по разработке строго монотонных операций в порядковых шкалах, по настраиваемым на эксперта табличным операциям, а также стимулировало исследования по поиску новых операций конъюнкции и дизъюнкции.
Во-вторых, расширение класса операций конъюнкции и дизъюнкции вызывалось необходимостью построения обладающих достаточной общностью математических моделей, которые могли бы с единых позиций рассматривать, например, вероятностные и многозначные логики, различные методы принятия решений, обработки данных и т.д. Такое расширение класса операций конъюнкции и дизъюнкции нечеткой логики произошло в результате введения в рассмотрение недистрибутивных операций конъюнкции и дизъюнкции, известных

под названием t-норм и *t*-конорм. Условие дистрибутивности совместно с условиями монотонности и граничными условиями однозначно определяет операции Заде. В ряде работ установлено, что именно условие дистрибутивности является наиболее жестким ограничением на возможную форму операций конъюнкции и дизъюнкции. Удаление этого свойства из множества аксиом устраняет единственность операций *min* и *max* и дает возможность построения широкого спектра нечетких связок. Свойство дистрибутивности очень важно в логике, так как оно дает возможность совершать эквивалентные преобразования логических форм из дизъюнктивной в конъюнктивную форму и обратно. Это свойство активно используется в процедурах минимизации логических функций, **в процедурах логического вывода на основе принципа резолюций** и т.д. Однако, во многих задачах такие преобразования логических форм не являются необходимыми, и поэтому оказалось, что свойство дистрибутивности может быть «довольно безболезненно» удалено из системы аксиом, определяющих нечеткие операции конъюнкции и дизъюнкции.

Понятия t-норм и t-конорм пришли в теорию нечетких множеств из теорий функциональных уравнений и вероятностных метрических пространств. Аксиомы этих операций дают возможность построения бесконечного числа логических связок. Основной аксиомой этих операций является ассоциативность, и свойства этих операций во многом определяются общими свойствами ассоциативных функций и операций, активно изучавшимися в математике.

В-третьих, рассмотрение логических операций конъюнкции и дизъюнкции как вещественных функций, являющихся компонентами нечетких моделей процессов и систем, естественно вызывает необходимость рассмотрения широкого класса таких функций, увеличивающих гибкость моделирования. По этим причинам, в ряде приложений нечеткой логики некоторые аксиомы t-норм и t-конорм также оказались ограничительными. В частности, параметрические классы этих операций имеют достаточно сложный вид для их аппаратной реализации и оптимизации нечетких моделей по параметрам этих операций. Сложность параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций определяется способом генерации этих операций, который фактически определяется условием ассоциативности этих операций. С этой точки зрения свойство ассоциативности может рассматриваться как ограничительное. В то же время свойство коммутативности операций конъюнкции и дизъюнкции может рассматриваться как необязательное ограничение на эти операции, так как в общем случае в нечетких моделях операнды этих

операций могут характеризовать переменные, по-разному влияющие на результат операции. Свойства ассоциативности и коммутативности являются важными, например, в нечетких моделях многокритериального принятия решений, поскольку одним из разумных требований, накладываемых на процедуры принятия решений, является их независимость от порядка рассмотрения альтернатив и критериев. Но для систем нечеткого вывода эти свойства не всегда являются необходимыми, особенно когда позиции переменных в нечетких правилах и процедуры обработки правил фиксированы, а также когда число входных переменных не превышает двух, что имеет место во многих реальных приложениях нечетких моделей. По этой причине из определения нечетких операций конъюнкции и дизъюнкции могут быть удалены свойства коммутативности и ассоциативности так же, как это было ранее сделано со свойством дистрибутивности.

Простейшие системы нечеткого логического вывода, имеющие широкие приложения, основаны на правилах вида:

R_i: Если X есть A_i и Y есть B_i, то Z есть C_i, R_i: Если X есть A_i и Y есть B_i, то $z=f_i(x,y)$.

Здесь *X, Y, Z* - нечеткие переменные типа *ТЕМПЕРАТУРА, ДАВЛЕНИЕ, ПЛОТНОСТЬ*, A_i, B_i, C_i означают нечеткие значения этих переменных, например, *ОЧЕНЬ ВЫСОКАЯ, НИЗКОЕ, БОЛЬШАЯ,* определенные как нечеткие подмножества соответствующих множеств численных значений переменных, и f_i - некоторые вещественные функции. **Нечеткие модели, основанные на правилах первого или второго типа, соответственно называются моделями Мамдани или Сугено.** Для заданных вещественных значений *x* и *y* сила срабатывания правила w_i вычисляется как $w_i = T_1(\mu_{Ai}(x), \mu_{Bi}(y))$, где T_1 - это некоторая операция конъюнкции, представляющая связку «и», и $\mu_{Ai}(x)$, $\mu_{Bi}(y)$ суть значения принадлежности *x* и *y* нечетким множествам A_i и B_i. Заключение правил может быть вычислено как $\mu_{Ci}(z) = T_2(w_i, \mu_{Ci}(z))$, и $z_i = T_2(w_i, f_i(x,y))$, где T_2 это операция конъюнкции, используемая в операции импликации, и, возможно, отличная от T_1. Для агрегирования заключений, полученных по всем правилам, может использоваться некоторая операция дизъюнкции или агрегирования. Кроме того, в моделях Мамдани используется процедура преобразования нечеткого множества, полученного в результате логического вывода, в число, называемая **процедурой дефаззификации**. **Построение оптимальных нечетких моделей традиционно основано как на <u>тьюнинге (настройке) функций</u> принадлежности нечетких множеств, используемых в**

правилах, так и на тьюнинге операций. Когда эти функции принадлежности и операции задаются параметрически, тогда этот тьюнинг может быть основан на оптимизации этих параметров.

Оптимизация моделей по параметрам операций может производиться вместо или дополнительно к оптимизации параметров нечетких множеств. Однако реализация этого подхода может оказаться достаточно трудоемкой ввиду сложного вида известных параметрических классов t-норм и *t*-конорм, используемых в качестве операций конъюнкции и дизъюнкции. Кроме этого, аппаратная реализация подобных операций также сложна. С этих точек зрения более простые параметрические классы операций конъюнкции и дизъюнкции имеют преимущества. Рассмотрение неассоциативных операций конъюнкции и дизъюнкции позволяет строить простые параметрические классы этих операций.

Легко увидеть, что ассоциативность операции конъюнкции не требуется, когда посылки правил содержат только по 2 переменные и используются разные операции конъюнкции T_1 и T_2. В общем случае, когда позиции переменных в посылках правил и процедура вычисления силы срабатывания правил фиксированы, ни условия ассоциативности, ни условия коммутативности операции конъюнкции не являются необходимыми. В этом случае конъюнкция нескольких аргументов может вычисляться последовательно в соответствии с заданным порядком переменных. Более того, некоммутативность и неассоциативность операций может быть желательна в ряде случаев. Например, если x и y означают «ошибка» и «изменение ошибки» соответственно, как это и бывает в системах нечеткого управления, тогда некоммутативность и неассоциативность конъюнкции может использоваться для учета различного влияния этих переменных на управляемый процесс. Таким образом, если коммутативность конъюнкции подразумевает равенство прав обоих операндов, то некоммутативность конъюнкции с фиксированным положением операндов дает возможность построения контекстно-зависимых операций. Мы можем предположить также, что параметрические операции T_1 и T_2. могут быть «зависимы от правил», что дает возможность отдельной настройки параметров этих операций для правил, относящихся к разным частям управляемого процесса, например, к точкам с максимальной или нулевой ошибкой и т.д.

В этой главе основное внимание уделяется неассоциативным операциям конъюнкции и их приложениям к задачам нечеткого моделирования. Понятия t-норм и t-конорм в настоящее время достаточно хорошо изучены, и в следующем разделе приводятся лишь основные сведения о них. В последующих разделах дается определение некоммутативных и неассоциативных операций конъюнкции и дизъюнкции и предлагаются различные способы генерации новых типов нечетких связок. Приводятся примеры параметрических операций конъюнкции, более простых, чем известные параметрические классы *t*-норм. В качестве примеров нечеткого моделирования рассматриваются задачи аппроксимации данных системами нечеткого вывода, основанные на оптимизации параметров неассоциативных операций конъюнкции.

6. 2. t-нормы и t-конормы

Определение 2.1. Триангулярная норма (t-норма) T и триангулярная конорма (t-конорма) S определяются как функции $T,S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ такие, что для всех $x,\ y,\ z\in[0,1]$ выполняются следующие аксиомы:

$T(x,y) = T(y,x)$,	$S(x,y) = S(y,x)$	(коммутативность),
$T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))$,	$S(S(x,y),z) = S(x,S(y,z))$	(ассоциативность).
$T(x,y) \le T(x,z)$ и	$S(x,y) \le S(x,z)$, если $y \le z$	(монотонность),
$T(x,1) = x$,	$S(x,0) = x$	(граничные условия).

Из определения 2.1 непосредственно следуют следующие граничные свойства этих операций:

$$T(0,x) = T(x,0) = 0, \qquad S(1,x) = S(x,1) = 1,$$

$$T(1,x) = x, \quad (1) \qquad S(0,x) = x \quad (2)$$

t-норма и t-конорма в определенном смысле являются двойственными понятиями. Эти функции могут быть получены друг из друга, например, с помощью инволютивного отрицания n и законов Де Моргана следующим образом:

$$S(x,y) = n(T(n(x),n(y))), \qquad T(x,y) = n(S(n(x),n(y))).$$

Простейшими примерами t-норм и t-конорм, взаимно связанных этими соотношениями для $n(x) = 1 - x$, являются следующие:

$T_M(x,y) = min\{x,y\}$ *(минимум),*
$S_M(x,y) = max\{x,y\}$ *(максимум),*

$T_P(x,y) = x \cdot y$ *(произведение),*
$S_P(x,y) = x + y - x \cdot y$ *(вероятностная сумма),*

$T_L(x,y) = max\{x+y-1, 0\}$ *(t-норма Лукасевича),*
$S_L(x,y) = min\{x+y, 1\}$ *(t-конорма Лукасевича, ограниченная сумма),*

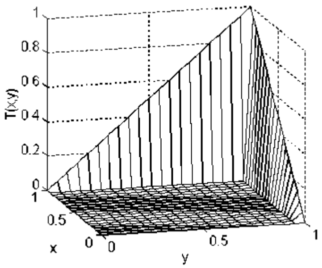
$$T_D(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x,y) \in [0,1) \times [0,1) \\ \min(x,y), & \text{в противном случае} \end{cases} \quad \text{(сильное произведение),}$$

$$S_D(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x,y) \in (0,1] \times (0,1] \\ \max(x,y), & \text{в противном случае} \end{cases} \quad \text{(сильная сумма).}$$

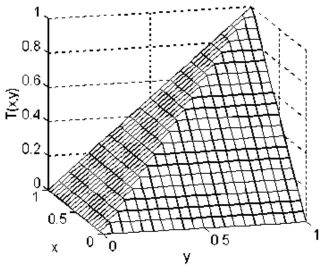
Эти простейшие функции будут в дальнейшем использованы для построения параметрических операций конъюнкции и дизъюнкции. Из приведенного определения для любых t-норм *T* и t-конорм *S* следует выполнение следующих неравенств:

$$T_D(x,y) \le T(x,y) \le T_M(x,y) \le S_M(x,y) \le S(x,y) \le S_D(x,y).$$

Таким образом, t-нормы T_D и T_M являются минимальной и максимальной границами для всех t-норм. Аналогично, t-конормы S_M и S_D являются минимальной и максимальной границами для всех t-конорм. Эти неравенства очень важны с практической точки зрения, так как они устанавливают границы возможного варьирования операций *T* и *S.* На рис. 10 и рис. 11 представлены графики соответствующих t-норм и t-конорм.

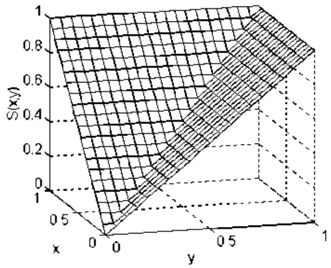


а)

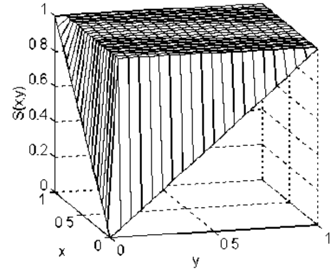


б)

Рис. 10. а) t-норма T_D, б) t-норма T_M. Для всех t-норм T выполняется: $T_D(x,y) \le T(x,y) \le TM(x,y)$



а)



б)

Рис. 11. а) t-конорма S_M, б) t-конорма S_D . Для всех t-конорм *S* выполняется: $SM(x,y) \le S(x,y) \le S_D(x,y)$

Определение 2.2. t-норма *T* и t-конорма *S* называются непрерывными, если эти функции являются непрерывными на их области определения, и они называются архимедовыми, если для всех $x \in (0,1)$ удовлетворяют, соответственно, следующим условиям:

$$T(x,x) < x, \qquad x < S(x,x).$$

Минимум и максимум являются непрерывными, но не архимедовыми, сильные произведение и сумма являются архимедовыми, но не непрерывными. Произведение, вероятностная сумма и операции Лукасевича являются непрерывными и архимедовыми.
t-нормы и t-конормы как функции, удовлетворяющие свойству ассоциативности, могут быть построены различным способом. Приведем без доказательств ряд теорем представления t-норм и t-конорм.
Теорема 2.3. t-норма T является непрерывной и архимедовой тогда и только тогда, когда существует строго убывающая и непрерывная функция $f:[0,1] \to [0,\infty]$, $f(1) = 0$, такая, что

$$T(x,y) = f^{(-1)}(f(x)+f(y)), \tag{3}$$

где $f^{(-1)}$ есть псевдообратная функция для *f*, определяемая как

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & \text{если } x \le f(0) \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Более того, представление (3) однозначно с точностью до положительной мультипликативной константы.
В условиях теоремы f называется аддитивным генератором t-нормы T, о которой, в свою очередь, говорят, что она генерируется с помощью f
Аддитивным генератором t-нормы Лукасевича является функция $f(x) = 1 - x$ с псевдообратной функцией
$f^{(-1)}(x) = max\{1 - x, 0\}$. Генератором произведения является функция $f(x) = -\log(x)$.
Теорема 2.4. t-конорма S является непрерывной и архимедовой тогда и только тогда, когда существует строго возрастающая и непрерывная функция $g: [0,1] \to [0,\infty]$, $g(0) = 0$, такая, что

$$S(x,y)= g^{(-1)}(g(x)+g(y)), \quad (4)$$

где $g^{(-1)}$ есть псевдообратная функция для g, определяемая как

$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} g^{-1}(x), & если\ x \le g(1) \\ 1, & в\ противном\ случае \end{cases}.$$

Более того, представление (4) однозначно с точностью до положительной мультипликативной константы.
В условиях теоремы g называется аддитивным генератором t-конормы S, о которой, в свою очередь, говорят, что она генерируется с помощью g. Аддитивным генератором t-конормы Лукасевича является функция $g(x)= x$ с псевдообратной функцией $g^{(-1)}(x) = min\{x,1\}$. Генератором вероятностной суммы является функция $f(x) = -\log(1 - x)$.
Определение 2.5. t-норма T имеет делители нуля, если существуют $x,y \in (0,1)$ такие, что $T(x,y) = 0$. T называется положительной, если из $x,y > 0$ следует $T(x,y) > 0$. t-конорма S называется нильпотентной, если существуют $x,y \in (0,1)$ такие, что $S(x,y) = 1$. T и S называются строгими, если они строго возрастающие по каждому аргументу на $(0,1)\times(0,1)$.
Очевидно, что минимум и произведение являются положительными t-нормами, в то время как сильное произведение и t-норма Лукасевича имеют делители нуля. Из этих t-норм единственной строгой t-нормой является произведение. Нетрудно увидеть, что непрерывная архимедова *t*-норма положительна тогда и только тогда, когда она строгая.
Аналогично, сильная сумма и t-конорма Лукасевича нильпотентны. Из рассмотренных выше примеров t-конорм только вероятностная сумма является строгой.

Предложение 2.6. Непрерывная архимедова t-норма T с аддитивным генератором f имеет делители нуля тогда и только тогда, когда
$f(0) < +\infty$, и T- строгая тогда и только тогда, когда
$f(0)=lim_{x\to 0}f(x)= +\infty$.
Предложение 2.7. Непрерывная архимедова t-конорма S с аддитивным генератором g является нильпотентной тогда и только тогда, когда $g(1) < +\infty$, и S - строгая тогда и только тогда, когда
$g(1)=lim_{x\to 1}g(x)= +\infty$.
Далее биективные отрицания будут называться также строгими отрицаниями.
Теорема 2.8. Непрерывная t-норма T удовлетворяет условию $T(x,n(x))= 0$ для всех $x\in[0,1]$, где n - строгое отрицание на [0,1], тогда и только тогда, когда существует автоморфизм φ интервала [0,1] такой, что

$$T(x,y)= \varphi^{-1}(max\{\varphi(x)+\varphi(y)-1, 0\}),$$

и

$$n(x) \le \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

Теорема 2.9. Непрерывная t-конорма S удовлетворяет условию $S(x,n(x))= 1$ для всех $x\in[0,1]$, где n - строгое отрицание, тогда и только тогда, когда существует автоморфизм φ интервала [0,1] такой, что

$$S(x,y)= \varphi^{-1}(min\{\varphi(x)+\varphi(y), 1\}),$$

и

$$n(x) \ge \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

Таким образом, все непрерывные t-нормы, для которых выполняется закон противоречия $T(x,n(x))= 0$, и все непрерывные t-конормы, для которых выполняется закон исключенного третьего $S(x,n(x))= 1$, изоморфны, соответственно, t-норме и t-конорме Лукасевича:

$$T(x,y)= \varphi^{-1}(T_L(\varphi (x), \varphi(y))),$$

$$S(x,y)= \varphi^{-1}(S_L(\varphi (x),\varphi(y))),$$

Заметим, что закону противоречия удовлетворяют t-норма Лукасевича и сильное произведение, а закону исключенного третьего удовлетворяют *t*-конорма Лукасевича и сильная сумма.
Теорема 2.10. Непрерывная t-норма T является строгой тогда и только тогда, когда существует автоморфизм φ интервала [0,1] такой, что

$$T(x,y)=\varphi^{-1}(\varphi(x)\cdot\varphi(y)). \quad (5)$$

t-норма T в (5) представлена в мультипликативной форме. Более обще, мультипликативным генератором t-нормы T называется строго возрастающая функция $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ такая, что φ -непрерывна справа в 0,

$$\varphi(1) = 1,\ \varphi(x)\cdot\varphi(y)\in Ran(\varphi)\cup[0,\varphi(0)],$$

где $Ran(\varphi)$ - область значений φ и выполняется

$$T(x,y)=\varphi^{(-1)}(\varphi(x)\cdot\varphi(y)).$$

Теорема 2.11. Непрерывная t-конорма S является строгой тогда и только тогда, когда существует автоморфизм φ интервала [0,1] такой, что

$$S(x,y)=\varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(y)-\varphi(x)\cdot\varphi(y)). \quad (6)$$

Соотношения (5) и (6) могут быть представлены в виде:

$$T(x,y)=\varphi^{-1}(T_P(\varphi(x),\varphi(y))),$$
$$S(x,y)=\varphi^{-1}(S_P(\varphi(x),\varphi(y))),$$

Таким образом, все непрерывные строгие t-нормы и t-конормы изоморфны, соответственно, произведению и вероятностной сумме.
Пусть T - t-норма, S - t-конорма, n_1 и n_2 - операции отрицания.
Рассмотрим законы Де Моргана:

$$n_1(S(x,y))=T(n_1(x),n_1(y)), \quad (7)$$
$$n_2(T(x,y))=S(n_2(x),n_2(y)). \quad (8)$$

Предложение 2.12. Пусть n - строгое отрицание.
а) Для любой t-нормы T существует t-конорма S, определяемая соотношением

$$S(x,y)=n^{-1}(T(n(x),n(y))),$$

удовлетворяющая (7) с $n_1 = n$. Если T - непрерывная t-норма, то

S -непрерывная t-конорма. Если T - архимедова с аддитивным генератором f, то S- архимедова с аддитивным генератором $g=f\circ n$ и $g(1)=f(0)$.
б) Для любой t-конормы S существует t-норма T, определяемая соотношением

$$T(x,y)=n^{-1}(S(n(x),n(y))),$$

удовлетворяющая (8) с $n_2 = n$. Если S - непрерывная t-конорма, то T -непрерывная t-норма. Если S - архимедова t-конорма с аддитивным генератором g, то T- архимедова t-норма с аддитивным генератором $f= g\circ n$ и $f(0) = g(1)$.
Определение 2.13. Триплетом Де Моргана называется тройка (T, S, n), где T - t-норма, S - t-конорма и n - строгое отрицание, такие, что для всех x∈[0,1] выполняется (7) с $n_1 = n$. Триплет Де Моргана называется непрерывным, если T и S- непрерывные функции.
Триплет Де Моргана (T, S, n) называется сильным или типа Лукасевича, если существует автоморфизм φ интервала [0,1] такой, что

$$T(x,y)=\varphi^{-1}(max\{\varphi(x)+\varphi(y)-1,\ 0\}),$$
$$S(x,y)=\varphi^{-1}(min\{\varphi(x)+\varphi(y),\ 1\}),$$
$$n(x) = \varphi^{-1}(1-\varphi(x)).$$

Триплет Де Моргана (T, S, n) называется строгим или типа произведения, если существует автоморфизм φ интервала [0,1] такой, что

$$T(x,y)=\varphi^{-1}(\varphi(x),\ \varphi(y)),$$
$$S(x,y)=\varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(y)-\varphi(x)\cdot\varphi(y)),$$
$$n(x) = \varphi^{-1}(1-\varphi(x)).$$

Предложение 2.14. Если φ - автоморфизм интервала [0,1], а T_1 и S_1 -t-норма и t-конорма соответственно, то следующие формулы

$$T(x,y) = \varphi^{-1}(T_1(\varphi(x),\varphi(y))),$$
$$S(x,y) = \varphi^{-1}(S_1(\varphi(x),\varphi(y))),$$

определяют t-норму T и t-конорму S, соответственно.

6. 3. Параметрические классы t-норм и t-конорм

Приведем примеры параметрических классов t-норм и t-норм.

t-нормы и t-конормы Домби $(\lambda \in [0, \infty])$:

$$T(x,y) = \frac{1}{1+\left(\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda}+\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}, \qquad \text{если } \lambda \in (0, \infty),$$

$T(x,y) = T_D(x,y)$, если $\lambda = 0$,

$T(x,y) = T_M(x,y)$, если $\lambda = \infty$.

$$S(x,y) = 1-\frac{1}{1+\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}+\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}, \qquad \text{если } \lambda \in (0, \infty),$$

$S(x,y) = S_D(x,y)$, если $\lambda = 0$,

$S(x,y) = S_M(x,y)$, если $\lambda = \infty$.

t-нормы Домби являются непрерывными, архимедовыми и строгими на $(0,\infty)$. Аддитивным и мультипликативным генераторами t-норм Домби на $(0,\infty)$ являются функции:

$$f(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda},$$

$$\varphi(x) = e^{-\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda}}.$$

t-нормы и t-конормы Франка $(\lambda \in [0, \infty])$:

$$T(x,y) = \log_{\lambda}\left(1+\frac{(\lambda^{x}-1)(\lambda^{y}-1)}{\lambda-1}\right), \qquad \text{если } \lambda \in (0,1) \cup (1,\infty),$$

$T(x,y) = T_M(x,y)$, если $\lambda = 0$,

$T(x,y) = T_P(x,y)$, если $\lambda = 1$,

$T(x,y) = T_L(x,y)$, если $\lambda = \infty$.

$$S(x,y) = 1-\log_{\lambda}\left(1+\frac{(\lambda^{1-x}-1)(\lambda^{1-y}-1)}{\lambda-1}\right), \qquad \text{если } \lambda \in (0,1) \cup (1,\infty),$$

$S(x,y) = S_M(x,y)$, если $\lambda = 0$,

$S(x,y) = S_P(x,y)$, если $\lambda = 1$,

$S(x,y) = S_L(x,y)$, если $\lambda = \infty$.

t-нормы Франка являются непрерывными, архимедовыми и строгими на $(0,\infty)$. Аддитивным и мультипликативным генераторами t-норм Франка являются функции:

$$f(x) = \begin{cases} -\log x, & \text{если } \lambda = 1 \\ 1-x, & \text{если } \lambda = \infty \\ \log\frac{\lambda-1}{\lambda^{x}-1}, & \text{если } \lambda \in (0,1) \cup (1,\infty) \end{cases},$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } \lambda = 1 \\ e^{x-1}, & \text{если } \lambda = \infty \\ \frac{\lambda^{x}-1}{\lambda-1}, & \text{если } \lambda \in (0,1) \cup (1,\infty) \end{cases}.$$

t-нормы и t-конормы Хамахера $(\lambda \in [0, \infty])$:

$$T(x,y) = \frac{xy}{\lambda + (1-\lambda)(x+y-xy)},\qquad \text{если } \lambda \in [0,\infty) \text{ и } (\lambda,x,y) \neq (0,0,0),$$
$$T(x,y) = T_D(x,y),\qquad \text{если } \lambda = \infty,$$
$$T(x,y) = 0,\qquad \text{если } \lambda = x = y = 0.$$

$$S(x,y) = \frac{x+y+(\lambda-2)xy}{1+(\lambda-1)xy},\qquad \text{если } \lambda \in (0,\infty) \text{ и } (\lambda,x,y) \neq (0,1,1),$$
$$S(x,y) = S_D(x,y),\qquad \text{если } \lambda = \infty,$$
$$S(x,y) = 1,\qquad \text{если } \lambda = 0 \text{ и } x = y = 1.$$

t-нормы Хамахера являются непрерывными, архимедовыми и строгими на [0,∞). Аддитивным и мультипликативным генераторами *t*-норм Хамахера являются функции:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{x}, & \text{если } \lambda = 0 \\ \log\left(\dfrac{\lambda + (1-\lambda)x}{x}\right), & \text{если } \lambda \in (0,\infty) \end{cases},$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x}}, & \text{если } \lambda = 0 \\ \dfrac{x}{\lambda + (1-\lambda)x}, & \text{если } \lambda \in (0,\infty) \end{cases}.$$

t-нормы и t-конормы Швайцера-Скляра ($\lambda \in [-\infty, \infty]$):

$$T(x,y) = \left(\max((x^{\lambda} + y^{\lambda} - 1), 0)\right)^{\frac{1}{\lambda}},\qquad \text{если } \lambda \in (-\infty,0) \cup (0,\infty),$$
$$T(x,y) = T_M(x,y),\qquad \text{если } \lambda = -\infty,$$
$$T(x,y) = T_P(x,y),\qquad \text{если } \lambda = 0,$$
$$T(x,y) = T_D(x,y),\qquad \text{если } \lambda = \infty.$$

$$S(x,y) = 1 - \left(\max(((1-x)^{\lambda} + (1-y)^{\lambda} - 1), 0)\right)^{\frac{1}{\lambda}},\qquad \text{если } \lambda \in (-\infty,0) \cup (0,\infty),$$
$$S(x,y) = S_M(x,y),\qquad \text{если } \lambda = -\infty,$$
$$S(x,y) = S_P(x,y),\qquad \text{если } \lambda = 0,$$
$$S(x,y) = S_D(x,y),\qquad \text{если } \lambda = \infty.$$

t-нормы Швайцера-Скляра являются непрерывными и архимедовыми на (-∞,∞), строгими на (-∞,0], нильпотентными на (0,∞). Аддитивным и мультипликативным генераторами *t-норм* Швайцера-Скляра являются функции:

6.4. Обобщенные операции конъюнкции и дизъюнкции

В разделе 6.1 ставилась задача построения простых параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций, пригодных для оптимизации нечетких моделей по параметрам этих операций. Как это видно из предыдущего раздела, параметрические классы t-норм и t-конорм достаточно сложны для их использования в задачах оптимизации нечетких моделей. **В этом и последующих разделах нас будут интересовать методы построения простых параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций, варьирующих в определенном диапазоне и удобных для их использования в задачах оптимизации нечетких моделей.** Все методы генерации t-норм и t-конорм, рассмотренные в разделе 6.2, основаны на использовании (псевдо-) обратных функций от генераторов. Это и является причиной сложного вида генерируемых операций. В то же время, как это следует из **теории ассоциативных функций**, рассмотренные выше методы представления *t*-норм и t-конорм, как **функций, генерируемых аддитивными или мультипликативными генераторами, являются общим свойством ассоциативных функций. Следовательно, для получения простых параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций необходимо рассматривать неассоциативные операции**.

Определение 4.1. Операциями конъюнкции T и дизъюнкции S называются функции T,S:[0,1]×[0,1]→[0,1] такие, что для всех $x,y\in[0,1]$ выполняются следующие свойства:

$$T(x,1) = T(1,x) = x, \qquad S(x,0) = S(0,x) = x, \tag{9}$$

$$T(x,y) \le T(u,v) \text{ и } S(x,y) \le S(u,v), \text{ если } x \le u,\ y \le v. \tag{10}$$

Ясно, что любые t-норма и t-конорма соответственно являются конъюнкцией и дизъюнкцией. Очевидны следующие свойства введенных операций.

$$T(0,x) = T(x,0) = 0, \qquad S(1,x) = S(x,1) = 1, \tag{11}$$

$$T_D(x,y) \le T(x,y) \le T_M(x,y) \le S_M(x,y) \le S(x,y) \le S_D(x,y). \tag{12}$$

Аналог предложения 2.12 также имеет место для определенных выше конъюнкций и дизъюнкций, а именно, если n - строгое отрицание, *а* T, S -конъюнкция и дизъюнкция, то с их помощью можно определить соответственно дизъюнкцию S_T и конъюнкцию T_S:

$$S_T(x,y) = n^{-1}(T(n(x), n(y))), \tag{13}$$

$$T_S(x,y) = n^{-1}(S(n(x), n(y))). \tag{14}$$

Если n инволютивное отрицание, то для любой конъюнкции T и дизъюнкции $S = S_T$, (для любой S и $T=T_S$) выполняются законы Де Моргана:

$$n(S(x,y)) = T(n(x), n(y)), \qquad n(T(x,y)) = S(n(x), n(y)).$$

Ниже вводятся две функции, которые будут использоваться для генерации конъюнкции и дизъюнкции.

Определение 4.2. Функции t,s:[0,1]×[0,1]→[0,1] такие, что для всех $x,y\in[0,1]$ выполняются следующие свойства:

$$t(0,x) = t(x,0) = 0, \qquad s(1,x) = s(x,1) = 1, \tag{15}$$

$$t(x,y) \le t(u,v) \text{ и } s(x,y) \le s(u,v), \text{ если } x \le u,\ y \le v, \tag{16}$$

соответственно будут называться псевдоконъюнкцией и псевдодизъюнкцией.

Очевидно, что любая конъюнкция (дизъюнкция) будет псевдоконъюнкцией (псевдодизъюнкцией).

Теорема 4.3. Пусть T_1, T_2 - конъюнкции, t - псевдоконъюнкция, S_1 и S_2- дизъюнкции и s - псевдодизъюнкция, тогда следующие функции

$$T_3(x,y) = T_2(T_1(x,y),s(x,y)), \qquad T_4(x,y) = T_2(s(x,y),T_1(x,y)), \tag{17}$$

$$S_3(x,y) = S_2(S_1(x,y), t(x,y)), \qquad S_4(x,y) = S_2(t(x,y), S_1(x,y)), \tag{18}$$

соответственно будут конъюнкцией и дизъюнкцией.

Доказательство: $T_3(x,1) = T_2(T_1(x,1),s(x,1)) = T_2(x,1) = x;\ T_3(1,y) = T_2(T_1(1,y),s(1,y)) = T_2(y,1) = y.$ Монотонность T_3 следует из монотонности T_1, T_2 и s. Аналогично показывается, что T_4 - конъюнкция, а S_3, S_4 -дизъюнкции.

В общем случае, ввиду некоммутативности (псевдо-) конъюнкций и (псевдо-) дизъюнкций, левые и правые формулы в (17), (18) определяют разные функции. Однако ясно, что свойства «левосторонних» и «правосторонних» функций (17), (18) аналогичны, поэтому в дальнейшем будет рассматриваться только один из вариантов возможных функций.

Конъюнкции (17) обладают следующими свойствами.

Предложение 4.4.

$T(T_D, s) = T_D$ для любых конъюнкций T и псевдодизъюнкций s;

$T_D(T, s) = T_D$ для любых конъюнкций T и псевдодизъюнкций s таких, что $s(x,y) < 1$, если $x,y < 1$;

$T_M(T, S) = T$ для любых конъюнкций T и дизъюнкций S;

$T(T_M, S_M) = T$ для любых коммутативных конъюнкций T;

$T_L(T, S) = T_L$ для всех пар (T,S) операторов (T_M, S_M), (T_P,S_P), и (T_L, SL).

Доказательство: Из (15) и теоремы 4.3 следует, что достаточно рассмотреть случаи, когда $x,y < 1$.

$$T(T_D(x,y),s(x,y)) = T(0,s(x,y)) = 0 = T_D(x,y).$$

$T_D(T(x,y),s(x,y)) = 0 = T_D(x,y),$ так как $T(x,y) \le min(x,y) < 1$ и $s(x,y) < 1$ для $x,y<1$.

Из (12) имеем

$$T_M(T(x,y), S(x,y)) = min(T(x,y),S(x,y)) = T(x,y).$$

Изкоммутативности T следует $T(T_M(x,y),S_M(x,y)) = T(min(x,y),max(x,y)) = T(x,y).$

Покажем, что

$$T_L(T(x,y),S(x,y)) = max(0,T(x,y) + S(x,y) - 1) = T_L(x,y).$$

Достаточно показать, что $T(x,y) + S(x,y) = x + y$ для всех рассматриваемых пар операторов T, S.

$T_M(x,y) + S_M(x,y) = min(x,y) + max(x,y) = x + y$. $T_P(x,y) + S_P(x,y) = xy + x + y - xy = x + y$. $T_L(x,y) + S_L(x,y) = max(0, x + y - 1) + min(1, x+ y) = x+y$ для обоих возможностей $x + y<1$ и $x + y\geq 1$.

Аналогично доказываются следующие свойства дизъюнкций (18).

Предложение 4.5.

$S(t,S_D) = S_D$ для всех псевдоконъюнкций t и дизъюнкций S; $S_D(t,S) = S_D$ для всех дизъюнкций S и всех псевдоконъюнкций t таких, что $t(x,y) > 0$, если $x,y > 0$;

$S_M(T,S) = S$ для всех конъюнкций Т и дизъюнкций S; $S(T_M,S_M)= S$ для всех коммутативных дизъюнкций S; $S_L(T,S) = S_L$ для всех пар (T,S) операторов (T_M, S_M), (TP, S_P) и (T_L, S_L).

Как это следует из теоремы 4.3, операции конъюнкции и дизъюнкции могут строиться из хорошо известных t-норм и t-конорм используемых как (псевдо-) конъюнкции и (псевдо-) дизъюнкции. Но для получения новых операторов необходимо учитывать предложения 4.4 и 4.5. Например, из T_M, T_P, S_M, S_P могут быть получены следующие коммутативные операции конъюнкции и дизъюнкции, связанные друг с другом законами Де Моргана с отрицанием Заде:

$$T(x,y) = (x+y - xy)min(x,y), \qquad S(x,y) = max(x,y)+xy - max(x,y)xy,$$
$$T(x,y) = max(x,y)xy, \qquad S(x,y)= min(x,y)+x+y - xy - min(x,y)(x+y - xy),$$
$$T(x,y) = xy(x+y - xy), \qquad S(x,y) = x+y - xy(x+y - xy).$$

Для получения более интересных параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций можно использовать в (17) и (18) псевдоконъюнкции и псевдодизъюнкции, отличные от t-норм и t-конорм.

Предложение 4.6. Если n отрицание на [0,1], а t, s - некоторые псевдоконъюнкция и псевдодизъюнкция, тогда следующие соотношения определяют, соответственно, псевдодизъюнкцию и псевдоконъюнкцию:

$$s_t(x,y) = n(t(n(x), n(y))), \qquad t_s(x,y) = n(s(n(x), n(y))).$$

Доказательство:

$$s_t(x,1) = n(t(n(x),n(1))) = n(t(n(x),0)) = n(0) = 1.$$

Аналогично получим $s_t(1,x) =1$. Так как t монотонно возрастает по обоим аргументам, и n монотонно убывающая функция, мы получаем свойство монотонности для s_t. Доказательство для t_s аналогично. Заметим, что если в (11) отрицание n инволюция, то псевдосвязки t и $s= s_t$, s и $t = t_s$ будут взаимно связаны законом Де Моргана. Мы будем рассматривать следующие пары псевдосвязок, взаимно связанных отрицанием $n(x) = 1-x$:

$$t_B(x,y) = 0 \quad \text{для всех } x,y \in[0,1], \qquad s_B(x,y) = 1 \text{ для всех } x,y \in[0,1].$$

$$t_D(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x,y)\in(0,1]\times(0,1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases},$$

$$s_D(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x,y)\in[0,1)\times[0,1) \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

$$t_x(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y=0 \\ x, & \text{если} \quad y\neq 0 \end{cases}, \qquad s_x(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y=1 \\ y, & \text{если} \quad y\neq 1 \end{cases}.$$

$$t_y(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x=0 \\ y, & \text{если} \quad x\neq 0 \end{cases}, \qquad s_y(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x=1 \\ y, & \text{если} \quad x\neq 1 \end{cases}.$$

Пусть t - псевдоконъюнкция, а s - псевдодизъюнкция. Легко показать, что для всех $x,y\in[0,1]$ выполняется:

$$t_B(x,y) \leq t(x,y) \leq t_D(x,y), \qquad s_D(x,y) \leq s(x,y) \leq s_B(x,y).$$

Любая псевдоконъюнкция t отличается от любой псевдодизъюнкции s по крайней мере в двух точках (0,1) и (1,0), так как:

$$t(0,1) = t(1,0) = 0, \qquad s(0,1) = s(1,0) = 1.$$

Предложение 4.7. Пусть s - некоторая параметрическая псевдодизъюнкция, варьирующая от s_D до s_B, и T_1 - произвольная конъюнкция, тогда с помощью любой конъюнкции T_2, применяя (17), можно построить конъюнкции, варьирующие от T_D до T_1.

Доказательство: Из (17) имеем: $T_2(T_1(x,y),s_B(x,y)) = T_2(T1(x,y),1) = T_1(x,y)$. Обозначим $T(x,y) = T_2(T_1(x,y),s_D(x,y))$. Если $x = 1$, тогда $T(1,y) = T_2(T_1(1,y),s_D(1,y)) = T_2(y,1) =y$. Если $y = 1$, то аналогично получим $T(x,1) =x$. Если $x \neq 1$ и $y \neq 1$,то

$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y),s_D(x,y)) = T_2(T_1(x,y),0) = 0.$$

Следовательно, $T = T_D$. Таким образом, из $s = s_B$ и $s = s_D$ с помощью

(17) получим T_1 и T_D, соответственно. Предположим, варьируя параметр в s, можно построить псевдодизъюнкции s_a и s_b такие, что $s_a \le s_b$. Обозначим конъюнкции, полученные по (17) на основе s_a и s_b, как T_a и T_b, соответственно. Тогда имеем $s_D \le s_a \le s_b \le s_B$, и из монотонности всех функций в (17) следует $T_D \le T_a \le T_b \le T_1$

Как следует из предложения, если построить параметрический класс псевдодизъюнкций s, варьирующих от s_D до s_B, то, применяя s и $T_1 = T_M$ в (17), можно варьировать конъюнкции во всем диапозоне от T_D до T_M. Конечно, типы конъюнкций, генерируемых между T_D и T_M, будут зависеть от формы s и T_2.

Двойственно можно сформулировать следующее предложение.

Предложение 4.8. Пусть t - параметрическая псевдоконъюнкция, варьирующая от t_B до t_D, и ^ произвольная дизъюнкция, тогда с помощью любой дизъюнкции S_2, применяя (18), можно построить дизъюнкции, варьирующие от S_1 до S_D.

Из этих предложений следует, что для генерации параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций достаточно генерировать подходящий класс псевдоопераций. Этот вопрос рассматривается в следующем разделе.

Предложение 4.9. Пусть t_1 и t_2 - псевдоконъюнкции, s_1 и s_2 - псевдодизъюнкции, f_1, f_2, g_1, g_2, h:[0,1] →[0,1] суть неубывающие функции такие, что $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $g_1(1) = g_2(1) = 1$, тогда следующие функции

$$t_3(x,y) = t_1(f_1(x), f_2(y)), \qquad s_3(x,y) = s_1(g_1(x), g_2(y)), \tag{19}$$

$$t_4(x,y) = f_1(t_1(x,y)), \qquad s_4(x,y) = g_1(s_1(x,y)), \tag{20}$$

$$t_5(x,y) = t_2(t_1(x,y), h(y)), \qquad s_5(x,y) = s_2(s_1(x,y), h(y)), \tag{21}$$

$$t_6(x,y) = t_2(h(x), t_1(x,y)), \qquad s_6(x,y) = s_2(h(x), s_1(x,y)), \tag{22}$$

будут псевдоконъюнкциями и псевдодизъюнкциями соответственно.

Доказательство: Из $f_1(0) = f_2(0) = 0$, и из выполнения (15) для t_1 и t_2 получим выполнение (15) для функций t в (19) - (20). Монотонность функций t следует из монотонности t_1, t_2 , f_1, f_2 и h. Доказательство для псевдодизъюнкций аналогично.

Заметим, что из-за возможной некоммутативности функций f_1,f_2, g_1, g_2 функции (21) и (22) могут быть различными.

Многократное рекурсивное применение (19) - (22) дает возможность строить различные псевдоконъюнкции и псевдодизъюнкции и затем с

помощью теоремы 4.3 и предложения 4.6 - различные конъюнкции и дизъюнкции.

Функции f и g, определенные в предложении 4.9, будут называться f и g-генераторами, соответственно. Легко увидеть, что посредством любого отрицания n можно получить из f-генератора некоторый g-генератор и, наоборот:

$$g(x) = n(f(n(x))), \qquad f(x) = n(g(n(x))).$$

Например, применяя (17) и (19), можно получить конъюнкцию:

$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y), s(g_1(x,p_1), g_2(y,p_2))),$$

где T_2,T_1- некоторые конъюнкции, s - псевдодизъюнкция и $g_1(x,p_1)$, $g_2(y,p_2)$ - некоторые генераторы, зависящие от параметров p_1 ,p_2. Для получения более или менее простых параметрических классов конъюнкций мы можем выбрать T_2, T_1 среди t-норм T_M, T_P ,T_D, T_L, выбрать s среди t-конорм S_M, S_P, S_D, S_L и использовать простые функции g_1 и g_2.

Далее в основном рассматриваются операции конъюнкции. Соответствующие операции дизъюнкции могут быть получены двойственно или из операции конъюнкции с помощью операции отрицания.

Рассмотрим следующие генераторы:

$$f_B(x) = 0 \quad \text{для всех } x \in [0,1], \qquad g_B(x) = 1 \quad \text{для всех } x \in [0,1].$$

$$f_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = 0 \\ 1, & \text{если} \quad x \ne 0 \end{cases}, \qquad g_D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 1 \\ 0, & \text{если} \quad x \ne 1 \end{cases}.$$

Очевидно, что для любых f- и g-генераторов выполняется:

$$f_B(x) \le f(x) \le f_D(x), \qquad g_D(x) \le g(x) \le g_B(x).$$

Принимая во внимание, что следующие функции

$$f_x(x) = x, \qquad g_x(x) = x,$$

также являются генераторами, в (19) - (22) можно заменить генераторы и функции h их аргументами.

Легко видеть, что подставляя $t_1 = T$ и $s_1 = S$ в (19), получим для произвольной конъюнкции T, дизъюнкции S и для любых генераторов f и g следующие соотношения:

$T(f_B(x), f(y)) = T(f(x), f_B(y)) = t_B(x,y)$, $\quad S(g_B(x), g(y)) = S(g(x), g_B(y)) = s_B(x,y)$,
$T(f_D(x), f_D(y)) = t_D(x,y)$, $\quad S(g_D(x), g_D(y)) = s_D(x,y)$,
$T(f_D(x), y) = t_y(x,y)$, $\quad S(g_D(x), y) = s_y(x,y)$,
$T(x, f_D(y)) = t_x(x,y)$, $\quad S(x, g_D(y)) = s_x(x,y)$.

Принимая эти соотношения во внимание, из предложения 4.7 получим следующий способ построения конъюнкций.
Теорема 4.10. Пусть T_1 и T_2 - конъюнкции, S - дизъюнкция, g_1 и g_2 - параметрические классы g-генераторов такие, что один из них варьирует от g_D до g_B, а другой от g_D до некоторого g*, тогда с помощью соотношения

$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y), S(g_1(x), g_2(y))) \qquad (23)$$

мы сможем сгенерировать конъюнкции, варьирующие от T_D до T_1.

6.5. Примеры параметрических классов обобщенных конъюнкций

Пример 5.1. Рассмотрим следующие параметрические классы генераторов, зависящих от порога $p \in [0,1]$:

$$f(x,p) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le p \\ 1, & \text{если} \quad p < x \end{cases}, \qquad g(x,p) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < p \\ 1, & \text{если} \quad p \le x \end{cases},$$

со следующими свойствами:

$$f_B(x) = f(x,1) \le f(x,p) \le f(x,0) = f_D(x),$$
$$g_D(x) = g(x,1) \le g(x,p) \le g(x,0) = g_B(x).$$

Для любого T и S выполняется:

$$T(f(x,p), f(y,q)) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le p \text{ или } y \le q \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases},$$

$$S(g(x,p), g(y,q)) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p \le x \text{ или } q \le y \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Применяя в (23) $T_1 = T_M$ и генераторы $g(x,p)$ и $g(y,q)$, для произвольных T_2 и S получим следующую операцию конъюнкции:

$$T(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & \text{если} \quad p \le x \text{ или } q \le y \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases},$$

и, в частности, $T = T_D$ при $p = 1$, $q = 1$, и $T = T_M$ при $p = 0$ или $q = 0$. График этой конъюнкции дляр = 0.4, q = 0.8 показан на рис. 12.

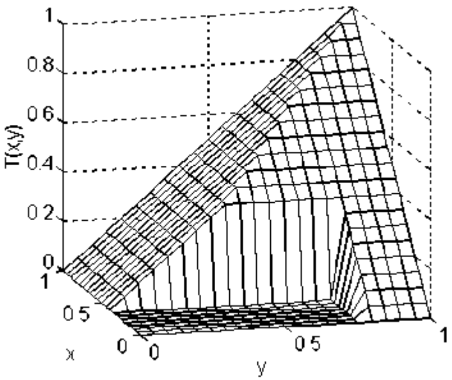


Рис. 12. Конъюнкция для p = 0.4, q = 0.8 из примера 5.1

Пример 5.2. Рассмотрим параметрические классы линейных генераторов $(p \ge 0)$:

$$f(x,p) = \min(px, 1), \qquad g(x,p) = \max(1-p(1-x), 0),$$

Для этих генераторов выполняется:

$$f_B(x) = f(x,0) \le f(x,p) \le f(x,\infty) = f_D(x),$$
$$g_D(x) = g(x,\infty) \le g(x,p) \le g(x,0) = g_B(x),$$

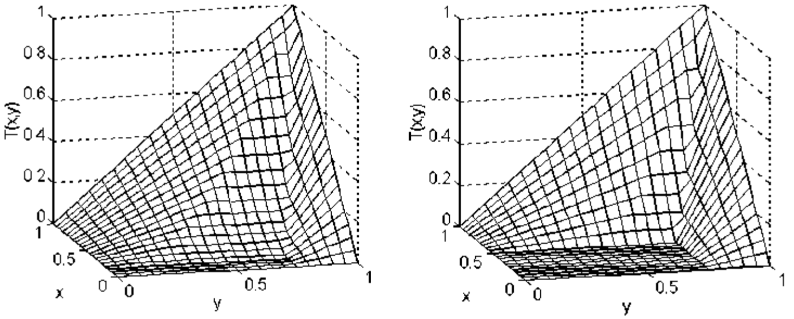
где

$$f(x,\infty) = \lim_{p\to\infty} f(x,p), \text{ и } g(x,\infty) = \lim_{p\to\infty} g(x,p).$$

Применяя в (23) $T_1 = T_M$, $T_2 = T_P$ и $S = S_M$, получим конъюнкцию:

$$T(x,y) = \min(x,y)\cdot\max\{1 - p(1 - x), 1 - q(1 - y), 0\},$$

причем, $T = T_M$ при $p = 0$, и T $T \to T_D$ когда p, $q \to \infty$. Графики этой конъюнкции дляр = 1.2, q= 4 и для $p = 2$ и q = 4 показаны на рис. 13.



а) б)

Рис. 13. Конъюнкция из примера 5.2: а) для p = 1.2, q = 4; б) для p = 2, q = 4

Пример 5.3. Рассмотрим параметрические классы степенных генераторов $(p \geq 0)$:

$$f(x,p) = x^p, \qquad g(x,p) = x^p,$$

где предполагается, что 0p = 0 для всех p > $0, f(0,0) = 0, f(1,\infty) = 0$, но $g(0,0)=1, g(1,\infty) = 1$. Тогда имеем

$$f_B(x) = f(x,\infty) \leq f(x,p) \leq f(x,0) = f_D(x),$$
$$g_D(x) = g(x,\infty) \leq g(x,p) \leq g(x,0) = g_B(x).$$

С помощью этих генераторов можно получить много конъюнкций с интересными свойствами. Например, из теоремы 4.10 следует, что применяя эти генераторы в (23) с $T_1 = T_M$ мы получим параметрические классы конъюнкций, варьирующих от T_M (при $p,q \to 0$) до T_D (когда $p,q \to \infty$). Рассмотрим примеры конъюнкций, основанных на степенных генераторах.

Пример 5.3.1. Для $T_2 = T_M$ и $S = S_M$ получим следующую конъюнкцию:

$$T(x,y) = \min\{\min(x,y), \max(x^p, y^q)\}.$$

Прир, $q \leq 1$ имеем $T = T_M$. График этой конъюнкции дляр = 2 и q = 4 приведен на рис. 14.

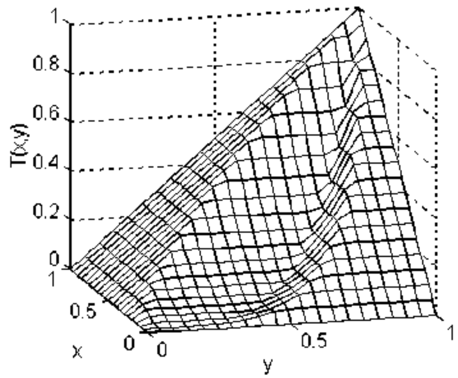


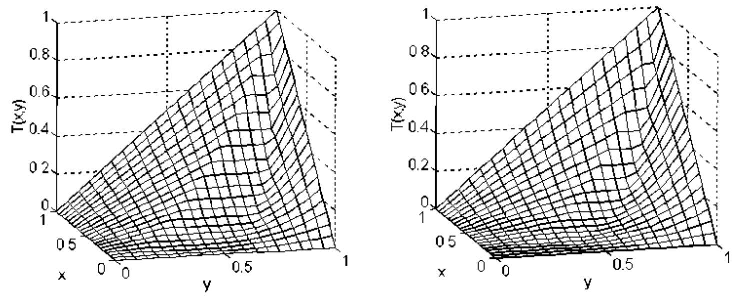
Рис. 14. Конъюнкция для p = 2, q = 4 из примера 5.3.1 При p = q эта конъюнкция имеет следующий вид:

$$T(x,y) = \begin{cases} \min(x^p, y), & \text{если} \quad y < x \\ \min(x, y^p), & \text{если} \quad x \leq y \end{cases}.$$

Пример 5.3.2: Для $T_2 = T_P$ и $S = S_M$ получим другую конъюнкцию:

$$T(x,y) = \min(x,y) \cdot \max(x^p, y^q).$$

Графики этой конъюнкции для p = 1.2, q = 4 и для p = 2, q = 4 показаны на рис. 15.



а) б)

Рис. 15. Конъюнкция из примера 5.3.2: а) для p = 1.2, q = 4; б) для p = 2, q = 4

При р = q эта конъюнкция имеет следующий вид:

$$T(x,y) = \begin{cases} yx^p, & \text{если } y < x \\ xy^p, & \text{если } x \le y \end{cases}.$$

Прир = q = 1 получим $T = T_P$.

Пример 5.3.3: Для $T_2 = T_P$ и $S = S_P$ получим новую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min(x,y) \cdot (x^p + y^q - x^p y^q).$$

График этой конъюнкции дляр =1.2, q = 4 приведен на рис. 16.

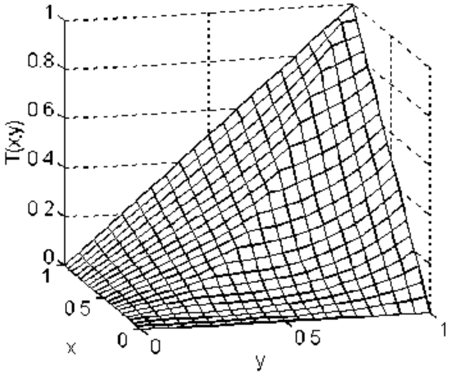


Рис. 16. Конъюнкция из примера 5.3.3 для р = 1.2, q = 4

Пример 5.3.4. Для $T_2 = T_P$ и $S = S_L$ получим следующую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min(x,y) \cdot min(1, x^p + y^q).$$

График этой конъюнкции дляр = 0.8, q = 4 показан на рис. 17.

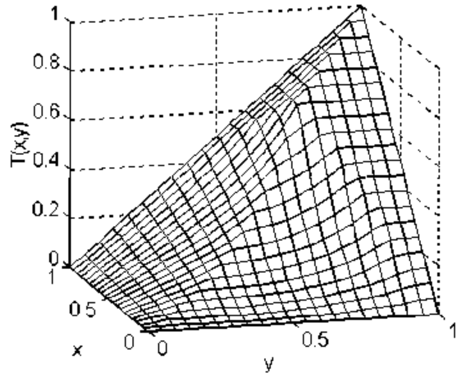


Рис. 17. Конъюнкция для р = 0.8, q = 4 из примера 5.3.4.

Пример 5.3.5. Для $T_2 = T_M$, $S = S_M$ и двух генераторов $g_D(x)$ и у получим следующую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min\{min(x,y), max(g_D(x), y^q)\}.$$

Имеем $T(x,y) = T_M$ для $q \le 1$ и T(x,y) → TD когда $q \to \infty$. Для q ≥ 1 эта конъюнкция может быть представлена в виде:

$$T(x,y) = \begin{cases} y, & \text{если } x = 1 \\ \min(x, y^q), & \text{если } x \ne 1 \end{cases}.$$

График этой конъюнкции для $q = 2$ показан на рис. 18.

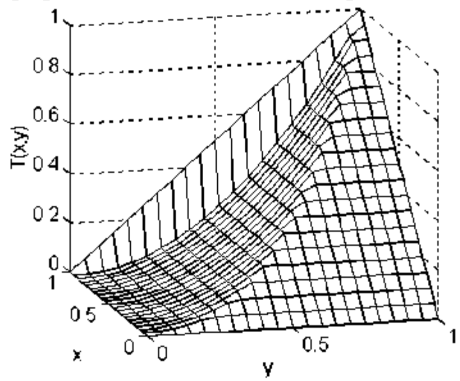


Рис. 18. Конъюнкция из примера 5.3.5 для $q = 2$.

Пример 5.4. До этого рассматривались конъюнкции, основанные на формулах (17) и (19). Другие типы конъюнкций могут быть основаны на формулах (17) и (20). Например, с помощью генератора *g(x,p) = ^* и *T*-норм $T_2 = T_P$ и $T_1 = T_M$ можно получить следующую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min(x,y)\cdot(x + y - xy)^p,$$

варьирующую от T_M (при$p = 0$) до T_D (при$p\to\infty$).

Пример 5.5. Рассмотрим другой параметрический класс конъюнкций, основанный на представлениях (17) и (21) с $T1 = T_M$, $T_2 = T_P$, $s1 = s_D$, $h(y)=p, s_2 = S_M$:

$$T(x,y) = min(x,y)\cdot max(s_D(x,y),y^p) = \begin{cases} \min(x,y), & \textit{если } \max(x,y) = 1 \\ \min(x,y)\cdot y^p, & \textit{если } \max(x,y) < 1 \end{cases}.$$

Имеем $T = T_M$ при р = 0 и $T = T_D$ при$\to\infty$. График этой конъюнкции для $q = 2$ показан на рис. 19.

Ниже приводятся конъюнкции, основанные на $T_1 = T_P$:

$$T(x,y) = (xy)\cdot max(x^p,y^q),$$
$$T(x,y) = xy(x^p + y^q - x^py^q),$$
$$T(x,y) = (xy)\cdot min(1,\ x^p + y^q).$$

Эти конъюнкции варьируют от T_P до T_D.

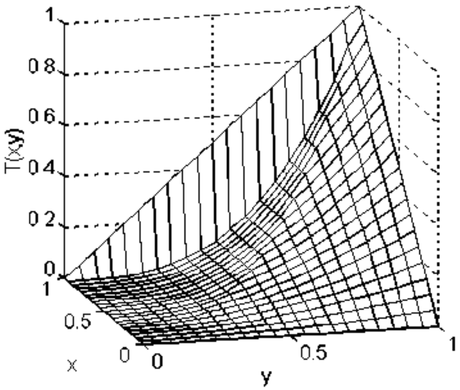


Рис. 19. Конъюнкция из примера 5.5 для $q = 2$

Следующая конъюнкция основана на представлениях (17) и (21) с $T_1 = T_M$, $T_2 = T_P$, $s_1 = s_2 = S_M$, $h(y) = p$, $(p\in[0,1])$ и варьирует от $T = T_м$ при /» =1 до $T = T_P$ при р = 0:

$$T(x,y) = min(x,y)\cdot max(x,y,p) = \begin{cases} p\cdot\min(x,y), & \textit{если } x,y \le p \\ xy, & \textit{в противном случае} \end{cases}.$$

6.6. Пример нечеткого моделирования с обобщенными параметрическими операциями

Пусть $z = f(x,y)$ - вещественная функции, определенная на [0,1]×[0,1] и заданная нечеткой моделью Сугено первого порядка с двумя входами и одним выходом. Каждая входная переменная в модели Сугено имеет 2 терма: *S (SMALL)* и *L (LARGE),* заданных в виде нечетких множеств с трапециевидными функциями принадлежности (рис. 20).

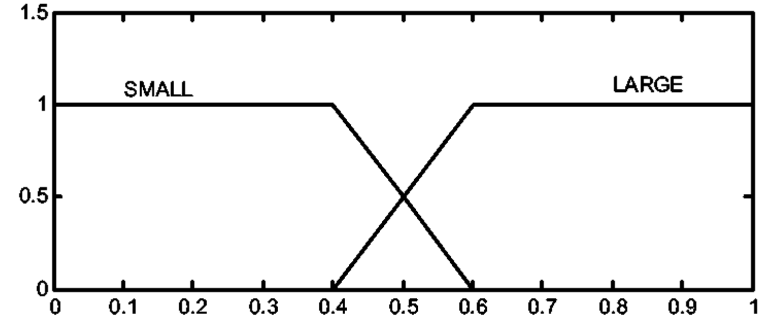


Рис. 20. Функции принадлежности нечетких множеств исходной нечеткой модели Сугено

Модель Сугено состоит из следующих 4 правил:

$$R_1\text{: IF } x \text{ is } S \text{ AND } y \text{ is } S \text{ THEN } z = x + 2y + 3,$$
$$R_2\text{: IF } x \text{ is } S \text{ AND } y \text{ is } L \text{ THEN } z = 4x + 10y + 20,$$
$$R_3\text{: IF } x \text{ is } L \text{ AND } y \text{ is } S \text{ THEN } z = 3x + 5y + 15,$$
$$R_4\text{: IF } x \text{ is } L \text{ AND } y \text{ is } L \text{ THEN } z = 4x + 8y + 6,$$

Для каждой пары вещественных значений *x* и *y* значение функции $z = f(x,y)$ вычисляется как средневзвешенное значений функций $z_i = a_ix + b_iy + c_i$, получаемых по правилам R_i:

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{4} w_i(a_i x + b_i y + c_i)}{\sum_{i=1}^{4} w_i}.$$

Здесь $a_i x + b_i y + c_i$ - выражение, стоящее в правой части правила R_i, w_t - сила срабатывания правила: $w_i = T(\mu_{Ai}(x), \mu_{Bi}(y))$, T - операция конъюнкции, представляющая связку *AND,* и $\mu_{Ai}(x)$, $\mu_{Bi}(y)$ суть значения принадлежности x и y соответствующим нечетким множествам A_i и B_i из левой части правил. В качестве операции конъюнкции *AND* применяется t-норма $TM(u,v)= min(u,v)$. Поверхность функции $z = f(x,y)$, определенной этой моделью Сугено, показана на рис. 21.

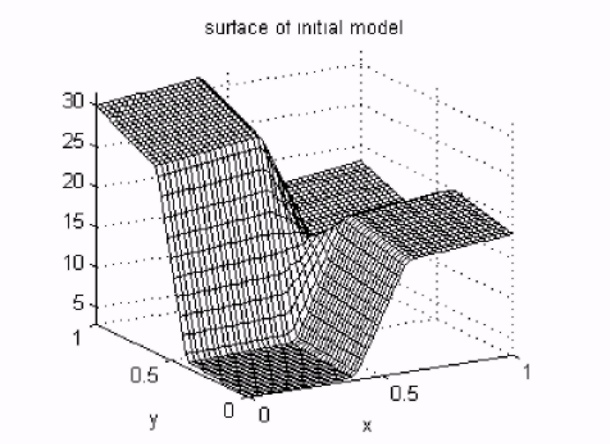


Рис. 21. Поверхность исходной модели

Эта функция аппроксимировалась такой же нечеткой моделью Сугено, в которой трапециевидные функции принадлежности были заменены треугольными функциями принадлежности (рис. 22), а операция *min* заменена параметрической операцией

$$T(u,v) = min(u,v) \cdot (u^p + v^q - u^p \cdot v^q).$$

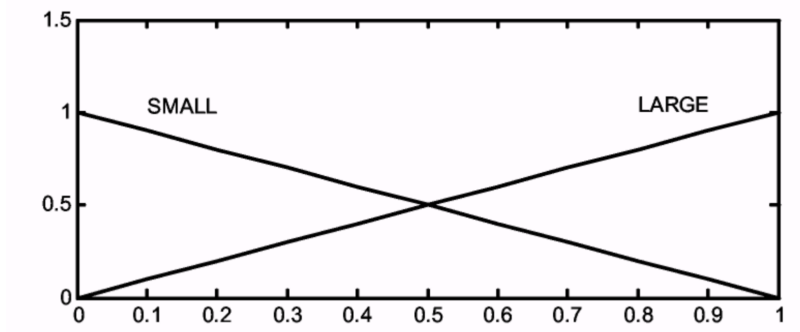


Рис. 22. Функции принадлежности нечетких множеств аппроксимирующей нечеткой модели Сугено

Оптимизация проводилась по четырем параметрам p_S, p_L, q_S, q_L, применявшимся для модификации значений принадлежности x к нечетким множествам S и L, и y к нечетким множествам S и L соответственно. Например, сила срабатывания второго правила вычислялась так:

$$w = T(\mu_S(x), \mu_L(y)) =$$
$$min(\mu_S(x), \mu_L(y)) \cdot (\mu_S(x)^{p_S} + \mu_L(y)^{q_L} - \mu_S(x)^{p_S} \cdot \mu_L(y)^{q_L}).$$

Значения оптимальных параметровр и q были получены как результат минимизации среднеквадратичной ошибки между графиком исходной функции и графиком аппроксимирующей нечеткой модели. По каждой шкале использовалась сетка из 50 точек, в результате 2500 точек исходного графика использовались для аппроксимации. Были получены следующие оптимальные значения параметров: p_S = 6.45, p_L = 6.45, q_S = 5.89, q_L = 5.89. Поверхность полученной аппроксимирующей нечеткой модели показана на рис. 23.

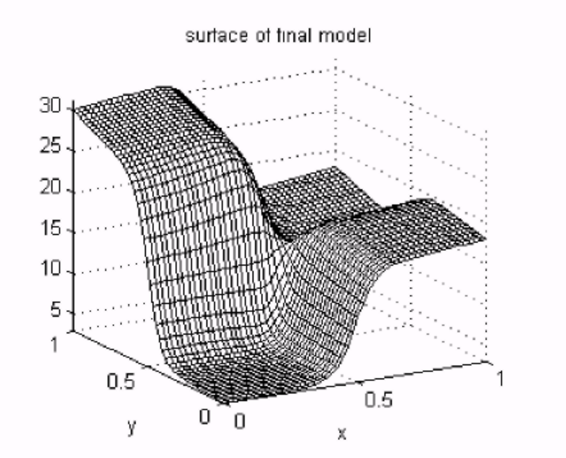


Рис. 23. Поверхность аппроксимирующей модели Сугено

Из сравнения рис. 21 и 23 видно, что полученная в результате оптимизации параметров операций нечеткая модель Сугено достаточно хорошо аппроксимирует исходную функцию. Оптимизация параметров операций нечетких моделей может использоваться при моделировании данных вместо или в дополнение к традиционно применяемой оптимизации параметров нечетких множеств, используемых в модели. В следующих разделах рассматриваются другие примеры оптимизации нечетких моделей по параметрам операций.

6.7. G-конъюнкции и G-дизъюнкции

Определение 7.1. Операциями G-конъюнкции T и G-дизъюнкции S называются функции $T,S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ такие, что для всех $x,y\in[0,1]$ выполняются следующие свойства:

$$T(0,0) = T(0,1) = T(1,0) = 0, \qquad T(1,1) = 1, \tag{24}$$

$$S(0,0) = 0, \qquad S(0,1) = S(1,0) = S(1,1) = 1, \tag{25}$$

$$T(x,y) \le T(u,v) \quad \text{и} \quad S(x,y) \le S(u,v), \quad \text{если} \quad x \le u,\ y \le v. \tag{26}$$

Нетрудно увидеть, что G-конъюнкция T и G-дизъюнкция S являются соответственно псевдоконъюнкцией и псевдодизъюнкцией, т.е. для всех $x,y\in[0,1]$ выполняются следующие свойства:

$$T(x,0) = T(0,x) = 0, \qquad S(x,1) = S(1,x) = 1. \tag{27}$$

Предложение 7.2. Пусть n - отрицание, T - некоторая G-конъюнкция и S - некоторая G-дизъюнкция, тогда соотношения

$$S_T(x,y) = n(T(n(x), n(y))), \qquad T_S(x,y) = n(S(n(x), n(y)))$$

определяют, соответственно, G-дизъюнкцию S_T и G-конъюнкцию T_S.
Доказательство.

$$S_T(0,0) = n(T(n(0),n(0))) = n(T(1,1)) = n(1) = 0.$$

$$S_T(x,1) = n(T(n(x), n(1))) = n(T(n(x),0)) = n(0) = 1.$$

Аналогично получим $ST(1,x)$ =1. Монотонность S_T следует из монотонности T и N.
Доказательство для T_S проводится аналогично.
Если n инволютивное отрицание, то для любой G-конъюнкции T и дизъюнкции $S = S_T$ (для любой S и $T = T_S$) выполняются законы Де Моргана:

$$n(S(x,y)) = T(n(x), n(y)), \qquad n(T(x,y)) = S(n(x), n(y)).$$

Для новых операций ограничения (12) уже не выполняются.
Теорема 7.3. Пусть T есть G-конъюнкция, S есть G-дизъюнкция и f,g,h:[0,1] $\to$**[0,1]** - неубывающие функции, такие что $f(0) = g(0) = h(0) = 0$, (1)= g(1) = $h(1)$ = 1, тогда следующие выражения

$$T_1(x,y) = f(T(g(x),h(y))),$$

$$S_1(x,y) = f(S(g(x),h(y))),$$

определяют G-конъюнкцию и G-дизъюнкцию соответственно.

Доказательство.

$$T(0,y) = f(T_1(g(0),h(y))) = f(T_1(0,h(y))) = f(0) = 0.$$

Аналогично,

$$T(y,0) = 0. \quad T(1,1) = f(T_1(g(1),h(1))) = f(T_1(1,1)) = f(1) = 1.$$

Монотонность T следует из монотонности T_1, f,g и h. Доказательство для S аналогично.
Очевидно, что вместо T и S можно использовать конъюнкции и дизъюнкции, рассмотренные выше. Результаты предыдущего раздела могут быть распространены на новые операции следующим образом.
Теорема 7.4. Пусть T_1, T_2 суть G-конъюнкции, S_1, S_2 суть псевдодизъюнкции, g_1, g_2:[0,l]^[0,l] суть неубывающие функции такие, что $g_1(1) = g_2(1) = 1$, тогда следующие выражения

$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y),\ S_1(g_1(x),g_2(y))),$$
$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y),\ g_1(S_1(x,y))),$$
$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y),\ S_2(h(x),S_1(x,y))),$$

определяют G-конъюнкции:
Доказательство. Монотонность T во всех выражениях следует из монотонности функций, используемых в правых частях выражений. Если $x = 0$ или $y = 0$, то $T_1(x,y) = 0$ и, следовательно, $T(x,y) = 0$. Если $x = y = 1$ то $T_1(1,1) = 1$, все S_1, g_1, g_2 равны 1, из (27) следует также, что $S_2 = 1$ и, следовательно, во всех выражениях выполняется $T(x,y) = T_2(1,1) = 1$.
Новое определение конъюнкции и дизъюнкции дает возможность построения простейших параметрических классов этих операций, в частности, простейшими G-конъюнкциями являются следующие функции:

$$T(x,y) = min(x^p, y^q),$$
$$T(x,y) = x^p y^q,$$
$$T(x,y) = (xy)^p (x + y - xy)^q.$$

Поверхности этих функций для различных значений параметров p и q приведены на рис. 24-26.

С целью расширения класса функций, применяемых в нечетком моделировании, и, как следствие, увеличения гибкости нечетких моделей может быть использовано дальнейшее обобщение понятия конъюнкции. В частности, в простейшем параметрическом классе обобщенных нечетких конъюнкций $T(x,y) = xpy^q$ вместо рассмотрения только положительных значений параметров p и q можно рассматривать любые вещественные значения. Так как параметры p и q могут сейчас быть и отрицательными, будем предполагать, что функции принадлежности, используемые в правилах нечеткой модели, имеют только положительные значения. Это свойство выполняется для функций принадлежности, представляемых **колоколообразными и гауссовскими функциями принадлежности**. Оно также выполняется для **треугольных и трапециевидных функций принадлежности**, которые принимают нулевые значения за пределами области определения входных переменных.

Для этой функции выполняется только одно свойство рассматриваемых выше операций конъюнкции: $T(1,1) = 1$. Более того, функция $T(x,y) = xpy^q$, где p,q - любые вещественные числа и $x,y \in (0,1]$, может принимать любые положительные значения, а не только значения из [0,1]. Для простоты будем называть эту функцию как **UG-конъюнкцию**. Конечно, эта функция вряд ли может с полным основанием рассматриваться как «естественное» обобщение операции конъюнкции, тем не менее, она может использоваться для обработки нечетких правил, рассматриваемых как функциональные модели специфического вида.

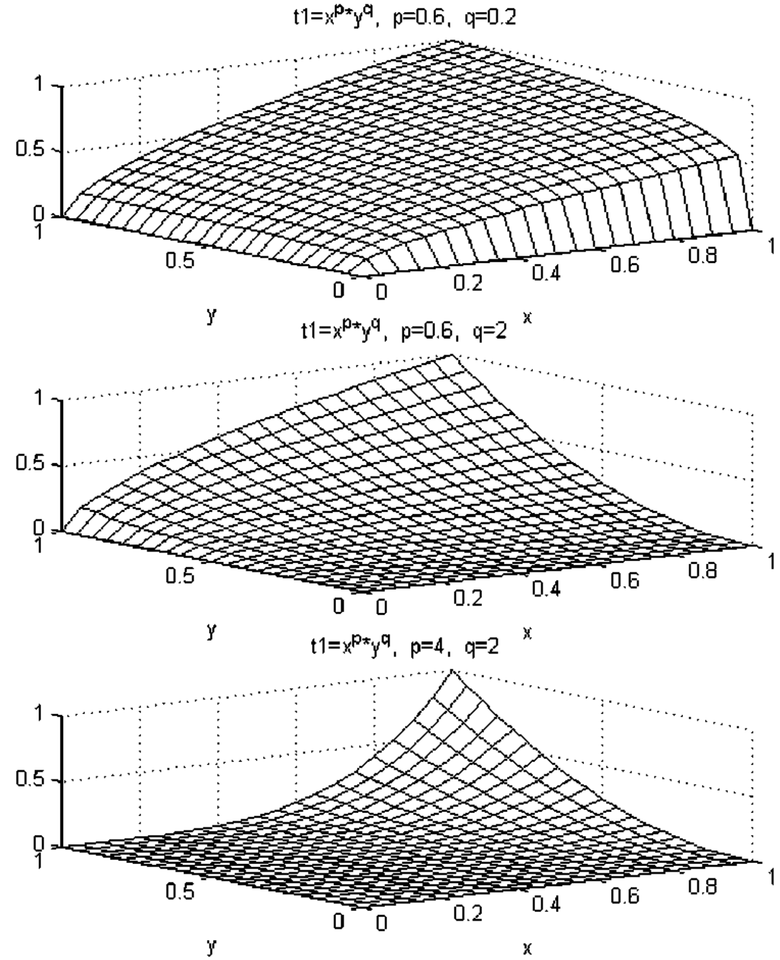


Рис. 24. Поверхность G-конъюнкции *T(x,y) = xpyq* для различных значений параметровр и *q*

Следует заметить, что несколько «неправильных» функций использовались успешно в нечетком моделировании. Например, функция *sinc(x)=sin(x)/x* с отрицательными значениями рассматривалась как функция принадлежности, а суммирование

функций принадлежности с итоговым результатом большим, чем 1, применялось в стандартной аддитивной модели.

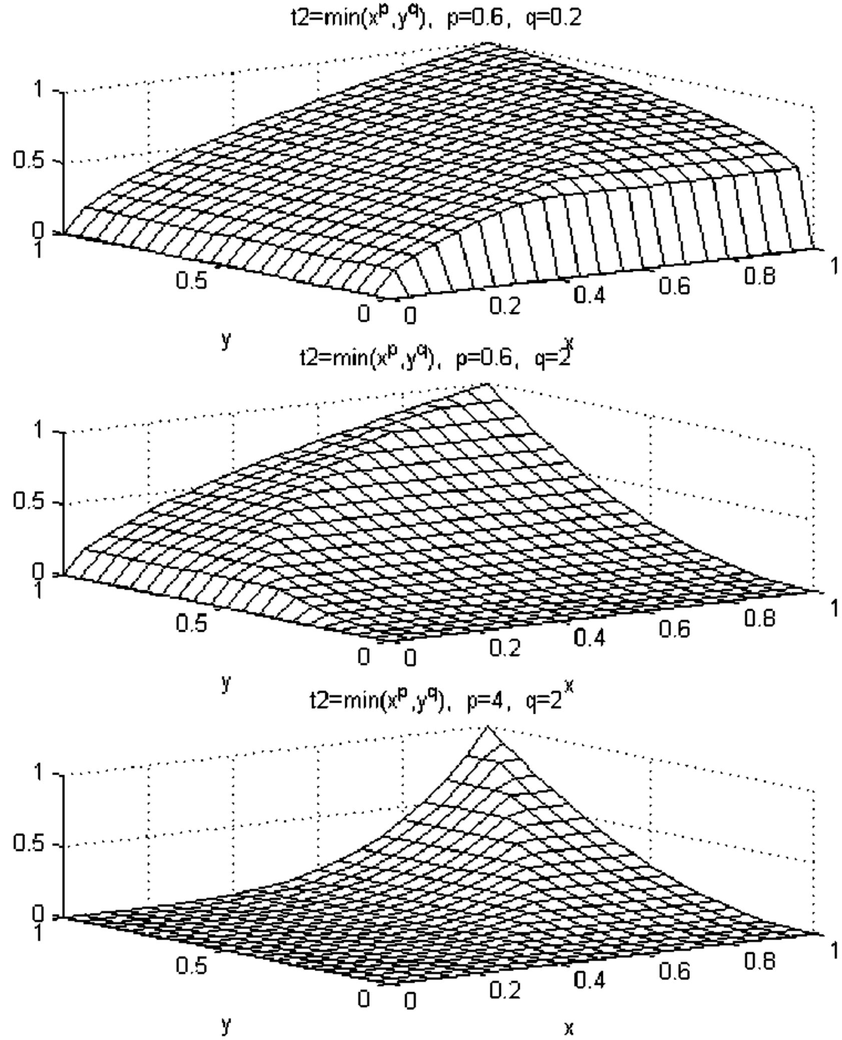


Рис. 25. Поверхность G-конъюнкции $T(x,y) = \min(x^p ,y^q)$ для различных значений параметровр и *q*

Простейшие параметрические конъюнкции могут рассматриваться также как модификаторы нечетких множеств. В этом случае операцию $T(x,y)= xpy^q$ можно рассматривать как композицию операции конъюнкции $T_P(x,y)= xy$ и модификаторов $g_i1(x) = xp$, $g_i2(x) = x^q$, модифицирующих значение функции принадлежности. Такие модификаторы функций принадлежности рассматривались в теории нечетких множеств.

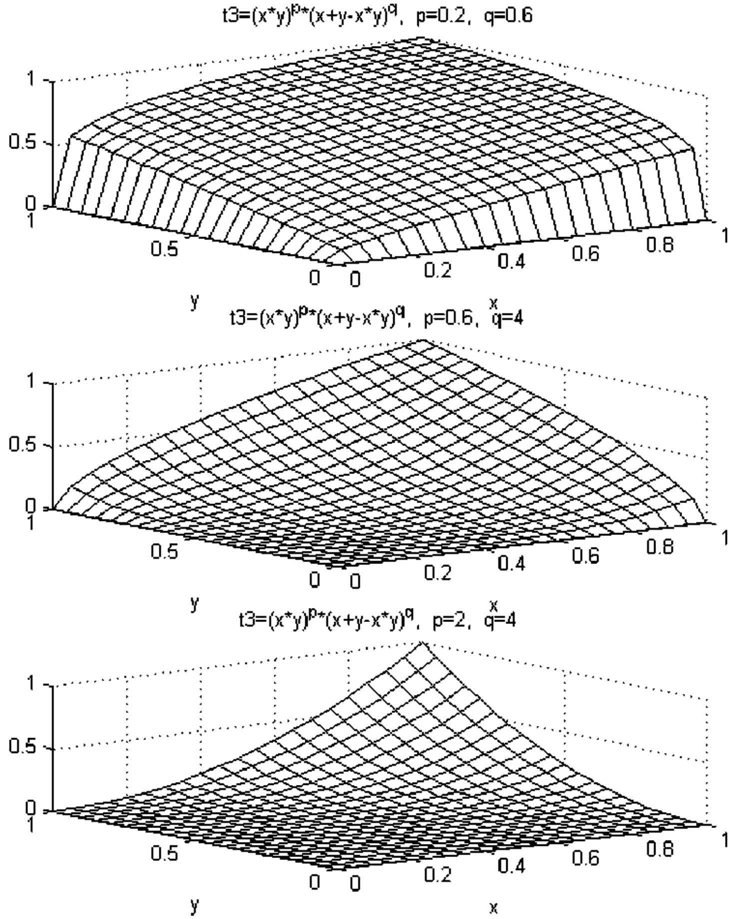


Рис. 26. Поверхность G-конъюнкции $T(x,y) = (xy)p\ (x+y-xy)q$ для различных значений параметровр и q

6.8. Пример аппроксимации функции нечеткими моделями

Рассматривается задача аппроксимации функции

$$f(x,y,z)=\left(1+\sqrt{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\sqrt{z^3}}\right)^2,$$

определенной на [1,6]×[1,6]×[1,6] нечеткой моделью Сугено с 8 правилами:

R_1: *If X is* A_1 *and Y is* B_1 *and Z is* C_1 *then* $u_1 = s_{11}x+ s_{12}y+ s_{13}z+t_1$,
R_2: *If X is* A_1 *and Y is* B_1 *and Z is* C_2 *then* $u_2 = s_{21}x+ s_{22}y+ s_{23}z+t_2$,
R_3: *If X is* A_1 *and Y is* B_2 *and Z is* C_1 *then* $u_3 = s_{31}x+ s_{32}y+ s_{33}z+t_3$,
...
R_8: *If X is* A_2 *and Y is* B_2 *and Z is* C_2 *then* $u_2 = s_{81}x+ s_{82}y+ s_{83}z+t_8$.

Каждой нечеткой входной переменной *X, Y* и Z соответствуют два нечетких терма $\{A_1 ,A_2\}$, $\{B_1 ,B_2\}$ и $\{C_ь\ C_2)$, которые задаются колоколообразной функцией принадлежности:

$$A(x)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x-c}{a}\right)^{2b}}.$$

В качестве связки *and* используется G-конъюнкция $T(x,y) =xpy^q$. Исходные значения параметров колоколообразных функций принадлежности равны $a=2.5$, $b=2.5$, $c=1$ для A_1, B_1, C_1 и $a=2.5$, $b=2.5$, $c=6$ для A_2, B_2, C_2. Начальные значения параметров операций и правых частей правил равны 1. Сила срабатывания правил R_i вычисляется так:

$$w_i = A_i(x)^{p(i)}\cdot B_i\ (y)^{q(i)}\cdot C_i\ (z)^{r(i)},\quad (i=1,\ldots,8),$$

где каждая A_i, B_i, C_i принимает одно из двух возможных значений A_1, A_2 B_1, B_2, C_1, C_2 соответственно.
Для настройки параметров использовались 216 обучающих данных и 125 контрольных данных, равномерно выбранных из входных диапазонов [1,6]×[1,6]×[1,6] и [1.5,5.5]×[1.5,5.5]×[1.5,5.5] соответственно. Применялся следующий показатель качества аппроксимации:

$$\mathrm{APE} = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\frac{T(i)-O(i)}{|T(i)|}\cdot 100\%,$$

где P число пар данных, а $T(i)$ и $O(i)$ это i-й желаемый и предсказанный выход, соответственно.
На рис. 27 приводятся кривые ошибок для нечетких моделей, полученных после оптимизации следующих параметров:
А) параметры функций принадлежности и правых частей правил (100 шагов итерационной процедуры, использовалась конъюнкция $T(x,y)=xy$);
С) параметры варианта А (30 шагов), а затем параметры операций $T(x,y)= xpy^q$, $(p,q> 0)$ и правых частей правил (70 шагов);
D) параметры операций $T(x,y)= xp^yq$, $(p,q$ - любые вещественные числа) и правых частей правил (100 шагов);
Е) вариант А (30 шагов), а затем вариант D (70 шагов).
Во всех случаях использовалась оптимизация параметров в течение 100 шагов по 10*m итераций, где m - общее число оптимизируемых в конкретном варианте параметров.

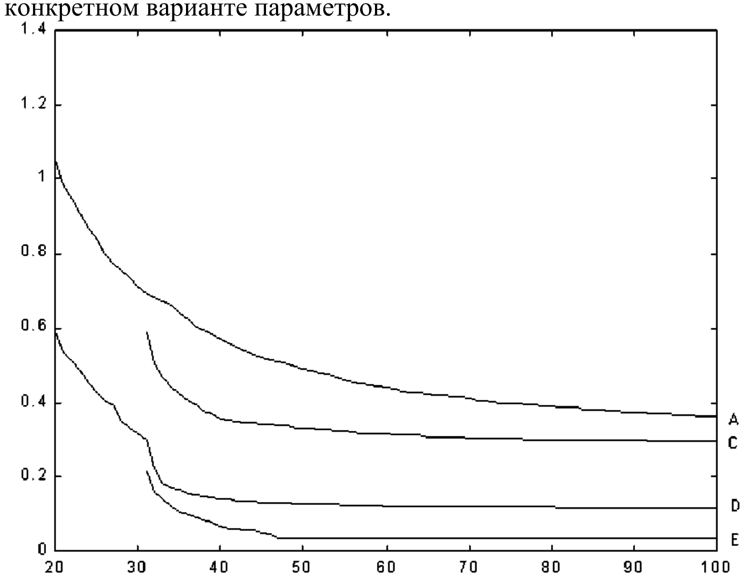


Рис. 27. Ошибки аппроксимации функции $f(x,y,z)= (1+ x^{0.5}+y^{-1}+ z^{-1.5})^2$ моделью Сугено, при оптимизации по различным группам параметров

Как видно из приведенных результатов, характеристики нечеткой модели в случае D), когда оптимизируются только операции *UG*-конъюнкции, даже лучше, чем характеристики нечеткой модели в случае С), когда использовалась оптимизация функций принадлежности вместе с операциями G-конъюнкции. Оптимизация UG-конъюнкций вместе с функциями принадлежности (случай Е)) показывает лучшие результаты на обучающих данных, чем результаты, полученные адаптивной нейро-нечеткой системой вывода ANFIS [82]. Результаты, полученные ANFIS, основаны, как и в случае А), только на оптимизации колоколообразных функций принадлежности. Мы здесь не обсуждаем применяемые методы оптимизации, поскольку все из них дают некоторый локальный оптимум, определяемый не только применяемым методом, но и заданным показателем качества аппроксимации. В общем случае, оптимизация функций принадлежности, по-видимому, должна давать меньшую ошибку аппроксимации, так как основана на сдвиге функции принадлежности и ее модификации, в то время как оптимизация по параметрам операций состоит в модификации значений принадлежности и в их определенном сочетании. В то же время, как говорилось в начале главы, если нечеткие множества, используемые в модели, отражают экспертные знания о моделируемом объекте, то оптимизация только по параметрам операций позволяет сохранять неизменными эти знания.

6.9. Идентификация нечетких моделей динамических систем

Для идентификации систем используются как нечеткие модели Мамдани так и нечеткие модели Сугено. Традиционно применяется оптимизация этих моделей по параметрам нечетких множеств. **Рассмотрим пример оптимизации нечетких моделей Сугено по параметрам операций на задаче идентификации нечеткой модели динамической системы.** В качестве примера была взята задача идентификации динамической системы с нелинейной подсистемой, задаваемой разностным уравнением, используемая для тестирования различных подходов к идентификации нечетких систем. Моделируемая система задается следующим разностным уравнением:

$$y(k+1)=0.3y(k)+0.6y(k-1)+f(u(k)),$$

где $y(k)$ - выход, а $u(k)$ - вход системы в момент времени k. Неизвестная функция f описывается следующим уравнением:

$$f(u) = 0.6\sin(\pi u)+0.3\sin(3\pi u)+0.1\sin(5\pi u),$$

где входная переменная *u* принимает значения в интервале [-1,1]. Ставилась задача моделирования этой неизвестной функции нечеткой моделью Сугено в он-лайн режиме по мере поступления информации о значениях этой функции с изменением момена времени *k.* Таким образом, модель системы задавалась разностным уравнением

$$Y(k+1)=0.3Y(k)+0.6Y(k-1)+F(u(k)),$$

где *F* - функция, определяемая нечеткой моделью Сугено. Эта модель состояла из семи правил вида:

$$R_i\text{: If } U \text{ is } A_i \text{ then } F_i = r_i u+s_i, \qquad (i=1,2,\ldots,7),$$

где A_i это нечеткие множества, определенные на множестве значений входной переменной *u, U*- нечеткая переменная со значениями A_i, r_i и s_i -параметры заключений. В качестве функций принадлежности нечетких множеств были выбраны обобщенные колоколообразные функции принадлежности, задаваемые уравнениями

$$\mu_{A_i}(u) = \frac{1}{1+\left|\dfrac{u-c_i}{a}\right|^{2b}},$$

так, чтобы они равномерно покрывали область определения входной переменной *u.* Графики функций принадлежности нечетких множеств, применявшихся в нечеткой модели, приведены на рис. 28. Эти функции принадлежности определялись следующими значениями параметров: *a*=0.1667, *b* =2 для всех функций принадлежности; параметры c_i принимали значения: -1, -0.67, -0.33, 0, 0.33, 0.67, 1 для *i* = 1,…,7 соответственно.

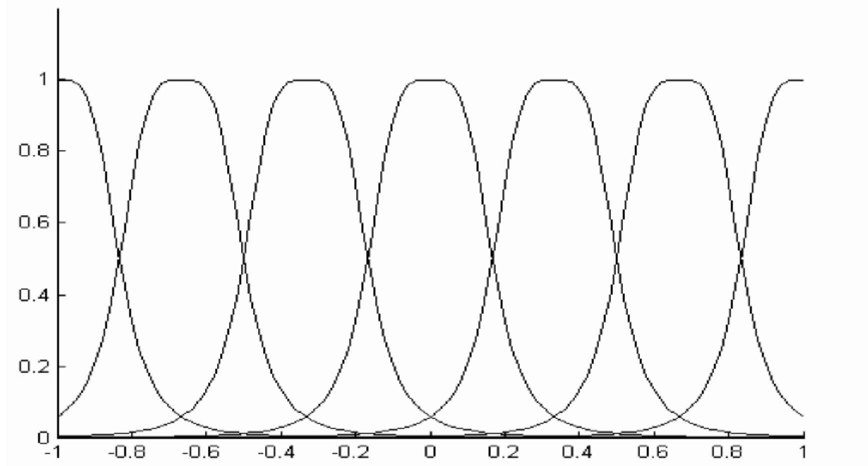


Рис. 28. Функции принадлежности нечетких множеств в задаче идентификации динамической системы

В процессе логического вывода применялись операции импликации, использующие следующие параметрические обобщенные операции конъюнкции: $T(w,F)=w^pF^q$, где $w=\mu A(u)$ и $F=F_i$ (*i*=1,…,7). Значение, получаемое на выходе нечеткой модели, вычисляется как среднее взвешенное значений, полученных по правилам:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{7} w_i^{p_i} F_i^{q_i}}{\sum_{i=1}^{7} w_i^{p_i}}.$$

Суммарное число оптимизируемых параметров модели p_i, q_i, r_i и s_i, использовавшихся при идентификации системы, равно 28.

В процессе обучения в течение *k*=250 моментов времени на вход системы и модели подавался следующий сигнал:

$$u(k)=\sin(2\pi k/250).$$

Начальные 20 значений *u(k)* использовались для определения стартовых значений параметров нечеткой модели, после чего на каждом шаге применялась адаптация параметров модели до окончания процесса обучения на шаге *k=250.* Результаты моделирования приведены на рис. 29, из которого видно, что графики функций, описывающих поведение системы и модели практически неразличимы, причем совпадение графиков наблюдается и после того, как по окончании адаптации нечеткой модели закон изменения входного воздействия *u(k)* был изменен на шаге *k*= 500 на следующий:

$$u(k)=0.5\sin(2\pi k/250)+0.5\sin(2\pi k/25).$$

В табл. 1 приведено сравнение числа параметров, используемых в предлагаемом подходе к оптимизации нечетких моделей по параметрам операций, с числом параметров, используемых в других подходах, описанных в литературе. Как видно из таблицы, предлагаемый подход использует наименьшее число параметров при удовлетворительном уровне решения задачи идентификации системы.
Табл. 1. Число параметров, используемых разными подходами в примере идентификации динамической системы

Подход	Число параметров
Тьюнинг операций в модели Сугено	28
Тьюнинг функций принадлежности в модели Сугено	35
Тьюнинг функций принадлежности в модели Мамдани	30
Многослойный перцептрон	261

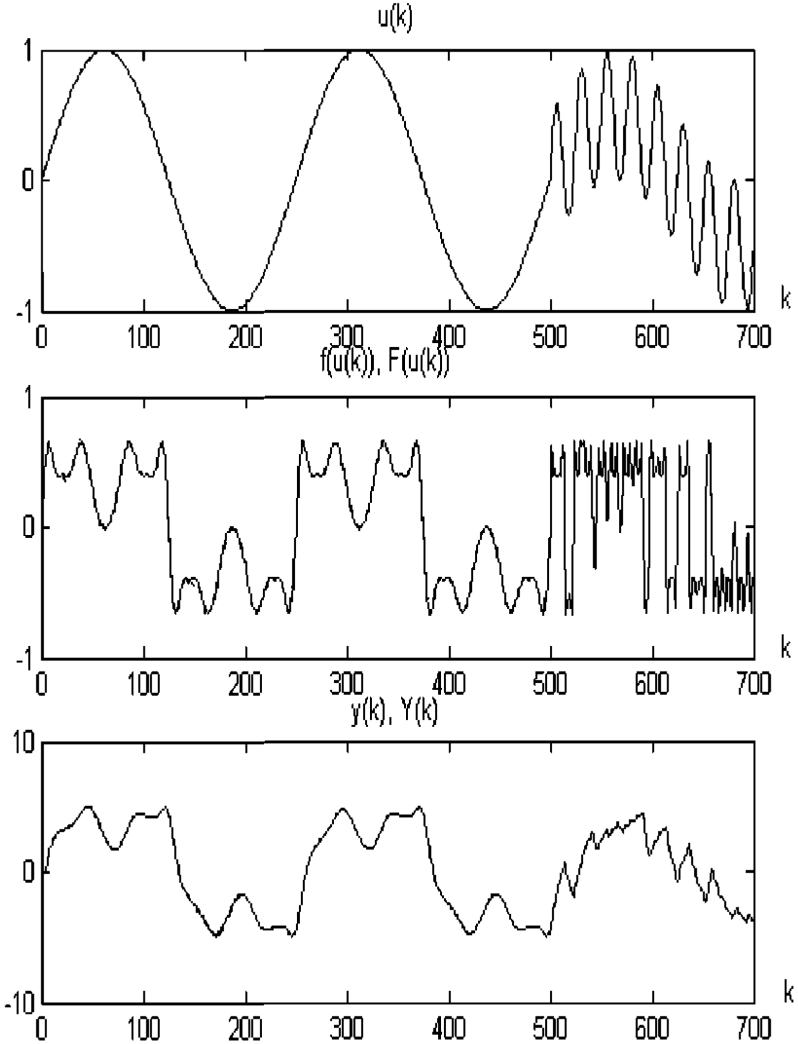


Рис. 29. Графики изменения входа *u(k),* "неизвестной" функцииf(u(k)), нечеткой модели *F(u(k)),* выхода системы y(k) и выхода модели *Y(k)* (почти совпадают)

6.10. Представление и оптимизация нечетких моделей Сугено нейронными сетями

Нечеткие системы могут быть представлены многослойными нейронными сетями. Это представление может быть использовано в нескольких целях. Во-первых, такое представление нечетких систем позволяет использовать для оптимизации нечетких систем методы оптимизации нейронных сетей, в частности, **метод обратного распространениия волны**. Во-вторых, подобное представление может использоваться для **аппаратной реализации нечетких систем с помощью имеющихся технологий аппаратной реализации нейронных сетей.**

Нечеткие системы, представленные с помощью нейронных сетей, обычно называют нейро-нечеткими системами. Разработаны методологии представления и оптимизации нейро-нечетких систем по параметрам функций принадлежности. Здесь приводятся результаты проведенного моделирования по представлению и оптимизации нейро-нечетких систем Сугено по параметрам операций на задаче аппроксимации функции от двух переменных.

Рассматривались две архитектуры нейро-нечеткой системы. В первой, типа ANFIS, структура нейронной сети наглядно отображает структуру нечеткой системы, однако, **оптимизируемые параметры находятся не на дугах сети, как это имеет место в стандартных многослойных нейроных сетях, а в узлах сети.** В другой архитектуре нейро-нечеткой системы оптимизируемые параметры (в том числе и параметры операций) находятся на дугах сети, что позволяет применить стандартные методы оптимизации нейронных сетей для оптимизации нейро-нечеткой системы по параметрам операций. Далее на примере аппроксимации функции от двух переменных приводятся структуры нейронных сетей первого и второго типа.

Рассматривается пример аппроксимации функции f= $sinc(x,y) = sin(x)sin(y)/(xy)$ нечеткой моделью Сугено, состоящей из правил R_i $(i=1,\dots,n)$ со следующей структурой:

$$R_i\text{: If } X \text{ is } A_i \text{ and } Y \text{ is } B_i \text{ then } f_i = s_ix+ t_iy+ r_i,$$

Этот пример расматривался также в [82], где эта функция аппроксимировалась нейро-нечеткой системой ANFIS с 16 правилами по параметрам четырех функций принадлежности по каждой переменной и параметрам правых частей правил с операций конъюнкции *and,* определяемой как $T(x,y) = xy$.

В рассматриваемой ниже первом подходе использовалась модель Сугено с тремя фиксированными функциями принадлежности по

каждой переменной и с параметрической операцией конъюнкции: $T(x,y) = xpy^q$, $(p,q> 0)$. Суммарное число 45 параметров модели состояло из 18 параметров операций и 27 параметров правых частей 9 правил. На рис. 30 приведен для простоты аналог этой модели для 4 правил с двумя нечеткими множествами по каждой переменной.

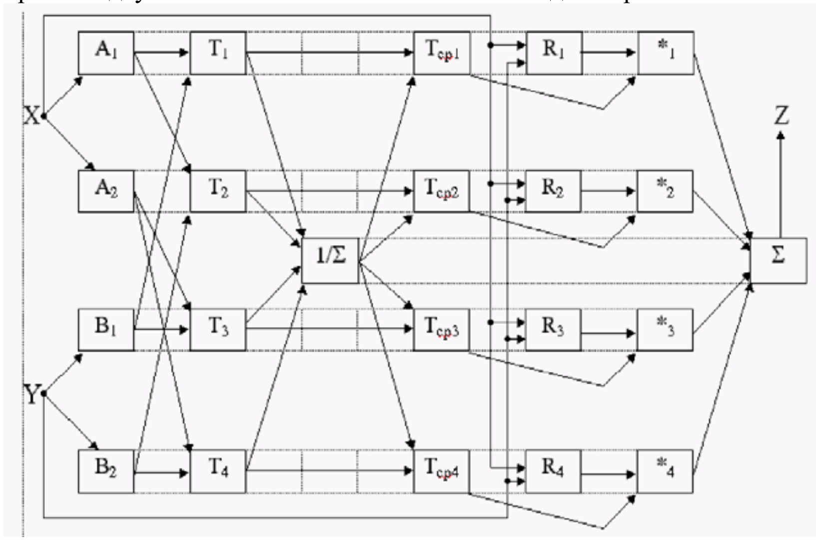


Рис. 30. Архитектура нейро-нечеткой системы типа ANFIS с 4 правилами

Приведем краткое описание слоев соответствующей нейро-нечеткой модели.

Слой 1. Входами являются вещественные значения x и y. Выходами являются значения принадлежности $A_i(x)$, $B_j(y)$, в качестве которых были выбраны колоколообразные функции принадлежности.

Слой 2. Выходами являются величины срабатывания w_i посылок правил: $w_i=A_i(x)p_iB_i(y)q_i$.

Слой 3. Выходами являются нормализованные величины срабатывания правил: $w_i^*=w_i/\sum_i(w_i)$.

Слой 4. Выходами являются взвешенные заключения правил: $f_iw_i^* = (s_ix+t_iy+r_i)w_i^*$.

Слой 5. Выходом является значение функции, определяемой моделью: $(p,q> 0)$. Суммарное число 45 параметров модели состояло из 18 параметров операций и 27 параметров правых частей 9 правил. На рис. 30 приведен для простоты аналог этой модели для 4 правил с двумя нечеткими множествами по каждой переменной.

(p,q> 0). Суммарное число 45 параметров модели состояло из 18 параметров операций и 27 параметров правых частей 9 правил. На рис. 30 приведен для простоты аналог этой модели для 4 правил с двумя нечеткими множествами по каждой переменной.

Слои 1, 3, 5 имеют фиксированные узлы, слои 2 и 4 имеют адаптивные узлы с параметрами операций p_i, q_i и параметрами правых частей правил s_i, t_i, r_i соответственно. В общем случае узлы слоя 1 также могут рассматриваться как адаптивные с параметрами функций принадлежности. В применяемой модели эти функции принадлежности были зафиксированы и равномерно распределены по области значений входных переменных [-10,10].
При оптимизации этой нейро-нечеткой системы применялся метод наименьших квадратов для идентификации параметров правых частей правил и метод обратного распространения ошибки для идентификации параметров операций. Среднеквадратичная ошибка аппроксимации значений функции *sinc,* вычисленных в 400 равномерно распределенных точках диапазона входных значений [-10,10]×[-10,10], составила 0.0248 после 300 эпох.
Как видно из рис. 30, нейронная сеть наглядно отображает структуру нечеткой системы, однако, применение стандартных методов оптимизации нейронных сетей к полученной сети затруднительно, поскольку оптимизируемые параметры не ассоциированы непосредственно с дугами сети. Кроме этого, условие, чтобы все выходы одного слоя были связаны со всеми входами другого слоя, требуемое в стандартной архитектуре многослойных нейронных сетей, в предложенной модели не выполняется. По этой причине была предложена архитектура нейро-нечеткой системы, к которой применимы стандартные методы оптимизации нейронных сетей. Структура этой системы для упрощенного аналога модели Сугено с 2 нечеткими множествами по каждой переменной и 4 правилами представлена на рис. 31.
Приведем описание этой сети.
Слои 1-6. Входами являются вещественные значения *x* и *y*. Выходами являются функции принадлежности $A_i(x)$, $B_j(y)$ обобщенных гауссовских функций принадлежности.
Слои 7-15. Выходами являются значения конъюнкций: *wrAtfxfB^yf.*
Слой 16. Выходом является величина $w^*=1/\sum_i(w_i)$.
Слои 17-25. Выходами являются нормализованные значения срабатывания правил: $w_i^*=w_iw^*$.

Слои 26-34. Выходами являются заключения правил: $f_i = s_ix+t_iy+r_i$.
Слои 35-43. Выходами являются взвешенные заключения правил:

Слой 44. Выходом является значение функции, определяемое моделью: $f=\sum_i(f_iw_i^*)$.
В этой нейронной сети обучались выходы слоев 7 - 15 и 26 - 34. Выходы остальных слоев использовались только для вычисления выхода системы. Если в первой нейронной сети свойство "все узлы некоторого слоя связаны со всеми узлами некоторого другого слоя" не выполняется, то для второй сети это условие выполнено, что дает возможность применять для обучения нейронной сети стандартное программное обеспечение. В то же время количество слоев нейронной сети значительно увеличилось. Средняя квадратичная ошибка аппроксимации значений функции *sinc* по выбранным 400 точкам методом Левенберга-Маккарта составила 0.0283 после 49 эпох обучения.

В рамках предложенных архитектур нейро-нечетких систем сохраняется возможность также и оптимизации по параметрам нечетких множеств при параметрическом их задании.

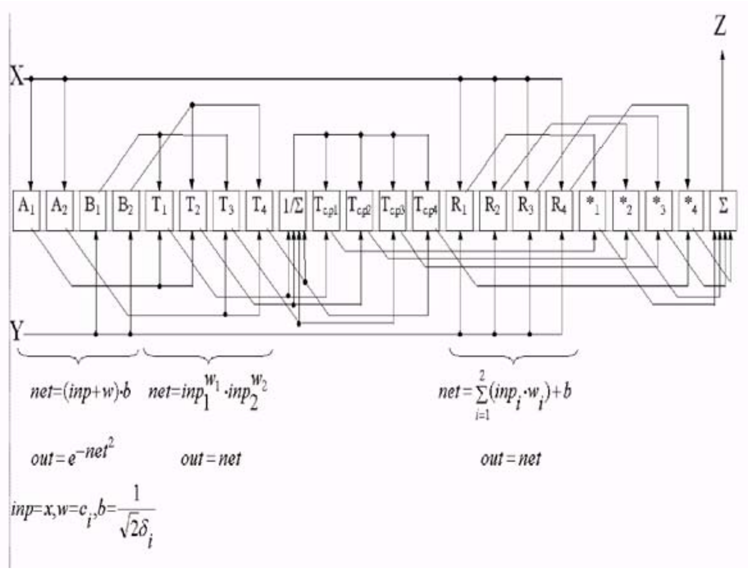


Рис.31

7. Базы знаний

7.1. Нечеткая база знаний

Определение 1. *Нечеткой базой знаний* называется совокупность нечетких правил "Если - то", определяющих взаимосвязь между входами и выходами исследуемого объекта. Обобщенный формат нечетких правил такой:

Если *посылка правила,* **то** *заключение правила.*

Посылка правила или антецедент представляет собой утверждение типа "x есть низкий", где "низкий" - это терм (лингвистическое значение), заданный нечетким множеством на универсальном множестве лингвистической переменной x. Квантификаторы "очень", "более-менее", "не", "почти" и т.п. могут использоваться для модификации термов антецедента.

Заключение или следствие правила представляет собой утверждение типа "y есть d", в котором значение выходной переменной (d) может задаваться:

1. нечетким термом: "y есть высокий";
2. классом решений: "y есть бронхит"
3. четкой константой: "y=5";
4. четкой функцией от входных переменных: "y=5+4*x".

Если значение выходной переменной в правиле задано нечетким множеством, тогда правило может быть представлено нечетким отношением. Для нечеткого правила "Если x есть $\tilde{A}$, то y есть $\tilde{B}$", нечеткое отношение $\tilde{R}$ задается на декартовом произведении $U_x \times U_y$, где U_x (U_y) - ; универсальное множество входной (выходной) переменной. Для расчета нечеткого отношения можно применять нечеткую импликацию и t-норму. При использовании в качестве t-нормы операции нахождения минимума, расчет нечеткого отношения $\tilde{R}$ осуществляется так:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)], \quad (x,y) \in U_x \times U_y.$$

Пример 1. Следующая нечеткая база знаний описывает зависимость между возрастом водителя (x) и возможностью дорожно-транспортного происшествия (y):

Если *x = Молодой,* **то** *y = Высокая;*

Если *x = Средний,* **то** *y = Низкая;*

Если *x = Очень старый,* **то** *y = Высокая.*

Пусть функции принадлежностей термов имеют вид, показанный на рис. 1. Тогда нечеткие отношения, соответствующие правилам базы знаний, будут такими, как на рис. 2.

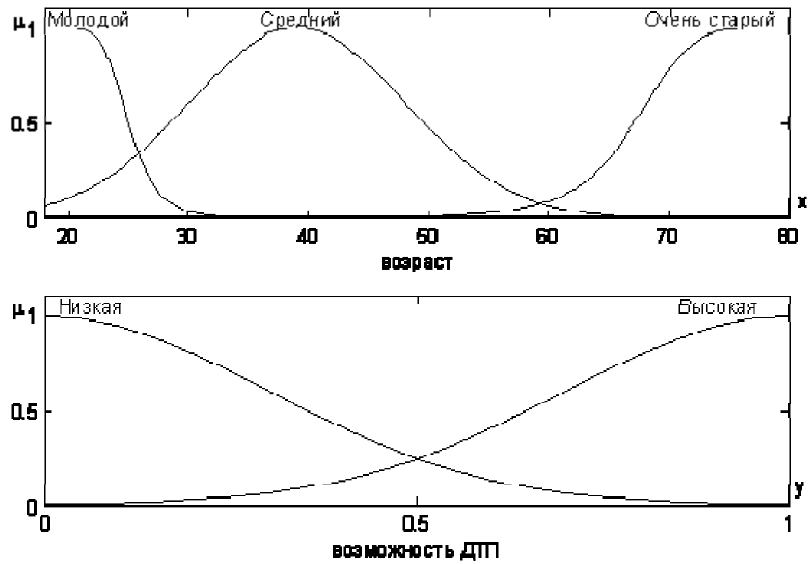


Рис.1. Функции принадлежности термов

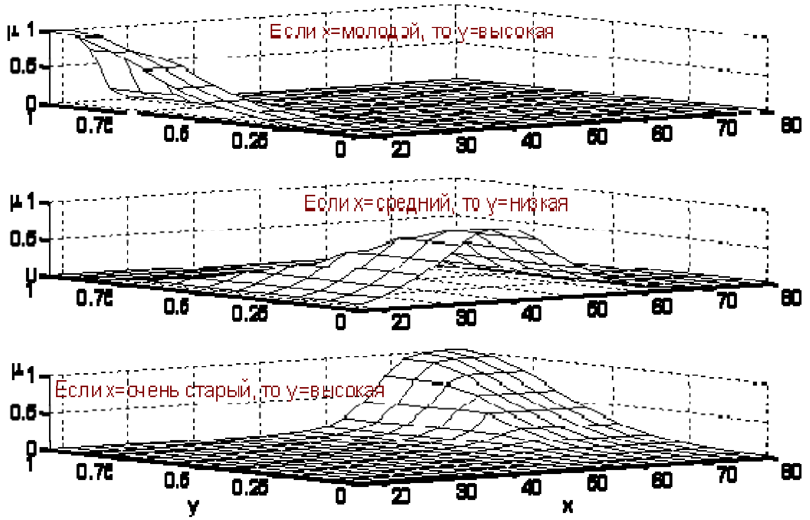


Рис.2. Нечеткие отношения, соответствующие правилам базы знаний из примера 1

Для задания многомерных зависимостей "входы-выходы" используют нечеткие логические операции И и ИЛИ. Удобно правила формулировать так, чтобы внутри каждого правил переменные объединялись логической операцией И, а правила в базе знаний связывались операцией ИЛИ. В этом случае нечеткую базу знаний, связывающую входы $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$ с выходом y, можно представить в следующем виде:

ЕСЛИ $(x_1 = a_{1,j1})$ И $(x_2 = a_{2,j1})$ И…И $(x_n = a_{n,j1})$

ИЛИ $(x_1 = a_{1,j2})$ И $(x_2 = a_{2,j2})$ И И $(x_n = a_{n,j2})$

…

ИЛИ $(x_1 = a_{1,jk_j})$ И $(x_2 = a_{2,jk_j})$ И…И $(x_n = a_{n,jk_j})$,

ТО $y = d_j$, $j = \overline{1,m}$,

где $a_{i,jp}$ - нечеткий терм, которым оценивается переменная x_i в строчке с номером jp ($p = \overline{1,k_j}$);

k_j - количество строчек-конъюнкций, в которых выход y оценивается значений d_j;

m - количество различных значений, используемых для оценки выходной переменной y.

Приведенную выше базу знаний удобно представлять таблицей, которую иногда называют матрицей знаний (табл. 1).

Таблица 1 - Нечеткая база знаний

x_1	x_2	…	x_n	y
$a_{1,1,1}$	$a_{2,1,1}$	…	$a_{n,1,1}$	d_1
$a_{1,1,2}$	$a_{2,1,2}$	…	$a_{n,1,2}$	
…	…	…	…	
$a_{1,1,k_1}$	$a_{2,1,k_1}$	…	$a_{n,1,k_1}$	
$a_{1,2,1}$	$a_{2,2,1}$	…	$a_{n,2,1}$	d_2
$a_{1,2,2}$	$a_{2,2,2}$	…	$a_{n,2,2}$	
…	…	…	…	
$a_{1,2,k_2}$	$a_{2,2,k_2}$	…	$a_{n,2,k_2}$	

…				
$a_{1,m,1}$	$a_{2,m,1}$	…	$a_{n,m,1}$	d_m
$a_{1,m,2}$	$a_{2,m,2}$	…	$a_{n,m,2}$	
…	…	…	…	
a_{1,m,k_m}	a_{2,m,k_m}	…	a_{n,m,k_m}	

Для учета различной степени уверенности эксперта в адекватности правил используют весовые коэффициенты. Нечеткую базу знаний из таблицы с весовыми коэффициентами правил можно записать следующим образом:

$$\bigcup_{p=1}^{k_j}\left(\bigcap_{i=1}^{n} x_i = a_{i,jp} \text{ с весом } w_{jp}\right) \rightarrow y = d_j, \quad j = \overline{1,m},$$

где $\bigcup$ - ; нечеткая логическая операция ИЛИ;

$\bigcap$ - ;нечеткая логическая операция И;

$w_{jp} \in [0,1]$ - ; весовой коэффициент правила с номером jp.

7.2. Нечеткий логический вывод

7.2.1. Композиционное правило нечеткого вывода Заде

Обычный, булевый логический вывод базируется на следующих тавтологиях:

- модус поненс: $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$;
- модус толленс: $((A \Rightarrow B) \wedge \bar{B}) \Rightarrow \bar{A}$;
- силлогизм: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;
- контрапозиция: $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$.

В четком логическом выводе наиболее часто применяется правило модус поненс, которое можно записать так:

Посылка	А есть истинно
Импликация	Если А, то В
Логический вывод	В есть истинно

Модус поненс выводит заключение "В есть истинно", если известно, что "А есть истинно" и существует правило "Если А, то В" (А и В - четкие логические утверждения). Однако, если прецедент отсутствует, то модус поненс не сможет вывести никакого, даже приближенного заключения. Даже в случае, когда известно, что близкое к А утверждение А' является истинным, модус поненс не может быть применен. Одним из возможных способов принятия решений при неопределенной информации является применение нечеткого логического вывода.

Определение 2. *Нечетким логическим выводом* называется получение заключения в виде нечеткого множества, соответствующего текущим значениях входов, с использованием нечеткой базы знаний и нечетких операций.

Основу нечеткого логического вывода составляет композиционное правило Заде.

Определение 3. *Композиционное правило вывода Заде* формулируется следующим образом: если известно нечеткое отношение $\tilde{R}$ между входной (x) и выходной (y) переменными, то при нечетком значении входной переменной $x = \tilde{A}$, нечеткое значения выходной переменной определяется так:

$y = \tilde{A} \circ \tilde{R}$,

где $\circ$ - максминая композиция.

Пример 2. Дано нечеткое правило "Если $x = \tilde{A}$, то $y = \tilde{B}$" с нечеткими множествами: $\tilde{A} = 0/1 + 0.1/2 + 0.5/3 + 0.8/4 + 1/5$ и $\tilde{B} = 1/5 + 0.8/10 + 0.4/15 + 0.2/20$. Определить значение выходной переменной y, если $x = \tilde{C} = 0.3/1 + 0.5/2 + 1/3 + 0.7/4 + 0.4/5$.

В начале рассчитаем нечеткое отношение, соответствующее правилу "Если $x = \tilde{A}$, то $y = \tilde{B}$", применяя в качестве t-нормы операцию нахождения минимума:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.8 & 0.8 & 0.4 & 0.2 \\ 1 & 0.8 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Теперь, по формуле $y = \tilde{C} \circ \tilde{R}$ рассчитаем нечеткое значение выходной переменной:

$$y = 0.7/5 + 0.7/10 + 0.4/15 + 0.2/20 .$$

7.2.2. Нечеткий логический вывод Мамдани

Нечеткий логический вывод по алгоритму Мамдани выполняется по нечеткой базе знаний:

$$\bigcup_{p=1}^{k_j} \left(\bigcap_{i=1}^{n} x_i = a_{i,jp} \ \text{с весом } w_{jp} \right) \rightarrow y = d_j, \quad j = \overline{1,m},$$

в которой значения входных и выходной переменной заданы нечеткими множествами. Введем следующие обозначения, необходимые для дальнейшего изложения материала:

$\mu_{jp}(x_i)$ - функция принадлежности входа x_i нечеткому терму $a_{i,jp}$, т.е. $a_{i,jp} = \int_{\underline{x}_i}^{\overline{x}_i} \mu_{jp}(x_i)/x_i$, $x_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$.

$\mu_{d_j}(y)$ - функция принадлежности выхода y нечеткому терму d_j, т.е.

$$d_j = \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} \mu_{d_j}(y)/y , \quad y \in [\underline{y}, \overline{y}].$$

Степени принадлежности входного вектора $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*)$ нечетким термам d_j из базы знаний рассчитывается следующим образом:

$$\mu_{d_j}(X^*) = \bigvee_{p=\overline{1,k_j}} w_{jp} \cdot \bigwedge_{i=\overline{1,n}} \left[\mu_{jp}(x_i^*) \right], \ j = \overline{1,m} ,$$

где $\vee(\wedge)$ - операция из s-нормы (t-нормы), т.е. из множества реализаций логической операций ИЛИ (И). Наиболее часто используются следующие реализации: для операции ИЛИ - нахождение максимума и для операции И - нахождение минимума.

В результате получаем такое нечеткое множество $\tilde{y}$, соответствующее входному вектору X^*:

$$\tilde{y} = \frac{\mu_{d_1}(X^*)}{d_1} + \frac{\mu_{d_2}(X^*)}{d_2} + \quad + \frac{\mu_{d_m}(X^*)}{d_m} .$$

Особенностью этого нечеткого множества является то, что универсальным множеством для него является терм-множество выходной переменной y. Такие нечеткие множества называются нечеткими множествами второго порядка.

Для перехода от нечеткого множества, заданного на универсальном множестве нечетких термов $\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ к нечеткому множеству на интервале $[\underline{y}, \bar{y}]$ необходимо: 1) "срезать" функции принадлежности $\mu_{d_j}(y)$ на уровне $\mu_{d_j}(X^*)$;
2) объединить (агрегировать) полученные нечеткие множества. Математически это записывается следующим образом:

$$\tilde{y} = \underset{j=\overline{1,m}}{agg}\left(\int_{\underline{y}}^{\bar{y}} \min\left(\mu_{d_j}(X^*),\ \mu_{d_j}(y)\right) / y\right),$$

где agg - агрегирование нечетких множеств, которое наиболее часто реализуется операцией нахождения максимума.

Четкое значение выхода y, соответствующее входному вектору X^* определяется в результате деффаззификации нечеткого множества $\tilde{y}$. Наиболее часто применяется дефаззификация по методу центра тяжести:

$$y = \frac{\int_{\underline{y}}^{\bar{y}} y \cdot \mu_{\tilde{y}}(y)dy}{\int_{\underline{y}}^{\bar{y}} \mu_{\tilde{y}}(y)dy},$$

где $\int$ - здесь символ интеграла.

Пример 3. По нечеткой базе знаний из примера 1 выполнить нечеткий логический вывод при значениях входной переменной $x = 28$ и $x =$ "старый".

Выполнение нечеткого логического вывода при значениях входной переменной $x = 28$ и $X =$ "старый" показано на рис. 3 и 4. Операция агрегирования осуществлялась нахождением максимума. Дефаззификация проводилась по методу центра тяжести. На рис. 5 показана зависимость "вход-выход", соответствующая нечеткой базе знаний из примера 1. Участки графика, соответствующие первому, второму и третьему правилу базы знаний обозначены на рисунке #1, #2 и #3.

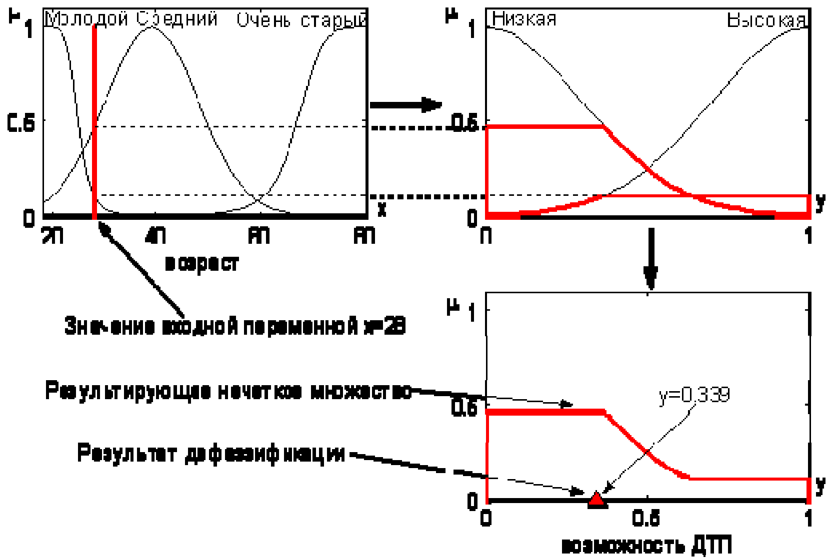


Рис. 3. Нечеткий логический вывод Мамдани при четком значении входной переменной

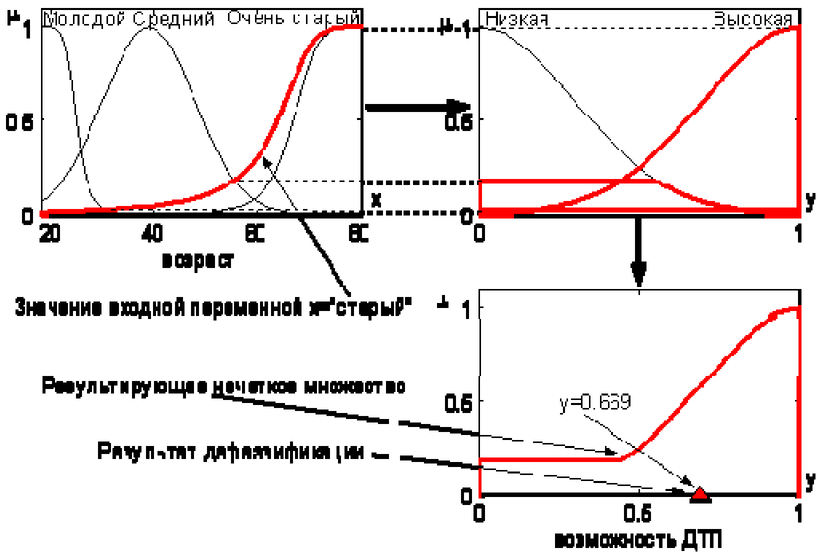


Рис. 4. Нечеткий логический вывод Мамдани при нечетком значении входной переменной

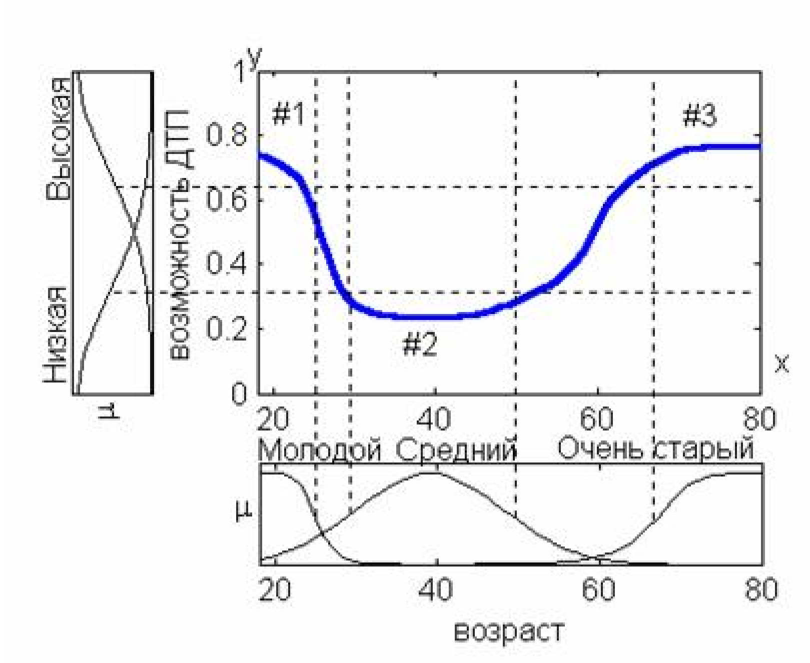


Рис. 5. Зависимость "вход-выход" для нечеткой базы знаний из примера 1

7.2.3. Нечеткий логический вывод Сугено

Нечеткий логический вывод по алгоритму Сугено (иногда говорят алгоритм Такаги-Сугено) выполняется по нечеткой базе знаний:

$$\bigcup_{p=1}^{k_j}\left(\bigcap_{i=1}^{n} x_i = a_{i,jp} \text{ с весом } w_{jp}\right) \rightarrow y = b_{j,0} + b_{j1}\cdot x_1 + b_{j2}\cdot x_2 + \ldots + b_{jn}\cdot x_n,$$
$$j = \overline{1,m},$$

где b_{ji} - некоторые числа.

База знаний Сугено аналогична базе знаний Мамдани за исключением заключений правил d_j, которые задаются не нечеткими термами, а линейной функцией от входов : $d_j = b_{j0} + \sum_{i=\overline{1,n}} b_{ji} \cdot x_i$. Правила в базе знаний Сугено являются своего рода переключателями с одного линейного закона "входы - выход" на другой, тоже линейный. Границы подобластей размытые, следовательно, одновременно могут выполняться несколько линейных законов, но с различными степенями. Степени принадлежности входного вектора $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ к значениям $d_j = b_{j0} + \sum_{i=\overline{1,n}} b_{ji} \cdot x_i$ рассчитывается следующим образом:

$$\mu_{d_j}(X^*) = \underset{p=\overline{1,k_j}}{\vee} w_{jp} \cdot \underset{i=\overline{1,n}}{\wedge} \left[\mu_{jp}(x_i^*)\right], \; j = \overline{1,m},$$

где $\vee(\wedge)$ - операция из s-нормы (t-нормы), т.е. из множества реализаций логической операций ИЛИ (И). В нечетком логическом выводе Сугено наиболее часто используются следующие реализации треугольных норм: вероятностное ИЛИ как s-норма и произведение как t-норма.

В результате получаем такое нечеткое множество $\tilde{y}$, соответствующее входному вектору X^*:

$$\tilde{y} = \frac{\mu_{d_1}(X^*)}{d_1} + \frac{\mu_{d_2}(X^*)}{d_2} + \ldots + \frac{\mu_{d_m}(X^*)}{d_m}.$$

Обратим внимание, что в отличие от результата вывода Мамдани, приведенное выше нечеткое множество является обычным нечетким множеством первого порядка. Оно задано на множестве четких чисел. Результирующее значение выхода y определяется как суперпозиция линейных зависимостей, выполняемых в данной точке X^* $n-$ мерного факторного пространства. Для этого дефаззифицируют нечеткое

множество $\tilde{y}$, находя взвешенное среднее $y = \dfrac{\sum_{j=\overline{1,m}} \mu_{d_j}(X^*) \cdot d_j}{\sum_{j=\overline{1,m}} \mu_{d_j}(X^*)}$ или взвешенную сумму $y = \sum_{j=\overline{1,m}} \mu_{d_j}(X^*) \cdot d_j$.

Пример 4. Известна нечеткая база знаний:

Если x=низкий, **то** $y = 3x$;

Если x=высокий, **то** $y = 9 - x$.

Функции принадлежности термов заданы следующими выражениям:

$$\mu^{\text{низкий}}(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{\text{П 1Я}}\right) \text{ и } \mu^{\text{высокий}}(x) = \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{\text{П 1Я}}\right),$$

$x \in [0,1]$.

Необходимо выполнить нечеткий логический вывод при значении входной переменной $x = 0.4$.

Выполнение нечеткого логического вывода показано на рис. 6. Дефаззификация проводилась по методу центра тяжести (взвешенного среднего). На рис. 7 показана зависимость "вход-выход" для приведенной выше нечеткой базы знаний. Участки графика, соответствующие первому и второму правилу базы знаний обозначены на рисунке #1 и #2.

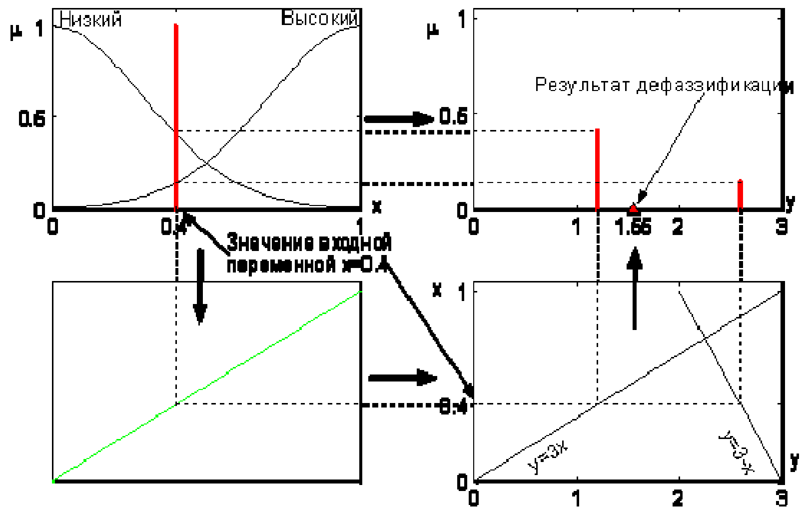


Рис. 6. Выполнение нечеткого логического вывода Сугено для примера 4

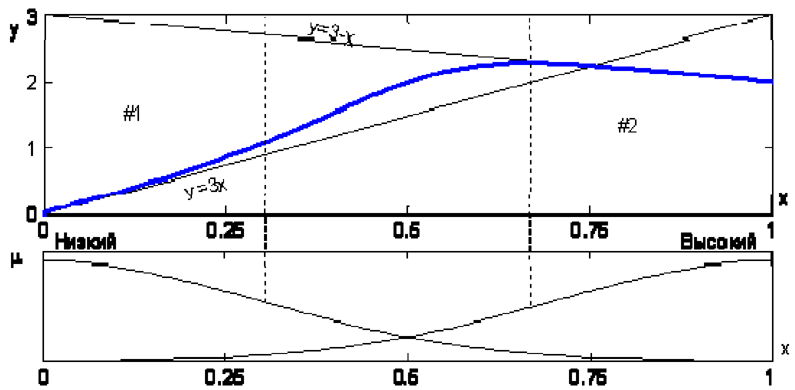


Рис.7. Зависимость "вход-выход" для нечеткой базы знаний из примера 4

7.2.4. Синглтонная модель нечеткого логического вывода

Рассмотрим нечеткую базу знаний, в которой посылки заданы нечеткими множествами, а заключения правил - четкими числами:

$$\bigcap_{i=1}^{n} x_i = a_{ij} \text{ с весом } w_j \to y = d_j, \quad j=\overline{1,m},$$

где d_j - некоторые действительные числа, которые могут быть представлены нечеткими множествами-синглетонами.

Синглтонная база знаний может рассматриваться, как частный случай базы знаний Мамдани. Четкое число, которым задается значение выходной переменной может рассматриваться как частный случай нечеткого множества. Такие нечеткие множества называются синглтонами. Функция принадлежности нечеткого множества-синглтона принимает единичное значение только для одного элемента, и нулевые значения для остальных. Кроме того, синглтонная нечеткая база знаний может также рассматриваться как частный случай базы знаний Сугено. Точнее она эквивалентна нечеткой базе знаний Сугено нулевого порядка, в которой коэффициенты при входных переменных в линейных законах "входы-выход" равны нулю.

Степени принадлежности входного вектора $X^* = (x_1^*, x_2^*, .. x_n^*)$ к четким значениям d_j рассчитывается следующим образом:

$$\mu_{d_j}(X^*) = w_j \cdot \bigwedge_{i=\overline{1,n}} \left[\mu_{ij}(x_i^*)\right], \; j=\overline{1,m},$$

где $\wedge$ - операция из t-нормы.

В результате получаем нечеткое множество $\tilde{y}$, соответствующее входному вектору X^*:

$$\tilde{y} = \frac{\mu_{d_1}(X^*)}{d_1} + \frac{\mu_{d_2}(X^*)}{d_2} + \ldots + \frac{\mu_{d_m}(X^*)}{d_m}.$$

Четкое значения выхода рассчитывается путем дефаззификации нечеткого множества $\tilde{y}$ по методу центра тяжести:

$$y = \frac{\sum\limits_{j=\overline{1,m}} d_j \cdot \mu_{d_j}(X^*)}{\sum\limits_{j=\overline{1,m}} \mu_{d_j}(X^*)}.$$

Заметим, что в отличие от нечеткого логического вывода Мамдани и Сугено, каждое правило вносит свой вклад в формирование значения выходной переменной. Другими словами, если два правила задают одно и тоже синглтонное значение выходной переменной, то этот синглтон будет дважды просуммирован при дефаззификации. В нечетких моделях Мамдани и Сугено, каждое заключение правил при дефаззификации учитывается только один раз.

Пример 5. Известна нечеткая база знаний:

Если x1=низкий И x2=низкий, **то** y=5;

Если x1=низкий И x2= высокий, **то** y=-6;

Если x1=высокий И x2=низкий, **то** y=-1;

Если x1=высокий И x2= высокий, **то** y=10.

Функции принадлежности термов входных переменных показаны на рис. 8.

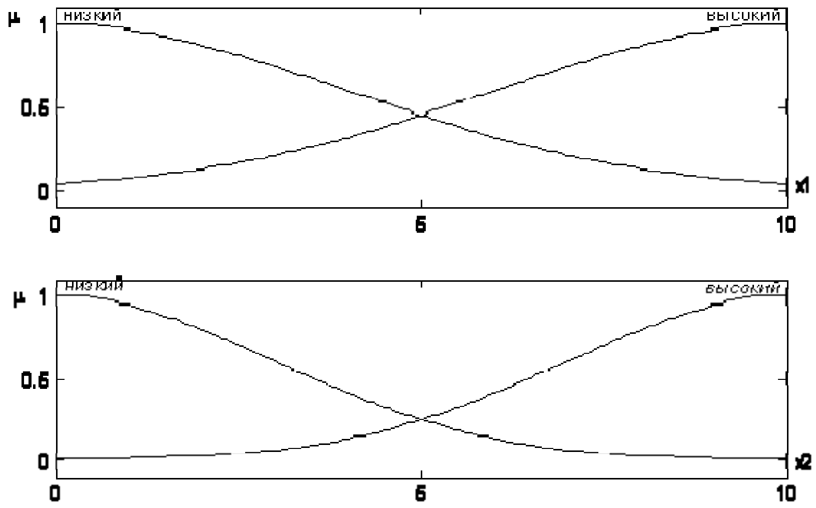


Рис.8. Функции принадлежности входных переменных

На рис. 9 показана поверхность "входы-выход" для приведенной нечеткой базы знаний при реализации t-нормы операцией минимума. На этом рисунке красными столбиками показаны заключения правил базы знаний. Нечеткий логический вывод аппроксимирует четкие значения заключений правил на все пространство входных переменных. Поверхность как бы натягивается на эти столбики - четкие значения заключений правил.

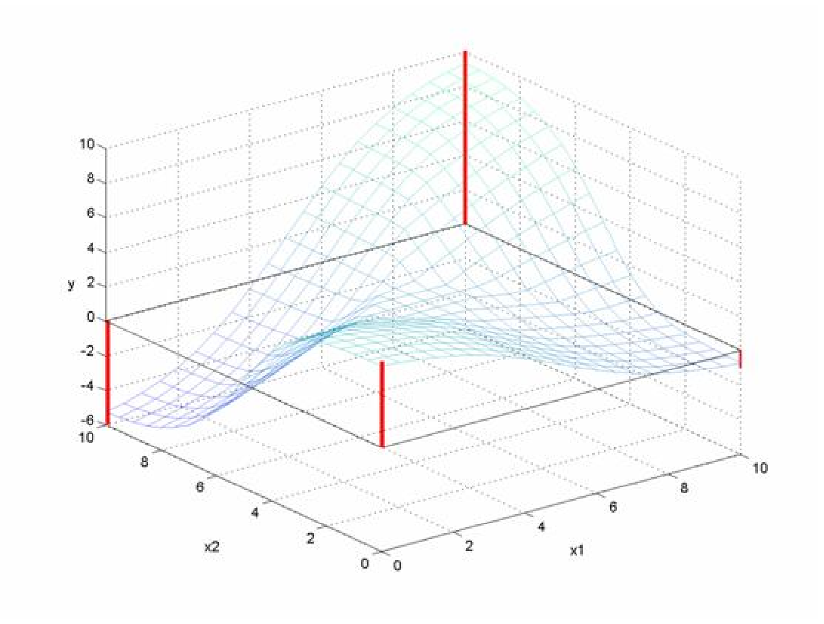


Рис.9. Поверхность "входы-выход"

7.2.5. Нечеткий логический вывод для задач классификации

Задача классификации состоит в отнесении объекта, заданного вектором информативных признаков $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, к одному из наперед определенных классов $\{d_1,d_2,\dots,d_m\}$ т.е., состоит в выполнении отображения вида:

$$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\to y\in\{d_1,d_2,\dots,c_m\}.$$

Классификация на основе нечеткого логического вывода происходит по базе знаний вида:

$$\bigcup_{p=1}^{k_j}\left(\bigcap_{i=1}^{n} x_i=a_{i,jp} \text{ с весом } w_{jp}\right)\to y=d_j,\quad j=\overline{1,m}.$$

Степени принадлежности объекта классификации, информативные признаки которого заданы вектором $X^*=(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)$, классам d_j из базы знаний, рассчитываются так:

$$\mu_{d_j}(X^*)=\bigvee_{p=\overline{1,k_j}} w_{jp}\cdot\bigwedge_{i=\overline{1,n}}\left[\mu_{jp}(x_i^*)\right],\quad j=\overline{1,m},$$

где $\vee(\wedge)$ - операция из s-нормы (t-нормы), т.е. из множества реализаций логической операций ИЛИ (И). Наиболее часто используются следующие реализации: для операции ИЛИ - нахождение максимума и для операции И - нахождение минимума.

В качестве решения выбирают класс с максимальной степенью принадлежности:

$$y^*=\underset{(d_1,d_2,\dots,d_m)}{\arg}\max\left(\mu_{d_1}(X^*),\mu_{d_2}(X^*),\dots,\mu_{d_m}(X^*)\right)$$

Пример 6. Известна нечеткая база знаний:

Если x1= низкий И x2= низкий, **то** y= класс 1;

Если x1= средний И x2= высокий, **то** y= класс 2;

Если x1= высокий И x2= высокий, **то** y= класс 3;

Если x1= высокий И x2= низкий, **то** y= класс 2.

Функции принадлежности термов входных переменных показаны на рис. 10.

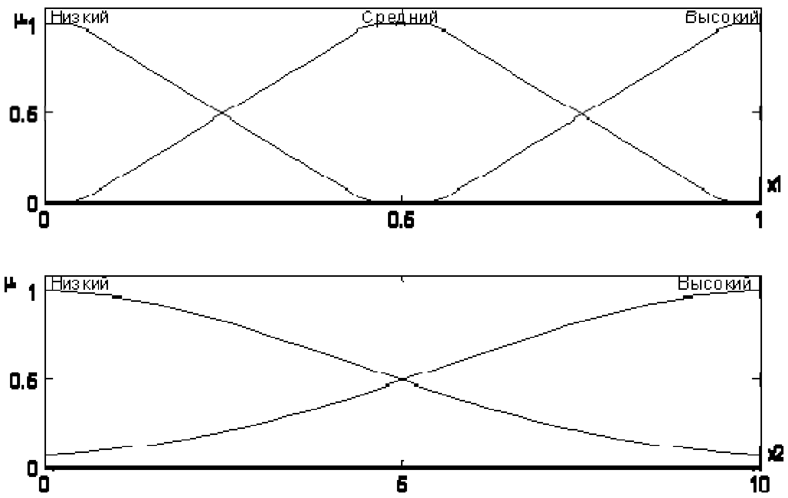


Рис. 10. Функции принадлежности термов входных переменных

На рис. 11 показаны результаты классификации 600 объектов для приведенной нечеткой базы знаний при реализации t-нормы операцией минимума и s-нормы операцией максимума. Области, соответствующие первому, второму, третьему и четвертому правилам базы знаний обозначены на рисунке символами #1, #2, #3 и #4.

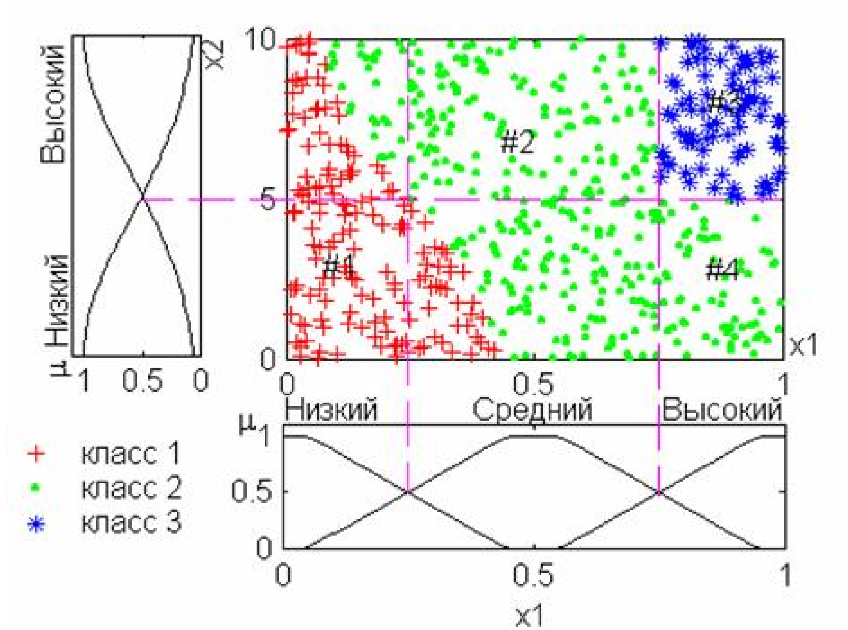


Рис. 11. Результаты классификации по нечеткой базе знаний из примера 6

7.2.6. Иерархические системы нечеткого логического вывода

Для моделирования многомерных зависимостей "входы - выход" целесообразно использовать иерархические системы нечеткого логического вывода. В этих системах выходная переменная одной базы знаний является входной для другой базы знаний. На рис. 12 приведен пример иерархической нечеткой базы знаний, моделирующей зависимость $y=f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ с использованием трех баз знаний. Эти базы знаний описывают такие зависимости: $y_1=f_1(x_1,x_2)$, $y_2=f_2(x_4,x_5,x_6)$ и $y=f_3(y_1,x_3,y_2)$.

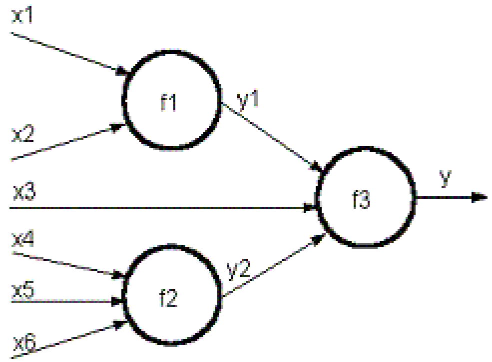


Рис. 12. Пример иерархической нечеткой базы знаний

Применение иерархических нечетких баз знаний позволяет преодолеть "проклятие размерности". При большом количестве входов эксперту трудно описать причинно-следственные связи в виде нечетких правил. Это обусловлено тем, что в оперативной памяти человека может одновременно хранится не более 7±2 понятий-признаков. Следовательно, количество входных переменных в одной базе знаний не должно превышать это магическое число. Более поздние исследования показали, что хорошие базы знаний получаются, когда количество входов не превышает пяти шести. Поэтому, при большем количестве входных переменных необходимо их иерархически классифицировать с учетом приведенных выше рекомендаций. Обычно, выполнение такой классификации не составляет трудностей для эксперта, так как при принятии решений человек иерархически учитывает влияющие факторы.

Преимущество иерархических баз знаний заключается еще и в том, что они позволяют небольшим количество нечетких правил адекватного описать многомерные зависимости "входы - выход". Пусть, для лингвистической оценки переменных используется по пять термов. Тогда, максимальное количество правил для задания зависимости $y=f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ с помощью одной базы знаний будет равным $5^6=15625$ (конечно, для адекватного описания зависимости "входы - выход" необходимо значительно меньше нечетких правил). Для иерархической базы знаний (рис. 12), описывающую ту же зависимость, максимальное количество нечетких правил будет равным $5_2+5_3+5_3=275$. Причем, это "короткие" правила с двумя - тремя

входными переменными.

Особенностью нечеткого логического вывода по иерархической базе знаний является отсутствие процедур дефаззификации и фаззификаци для промежуточных переменных (y_1 и y_2 на рис. 12). Результат логического вывода в виде нечеткого множества напрямую передается в машину нечеткого логического вывода следующего уровня иерархии. Поэтому, для описания промежуточных переменных в иерархических нечетких базах знаний достаточно задать только терм-множества, без определения функций принадлежностей.

7.2.7. **Аадаптивная сеть нечеткого вывода** - ANFIS

ANFIS - это аббревиатура Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System - адаптивная сеть нечеткого вывода. Она была предложена Янгом (Jang) в начале девяностых XX в. ANFIS является одним из первых вариантов гибридных нейро-нечетких сетей - **нейронной сети прямого распространения сигнала особого типа**. **Архитектура нейро-нечеткой сети изоморфна нечеткой базе знаний. В нейро-нечетких сетях используются дифференцируемые реализации треугольных норм (умножение и вероятностное ИЛИ), а также гладкие функции принадлежности.** Это позволяет применять для настройки нейро-нечетких сетей быстрые алгоритмы обучения нейронных сетей, основанные на методе обратного распространения ошибки. Ниже описываются архитектура и правила функционирования каждого слоя ANFIS-сети. Материал базируется на книге Nauck D., Klawonn F., Kruse R. Foundations of Neuro-Fuzzy Systems. John Wiley & Sons.- 1997.- 305p.

ANFIS реализует систему нечеткого вывода Сугено в виде пятислойной нейронной сети прямого распространения сигнала. Назначение слоев следующее:

первый слой - термы входных переменных;
второй слой - антецеденты (посылки) нечетких правил;
третий слой - нормализация степеней выполнения правил;
четвертый слой - заключения правил;
пятый слой - агрегирование результата, полученного по различным правилам.

Входы сети в отдельный слой не выделяются. На рис. 13 изображена

ANFIS-сеть с двумя входными переменными (x_1 и x_2) и четырьмя нечеткими правилами. Для лингвистической оценки входной переменной x_1 используется 3 терма, для переменной x_2 - 2 терма.

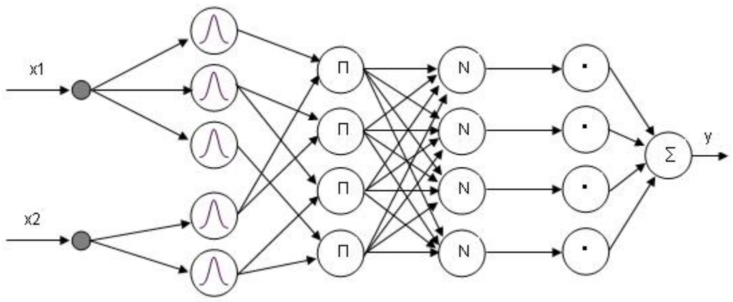


Рис. 13. Пример ANFIS-сети

Введем следующие обозначения, необходимые для дальнейшего изложения:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - входы сети;

y - выход сети;

R_r: Если $x_1 = a_{1,r}$ и ... и $x_n = a_{n,r}$, то $y = b_{0,r} + b_{1,r}x_1 + \ldots + b_{n,r}x_n$ - нечеткое правило с порядковым номером r;

m - количество правил, $r = \overline{1,m}$;

a_{ir} - нечеткий терм с функцией принадлежности $\mu_r(x_i)$, применяемый для лингвистической оценки переменной x_i в r-ом правиле ($r = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$);

$b_{q,r}$ - действительные числа в заключении r-го правила ($r = \overline{1,m}$, $q = \overline{0,n}$).

ANFIS-сеть функционирует следующим образом.

Слой 1. Каждый узел первого слоя представляет один терм с колокообразной функцией принадлежности. Входы сети $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соединены только со своими термами. Количество узлов первого слоя равно сумме мощностей терм-множеств входных переменных. Выходом узла являются степень принадлежности значения входной переменной соответствующему нечеткому терму:

$$\mu_r(x_i) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x_i - c}{a}\right|^{2b}},$$

где a, b и c - настраиваемые параметры функции принадлежности.

Слой 2. Количество узлов второго слоя равно m. Каждый узел этого слоя соответствует одному нечеткому правилу. Узел второго слоя соединен с теми узлами первого слоя, которые формируют антецеденты соответствующего правила. Следовательно, каждый узел второго слоя может принимать от 1 до n входных сигналов. Выходом узла является степень выполнения правила, которая рассчитывается как произведение входных сигналов. Обозначим выходы узлов этого слоя через τ_r, $r = \overline{1,m}$.

Слой 3. Количество узлов третьего слоя также равно m. Каждый узел этого слоя рассчитывает относительную степень выполнения нечеткого правила:

$$\tau_r^* = \frac{\tau_r}{\sum\limits_{j=\overline{1,m}} \tau_j}.$$

Слой 4. Количество узлов четвертого слоя также равно m. Каждый узел соединен с одним узлом третьего слоя а также со всеми входами сети (на рис. 1 связи с входами не показаны). Узел четвертого слоя рассчитывает вклад одного нечеткого правила в выход сети:

$$y_r = \tau_r^* \cdot (b_{0,r} + b_{1,r}x_1 + \ldots + b_{n,r}x_n).$$

Слой 5. Единственный узел этого слоя суммирует вклады всех правил:

$$y = y_1 + \ldots y_r \ldots + y_m.$$

Типовые процедуры обучения нейронных сетей могут быть применены для настройки ANFIS-сети так как, в ней использует только дифференцируемые функции. Обычно применяется комбинация градиентного спуска в виде алгоритма обратного распространения ошибки и метода наименьших квадратов. Алгоритм обратного распространения ошибки настраивает параметры антецедентов правил, т.е. функций принадлежности. Методом наименьших квадратов оцениваются коэффициенты заключений правил, так как они линейно связаны с выходом сети. Каждая итерация процедуры настройки выполняется в два этапа. На первом этапе на входы подается обучающая выборка, и по невязке между желаемым и действительным поведением сети итерационным методом наименьших квадратов находятся оптимальные параметры узлов четвертого слоя. На втором этапе остаточная невязка передается с выхода сети на входы, и методом обратного распространения ошибки модифицируются параметры узлов первого слоя. При этом найденные на первом этапе коэффициенты заключений правил не изменяются. Итерационная процедура настройки продолжается пока невязка превышает заранее установленное значение. Для настройки функций принадлежностей кроме метода обратного распространения ошибки могут использоваться и другие алгоритмы оптимизации, например, метод Левенберга-Марквардта.

Как отмечалось выше, Адаптивная сеть на основе системы нечеткого вывода (adaptive neuro-fuzzy inference system) или **Адаптивная нейро-нечеткая система вывода** (adaptive network-based fuzzy inference system), **ANFIS** — это искусственная нейронная сеть, основанная на нечеткой системе вывода Такаги-Сугено.

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

Так как этот метод интегрирует принципы нейронных сетей с принципами нечеткой логики, то у него есть потенциал, чтобы совместить их преимущества в одной структуре.

Вывод такой системы соответствует набору нечетких правил «если-то» (if-then), которые имеют способность к обучению аппроксимированию нелинейных функций.

Следовательно, ANFIS считается универсальным оценщиком.

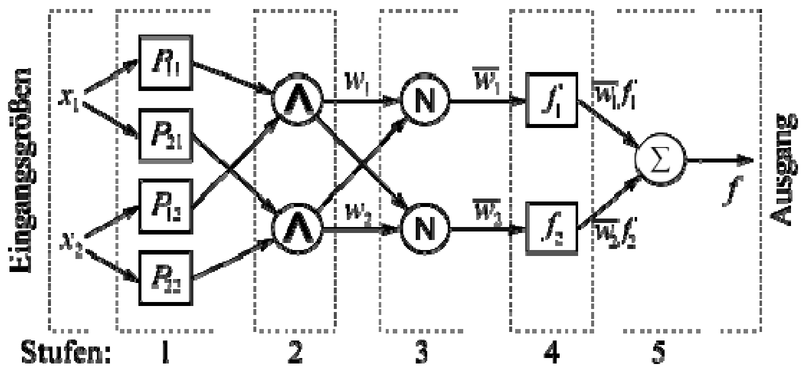
Для использования ANFIS наиболее эффективным и оптимальным способом, можно использовать параметры, полученные с помощью генетического алгоритма.

Пример

Простой контроллер Сугено-Такаги с двумя входами и двумя правилами:

```
ЕСЛИ P11(x1) И P12(x2) TO f1(x1, x2)
ЕСЛИ P21(x1) И P22(x2) TO f2(x1, x2)
```

ANFIS, который реализует этот элемент управления, будет выглядеть следующим образом:



Skizze des oberen Systems

8. Нечеткая логика по А. Кофману

8.1. Введение

В сочетании слов «нечеткий» и «логика» есть что-то необычное. **Логика в обычном смысле слова есть представление механизмов мышления, то, что никогда не может быть нечетким, но всегда строгим и формальным.** Однако математики, исследовавшие эти механизмы мышления, заметили, что в действительности **существует не одна логика (например, булева), а столько логик, сколько мы пожелаем, потому что все определяется выбором соответствующей системы аксиом.** Конечно, как только аксиомы выбраны, все утверждения, построенные на их основе, должны быть строго, без противоречий увязаны друг с другом согласно правилам, установленным в этой системе аксиом.
Булева логика — это логика, связанная с булевой теорией множеств; аналогично нечеткая логика связана с теорией нечетких подмножеств. Единой теории нечетких подмножеств не существует, каждый может построить их столько, сколько пожелает.
Человеческое мышление — это совмещение интуиции и строгости, которое, с одной стороны, рассматривает все в целом или по аналогии (поэтому необходимо нечетко), а с другой стороны — логически и последовательно (необходимо формально) и, значит, представляет собой нечеткий механизм. Законы мышления, которые мы захотели бы включить в программы компьютеров, должны быть обязательно формальными; законы мышления, проявляемые в диалоге человека с человеком — нечеткие. Можем ли мы поэтому утверждать, что теория нечетких подмножеств в ее обобщенной форме (или в том виде, в каком она появляется, например, в теории структур) хорошо приспособлена к человеческому диалогу? Да, **если математическое обеспечение, разработанное с учетом нечеткой логики, станет операционным и сможет быть технически реализовано, то человеко-машинное общение станет намного более удобным, быстрым и лучше приспособленным к решению проблем.**
В этой работе мы вынуждены ограничиться лишь введением в соответствующую проблематику. Но развитие в этом направлении будет тем быстрее, чем больше будет инженеров, способных перенять от математиков эту новую, стимулирующую воображение, теорию

8.2. Характеристическая функция нечеткого подмножества. Нечеткие переменные

Пусть $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ есть функция принадлежности элемента x нечеткому подмножеству $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$. Ранее мы определили основные операции, которые можно выполнять с нечеткими подмножествами одного и того же универсального множества.

Некоторые авторы (например, S. Nahmias. Fuzzy *Ж* variables. — ORSA-TIMS Conf. Miami. — Nov. 1976) используют термин «нечеткая переменная» в смысле, отличном от придаваемого ему в этой работе. Для Намиаса и некоторых других авторов нечеткая переменная обобщает понятие случайной переменной. Нечеткая переменная и случайная переменная в том смысле, который им придают эти авторы, представляют собой на деле только нечеткие или случайные подмножества в **R**. Здесь же, как и в последующем тексте, понятие «нечеткая переменная» обобщает понятие «булева переменная».

В этой главе мы будем предполагать, что множество степеней принадлежности произвольного элемента универсального множества к нечеткому множеству есть

$$\mathbf{M} = [0,1]. \tag{2.1}$$

Мы уже напоминали, как выполняются операции бинарной булевой алгебры над обычными подмножествами.
Будем использовать следующее обозначение:

$$a = \mu_{\mathbf{A}}(x), \qquad b = \mu_{\mathbf{B}}(x) \text{ и т. д.} \tag{2.2}$$

Мы знаем, что вбинарной булевой алгебре переменные, обозначаемые здесь через *a, b,* ..., могут принимать только значения 0 или 1. В табл. 2.1 операции этой алгебры сопоставляются с операциями теории множеств.

Таблица 2.1

Подмножества	Соответствующие операции	
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$	$a \cdot b$	(2.3)
$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$	$a \dot{+} b$	(2.4)
$\overline{\mathbf{A}} = C_{\mathbf{E}}\mathbf{A}$	$\bar{a}$	(2.5)
$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = (\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}})$	$a \oplus b = \bar{a} \cdot b \dot{+} a \cdot \bar{b}$	(2.6)

Основные соответствия, которые мы видим в (2.3) — (2.6), устанавливают дидактическое введение и будут справедливы не только для булевых характеристических функций и функций принадлежности с $\mathbf{M} = \{0,1\}$, но и для нечетких функций с $\mathbf{M} = [0,1]$.
Пусть x — элемент универсального множества $\mathbf{E}$ и $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$, ... — нечеткие подмножества этого универсального множества. Пусть

$$\underset{\sim}{a} = \mu_{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}(x),\ \underset{\sim}{b} = \mu_{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}(x), \ldots;\ \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots \in \mathbf{M} = [0, 1]. \quad (2.7)$$

Определим следующие операции на величинах $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$, ...:

$$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} = \mathrm{MIN}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}),$$
$$\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b} = \mathrm{MAX}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}),$$
$$\bar{\underset{\sim}{a}} = 1 - \underset{\sim}{a},$$
$$\underset{\sim}{a} \oplus \underset{\sim}{b} = (\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}}). \quad (2.8\text{-}2.11)$$

Используя известные определения, можно записать:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} &= \underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{a}, \\ \underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b} &= \underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{a}, \end{aligned}\right\} \text{ коммутативность}$$

$$\left.\begin{aligned} (\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}) \wedge \underset{\sim}{c} &= \underset{\sim}{a} \wedge (\underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{c}), \\ (\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}) \vee \underset{\sim}{c} &= \underset{\sim}{a} \vee (\underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{c}), \end{aligned}\right\} \text{ ассоциативность}$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{a} &= \underset{\sim}{a}, \\ \underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{a} &= \underset{\sim}{a}, \end{aligned}\right\} \text{ идемпотентность,}$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{a} \wedge (\underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{c}) &= (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{c}), \\ \underset{\sim}{a} \vee (\underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{c}) &= (\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}) \wedge (\underset{\sim}{d} \vee \underset{\sim}{c}), \end{aligned}\right\} \text{ дистрибутивность}$$

$$\underset{\sim}{a} \wedge 0 = 0,$$
$$\underset{\sim}{a} \vee 0 = \underset{\sim}{a},$$
$$\underset{\sim}{a} \wedge 1 = a,$$
$$\underset{\sim}{a} \vee 1 = \underset{\sim}{1},$$
$$\overline{(\bar{\underset{\sim}{a}})} = \underset{\sim}{a},$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}} &= \bar{\underset{\sim}{a}} \vee \bar{\underset{\sim}{b}}, \\ \overline{\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}} &= \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}}. \end{aligned}\right\} \text{ теоремы де Моргана, обобщенные на случай } \mathbf{M}[0, 1].$$

(2.12-2.26)

Доказательства всех этих формул тривиальны, за исключением, может быть, формул (2.18), (2.19), (2.25) и (2.26).
Докажем (2.18). Предположим, что значения величин *a, b и c* могут находиться в отношениях, определяемых следующими тремя различными полными порядками (не имеет смысла рассматривать шесть порядков)

$$1)\ 0 \leqslant \underset{\sim}{a} \leqslant \underset{\sim}{b} \leqslant \underset{\sim}{c} \leqslant 1,$$
$$2)\ 0 \leqslant \underset{\sim}{b} \leqslant \underset{\sim}{c} \leqslant \underset{\sim}{a} \leqslant 1 \quad \text{и} \quad 3)\ 0 \leqslant \underset{\sim}{c} \leqslant \underset{\sim}{a} \leqslant \underset{\sim}{b} \leqslant \underset{\sim}{1}. \quad (2.27)$$

Имеем

$$1)\ \underset{\sim}{a} \wedge (\underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{c}) = \mathrm{MIN}[\underset{\sim}{a},\ \mathrm{MAX}(\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c})] = \mathrm{MIN}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{c}) = \underset{\sim}{a},$$
$$(\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{c}) = \mathrm{MAX}[\mathrm{MIN}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}), \mathrm{MIN}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{c})] =$$
$$= \mathrm{MAX}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{a}.$$
$$2)\ \underset{\sim}{a} \wedge (\underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{c}) = \mathrm{MIN}[\underset{\sim}{a},\ \mathrm{MAX}(\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c})] = \mathrm{MIN}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{c}) = \underset{\sim}{c}.$$
$$(\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{c}) = \mathrm{MAX}[\mathrm{MIN}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}), \mathrm{MIN}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{c})] =$$
$$= \mathrm{MAX}(\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = \underset{\sim}{c}.$$
$$3)\ \underset{\sim}{a} \wedge (\underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{c}) = \mathrm{MIN}[\underset{\sim}{a},\ \mathrm{MAX}(\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c})] = \mathrm{MIN}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a}.$$
$$(\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{c}) = \mathrm{MAX}[\mathrm{MIN}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}), \mathrm{MIN}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{c})] =$$
$$= \mathrm{MAX}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{c}) = \underset{\sim}{a}.$$

(2.28-2.33)

Аналогично можно доказать формулу (2.19)

Докажем теорему де Моргана (2.25). Пусть $0 \leqslant \underset{\sim}{a} < \underset{\sim}{b} \leqslant 1$,

$$\mathrm{MAX}[(1-\underset{\sim}{a}), (1-\underset{\sim}{b})] = 1-\underset{\sim}{a},$$
$$\mathrm{MIN}[\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}] = \underset{\sim}{a},$$
$$\mathrm{MAX}[(1-\underset{\sim}{a}), (1-\underset{\sim}{b})] + \mathrm{MIN}[\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}] = 1-\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{a} = 1. \quad (2.34\text{-}2.36)$$

Тогда

$$\mathrm{MAX}[(1-\underset{\sim}{a}), (1-\underset{\sim}{b})] = 1 - \mathrm{MIN}[\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}] \quad (2.37)$$

или

$$\bar{\underset{\sim}{a}} \vee \bar{\underset{\sim}{b}} = \overline{\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}}. \quad (2.38)$$

Замечание. За исключением двух свойств

$$a \cdot \bar{a} = 0 \quad (2.39)$$

и

$$a \dotplus \bar{a} = 1, \quad (2.40)$$

для которых, кроме случая $\underset{\sim}{a} = 0$ или $\underset{\sim}{a} = 1$, соответствующие соотношения для нечетких множеств не выполняются:

(32.41)

$$\underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{a}} \neq 0, \quad \text{исключая } \underset{\sim}{a} = 0 \text{ или } \underset{\sim}{a} = 1,$$
$$\underset{\sim}{a} \vee \bar{\underset{\sim}{a}} \neq 1, \quad \text{исключая } \underset{\sim}{a} = 0 \text{ или } \underset{\sim}{a} = 1, \quad (2.41\text{-}2.42)$$

свойства (2.12) — (2. 26) составляют все свойства бинарной булевой алгебры.

Из-за этих исключений структура, определяемая на множестве переменных $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$, ... операциями $\wedge, \vee$ и $^{-}$, не может рассматриваться как алгебра в том смысле, в каком этот термин употребляется в современной математике. Поэтому следует отдавать себе отчет в том, что слово «алгебра», как и многие другие слова из математического лексикона, не всеми употребляются в одном и том же смысле.

Нечеткие переменные. Функции нечетких переменных. В настоящей теории переменные $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$, ... $\in$ [0,1] будут называться *нечеткими переменными.* Функции, построенные с помощью таких переменных, будут называться функциями нечетких переменных, если выполнено следующее условие.

Пусть $\underset{\sim}{f}$ $(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, ...)$ есть функция от аргументов $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$, ... Чтобы эту функцию можно было назвать функцией нечетких переменных, необходимо и достаточно, чтобы $\underset{\sim}{f}$ зависела только от нечетких переменных и чтобы

$$0 \leqslant \underset{\sim}{f} \leqslant 1. \quad (2.43)$$

Теорема 1. Если $\underset{\sim}{f}$ $(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, ...)$ содержит только нечеткие переменные и операторы $\wedge, \vee$ и $^{-}$, то условие (2.43) всегда выполнено.

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно. Каждая из операций $\wedge, \vee$ или $^{-}$ на переменных $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$, ... $\in$ [0,1] не может дать результат, выходящий за пределы 0 и 1. Применение к таким результатам операций $\wedge, \vee$, $^{-}$ не может дать результат, выходящий за эти границы.

Упрощение функций нечетких переменных. В отличие от булевых функций для систематического анализа функций от нечетких аргументов нельзя воспользоваться методом составления таблиц истинности. Они не поддаются упрощению так легко, как булевы функции, поскольку не обладают свойствами (2.39) и (2.40). По этой же причине эти функции нельзя представить в дизъюнктивной нормальной форме (с помощью минитермов) или в конъюнктивной нормальной форме (с помощью макситермов) .

Иногда определенное число упрощений можно успешно провести, используя только свойства (2.12) — (2.26). Рассмотрим несколько примеров таких упрощений:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \qquad (2.44)$$
$$= \underset{\sim}{a} \wedge (\tilde{1} \vee \underset{\sim}{b}) \text{ согласно (2.18) и (2.22), так как}$$
$$\underset{\sim}{a} \wedge (1 \vee \underset{\sim}{b}) = (\underset{\sim}{a} \wedge 1) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b});$$
$$= \underset{\sim}{a} \wedge 1 \text{ по (2.23)}$$
$$= \underset{\sim}{a} \qquad \text{по (2.22).}$$

Итак,

$$\underset{\sim}{a} \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a}. \qquad \mathbf{(2.45)}$$

Это так называемое *свойство поглощения.* Аналогично можно показать, что

$$\underset{\sim}{a} \wedge (\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a}. \qquad (2.46)$$

Это двойственная форма свойства поглощения. Рассмотрим еще один пример:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \bar{\underset{\sim}{c}}) \vee [\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge (\bar{\underset{\sim}{b}} \vee \underset{\sim}{c})] \vee \bar{\underset{\sim}{a}} \vee (\underset{\sim}{b} \wedge \bar{\underset{\sim}{c}}) =$$
$$= \underbrace{(\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \bar{\underset{\sim}{c}})}_{(1)} \vee \underbrace{(\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}})}_{(2)} \vee \underbrace{(\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c})}_{(3)} \vee \underbrace{\bar{\underset{\sim}{a}}}_{(4)} \vee \underbrace{(\underset{\sim}{b} \wedge \bar{\underset{\sim}{c}})}_{(5)} = (\underset{\sim}{b} \wedge \bar{\underset{\sim}{c}}) \vee \bar{\underset{\sim}{a}}$$

(2.47)

согласно свойству поглощения для (1) и (5) и для (2)—(4).
Здесь следует отметить важную роль скобок.
Мы знаем, что число различных булевых функций при *n* различных переменных равно $2^{(2^n)}$. В случае *n* нечетких переменных число нечетких функций, составленных произвольным образом из этих *n* переменных и операций $\wedge, \vee$ и $^{-}$, также конечно; мы докажем это позже.

Замечание. Операцию $\vee$ можно выразить через операцию $\wedge$ и операцию $^{-}$ и наоборот. Действительно,

$$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} = \mathrm{MIN}(\underset{\sim}{a},\ \underset{\sim}{b}) = 1 - \mathrm{MAX}(\bar{\underset{\sim}{a}},\ \bar{\underset{\sim}{b}}) = \overline{\bar{\underset{\sim}{a}} \vee \bar{\underset{\sim}{b}}}. \qquad (2.48)$$

Это другой способ представления закона (2.25). То же можно сделать для второго закона де Моргана (2.26).
Таким образом, достаточно использовать операторы $\wedge$ и $^{-}$ или операторы $\vee$ и $^{-}$ для того, чтобы представить любую функцию нечетких переменных, содержащую символы $\wedge, \vee$ и $^{-}$, хотя выражение становится очень громоздким.
Следует напомнить, что в булевой алгебре для того, чтобы представить произвольную булеву функцию, достаточно одного оператора.
Рассмотрим *оператор Шеффера:*

$$a \mid b = \overline{a \cdot b} = \bar{a} \dotplus \bar{b}, \qquad (2.49)$$

поскольку

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

$$a \dotplus b = \bar{a} \mid \bar{b} = (a \mid a) \mid b \mid b,$$
$$a \cdot a = \overline{a \mid b} = (a \mid b) \mid (a \mid b),$$
$$\bar{a} = (a \mid a).$$

(2.50-2.52)

Рассмотрим *оператор Пирса:*

$$a \downarrow b = \overline{a \dotplus b} = \bar{a} \cdot \bar{b}, \qquad \mathbf{(2.53)}$$

поскольку

$$a \dotplus b = \overline{a \downarrow b} = (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b),$$
$$a \cdot b = \bar{a} \downarrow \bar{b} = (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b),$$
$$\bar{a} = a \downarrow a.$$

(2.54-2.56)

От булевых выражений, использующих оператор Пирса, можно переходить к выражениям, содержащим оператор Шеффера, и наоборот:

$$a \downarrow b = \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{\bar{a} \mid \bar{b}} = \overline{(a \mid a) \mid (b \mid b)} = ((a \mid a) \mid (b \mid b)) \mid ((a \mid a) \mid (b \mid b)),$$

(2.57)

$$a \mid b = \bar{a} \dotplus \bar{b} = \overline{\bar{a} \downarrow \bar{b}} = \overline{(a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)} = ((a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)) \downarrow ((a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)).$$

(2.58)

Хотя трудности в написании появляются довольно скоро и это исключает возможность использования таких операторов в ручных вычислениях, с их помощью можно по единой технологии сконструировать электронную схему для автоматических расчетов, которая в определенных случаях может оказаться полезной.
Для нечетких переменных мы определим операторы:
Шеффера

$$\underset{\sim}{a} \mid \underset{\sim}{b} = \overline{\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}} = \bar{\underset{\sim}{a}} \vee \bar{\underset{\sim}{b}};$$

(2.59)

Пирса

$$\underset{\sim}{a} \downarrow \underset{\sim}{b} = \overline{\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}} = \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}}. \qquad (2.60)$$

Любую функцию нечетких переменных можно записать с помощью только одного из этих операторов. Имеем

$$1)\ \utilde{a}\vee\utilde{b}=\utilde{\bar a}\,|\,\utilde{\bar b}=(\utilde{a}\,|\,\utilde{a})\,|\,(\utilde{b}\,|\,\utilde{b}),$$

$$\utilde{a}\wedge\utilde{b}=\overline{\utilde{a}\,|\,\utilde{b}}=(\utilde{a}\,|\,\utilde{b})\,|\,(\utilde{a}\,|\,\utilde{b}),$$

$$\utilde{\bar a}=\utilde{a}\,|\,\utilde{a}.$$

$$2)\ \utilde{a}\vee\utilde{b}=\overline{\utilde{a}\downarrow\utilde{b}}=(\utilde{a}\downarrow\utilde{b})\downarrow(\utilde{a}\downarrow\utilde{b}),$$

$$\utilde{a}\wedge\utilde{b}=\utilde{\bar a}\downarrow\utilde{\bar b}=(\utilde{a}\downarrow\utilde{a})\downarrow(\utilde{b}\downarrow\utilde{b}),$$

$$\utilde{\bar a}=\utilde{a}\downarrow\utilde{a}.$$

(2.61-2.66)

Используя формулы (2.57) и (2.58), можно перейти от оператора Пирса к оператору Шеффера и наоборот.

В качестве примера рассмотрим, как записать не слишком сложную функцию нечетких переменных, используя оператор Шеффера:

$$\begin{aligned}\utilde{f}(\utilde{a},\utilde{b},\utilde{c})&=\utilde{\bar a}\wedge(\utilde{b}\vee\utilde{\bar c})=\\&=(\utilde{a}\,|\,\utilde{a})\wedge((\utilde{b}\,|\,\utilde{b})\,|\,(\utilde{\bar c}\,|\,\utilde{\bar c}))=\\&=(\utilde{a}\,|\,\utilde{a})\wedge((\utilde{b}\,|\,\utilde{b})\,|\,(((\utilde{c}\,|\,\utilde{c})\,|\,(\utilde{c}\,|\,\utilde{c}))))=\\&=((\utilde{a}\,|\,\utilde{a})\,|\,((\utilde{b}\,|\,\utilde{b})\,|\,((\utilde{c}\,|\,\utilde{c})\,|\,(\utilde{c}\,|\,\utilde{c}))))\,|=\\&=|\,((\utilde{a}\,|\,\utilde{a})\,|\,((\utilde{b}\,|\,\utilde{b})\,|\,((\utilde{c}\,|\,\utilde{c})\,|\,(\utilde{c}\,|\,\utilde{c})))).\end{aligned}\qquad(2.67)$$

Это очень сложное выражение для такой простой функции, как $\utilde{\bar a}\wedge(\utilde{b}\vee\utilde{\bar c})$.

Таблица значений функции нечетких переменных. Для изучения булевых бинарных функций можно использовать так называемую таблицу истинности, в которой бинарным переменным придаются все возможные значения и выписываются соответствующие значения функции. Такая таблица истинности не была бы лишена смысла для функций нечетких переменных, но можно построить таблицу другого типа, которая играет аналогичную роль.

Чтобы изучить функцию одной нечеткой переменной $\utilde{a}$, рассмотрим ее значение в следующих двух случаях:

$$\utilde{a}\leqslant\utilde{\bar a},\quad \utilde{\bar a}\leqslant\utilde{a}.\qquad(2.68)$$

Для изучения функции двух переменных $\utilde{a}$ и $\utilde{b}$ рассмотрим ее значение в следующих восьми случаях: (эти перечислительные процедуры предлагается называть антиполиндромами, поскольку они образуют

полиндромические последовательности, в которых знаки взятия дополнения расположены антисимметрично. (Полиндром — это число, слово или фраза с симметрично расположенными цифрами или буквами: 12344321 или «А роза упала на лапу Азора».)

$$\begin{array}{llll}\utilde{a}\leqslant\utilde{b}\leqslant\utilde{\bar b}\leqslant\utilde{\bar a}, & \utilde{a}\leqslant\utilde{\bar b}\leqslant\utilde{b}\leqslant\utilde{\bar a}, & \utilde{\bar a}\leqslant\utilde{b}\leqslant\utilde{\bar b}\leqslant\utilde{a}, & \utilde{\bar a}\leqslant\utilde{\bar b}\leqslant\utilde{b}\leqslant\utilde{a},\\ \utilde{b}\leqslant\utilde{a}\leqslant\utilde{\bar a}\leqslant\utilde{\bar b}, & \utilde{b}\leqslant\utilde{\bar a}\leqslant\utilde{a}\leqslant\utilde{\bar b}, & \utilde{\bar b}\leqslant\utilde{a}\leqslant\utilde{\bar a}\leqslant\utilde{b}, & \utilde{\bar b}\leqslant\utilde{\bar a}\leqslant\utilde{a}\leqslant\utilde{b}.\end{array}\qquad(2.69)$$

Чтобы изучить функцию трех переменных $\utilde{a}$, $\utilde{b}$ и $\utilde{c}$, рассмотрим следующие 48 случаев, выписанных для экономии места без знака ≤ и символа ~ :

$$\begin{array}{lll}
abc\bar c\bar b\bar a & acb\bar b\bar c\bar a & bac\bar c\bar a\bar b\\
ab\bar c c\bar b\bar a & ac\bar b b\bar c\bar a & ba\bar c c\bar a\bar b\\
a\bar b c\bar c b\bar a & a\bar c b\bar b c\bar a & b\bar a c\bar c a\bar b\\
a\bar b\bar c c b\bar a & a\bar c\bar b b c\bar a & b\bar a\bar c c a\bar b\\
\bar a bc\bar c\bar b a & \bar a cb\bar b\bar c a & \bar b ac\bar c\bar a b\\
\bar a b\bar c c\bar b a & \bar a c\bar b b\bar c a & \bar b a\bar c c\bar a b\\
\bar a\bar b c\bar c b a & \bar a\bar c b\bar b c a & \bar b\bar a c\bar c a b\\
\bar a\bar b\bar c c b a & \bar a\bar c\bar b b c a & \bar b\bar a\bar c c a b\\
bca\bar a\bar c\bar b & cab\bar b\bar a\bar c & cba\bar a\bar b\bar c\\
bc\bar a a\bar c\bar b & ca\bar b b\bar a\bar c & cb\bar a a\bar b\bar c\\
b\bar c a\bar a c\bar b & c\bar a b\bar b a\bar c & c\bar b a\bar a b\bar c\\
b\bar c\bar a a c\bar b & c\bar a\bar b b a\bar c & c\bar b\bar a a b\bar c\\
\bar b ca\bar a\bar c b & \bar c ab\bar b\bar a c & \bar c ba\bar a\bar b c\\
\bar b c\bar a a\bar c b & \bar c a\bar b b\bar a c & \bar c b\bar a a\bar b c\\
\bar b\bar c a\bar a c b & \bar c\bar a b\bar b a c & \bar c\bar b a\bar a b c\\
\bar b\bar c\bar a a c b & \bar c\bar a\bar b b a c & \bar c\bar b\bar a a b c.
\end{array}\qquad(2.70)$$

Для изучения функции n переменных рассматривается

$$P_n\cdot 2^n \text{ случаев,}\qquad(2.71)$$

где $P_n = n! = n(n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1$.

Рассматривая соотношения (2.68) — (2.70), можно установить эффект антисимметрии, возникающий из-за того, что

$$\text{если}\quad \utilde{x}\leqslant\utilde{y},\quad\text{то}\quad \utilde{\bar y}\leqslant\utilde{\bar x}.\qquad(2.72)$$

Чтобы перечислить все возможные случаи без пропусков и повторений, используем лексикографическую процедуру. Установим, например, следующее соответствие:

$$\begin{matrix} 1 & a, & 3 & b, \\ 2 & \bar{a}, & 4 & \bar{b}. \end{matrix} \tag{2.73}$$

Тогда имеем соответствия

$$\begin{matrix}
13 & ab, \text{ откуда } ab\bar{b}\bar{a}, \\
14 & a\bar{b}, \text{ откуда } a\bar{b}b\bar{a}, \\
23 & \bar{a}b, \text{ откуда } \bar{a}b\bar{b}a, \\
24 & \bar{a}\bar{b}, \text{ откуда } \bar{a}\bar{b}ba, \\
31 & ba, \text{ откуда } ba\bar{a}\bar{b}, \\
32 & b\bar{a}, \text{ откуда } b\bar{a}a\bar{b}, \\
41 & \bar{b}a, \text{ откуда } \bar{b}a\bar{a}b, \\
42 & \bar{b}\bar{a}, \text{ откуда } \bar{b}\bar{a}ab.
\end{matrix} \tag{2.74}$$

Легко представить себе и другие процедуры.

Рассмотрим пример. Перечислим значения функции

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{\bar{a}}) \vee (\underset{\sim}{\bar{a}} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{\bar{b}}); \tag{2.75}$$

результат представлен на рис. 2.1.

$\leqslant \qquad \leqslant \qquad \leqslant$				$\underset{\sim}{a}\wedge\underset{\sim}{\bar{a}}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}\wedge\underset{\sim}{b}\wedge\underset{\sim}{\bar{b}}$	$(\underset{\sim}{a}\wedge\underset{\sim}{\bar{a}})\vee(\underset{\sim}{\bar{a}}\wedge\underset{\sim}{b}\wedge\underset{\sim}{\bar{b}})$
$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{\bar{b}}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{b}$
$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{\bar{b}}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{\bar{b}}$	$\underset{\sim}{\bar{b}}$
$\underset{\sim}{\bar{a}}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{\bar{b}}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$
$\underset{\sim}{\bar{a}}$	$\underset{\sim}{\bar{b}}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$
$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$	$\underset{\sim}{\bar{b}}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{a}$
$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{\bar{b}}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$
$\underset{\sim}{\bar{b}}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{\bar{b}}$	$\underset{\sim}{a}$
$\underset{\sim}{\bar{b}}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$	$\underset{\sim}{\bar{b}}$	$\underset{\sim}{\bar{a}}$

Рис. 2.1

Равносильность двух функций нечетких переменных. Скажем, что две функции $\underset{\sim}{f}_1$ и $\underset{\sim}{f}_2$ нечетких переменных равносильны (говорят также тождественны), если они имеют одну и ту же таблицу значений, включающую все возможные случаи.

Смешанные операции. Переменные $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots \in [0,1]$, могут подвергаться другим, отличным от $\wedge, \vee$ и $^{-}$, операциям при образовании того, что будет называться *смешанными функциями нечетких переменных.*

В число таких операций входят:

$$\text{умножение } a \cdot b, \tag{2.76}$$

для которого, как легко проверить, выполняется свойство

$$\underset{\sim}{a} \in [0,1], \quad \underset{\sim}{b} \in [0,1] \Rightarrow \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} \in [0,1]. \tag{2.77}$$

и суммирование

$$\underset{\sim}{a} \hat{+} \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}, \tag{2.78}$$

здесь тоже сохраняется свойство (2.77).

Например, выражение

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c})=(\underset{\sim}{a}\mathbin{\widehat{+}}\underset{\sim}{b})\wedge(\underset{\sim}{b}\mathbin{\widehat{+}}\underset{\sim}{c})\wedge\underset{\sim}{a}\wedge\underset{\sim}{c} \qquad (2.79)$$

— смешанная функция.

Важное замечание. С помощью таблицы перечисления можно для n переменных определить

$$N=(2n)^{(n!\,2^n)} \qquad (2.80)$$

различных функций;(это легко доказать. Для я переменных $a, b, ..., l$ существует n! перестановок. Каждая перестановка должна содержать a или $\bar{a}$, b или $\bar{b}$, ..., l или l; таким образом, получаем в 2^n раз больше перестановок, что дает $n!\,2^n$, т. е. число строк в такой таблице, как на рис. 2.1. Значения в каждой строке принадлежат этим $2n$ переменным и соответствующим им дополнениям. Следовательно, с помощью таких таблиц определяются $(2n)^{(n!\,2^n)}$ различных функций.)

таким образом, при

$$\begin{array}{ll} n=1 & N=(2\cdot 1)^2=2^2=4, \\ n=2 & N=(2\cdot 2)^{2\cdot 2^2}=4^8=65536, \\ n=3 & N=(2\cdot 3)^{6\cdot 2^3}=6^{48}, \\ n=4 & N=(2\cdot 4)^{24\cdot 2^4}=8^{384}, \\ \ldots & \text{и т. д.} \end{array} \qquad (2.81)$$

Только незначительную часть всех этих функций составляют функции нечетких переменных, представимые с помощью операций $\wedge$ и $\vee$ на переменных $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}$, ... и $\bar{\underset{\sim}{a}},\bar{\underset{\sim}{b}}$, ...

Соглашение. Если специально не оговаривается, аналитической функцией нечетких переменных (обозначается $\underset{\sim}{f}$) будем называть любую функцию переменных $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}$, ..., которую можно выразить, используя только операции $\wedge$ и $\vee$; переменные могут входить в эти функции или непосредственно ($\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}$, ...), или как дополнение, т. е. $\bar{\underset{\sim}{a}},\bar{\underset{\sim}{b}}$, ...

Для упрощения изложения, когда это не будет вызывать ошибки или путаницы, аналитические функции нечетких переменных будем называть просто *функциями нечетких переменных.*

8.3. Полиномиальные формы

С помощью двойственных законов дистрибутивности (2.18) и (2.19) любую функцию $\underset{\sim}{f}\ (\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}.\ ...)$ можно представить в полиномиальной форме относительно операции $\wedge$ или $\vee$.

Для начала рассмотрим пример. Пусть

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c})=(\bar{\underset{\sim}{a}}\wedge\bar{\underset{\sim}{b}})\vee(\underset{\sim}{a}\wedge\underset{\sim}{b}\wedge\bar{\underset{\sim}{c}}). \qquad (3.1)$$

Эта функция записана в полиномиальной форме относительно $\vee$. Используя закон (2.19), функцию (3.1) можно преобразовать в полиномиальную форму относительно :

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c})=(\bar{\underset{\sim}{a}}\vee\underset{\sim}{a})\wedge(\bar{\underset{\sim}{a}}\vee\underset{\sim}{b})\wedge(\bar{\underset{\sim}{a}}\wedge\bar{\underset{\sim}{c}})\wedge(\bar{\underset{\sim}{b}}\vee\underset{\sim}{a})\wedge(\bar{\underset{\sim}{b}}\vee\underset{\sim}{b})\wedge(\bar{\underset{\sim}{b}}\vee\bar{\underset{\sim}{c}}). \qquad (3.2)$$

Рассмотрим другой пример. Пусть

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c})=(\underset{\sim}{a}\vee\underset{\sim}{b})\wedge\underset{\sim}{c}\wedge(\bar{\underset{\sim}{a}}\vee\underset{\sim}{b}\vee\underset{\sim}{c})=(\underset{\sim}{a}\vee\bar{\underset{\sim}{b}})\wedge\underset{\sim}{c}, \qquad (3.3)$$

поскольку третий член поглощается вторым. Далее, используя закон (2.18), получаем выражение

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c})=(\underset{\sim}{a}\wedge\underset{\sim}{c})\vee(\bar{\underset{\sim}{b}}\wedge\underset{\sim}{c}), \qquad (3.4)$$

которое дает полиномиальную форму относительно $\vee$. тогда как $(\underset{\sim}{a}\vee\bar{\underset{\sim}{b}})\wedge\underset{\sim}{c}$ представляет собой соответствующую полиномиальную форму относительно $\wedge$.

В случае булевых функций для того, чтобы показать, что две функции $\underset{\sim}{f}$ и $\underset{\sim}{f}\,'$ тождественны, достаточно проверить, что они приводят к одной и той же таблице истинности или что их дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы одинаковы. Для функций нечетких переменных можно определить сходное, но менее строгое утверждение.

Максимальный одночлен. Пусть функция $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\ \underset{\sim}{b},\ldots)$ выражена в полиномиальной форме относительно $\wedge$. Об одночлене такой полиномиальной формы говорят, что он максимальный (употребляется также термин «собственный»), если он не поглощается никаким другим одночленом этой полиномиальной формы. Соответствующее определение дается максимальному одночлену в полиномиальной форме относительно $\vee$.

Приведенная полиномиальная форма. Всякая полиномиальная форма относительно $\vee$, состоящая только из максимальных одночленов по $\wedge$, называется приведенной полиномиальной формой относительно $\wedge$. Замена в предыдущей фразе $\vee$ на $\wedge$ и наоборот приводит к определению приведенной полиномиальной формы относительно $\wedge$. Аналитической функции *f (a, b,...)* могут соответствовать несколько приведенных полиномиальных форм. Рассмотрим пример. Следующие две приведенные полиномиальные формы:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{\bar{a}}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{\bar{b}}) \quad (3.5)$$

и

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{\bar{b}}) \quad (3.6)$$

соответствуют одной и той же аналитической функции, что можно проверить антиполиндромным перечислением, как это было сделано, например, на рис. 2.1.

Для любой аналитической функции существует по крайней мере одна приведенная полиномиальная форма относительно $\vee$ и по крайней мере одна приведенная полиномиальная форма относительно $\wedge$. Можно переходить от одной из них к другой разложением по $\wedge$ (соответственно по $\vee$) с последующим сокращением немаксимальных одночленов.

Пример. Функция

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{\bar{a}} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{\bar{c}}) \vee (\underset{\sim}{\bar{b}} \wedge \underset{\sim}{c}) \quad (3.7)$$

представлена в приведенной полиномиальной форме относительно $\vee$. Соответствующая ей приведенная полиномиальная форма относительно $\wedge$ имеет вид

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{\bar{a}} \vee \underset{\sim}{\bar{b}}) \vee (\underset{\sim}{\bar{a}} \vee \underset{\sim}{c}) \wedge (\underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{\bar{b}}) \wedge (\underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{c}) \wedge (\underset{\sim}{c} \vee \underset{\sim}{\bar{c}}) \wedge (\underset{\sim}{\bar{b}} \vee \underset{\sim}{\bar{c}}). \quad (3.8)$$

Тождественность двух функций нечетких переменных. Достаточное условие тождественности двух функций нечетких переменных состоит в том, чтобы их можно было привести к одной и той же приведенной полиномиальной форме относительно $\vee$ (соответственно относительно $\vee$). Необходимое и достаточное условие состоит в том, чтобы у этих функций была одна и та же таблица значений.

Теорема. Число различных приведенных полиномиальных форм относительно *n* переменных конечно и равно верхней грани числа различных аналитических функций *n* нечетких переменных.

Как можно видеть из следующего ниже перечня, эти приведенные полиномиальные формы представлены как элементы свободной дистрибутивной решетки с *2n* образующими и перечисляются тем же образом. Так, при *n* = 1 существует 4 различные формы; при

n = 2 — 166, при *n* = 3 — 7 828 532, ...; но это число различных форм всегда остается конечным, поскольку число элементов свободной дистрибутивной решетки с 2*n* образующими всегда конечно, если конечно *n.*

Перечисление всех приведенных форм *n* нечетких переменных — нелегкая проблема. Для одной переменной это тривиально. Имеем

$$\underset{\sim}{a}, \quad \underset{\sim}{\bar{a}}, \quad \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{\bar{a}}, \quad \underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{\bar{a}}, \quad (3.9)$$

т. е. четыре приведенные формы. Заметьте, что $\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{\bar{a}}$ нужно отличать, например, от $\underset{\sim}{a}$, поскольку

$$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{\bar{a}} = a, \text{ если } \underset{\sim}{a} \leqslant \underset{\sim}{\bar{a}}, \text{ и } \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{\bar{a}} = \underset{\sim}{\bar{a}}, \text{ если } \underset{\sim}{\bar{a}} \leqslant \underset{\sim}{a}. \quad (3.10)$$

Для двух переменных это сделать уже не так просто, а в действительности очень сложно.

Используем, например, редуцированные полиномиальные формы относительно $\vee$ (одночлены с $\wedge$*)*. Мы знаем, что (в силу двух теорем Де Моргана) каждой форме относительно $\vee$ соответствует форма относительно $\wedge$ и наоборот.

Рассмотрим перечень) всех возможных различных приведенных полиномиальных форм функции $\underset{\sim}{f}\ (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b})$ относительно $\vee$:

(При перечислении мы использовали, как и выше, лексикографическую процедуру, исключающую пропуски и повторения, помня о том, что одночлен должен быть всегда максимальным относительно других в том же полиноме. Для упрощения обозначений мы опустили символ нечеткости ~.

1. Формы $\underset{\sim}{f}\ (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b})$ содержащие один одночлен:

1	a (1)	$1 \wedge 2$	$a \wedge \bar{a}$ (5)	$1 \wedge 2 \wedge 3$	$a \wedge a \wedge b$ (11)		
2	$\bar{a}$ (2)	$1 \wedge 3$	$a \wedge b$ (6)	$1 \wedge 2 \wedge 4$	$a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}$ (12)		
3	b (3)	$1 \wedge 4$	$a \wedge \bar{b}$ (7)	$1 \wedge 3 \wedge 4$	$a \wedge b \wedge \bar{b}$ (13)		
4	$\bar{b}$ (4)	$2 \wedge 3$	$\bar{a} \wedge b$ (8)	$2 \wedge 3 \wedge 4$	$\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b}$ (14)		
4		$2 \wedge 4$	$\bar{a} \wedge \bar{b}$ (9)	4			
		$3 \wedge 4$	$b \wedge \bar{b}$ (10)				
		6				$1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4$	$a \wedge \bar{a} \wedge b \wedge \bar{b}$ (15)
						1	

(3.11)

Здесь имеется 4 + 6 + 4 + 1 = 15 приведенных форм, состоящих из одного одночлена.

2. Формы $\underset{\sim}{f}\ (\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$, содержащие два одночлена (ни один из этих одночленов не должен поглощать другой, приводя, таким образом, функцию $\underset{\sim}{f}\ (\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$ к форме, состоящей из единственного одночлена):

$1 \vee 2$	$a \vee \bar{a}$	(16)
$1 \vee 3$	$a \vee b$	(17)
$1 \vee 4$	$a \vee \bar{b}$	(18)
$2 \vee 3$	$\bar{a} \vee b$	(19)
$2 \vee 4$	$\bar{a} \vee \bar{b}$	(20)
$3 \vee 4$	$b \vee \bar{b}$	(21)

6

$1 \vee (2 \wedge 3)$	$a \vee (\bar{a} \wedge b)$	(22)
$1 \vee (2 \wedge 4)$	$a \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	(23)
$1 \vee (3 \wedge 4)$	$a \vee (b \wedge \bar{b})$	(24)
$2 \vee (1 \wedge 3)$	$\bar{a} \vee (a \wedge b)$	(25)
$2 \vee (1 \wedge 4)$	$\bar{a} \vee (a \wedge \bar{b})$	(26)
$2 \vee (3 \wedge 4)$	$\bar{a} \vee (b \wedge \bar{b})$	(27)
$3 \vee (1 \wedge 2)$	$b \vee (a \wedge \bar{a})$	(28)
$3 \vee (1 \wedge 4)$	$b \vee (a \wedge \bar{b})$	(29)
$3 \vee (2 \wedge 4)$	$b \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	(30)
$4 \vee (1 \wedge 2)$	$\bar{b} \vee (a \wedge \bar{a})$	(31)
$4 \vee (1 \wedge 3)$	$\bar{b} \vee (a \wedge b)$	(32)
$4 \vee (2 \wedge 3)$	$\bar{b} \vee (\bar{a} \wedge b)$	(33)

12

(3.12)

$1 \vee (2 \wedge 3 \wedge 4)$	$a \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b})$	(34)
$2 \vee (1 \wedge 3 \wedge 4)$	$\bar{a} \vee (a \wedge b \wedge \bar{b})$	(35)
$3 \vee (1 \wedge 2 \wedge 4)$	$b \vee (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b})$	(36)
$4 \vee (1 \wedge 2 \wedge 3)$	$\bar{b} \vee (a \wedge \bar{a} \wedge b)$	(37)

4

$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b)$	(38)
$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge \bar{b})$	(39)
$(1 \wedge 2) \vee (2 \wedge 3)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge b)$	(40)
$(1 \wedge 2) \vee (2 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	(41)
$(1 \wedge 2) \vee (3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (b \wedge \bar{b})$	(42)
$(1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b})$	(43)
$(1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 3)$	$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b)$	(44)
$(1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	(45)
$(1 \wedge 3) \vee (3 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b})$	(46)
$(1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3)$	$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	(47)
$(1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	(48)
$(1 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b})$	(49)
$(2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4)$	$(\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	(50)
$(2 \wedge 3) \vee (3 \wedge 4)$	$(\bar{a} \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b})$	(51)
$(2 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4)$	$(\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b})$	(52)

15

$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b})$	(53)
$(1 \wedge 2) \vee (2 \wedge 3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b})$	(54)
$(1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 2 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b})$	(55)
$(1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 3 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b})$	(56)
$(1 \wedge 4) \vee (1 \wedge 2 \wedge 3)$	$(a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge b)$	(57)
$(1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b})$	(58)
$(2 \wedge 3) \vee (1 \wedge 2 \wedge 4)$	$(\bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b})$	(59)
$(2 \wedge 3) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4)$	$(\bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b})$	(60)
$(2 \wedge 4) \vee (1 \wedge 2 \wedge 3)$	$(\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge b)$	(61)
$(2 \wedge 4) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4)$	$(\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b})$	(62)
$(3 \wedge 4) \vee (1 \wedge 2 \wedge 3)$	$(b \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge b)$	(63)
$(3 \wedge 4) \vee (1 \wedge 2 \wedge 4)$	$(b \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b})$	(64)

12

$$
\begin{array}{l|l}
(1 \wedge 2 \wedge 3) \vee (1 \wedge 2 \wedge 4) & (a \wedge \bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) \quad (65) \\
(1 \wedge 2 \wedge 3) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4) & (a \wedge \bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b}) \quad (66) \\
(1 \wedge 2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 3 \wedge 4) & (a \wedge \bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b}) \quad (67) \\
(1 \wedge 2 \wedge 4) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4) & (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b}) \quad (68) \\
(1 \wedge 2 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3 \wedge 4) & (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b}) \quad (69) \\
(1 \wedge 3 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3 \wedge 4) & (a \wedge b \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b}) \quad (70) \\
\multicolumn{2}{c}{6}
\end{array}
$$

Здесь имеется 6+ 12 + 4+ 15+12 + 6 = 55 приведенных форм, состоящих из двух одночленов.

3. Формы $\underset{\sim}{f}\ (\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$, содержащие три одночлена, для которых справедливо сделанное выше замечание о неприводимости:

$$
\begin{array}{l|l}
1 \vee 2 \vee 3 & a \vee \bar{a} \vee b \quad (71) \\
1 \vee 2 \vee 4 & a \vee \bar{a} \vee \bar{b} \quad (72) \\
1 \vee 3 \vee 4 & a \vee b \vee \bar{b} \quad (73) \\
2 \vee 3 \vee 4 & \bar{a} \vee b \vee \bar{b} \quad (74) \\
\multicolumn{2}{c}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
1 \vee 2 \vee (3 \wedge 4) & a \vee \bar{a} \vee (b \wedge \bar{b}) \quad (75) \\
1 \vee 3 \vee (2 \wedge 4) & a \vee b \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \quad (76) \\
1 \vee 4 \vee (2 \wedge 3) & a \vee \bar{b} \vee (\bar{a} \wedge b) \quad (77) \\
2 \vee 3 \vee (1 \wedge 4) & \bar{a} \vee b \vee (a \wedge \bar{b}) \quad (78) \\
2 \vee 4 \vee (1 \wedge 3) & \bar{a} \vee \bar{b} \vee (a \wedge b) \quad (79) \\
3 \vee 4 \vee (1 \wedge 2) & b \vee \bar{b} \vee (a \wedge \bar{a}) \quad (80) \\
\multicolumn{2}{c}{6}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
1 \vee (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4) & a \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \quad (81) \\
1 \vee (2 \wedge 3) \vee (3 \wedge 4) & a \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b}) \quad (82) \\
1 \vee (2 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4) & a \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b}) \quad (83) \\
2 \vee (1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) & \bar{a} \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \quad (84) \\
2 \vee (1 \wedge 3) \vee (3 \wedge 4) & \bar{a} \vee (a \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b}) \quad (85) \\
2 \vee (1 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4) & \bar{a} \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b}) \quad (86) \\
3 \vee (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 4) & b \vee (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge \bar{b}) \quad (87) \\
3 \vee (1 \wedge 2) \vee (2 \wedge 4) & b \vee (a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \quad (88) \\
3 \vee (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 4) & b \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \quad (89) \\
4 \vee (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) & \bar{b} \vee (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \quad (90) \\
4 \vee (1 \wedge 2) \vee (2 \wedge 3) & \bar{b} \vee (a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge b) \quad (91) \\
4 \vee (1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 3) & \bar{b} \vee (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) \quad (92) \\
\multicolumn{2}{c}{12}
\end{array}
$$

(3.13)

$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b})$	(93)
$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 3)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b)$	(94)
$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	(95)
$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b})$	(96)
$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$	(97)
$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	(98)
$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b})$	(99)
$(1 \wedge 2) \vee (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	(100)
$(1 \wedge 2) \vee (2 \wedge 3) \vee (3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b})$	(101)
$(1 \wedge 2) \vee (2 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b})$	(102)
$(1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3)$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$	(103)
$(1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	(104)
$(1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b})$	(105)
$(1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	(106)
$(1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 3) \vee (3 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b})$	(107)
$(1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b})$	(108)
$(1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	(109)
$(1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3) \vee (3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b})$	(110)
$(1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b})$	(111)
$(2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4)$	$(\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b})$	(112)

20

$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b})$	(113)
$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b})$	(114)
$(1 \wedge 2) \vee (2 \wedge 3) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b})$	(115)
$(1 \wedge 2) \vee (2 \wedge 4) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b})$	(116)
$(1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b})$	(117)
$(1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 3) \vee (1 \wedge 2 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b})$	(118)
$(1 \wedge 3) \vee (3 \wedge 4) \vee (1 \wedge 2 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b})$	(119)
$(1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 4) \vee (1 \wedge 2 \wedge 3)$	$(a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge b)$	(120)

$(1 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4) \vee (1 \wedge 2 \wedge 3)$	$(a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge b)$	(121)
$(2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4)$	$(\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b})$	(122)
$(2 \wedge 3) \vee (3 \wedge 4) \vee (1 \wedge 2 \wedge 4)$	$(\bar{a} \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b})$	(123)
$(2 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4) \vee (1 \wedge 2 \wedge 3)$	$(\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge b)$	(124)

12

$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4) \vee$ $\vee (2 \wedge 3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b}) \vee$ $\vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b})$	(125)
$(1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 2 \wedge 4) \vee$ $\vee (2 \wedge 3 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) \vee$ $\vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b})$	(126)
$(1 \wedge 4) \vee (1 \wedge 2 \wedge 3) \vee$ $\vee (2 \wedge 3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge b) \vee$ $\vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b})$	(127)
$(2 \wedge 3) \vee (1 \wedge 2 \wedge 4) \vee$ $\vee (1 \wedge 3 \wedge 4)$	$(\bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) \vee$ $\vee (a \wedge b \wedge \bar{b})$	(128)
$(2 \wedge 4) \vee (1 \wedge 2 \wedge 3) \vee$ $\vee (1 \wedge 3 \wedge 4)$	$(\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge b) \vee$ $\vee (a \wedge b \wedge \bar{b})$	(129)
$(3 \wedge 4) \vee (1 \wedge 2 \wedge 3) \vee$ $\vee (1 \wedge 2 \wedge 4)$	$(b \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge b) \vee$ $\vee (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b})$	(130)

6

$(1 \wedge 2 \wedge 3) \vee (1 \wedge 2 \wedge 4) \vee$ $\vee (1 \wedge 3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) \vee$ $\vee (a \wedge b \wedge \bar{b})$	(131)
$(1 \wedge 2 \wedge 4) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4) \vee$ $\vee (2 \wedge 3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b}) \vee$ $\vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b})$	(132)
$(1 \wedge 3 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3 \wedge 4) \vee$ $\vee (1 \wedge 2 \wedge 3)$	$(a \wedge b \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b}) \vee$ $\vee (a \wedge \bar{a} \wedge b)$	(133)
$(2 \wedge 3 \wedge 4) \vee (1 \wedge 2 \wedge 3) \vee$ $\vee (1 \wedge 2 \wedge 4)$	$(\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge b) \vee$ $\vee (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b})$	(134)

4

Здесь имеется 4 + 6 + 12+20+12+6+4 = 64 приведенные формы, состоящие из трех одночленов.

4. Формы $\underset{\sim}{f}\ (\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}))$, содержащие четыре одночлена:

$1 \vee 2 \vee 3 \vee 4$	$a \vee \bar{a} \vee b \vee \bar{b}$	(135)

1

$$\begin{array}{c|c} 1 \vee (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4) \vee & a \wedge (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (3 \wedge 4) & \vee (b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (136)$$

$$\begin{array}{c|c} 2 \vee (1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee & \bar{a} \wedge (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (3 \wedge 4) & \vee (b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (137)$$

$$\begin{array}{c|c} 3 \vee (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 4) \vee & b \wedge (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (2 \wedge 4) & \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (138)$$

$$\begin{array}{c|c} 4 \vee (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee & \bar{b} \wedge (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee \\ \vee (2 \wedge 3) & \vee (\bar{a} \wedge b) \end{array} \quad (139)$$

4

(33.14)

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (2 \wedge 3) & \vee (\bar{a} \wedge b) \end{array} \quad (140)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (2 \wedge 4) & \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (141)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (3 \wedge 4) & \vee (b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (142)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 3) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee \\ \vee (2 \wedge 4) & \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (143)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 3) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee \\ \vee (3 \wedge 4) & \vee (b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (144)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (3 \wedge 4) & \vee (b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (145)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee \\ \vee (2 \wedge 4) & \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (146)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee \\ \vee (3 \wedge 4) & \vee (b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (147)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 4) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (3 \wedge 4) & \vee (b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (148)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (3 \wedge 4) & \vee (b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (149)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3) \vee & (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee \\ \vee (2 \wedge 4) & \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (150)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 3) \vee (1 \vee 4) \vee (2 \wedge 3) \vee & (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee \\ \vee (3 \wedge 4) & \vee (b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (151)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 4) \vee & (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (3 \wedge 4) & \vee (b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (152)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4) \vee & (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (3 \wedge 4) & \vee (b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (153)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4) \vee & (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (3 \wedge 4) & \vee (b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (154)$$

15

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (2 \wedge 3 \wedge 4) & \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (155)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (1 \wedge 3 \wedge 4) & \vee (a \wedge b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (156)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 3) \vee (3 \wedge 4) \vee & (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (1 \wedge 2 \wedge 4) & \vee (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (157)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4) \vee & (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (1 \wedge 2 \wedge 3) & \vee (a \wedge \bar{a} \wedge b) \end{array} \quad (158)$$

4

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2 \wedge 3) \vee (1 \wedge 2 \wedge 4) \vee & (a \wedge \bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (1 \wedge 3 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3 \wedge 4) & \vee (a \wedge b \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (159)$$

1

Таким образом, существует 1+4+15+4+1 = 25 приведенных форм, состоящих из четырех одночленов.

5. Формы $\underset{\sim}{f}\ (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b})$, содержащие пять одночленов:

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4) & \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (160)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (2 \wedge 3) \vee (3 \wedge 4) & \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (161)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee \\ \vee (2 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4) & \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (162)$$

$$\begin{array}{c|c} (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 3) \vee & (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee \\ \vee (2 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4) & \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b}) \end{array} \quad (163)$$

$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3) \vee \vee (2 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b})$	(164)
$(1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3) \vee \vee (2 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b})$	(165)

6

(3.15)

Существует шесть приведенных форм, содержащих пять одночленов.

6. Формы $\underset{\sim}{f}\ (\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$, содержащие шесть одночленов:

$$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) \vee \vee (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4) \quad \Big| \quad (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b}) \tag{3.16}$$

$\mathbf{I}_1$

Имеется только одна приведенная форма, содержащая шесть одночленов.

Всего имеем:

число n функций с x одночленами	
15	1
55	2
64	3
25	4
6	5
1	6
166	

приведенных полиномиальных форм.

8.4. Анализ функций нечетких переменных. Метод Мариноса

Разобьем **M** = [0,1] на m попарно граничащих интервалов, замкнутых слева и открытых справа, за исключением последнего:

$$\mathbf{I}_1 = [\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 [,\ \mathbf{I}_2 = [\alpha_1,\ \alpha_2 [,\ \ldots,\ \mathbf{I}_m = [\alpha_{m-1},\ \alpha_m = 1], \tag{4.1}$$

где

$$\mathbf{M} = ([\alpha_0 = 0,\ \alpha_1[) \cup ([\alpha_1,\ \alpha_2[) \cup \ldots \cup ([\alpha_{m-1},\ \alpha_m = 1]). \tag{4.2}$$

Найдем условия, при которых функция n нечетких переменных

$$f\ (\underset{\sim}{a}_1,\ \underset{\sim}{a}_2,\ \ldots,\ \underset{\sim}{a}_n),\quad \underset{\sim}{a}_i\ [\in 0,1],\ i = 1,2,\ldots,\ n, \tag{4.3}$$

будет принадлежать интервалу $\mathbf{I}_h$. Начнем с примеров

Пример 1. Пусть

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

$$\underset{\sim}{f}\left(\underset{\sim}{a},\ \underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{c}\right) = \left(\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}}\right) \vee \left(\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \bar{\underset{\sim}{c}}\right). \tag{4.4}$$

Какие условия обеспечат соблюдение условия

$$\underset{\sim}{f}\left(\underset{\sim}{a},\ \underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{c}\right) \in \mathbf{I}_k, \tag{4.5}$$

т. е. выполнение неравенств

$$\alpha_{k-1} \leqslant \underset{\sim}{f}\left(\underset{\sim}{a},\ \underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{c}\right) < \alpha_k? \tag{4.6}$$

Рассмотрим выражение (4.4). Его правый член образован двумя элементами, следовательно, нужно брать наибольший. Начнем с первой гипотезы.

Гипотеза 1:

$$\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}} \geqslant \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \bar{\underset{\sim}{c}}. \tag{4.7}$$

Из нее следует, что

$$\alpha_{k-1} \leqslant \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}} < \alpha_k \tag{4.8}$$

или в более явном виде

$$\alpha_{k-1} \leqslant \mathrm{MIN}\left(\bar{\underset{\sim}{a}},\ \bar{\underset{\sim}{b}}\right) < \alpha_k \tag{4.9}$$

и

$$\alpha_{k-1} \leqslant \mathrm{MIN}\left(1 - \underset{\sim}{a},\ 1 - \underset{\sim}{b}\right) < \alpha_k. \tag{4.10}$$

Поскольку $\underset{\sim}{a}$ и $\underset{\sim}{b}$ нельзя располагать произвольно относительно друг друга, то необходимо, чтобы

$$1 - \underset{\sim}{a} \geqslant \alpha_{k-1}\ \text{и}\ 1 - \underset{\sim}{b} \geqslant \alpha_{k-1} \tag{4.11}$$

и

$$1 - \underset{\sim}{a} < \alpha_k\ \text{или/и}\ 1 - \underset{\sim}{b} < \alpha_k. \tag{4.12}$$

Это можно переписать в виде

$$\underset{\sim}{a} \leqslant 1 - \alpha_{k-1}\ \text{и}\ \underset{\sim}{b} \leqslant 1 - \alpha_{k-1} \tag{4.13}$$

и

$$\underset{\sim}{a} > -1\alpha_k\ \text{или/и}\ \underset{\sim}{b} > 1 - \alpha_k^{*)}. \tag{4.14}$$

(Не нужно удивляться связкам «и» в (4 13) и «или/и» в (4 14). Для нижнего предела α_{k-1} необходимо, чтобы как $1 - \underset{\sim}{a}$, так и $1 - \underset{\sim}{b}$ были больше или равны α_{k-1}. Но для α_k, достаточно, чтобы только одна из величин $1 - \underset{\sim}{a}$ или $1 - \underset{\sim}{b}$ была меньше α_k.)

Гипотеза 2:

$$\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}} < \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \bar{\underset{\sim}{c}}. \quad (4.15)$$

Из нее следует

$$\alpha_{k-1} \leqslant \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \bar{\underset{\sim}{c}} < \alpha_k, \quad (4.16)$$

или в более явном виде

$$\alpha_{k-1} \leqslant \mathrm{MIN}\left(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \bar{\underset{\sim}{c}}\right) < \alpha_k, \quad (4.17)$$

или

$$\alpha_{k-1} \leqslant \mathrm{MIN}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, 1-\underset{\sim}{c}) < \alpha_k. \quad (34.18)$$

Поскольку $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ и $\underset{\sim}{c}$ нельзя располагать произвольно относительно друг друга, то прежде всего необходимо, чтобы

$$\underset{\sim}{a} \geqslant \alpha_{k-1} \text{ и } \underset{\sim}{b} \geqslant \alpha_{k-1} \text{ и } 1-\underset{\sim}{c} \geqslant \alpha_{k-1}, \quad (4.19)$$

а также

$$\underset{\sim}{a} < \alpha_k \text{ или/и } \underset{\sim}{b} < \alpha_k \text{ или/и } 1-\underset{\sim}{c} < \alpha_k. \quad (4.20)$$

Это можно переписать в виде

$$\underset{\sim}{a} \geqslant \alpha_{k-1} \text{ и } \underset{\sim}{b} \geqslant \alpha_{k-1} \text{ и } \underset{\sim}{c} \leqslant 1-\alpha_{k-1}, \quad (4.21)$$

а также

$$\underset{\sim}{a} < \alpha_k \text{ или/и } \underset{\sim}{b} < \alpha_k \text{ или/и } \underset{\sim}{c} > 1-\alpha_k. \quad (4.22)$$

Наконец, эти результаты можно сгруппировать следующим образом.
Свойство $\mathcal{P}_1$:

$$\begin{gathered}\left[(\underset{\sim}{a} \leqslant 1-\alpha_{k-1}) \text{ и } (\underset{\sim}{b} \leqslant 1-\alpha_{k-1})\right] \text{ или/и} \\ \left[(\underset{\sim}{a} \geqslant \alpha_{k-1}) \text{ и } (\underset{\sim}{b} \geqslant \alpha_{k-1}) \text{ и } (\underset{\sim}{c} \leqslant 1-\alpha_{k-1})\right].\end{gathered} \quad (4.23)$$

Свойство $\mathcal{P}_2$:

$$\begin{gathered}\left[(\underset{\sim}{a} > 1-\alpha_k) \text{ или/и } (\underset{\sim}{b} > 1-\alpha_k)\right] \text{ и} \\ \left[(\underset{\sim}{a} < \alpha_k) \text{ или/и } (\underset{\sim}{b} < \alpha_k) \text{ или/и } (\underset{\sim}{c} > 1-\alpha_k)\right].\end{gathered} \quad (4.24)$$

Чтобы удовлетворялось неравенство (4.6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись свойства $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$.
Чтобы привести пример вычислений $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c})$ при конкретных числовых значениях, предположим, что

$$\underset{\sim}{a} = 0{,}55, \ \underset{\sim}{b} = 0{,}57, \ \underset{\sim}{c} = 0{,}80. \quad (4.25)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) &= \underset{\sim}{f}(0{,}55;\ 0{,}57;\ 0{,}80) = \\ &= (\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \bar{\underset{\sim}{c}}) = \\ &= (0{,}45 \wedge 0{,}43) \vee (0{,}55 \wedge 0{,}57 \wedge 0{,}20) = \\ &= 0{,}43 \vee 0{,}20 = 0{,}43.\end{aligned} \quad (4.26)$$

Теперь рассмотрим полный числовой пример.
Пример 2. Пусть

$$f(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}}) \vee (\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c}) \wedge \bar{\underset{\sim}{c}}; \quad (4.27)$$

предположим, что интервал [0,1] разделен на три интервала:
$[0;\ 0{,}2[,\ [0{,}2;\ 0{,}3[,\ [0{,}3;\ 1].$
Сначала рассмотрим интервал [0; 0,2 [.
Гипотеза 1:

$$\underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}} > \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c}, \quad \underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}} > \bar{\underset{\sim}{c}}. \quad (4.28)$$

Тогда имеем

$$0 \leqslant \underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}} < 0{,}2. \quad (4.29)$$

Таким образом, $0 \le \mathrm{MIN}\,(\underset{\sim}{a}, 1 - \underset{\sim}{b}) < 0{,}2$, (4.30)

$$\underset{\sim}{a} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \underset{\sim}{b} \leqslant 1 \quad (4.31)$$

и

$$\underset{\sim}{a} < 0{,}2 \text{ или/и } \underset{\sim}{b} > 0{,}8. \quad (4.32)$$

Гипотеза 2:

$$\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c} > \underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}}, \quad \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c} > \bar{\underset{\sim}{c}}. \quad (4.33)$$

Тогда имеем

$$0 \leqslant \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c} < 0{,}2. \quad (4.34)$$

Таким образом, $0 < \mathrm{MIN}\,(1 - \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{c}) < 0{,}2$, (4.35)

$$\underset{\sim}{a} \leqslant 1 \text{ и } \underset{\sim}{c} \geqslant 0 \quad (4.36)$$

и

$$\underset{\sim}{a} > 0{,}8 \text{ или/и } \underset{\sim}{c} < 0{,}2. \quad (4.37)$$

Гипотеза 3:

$$\bar{\underset{\sim}{c}} > \underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}}, \quad \bar{\underset{\sim}{c}} > \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c}. \tag{4.38}$$

Тогда имеем

$$0 \leqslant \bar{\underset{\sim}{c}} < 0{,}2. \tag{4.39}$$

Таким образом,

$$0 \leqslant 1 - \underset{\sim}{c} < 0{,}2, \tag{4.40}$$

$$0{,}8 < \underset{\sim}{c} \leqslant 1. \tag{4.41}$$

Теперь рассмотрим интервал [0,2; 0,3[.

Гипотеза 1:

$$\underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}} > \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c}, \quad \underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}} > \bar{\underset{\sim}{c}}, \tag{4.42}$$

$$0{,}2 \leqslant \underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}} < 0{,}3, \tag{4.43}$$

$$\underset{\sim}{a} \geqslant 0{,}2 \ \text{ и } \ \underset{\sim}{b} \leqslant 0{,}8 \tag{4.44}$$

и

$$\underset{\sim}{a} < 0{,}3 \ \text{ или/и } \ \underset{\sim}{b} > 0{,}7. \tag{4.45}$$

Гипотеза 2:

$$\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c} > \underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}}, \quad \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c} > \bar{\underset{\sim}{c}},$$

$$0{,}2 \leqslant \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c} < 0{,}3,$$

$$\underset{\sim}{a} \leqslant 0{,}8 \ \text{ и } \ \underset{\sim}{c} \geqslant 0{,}2 \tag{4.46-4.48}$$

и

$$\underset{\sim}{a} > 0{,}7 \ \text{ и } \ \underset{\sim}{c} < 0{,}3. \tag{4.49}$$

Гипотеза 3:

$$\bar{\underset{\sim}{c}} > \underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}}, \quad \bar{\underset{\sim}{c}} > \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c},$$

$$0{,}2 \leqslant \bar{\underset{\sim}{c}} < 0{,}3 \tag{4.50-4.51}$$

и

$$\underset{\sim}{c} \leqslant 0{,}8 \ \text{ и } \ \underset{\sim}{c} > 0{,}7. \tag{4.52}$$

Наконец, рассмотрим интервал [0,3; 1].

Гипотеза 1:

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

$$\underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}} > \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c}, \quad \underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}} > \bar{\underset{\sim}{c}}.$$

$$0{,}3 \leqslant \underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}} \leqslant 1,$$

$$\underset{\sim}{a} \geqslant 0{,}3 \ \text{ и } \ \underset{\sim}{b} \leqslant 0{,}7 \tag{4.53-4.55}$$

и

$$\underset{\sim}{a} \leqslant 1 \ \text{ или/и } \ \underset{\sim}{b} \geqslant 0. \tag{4.56}$$

Гипотеза 2:

$$\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c} > \underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}}, \quad \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c} > \bar{\underset{\sim}{c}},$$

$$0{,}3 \leqslant \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c} \leqslant 1,$$

$$\underset{\sim}{a} \leqslant 0{,}7 \ \text{ и } \ \underset{\sim}{c} > 0{,}3 \tag{4.57-4.59}$$

и

$$\underset{\sim}{a} \geqslant 0 \ \text{ или/и } \ \underset{\sim}{c} \leqslant 1. \tag{4.60}$$

Гипотеза 3:

$$\bar{\underset{\sim}{c}} > \underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}}, \quad \underset{\sim}{c} > \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c},$$

$$0{,}3 \leqslant \bar{\underset{\sim}{c}} \leqslant 1 \tag{4.61-4.62}$$

и

$$\underset{\sim}{c} \leqslant 0{,}7 \ \text{ и } \ \underset{\sim}{c} \geqslant 0. \tag{4.63}$$

Результаты этого примера можно перегруппировать следующим образом:

а) $$0 \leqslant \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) < 0{,}2. \tag{4.64}$$

Свойство $\mathscr{P}_1^{(1)}$:

$$[(\underset{\sim}{a} \geqslant 0) \text{ и } (\underset{\sim}{b} \leqslant 1)] \ \text{ или/и } \ [(\underset{\sim}{a} \leqslant 1) \text{ и } (\underset{\sim}{c} \geqslant 0)] \ \text{ или/и } \ (\underset{\sim}{c} \leqslant 1). \tag{4.65}$$

Свойство $\mathscr{P}_2^{(1)}$:

$$[(\underset{\sim}{a} < 0{,}2) \ \text{ или/и } \ (\underset{\sim}{b} > 0{,}8)] \ \text{ и } \ [(\underset{\sim}{a} > 0{,}8) \ \text{ или/и } \ (\underset{\sim}{c} < 0{,}2)] \ \text{ и } \ (\underset{\sim}{c} > 0{,}8). \tag{4.66}$$

Если соотношения $\mathscr{P}_1^{(1)}$ (4.65) и $\mathscr{P}_2^{(1)}$ (4.66) выполняются, то имеем (4.64).

б) $$0{,}2 \leqslant \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) < 0{,}3. \tag{4.67}$$

Свойство $\mathscr{P}_1^{(2)}$:

$$[(\underset{\sim}{a} \geqslant 0{,}2) \text{ и } (\underset{\sim}{b} \leqslant [0{,}8)] \text{ или/и } [(\underset{\sim}{a} \leqslant 0{,}8) \text{ и } (\underset{\sim}{c} \geqslant 0{,}2)] \text{ или/и } (\underset{\sim}{c} \leqslant 0.8)]. \quad (4.68)$$

Свойство $\mathscr{P}_2^{(2)}$:

$$[(\underset{\sim}{a} < 0{,}3) \text{ или/и } (\underset{\sim}{b} > 0{,}7)] \text{ и } [(\underset{\sim}{a} > 0{,}7) \text{ или/и } (\underset{\sim}{c} < 0{,}3)] \text{ и } (\underset{\sim}{c} > 0{,}7). \quad (4.69)$$

Если соотношения $\mathscr{P}_1^{(2)}$ (4.68) и $\mathscr{P}_2^{(2)}$ (4.69) выполняются, то выполняется неравенство (4.67):

$$\text{в)} \quad 0{,}3 \leqslant \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) \leqslant 1. \quad (4.70)$$

Свойство $\mathscr{P}_1^{(3)}$:

$$[(\underset{\sim}{a} \geqslant 0{,}3) \text{ и } (\underset{\sim}{b} \leqslant 0{,}7)] \text{ или/и } [(\underset{\sim}{a} \leqslant 0{,}7) \text{ и } (\underset{\sim}{c} \leqslant 0{,}3)] \text{ или/и } (\underset{\sim}{c} \leqslant 0{,}7). \quad (4.71)$$

Свойство $\mathscr{P}_2^{(3)}$:

$$[(\underset{\sim}{a} \leqslant 1) \text{ или/и } (\underset{\sim}{b} \geqslant 0)] \text{ и } [(\underset{\sim}{a} \geqslant 0) \text{ или/и } (\underset{\sim}{c} \leqslant 1)] \text{ и } (\underset{\sim}{c} \geqslant 0). \quad (4.72)$$

Если соотношения $\mathscr{P}_1^{(3)}$(4.71) и $\mathscr{P}_2^{(3)}$) (4.72) выполняются, то выполняется неравенство (4.70).

Замечание. Рассмотрим свойства $\mathscr{P}_1$ (4.23) и $\mathscr{P}_2$ (4.24). Можно заметить, что свойства $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ двойственны по отношению друг к другу, т. е. одно из них получается из другого заменой символов:

$$(<) \text{ на } (\geqslant), (\leqslant) \text{ на } (>), (>) \text{ на } (\leqslant), (\geqslant) \text{ на } (<), \text{ (и) на (или/и)}, \text{ (или/и) на (и)}.$$

То же справедливо для $\mathscr{P}_1^{(1)}$ (4.65) и $\mathscr{P}_2^{(1)}$ (4.66), $\mathscr{P}_1^{(2)}$ (4.68) и $\mathscr{P}_2^{(2)}$(4.69), $\mathscr{P}_1^{(3)}$(4.71) и $\mathscr{P}_2^{(3)}$(4.72) (для двух последних > заменяется на ≥ и <; заменяется на ≤, так как последний интервал замкнут как слева, так и справа).

Это свойство отнюдь не случайно; это общее свойство для всех приведенных полиномиальных форм относительно $\vee$ или $\wedge$.

В качестве примера рассмотрим также полиномиальную форму относительно $\wedge$.

Пример 3. Пусть

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}) \wedge (\overline{\underset{\sim}{b}} \vee \underset{\sim}{c}). \quad (4.73)$$

При каких условиях

$$\alpha_{k-1} \leqslant \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) < \alpha_k? \quad (4.74)$$

Гипотеза 1:

$$\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b} < \overline{\underset{\sim}{b}} \vee \underset{\sim}{c}. \quad (4.75)$$

Отсюда

$$\alpha_{k-1} \leqslant \underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b} < \alpha_k \quad (4.76)$$

или

$$\alpha_{k-1} \leqslant \mathrm{MAX}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) < \alpha_k. \quad (4.77)$$

Поскольку $\underset{\sim}{a}$ и $\underset{\sim}{b}$ нельзя располагать произвольно относительно друг друга, то необходимо, чтобы

$$\underset{\sim}{a} \geqslant \alpha_{k-1} \text{ или/и } \underset{\sim}{b} \geqslant \alpha_{k-1} \quad (4.78)$$

и

$$\underset{\sim}{a} < \alpha_k \text{ и } \underset{\sim}{b} < \alpha_k. \quad (4.79)$$

Гипотеза 2:

$$\overline{\underset{\sim}{b}} \vee \underset{\sim}{c} > \underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}. \quad (4.80)$$

Отсюда

$$\alpha_{k-1} \leqslant \overline{\underset{\sim}{b}} \vee \underset{\sim}{c} < \alpha_k \quad (4.81)$$

или

$$\alpha_{k-1} \leqslant \mathrm{MAX}(1 - \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) < \alpha_k. \quad (4.82)$$

Таким образом,

$$\underset{\sim}{b} \leqslant 1 - \alpha_{k-1} \text{ или/и } \underset{\sim}{c} \geqslant \alpha_{k-1} \quad (4.83)$$

и

$$\underset{\sim}{b} > 1 - \alpha_k \text{ и } \underset{\sim}{c} < \alpha_k. \quad (4.84)$$

Перегруппировав полученные результаты, имеем

Свойство $\mathscr{P}_1'$:

$$[(\underset{\sim}{a} \geqslant \alpha_{k-1}) \text{ или/и } (\underset{\sim}{b} \geqslant \alpha_{k-1})] \text{ и } [(\underset{\sim}{b} \leqslant 1 - \alpha_{k-1}) \text{ или/и } (\underset{\sim}{c} \geqslant \alpha_{k-1})]. \quad (4.85)$$

Свойство $\mathscr{P}_2'$:

$$[(\underset{\sim}{a} < \alpha_k) \text{ и } (\underset{\sim}{b} < \alpha_k)] \text{ или/и } [(\underset{\sim}{b} > 1 - \alpha_k) \text{ и } (\underset{\sim}{c} < \alpha_k)]. \quad (4.86)$$

Чтобы неравенство (4.74) удовлетворялось, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись свойства $\mathscr{P}_2'$ и $\mathscr{P}_1'$.

Отметим, что здесь опять проявляется свойство двойственности, но или/и занимает место и наоборот.

8.5. Логическая структура функций нечетких переменных

Напомним, что в пропозиционной алгебре пропозиционная связка

«и» обозначается через Δ, (5.1)

«или/и» обозначается через ∇, (5.2)

«дополнение» обозначается через $\bar{\ }$, (5.3)

и утверждения с этими связками строятся в точности по тем же правилам, что и соответствующие им в булевой алгебре причем Δ соответствует $\cap$, ∇ соответствует $\bigcup$, $\bar{\ }$ соответствует $\bar{\ }$.

Для представления логической структуры отношений (строгих или нестрогих неравенств), которая появляется у функции нечеткой логики, рассматриваемой на интервале $[\alpha_{k-1},\alpha_k]$, будем использовать следующие символы.

Пусть $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},...,\underset{\sim}{l})$ — функция нечетких переменных $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},...,\underset{\sim}{l}$ и пусть $[\alpha_{k-1},\alpha_k]$ — сегмент. Если $\underset{\sim}{x}$ и $\underset{\sim}{y}$ — некоторые переменные, входящие в $\underset{\sim}{f}$, будем использовать следующие символы:

$$\mathcal{P}_{\underset{\sim}{x}} = (\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{x} \geqslant \alpha_{k-1}),$$
$$\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{x}}} = (\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{x} \leqslant 1-\alpha_{k-1}),$$
$$\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{x}} = (\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{x} < \alpha_k),$$
$$\mathcal{P}'_{\bar{\underset{\sim}{x}}} = (\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{x} > 1-\alpha_k). \qquad (5.4\text{-}5.7)$$

Предположим, что функцию $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},...,\underset{\sim}{l})$ можно представить в приведенной полиномиальной форме относительно $\vee$. Чтобы получить логическую структуру в интервале $[\alpha_{k-1},\alpha_k]$, поступают следующим образом:

1) выражение вида $\underset{\sim}{x} \wedge \underset{\sim}{y}$ заменяют выражением

$\mathcal{P}_{\underset{\sim}{x}}\Delta\mathcal{P}_{\underset{\sim}{y}}$.

Например, выражение $\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{c}$ заменяют $\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{a}}}\Delta\mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}}\Delta\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{c}}}$,

2) одночлены функции $\underset{\sim}{f}$, объединенные символом $\vee$ заменяют одночленами $\mathcal{P}$, полученными по 1), и объединяют символом ∇.

Например, $(\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \bar{\underset{\sim}{c}}) \vee (\bar{\underset{\sim}{b}} \wedge \underset{\sim}{c})$ заменяют

$(\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{a}}}\Delta\mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}}\Delta\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{c}}})\nabla(\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{b}}}\Delta\mathcal{P}_{\underset{\sim}{c}})$;

3) составляют логические выражения, двойственные полученным в 2), заменяя $\mathcal{P}_{\underset{\sim}{x}}$ на $\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{x}}$, $\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{x}}}$ на $\mathcal{P}'_{\bar{\underset{\sim}{x}}}$, Δ на ∇, ∇ на Δ. Например,

$(\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{a}}}\Delta\mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}}\Delta\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{c}}})\nabla(\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{b}}}\nabla\mathcal{P}_{\underset{\sim}{c}})$ принимает вид

$(\mathcal{P}'_{\bar{\underset{\sim}{a}}}\nabla\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}}\nabla\mathcal{P}'_{\bar{\underset{\sim}{c}}})\Delta(\mathcal{P}'_{\bar{\underset{\sim}{b}}}\nabla\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{c}})$;

4) результаты, полученные по 2) и 3), объединяют символом Δ. Это дает логическое выражение $\underset{\sim}{f}$ в интервале $[\alpha_{k-1},\alpha_k]$. Так, для примера, уже рассмотренного в 1) и 3):

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c}) = (\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \bar{\underset{\sim}{c}}) \vee (\bar{\underset{\sim}{b}} \wedge \underset{\sim}{c}), \qquad (5.8)$$

логическое выражение имеет вид

$$\mathcal{P} = [(\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{a}}}\Delta\mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}}\Delta\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{c}}})\nabla(\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{b}}}\Delta\mathcal{P}_{\underset{\sim}{c}})]\Delta[(\mathcal{P}'_{\bar{\underset{\sim}{a}}}\nabla\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}}\nabla\mathcal{P}'_{\bar{\underset{\sim}{c}}})\Delta(\mathcal{P}'_{\bar{\underset{\sim}{b}}}\nabla\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{c}})]. \qquad (5.9)$$

Если функция $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},...,\underset{\sim}{l})$ представлена в полиномиальной форме относительно $\wedge$, правила 1) — 4) модифицируются следующим образом:

1) каждое выражение вида $\underset{\sim}{x} \vee \underset{\sim}{y}$ заменяется выражением

$\mathcal{P}_{\underset{\sim}{x}}\nabla\mathcal{P}_{\underset{\sim}{y}}$;

2) одночлены функции $\underset{\sim}{f}$, объединенные символом $\wedge$, заменяются соответствующими одночленами в $\mathcal{P}$, объединенными символом Δ;

3) составляются выражения, двойственные тем, которые были получены в 2);

4) объединяются результаты шагов 2) и 3) символом Δ.

Рассмотрим пример. Пусть

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c},\underset{\sim}{d}) = (\underset{\sim}{a} \vee \bar{\underset{\sim}{b}}) \wedge (\underset{\sim}{b} \vee \bar{\underset{\sim}{d}}) \wedge (\bar{\underset{\sim}{c}} \vee \underset{\sim}{d}). \qquad (5.10)$$

Имеем

$$\mathcal{P} = [(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}}\nabla\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{b}}})\Delta(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}}\nabla\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{d}}})\Delta(\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{c}}}\nabla\mathcal{P}_{\underset{\sim}{d}})]\Delta[(\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}}\Delta\mathcal{P}'_{\bar{\underset{\sim}{b}}})\nabla(\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}}\Delta\mathcal{P}'_{\bar{\underset{\sim}{d}}})\nabla(\mathcal{P}'_{\bar{\underset{\sim}{c}}}\Delta\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{d}})]. \qquad (5.11)$$

Чтобы проиллюстрировать это на числах, предположим, что

$$[\alpha_{k-1},\alpha_k[\; = [0{,}6;\ 0{,}8[\ . \qquad (5.12)$$

Тогда выражение (5.11) можно записать так:

$$\left[\begin{pmatrix} & a \geqslant 0\,6 \\ \text{или/и} & b \leqslant 0{,}4\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} & b \geqslant 0{,}6 \\ \text{или/и} & d \leqslant 0{,}4\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} & c \leqslant 0{,}4 \\ \text{или/и} & d \geqslant 0{,}6\end{pmatrix}\right] \tag{5.13}$$

и

$$\left[\begin{pmatrix} & a < 0{,}8 \\ \text{и} & b > 0{,}2\end{pmatrix} \text{ или/и } \begin{pmatrix} & b < 0{,}8 \\ \text{и} & d > 0{,}2\end{pmatrix} \text{ или/и } \begin{pmatrix} & c > 0{,}2 \\ \text{и} & d < 0{,}8\end{pmatrix}\right].$$

Интересно разложить логические выражения по $\mathcal{P}_x$, $\mathcal{P}_{\bar{x}}$, $\mathcal{P}'_x$ и $\mathcal{P}'_{\bar{x}}$, которые дают достаточные условия для каждого одночлена в разложении относительно ∇. Это легко показать на примере. Рассмотрим снова (5.8):

$$f(a, b, c) = (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{b} \wedge c); \tag{5.14}$$

предположим, что

$$]\alpha_{k-1}, \alpha_k[=]0{,}3;\ 0{,}8[. \tag{5.15}$$

Мы уже подсчитали $\mathcal{P}$[см. (5.9)]. Теперь продолжим разложение (5.9), чтобы преобразовать это выражение в полином относительно ∇:

$$\mathcal{P} = [(\mathcal{P}_{\bar{a}} \Delta \mathcal{P}_b \Delta \mathcal{P}_{\bar{c}}) \nabla (\mathcal{P}_{\bar{b}} \Delta \mathcal{P}_c)] \Delta [(\mathcal{P}'_{\bar{a}} \nabla \mathcal{P}'_b \nabla \mathcal{P}'_{\bar{c}}) \Delta (\mathcal{P}'_{\bar{b}} \nabla \mathcal{P}'_c)]. \tag{5.16}$$

Чтобы сократить выкладки, условимся вместо $\mathcal{P}_x \Delta \mathcal{P}_y$ писать $\mathcal{P}_x \mathcal{P}_y$:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= (\mathcal{P}_{\bar{a}} \mathcal{P}_b \mathcal{P}_{\bar{c}} \nabla \mathcal{P}_{\bar{b}} \mathcal{P}_c)(\mathcal{P}'_{\bar{a}} \nabla \mathcal{P}'_b \nabla \mathcal{P}'_{\bar{c}})(\mathcal{P}'_{\bar{b}} \nabla \mathcal{P}'_c) = \\ &= (\mathcal{P}_{\bar{a}} \mathcal{P}_b \mathcal{P}_{\bar{c}} \nabla \mathcal{P}_{\bar{b}} \mathcal{P}_c)(\mathcal{P}'_{\bar{a}} \mathcal{P}'_{\bar{b}} \nabla \mathcal{P}'_{\bar{a}} \mathcal{P}'_c \nabla \mathcal{P}'_b \mathcal{P}'_{\bar{b}} \nabla \mathcal{P}'_b \mathcal{P}'_c \nabla \\ &\nabla \mathcal{P}'_{\bar{b}} \mathcal{P}_{\bar{c}} \nabla \mathcal{P}'_c \mathcal{P}'_{\bar{c}}) = \mathcal{P}_{\bar{a}} \mathcal{P}'_{\bar{a}} \mathcal{P}_b \mathcal{P}'_{\bar{b}} \mathcal{P}_{\bar{c}} \nabla \mathcal{P}_{\bar{a}} \mathcal{P}'_{\bar{a}} \mathcal{P}_b \mathcal{P}_{\bar{c}} \mathcal{P}'_c \nabla \\ &\nabla \mathcal{P}_{\bar{a}} \mathcal{P}_b \mathcal{P}'_b \mathcal{P}'_{\bar{b}} \mathcal{P}_{\bar{c}} \nabla \mathcal{P}_{\bar{a}} \mathcal{P}_b \mathcal{P}'_b \mathcal{P}_{\bar{c}} \mathcal{P}'_c \nabla \mathcal{P}_{\bar{a}} \mathcal{P}_b \mathcal{P}'_{\bar{b}} \mathcal{P}_{\bar{c}} \mathcal{P}'_{\bar{c}} \nabla \\ &\nabla \mathcal{P}_{\bar{a}} \mathcal{P}_b \mathcal{P}_{\bar{c}} \mathcal{P}'_c \mathcal{P}'_{\bar{c}} \nabla \mathcal{P}'_{\bar{a}} \mathcal{P}_{\bar{b}} \mathcal{P}'_{\bar{b}} \mathcal{P}_c \nabla \mathcal{P}'_{\bar{a}} \mathcal{P}_{\bar{b}} \mathcal{P}_c \mathcal{P}'_c \nabla \mathcal{P}_{\bar{b}} \mathcal{P}'_b \mathcal{P}'_{\bar{b}} \mathcal{P}_c \nabla \\ &\nabla \mathcal{P}_{\bar{b}} \mathcal{P}'_b \mathcal{P}_c \mathcal{P}'_c \nabla \mathcal{P}_{\bar{b}} \mathcal{P}'_{\bar{b}} \mathcal{P}_c \mathcal{P}'_c \nabla \mathcal{P}_{\bar{b}} \mathcal{P}_c \mathcal{P}'_c \mathcal{P}'_{\bar{c}}.\end{aligned} \tag{5.17}$$

Каждый из этих одночленов достаточен, поэтому имеем

$$0{,}3 \leqslant (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{b} \wedge c) < 0{,}8. \tag{5.18}$$

Проверим что, например, для

$$\mathcal{P}_{\bar{a}} \mathcal{P}'_b \mathcal{P}_{\bar{b}} \mathcal{P}_c \quad \text{(девятый одночлен)}. \tag{5.19}$$

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

Применяя определения (5.4) — (5.7), получаем

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{\bar{b}} : b \leqslant (1 - 0{,}3), \text{ следовательно, } b \leqslant 0{,}7, \\ &\mathcal{P}'_b : b < 0{,}8, \\ &\mathcal{P}'_{\bar{b}} : b > 0{,}2, \\ &\mathcal{P}_c : c \geqslant 0\,3. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Таким образом,

$$0{,}2 < b \leqslant 0{,}7 \text{ и } c \geqslant 0{,}3. \tag{5.21}$$

Эти неравенства представляют собой достаточные условия для того, чтобы соотношение (5.18) было верным.

Столь же интересно провести двойственное разложение относительно Δ. Обратимся опять к примеру ((5.14) и (5.15)) и разложим полиномы относительно $\wedge$; (5.14) дает

$$f(a, b, c) = (\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee c) \wedge (b \vee \bar{b}) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee \bar{c}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{c}). \tag{5.22}$$

Опуская значок Δ, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = (\mathcal{P}_{\bar{a}} \mathcal{P}_{\bar{b}})(\mathcal{P}_{\bar{a}} \nabla \mathcal{P}_c)(\mathcal{P}_b \nabla \mathcal{P}_{\bar{b}})(\mathcal{P}_b \nabla \mathcal{P}_c)(\mathcal{P}_c \nabla \mathcal{P}_{\bar{c}})(\mathcal{P}_{\bar{b}} \nabla \mathcal{P}_{\bar{c}}) \times \\ \times (\mathcal{P}'_{\bar{a}} \mathcal{P}'_{\bar{b}} \nabla \mathcal{P}'_{\bar{a}} \mathcal{P}'_c \nabla \mathcal{P}'_b \mathcal{P}'_{\bar{b}} \nabla \mathcal{P}'_b \mathcal{P}'_c \nabla \mathcal{P}'_c \mathcal{P}'_{\bar{c}} \nabla \mathcal{P}'_{\bar{b}} \mathcal{P}'_{\bar{c}}).\end{aligned} \tag{5.23}$$

Отметим, что если произвести разложение по ∇, то снова придем к соотношению (5.17) с точностью до сокращения немаксимальных одночленов.

(Понятие максимального одночлена в этих разложениях по Δ или ∇ совпадает с тем, которое дано в 8.3, но применяется здесь к логическим функциям типа (5.17) или (5.23). Вследствие свойств $\mathcal{P}$, встречающихся в булевой логике, редукцию можно продолжить, считая, что утверждение $\mathcal{P} \Delta \overline{\mathcal{P}}$ всегда ложно, а $\mathcal{P} \nabla \overline{\mathcal{P}}$ всегда истинно, но здесь в этом нет нужды, так как отрицание $\mathcal{P}$ никогда не появляется.)

Таблица 5.1

Основные функции двух нечетких переменных и их логические структуры для интервала $[\alpha_{k-1},\alpha_k[$

$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$	Полиномиальная форма	
	относительно ∇	относительно Δ
$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}$	$(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}}) \nabla (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}})$	$(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}}) \Delta (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}}) \Delta$ $\Delta (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \nabla \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}})$ (35.24)
$\underset{\sim}{\bar{a}} \wedge \underset{\sim}{b}$	$(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}}) \nabla (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}})$	$(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}}) \Delta (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}}) \Delta$ $\Delta (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}})$ (35.25)
$\underset{\sim}{\bar{a}} \wedge \underset{\sim}{\bar{b}}$	$(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \nabla (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}})$	$(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}}) \Delta (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \Delta$ $\Delta (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \nabla \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{b}}})$ (35.26)
$\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}$	$(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}}) \nabla (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}})$	$(\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}}) \Delta (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}}) \Delta$ $\Delta (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \nabla \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}})$ (35.27)

Окончание табл. 5.1

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$	Полиномиальная форма	
	относительно ∇	относительно Δ
$\underset{\sim}{\bar{a}} \vee \underset{\sim}{b}$	$(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}}) \nabla (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}})$	$(\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}}) \Delta (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}}) \Delta$ $\Delta (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \nabla \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}})$ (35.28)
$\underset{\sim}{\bar{a}} \vee \underset{\sim}{\bar{b}}$	$(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \nabla (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{b}}})$	$(\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}}) \Delta (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \Delta$ $\Delta (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \nabla \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}})$ (35.29)
$(\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{\bar{b}}) \vee (\underset{\sim}{\bar{a}} \wedge \underset{\sim}{b})$	$(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \nabla$ $\nabla (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \nabla$ $\nabla (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \nabla$ $\nabla (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \nabla$ $\nabla (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}}) \nabla$ $\nabla (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}}) \nabla$ $\nabla (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \nabla$ $\nabla (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{b}}})$	$(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \nabla \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}}) \Delta (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \nabla \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}}) \Delta$ $\Delta (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \nabla \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \Delta$ $\Delta (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}} \nabla \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \Delta$ $\Delta (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \nabla \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \Delta$ $\Delta (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \nabla \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}})$ (35.30)
$(\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{\bar{b}}) \wedge (\underset{\sim}{\bar{a}} \vee \underset{\sim}{b})$	$(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \nabla$ $\nabla (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \nabla$ $\nabla (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}}) \nabla$ $\nabla (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}}) \nabla$ $\nabla (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \nabla$ $\nabla (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}}) \nabla$ $\nabla (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \nabla$ $\nabla (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}} \Delta \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}})$	$(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \nabla \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \Delta (\mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}} \nabla \mathcal{P}_{\underset{\sim}{\bar{a}}}) \Delta$ $\Delta (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \nabla \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}}) \Delta$ $\Delta (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \nabla \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}}) \Delta$ $\Delta (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}} \nabla \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{b}}}) \wedge$ $\Delta (\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{a}}} \nabla \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{\bar{b}}})$ (35.31)

Эти выражения можно упростить, если известно расположение $\alpha_{k-1}, +\alpha_k$ относительно 1.

Важное замечание. Если нечеткая переменная $\alpha_{k-1}, +\alpha_k$ $\underset{\sim}{a}$ принимает свои значения в интервале

$$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}} = [a_1, a_2[\subset [0,1], \quad (5.32)$$

то переменная $\underset{\sim}{\bar a} = 1 - \underset{\sim}{a}$ принимает свои значения в интервале

$$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{\bar a}} =]\,1-a_2,\ 1-a_1] \subset [0,1). \quad (5.33)$$

Если $\underset{\sim}{a}$ принимает свои значения в интервале

$$\overline{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{a}} = [0, a_1[\,\cup\,[a_2, 1], \quad (5.34)$$

то $\underset{\sim}{\bar a}$ — в интервале

$$\overline{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{\bar a}} = [0, 1-a_2]\,\cup\,]\,1-a_1, 1]. \quad (5.35)$$

8.6. Композиция интервалов

Пусть

$$\underset{\sim}{a} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}} = [a_1, a_2[\quad (6.1)$$

и

$$\underset{\sim}{b} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{b}} = [b_1, b_2[. \quad (6.2)$$

Тогда какому интервалу $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}\wedge\underset{\sim}{b}}$ принадлежит $\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}$? Легко видеть, что

$$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}\wedge\underset{\sim}{b}} = [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2[. \quad (6.3)$$

Аналогично

$$\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}\vee\underset{\sim}{b}} = [a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2[. \quad (6.4)$$

Пример. Пусть

$$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}} = [0{,}6;\, 09[\ \text{ и } \ \mathcal{D}_{\underset{\sim}{b}} = [0{,}2;\, 0{,}7[. \quad (6.5)$$

Очевидно, что .

$$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}\wedge\underset{\sim}{b}} = [0{,}6 \wedge 0{,}2;\, 0{,}9 \wedge 0{,}7[= [0{,}2;\, 0{,}7[, \quad (6.6)$$

$$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}\vee\underset{\sim}{b}} = [0{,}6 \vee 0\,2;\, 0{,}9 \vee 0{,}7)[= [0{,}6;\, 0{,}9[. \quad (6.7)$$

В силу свойств (2.14) и (2.15) аналогично можно показать, что если

$$\underset{\sim}{a} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}} = [a_1,\ a_2[,\ \underset{\sim}{b} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{b}} = [b_1,\ b_2[,\ \underset{\sim}{c} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{c}} = [c_1,\ c_2[, \quad (5.8)$$

то

$$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{c} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}\wedge\underset{\sim}{b}\wedge\underset{\sim}{c}} = [a_1 \wedge b_1 \wedge c_1,\ a_2 \wedge b_2 \wedge c_2[\quad (6.9)$$

и

$$\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{c} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}\vee\underset{\sim}{b}\vee\underset{\sim}{c}} = [a_1 \vee b_1 \vee c_1,\ a_2 \vee b_2 \vee c_2[. \quad (6.10)$$

Интересно рассмотреть также случай, когда нечеткие переменные принимают свои значения в дополнении к интервалу. Если

$$\overline{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{a}} = [0,\ a_1[\,\cup\,[a_2,\ 1] \quad (6.11)$$

и

$$\overline{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{b}} = [0,\ b_1[\,\cup\,[b_2,\ 1], \quad (6.12)$$

то получим следующие результаты:
для

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{a} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}},\ \underset{\sim}{b} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{b}} \quad (6.13)$$

имеем

$$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}\wedge\underset{\sim}{b}} = [a_1 \wedge b_1,\ a_2 \wedge b_2[; \quad (6.14)$$

для

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{a} \in \overline{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{a}},\ \underset{\sim}{b} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{b}} \quad (6.15)$$

имеем

$$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}\wedge\underset{\sim}{b}} = [0,\ a_1 \wedge b_2[\,\cup\,[a_2 \wedge b_1,\ b_2[. \quad (6.16)$$

Ниже приведена табл. 6.1 основных случаев (6.17)-—(6.24), когда $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}} = [a_1,\ a_2[$ и $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{b}} = [b_1,\ b_2[$.

Конечно, нет оснований путать $\overline{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{a}}$ с $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{\bar a}}$:

$$\overline{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{a}} = [0,\ a_1[\,\cup\,[a_2,\ 1], \quad (36.25) \qquad \mathcal{D}_{\underset{\sim}{\bar a}} =]\,1-a_2,\ 1-a_1] \quad (6.26)$$

и, наконец,

$$\overline{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{\bar a}} = [0, 1-a_2]\,\cup\,]\,1-a_1,\ 1]. \quad (6.27)$$

С помощью выражений, приведенных в (6.17) — (6.24), можно получать области определения более сложных функций $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots,)$.

Пример. Найти области определения

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{\bar a} \wedge \underset{\sim}{b}, \quad (6.28)$$

зная, что

$$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}} = [a_1,\ a_2[\text{ и } \mathcal{D}_{\underset{\sim}{b}} = [b_1,\ b_2[. \quad (6.29)$$

Из (6.29) и (6.26) выводим

$$\mathcal{D}_{\bar{\underset{\sim}{a}}} =]\,1-a_2,\ 1-a_1]. \quad (6.30)$$

Таблица 6.1

Восемь основных случаев при $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}} = [a_1,\ a_2[$ и $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{b}} = [b_1,\ b_2[$

$f(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b})$	Область определения $\underset{\sim}{a}$	Область определения $\underset{\sim}{b}$	Область определения $f(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b})$	
$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}$	$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}}$	$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{b}}$	$[a_1 \wedge b_1,\ a_2 \wedge b_2[$	(36.17)
	$\bar{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{a}}$	$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{b}}$	$[0,\ a_1 \wedge b_2\ [\cup\ [a_2 \wedge b_1,\ b_2[$	(36.18)
	$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}}$	$\bar{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{b}}$	$[0,\ b_1 \wedge a_2\ [\cup\ [b_2 \wedge a_1,\ a_2[$	(36.19)
	$\bar{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{a}}$	$\bar{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{b}}$	$[0,\ a_1 \vee b_1\ [\cup\ [a_2 \wedge b_2,\ 1]$*)	(36.20)
$\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}$	$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}}$	$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{b}}$	$[a_1 \vee b_1,\ a_2 \vee b_2[$	(36.21)
	$\bar{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{a}}$	$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{b}}$	$[b_1,\ a_1 \vee b_2\ [\cup\ [a_2 \vee b_1,\ 1]$	(36.22)
	$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}}$	$\bar{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{b}}$	$[a_1,\ b_1 \vee a_2\ [\cup\ [b_2 \vee a_1,\ 1]$	(36.23)
	$\bar{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{a}}$	$\bar{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{b}}$	$[0,\ a_1 \vee b_1\ [\cup\ [a_2 \wedge b_2,\ 1]$	(36.24)*)

*) Таким образом, выражения (36.20) и (36.24) дают один и тот же интервал.

Используя (6.17), после замены a_1 на $1 - a_2$ и a_2 на $1 - a_1$, и принимая во внимание направление квадратных скобок, получаем

$$\mathcal{D}_{\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b}} = \begin{cases}](1-a_2) \wedge b_1,\ (1-a_1) \wedge b_2], & 1-a_2 \leqslant b_1 \text{ и } 1-a_1 \leqslant b_2, \\ [(1-a_2) \wedge b_1,\ (1-a_1) \wedge b_2], & 1-a_2 > b_1 \text{ и } 1-a_1 \leqslant b_2, \\ ](1-a_2) \wedge b_1,\ (1-a_1) \wedge b_2[, & 1-a_2 \leqslant b_1 \text{ и } 1-a_1 > b_2, \\ [(1-a_2) \wedge b_1,\ (1-a_1) \wedge b_2[, & 1-a_2 > b_1 \text{ и } 1-a_1 > b_2 \end{cases}$$

(6.31)

и, таким образом,

$$\mathcal{D}_{\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b}} = \begin{cases}]\,1-a_2,\ 1-a_1[, & \text{если } 1-a_2 \leqslant b_1 \text{ и } 1-a_1 \leqslant b_2, \\ [b_1,\ 1-a_1], & \text{если } 1-a_2 > b_1 \text{ и } 1-a_1 \leqslant b_2, \\ ]\,1-a_2,\ b_2[, & \text{если } 1-a_2 \leqslant b_1 \text{ и } 1-a_1 > b_2, \\ [b_1,\ b_2[, & \text{если } 1-a_2 > b_1 \text{ и } 1-a_1 > b_2. \end{cases}$$

(6.32)

Случай дискретной функции принадлежности. Предположим, что интервал [0,1] разбит на 10 равных частей, определяющих, таким образом, 11 дискретных значений:

$$\mathbf{M} = \{0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 1\}. \quad (6.33)$$

В этом случае для функций, подлежащих рассмотрению, удобно составить таблицы, представленные на рис. 6.1 — 6.8. В теории функций нечетких переменных эти таблицы играют роль, аналогичную роли таблиц истинности при изучении функций булевых переменных. Но теперь вместо двух значений переменной и законов булевой алгебры нам приходится иметь дело с большим числом значений — от 0 до 1 и с законами (2.12)—(2.26), определенными в 8.2.

На рис. 6.1 —6.12 для сокращения записи десятичные дроби 0,1, 0,2, 0,3, ... представлены как 0, 1, 2, 3,...

Посмотрим, как применяются эти таблицы.

Пример 1. Пусть

$$f(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b},$$

$$\text{где } \underset{\sim}{a} \in \{0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5\};$$

(36.34) (36.35) $\underset{\sim}{b} \in \{0;\ 0{,}1\} \cup \{0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9\}$. (6.36)

(Можно написать {0; 0,1; 0,7; 0,8; 0,9}, но мы разделили отстоящие друг от друга элементы, чтобы можно было легче увидеть составные части.)

Мы воспроизвели рис. 6.2 еще раз на рис. 6.9. Изучение заштрихованной части показывает, что

$$\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b} \in \{0;\ 0{,}1\} \cup \{0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8\}. \quad (6.37)$$

Пример 2. Пусть

$$f(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}} \wedge \underset{\sim}{c}) \vee \bar{\underset{\sim}{c}}, \quad (6.38)$$

где

$$\underset{\sim}{a} \in \{0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5\};$$

$$\underset{\sim}{b} \in \{0{,}1;\ 0{,}2;\} \cup \{0{,}6\};$$

$$\underset{\sim}{c} \in \{0;\ 0{,}1\} \cup \{0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 1\}. \quad (6.39\text{-}6.41)$$

Сначала положим

$$\underset{\sim}{d}=\underset{\sim}{a}\wedge\overline{\underset{\sim}{b}} \quad (6.42)$$

и рассчитаем область определения $\underset{\sim}{d}$ с помощью таблицы на рис. 6.10 (которая представляет собой транспонированную таблицу на рис. 6.2). Находим

$$\underset{\sim}{d}=\underset{\sim}{a}\wedge\overline{\underset{\sim}{b}}\in\{0{,}3;\quad 0{,}4;\quad 0{,}5\}. \quad (6.43)$$

Теперь найдем область определения

$$\underset{\sim}{e}=\underset{\sim}{d}\wedge\underset{\sim}{c}=\underset{\sim}{a}\wedge\overline{\underset{\sim}{b}}\wedge\underset{\sim}{c} \quad (6.44)$$

с помощью таблицы на рис. 6.11 (которая совпадает с таблицей на рис. 6.1).

$\underset{\sim}{a}\wedge\underset{\sim}{b}$ ($\underset{\sim}{a}$ \ $\underset{\sim}{b}$)	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1	0	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1
.2	0	.1	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	2
.3	0	.1	.2	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3
.4	0	.1	.2	.3	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4
.5	0	1	.2	3	.4	.5	5	.5	.5	.5	.5
.6	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.6	.6	.5	.6
.7	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.7	.7	.7
.8	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.8	.8
.9	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.9
1	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1

Рис. 6.1

$\overline{\underset{\sim}{a}}\wedge\underset{\sim}{b}$ ($\underset{\sim}{a}$ \ $\underset{\sim}{b}$)	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	0	.1	.2	3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.1	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.9
.2	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.8	.8
3.	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.7	.7	.7
.4	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.6	.6	.6	.6
.5	0	.1	.2	.3	.4	.5	5	.5	.5	.5	.5
.6	0	.1	.2	.3	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4
.7	0	.1	.2	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3
.8	0	.1	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2
.9	0	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 6.2

$\overline{\underset{\sim}{a}}\wedge\overline{\underset{\sim}{b}}$ ($\underset{\sim}{a}$ \ $\underset{\sim}{b}$)	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.1	.9	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.2	.8	.8	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.3	.7	.7	.7	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.4	.6	.6	.6	.6	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.4	.3	.2	.1	0
.6	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.3	.2	.1	0
.7	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.2	.1	0
.8	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.1	0
.9	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 6.3

$\underset{\sim}{a}\vee\underset{\sim}{b}$ ($\underset{\sim}{a}$ \ $\underset{\sim}{b}$)	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.1	.1	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.2	.2	.2	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.3	.3	.3	.3	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.4	.4	.4	.4	.4	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.6	.7	.8	.9	1
.6	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.7	.8	.9	1
.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.8	.9	1
.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.9	1
.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Рис.6.4

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

$\overline{\underset{\sim}{a}}\vee\underset{\sim}{b}$ ($\underset{\sim}{a}$ \ $\underset{\sim}{b}$)	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
.1	9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	1
.2	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.9	1
.3	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.8	.9	1
.4	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.7	.8	.9	1
.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.6	.7	.8	.9	1
.6	.4	.4	.4	.4	.4	.5	.6	.7	.8	9	1
.7	.3	.3	.3	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
8	.2	.2	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.9	.1	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
1	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1

Рис. 6.5

$\overline{\underset{\sim}{a}}\vee\overline{\underset{\sim}{b}}$ ($\underset{\sim}{a}$ \ $\underset{\sim}{b}$)	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
.1	1	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9
.2	1	.9	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8
.3	1	.9	.8	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7
.4	1	.9	.8	.7	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.6
.5	1	.9	.8	.7	.6	.5	5	.5	.5	.5	.5
.6	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.4	.4	.4	.4
.7	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.3	.3	.3
.8	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.2	.2
.9	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.1
1	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0

Рис.6.6

$(\underset{\sim}{a}\wedge\overline{\underset{\sim}{b}})\vee(\overline{\underset{\sim}{a}}\wedge\underset{\sim}{b})$ ($\underset{\sim}{a}$ \ $\underset{\sim}{b}$)	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.1	.1	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.9
.2	.2	.2	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.8	.8
.3	.3	.3	3	.3	.4	.5	.6	.7	.7	.7	.7
.4	.4	.4	.4	4	.4	.5	.6	.6	.6	.6	.6
.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5
.6	.6	.6	.6	.6	.6	.5	.4	.4	.4	.4	.4
.7	.7	.7	.7	.7	.6	.5	.4	.3	.3	.3	.3
.8	.8	.8	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.2	.2
.9	.9	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.1
1	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0

Рис. 6.7

$(\underset{\sim}{a}\vee\overline{\underset{\sim}{b}})\wedge(\overline{\underset{\sim}{a}}\vee\underset{\sim}{b})$ ($\underset{\sim}{a}$ \ $\underset{\sim}{b}$)	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.1	.9	9	8	7	.6	.5	4	.3	.2	.1	.1
.2	.8	.8	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.2	.2
.3	.7	.7	.7	.7	.6	.5	.4	.3	.3	.3	.3
.4	.6	.6	.6	.6	.6	.5	.4	.4	.4	.4	.4
.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5
.6	.4	.4	.4	.4	.4	.5	.6	.6	.6	.6	.6
.7	.3	.3	.3	.3	.4	.5	.6	.7	.7	.7	.7
.8	.2	.2	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.8	8
.9	.1	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.9
1	0	.1	2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1

Рис. 6.8

$\overline{\underset{\sim}{a}}\wedge\underset{\sim}{b}$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.1	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.9
.2	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.8	.8
.3	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.7	.7	.7
.4	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.6	.6	.6	.6
.5	0	.1	.2	.3	.4	.5	.5	.5	.5	.5	.5
.6	0	.1	.2	.3	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4
.7	0	.1	.2	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3
.8	0	.1	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2
.9	0	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 6.9

$\underset{\sim}{d}=\underset{\sim}{a}\wedge\overline{\underset{\sim}{b}}$ ($\underset{\sim}{a}$ \ $\underset{\sim}{b}$)	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	0
.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.1	0
.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.2	.1	0
.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.3	.2	.1	0
.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.4	.3	.2	.1	0
.6	.6	.6	.6	.6	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.7	.7	.7	.7	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.8	.8	.8	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.9	.9	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
1	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0

Рис. 6.10

$\underset{\sim}{e}=\underset{\sim}{d}\wedge\underset{\sim}{c}$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1	0	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1
.2	0	.1	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2
.3	0	.1	.2	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3
.4	0	.1	.2	.3	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4
.5	0	.1	.2	.3	.4	.5	.5	.5	.5	.5	.5
.6	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.6	.6	.6	.6
.7	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.7	.7	.7
.8	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.8	.8
.9	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.9
1	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1

Рис. 36.11

$\underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{e}\vee\overline{\underset{\sim}{c}}$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	1	.9	.8	.7	.5	.5	.4	.3	.2	.1	0
.1	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.1
.2	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.2	.2
.3	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.3	.3	.3
.4	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.4	.4	.4	.4
.5	1	.9	.8	.7	.6	.5	.5	.5	.5	.5	.5
.6	1	.9	.8	.7	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.6
.7	1	.9	.8	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7
.8	1	.9	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8
.9	1	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Рис. 36.12

Находим

$$\underset{\sim}{e}=\underset{\sim}{d}\wedge\underset{\sim}{c}=\underset{\sim}{a}\wedge\overline{\underset{\sim}{b}}\wedge\underset{\sim}{c}\in\{0;\ 0,1\}\cup\{0,3;\ 0,4;\ 0,5\}. \qquad (6.45)$$

Наконец, подсчитаем область определения

$$\underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{e}\vee\overline{\underset{\sim}{c}}=(\underset{\sim}{d}\wedge\underset{\sim}{c})\vee\overline{\underset{\sim}{c}}=(\underset{\sim}{a}\wedge\overline{\underset{\sim}{b}}\wedge\underset{\sim}{c})\vee\overline{\underset{\sim}{c}} \qquad (6.46)$$

с помощью таблицы на рис. 6.12 (представляющую собой транспонированную таблицу на рис. 6.5). Находим

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\ \underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{c})\in\{0;\ 0,1;\ 0,2;\ 0,3;\ 0,4;\ 0,5\}\cup\{0,9;\ 1\}\ . \qquad (6.47)$$

8.7. Синтез функций нечетких переменных

Рассмотрим следующуюпроблему: как для заданных переменных $\underset{\sim}{a}$ и $\underset{\sim}{b}$ (мы начнем с двух переменных) построить функцию $\underset{\sim}{f}\ (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b})$, принимающую значения в интервале $[\alpha_{k-1}, +\alpha_k\ [$?

Как видно из таблицы основных функций двух нечетких переменных и их логических структур для интервала $[\alpha_{k-1}, +\alpha_k\ [$ [см. (5.24) — (5.31)], проблема имеет не единственное решение. Для представления $\underset{\sim}{f}\ (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b})$, принимающей значения в интервале $[\alpha_{k-1}, +\alpha_k\ [$, можно, например, выбрать функцию вида $\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}$ (5.24).

Какое бы представление мы не выбрали, при этом должна удовлетворяться соответствующая выбранному представлению полиномиаль-

ная форма относительно ∇ или Δ и выполняться соответствующее условие типа Ᵽ. Мы выберем представление функции относительно Δ (хотя можно выбрать многие другие, но в нашем случае полиномиальная форма будет немного проще):

$$(\mathscr{P}_{\underset{\sim}{a}})\,\Delta\,(\mathscr{P}_{\underset{\sim}{b}})\,\Delta\,(\mathscr{P}'_{\underset{\sim}{a}}\,\nabla\mathscr{P}'_{\underset{\sim}{b}}), \qquad (7.1)$$

т. е. с учетом обозначений (5.4) — (5.7)

$$\left\{\begin{matrix} \underset{\sim}{a}\geqslant\alpha_{k-1} \\ \text{и } \underset{\sim}{b}\geqslant\alpha_{k-1}\end{matrix}\right\} \text{ и } \left\{\begin{matrix} \underset{\sim}{a}<\alpha_k \\ \text{или/и } \underset{\sim}{b}<\alpha_k\end{matrix}\right\}. \qquad (7.2)$$

Решение можно представить с помощью любой другой функции, например функции $\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}}$ (5.25), для которой имеем

$$(\mathscr{P}_{\overline{\underset{\sim}{a}}})\,\Delta(\mathscr{P}_{\underset{\sim}{b}})\,\Delta\,(\mathscr{P}'_{\overline{\underset{\sim}{a}}}\,\nabla\mathscr{P}'_{\underset{\sim}{b}}), \qquad (7.3)$$

и, таким образом,

$$\left\{\begin{matrix} \underset{\sim}{a}\leqslant 1-\alpha_{k-1} \\ \text{и } \underset{\sim}{b}\geqslant\alpha_{k-1}\end{matrix}\right\} \text{ и } \left\{\begin{matrix} \underset{\sim}{a}>1-\alpha_k \\ \text{или/и } \underset{\sim}{b}<\alpha_k\end{matrix}\right\}. \qquad (7.4)$$

Теперь, возвращаясь к (7.1) и (7.2), предположим, что нижние и верхние пределы для переменных $\underset{\sim}{a}$ и $\underset{\sim}{b}$ можно задать следующими значениями:

$$\left\{\begin{matrix} \underset{\sim}{a}\geqslant w_1 \\ \text{и } \underset{\sim}{b}\geqslant w_2\end{matrix}\right\} \text{ и } \left\{\begin{matrix} \underset{\sim}{a}<w_3 \\ \text{или/и } \underset{\sim}{b}<w_4\end{matrix}\right\}. \qquad (7.5)$$

Теперь можно ввести *коэффициенты согласования* λ_{ij}, называемые в некоторых методах мультипликаторами:

$$\lambda_{11}w_1 - \alpha_{k-1},\quad \lambda_{12}w_2 - \lambda_{h-1},\quad \lambda_{21}w_3=\alpha_k \text{ и } \lambda_{22}w_4=\alpha_k \qquad (7.6)$$

или

$$\lambda_{11}\quad \frac{\alpha_{k-1}}{w_1},\quad \lambda_{13} - \frac{\alpha_{h-1}}{w_2},\quad \lambda_{13} - \frac{\alpha_k}{w_3},\quad \lambda_{22}=\frac{\alpha_k}{w_4}\ . \qquad (7.7)$$

Чтобы технически реализовать функцию $\underset{\sim}{f}\ (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b})$, которая принимает значения в интервале $[\alpha_{k-1}, \alpha_k\ [$, когда две заданные переменные $\underset{\sim}{a}$ и $\underset{\sim}{b}$ изменяются соответственно в интервалах $[w_1, w_2\ [$ и $[w_3, w_4[$, можно построить схему аналогичную той, которая изображена на рис. 7.1

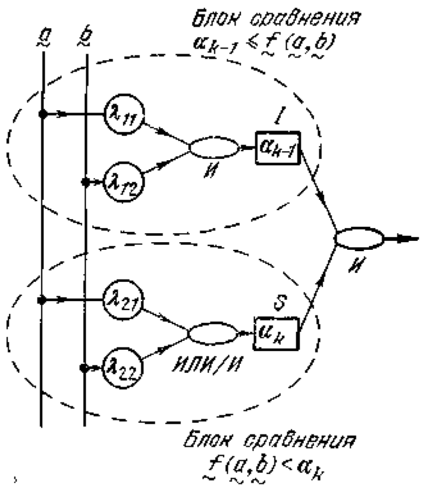


Рис. 7.1

Для элементов этого типа будем во всех схемах использовать следующие символы:

(λ_{ij}) — устройство параметрического согласования для восстановления α_{k-1} и α_k ;

(И) — логический элемент, реализующий *и;*

(ИЛИ/И) — логический элемент, реализующий *или /и;*

(НЕ) — логический элемент, реализующий *отрицание;* (7.8)

$\boxed{\alpha_{k-1}}^{\text{н}}$ — устройство, задающее *нижний предел;*

$\boxed{\alpha_{k}}^{\text{в}}$ — устройство, задающее *верхний предел.*

Пример 1. Осуществим синтез схемы при условии

$$\alpha_{k-1} \leqslant \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) < \alpha_k, \quad (7.9)$$

используя для этого следующее представление функции:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \bar{\underset{\sim}{b}}) \vee (\bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b}). \quad (7.10)$$

Обращаясь к правилу, приведенному в 8.5, видим

$$\mathcal{P} = \left[\left(\mathcal{P}_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{b}}}\right) \nabla \left(\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{a}}} \Delta \mathcal{P}_{\underset{\sim}{b}}\right)\right] \Delta \left[\left(\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{a}} \nabla \mathcal{P}'_{\bar{\underset{\sim}{b}}}\right) \Delta \left(\mathcal{P}'_{\bar{\underset{\sim}{a}}} \nabla \mathcal{P}'_{\underset{\sim}{b}}\right)\right], \quad (7.11)$$

что можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} \geqslant \alpha_{k-1} \\ \text{и } \underset{\sim}{b} \leqslant 1 - \alpha_{k-1} \end{pmatrix} \text{ или/и } \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} \leqslant 1 - \alpha_{k-1} \\ \text{и } \underset{\sim}{b} \geqslant \alpha_{k-1} \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} < \alpha_k \\ \text{или/и } \underset{\sim}{b} > 1 - \alpha_k \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} > 1 - \alpha_k \\ \text{или/и } \underset{\sim}{b} < \alpha_k \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

Если пределы таковы, что

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} \geqslant w_1 \\ \text{и } \underset{\sim}{b} \leqslant w_2 \end{pmatrix} \text{ или/и } \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} \leqslant w_3 \\ \text{и } \underset{\sim}{b} \geqslant w_4 \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

и

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} < w_5 \\ \text{или/и } \underset{\sim}{b} > w_6 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} > w_7 \\ \text{или/и } \underset{\sim}{b} < w_8 \end{pmatrix},$$

то можно видеть, что

$$\lambda_{11} = \frac{\alpha_{k-1}}{w_1}, \quad \lambda_{12} = \frac{1-\alpha_{k-1}}{w_2}, \quad \lambda_{13} = \frac{1-\alpha_{k-1}}{w_3}, \quad \lambda_{14} = \frac{\alpha_{k-1}}{w_4},$$

$$\lambda_{21} = \frac{\alpha_k}{w_5}, \quad \lambda_{22} = \frac{1-\alpha_k}{w_6}, \quad \lambda_{23} = \frac{1-\alpha_k}{w_7}, \quad \lambda_{24} = \frac{\alpha_k}{w_8}. \quad (7.14)$$

Следовательно, мы получили схему элементов, изображенную на рис. 7.2.

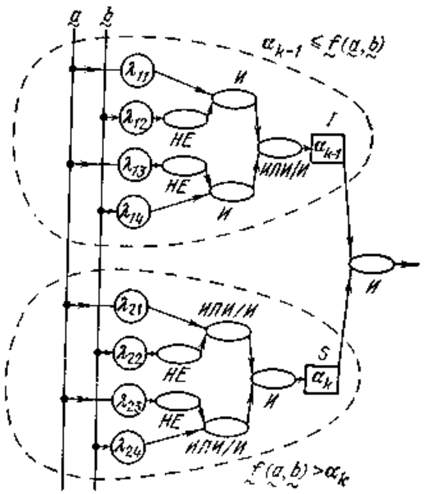


Рис. 7.2

Пример 2. Описать реализацию

$$\alpha_{k-1} \leqslant \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{d}) < \alpha_k, \quad (7.15)$$

где

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{d}) = (\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b} \vee \overline{\underset{\sim}{c}}) \wedge (\overline{\underset{\sim}{a}} \vee \underset{\sim}{c} \vee \underset{\sim}{d}). \quad (7.16)$$

Используя правило из 8.5, положим

$$\mathscr{P} = [(\mathscr{P}_{\underset{\sim}{a}} \nabla \mathscr{P}_{\underset{\sim}{b}} \nabla \mathscr{P}_{\overline{\underset{\sim}{c}}}) \Delta (\mathscr{P}_{\overline{\underset{\sim}{a}}} \nabla \mathscr{P}_{\underset{\sim}{c}} \nabla \mathscr{P}_{\underset{\sim}{d}})] \Delta [(\mathscr{P}'_{\underset{\sim}{a}} \Delta \mathscr{P}'_{\underset{\sim}{b}} \Delta \mathscr{P}'_{\overline{\underset{\sim}{c}}}) \nabla (\mathscr{P}_{\overline{\underset{\sim}{a}}} \Delta \mathscr{P}'_{\underset{\sim}{c}} \Delta \mathscr{P}'_{\underset{\sim}{d}})]. \quad (7.17)$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} \geqslant \alpha_{k-1} \\ \text{или/и } \underset{\sim}{b} \geqslant \alpha_{k-1} \\ \text{или/и } \underset{\sim}{c} \leqslant 1-\alpha_{k-1} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} \leqslant 1-\alpha_{k-1} \\ \text{или/и } \underset{\sim}{c} \geqslant \alpha_{k-1} \\ \text{или/и } \underset{\sim}{d} \geqslant \alpha_{k-1} \end{pmatrix}$$

и (7.18)

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} < \alpha_k \\ \text{и } \underset{\sim}{b} < \alpha_k \\ \text{и } \underset{\sim}{c} > 1-\alpha_{k-1} \end{pmatrix} \text{ или/и } \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} > 1-\alpha_k \\ \text{и } \underset{\sim}{c} < \alpha_k \\ \text{и } \underset{\sim}{d} < \alpha_k \end{pmatrix}$$

Следовательно, для ограничений имеем

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} \geqslant w_1 \\ \text{или/и } \underset{\sim}{b} \geqslant w_2 \\ \text{или/и } \underset{\sim}{c} \leqslant w_3 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} \leqslant w_4 \\ \text{или/и } \underset{\sim}{c} \geqslant w_5 \\ \text{или/и } \underset{\sim}{d} \geqslant w_6 \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

и

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} < w_7 \\ \text{и } \underset{\sim}{b} < w_8 \\ \text{и } \underset{\sim}{c} > w_9 \end{pmatrix} \text{ или/и } \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} > w_{10} \\ \text{и } \underset{\sim}{c} < w_{11} \\ \text{и } \underset{\sim}{d} < w_{12} \end{pmatrix},$$

а для λ_{ij}

$$\lambda_{11} = \frac{\alpha_{k-1}}{w_1}, \quad \lambda_{12} = \frac{\alpha_{k-1}}{w_2}, \quad \lambda_{13} = \frac{1-\alpha_{k-1}}{w_3}, \quad \lambda_{14} = \frac{1-\alpha_{k-1}}{w_4}$$

$$\lambda_{15} = \frac{\alpha_{k-1}}{w_5}, \ \lambda_{16} = \frac{\alpha_{k-1}}{w_6}, \ \lambda_{21} = \frac{\alpha_k}{w_7}, \ \lambda_{22} = \frac{\alpha_k}{w_8}, \ \lambda_{23} = \frac{1-\alpha_k}{w_9},$$

$$\lambda_{24} = \frac{1-\alpha_k}{w_{10}}, \quad \lambda_{25} = \frac{\alpha_k}{w_{11}}, \quad \lambda_{26} = \frac{\alpha_k}{w_{12}}. \quad (7.20)$$

На рис. 7.3 представлена реализация этих результатов.

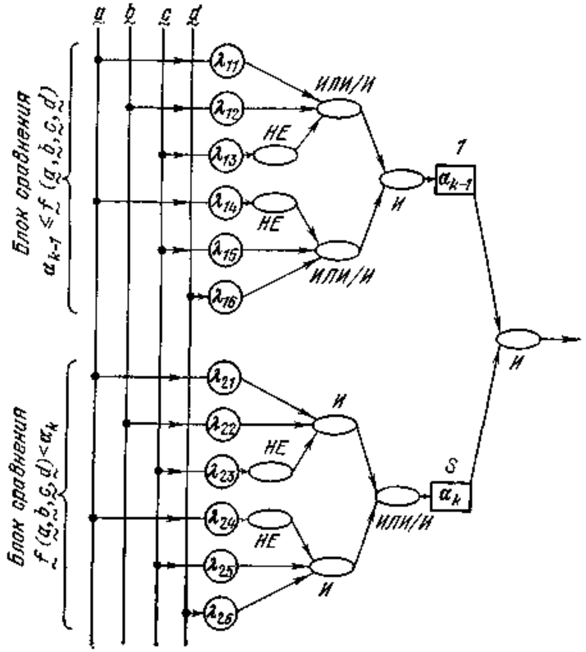


Рис. 7.3

Схемы типа тех, что изображены на рис. 7.1 —7.3, называются примарно-дуальными.

Любая схема примарного типа реализует условие

$$\alpha_{k-1} \leqslant f(a, b, \ldots). \quad (7.21)$$

Любая схема дуального типа реализует условие

$$f(a, b, \ldots) < \alpha_k. \quad (7.22)$$

Чтобы получить

$$\alpha_{k-1} \leqslant f(a, b, \ldots) < \alpha_k, \quad (7.23)$$

не обязательно строить примарно-дуальную схему, можно также оперировать с одночленом приведенной формы относительно ∇ . Рассмотрим два примера.

Пример 3. На рис. 7.1 мы уже видели, как с помощью (7.1) (7.2), (7.5) - (7.7) представить

$$\alpha_{k-1} \leqslant a \wedge b < \alpha_k \quad (7.24)$$

примарно-дуальной схемой, полученной на основе полиномиальной формы относительно Δ (5.24).

Теперь используем полиномиальную форму относительно ∇ (5.24). Для этого достаточно взять несколько одночленов

$$\mathcal{P} = (\mathcal{P}_a \Delta \mathcal{P}'_a \Delta \mathcal{P}_b) \nabla (\mathcal{P}_a \Delta \mathcal{P}_b \Delta \mathcal{P}'_b). \quad (7.25)$$

Символ ∇ указывает, что достаточно только одного-единственного условия, т. е. одночлена. Возьмем, например, первый

$$\mathcal{P}_a \Delta \mathcal{P}'_a \Delta \mathcal{P}_b, \quad (7.26)$$

который дает

$$(a \geqslant \alpha_{k-1}) \text{ и } (a < \alpha_k) \text{ и } (b \geqslant \alpha_{k-1}) \quad (7.27)$$

или

$$\begin{pmatrix} a \geqslant \alpha_{k-1} \\ \text{и } b \geqslant \alpha_{k-1} \end{pmatrix} \text{ и } (a < \alpha_k). \quad (7.28)$$

На рис. 7.4 изображена синтезированная технологическая схема.

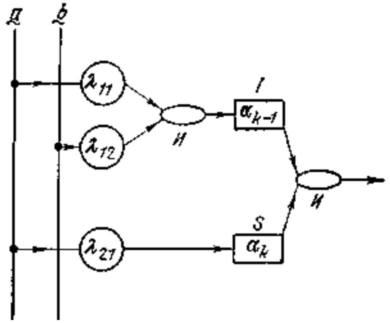


Рис. 7.4

Замечание. Нет ничего удивительного в том что схема на рис. 7.4 может дать тот же результат, что и на рис. 7.1, т. е.

$$\alpha_{k-1} \leqslant a \wedge b < \alpha_k, \quad (7.29)$$

поскольку для функции $f(a, b) = a \wedge b$

$$(\alpha_{k-1} \leqslant a \wedge b < \alpha_k) \Longleftrightarrow (\alpha_{k-1} \leqslant a \wedge b \text{ и } a < \alpha_k), \quad (7.30)$$

что иллюстрируетк тому же разложение относительно ∇ (форма (5.24)).

Пример 4. Рассмотрим снова пример 1, разобранный в (7.9) — (7.14). На этот раз вместо того, чтобы строить полиномиальную форму относительно Δ (5.30) или производить примарное разложение, используем один из термов разложения в ∇ (5.30), например шестой одночлен:

$$\mathscr{P}'_{\underset{\sim}{a}}\,\Delta\mathscr{P}_{\underset{\sim}{\bar a}}\,\Delta\mathscr{P}_{\underset{\sim}{b}}\,\Delta\mathscr{P}'_{\underset{\sim}{b}}. \quad (7.31)$$

Соответствующие условия имеют вид

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} \leqslant 1-\alpha_{k-1} \\ \text{и } \underset{\sim}{b} \geqslant \alpha_{k-1} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} < \alpha_k \\ \text{и } \underset{\sim}{b} < \alpha_k \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

Отсюда получаем схему, изображенную на рис. 7.5, очевидно, более простую, чем на рис. 7.2.

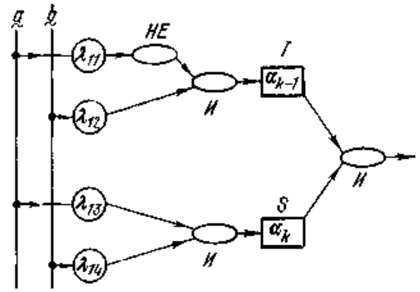


Рис. 7.5

Замечание. Если любую функцию $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots)$ можно взять за основу разложения $\mathscr{P}$ в полиномиальнуюформу относительно ∇, в которой каждый одночлен содержит только элементы $\mathscr{P}_{\underset{\sim}{x}}$ или/и $\mathscr{P}_{\underset{\sim}{\bar x}}$, или/и $\mathscr{P}'_{\underset{\sim}{x}}$, или/и $\mathscr{P}'_{\underset{\sim}{\bar x}}$, связанные Δ, то реализацию функции можно обеспечить технологической схемой, которая содержит только И и НЕ. Но по теореме де Моргана можно написать

$$\overline{\mathscr{P}\Delta\mathscr{P}'} = \overline{\mathscr{P}}\nabla\overline{\mathscr{P}'}, \quad (37.33) \qquad \overline{\mathscr{P}\nabla\mathscr{P}'} = \overline{\mathscr{P}}\Delta\mathscr{P}', \quad (7.34)$$

поэтому, используя условия типа $\overline{\mathscr{P}}$, можно провести разложение, идентичное тому, которое дает полиномиальную форму по ∇, при этом $\mathscr{P}$ заменяется на $\overline{\mathscr{P}}$, ∇ на Δ и Δ на ∇. Следовательно, можно

получить технологическую схему, которая содержит только операторы ИЛИ/И и НЕ.

В действительности можно использовать чрезвычайно разнообразные комбинации операторов, как это принято у разработчиков ЭВМ. Точно так же можно использовать только один оператор, например Шеффера или Пирса, т. е.

$$\mathscr{P}_1 \mid \mathscr{P}_2 = \overline{\mathscr{P}}_1\nabla\overline{\mathscr{P}}_2 \quad (7.35)$$

или

$$\mathscr{P}_1 \downarrow \mathscr{P}_2 = \overline{\mathscr{P}}_1\,\Delta\overline{\mathscr{P}}_2, \quad (7.36)$$

но в технологическом отношении это часто оказывается неудобным.

Смешанные схемы. Называя *примарными* условия типа

$$\alpha_{k-1} \leqslant \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots) \quad (7.37)$$

и *дуальными* условия типа

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots) < \alpha_k, \quad (7.38)$$

можно оперировать сразу со смешанными схемами, для которых

$$\alpha_{k-1} \leqslant \underset{\sim}{f_1}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots) \quad (7.39)$$

и

$$\underset{\sim}{f_2}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots) < \alpha_k. \quad (7.40)$$

Для сборки такой схемы достаточно использовать технологический оператор И, примерную схему для (7.39) и дуальную схему для (7.40). Рассмотрим пример.

Пример. Реализуем

$$\alpha_{k-1} \leqslant \underset{\sim}{f_1}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) - \underset{\sim}{\bar a} \wedge \underset{\sim}{b} \quad (7.41)$$

и

$$\underset{\sim}{f_2}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \vee (\underset{\sim}{\bar b} \wedge \underset{\sim}{c}) < \alpha_k. \quad (7.42)$$

Для $\underset{\sim}{f}_1$ примарные условия имеют вид

$$\mathscr{P}_{\underset{\sim}{\bar a}}\,\Delta\mathscr{P}_{\underset{\sim}{b}}, \quad (7.43)$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} \leqslant 1-\alpha_{k-1} \\ \text{и } \underset{\sim}{b} \geqslant \alpha_{k-1} \end{pmatrix}. \quad (7.44)$$

Для $\underset{\sim}{f}_2$ дуальные условия имеют вид

$$(\mathscr{P}'_{\underset{\sim}{a}} \nabla \mathscr{P}'_{\underset{\sim}{b}}) \Delta (\mathscr{P}'_{\bar{\underset{\sim}{b}}} \nabla \mathscr{P}'_{\underset{\sim}{c}}), \quad (7.45)$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} < \alpha_k \\ \text{или/и } \underset{\sim}{b} < \alpha_k \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \underset{\sim}{b} > 1 - \alpha_k \\ \text{или/и } \underset{\sim}{c} < \alpha_k \end{pmatrix}. \quad (7.46)$$

Соединив (7.44) и (7.46) конъюнктивной связкой И, получим

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} \leqslant 1 - \alpha_{k-1} \\ \text{и } \underset{\sim}{b} \geqslant \alpha_{k-1} \end{pmatrix} \quad (7.47)$$

и

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{a} < \alpha_k \\ \text{или/и } \underset{\sim}{b} < \alpha_k \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \underset{\sim}{b} > 1 - \alpha_k \\ \text{или/и } \underset{\sim}{c} < \alpha_k \end{pmatrix}.$$

И окончательно приходим к синтезированной схеме, изображенной на рис. 7.6.

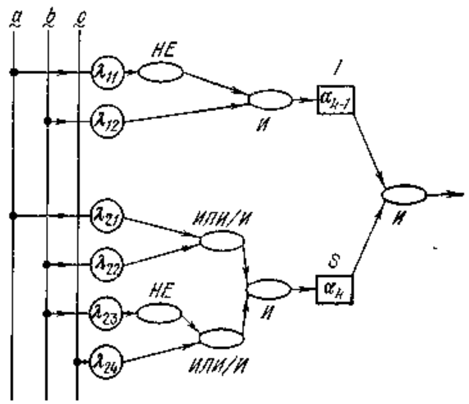


Рис.7.6

Таким образом, схема на рис. 7.6 обеспечивает одновременно выполнение условий

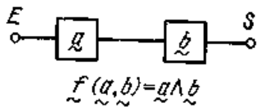
$$\alpha_{k-1} \leqslant \bar{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b} \text{ и } (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \vee (\bar{\underset{\sim}{b}} \wedge \underset{\sim}{c}) < \alpha_k \quad (7.48)$$

при подходящем выборе коэффициентов λ_{ij}.
Все рассмотрения настоящего параграфа допускают различные обобщения.
Замечание. Те, кто знаком с электроникой, знают, что техническое воплощение нечеткой логики и нелегко и неэкономично (надо стабилизировать мультипликаторные устройства, обеспечить точное регулирование потенциалов и т. п.). Но это путь для исследования.

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

8.8. Сети нечетких элементов

Подобно тому, как это делается в теории контактных цепей , теории надежности и других, сетевое представление последовательно-параллельно соединенных элементов было бы интересно использовать для анализа функций нечетких переменных.
Нечеткий элемент сети. С каждой нечеткой переменной $\underset{\sim}{a} \in [0,1]$ мы будем связывать элемент $\underset{\sim}{a}$, обозначаемый тем же символом. Нам предстоит построить сеть, состоящую из таких элементов $\underset{\sim}{a}$.
С функцией $\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}$ свяжем сеть, представленную на рис. 8.1, с функцией $\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}$ свяжем сеть, представленную на рис. 8.2. Первую будем называть последовательной сетью, вторую — параллельной.



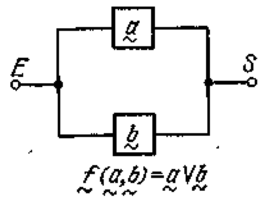


Рис. 8.1 *Рис. 8.2*

В таких цепях необходимо еще указывать вход *E* и выход S. Результат выполнения операции на элементах сети называется *потоком сети.* Так, если $\underset{\sim}{a}$ = 0,7 и $\underset{\sim}{b}$ = 0,4, то для сети на рис. 8.1 поток из E в S равен 0,4, адля сети на рис. 8.2 при тех же значениях $\underset{\sim}{a}$ и $\underset{\sim}{b}$ поток равен 0,7.
Теорема 1. Каждой аналитической функции нечетких переменных $\underset{\sim}{f}\ (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, ...)$ можно поставить в соответствие *сеть нечетких элементов,* с последовательным расположением которых связана операция $\wedge$, а с параллельным — операция $\vee$.
Доказательство. Мы уже видели, что каждой аналитической функцией $\underset{\sim}{f}\ (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, ...)$ можно по определению поставить в соответствие приведенную полиномиальную форму относительно $\wedge$ или $\vee$. Каждой из форм затем можно поставить в соответствие сеть.

Пример. Функции (8.1), представленной в приведенной полиномиальной форме относительно $\vee$

$$\underset{\sim}{f}\,(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{\bar b} \wedge \underset{\sim}{c}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \vee (\underset{\sim}{\bar a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{c}), \quad (8.1)$$

можно поставить в соответствие сеть, изображенную на рис 8.3.

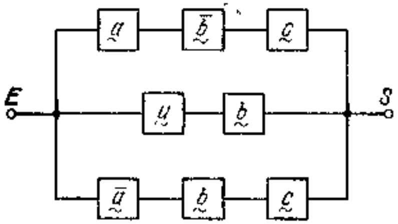


Рис. 8.3

Сеть, соответствующая той же функции, но выраженной в приведенной полиномиальной форме относительно $\wedge$

$$\underset{\sim}{f}\,(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{\bar a}) \wedge (\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}) \wedge (\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{c}) \wedge (\underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{\bar b}) \wedge (\underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{c}), \quad (8.2)$$

представлена на рис. 8.4.

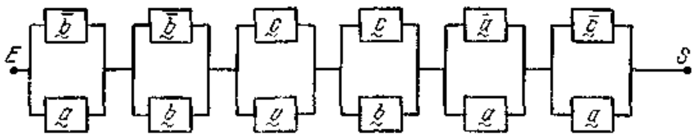


Рис. 8.4

Маршруты. Последовательность элементов, соединенных один за другим связкой $\wedge$ от *F* до *S,* будет называться *маршрутом* или *путем (* Слово «путь» уже использовалось в другом смысле, поэтому мы используем здесь слово «маршрут».)

Таким ебразом, на рис. 8.3 последовательность элементов

$$(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{\bar b}, \underset{\sim}{c}) \quad \text{есть маршрут.} \quad (8.3)$$

Маршрут называется *простым,* если он не содержит одного и того же элемента *x* или элемента *x* более одного раза.

(Простой маршрут получается из маршрута при использовании законов ассоциативности конъюнкции (2.14) и поглощения (идемпотентности (32.16): $x \wedge x = x$.*)*

Так, на рис. 8.4 последовательность элементов

$$(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{\bar b}, \underset{\sim}{b}) \quad \text{составляет маршрут,} \quad (8.4)$$

а

$$(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{\bar b}, \underset{\sim}{b}) \text{ — простой маршрут.} \quad (8.5)$$

Поскольку маршрут рассматривается относительно операции $\wedge$ — ассоциативной и коммутативной, то порядок, в котором элементы расположены в последовательности, несуществен.

Максимально простой маршрут. Пусть **I** — обычное множество простых маршрутов сети, тогда любой простой маршрут, не содержащий никакого другого маршрута из I, называется *максимально простым маршрутом.* Если *n*—число нечетких переменных в $\underset{\sim}{f}$, то очевидно, что максимально простой маршрут содержит не более 2*n* элементов.

Основное свойство. Расположив все максимально простые маршруты параллельно, получим сеть, эквивалентную приведенному полиному относительно $\underset{\sim}{f}$.

Свойство становится очевидным, если сопоставить способы построения полиномиальных форм с построением последовательно-параллельных сетей из максимально простых маршрутов, которые соединяются параллельно.

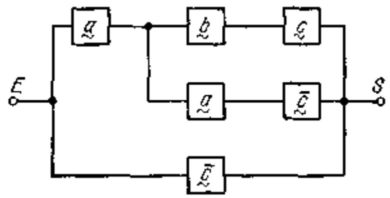


Рис.8. 5

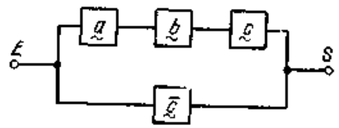


Рис.8. 6

Пример 1. Рассмотрим сеть на рис. 8.5, соответствующую функции

$$\underset{\sim}{f}\,(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = [\underset{\sim}{a} \wedge [(\underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{c}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{\bar c})]] \vee \underset{\sim}{\bar c}. \quad (8.6)$$

Выпишем множество маршрутов

$$\{(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}), (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{\bar c}), (\underset{\sim}{\bar c})\}, \quad (8.7)$$

множество простых маршрутов

$$\{(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}), (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{\bar c}), (\underset{\sim}{\bar c})\}, \quad (8.8)$$

множество максимально простых маршрутов

$$\{(a, b, c), (\bar{c})\}. \quad (8.9)$$

Последнее соответствует приведенной полиномиальной форме в :

$$f(a, b, c) = (a \wedge b \wedge c) \vee (\bar{c}) \quad (8.10)$$

и простейшей сети, изображенной на рис. 8.6.

Пример 2. Рассмотрим более сложный случай (рис. 8.7). Выпишем множество маршрутов (Если разрешить, чтобы маршруты образовывали циклы, то в действительности число маршрутов будет бесконечным.)

$$\{(a, b, \bar{c}), (a, c, a), (a, c, c, \bar{a}, \bar{c}) (a, b, \bar{a}, c, a), (a, b, \bar{a}, c, c, b, \bar{c}),$$
$$(b, c, a), (b, \bar{a}, \bar{c}), (b, \bar{a}, b, c, a), (b, c, c, b, \bar{c}), (b, c, c, b, \bar{a}, c, a)\}, \quad (8.11)$$

множество простых маршрутов

$$\{(a, b, \bar{c}), (a, c), (a, \bar{a}, c, \bar{c}), (a, \bar{a}, b, c), (a, \bar{a}, b, c, \bar{c}),$$
$$(a, b, c), (\bar{a}, b, \bar{c}), (a, \bar{a}, b, c), (b, c, \bar{c}), (a, \bar{a}, b, c)\}, \quad (8.12)$$

множество максимально простых маршрутов

$$\{(a, b, \bar{c}), (\bar{a}, b, \bar{c}), (b, c, \bar{c}), (a, c)\} \quad (8.13)$$

и соответствующую (8.13) приведенную полиномиальную форму в $\vee$

$$f(a, b, c) = (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge c \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge c), \quad (8.14)$$

последовательно-параллельная схема которой представлена на рис. 8.8.

Плоские сети. Если в сети не существует связи между двумя элементами, пересекающей другую связь, когда сеть между E и S нарисована на плоскости, то говорят, что сеть *реализуема в плоскости или планарная.* В противном случае говорят, что сеть неплоская. Так, сеть на рис. 8.5 плоская, а на рис. 8.7 — неплоская.

Отметим следующее свойство: сети, соответствующие полиномиальным формам в $\wedge$ или в $\vee$, — плоские. Действительно, любой полиномиальной форме в $\wedge$ соответствует параллельно-последовательная сеть, которая является плоской, и аналогично любой полиномиальной форме в $\vee$ соответствует последовательно-параллельная сеть, которая является плоской (см , например, рис. 8.1 и 8.2).

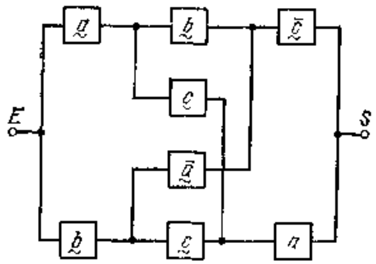


Рис.8. 7

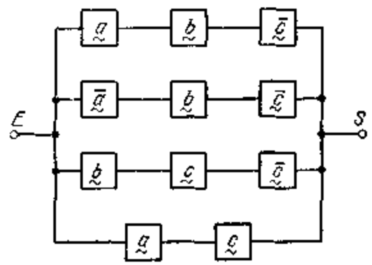


Рис.8. 8

Двойственность плоской сети. Пусть R — плоская сеть. Поскольку сеть плоская, то можно определить грани α, β, ... как части плоскости, ограниченные связями и элементами (см. рис. 8.9), внутри которых не содержится ни одного элемента. В каждой из этих граней выберем точку, которая станет точкой пересечения связей новой сети. Выберем еще по точке и в двух внешних гранях: выше и ниже линии ES.
Следуя правилу: каждую из выбранных точек соединить связью с каждым из элементов, смежным с гранью, в которой находится точка, — построим новую сеть R'. Сеть R' называется двойственной сети R. На рис. 8.9 штриховой линией изображена сеть R', двойственная R. На рис. 8.10 сеть R' изображена непосредственно.
Для сети и двойственной сети легко проверить следующее свойство:

$$(R')' = R, \quad (8.15)$$

т. е двойственная сеть к сети, которая сама есть двойственная сеть сети R, совпадает с сетью R.

Метод антимаршрутов. Рассмотрим плоскую сеть R и двойственную сеть R'. Маршруты, соответствующие R', называются *антимаршрутами* сети R.
Максимально простые маршруты R' дадут максимально простые антимаршруты R, а позднее приведут к полиномиальной форме функции $f(a,b,c)$ в R', представленной сетью R. С этой полиномиальной формой в R будет связана параллельно-последовательная сеть, эквивалентная данной сети.

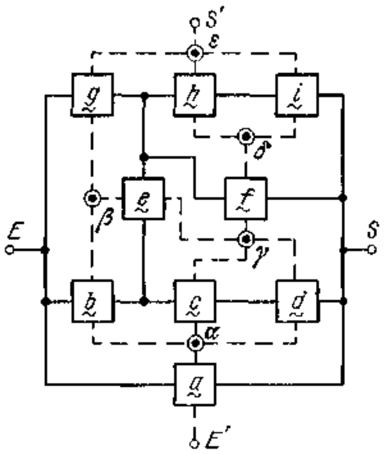


Рис. 8.9

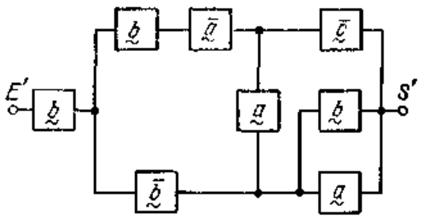


Рис. 8.10

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

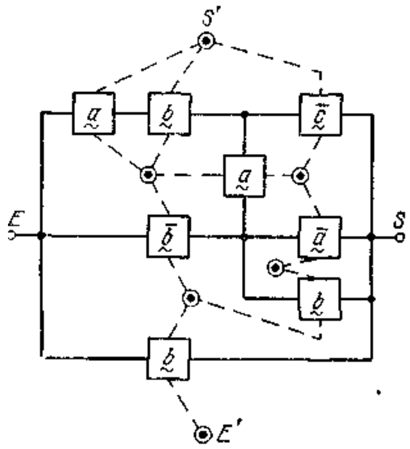


Рис. 8.11

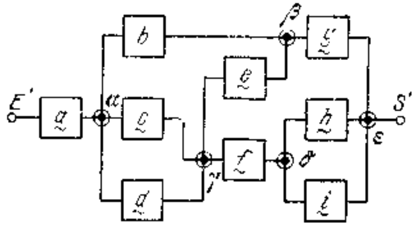


Рис. 8.12

Пример. Рассмотрим сеть R на рис. 8.11, двойственная которой сеть R' представлена на рис. 8.12.

Маршруты сети R' - это антимаршруты сети R. Выпишем их

$$\{(\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{\bar a}, \underset{\sim}{\bar c}),\ (\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{\bar a}, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}),\ (\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{\bar a}, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a}),\ (\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{\bar b}, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{\bar c}),$$

$$(\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{\bar b}, \underset{\sim}{b}),\ (\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{\bar b}, \underset{\sim}{a})\}. \qquad (8.16)$$

Выпишем множество простых антимаршрутов

$$\{(\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{\bar a}, \underset{\sim}{\bar c}),\ (\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{\bar a}, \underset{\sim}{a})_1,\ (\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{\bar a}, \underset{\sim}{a})_2,\ (\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{\bar b}, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{\bar c}),\ (\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{\bar b}),\ (\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{\bar b}, \underset{\sim}{a})\}, \qquad (8.17)$$

которое сокращается до множества максимально простых антимаршрутов:

$$\{(\underset{\sim}{\bar a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{\bar c}),\ (\underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{\bar a}, \underset{\sim}{b}),\ (\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{\bar b})\}. \qquad (8.18)$$

(Маршруты могут записываться одними и теми же символами, например *(b, a, a)ₓ* и *(b, a, a)₂,* но при этом быть двумя различными маршрутами. Различие исчезает при переходе к максимально простым маршрутам.)

Таким образом, приведенная форма относительно $\wedge$, соответствующая параллельно-последовательной сети на рис. 8.13, имеет вид

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{\bar{a}} \vee \underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{\bar{c}}) \wedge (\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{\bar{a}} \vee \underset{\sim}{b}) \wedge (\underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{\bar{b}}). \quad (8.19)$$

Методом маршрутов можно найти полиномиальную форму относительно $\vee$:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{\bar{b}} \wedge \underset{\sim}{c}) \vee (\underset{\sim}{\bar{a}} \wedge \underset{\sim}{\bar{b}}) \vee (\underset{\sim}{b}), \quad (8.20)$$

которой соответствует последовательно-параллельная сеть, изображенная на рис. 8.14. Используя подходящее разложение, можно показать, что (8.19) и (8.20) действительно представляют одну и ту же функцию.

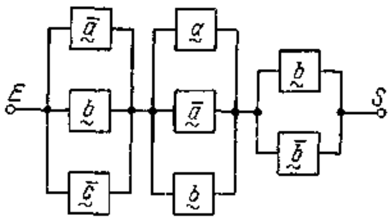


Рис. 8.13

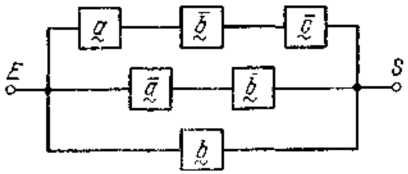


Рис. 8.14

Замечание. Мы знаем, что любую сеть контактных цепей можно выполнить из различных технических элементов (диодов, мостов, транзисторов, интегральных схем и т. п.).

Все приведенные теоретические рассмотрения, касающиеся технологических реализаций функций нечеткой логики при подходящем выборе операторов, можно адаптировать к использованию более разнообразных технических средств.

8.9. Нечеткие утверждения и их функциональное представление

В отличие от формальной логики **нечеткая логика опирается не на таблицы истинности, а <u>на операции, производимые на нечетких подмножествах</u>.**

Мы начнем со сравнительного примера, основанного на сказке «Красная шапочка». Рассмотрим два формальных утверждения, истинность или ложность которых нужно установить апостериори (после прочтения этой истории):

$\mathcal{P}_1$: волк одет в одежду бабушки,

$\mathcal{P}_2$: волк съел девочку.

Утверждение $\mathcal{P}_1 \Delta \mathcal{P}_2$ будет означать: «Волк одет как бабушка и съел девочку». Чтобы оно было истинным, необходимо, чтобы оба высказывания $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ были истинными. Если только одно из них истинно или оба ложны, то это утверждение не согласуется со сказкой о Красной шапочке. Таким образом, мы приходим к следующей таблице истинности (рис. 9.1).

$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1 \Delta \mathcal{P}_2$
истинно	истинно	истинно
истинно	ложно	ложно
ложно	истинно	ложно
ложно	ложно	ложно

Рис.9.1

А теперь представим эти два логических высказывания другим образом. Пусть имеется множество животных

$$\mathbf{E} = \{\text{кошка, собака, волк, лиса, коза, крыса, кролик}\}. \quad (9.1)$$

Рассмотрим $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$, формальное подмножество животных, которые могли бы надеть одежду бабушки:

$$\mathbf{A} = \{(\text{кошка } 1 0), (\text{собака } 0), (\text{волк} \mid 1), (\text{лиса} \mid 0), (\text{коза} \mid 0), (\text{крыса } 1 0), (\text{кролик} \mid 0)\}, \quad (9.2)$$

откуда

$$\mathbf{A} = \{\text{волк}\}. \quad (9.3)$$

Рассмотрим $\mathbf{B} \subset \mathbf{E}$, формальное подмножество животных, которые могли бы съесть девочку:

B = {(кошка | 0), (собака |0), (волк | 1), (лиса | 0), (коза | 0), (крыса |0), (кролик|0)}, (9.4)

откуда

B = {волк}. (9.5)

Формальное подмножество животных, которые могли бы переодеться в бабушку и съесть девочку, есть

$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ = {волк}. (9.6)

В результате проведенной процедуры мы удостоверились, что волк есть действительно такое коварное и жестокое животное, каким он и описан в знаменитой сказке.

Рассмотрим теперь два высказывания из нечеткой сказки о Красной шапочке. Пусть есть множество животных

E = {кошка, собака, волк, лиса, коза, крыса, кролик}. (9.7)

Рассмотрим $\underset{\sim}{\mathbf{A}} \subset \underset{\sim}{\mathbf{F}}$, нечеткое подмножество животных, которые могли бы одеться как бабушка:

A = {(кошка | 0,1), (собака | 0,4), (волк | 1), (лиса] 0,5), (коза | 1), (крыса | 0), (кролик | 0)}. (9.8)

Рассмотрим $\mathbf{B} \subset \mathbf{E}$, нечеткое подмножество животных, которые могли бы съесть девочку:

B = {(кошка [0,1), (собака | 0,4), (волк | 1), (лиса | 0,7), (коза | 0), (крыса | 0), (кролик | 0)}. (9.9)

Тогда нечеткое подмножество животных, которые могли бы надеть бабушкину одежду и съесть девочку, это

$\underset{\sim}{\mathbf{A}} \cap \underset{\sim}{\mathbf{B}}$ — {(кошка | 0,1), (собака | 0,4), (волк | 1), (лиса | 0,5), (коза | 0), (крыса | 0), (кролик | 0)}. (9.10)

Сказка может быть про волка, лису, собаку и даже про кошку.

Высказывания нечеткой логики, как и высказывания формальной логики, явно или неявно связаны с теорией нечетких и соответственно формальных множеств.

Операциям $\cap$, $\bigcup$ и $^{-}$ (пересечение, объединение и дополнение) в формальной логике соответствуют связки Δ, ∇ и $\urcorner$(конъюнкция «и», дизъюнкция «или/и», отрицание «не»).

Переход к нечетким связкам Δ, ∇ и $\urcorner$ соответствующей нечеткой логики не представляет каких-либо трудностей, поскольку мы уже определили соответствующее множество операций в 8.5.

Однако необходимо уделить особое внимание другим связкам: импликации, метаимпликации, логической эквивалентности.

Теперь перейдем к обзору этих понятий, сначала в формальной, а затем в нечеткой логике.

Рассмотрим два формальных утверждения $\mathscr{P}$ и $\mathscr{L}$. Составному утверждению «$\mathscr{F}$ влечет $\mathscr{L}$», обозначается $\mathscr{P} > \mathscr{L}$, соответствует таблица истинности на рис. 9.2.

$\mathscr{P}$	$\mathscr{L}$	$\mathscr{P} > \mathscr{L}$
ложно	ложно	истинно
ложно	истинно	истинно
истинно	ложно	ложно
истинно	истинно	истинно

Рис. 9 2

Если утверждению $\mathscr{F}$ поставить в соответствие множество **A**, а утверждению $\mathscr{L}$— множество **B**, то составному утверждению *«$\mathscr{F}$ влечет $\mathscr{L}$»* ставится в соответствие множество $\overline{\mathbf{A}} \bigcup \mathbf{B}$.

Теперь рассмотрим составное утверждение «$\mathscr{F}$ метаимплицирует $\mathscr{L}$», обозначается $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{L}$. Этой метаимпликации придается следующий смысл: когда $\mathscr{F}$ истинно, $\mathscr{L}$ всегда истинно (правило силлогизма сохраняется здесь), но ничего нельзя утверждать, когда $\mathscr{F}$ ложно; в этом случае $\mathscr{L}$ может быть как истинно, так и ложно. Таким образом, высказывание вроде «если море станет сладким сиропом, я превращусь в сирену» — корректно, поскольку море, увы, непригодно для питья и, конечно, не станет сладким сиропом. Поэтому связка $\Rightarrow$ сводится к следующему: если $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{L}$ и утверждение $\mathscr{F}$ истинно, то $\mathscr{L}$ есть необходимо истинное утверждение.

Поэтому мы должны остерегаться смешения $\mathscr{P} > \mathscr{L}$ и $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{L}$.

Первое есть операция логики

$$\mathcal{P} > \mathcal{L} = \overline{\mathcal{P}} \vee \mathcal{L} \quad \text{(в одних обозначениях)}$$
$$(9.11)$$
$$\mathcal{P} > \mathcal{L} = (\neg \mathcal{P}) \vee (\mathcal{L}) \quad \text{(в других обозначениях).}$$

Второе — металогическая операция, которая может не сводиться к (9.11). Однако возникла привычка метаимпликацию называть импликацией и, таким образом, путать обе. Составное утверждение $\mathcal{P} > \mathcal{L}$ не является отношением причины и следствия и не доказывает справедливость $\mathcal{L}$ по отношению к $\mathcal{F}$, но именно так трактуется метаимпликация $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{L}$.

Можно привести ложный парадокс, связанный с введенным нами понятием импликации, который мы сформулируем следующим образом: поскольку проанализировать утверждения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ можно лишь тогда, когда известно их содержание, о котором у нас не имеется никаких сведений, и единственно доступные нам данные — это логические значения этих высказываний, то импликация $\mathcal{P} > \mathcal{L}$ не может быть отношением причины и следствия.

Однако, если априори известно, что $\mathcal{F}$ истинной что $\mathcal{P} > \mathcal{L}$ истинно, тогда можно заключить, что $\mathcal{L}$ истинно.

Приведем пример. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ есть следующие утверждения, которые мы будем рассматривать, используя таблицу на рис. 9.2.

$\mathcal{P}$: Наполеон умер на острове Святая Елена (истинно),
$\mathcal{L}$: Версингеторикс носил усы (никто не уверен),
$\mathcal{P} > \mathcal{L}$ истинно, если $\mathcal{L}$ истинно;
$\mathcal{P}$: два плюс два равно пяти (ложно),
$\mathcal{L}$: 12 — простое число (ложно),
$\mathcal{P} > \mathcal{L}$ истинно;
$\mathcal{P} > \mathcal{L}$ Луна сделана из швейцарского сыра (ложно),
L : 17 — простое число (истинно),
$\mathcal{P} > \mathcal{L}$ истинно;
$\mathcal{P}$: 17 — простое число (истинно),
$\mathcal{L}$: 16 — простое число (ложно),
$\mathcal{P} > \mathcal{L}$ ложно.

Логическая эквивалентность менее двусмысленна. Мы определим ее, используя таблицу истинности, приведенную на рис. 9.3.

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

$\mathcal{P}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{P} \equiv \mathcal{L}$
ложно	ложно	истинно
ложно	истинно	ложно
истинно	ложно	ложно
истинно	истинно	истинно

Рис. 9.3

Подобно импликации, логическая эквивалентность не учитывает содержания двух утверждений в причинном отношении.

Составному высказыванию для подмножества **A**, связанного с $\mathcal{F}$, и подмножества **B**, связанного с $\mathcal{L}$, соответствует множественная операция $(\mathbf{A} \cup \overline{\mathbf{B}}) \cap (\overline{\mathbf{A}} \cup \mathbf{B})$.

Вместо метаэквивалентности обычно говорят просто об эквивалентности — это значит, что $\mathcal{F}$ метаимплицирует $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}$ метаимплицирует $\mathcal{F}$. Такая симметрия определения приводит к таблице истинности, идентичной таблице истинности для логической связки «эквивалентно» $\mathcal{P} \equiv \mathcal{L}$. Поэтому можно отождествить эти понятия, не опасаясь возникновения двусмысленности.

Нечеткие утверждения типа нечеткой импликации и нечеткой эквивалентности определяют относительно операций

$$\overline{\underset{\sim}{\mathbf{A}}} \cup \underset{\sim}{\mathbf{B}} \text{ и } (\underset{\sim}{\mathbf{A}} \cup \overline{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}) \cap (\overline{\underset{\sim}{\mathbf{A}}} \cup \underset{\sim}{\mathbf{B}})$$

соответственно. Мы подчеркиваем тот факт, что пересечение, объединение и отрицание — операции, определенные на подмножествах универсального множества и соответствующего множества принадлежностей.

Для определения метаимпликации в нечеткой логике используем понятие бинарного отношения. На рис. 9.4 и 9.5 приводится пример такого соответствия, где $x_i \in \mathbf{E}_1$, $y_j \in \mathbf{E}_2$.

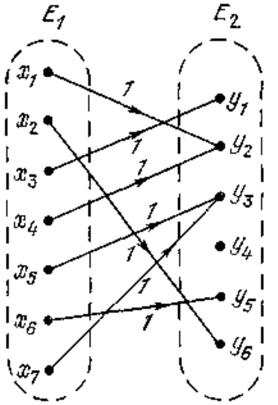


Рис. 9. 4

$E_1 \backslash E_2$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_5
x_1	0	1	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0	0	1
x_3	1	0	0	0	0	0
x_4	0	1	0	0	0	0
x_5	0	0	1	0	0	0
x_6	0	0	0	0	1	0
x_7	0	0	1	0	0	0

Рис. 9.5

Очевидно, что здесь

$$\begin{array}{l} \text{если } x = x_1, \text{ то } y = y_2, \\ \text{если } x = x_2, \text{ то } y = y_6, \\ \text{если } x = x_3, \text{ то } y = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{если } x = x_7, \text{ то } y = y_3. \end{array} \tag{9.12}$$

На рис. 9 6 элементу множества E_1 соответствует нечеткое подмножество $\mathbf{E}_2$:

$$\text{если } x = x_1, \text{ то } \underset{\sim}{\mathbf{B}} = \{(y_1 \mid 0{,}8), (y_2 \mid 1), (y_3 \mid 0{,}3), (y_4 \mid 1), (y_5 \mid 0{,}9), (y_6 \mid 0{,}9)\},$$

$$\text{если } x = x_2, \text{ то } \underset{\sim}{\mathbf{B}} = \{(y_1 \mid 0{,}2), (y_2 \mid 0{,}9), (y_3 \mid 1), (y_4 \mid 0), (y_5 \mid 0{,}6), (y_6 \mid 1)\},$$

$$\text{если } x = x_3, \text{ то } \underset{\sim}{\mathbf{B}} = \{(y_1 \mid 0{,}3), (y_2 \mid 0{,}8), (y_3 \mid 0{,}9), (y_4 \mid 1), (y_5 \mid 0{,}8), (y_6 \mid 0)\}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{если } x = x_7, \text{ то } \underset{\sim}{\mathbf{B}} = \{(y_1 \mid 0{,}1), (y_2 \mid 1), (y_3 \mid 0), (y_4 \mid 0{,}9), (y_5 \mid 0{,}3), (y_6 \mid 1)\}. \tag{9.12а}$$

$E_1 \backslash E_2$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0,8	1	0,3	1	0,9	0,9
x_2	0,2	0,9	1	0	0,6	1
x_3	0,3	0,8	0,9	1	0,8	0
x_4	0,5	0	1	1	0,8	0,9
x_5	1	0,2	0,9	0,6	0	0,5
x_6	0,6	0,8	1	1	0,8	1
x_7	0,1	1	0	0,9	0,3	1

Рис. 9. 6

Ранее мы определили возможность установления соответствия между нечеткими подмножествами, где $\underset{\sim}{\mathbf{A}} \subset \mathbf{E_1}$ и $\underset{\sim}{\mathbf{B}} \subset \mathbf{E_2}$; это было сделано с помощью понятия условного нечеткого подмножества. Тогда отношение, задающее нечеткое подмножество $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$, соответствующее нечеткому подмножеству $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$, определяется как

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}(y) = \underset{x \in \mathbf{E_1}}{\mathrm{MAX}}\, \mathrm{MIN}\,(\mu_{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}(y \,\|\, x),\ \mu_{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}(x)). \tag{9.13}$$

Рассмотрим пример, используя нечеткое отношение на рис. 9.6. Предположим, что

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}} = \{(x_1 \mid 0{,}2), (x_2 \mid 0{,}3), (x_3 \mid 0{,}5), (x_4 \mid 1), (x_5 \mid 0), (x_6 \mid 0), (x_7 \mid 0{,}8)\}. \tag{9.14}$$

Последовательно находим

$$\begin{aligned} \mu_{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}(y_1) &= \mathrm{MAX}\,[\mathrm{MIN}\,(0{,}8;\ 0{,}2),\ \mathrm{MIN}\,(0{,}2,\ 0{,}3),\ \mathrm{MIN}\,(0{,}3;0{,}5), \\ &\quad \mathrm{MIN}\,(0{,}5;\ 1),\ \mathrm{MIN}\,(1;\ 0),\ \mathrm{MIN}\,(0{,}6;\ 0),\ \mathrm{MIN}\,(1;\ 0{,}8)] = \\ &= \mathrm{MAX}\,[0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0,\ 0;\ 0{,}1] = 0{,}5, \end{aligned} \tag{9.15}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}(y_2) &= \mathrm{MAX}\,[\mathrm{MIN}\,(1;\ 0{,}2),\ \mathrm{MIN}\,(0{,}9;\ 0{,}3),\ \mathrm{MIN}\,(0{,}8;\ 0{,}5),\ \mathrm{MIN}\,(0;\ 1), \\ &\quad \mathrm{MIN}\,(0{,}2;\ 0),\ \mathrm{MIN}\,(0{,}8;\ 0),\ \mathrm{MIN}\,(1;\ 0{,}8)] = \\ &= \mathrm{MAX}\,[0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}8] = 0{,}8 \end{aligned} \tag{9.16}$$

и аналогично

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}(y_3) - 1, \quad \mu_{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}(y_4) = 1, \quad \mu_{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}(y_5) - 0{,}8, \quad \mu_{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}(y_6) = 0{,}9. \tag{9.17}$$

Вычисления показаны на рис. 9.7, где оператор * соответствует (max — min).

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{0,2} & \multicolumn{1}{c|}{0,3} & \multicolumn{1}{c|}{0,5} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{0,8} \\
\hline
\end{array}
*
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|}
 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\
\hline
x_1 & 0,8 & 1 & 0,3 & 1 & 0,9 & 0,9 \\
\hline
x_2 & 0,2 & 0,9 & 1 & 0 & 0,6 & 1 \\
\hline
x_3 & 0,3 & 0,8 & 0,9 & 1 & 0,8 & 0 \\
\hline
x_4 & 0,5 & 0 & 1 & 1 & 0,8 & 0,9 \\
\hline
x_5 & 1 & 0,2 & 0,9 & 0,6 & 0 & 0,5 \\
\hline
x_6 & 0,6 & 0,8 & 1 & 1 & 0,8 & 1 \\
\hline
x_7 & 0,1 & 1 & 0 & 0,9 & 0,3 & 1 \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{cccccc}
y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{0,5} & \multicolumn{1}{c|}{0,8} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0,8} & \multicolumn{1}{c|}{0,9} \\
\hline
\end{array}
$$

Рис. 9.7

Следовательно, если

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}} = \{(x_1 \mid 0,2),\ (x_2 \mid 0,3),\ (x_3 \mid 0,5),\ (x_4 \mid 1),\ (x_5 \mid 0),\ (x_6 \mid 0),\ (x_7 \mid 0,8)\}, \tag{9.18}$$

то

$$\underset{\sim}{\mathbf{B}} = \{(y_1 \mid 0,5),\ (y_2 \mid 0,8),\ (y_3 \mid 1),\ (y_4 \mid 1),\ (y_5 \mid 0,8),\ (y_6 \mid 0,9)\}. \tag{9.19}$$

Итак, мы показали, что рассматриваемое утверждение «если-то» хорошо соответствует тому, что используется при формальных отношениях. Пусть

$$\mathbf{A} = \{(x_1 \mid 0),\ (x_2 \mid 0),\ (x_3 \mid 0),\ (x_4 \mid 1),\ (x_5 \mid 0),\ (x_6 \mid 0),\ (x_7 \mid 0)\}, \tag{9.20}$$

т. е.

$$\mathbf{A} = \{x_4\}. \tag{9.21}$$

Обращаясь еще раз к соответствию на рис. 9.5 и используя (9.13), находим

$$\underset{\sim}{\mathbf{B}} = \{(y_1 \mid 0),\ (y_2 \mid 1),\ (y_3 \mid 0),\ (y_4 \mid 0),\ (y_5 \mid 0),\ (y_6 \mid 0)\}, \tag{9.22}$$

т. е.

$$\underset{\sim}{\mathbf{B}} = \{y_2\}, \tag{9.23}$$

что можно записать в виде

$$\text{если } \mathbf{A} = \{x_4\}, \text{ то } \mathbf{B} = \{y_2\}, \tag{9.24}$$

или

$$\text{если } x = x_4, \text{ то } y = y_2. \tag{9.25}$$

Мы вновь получили утверждение «если-то» типа того, которое определено в (9.12).

Сделаем сводку всех утверждений, установленных до сих пор: нечеткая конъюнкция (нечеткое *и)* определяется как $\underset{\sim}{\mathbf{A}} \cap \underset{\sim}{\mathbf{B}}$, нечеткая дизъюнкция (нечеткое *или)* определяется как $\underset{\sim}{\mathbf{A}} \cup \underset{\sim}{\mathbf{B}}$, нечеткое отрицание (нечеткое *не)* определяется как $\underset{\sim}{\overline{\mathbf{A}}}$, нечеткая импликация определяется как $\underset{\sim}{\overline{\mathbf{A}}} \cup \underset{\sim}{\mathbf{B}}$, нечеткая эквивалентность определяется как $(\underset{\sim}{\mathbf{A}} \cup \underset{\sim}{\overline{\mathbf{B}}}) \cap (\underset{\sim}{\overline{\mathbf{A}}} \cup \underset{\sim}{\mathbf{B}})$, нечеткое *если-то* определяется как

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}(y) = \underset{x}{\mathrm{MAX}}\ \mathrm{MIN}$$

$(\mu_{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}(y \,\|\, x),\ \mu_{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}(x))$ (нечеткая метаимпликация).

Последнее утверждение относится не к нечеткой логике, а скорее, к нечеткой металогике.

8.10. Теория нечетких подмножеств и теория вероятностей

Многие люди, не подумав, спрашивают: «Ну что интересного в теории нечетких подмножеств? Всему этому хорошо служит теория вероятностей». У этих двух теорий действительно есть несколько общих аспектов. Но существуют доводы, что эти теории следует различать. Мы начнем с обзора основных понятий теории вероятностей, а затем изучим, чем эти теории отличаются друг от друга.

Аксиоматика теории вероятностей.

1. *Случай конечного универсального множества.* Пусть **E** — конечное универсальное множество, $\mathscr{P}(\mathbf{E})$ — множество всех его подмножеств и Δ —подмножество $\mathscr{P}(\mathbf{E})$, обязательно содержащее **E**. Подмножество Δ будет называться «семейством», и мы будем говорить, что семейство Δ можно считать вероятностным семейством подмножеств множества **E**, если удовлетворяются следующие два условия:

$$а)\ \forall \mathbf{A} \in \Delta : \overline{\mathbf{A}} \in \Delta, \tag{10.1}$$

$$б)\ \forall \mathbf{A} \in \Delta \text{ и } \forall \mathbf{B} \in \Delta : \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \in \Delta. \tag{10.2}$$

Например, пусть

$$\mathbf{E} = \{a,\ b,\ c,\ d\} \tag{10.3}$$

и

$$\Delta = \{\varnothing,\ \{a\},\ \{c\},\ \{b,\ c\},\ \{a,\ d\},\ \{a,\ b,\ d\},\ \{a,\ c,\ d\},\ \mathbf{E}\}. \tag{10.4}$$

Семейство Δ — вероятностное. Можно легко проверить, что для всех элементов семейства (10.4) удовлетворяются условия (10.1) и (10.2). Свойства (10.1) и (10.2) влекут за собой некоторые другие свойства, которые читатель может легко вывести сам:

$$в)\ \varnothing \in \Delta,$$

$$г)\ \forall \mathbf{A} \text{ и } \forall \mathbf{B}: \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \in \Delta, \qquad (10.5\text{-}10.6)$$

$$д)\ \forall \mathbf{A} \text{ и } \forall \mathbf{B}: \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}} \in \Delta.$$

Вероятностное семейство Δ образует кольцо относительно операции $\oplus$ (дизъюнктивная сумма) взятия симметрической разности от двух множеств, которая рассматривается как аддитивная операция кольца, и мультипликативной операции $\cap$ — взятия переселения двух множеств. Так, для любых **A**, **B** и **C** из Δ, с одной стороны, имеем:

$$(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) \oplus \mathbf{C} = \mathbf{A} \oplus (\mathbf{B} \oplus \mathbf{C}) \text{ — ассоциативность для } \oplus, \qquad (10.7)$$

$$\mathbf{A} \oplus \varnothing = \varnothing + \mathbf{A}, \text{ где } \varnothing \text{ —нулевой элемент семейства } \Delta, \qquad (10.8)$$

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{A} = \varnothing \text{ —для каждого элемента } \mathbf{A} \text{ существует ему противоположный, а именно сам этот элемент,} \qquad (10.9)$$

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \mathbf{B} \oplus \mathbf{A} \text{ — коммутативность.} \qquad (10.10)$$

Таким образом, элементы Δ образуют коммутативную группу относительно операции $\oplus$. С другой стороны, операция пересечения $\cap$ ассоциативна:

$$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = \mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \text{— ассоциативность для } \cap \qquad (10.11)$$

и выполняется дистрибутивный закон относительно операции $\oplus$:

$$(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \oplus (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \text{ — дистрибутивность слева,} \qquad (10.12)$$

$$\mathbf{C} \cap (\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = (\mathbf{C} \cap \mathbf{A}) \oplus (\mathbf{C} \cap \mathbf{B}) \text{ — дистрибутивность справа.} \qquad (10.13)$$

Следовательно, $(\Delta, \oplus, \cap)$ — кольцо.

Наконец, с любым семейством Δ связывается дистрибутивная решетка с дополнениями, т. е. булева решетка, в которой отношение порядка задано теоретико-множественным отношением включения $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$. Так, для семейства Δ, заданного (10.4), получаем булеву решетку, представленную на рис. 10.1.

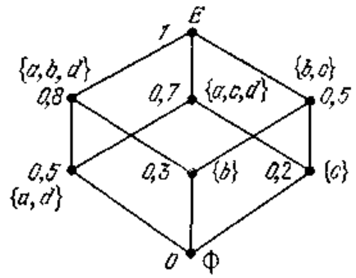


Рис. 10.1

Подмножество $\mathbf{F} \subset \mathcal{P}(\mathbf{E})$ называется *вероятностно-базисным семейством* множества **E**, если, используя операции дополнения и объединения (10.1) и (10.2), из него можно получить любое подмножество из вероятностного семейства $\Delta \subset \mathcal{P}(\mathbf{E})$. Можно также сказать, что **F** порождает Δ; или иначе **F** — *генератор* Δ, и в общем случае, не единственный. Например, обращаясь к (10.4) и рис. 10.1, легко видеть, что

$$\mathbf{F} = \{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\} \qquad (10.14)$$

есть генератор (10.4).

2. *Случай бесконечного универсального множества (счетного или несчетного).* В этом случае $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ несчетно; пусть Δ — подмножество $\mathcal{P}(\mathbf{E})$, необходимо содержащее **E**. Говорят, что семейство Δ вероятностное, если

$$е)\ \forall \mathbf{A} \in \Delta: \overline{\mathbf{A}} \in \Delta, \qquad (10.15)$$

ж) для любой счетной последовательности $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n$

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \ldots, \in \Delta \Rightarrow \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_n \cup \ldots \in \Delta. \qquad (10.16)$$

Условие (10.16) представляет собой простое обобщение (10.2) на случай универсальных множеств, не обязательно счетных.

Вероятность. Теоретическое определение. Пусть дано вероятностное семейство $\Delta \subset \mathcal{P}(\mathbf{E})$. *Вероятностью* называется однозначное отображение Δ в R^+, обладающее следующими свойствами:

$$з)\ \forall \mathbf{A} \in \Delta: \mathrm{pr}(\mathbf{A}) \geqslant 0, \qquad (10.17)$$

$$и)\ \forall \mathbf{A} \in \Delta \text{ и } \forall \mathbf{B} \in \Delta: \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing \Rightarrow \mathrm{pr}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathrm{pr}(\mathbf{A}) + \mathrm{pr}(\mathbf{B}), \qquad (10.18)$$

$$к)\ \mathrm{pr}(\mathbf{E}) = 1, \qquad (10.19)$$

где pr (**X**) — образ элемента $\mathbf{X} \in \Delta$ в $\mathbf{R}^+$.

Аксиомы (10.1), (10.2), (10.17) — (10.19) или (10.15) — (10.19) ставят в соответствие каждому элементу семейства $\Delta \subset \mathcal{P}(\mathbf{E})$ неотри-

цательное число, меньшее или равное 1.
Исходя из аксиом (*а*), *(b)*, (*з*), *(и)* и *(к)*, легко доказать следующие свойства вероятностей:

$$\mathrm{pr}(\varnothing)=0,$$
$$\mathrm{pr}(\overline{\mathbf{A}})=1-\mathrm{pr}(\mathbf{A}),$$
$$\mathrm{pr}(\mathbf{A})+\mathrm{pr}(\mathbf{B})=\mathrm{pr}(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})+\mathrm{pr}(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}),$$
$$\mathbf{B}\subset\mathbf{A}\Rightarrow\mathrm{pr}(\mathbf{B})\leqslant\mathrm{pr}(\mathbf{A}). \qquad (10.20\text{-}10.23)$$

Возвращаясь к понятию нечеткого подмножества, мы подчеркиваем следующий важный момент: «недостаточно с каждым подмножеством связать число $p\in[0,1]$ и назвать p вероятностью; необходимо, чтобы подмножество и p удовлетворяли пяти вышеуказанным основным аксиомам».

Различие между вероятностной концепцией для нечетких и для обычных подмножеств. Рассмотрим простой пример. Как действуют в теории нечетких подмножеств?
Пусть

$$\mathbf{E}=\{a,b,c,d\}. \qquad (10.24)$$

Определим нечеткое подмножество, приписывая каждому элементу значение функции принадлежности, например:

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}}=\{(a\mid 0{,}3),(b\mid 0{,}7),(c\mid 0),(d\mid 1)\}. \qquad (10.25)$$

В теории вероятностей числа $p\in[0,1]$ приписываются обычным подмножествам, составляющим вероятностное семейство. Если в качестве Δ выбрать (10.4), то можно, например, записать

$$\mathrm{pr}(\varnothing)=0,\ \mathrm{pr}(\{b\})=0{,}3,\ \mathrm{pr}(\{c\})=0{,}2,\ \mathrm{pr}(\{a,d\})=0{,}5, \qquad (10.26)$$
$$\mathrm{pr}(\{a,b,d\})=0{,}8,\ \mathrm{pr}(\{a,c,d\})=0{,}7,\ \mathrm{pr}(\{b,c\})=0{,}5,\ \mathrm{pr}(\mathbf{E})=1.$$

Очевидно, что все эти вероятности удовлетворяют (10.17)— (10.23).
Как видно, эти два подхода совершенно различны.
Можно и полезно представить себе, что вероятности приписаны нечетким подмножествам некоторого универсального множества, элементы которого, в свою очередь, есть нечеткие подмножества другого универсального множества. Например, приписываем $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ вероятность из (10.25) и пишем

$$\mathrm{pr}(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=0{,}6. \qquad (10.27)$$

Можно представить себе и теорию вероятностей нечетких событий. Очевидно, однако, что надо проводить различие между двумя теориями: теорией нечетких подмножеств и теорией вероятностей обычных подмножеств
Теория нечетких подмножеств связана с теорией векторной решетки, а теория вероятностей — с теорией булевой решетки.

8.11. Теория нечетких подмножеств и теория структурных функций

Между теорией нечетких переменных и теорией структурных функций, изучаемых в теории надежности систем, можно установить некоторые связи. Сначала напомним основные понятия теории структурных функций.

Структурные функции. Рассмотрим переменные $a,\ b,\ldots\in\{0,1\}$.
Для этих бинарных переменных будем использовать только следующие операции:

$a\cdot b$ — обычное умножение, (11.1)

$a\mathbin{\hat{+}}b=a+b-a\cdot b,$ где (+) обозначает обычное сложение, а (—) обычное вычитание. (11.2)

Введем функции этих переменных, для построения которых используются только операции $\hat{+}$ и $\cdot$.
Но сначала рассмотрим общие свойства переменных $a,\ b,\ldots\in\{0,1\}$ и операций $\cdot$ и $\hat{+}$:

$$\left.\begin{aligned}&a\cdot b=b\cdot a,\\&a\mathbin{\hat{+}}b=b\mathbin{\hat{+}}a,\end{aligned}\right\}\ \text{коммутативность}$$
$$\left.\begin{aligned}&a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c,\\&a\mathbin{\hat{+}}(b\mathbin{\hat{+}}c)=(a\mathbin{\hat{+}}b)\mathbin{\hat{+}}c,\end{aligned}\right\}\ \text{ассоциативность} \qquad (11.3\text{-}11.6)$$

$$\left.\begin{aligned} &a\cdot a = a,\\ &a \hat{+} a = a, \end{aligned}\right\} \text{ идемпотентность}$$

$$\left.\begin{aligned} &a\cdot(b \hat{+} c) = a\cdot b \hat{+} a\cdot c,\\ &a \hat{+} (b\cdot c) = (a \hat{+} b)\cdot(a \hat{+} c), \end{aligned}\right\} \text{ дистрибутивность}$$

$$a\cdot 0 = 0,$$

$$a \hat{+} 0 = a,$$

$$a\cdot 1 = a,$$

$$a \hat{+} 1 = 1. \qquad (11.7\text{-}11.14)$$

Обозначим через φ структурную функцию переменных *a, b, ...*

$$\varphi\,(a,\ b,\ \ldots) \qquad (11.15)$$

Например,

$$\varphi\,(a,\ b, c) = a \hat{+} ab \hat{+} bc \qquad (11.16)$$

есть структурная функция.
Напомним два свойства поглощения, которые позволяют упрощать структурные функции:

$$a\,(a \hat{+} b) = a, \qquad (11.17)$$

$$a \hat{+} ab = a. \qquad (11.18)$$

Оба эти свойства выводятся из (11.3) и (11.14).
Используя понятие максимального одночлена, любую функцию *φ(a, b, ...)* можно выразить в полиномиальной форме относительно • или $\hat{+}$. Например, функция

$$\varphi\,(a,\ b,\ c,\ d) = a \hat{+} bc \hat{+} bd \qquad (11.19)$$

образована тремя максимальными одночленами и не может быть упрощена дальше. Функция же

$$\varphi\,(a,\ b,\ c,\ d) = a \hat{+} b \hat{+} bd \hat{+} cd \qquad (11.20)$$

допускает упрощение — ее можно свести к виду

$$\varphi\,(a,\ b,\ c,\ d) = a \hat{+} b \hat{+} cd. \qquad (11.21)$$

Полиномиальная форма, содержащая только максимальные одночлены, будет называться *приведенной* или *канонической.*

Будем говорить, что две структурные функции равны или тождественны, если они сводятся к одной и той же полиномиальной форме относительно произведения • или суммы $\hat{+}$. Конечно, любую канони-

ческую форму относительно • можно преобразовать в каноническую форму относительно $\hat{+}$ и наоборот .

С каждой структурной функцией можно связать представление в виде сети, в которой последовательное расположение элементов соответствует операции •, а параллельное — операции $\hat{+}$.

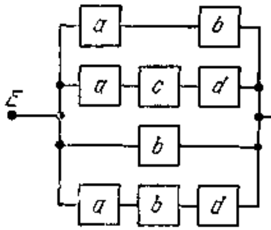


Рис. 11.1

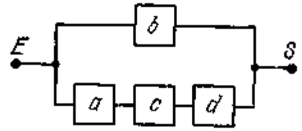


Рис. 11.2

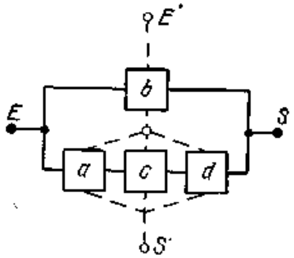


Рис. 11.3

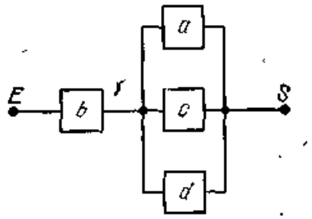


Рис. 11.4

Пример. Рассмотрим структурную функцию, соответствующую сети на рис. 11.1:

$$\varphi\,(a,\ b,\ c,\ d) = ab \hat{+} acd \hat{+} b \hat{+} abd. \qquad (11.22)$$

Поскольку

$$b \hat{+} abd = b, \qquad (11.23)$$

то первое сокращение дает

$$\varphi\,(a,\ b,\ c,\ d) = ab \hat{+} acd \hat{+} b. \qquad (11.24)$$

И так как

$$ab \hat{+} b = b, \qquad (11.25)$$

то второе сокращение приводит к

$$\varphi\,(a,\ b,\ c,\ d) = b \hat{+} acd. \qquad (11.26)$$

Конечно, оба сокращения можно было бы выполнить сразу. Итак,

$$\varphi_1(a,\ b,\ c,\ d) = b \hat{+} acd, \quad (11.27)$$

— каноническая форма функции φ. Соответствующая ей сеть представлена на рис. 11.2.

Используя двойственную сеть, изображенную на рис. 11.3, получаем двойственную каноническую форму, соответствующую трем параллельным маршрутам, идущим из E и S (см. рис. 11.4):

$$\varphi_1'(a,\ b,\ c,\ d) = ba \hat{+} bc \hat{+} bd, \quad (11.28)$$

взаимозаменяя операции • и $\hat{+}$, приходим к

$$\varphi_2(a,\ b,\ c,\ d) = (a \hat{+} b)\cdot(b \hat{+} c)\cdot(b \hat{+} d). \quad (11.29)$$

Сеть, соответствующая этой второй канонической форме функции φ, представлена на рис. 11.5.

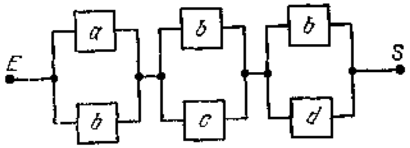


Рис. 11.5

Переход к поверхностям. Во избежание слишком абстрактного изложения рассмотрим конкретный пример.

Предположим, что переменные $a, b, \ldots \in \{0,1\}$ обозначают состояние компонентов A, B, ... ∈ **E**, где **E** — множество компонентов. Это множество будем называть словами *сложное оборудование,* простое *оборудование* или *система.* Будем считать, что компонент

X — функциональный, если $x = 1$,

X — не функциональный, если $x = 0$, (11.30)

где $x \in \{0,1\}$ — бинарная переменная, связанная с компонентом X. В этом случае φ *(a, b, ...)* представляет такую бинарную функцию, принимающую значения в {0,1}, что система

E — функциональная, если φ = 1, (11.31)

E — нефункциональная, если φ = 0, (11.32)

и φ *(a, b, ...*) выражает зависимость **E** от своих компонентов.

Пусть p_x есть вероятность того, что компонент X — функциональный, и $h_{\mathbf{E}}$ — вероятность того, что система **E** — функциональная.

Подсчитаем вероятность $h_{\mathbf{E}}$ как функцию вероятностей $p_a, p_b, \ldots$

Для того чтобы показать, как провести соответствующие вычисления, нужно вспомнить две идемпотентные формулы (11.7) и (11.8)):

$$a \cdot a = a, \quad (11.33)$$

$$a \hat{+} a = a, \quad (11.34)$$

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

поскольку, если вычисления проводятся относительно обычного сложения, то

$$a + a = 2a, \quad (11.35)$$

и очевидно, что {0,1} не будет областью значений для этой суммы.

В теории вероятностей, которая применяется в теории надежности рассматриваемого здесь класса систем, считается, что если p_x — вероятность того, что X — функциональный компонент, тогда $1 - p_x$ есть вероятность того, что он не функционален. Рассмотрим систему **E** = {A, B}. Для вероятности функционирования этой системы получим

$$h_{\mathbf{E}} = p_a \cdot p_b,\ \text{что соответствует}\ \varphi(a,\ b) = ab, \quad (11.36)$$

$$1 - h_{\mathbf{E}} = (1 - p_a)(1 - p_b),\ \text{что соответствует}\ \varphi(a,\ b) = a \hat{+} b, \quad (11.37)$$

последнее выражение можно записать в виде

$$h_{\mathbf{E}} = 1 - (1 - p_a)(1 - p_b) = p_a + p_b - p_a p_b, \quad (11.38)$$

что соответствует φ *(a, b) = a+b — ab.*

Мы видим, что существует изоморфизм между функциями h_{E} и φ.

Однако закон дистрибутивности, справедливый на множестве *{a, b,... ... }* переменных, принимающих значения из [0,1], относительно операций • и $\hat{+}$, перестает быть справедливым для вероятностей $p_a, p_b, \ldots$ Но дистрибутивность восстанавливается, если рассматривать обычные операции + и •. Для перехода от функций φ к функциям $h_{\mathbf{E}}$ нужно в φ заменить операторы $\hat{+}$ на +, что тоже приводит к использованию $\bar{\ }$; затем можно перейти от φ к $h_{\mathbf{E}}$, заменяя x на p_x и не забывая, где это необходимо, применять свойство идемпотентности (11.7). Таким образом, мы предполагаем устанавливать вероятность функционирования (так называемую надежность) системы, для которой структурная функция выражается в виде (11.22), т. е. такой системы **E**, что

E функционирует, если A и B — функциональные,

E функционирует, если или/и A, C и D — функциональные,
или/и B —функциональный,
или/и A, B и D — функциональные.

Очевидно, что

$$\varphi(a,\ b,\ c,\ d) = ab \hat{+} acd \hat{+} b \hat{+} abd = b \hat{+} acd \quad (11.39)$$

или опять

$$\varphi(a,\ b,\ c,\ d) = b + acd - abcd, \quad (11.40)$$

откуда

$$h_{\mathrm{E}}(p_a, p_b, p_c, p_d) = p_a + p_a p_c p_d - p_a p_b p_c p_d. \quad (11.41)$$

Для канонической формы (11.29) получаем

$$\begin{aligned}\varphi(a, b, c, d) &= (a \hat{+} b)\cdot(b \hat{+} c)\cdot(b \hat{+} d)\\ &= (ab \hat{+} ac \hat{+} b^2 \hat{+} bc)\cdot(b \hat{+} d)\\ &= (ac \hat{+} b)\cdot(b \hat{+} d)\\ &= abc \hat{+} acd \hat{+} b^2 \hat{+} bd\\ &= b \hat{+} acd.\end{aligned} \quad (11.42)$$

Специалистам по надежности систем хорошо известно общее правило: 1) выразить φ с помощью операций + , — и • ; 2) избавиться от степеней (используя идемпотентность); 3) заменить x на p_x.

Операции $\hat{+}$ и • на нечетких переменных. Теперь рассмотрим переменные $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots \in [0,1]$ и следующие три операции:

$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}$ — обычное умножение;

$\underset{\sim}{a} \hat{+} \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}$, где (+) обозначает обычное сложение,

(—) обозначает обычное вычитание;

$\overline{\underset{\sim}{a}} = 1 - \underset{\sim}{a}$ — дополнение $\underset{\sim}{a}$.

(11.43-11.45)

Легко проверить, что выполняются следующие свойства:

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{a},\\ &\underset{\sim}{a}\hat{+}\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b}\hat{+}\underset{\sim}{a},\end{aligned}\right\}\ \text{коммутативность}$$

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\sim}{a}\cdot(\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b})\cdot\underset{\sim}{c},\\ &\underset{\sim}{a}\hat{+}(\underset{\sim}{b}\hat{+}\underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a}\hat{+}\underset{\sim}{b})\hat{+}\underset{\sim}{c},\end{aligned}\right\}\ \text{ассоциативность}$$

$$\begin{aligned}&\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{a} \leqslant \underset{\sim}{a},\\ &\underset{\sim}{a}\hat{+}\underset{\sim}{a} \geqslant \underset{\sim}{a},\\ &\underset{\sim}{a}\cdot(\underset{\sim}{b}\hat{+}\underset{\sim}{c}) \leqslant \underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b}\hat{+}\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{c},\\ &\underset{\sim}{a}\hat{+}\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{c} \geqslant (\underset{\sim}{a}\hat{+}\underset{\sim}{b})\cdot(\underset{\sim}{a}\hat{+}\underset{\sim}{c}),\\ &\underset{\sim}{a}\cdot 0 = 0,\end{aligned} \quad (11.46\text{-}11.54)$$

Имеем $\underset{\sim}{a} \geqslant \underset{\sim}{a}^2$, $\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c} \geqslant \underset{\sim}{a}^2\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}$, $-\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c} \leqslant -\underset{\sim}{a}^2\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}$.

Прибавив $\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{c}$ к обеим частям неравенства, получим

$$\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c} \leqslant \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}\,c - \underset{\sim}{a}^2\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}.$$

Таким образом, $\underset{\sim}{a}(\underset{\sim}{b}\hat{+}\underset{\sim}{c}) \leqslant (\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b})\hat{+}(\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{c})$.

Имеем

$$\begin{gathered}(\underset{\sim}{a}^2 - \underset{\sim}{a})(1 - \underset{\sim}{c})(1 - \underset{\sim}{b}) \leqslant 0,\\ (\underset{\sim}{a}^2 - \underset{\sim}{a})(1 - \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}) \leqslant 0,\\ \underset{\sim}{a}^2 - \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{a}^2 c + \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}^2\,\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,c + \underset{\sim}{a}^2\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c} \leqslant 0,\\ \underset{\sim}{a}^2 + \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{a}^2 c + \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}^2\,\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{a}^2\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c} \leqslant \underset{\sim}{a}.\end{gathered}$$

Прибавив

$$\begin{gathered}\underset{\sim}{a}^2 + \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{a}^2\,\underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}^2\,\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{a}^2\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c} \leqslant \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c},\\ (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b})\cdot(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{c}) \leqslant \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}.\end{gathered}$$

$\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}$ к обеим частям неравенства, получим

Таким образом,

$$(\underset{\sim}{a}\hat{+}\underset{\sim}{b})(\underset{\sim}{a}\hat{+}\underset{\sim}{c}) \leqslant \underset{\sim}{a}\hat{+}\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}.$$

$$\begin{aligned}&\underset{\sim}{a}\hat{+}0 = \underset{\sim}{a},\\ &\underset{\sim}{a}\cdot 1 = \underset{\sim}{a},\\ &\underset{\sim}{a}\hat{+}1 = 1,\\ &(\overline{\overline{\underset{\sim}{a}}}) = \underset{\sim}{a},\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b}} = \overline{\underset{\sim}{a}}\hat{+}\overline{\underset{\sim}{b}},\\ &\overline{\underset{\sim}{a}\hat{+}\underset{\sim}{b}} = \overline{\underset{\sim}{a}}\cdot\overline{\underset{\sim}{b}},\end{aligned}\right\}\ \text{теоремы де Моргана, обобщенные для операций } \hat{+},\ \cdot \text{ и } ^{-} \text{ на нечетких переменных.}$$

(11.55-11.60)

Таким образом, свойства идемпотентности [см. (11.50) и (11.51)] и дистрибутивности [см. (11.52) и (11.53)] не удовлетворяются.

Иногда переменные $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, ... можно рассматривать как вероятности и предполагать, что

$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b}$ — вероятность появления формально независимых событий **A** и **B***(Получаем

$\underset{\sim}{a} = \mathrm{pr}\,(\mathbf{A})$, $\underset{\sim}{b} = \mathrm{pr}\,(\mathbf{B})$, $\mathrm{pr}\,(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathrm{pr}\,(\mathbf{A}) + \mathrm{pr}\,(\mathbf{B})\ -$

— $pr(A \cap B)$, где $pr(A \cap B) = pr(A) \cdot pr(B)$. Мы специально использовали слово «формально» применительно к понятию события с тем, чтобы не возникало путаницы с нечеткими подмножествами.)

$\underset{\sim}{a} \hat{+} \underset{\sim}{b}$ — вероятность появления формально независимых событий **A** или (и) **B**.

Определенные в (11.43) — (11.50) операции могут применяться для вычисления вероятностей.

Так же, как есть люди, которые склонны смешивать теорию нечетких множеств с теорией вероятностей, есть и другие, склонные рассматривать функции нечетких переменных, множество которых замкнуто относительно операций $\hat{+}$, - и •, и структурные функции, множество которых замкнуто только относительно операций $\hat{+}$ и •, в рамках одной и той же теории. И причина смешения понятий не только в том, что в обоих случаях используются одни и те же операции $\hat{+}$ и •.

Первая теория имеет дело с переменными $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, .. . $\in [0,1]$, для которых определено дополнение, вторая же имеет дело с переменными $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, .. . $\in \{0,1\}$, для которых понятие дополнения не вводится.

С другой стороны, нечеткие переменные $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, ... можно интерпретировать как вероятности и, следовательно, если рассматривать только операции $\hat{+}$ и •, то между двумя теориями устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Однако на множестве нечетких переменных $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, ... определены и другие операции ($\vee$), ($\wedge$) и $\bar{\ }$, т. е. max, min, и, следовательно, полного соответствия не наблюдается. Хотя иногда можно увидеть очень интересные связи.

Показатель качества функционирования системы. В некоторых задачах, связанных с оценкой функционирования системы, учитывают не только тот факт, работает или не работает система, но и уровень качества ее работы.

Например:

работает отлично,

работает очень хорошо,

работает довольно хорошо,

работает довольно плохо,

не работает.

Предположим теперь, что каждому компоненту X_i системы или элементу множества

$$\mathbf{E} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

мы ставим в соответствие нечеткую переменную

$$\underset{\sim}{x_i} = \mu_{\underset{\sim}{A}}(X_i) \in [0,1],$$

где $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ описывает состояние системы **E**, которое зависит от характеристики состояния каждого своего компонента. В этом случае $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ действительно есть нечеткое подмножество.

Если допустить, что уровень системы задается функцией

$$\psi(\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}, \ldots, \underset{\sim}{x_n}) = \underset{\sim}{x_1} \wedge \underset{\sim}{x_2} \wedge \cdots \wedge \underset{\sim}{x_n},$$

когда функционирование системы можно описать последовательной сетью и

$$\psi(\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}, \ldots, \underset{\sim}{x_n}) = \underset{\sim}{x_1} \vee \underset{\sim}{x_2} \vee \cdots \vee \underset{\sim}{x_n},$$

когда функционирование системы описывается параллельной сетью, то придется обратиться к различным понятиям из теории нечетких подмножеств, исключая вопросы, связанные с понятием дополнения, которые не имеют прямого отношения к задаче оценки качества работы системы.

Свойства переменных x_i $i = 1, 2, ..., n,$ совпадают с теми, которые были сформулированы в (2.12) — (2.23), а свойства (2.24) — (2.26) теряют свое значение.

Отметим, что свойства поглощения

$$\underset{\sim}{a} \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a},$$

$$\underset{\sim}{a} \wedge (\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a},$$

остаются справедливыми, что позволяет сокращать формулы и дает возможность ввести как понятие максимального одночлена (относительно $\wedge$ или $\vee$), так и понятие приведенной полиномиальной формы.

Функции, подобные ψ, будут называться *показателями качества функционирования системы.*

Пример. Рассмотрим рисунок (11.6).

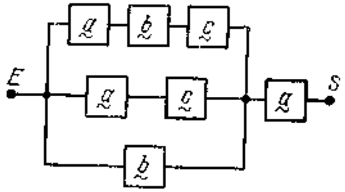


Рис. 11.6

По схеме легко определить структурную функцию

$$\psi(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = [(\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{c}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{c}) \vee \underset{\sim}{b}] \wedge \underset{\sim}{a}.$$

Применяя правило поглощения к полиному в квадратных скобках, получаем

$$\psi(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = [(\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{c}) \vee \underset{\sim}{b}] \wedge \underset{\sim}{a}$$

и по свойствам дистрибутивности и идемпотентности приходим к

$$\psi(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{c}).$$

Функцию ψ можно изучать с помощью таблицы значений, как это мы делали для функции φ, но не включая в таблицу дополнения переменных. Рассмотрим случаи, когда имеются

одна переменная $\underset{\sim}{a}$: $\underset{\sim}{a}$,

две переменные $\underset{\sim}{a}$ и $\underset{\sim}{b}$: $\underset{\sim}{a} \leqslant \underset{\sim}{b}$,

$\underset{\sim}{b} \leqslant \underset{\sim}{a}$,

три переменные $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ и $\underset{\sim}{c}$: $\underset{\sim}{a} \leqslant \underset{\sim}{b} \leqslant \underset{\sim}{c}$,

$\underset{\sim}{a} \leqslant \underset{\sim}{c} \leqslant \underset{\sim}{b}$,

$\underset{\sim}{b} \leqslant \underset{\sim}{a} \leqslant \underset{\sim}{c}$,

$\underset{\sim}{b} \leqslant \underset{\sim}{c} \leqslant \underset{\sim}{a}$,

$\underset{\sim}{c} \leqslant \underset{\sim}{a} \leqslant \underset{\sim}{b}$,

$\underset{\sim}{c} \leqslant \underset{\sim}{b} \leqslant \underset{\sim}{a}$,

и т. д. для четырех, пяти, шести... переменных.

Если *ψ* — показатель качества функционирования системы, зависящий от *n* переменных, то таблица будет иметь *n!* строк; каждая строка может принимать *n* значений, всего имеется

$$\mathrm{N} = n^{n!}$$

различных функций. Среди этих $n^{n!}$ функций только небольшое их число может быть представлено в канонической форме (относительно ∧ или ∨) и, следовательно, представлено надежностной сетью.

Снова возвращаясь к примеру на рис. 11.6, получаем таблицу, которая приведена на рис. 11.7.

$\leqslant$	$\leqslant$		$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{c}$	$(\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{c})$
$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{c}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{a}$
$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{c}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{a}$
$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{c}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{a}$
$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{c}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{c}$	$\underset{\sim}{c}$
$\underset{\sim}{c}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{c}$	$\underset{\sim}{a}$
$\underset{\sim}{c}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{a}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{c}$	$\underset{\sim}{b}$

Рис. 11.7

Свойство монотонности. Пусть
$\mathbf{E} = \{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n\}$ и $\underset{\sim}{\mathbf{A}} \subset \mathbf{E}$,

$\underset{\sim}{\mathbf{B}} \subset \mathbf{E}$. Положим

$$a_i = \mu_{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}(\mathrm{X}_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (11.61)$$

$$b_i = \mu_{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}(\mathrm{X}_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n\,; \qquad (11.62)$$

тогда имеем

$$\underset{\sim}{\mathbf{B}} \supset \underset{\sim}{\mathbf{A}} \Rightarrow \psi(\underset{\sim}{b_1}, \underset{\sim}{b_2}, \ldots, \underset{\sim}{b_n}) \geqslant \psi(\underset{\sim}{a_1}, \underset{\sim}{a_2}, \ldots, \underset{\sim}{a_n}). \qquad (11.63)$$

Это свойство обобщает хорошо известное свойство монотонности структурных функций, где уровень принимает значение 0 или 1 (в зависимости от того, функционирует система или нет). Допускают обобщения и другие свойства надежностных систем с отказами. Любая функция ψ, удовлетворяющая (11.63), будет называться монотонной функцией.

Следующие три свойства эквивалентны:

ψ— монотонный показатель качества функционирования системы;

ψ— аналитическая функция, т. е. может быть записана в канонической форме относительно ∧ (или ∨ *):*

— существует последовательно-параллельная сеть R_{sp} и параллельно-последовательная сеть $\mathrm{R}_{\mathbf{ps}}$, двойственные друг другу.

Можно сделать и другие более или менее тривиальные выводы. Пусть R — сеть. Параллельное подключение сети R к сети R' не увеличивает значения показателя качества функционирования.
Здесь уместно сделать важное замечание, с одной стороны, о показателе надежности, а с другой — о показателе качества функционирования системы. Это совершенно разные понятия.
Рассмотрим систему **E**, состоящую из двух компонентов A и B. Предположим, что *a* характеризует качество работы компонента A, а *b* — качество работы B, *a, b* £ [0,1]. Предположим также, что в сети эти два компонента соединены параллельно. Тогда имеем

$\psi(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}.$ (41.64) Наконец, предположим, что *a* — *Ь,* тогда

$$\psi(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \psi(\underset{\sim}{a}) = \psi(\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a}. \quad (11.65)$$

Отсюда следует, что избыточность не изменяет качества работы системы.
Теперь рассмотрим надежность той же системы E. Если *a* и *b* — не случайные переменные, $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b} \in \{0,1\}$, то имеем

$$\psi(a, b) = a \hat{+} b = a + b - ab. \quad (11.66)$$

Отсюда получаем

$$h(p_a, p_b) = p_a + p_b - p_a p_b. \quad (11.67)$$

Предположим, что $p_a = p_b$; тогда имеем

$$h(p_a, p_b) = 2p_a - p_a^2 \geqslant p_a, \quad (11.68)$$

$$h(p_a, p_b) > p_a, \text{ если } p_a \neq 0 \text{ и } p_a \neq 1. \quad (11.69)$$

Таким образом, избыточность повышает надежность, но не уровень функционирования.
Эти два понятия — «уровень функционирования» и «надежность» — не должны смешиваться. Первое связано с теорией нечетких подмножеств, а второе — с теорией вероятностей.
Следовательно, если каждый из двух компонентов работает довольно хорошо, то их параллельное соединение работает столь же хорошо, но не лучше, зато надежность системы повышается. Этот пример хорошо иллюстрирует все различие, существующее между двумя понятиями.
Про показатели надежности и качества работы системы можно сказать, что это монотонные показатели. В результате параллельного подключения сети R' к сети R не ухудшается ни качество работы системы, ни ее надежность. В результате последовательного соединения этих сетей ни надежность системы, ни качество ее работы не улучшается.

Отметим, что намеченная выше теория функций качества допускает обобщение, в котором переменные $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, ..., характеризующие качество работы компонентов системы, принимают значения не в [0,1], а в произвольном упорядоченном множестве.
Понятие показателя качества может стать предметом различных определений, возникающих в теории таксономии.

(Таксономия—это наука о законах классификации, о порядке, который субъективно назначается абстрактным или конкретным объектам.)

9. Нечеткая логика и приближенные рассуждения

9.1. Специальная нечеткая логика

В настоящем разделе рассмотрено обобщение на нечеткий случай хорошо известной двузначной логики, в которой каждому высказыванию или формуле приписывается значение «истинно» или «ложно». В рассматриваемой ниже специальной нечеткой логике истинностное значение высказывания или формулы может принимать произвольное значение из отрезка [0, 1]. Основное внимание будет уделено обобщению хорошо известной для булевых функций задаче их канонического и минимального представления в классе дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм. Подобные задачи находят широкое применение в теории переключательных схем, которые описываются такими выражениями.
Пусть x_i ($(i = 1, ..., n)$—переменные со значениями из [0, 1]. Мы будем использовать следующие обозначения: $\neg x = 1 - x$ (отрицание), $x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$ (дизъюнкция), $x_1 \wedge x_2 = \min(x_1, x_2)$ (конъюнкция). Нечеткая формула определяет функцию, задающую отображение из [0, 1]^n в [0, 1]. Определим нечеткую формулу с помощью следующих правил:
а) числа 0 и 1 — нечеткие формулы,
б) нечеткая переменная x_i — нечеткая формула,
в) если *f*—нечеткая формула, то $\neg f$—нечеткая формула.
г) если *f* и *g*— нечеткие формулы, то $f \wedge g$ и $f \vee g$ — нечеткие формулы,
д) других формул нет.

Нечеткие формулы являются обобщением структуры булевых функций, так как удовлетворяют всем аксиомам последних, кроме закона о дополнении, т. е. $f \vee \neg f \neq 1$, и $f \wedge \neg f \neq 0$. Следовательно, нечеткие формулы образуют дистрибутивную структуру с псевдодополнением (алгебра Де Моргана). Пусть T — истинностная функция, $\mathcal{F}$ — множество нечетких формул.

Определение 1. Нечеткая формула $f \in \mathcal{F}$ называется общезначимой (противоречивой), если T(f)≥0,5 (T(f)≤0,5) для всех значений переменных формулы f. Нечеткая формула $f \in \mathcal{F}$ необщезначима (непротиворечива), если она не является общезначимой (противоречивой).

Приведем примеры общезначимых и противоречивых формул:

а) рассмотрим формулу $j = x \vee \neg x$, тогда

$$T(f) = \max(T(x),\ 1 - T(x)) = \begin{cases} T(x), & \text{если} \quad T(x) \geqslant 0{,}5; \\ 1 - T(x), & \text{если} \quad T(x) < 0{,}5. \end{cases}$$

Таким образом, $T(f) \geq 0{,}5$ и f — общезначима (см. рис. 1, а).

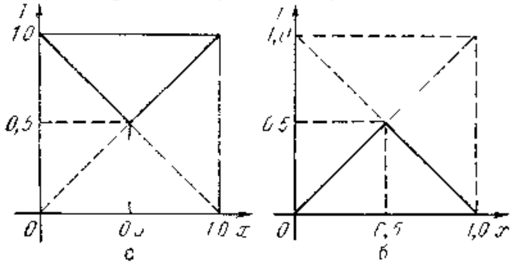


Рис. 1. Графическое изображение нечетких формул $f = x \vee \neg x$ (а) и $f' = x \wedge \neg x$ (б)

б) рассмотрим формулу $g = x \wedge \neg x$, тогда

$$T(g) = \min(T(x),\ 1 - T(x)) = \begin{cases} T(x), & \text{если} \quad T(x) \leqslant 0{,}5; \\ 1 - T(x), & \text{если} \quad T(x) > 0{,}5. \end{cases}$$

Таким образом, $T(g) \leq 0{,}5$ и g противоречива (см. рис. 1,б).

Назовем литералом переменную x_i или ее отрицание $\neg x_i$. Фразой или конъюнктом назовем конъюнкцию литералов. Дизъюнкцию литералов назовем предложением (дизъюнктом) .

Определение 2. Нечеткая формула f является дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ), если

$$f = \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \ldots \vee \Phi_p, \qquad p \geqslant 1,$$

где Φ_j — конъюнкты.

Определение 3. Нечеткая формула f называется конъюнктивной нормальной, формой (КНФ), если

$$f = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_p, \quad p \geqslant 1,$$

где C_j — дизъюнкты.

Понятия общезначимости и противоречивости в нечеткой и обычной логике совпадают, точнее, имеет место следующая теорема

Теорема 1. Формула $f \in \mathcal{F}$ нечетко общезначима (нечетко противоречива) тогда и только тогда, когда f — общезначима (противоречива).

Нечеткие формулы, рассматриваемые как отображения из $[0, 1]^n$ в [0, 1], сохраняют отношение частичного порядка A такое, что $\forall a_i,\ a_j \in [0, 1]$ $a_i A a_j$ тогда и только тогда, когда либо $0{,}5 \leq a_i \leq a_j$, либо $0{,}5 \geq a_i \geq a_j$. Например, имеет место $0{,}5\ a_i$, $\forall a_i \in [0, 1]$, а величины $a_i \in]0{,}5, 1]$ и $a_j \in [0{,}0{,}5]$ — несравнимы. Выражение $a_i\ A\ a_j$, обозначает, что a_i является более неопределенным значением истинности, чем a_j.

Отношение A может быть расширено на $[0, 1]^n$ следующим образом:

$$\forall a = (a_1, \ldots, a_n) \in [0, 1]^n, \qquad \forall b = (b_1, \ldots, b_n) \in [0, 1]^n$$

aAb тогда и только тогда, когда $\forall i = \overline{1, n} \quad a_i A b_i$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть f — нечеткая формула, задающая отображение $[0, 1]^n \to [0, 1]$; если aAb, тогда $f(a)Af(b)$.

Теперь обратимся к понятию нечеткой импликации. Хорошо известно, что в двузначной логике формула f влечет формулу g, если $T(f) = 1 \Rightarrow T(g) = 1$. При этом f называется импликантом g, а g называется импликатом f.

Определение 4. Пусть f и g — две нечеткие формулы. Будем говорить, что f нечетко имплицирует g или $f \xrightarrow{н} g$, если

$$(\forall)\ \alpha \in [0, 1], \quad T(f) \geqslant \alpha \Rightarrow T(g) \geqslant \alpha.$$

В этом случае будем говорить, что f н-имплицирует g, или f является н-импликантом g или, что g — н-импликат f. Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело в основном только с нечеткими формулами, букву «н» будем опускать.

Рассмотрим примеры нечетких импликаций:

$$x \to x \vee y,$$
$$y \to x \vee y,$$
$$x \wedge y \to x,$$
$$x \wedge y \to y,$$
$$x \wedge \neg x \to y \vee \neg y.$$

Введем определение нечеткого первичного импликанта.

Определение 5. Пусть f — формула в ДНФ и Ф — конъюнкт. Назовем Ф нечетким первичным нмпликантом f (сокращенно НПИ), если из

$$\Phi \to f \text{ и } \Phi \to \Phi', \quad \Phi' \to f$$

следует Ф' = Ф или Ф' = f.

Таким образом, НПИ является максимальным элементом во множестве всех истинных нечетких импликант в соответствии с упорядочением, порожденным «→». Аналогично определяется двойственное понятие нечеткого первичного импликата (НПи).

Определение 6. Пусть f—формула в КНФ и Ф — дизъюнкт. Назовем Ф C нечетким первичттым импликатом (используется также термин «пмплицент») f, (сокращенно НПи), если из $f \to C$ и $f \to C'$, $C' \to C$ следует, что $C' = f$ или $C' = C$

Заметим, что в двухзначной логике Ф является первичным пмпликантом f, если $\Phi \to f$ и из $\Phi \to \Phi'$, $\Phi' \to f$ следует $\Phi = \Phi'$ или $\Phi' = f$ и $\Phi \neq 0$ (т. е. Ф — непротиворечив). Аналогично, первичный импликат считается не равным 1(противоречивым). Например, для четкой формулы $f = x \wedge \neg x \vee y$ очевидно $x \wedge \neg x \to f, \ y \to f.$ Следовательно, первичным импликатом является только y. В нечеткой логике формула f имеет два НПИ, так как

$x \wedge \neg x \to f$ и $y \to f.$

Мы можем теперь поставить задачу порождения всех НПИ нечеткой функции. Эта проблема связана с задачей нахождения минимальной формы для нечетких функций. Для нахождения минимальной формы нечетких функций важной является следующая характеристика элементов, неразложимых в объединение.

Теорема 3 . В структуре нечетких функций n переменных элементами, неразложимыми в объединение, являются произведения литералов, не содержащих симметричных пар, и произведения литералов, содержащих каждую из n переменных по крайней мере одного знака. Для нечеткой функции существует и единственно ее представление в виде объединения неразложимых элементов. При поиске этой формы представления может быть использован следующий алгоритм:

а) записать функцию f в ДНФ, используя соотношения алгебры Моргана для нечетких функций;

б) элементы в f, неразложимые в объединение, умножить на $x_i \vee \neg x_i$, соответствующее каждой пропущенной литере;

в) новое выражение опять записать в ДНФ;

г) применить законы поглощения и выбросить конъюнкты, из которых следуют другие конъюнкты;

д) полученное выражение является единственным представлением f.

Задача порождения всех нечетких первичных имплпкант и импликат нечеткой функции может быть решена с помощью следующей теоремы.

Теорема 4. Следующие утверждения истинны:

а) нечеткими первичными импликантами (нечеткими первичными импликатами) дизъюнктов (конъюнктов), неразложимых в пересечение (в объединение), являются все их литералы;

б) нечеткими первичными имплпкантами (нечеткими первичными импликатами) дизъюнктов (конъюнктов), неразложимых в пересечение (в объединение), являются все их литералы и все конъюнкции $x_i \wedge \neg x_i$ (все дизъюнкции $x_i \vee \neg x_i$), соответствующие пропущенным литералам.

Обозначим через НПИ(f) и НПи(f) множества всех НПИ и НПи нечеткой формулы f.

Теорема 5 . Пусть f и g — нечеткие функции; тогда НПИ (НПи) $f \wedge g$ ($f \vee g$) порождаются всеми конъюнкциями $p \wedge q$ (дизъюнкциями $p \vee q$), где $p \in$ НПИ(f), $g \in$ НПИ(g) ($p \in$ НПи(f) и g НПи (g)), и последующим вычеркиванием тех конъюнкций (дизъюнкций), которые имплицируют (имплицируются) другими.

Алгоритм для нахождения всех НПН и НПи будет следующим:

а) заменить каждый конъюнкт на его НПИ, используя теорему 4;

б) вычислить для f НПи, используя теорему 5 (дизъюнкцию импликат);

в) заменить каждый НПи на его НПИ, снова используя теорему 4;

г) вычислить для f ее НПИ, снова используя теорему 5 (конъюнкцию импликант).

Предложен метод, основанный на понятии нечеткого следствия, расширенный на случай неполностью определенных нечетких выражений.

Для этой же цели предложен другой метод, основанный на различии между простыми конъюнктами и противоречивыми конъюнктами канонической дизъюнктивной формы нечеткого выражения. Позднее предложен быстрый алгоритм, который находит сразу особые первичные импликанты, т. е. те первичные импликанты, чьи дизъюнкции образуют минимальную дизъюнктивную форму для рассматриваемого нечеткого выражения. Представляют также интерес алгоритмы, основанные на понятии нечеткого следствия, приведенные ниже.

Пусть P н P' — конъюнкты над множествами переменных $\{x_1, x_2,..., x_n\}$. Нечетким следствием P и P' называется противоречивый конъюнкт Ф, построенный следующим образом: ищется x_i такой, что $P = x_i^* \wedge Q,\ P' = (\neg x_i^*) \wedge Q'$, . где Q, Q' не содержат переменной x_i; полагается $\Phi = Q \wedge Q'$ тогда и только тогда, когда $Q \wedge Q'$ является противоречивым конъюнктом; полагается $\Phi = Q \wedge Q' \wedge x_i \wedge (\neg x_i)$ тогда и только тогда, когда $Q \wedge Q'$ является простым копъюнктом (x_i* означает либо x_i, либо $\neg x_i$). Тогда алгоритм порождения первичных импликантов основан на следующей теореме.

Теорема 6. Дизъгонктиппая форма нечеткого выражения f содержит все свои первичные импликапты тогда и только тогда, когда

1) не существует конъюнкта, который является импликантом другого конъюнкта f:

2) нечеткие следствия любых двух конъюнктов либо не существуют, либо являются следствиями, по крайней мере, одного конъюнкта f.

Теперь можно построить следующий алгоритм порождения первичных импликапт. Пусть $f(x_1, ..., x_n)$— нечеткая функция в ДНФ, тогда:

а) сравнить каждую пару конъюнктов в f и вычеркнуть те, из которых следуют другие;

б) нечеткое следствие каждых двух конъюнктов добавить к списку, если конъюнкты из следствия не имплицируют другие члены в f;

в) вычеркнуть все конъюнкты, которые имплицируют другие.

г) повторять пп. б) и в) до тех пор, пока не выполнится условие теоремы 6.

Полученные конъюнкты будут являться всеми НПИ функции f.

Принцип резолюции обобщен на случаи специальной нечеткой логики. Пусть задана формула f. Формула C является логическим следствием f тогда и только тогда, когда формула $f \wedge \neg g$ противоречива. Если $f \wedge \neg g$ противоречива, то $T(f \wedge \neg g) < 0{,}5$ для всех интерпретаций. Для заданного множества дизъюнктов следствие C (которое считается дизъюнктом) называется первичным логическим следствием S , если не существует других логических следствий C' множеств S (тоже дизъюнктов) таких, что C также является логическим следствием C'.

Пусть S — множество дизъюнктов. Резолюция S, обозначаемая $R(S)$,— это множество, состоящее из элементов S вместе с резольвентами всех пар элементов S. Резолюция n-й степени, обозначаемая $R^n(S)$, определяется для всех $n \geq 0$ следующим образом: $R^0(S) = S$ и $R^{n+1}(S) = R(R^n(S))$. Тогда теорема 7 утверждает, что принцип резолюции является полным в специальной нечеткой логике.

Теорема 7. В нечеткой логике, если некоторый дизъюнкт C является первичным логическим следствием множества дизъюнктов S, то для некоторого $n \geq 0,\ C \in R^n(S)$.

Имеет место следующая теорема, которая утверждает, что если каждый дизъюнкт в S немного больше, чем «полуистина», и наиболее ненадежный дизъюнкт имеет значение истинности a, т. е. гарантируется, что все логические следствия, полученные повторным применением принципа резолюции, имеют значения истинности по крайней мере a, но никогда не превышают значения истинности наиболее надежного дизъюнкта.

Теорема 8. Пусть S — множество дизъюнктов, а $C_1, C_2, ..., C_м$ — дизъюнкты из S. Пусть также

$$\max[T(C_1),\ T(C_2),\ \ldots,\ T(C_M)] = b$$

и

$$\min[T(C_1),\ T(C_2),\ \ldots,\ T(C_M)] = a > 0{,}5,$$

а C^n — любой дизъюнкт из множества $R^n(S)$. Тогда для всех $n \geqslant 0\quad a \leqslant T(C^n) \leqslant b.$

Полезность этой теоремы мы можем проиллюстрировать следующим простым рассуждением. Пусть имеется два множества дизъюнктов S_1 и S_2, представляющих два информационных массива. Из S_1 мы можем вывести логическое следствие, которое рекомендует добираться до работы на автобусе. Из S_2 мы можем вывести логическое следствие, которое рекомендует добираться до работы на метро. Пусть, например, $T(S_1) = 0{,}6$ и $T(S_2) = 0.9$, где $T(S_i) = \min_j T(C_{ij}),\quad C_{ij} \in S_i$. В соответствии с теоремой мы можем заключить, что корректность второго предложения, по крайней мере, 0,9, в то время, как про первое гарантировано только то, что его корректность не менее 0,6. Тогда риск при принятии первого решения может быть 0,4, а второго — не выше 0,1. Чтобы минимизировать максимальный возможный риск, надо принять второе решение и ехать на метро.

Теорема 7 была обобщена , где доказано, что принципы семантической лок-резолюции, IDI-резолюции и LI-резолюцпи являются полными в специальной нечеткой логике.

9.2. Многозначные и нечеткозначная логики

9.2.1. Многозначные логики.

В зависимости от способов введения операций объединения и пересечения НМ существует три основных теории нечетких множеств (см. табл. 1).

Таблица 1

Название связки	Обозначение связки	Нечеткая логика с максиминными операциями	Нечеткая логика с ограниченными операциями	Вероятностная нечеткая логика
Тавтология	$\dot{P}$	$\max(p,\ 1-p)$	1	$1-p(1-p)$
Противоречие	$\mathring{P}$	$\min(p,\ 1-p)$	0	$p(1-p)$
Отрицание	$\neg P$	$1-p$	$1-p$	$1-p$
Дизъюнкция	$P \vee Q$	$\max(p,\ q)$	$\min(1,\ p+q)$	$p+q-pq$
Конъюнкция	$P \wedge Q$	$\min(p,\ q)$	$\max(0,\ p+q-1)$	pq
Импликация	$P \to Q$	$\max(1-p,\ q)$	$\min(1,\ 1-p+q)$	$1-p+pq$
Эквивалентность	$P \leftrightarrow Q$	$\min[\max(1-p,\ q),\ \max(p,\ 1-q)]$	$1-\lvert p-q\rvert$	$(1-p+pq)\times(1-q+pq)$
Штрих Шеффера	$P \mid Q$	$\max(1-p,\ 1-q)$	$\min(1,\ 1-p+1-q)$	$1-pq$
Исключающее «Или»	$P \text{ ex } Q$	$\max[\min(1-p,\ q),\ \min(p,\ 1-q)]$	$\lvert p-q\rvert$	$1-(1-p+pq)\times(1-q+pq)$
Стрелка Пирса	$P \downarrow Q$	$\min(1-p,\ 1-q)$	$\max(0,\ 1-p-q)$	$(1-p)(1-q)$

Если $\mathscr{F}(X)$ — мпожество нечетких подмножеств X с обычными макси-минпыми операциями объединения ($\bigcup$) и пересечения ($\cap$), то $\mathscr{F}(X)$, рассматриваемое как множество отображений из X в $[0, 1]$, является дистрибутивной решеткой с псевдодополнением $(\mathscr{F}(X),\ \cup,\ \cap,\ ^{-})$. Можно взять в качестве объединения и пересечения вероятностные операторы (алгебраические операции в табл. 1). Относительно этих операторов и обычного псевдодополнения алгебра $(\mathscr{F}(X),\ \hat{+},\ \cdot,\ -)$ образует только недистрибутивную решетку с псевдодополнением. И, наконец, используя операторы ограниченной суммы ($\dot{\bigcup}$) и произведения ($\underset{\cdot}{\bigcap}$) и обычное псевдодополнение, мы получим недистрибутивную решетку с дополнением $(\mathscr{F},\ \dot{\cup},\ \cap,\ ^{-})$.

Отметим, что $\forall A,\ B \in \mathscr{F}(X)$: $A \underset{\cdot}{\cap} B \subseteq A \cdot B \subseteq A \cap B$ и $A \cup B \subseteq A \hat{+} B \subseteq A \dot{\cup} B$.

Каждой из этих теорий соответствует многозначная логика, связки для которой приведены в табл. 1, где $T(P= p$ и $T(Q) = q$.

Во всех трех случаях значения отрицания вычисляются по формуле $T(\neg P) = 1 - T(P)$, значения импликации — по формуле $T(P \to Q) = T(\neg P \vee Q)$, а значения эквивалентности — по формуле

$$T(P \leftrightarrow Q) = T[(P \to Q) \wedge (Q \to P)].$$

Связки ex, | и ↓ всегда выражаются как отрицания ↔, $\wedge$ и $\vee$ соответственно; тавтология и противоречие определены как

$$T(\dot{P}) = T(P \vee \neg P), \quad T(\mathring{P}) = T(P \wedge \neg P).$$

В более общем виде

$$T(\dot{P}Q) = T((P \vee \neg P) \vee (Q \vee \neg Q));$$

$$T(\mathring{P}Q) = T((P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q)).$$

В соответствии с операциями из теории нечетких множеств в $(\mathscr{F}(X),\ \cup,\ \cap,\ ^{-})$ дизъюнкция и конъюнкция определяются как

$$T(P \vee Q) = \max(T(P),\ T(Q)),$$
$$T(P \wedge Q) = \min(T(P),\ T(Q))$$

и являются коммутативными, ассоциативными, идемпотентными и дистрибутивными относительно друг друга, но не удовлетворяют закону исключенного третьего в следующем смысле:

$$T(P \vee \neg P) \neq 1 \quad \text{и} \quad T(P \wedge \neg P) \neq 0.$$

Для логики, связанной с $(\mathscr{F}(X),\ \dot{\cup},\ \underset{\cdot}{\cap},\ -)$, операции определяются как

$$T(P \vee Q) = \min(1,\ T(P) + T(Q)),$$
$$T(P \wedge Q) = \max(0,\ T(P) + T(Q) - 1)$$

и являются коммутативными и ассоциативными, но не идемпотентными и не дистрибутивными друг относительно друга, хотя и удовлетворяют закону исключенного третьего.

В логике, связанной с $(\mathscr{F}(X),\ \hat{+},\ \cdot,\ -)$, которую часто называют вероятностной логикой, операции

$$T(P \vee Q) = T(P) + T(Q) - T(P) \cdot T(Q),$$
$$T(P \wedge Q) = T(P) \cdot T(Q)$$

являются коммутативными, ассоциативными, но не идемпотентны и не дистрибутивны относительно друг друга.

Альтернативный подход предложен к описанному способу введения нечетких логик, где понятие нечеткого множества основано на понятии нечеткой границы между классами. Связки НЕТ, ИЛИ, а также импликация и отрицание определяются в терминах вероятности неверной классификации при распознавании. Их обычные свойства при этом выполняются. Другие определения нечетких множеств могут быть сведены к этому случаю с помощью наложения соответствующих ограничений на функции распределения границ.

9.2.2. Нечеткозначная логика.

Понятие лингвистической переменной, которая характеризуется набором *(X, T(X), U, G, M),* в котором *X*— название переменной, *T(X)* обозначает терм-множество переменной *X,* т. е. множество лингвистических значений переменной *X,* причем каждое из таких значений является нечеткой переменной *X* со значениями из универсального множества *U* с базовой переменной *u, G* — синтаксическое правило (имеющее обычно форму грамматики), порождающее названия *X* значений переменной X, а *M* — семантическое правило, которое ставит в соответствие каждой нечеткой переменной ее смысл *M(X),* т. е. нечеткое подмножество *M(X)* универсального множества *U.*
Конкретное название X, порожденное синтаксическим правилом G, называется термом.
Трактовка истинности как лингвистической переменной приводит к нечеткой логике со значениями «истинный», «очень истинный», «совершенно истинный», «более или менее истинный», «не очень истинный», «ложный» и т. д., т. е. к нечеткозначной логике, на которой основана теория приближенных рассуждений. На рис. 2 приведен пример лингвистических значений истинности: «истинно» с функцией принадлежности $\mu_и = S(\alpha, (\alpha+1)/2, 1)$, $\alpha \in [0, 1]$, «ложно» = ant («истинно») и «сомнительно» с $\mu_c = S(\beta,(\beta + 0{,}5)/2. 0{,}5)$ на [0, 0,5] и $\mu_c = \mathrm{ant}(S(\beta, (\beta + 0{,}5)/2, 0{,}5))$ на [0,5, 1], $\beta \in [0, 0{,}5]$.

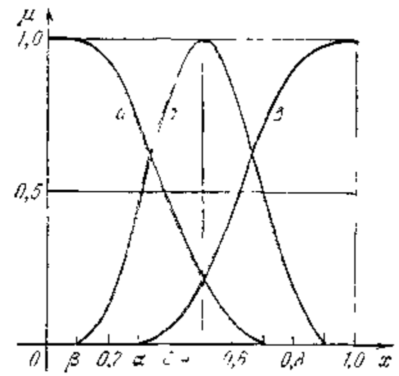


Рис. 2. Функции принадлежисти лингвистических значений истинности: *а* — «ложно», *б* — «сомнительно», в — «истинно»

Вообще говоря, мы можем рассмотреть логическую систему значений истинности, которая образует некоторую решетку *L* (в частности, полную решетку, полную дистирбутивную решетку и т.д.). В этом случае *L*-значная логика может быть рассмотрена как система $\mathcal{L} = \{P, L, T\}$, где *P* — множество высказываний, *L* — решетка и *T* — отображение

$$T\colon P \to L,$$

которое присваивает каждому высказыванию $p \in P$ его значение истинности $T(p) \in L$. Истинностное отображение *T* должно удовлетворять следующим свойствам:

а) $$T(p \vee q) = T(p) \vee T(q);$$

б) $$T(p \wedge q) = T(p) \wedge T(q),$$

а также

в) $$T(\neg p) = \neg T(p),$$

если в *L* определена операция дополнения.
Для лингвистических переменных в качестве множества истинностных значении иснольаоиано $L = \mathcal{F}([0, 1]) = \{f\colon [0, 1] \to [0, 1]\}$. Таким образом, истинностное отображение запишется в виде
$T\colon P \to \mathcal{F}([0, 1])$, и аксиомы а), б), в) будут выполняться.
В качестве значений истинности для нечеткозначной логики предложено использовать нечеткие числа на [0, 1] , которые тождественны нечетким множествам с выпуклыми, нормализованными и кусочно-непрерывными функциями принадлежности.
Нечеткозначпая логика описывается теорией нечетких множеств типа 2, функции принадлежности которых являются нечеткими числами.

Семантические правила для вычисления функций истинности для отрицания, конъюнкции и дизъюнкции запишутся следующим образом:

$$T_2(\urcorner P) = 1 \ominus T_2(P) = \operatorname{ant}(T_2(P)),$$
$$T_2(P \wedge Q) = \widetilde{\min}(T_2(P),\ T_2(Q)),$$
$$T_2(P \vee Q) = \widetilde{\max}(T_2(P),\ T_2(Q)),$$

где $T_2(P)$ — нечеткое число на $[0, 1]$, $\ominus$, $\widetilde{\min}$ и $\widetilde{\max}$ — расширенные операции отрицания, минимума и максимума соответственно.

Приведем определение операций для $\widetilde{\max}(P, Q)$ и $\widetilde{\min}(P, Q)$ через их функции принадлежности:

$$\mu_{\widetilde{\max}(P,Q)}(z) = \sup_{z=\max(x,y)} \min(\mu_P(x),\ \mu_Q(y)),$$
$$\mu_{\widetilde{\min}(P,Q)}(z) = \sup_{z=\min(x,y)} \min(\mu_P(x),\ \mu_Q(y)).$$

Аналогично, с помощью припципа обобщения, получаются семантические правила для других логических связок (см. табл. 1).

Так, для связок логики $(\mathcal{F}(X),\ \cup,\ \cap,\ ^-)$ имеют место следующие формулы:

а) для импликации

$$T_2(P \to Q) = \widetilde{\max}(1 \ominus T_2(P),\ T_2(Q)),$$

б) для эквивалентности

$$T_2(P \leftrightarrow Q) = \widetilde{\min}[\widetilde{\max}(1 \ominus T_2(P),\ T_2(Q)),\ \widetilde{\max}(1 \ominus T_2(Q),\ T_2(P))];$$

в) для исключающего «или»

$$T_2(P \operatorname{ex} Q) = \widetilde{\max}(\widetilde{\min}(1 \ominus T_2(P),\ T_2(Q)),\ \widetilde{\min}(1 \ominus T_2(Q),\ T_2(P)));$$

г) для тавтологии

$$T_2(\dot{P}) = \widetilde{\max}(T_2(P),\ 1 \ominus T_2(P));$$

д) для противоречия

$$T_2(\mathring{P}) = \widetilde{\min}(T_2(P),\ 1 \ominus T_2(P)).$$

Например, если P «сомнительно», а Q «истинно», то $T_2(P \to Q) = \widetilde{\max}$ (ant («сомнительно»), «истинно») $\simeq$ «истинно»; $T_2(Q \to P) = \widetilde{\max}$ (ant «истинно», «сомнительно») $\simeq$ «сомнительно», $T_2(P \leftrightarrow Q)$ — «сомнительно».

Для связок $(\mathcal{F}(X),\ \dot{\cup},\ \dot{\cap},\ ^-)$ получаются следующие семантические правила:

а) импликация

$$T_2(P \to Q) = \widetilde{\min}(1,\ 1 \ominus T_2(P) \oplus T_2(Q));$$

б) эквивалентность

$$T_2(P \leftrightarrow Q) = 1 \ominus |T_2(P) \ominus T_2(Q)|;$$

в) исключающее «или»

$$T_2(P \operatorname{ex} Q) = |T_2(P) \ominus T_2(Q)|;$$

г) тавтология

$$T_2(\dot{P}) = 1;$$

д) противоречие

$$T_2(\mathring{P}) = 0.$$

Например, если P «сомнительно», а Q «истинно», то $T_2(P \to Q) = \widetilde{\min}(1,\ \operatorname{ant}$ («сомнительно») $\oplus$ «истинно») $= \widetilde{\min}(1,$ «сомнительно» $\oplus$ «истинно»). Как только $\alpha+\beta \geq 1$ для μ, то $T_2(P \to Q) = 1$, однако в общем случае $T_2(P \to Q) \subset$ «истинно», что совпадает с результатом для обычной импликации.

Для расширенных операций $\widetilde{\max}$ и $\widetilde{\min}$ выполняются свойства коммутативности, ассоциативности, идемпотентности, взаимной дистрибутивности, а также законы поглощения и Де Моргана.

9.3. Теория приближенных рассуждений

Под приближенными рассуждениями понимается процесс, при котором из нечетких посылок получаются некоторые следствия, возможно, тоже нечеткие. Приближенные рассуждения лежат в основе способности человека понимать естественный язык, разбирать почерк, играть в игры, требующие умственных усилий, в общем, принимать решения в сложной и неполностью определенной среде. Эта способность рассуждать в качественных, неточных терминах отличает интеллект человека от интеллекта вычислительной машины.

В ряде работ дается общая схема методов приближенных рассуждений в нечеткой логике. Вводится понятие распределения возможностей для представления значений высказываний естественного языка, на основании которого разрабатывается **ПРУФ — язык представления значений для естественных языков**. ПРУФ использует нечеткую логику с лингвистическими значениями истинности, которые являются нечеткими подмножествами единичного интервала. Кванторам также разрешается принимать значения типа: «много», «мало», «несколько». Этим кванторам дается конкретная интерпретация, что позволяет транслировать в ПРУФ выражения типа: «Многие высокие мужчины много выше, чем большинство мужчин».

Будем говорить, что нечеткое высказывание вида «$p \triangleq X$ есть *F»,* где *X* — переменная, принимающая значение в универсуме *U* и *F* — нечеткое подмножество *U,* индуцирует распределение возможности π_X равное *F,* т. е. $\pi_X = F$. Более явно, если $u \in U$ и μ_F: $U \to [0, 1]$ — функция принадлежности *F,* тогда возможность того, что $X = u$, задаваемая высказыванием *«X* есть *F»,* задается

$$\text{poss}\{X = u | X \text{ есть } F\} = \mu_F(u), \quad u \in U,$$

где poss{X = u}— сокращение высказывания «возможность того, что *X* может принимать значение *u».* Мера возможности нечеткого множества *A* определяется как

$$\pi(A) \triangleq \text{poss}\{X \text{ есть } A\} \triangleq \sup_u (\mu_F(u) \wedge \mu_A(u)).$$

Для проведения приближенных рассуждений с утверждениями типа *«X* есть *A»,* необходимы **трансляционные правила**, которые моделируют их как распределение возможностей, необходимы **правила модификации**, позволяющие преобразовывать эти распределения в другие, **семантически эквивалентные распределения возможностей** и необходимы **правила вывода**, позволяющие выводить новые распределения возможностей.

9.3.1. Трансляционные правила.

Правила трансляции из естественного языка в ПРУФ делятся на **четыре основных типа**: для выражений, содержащих модификаторы (тип 1); для выражений, содержащих композицию (тип 2); для выражений с кванторами (тип 3); для выражений, содержащих оценки (тип 4).

Тип 1. Основным правилом этого типа является правило модификации. Пусть выражение «$p \triangleq N$ есть *F»* переводится в выражение присваивания возможности $\pi_{(X_1, \ldots, X_n)} = F$. Тогда трансляция модифицированного выражения «$p^+ \triangleq N$ есть *mF»* задается выражением:

$$N \text{ есть } mF \to \pi_{(X_1,\ldots,X_n)} = F^+,$$

где *m* — модификатор такой, как «не», «очень», «примерно», «совсем» и т. д., F^+ — модификация *F,* индуцированная *m.*

Например, Лиза «очень молода» $\to \pi_{\text{Возраст (Лиза)}}$ = («Молодая»)^2.

Тип 2. Правила типа 2 задают распределение возможности для выражений вида $p = q * r$, где * обозначает операцию композиции,

например, конъюнкцию («И»), дизъюнкцию («ИЛИ»), импликацию («ЕСЛИ, ..., ТО») и т. д.

При предположении, что правила композиции невзаимодействующие, правила трансляции типа 2 запишутся следующим образом:

если

$$q \triangleq M \text{ есть } F \to \pi_{(X_1,\ldots,X_m)} = F,$$

$$r \triangleq N \text{ есть } G \to \pi_{(Y_1,\ldots,Y_n)} = G,$$

тогда

а) $M \text{ есть } F \text{ и } N \text{ есть } G \to \pi_{(X_1,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_m)} = \overline{F} \cap \overline{G} = F \times G;$

б) $M \text{ есть } F \text{ или } N \text{ есть } G \to \pi_{(X_1,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_n)} = \overline{F} + \overline{G};$

в₁) если «M есть F», то

$$N \text{ есть } G \to \pi_{(X_1,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_n)} = \overline{F}' \oplus \overline{G},$$

или в₂) если *«M* есть F_1*»,* то

$$N \text{ есть } G \to \pi_{(X_1,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_n)} = F \times G + F' \times V,$$

где *F* и *G* — нечеткие подмножества $U \triangleq U_1 \times \ldots \times U_n$ и $V = V_1 \times \ldots \times V_n$, соответственно; $\overline{F}'$ и $\overline{G}$ цилиндрические расширения *F'* и G, ×, +, ⊕ — декартово произведение, объединение и ограниченная сумма соответственно .

Тип 3. Правила типа 3 осуществляют трансляцию в распределения возможности высказываний *«QN* есть F», где *Q* — нечеткий квантор (например «большинство», «много», «несколько», «некоторые»). *Q* обычно является нечетким множеством па [0,1] и обозначает некоторую пропорцию.

Более конкретно, предположив для простоты, что *N* — обычное множество, распишем подробнее правило *«N* есть $F \to \pi_X = F$*)».* Если *U* — континуум, то «QN есть $F \to \pi_{\text{Prop}(F)} = Q$». Что влечет более явное правило

$$QN \text{ есть } F \to \pi(\rho) = \mu_Q\left(\int_U \rho(u)\,\mu_F(u)\,du\right),$$

где $\rho(u)\,du$ — пропорция тех *X*-ов, величины которых лежат в интервале *[u, du],* $\pi(\rho)$ — возможность ρ; μ_Q и μ_F — функции принадлежности *Q* и *F* соответственно,

$$\text{Prop}(F) = \int_U \rho(u)\,\mu_F(u)\,du$$

является аддитивной мерой *F,* которая может быть рассмотрена как непрерывный аналог пропорции элементов из *U* в *F.*

В качестве простого примера, если «большинство» и «высокий» определим следующим образом:

$$\mu_{\text{большинство}} \triangleq S(u;\ 0{,}5,\ 0{,}7,\ 0{,}9),$$

$$\mu_{\text{высокий}} \triangleq S(u;\ 160,\ 170,\ 180),$$

то «Большинство мужчин высокие» $\rightarrow \pi(\rho) = S\left(\int\limits_0^{200} \rho(u) S(u;\ 160,\ 170,\ 180)\,du;\ 0{,}5,\ 0{,}7,\ 0{,}9\right)$, где $\rho(u)\,du$ — пропорция мужчин, чей рост (в см) лежит в отрезке $[u,\ u+du]$. Таким образом, предложение «Большинство мужчин высокие» индуцирует распределение возможностей функции плотности распределения роста ρ, которая записана через S-функцию. Здесь S-функцня является стандартизованной функцией принадлежности с настраиваемыми параметрами:

$$S(u;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma) = \begin{cases} 0 & \text{для}\ \ u \leqslant \alpha, \\ 2\left(\dfrac{u-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \text{для}\ \ \alpha \leqslant u \leqslant \beta, \\ 1 - 2\left(\dfrac{u-\gamma}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \text{для}\ \ \beta \leqslant u \leqslant \gamma, \\ 1 & \text{для}\ \ u \geqslant \gamma. \end{cases}$$

Тип 4. Правила этого типа в спою очередь подразделяются на **три группы: правила для оценок истинности, правила для оценок вероятности и правила для оценок возможности.** Рассмотрим отдельно каждую из групп трансляционных правил типа 4.

Правила для оценок истинности. Пусть *p* — высказывание в виде «$p \triangleq N$ есть *F*» и пусть *q* — оценка истинности *p* «$q \triangleq N$ есть *F* есть τ», где τ — лингвистическое значение истинности, *q* семантически эквивалентно высказыванию

$$N\ \text{есть}\ \tau \leftrightarrow N\ \text{есть}\ G,$$

где *F, G* и τ связаны $\tau = \mu_F(G)$.

Это уравнение утверждает, что τ есть образ *G* при отображении μ_F. Следовательно, выражение для функции принадлежяоети *G* в терминах τ и *F* задается формулой:

$$\mu_G(u) = \mu_\tau(\mu_F(u)).$$

Используя этот результат, правило для оценок истинности запишется:

$$\text{если}\ \ N\ \text{есть}\ F \rightarrow \pi_X = F,$$

то

$$N\ \text{есть}\ F\ \text{есть}\ \tau \rightarrow \pi_X = F^+,$$

где

$$\mu_{F^+}(u) = \mu_\tau(\mu_F(u)).$$

В частности, еслп τ — единичное значение истинности, т. е.

τ = *u* — истинно,

где

$$\mu_{u-\text{истинно}}(v) = v, \quad v \in [0,\ 1],$$

тогда

$$N\ \text{есть}\ F\ \text{есть}\ u - \text{истинно} \rightarrow N\ \text{есть}\ F.$$

Правило для оценок вероятности. Пусть *p* — высказывание и пусть *q* — версия *p* с вероятностной оценкой «$q \triangleq N$ есть *F* есть λ», где λ — лингвистическое значение вероятности типа «вероятно», «очень вероятно», «не очень вероятно» и т. д. Предположим, что *q* семантически эквивалентно высказыванию «prob *{N* есть *F}* есть λ», в котором « $p \triangleq N$ есть *F»* интерпретируется как нечеткое событие. Более конкретно, пусть *p(u)du* — вероятность того, что $X \in [u,\ u+du]$, где $X \triangleq X(N)$. Тогда

$$\text{prob}\ \{N\ \text{есть}\ F\} = \int\limits_U p(u)\,\mu_F(u)\,du$$

и, следовательно,

$$\pi_{\int\limits_U p(u)\mu_F(u)du} = \lambda.$$

Это уравнение дает основание для следующей формулировки правила для вероятностных оценок.

Если

$$N\ \text{есть}\ F \rightarrow \pi_X = F,$$

то

$$N\ \text{есть}\ F\ \text{есть}\ \lambda \rightarrow \pi_{\int\limits_U p(u)\mu_F(u)du} = \lambda$$

или, более явно

$$\pi(p(\cdot)) = \mu_\lambda\left(\int\limits_U p(u)\,\mu_F(u)\,du\right),$$

где $\pi(p(\cdot))$ — возможность плотности распределения вероятности $p(\cdot)$.

Правила для оценок возможности. Будем рассматривать выражения вида «$q \triangleq N$ есть *F* есть *w»,* где *w* — лингвистическое значение возможности типа «очень возможно», «почти невозможно» и т. д., где каждая величина представляет нечеткое подмножество единичного интервала. По аналогии с интерпретацией высказываний с вероятностными оценками это может быть интерпретировано, как

$$N\ \text{есть}\ F\ \text{есть}\ w \leftrightarrow \text{poss}\ \{X\ \text{есть}\ F\ \text{есть}\ w\},$$

откуда следует

$$\pi_{\text{poss}\,(N\ \text{есть}\ F)} = w.$$

Теперь предположим, что мы хотим найти нечеткое множество G такое, что *«N* есть *F* есть *w* ↔ *N* есть *G)»*. Тогда из определения меры возможности имеем

$$\text{poss}\,\{N\ \text{есть}\ F \mid N\ \text{есть}\ G\} = \sup_u (\mu_F(u) \wedge \mu_G(u))$$

и, следовательно,

$$N\ \text{есть}\ F\ \text{есть}\ w \to \pi[\mu_G(\cdot)] = \mu_w\left[\sup_u (\mu_F(u) \wedge \mu_G(u))\right],$$

где μ_w — функция принадлежности *w*. Заметим, что это — аналог трансляционного правила для высказываний с вероятностными оценками.

9.3.2. Правила модификации.

Если P и Q два высказывания *с* распределениями возможностей π_P и π_Q, тогда P и Q называются семантически эквивалентными, что обозначается $P \Leftrightarrow Q$, тогда и только тогда, когда $\pi_P = \pi_Q$. Говорят, что P семантически влечет Q, что обозначается $P \Rightarrow Q$, тогда и только тогда, когда

$$\pi_P \subseteq \pi_Q.$$

Сформулируем общее правило модификации, обобщающее правило модификации для простых высказываний и применимое к высказываниям, полученным с помощью правил типа 1—4.

Общее правило модификации: если m — модификатор и P — высказывание, то mP семантически эквивалентно высказыванию, которое получается в результате применения m к распределению возможностей, индуцированному P.

Для простых высказываний вида

$$m(X\ \text{есть}\ A) \Leftrightarrow X\ \text{есть}\ mA$$

правило совпадает с трансляционным правилом типа 2. Например, для m= «не», $\mu_{mA} = 1 - \mu_A$.

Для сложных высказывании правило записывается:

$$m(X\ \text{есть}\ A\ \text{и}\ Y\ \text{есть}\ B) \Leftrightarrow (X, Y)\ \text{есть}\ m(A \times B).$$

Например, «очень (X есть *A* и *Y* есть B)» $\Leftrightarrow$ «X есть очень *A* и *Y* есть очень B».

Для высказываний с кванторами правило запишется

$$m(FX\ \text{есть}\ A) \Leftrightarrow (mF)\,X\ \text{есть}\ A.$$

Например, можно положить М=«не». Эта формула обобщает стандартное правило отрицания в исчислении предикатов первого порядка $\neg(\forall x)\,P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x).$

Для высказываний с оценками, например, с оценкой истинности, правило запишется

$$m(X\ \text{есть}\ A\ \text{есть}\ \tau) \Leftrightarrow X\ \text{есть}\ A\ \text{есть}\ m\tau.$$

Например, для m= «не», τ= «истина» получим

не *(X* есть *A* есть истинно) $\Leftrightarrow$ *X* есть *A* не есть истинно,

9.3.3. Правила вывода.

Основными правилами вывода в нечеткой логике являются **принцип проекции, принцип сужения (конъюнкции) и принцип следования.** Объединение двух первых принципов ведет к обобщенному modus ponens.

Принцип проекции. Пусть p — нечеткое высказывание, которое транслируется враспределение возможностей

$$p \to \pi_{(X_1, \ldots, X_n)}.$$

Пусть $X_{(S)}$ — переменная, составленная пз составляющих переменной $X \triangleq (X_1, \ldots, X_n)$ с помощью подпоследовательности индексов $S \triangleq (i_1, \ldots, i_k)$ последовательности $(1, \ldots, n)$, $X_{(S)} = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$. Пусть $\pi_{X_{(S)}}$ —частичное распределение возможности $X_{(S)}$, т. е. $\pi_{X_{(S)}} = \text{proj}_{U_{(S)}}F$, где $U_{(S)} = U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_k}$, а U_i, $i = 1, .., n$ — область рассуждения, связанная с X_i.

Проекция F на $U_{(S)}$ определяется функцией распределения возможностей:

$$\pi_{X(S)}(U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}) = \sup_{U_{j_1} \ldots U_{j_m}} \mu_F(U_1, \ldots, U_n),$$

где $S' \triangleq (j_1, \ldots, j_m)$ — последовательность индексов, дополнительная к S и μ_F — функция принадлежности F.

Пусть q — обратная трансляция уравнения присваивания возможности:

$$\pi_{X_{(S)}} = \text{proj}_{U_{(S)}}F.$$

Тогда принцип проекции утверждает, что q может быть выведено из p.

Для n = 2 мы получаем

$$p \to \pi_{(X,Y)} = G \times H$$

и из p мы можем вывести q и r, где

$$q \leftarrow \pi_X = \mathrm{proj}_U F = G, \quad r \leftarrow \pi_Y = H.$$

Например, если «$p \triangleq$ Ваня высокий и толстый», тогда из p можно вывести «$q \triangleq$ Ваня есть высокий» и «$r \triangleq$ Ваня есть толстый».

Принцип сужения (конъюнкции). Пусть p — нечеткое высказывание, трансляция которого выражается:

$$p \rightarrow \pi_{(X_1,\ldots,X_n)} = F, \quad F \subset U_1 \times \ldots \times U_n.$$

Тогда из p мы можем вывести r, где r — обратная трансляция сужения: $\pi_{(X_1,\ldots,X_n)}$, т. е.

$$r \leftarrow \pi_{(X_1,\ldots,X_n)} \left[\pi X_{(S)} = G\right] = F \cap \overline{G},$$

где $X_{(B)}$ — подпеременпая X, $\overline{G}$ — цилиндрическое расширение G, $G \subset U$ и

$$\pi_{(X_1,\ldots,X_n)} \left[\pi X_{(S)} = G\right]$$

обозначает n-мерное распределение возможностей, получающееся сужением $X_{(S)}$ на G.

Принцип сужения является частным случаем более общего принципа конъюнкции.

Предположим, что

$$p \rightarrow \pi^p_{(Y_1,\ldots,Y_k,X_{k+1},\ldots,X_n)} = F, \qquad q \rightarrow \pi^q_{(Y_1,\ldots,Y_k,Z_{k+1},\ldots,Z_m)} = G,$$

где $Y_1, \ldots, Y_k$ — переменные, входящие в π^p и π^q, U_i, V_j и W_r — области рассуждения, связанные с X_i, Y_j и Z_r. Пусть S — наименьшее декартово произведение U_i, V_j и W_r, содержащее два декартовых произведения $V_1 \times \ldots \times V_k \times U_{k+1} \times \ldots \times U_n$ и $V_1 \times \ldots \times V_k \times W_{k+1} \times \ldots \times W_m$,

и пусть F и G — цилиндрические расширения F и G в S. Тогда из p и q мы можем вывести r, или, в схематической форме

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow \pi^p_{(Y,X)} = F \\ q \rightarrow \pi^q_{(Y,Z)} = G \end{array}}{r \leftarrow \pi_{(X,Y,Z)} = \overline{F} \cap \overline{G}}$$

и

$$Y \triangleq (Y_1, \ldots, Y_k), \quad X \triangleq (X_{k+1}, \ldots, X_n), \quad Z \triangleq (Z_{k+1}, \ldots, Z_m).$$

Принцип следования. Говоря нестрого, принцип следования утверждает, что для любого нечеткого высказывания p мы можем вывести нечеткое высказывание q, если распределение возможностей, индуцированное p, содержится в распределении возможностей, индуцированном q. Это можно записать схематически

$$\frac{p \rightarrow \pi_{(X_1,\ldots,X_n)} = F}{q \leftarrow \pi_{(X_1,\ldots,X_n)} = G \supset F}.$$

Например, из «$p \triangleq X$ очень большой» мы можем вывести «$q \triangleq X$ большой».

9.3.4. Композиционное правило вывода.

Сформулированные выше принципы могут использоваться в различных комбинациях. Наиболее эффективной комбинацией является последовательное применение принципа сужения (конъюнкции) и принципа проекции. Это правило называется композиционным правилом вывода. Композиционное правило вывода включает, как частный случай, обобщение правила modus ponens. Удобно представлять композиционное правило вывода в следующей форме

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow \pi_{(X,Y)} = F \\ q \rightarrow \pi_{(Y,Z)} = G \end{array}}{r \leftarrow \pi_{(X,Z)} = F \circ G},$$

где X, Y и Z принимают значения в U, V и W соответственно, F — нечеткое подмножество $U \times V$, G — нечеткое подмножество $V \times W$ и $F \circ G$ — композиция F и G, определяемая формулой:

$$\mu_{F \circ G}(u, w) = \sup_v (\mu_F(u, v) \wedge \mu_G(v, w)),$$

где $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$ и μ_F и μ_G — функции принадлежности F и G соответственно.

Важный частный случай композиционного правила вывода получается, когда p и q имеют вид «$p \triangleq X$ есть F», «$q \triangleq$ если X есть G, то V есть Н» . Для этого случая из композиционного правила вывода и правила типа 2(в$_1$) получаем композиционный modus ponens

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow \pi_X = F \\ q \rightarrow \pi_{(X,Y)} = \overline{G}' \oplus \overline{H} \end{array}}{r \leftarrow F \circ (\overline{G'} \oplus \overline{H})},$$

который может рассматриваться как классический modus ponens, когда F, G и Н являются четкими и $F = G$.

Рассмотрим простой пример использования композиционного правила вывода. Пусть «$p \triangleq X$ маленький»,«$q \triangleq X$ и Y приблизительно равны», где «маленький» и «приблизительно равны» определяются функциями принадлежности: «маленький» = 1|1+0,6|2 + 0,2|3;

«приблизительно равны» = 1|[(1, 1) + (2, 2) + (3, 3) + (4, 4)] + 0,5|[(1, 2)+ +(2, 1) + (2, 3) + (3, 2)+, + (3, 4)+ (4, 3)].
В терминах этих множеств трансляции *p* и *q* выражаются в виде

$$p \to \pi_X = \text{маленький},$$
$$q \to \pi_{(X,\,Y)} = \text{приблизительно равны},$$

и тогда из *p* и *q* можно вывести *r*, где

$$r \leftarrow \pi_X \circ \pi_{(X,\,Y)} = \text{маленький} \circ \text{приблизительно равны}.$$

Композиция «маленький» и «приблизительно равны» вычисляется с помощью вычисления maxmin — композиции матриц отношений этих нечетких подмножеств. Получаем

$$[1\ \ 0{,}6\ \ 0{,}2\ \ 0] \circ \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} = [1\ \ 0{,}6\ \ 0{,}5\ \ 0{,}2],$$

т. е.

$$\pi_Y = \pi_X \circ \pi_{(X,\,Y)} = 1|1 + 0{,}6|2 + 0{,}5|3 + 0{,}2|4$$

и после обратной трансляции получаем лингвистическую аппроксимацию $r \triangleq Y$ «более или менее маленький»$\leftarrow \pi_Y$ = 1|1 + 0,6|2 + +0,5|3 + 0,2|4.
Вышеприведенный пример иллюстрирует последовательность вычислений, необходимых при использовании композиционного правила вывода для конечных *X* и *Y*.

9.3.5. Вывод на унинереальной шкале.

Один из вариантов нечеткого вывода с использованием правила типа modus ponens приведен ниже. Рассматриваются правила вида

$$\frac{\text{н}Q;\ Q|\Rightarrow G}{\text{d}G},$$

где ʞ — степень уверенности в факте *Q*, d — степень уверенности в факте *G*.
Правило вывода используется в сочетании с преобразованием исходной лингвистической информации на так называемую универсальную шкалу. Преобразование является монотонным отображением пространства рассуждений *U* в отрезок [0, 1]:

$$f\colon\ U \to [0,\,1],$$

которое индуцирует преобразование соответствующих лингвистических понятий, заданных функциями принадлежности $\mu_A(u)$, $u \in$ U.

Таким образом, универсальная шкала задает модель вывода, инвариантную для ряда однородных семантических ситуаций.
Похожая конструкция может быть использована в моделях рассуждения с нечеткой информацией, использующих отношение моделирования.
В этих моделях с помощью нечеткого преобразования *R: W →M,* где *W* и *M* — пространства состояний внешней среды и модели соответственно, осуществляется отображение в нечеткую универсальную лингвистическую шкалу. При таком преобразовании можно говорить, что пространство *М,* которое, как правило, является терм-множеством какой-либо лингвистической переменной, также будет являться семантически инвариантным пространством для ряда однородных ситуаций, а алгебра расширенных операций над функциями принадлежности лингвистических переменных на *W* изоморфна алгебре расширенных функций на *М,* индуцированной преобразованием *R*. Обычно такой алгебры бывает достаточно для задания некоторой псевдофизической логики рассуждений.

9.4. Анализ методов приближенных рассуждений

9.4.1. Методы рассуждений на основе modus ponens.

В раде работ был предложен метод рассуждений, в котором посылки являются нечеткими понятиями. Общую схему этого так называемого условного нечеткого вывода запишем в следующем виде:

Антецедент: если *x* есть *A*, то *y* есть *B*
Сукцедент: *x* есть *A′*
———————————————————,
Следствие: *y* есть *B′*

где *x* и *y*— имена объектов, *A, A', B, B'* — обозначения нечетких подмножеств областей рассуждения *U, U, V* и *V* соответственно.
Пример такого типа вывода следующий:

Антецедент: если слива красная, то слива спелая
Сукцедент: эта слива очень красная

Следствие: эта слива очень спелая

Эта форма вывода может быть рассмотрена как обобщенный modus ponens, который сводится к modus ponens при *A'* = *A* и *B'* = *B.*

Возможна также следующая форма вывода, содержащая нечеткое условное высказывание

Антецедент: если x есть A, то y есть B

Сукцедент: y есть B'

Следствие: x есть A'

Этот вывод может быть рассмотрен, как обобщенный modus tollens, который сводится к обычному modus tollens при «B' = не B» и «A' = не A». Антецедент в виде «если x есть A, то y есть B» в выводе может представлять некоторое соответствие между A и B. С приведенной точки зрения предложены следующие методы для представления этого условного предложения.

Пусть A и B — нечеткие множества в U и V соответственно, представленные

$$A=\int_U \mu_A(u)\,|\,u,\quad B=\int_V \mu_B(v)\,|\,v$$

и пусть $\times$, $\cup$, $\cap$, $\neg$ и $\oplus$ — декартово произведение, объединение, пересечение, дополнение и ограниченная сумма для нечетких множеств соответственно. Перечислим нечеткие отношения на $U\times V$, которые могут быть получены из нечеткого условного высказывания: «Если x есть A, то y есть B». Были предложены нечеткие отношения R_m, R_a, R_s, R_g, R_{sg}, R_{gg}, R_g и R_{ss}. Соответствующие выражения имеют вид

$$R_m=(A\times B)\cup(\neg A\times V)=\int_{U\times V}(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee(1-\mu_A(u))\,|\,(u,v),$$

$$R_a=(\neg A\times V)\oplus(U\times B)=\int_{U\times V}\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)\,|\,(u,v),$$

$$R_s=A\times V\underset{s}{\Rightarrow}U\times B=\int_{U\times V}[\mu_A(u)\underset{s}{\rightarrow}\mu_B(v)]\,|\,(u,v),$$

где

$$\mu_A(u)\underset{s}{\rightarrow}\mu_B(v)=\begin{cases}1 & \text{при}\ \mu_A(u)\leqslant\mu_B(v),\\ 0 & \text{при}\ \mu_A(u)>\mu_B(v),\end{cases}$$

$$R_g=A\times V\underset{g}{\Rightarrow}U\times B=\int_{U\times V}[\mu_A(u)\underset{g}{\rightarrow}\mu_B(v)]\,|\,(u,v),$$

где

$$\mu_A(u)\underset{g}{\rightarrow}\mu_B(v)=\begin{cases}1 & \text{при}\ \mu_A(u)\leqslant\mu_B(v),\\ \mu_B(v) & \text{при}\ \mu_A(u)>\mu_B(v).\end{cases}$$

$$R_{sg}=(A\times V\underset{s}{\Rightarrow}U\times B)\cup(\neg A\times V\underset{g}{\Rightarrow}U\times\neg B)=$$
$$=\int_{U\times V}[\mu_A(u)\underset{s}{\Rightarrow}\mu_B(v)]\wedge[1-\mu_A(u)\underset{g}{\rightarrow}1-\mu_B(v)]\,|\,(u,v),$$

$$R_{gg}=(A\times V\underset{g}{\Rightarrow}U\times B)\cap(\neg A\times V\underset{g}{\Rightarrow}U\times\neg B)=$$
$$=\int_{U\times V}[\mu_A(u)\underset{g}{\rightarrow}\mu_B(v)]\cap[1-\mu_A(u)\underset{g}{\Rightarrow}1-\mu_B(v)]\,|\,(u,v),$$

$$R_{gs}=(A\times V\underset{g}{\Rightarrow}U\times B)\cap(\neg A\times V\underset{s}{\Rightarrow}U\times\neg B)=$$
$$=\int_{U\times V}[\mu_A(u)\underset{g}{\rightarrow}\mu_B(v)]\wedge[1-\mu_A(u)\underset{s}{\rightarrow}1-\mu_B(v)]\,|\,(u,v),$$

$$R_{ss}=(A\times V\underset{s}{\Rightarrow}U\times B)\cap(\neg A\times V\underset{s}{\Rightarrow}U\times\neg B)=$$
$$=\int_{U\times V}[\mu_A(u)\underset{s}{\rightarrow}\mu_B(v)]\wedge[1-\mu_A(u)\underset{s}{\rightarrow}1-\mu_B(v)]\,|\,(u,v).$$

Введено ряд новых отношений для высказывания «Если x ость A, то y есть B» с помощью использования правил импликации для многозначных систем

$$R_b=(\neg A\times V)\cup(U\times B)=\int_{U\times V}(1-\mu_A(u))\vee\mu_B(v)\,|\,(u,v),$$

$$R_\triangle=A\times V\underset{\triangle}{\Rightarrow}U\times B=\int_{U\times V}[\mu_A(u)\underset{\triangle}{\rightarrow}\mu_B(v)]\,|\,(u,v),$$

где

$$\mu_A(u)\underset{\triangle}{\rightarrow}\mu_B(v)=\begin{cases}1, & \mu_A(u)\leqslant\mu_B(v);\\ \dfrac{\mu_B(v)}{\mu_A(u)}, & \mu_A(u)>\mu_B(v)\end{cases}$$

$$R_\blacktriangle=A\times V\underset{\blacktriangle}{\Rightarrow}U\times B=\int_{U\times V}[\mu_A(u)\underset{\blacktriangle}{\rightarrow}\mu_B(v)]\,|\,(u,v),$$

где

$$\mu_A(u) \underset{\blacktriangle}{\rightarrow} \mu_B(v) = [\mu_A(u) \underset{\triangle}{\rightarrow} \mu_B(v)] \wedge [1 - \mu_B(v) \underset{\triangle}{\rightarrow} 1 - \mu_A(w)] =$$

$$= \begin{cases} 1 \wedge \dfrac{\mu_B(v)}{\mu_A(u)} \wedge \dfrac{1-\mu_A(u)}{1-\mu_B(v)}, & \mu_A(u) > 0, \quad 1-\mu_B > 0, \\ 1, & \mu_A(u) = 0 \ \text{ или } \ 1 - \mu_B(v) = 0. \end{cases}$$

$$R_* = A \times V \underset{*}{\Rightarrow} U \times B = \int_{U \times B} [\mu_A(u) \underset{*}{\rightarrow} \mu_B(v)] \,|\, (u, v),$$

где

$$\mu_A(u) \underset{*}{\rightarrow} \mu_B(v) = 1 - \mu_A(u) + \mu_A(u)\mu_B(v).$$

$$R_\# = A \times V \underset{\#}{\Rightarrow} U \times B = \int_{U \times V} [\mu_A(u) \underset{\#}{\rightarrow} \mu_B(v)] \,|\, (u, v),$$

где

$$\mu_A(u) \underset{\#}{\rightarrow} \mu_B(v) =$$
$$= (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u) \wedge 1 - \mu_B(v)) \vee (\mu_B(v) \wedge 1 - \mu_A(u)) =$$
$$= (1 - \mu_A(u) \vee \mu_B(v)) \vee (\mu_A(u) \vee 1 - \mu_A(u)) \wedge (\mu_B(v) \vee 1 - \mu_B(v)).$$

$$R_\square = A \times V \underset{\square}{\Rightarrow} U \times V = \int_{U \times V} [\mu_A(u) \underset{\square}{\rightarrow} \mu_B(v)] \,|\, (u, v),$$

где

$$\mu_A(u) \underset{\square}{\rightarrow} \mu_B(v) = \begin{cases} 1, & \mu_A(u) < 1 \ \text{ или } \ \mu_B(v) = 1; \\ 0, & \mu_B(u) < 1, \qquad \mu_B(v) = 1. \end{cases}$$

В обобщенном modus ponens следствие B' в следствии может быть выведено из антецедента и сукцедента, используя max min композицию (°) нечеткого множества A' и нечеткого отношения, полученного в одном из правил. Например,

$$B'_m = A \circ R_m = A' \circ [(A \times B) \cup (\neg A \times V)].$$

Аналогично

$$B'_a = A' \circ R_a = [(\neg A \times V) \oplus (U \times B)],$$
$$B'_c = A' \circ R_c = A' \circ (A \times B),$$
$$B'_s = A' \circ R_s = A' \circ \left[A \times V \underset{s}{\Rightarrow} U \times B\right],$$

. . . .

Точно так же в обобщенном правиле modus tollens следствие A' получается в результате max min композиции отношения и нечеткого множества B':

$$A'_m = R_m \circ B' = [(A \times B) \cup (\neg A \times U)] \circ B',$$
$$A'_a = R_a \circ B' = [(\neg A \times V) \oplus (U \times B)] \circ B',$$

. . . .

В ряде работ сравниваются методы нечетких рассуждений, использующие перечисленные типы нечетких отношений в правилах обобщенного modus ponens и modus tollens. При этом рассматриваются следствия, получаемые в расширенном modus ponens в результате применения к нечеткому множеству A нечеткого отношения:

$$A' = \int_U \mu_A(u) \,|\, u,$$

$$A' = \text{очень } A = A^2 = \int_U \mu_A(u)^2 \,|\, u,$$

$$A' = \text{более или менее } A = A^{0,5} = \int_U \mu_A(u)^{0,5} \,|\, u,$$

$$A' = \text{не } A = \neg A = \int_U 1 - \mu_A(u) \,|\, u.$$

Для расширенного modus tollens вычисляются значения следствий A'_m, A'_r, … для композиции нечеткого множества B' и отношения для следующих значений B':

$$B' = \text{не } B = \neg B = \int_V 1 - \mu_B(v) \,|\, v,$$

$$B' = \text{не очень } B = \neg B^2 = \int_V 1 - \mu_B(v)^2 \,|\, v,$$

$$B' = \text{не более или менее } B = \neg B^{0,5} = \int_V 1 - \mu_B(v)^{0,5} \,|\, v,$$

$$B' = B = \int_V \mu_B(v) \,|\, v.$$

Следствия, полученные всеми методами нечеткого рассуждения, сведены в табл. 2 (обобщенный modus ponens) и табл. 3 (обобщенный modus tollens), где вместо $\mu_B(v)$ и $\mu_A(u)$ пишутся μ_B и μ_A

Таблица 2

	A	очень A	более или менее A	не A
R_m	$0{,}5 \vee \mu_B$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee \mu_B$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \vee \mu_B$	1
R_a	$\frac{1+\mu_B}{2}$	$\frac{3+2\mu_B-\sqrt{5+4\mu_B}}{2}$	$\frac{\sqrt{5+4\mu_B}-1}{2}$	1
R_s	μ_B	μ_B^2	$\sqrt{\mu_B}$	1
R_c	μ_B	μ_B	μ_B	$0{,}5 \wedge \mu_B$
R_g	μ_B	μ_B	$\sqrt{\mu_B}$	1
R_{sg}	μ_B	μ_B^2	$\sqrt{\mu_B}$	$1-\mu_B$
R_{gg}	μ_B	μ_B	$\sqrt{\mu_B}$	$1-\mu_B$
R_{gs}	μ_B	μ_B	$\sqrt{\mu_B}$	$1-\mu_B$
R_{ss}	μ_B	μ_B^2	$\sqrt{\mu_B}$	$1-\mu_B$
R_b	$0{,}5 \vee \mu_B$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee \mu_B$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \vee \mu_B$	1
$R_\triangle$	$\sqrt{\mu_B}$	$\mu_B^{2/3}$	$\mu_B^{1/3}$	1
$R_\blacktriangle$	$\sqrt{\mu_B} \wedge \frac{1}{2-\mu_B}$	$\mu_B^{2/3}\left[\frac{\sqrt{5-4\mu_B}-1}{2(1-\mu_B)}\right]^2$	$\mu_B^{1/3} \wedge \frac{\sqrt{\mu_B^2-2\mu_B+5}+\mu_B-1}{2}$	1
R_*	$\frac{1}{2-\mu_B}$	$\left[\frac{\mu_B-1+\sqrt{(1-\mu_B)^2+4}}{2}\right]^2$	$\frac{\sqrt{5-4\mu_B}-1}{2(1-\mu_B)}$	1
$R_\#$	$0{,}5 \vee \mu_B$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee \mu_B$	$\mu_B \vee \left[(1-\mu_B) \wedge \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$	$\mu_B \vee (1-\mu)$
$R_\Box$	1	1	1	1

Используя табл. 2 и 3, мы рассмотрим простой пример нечеткого рассуждения.

Таблица 3

	не B	не очень B	не (более или менее B)	B
R_m	$0{,}5 \vee (1-\mu_A)$	$(1-\mu_A) \vee \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \wedge \mu_A\right)$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee (1-\mu_A)$	$\mu_A \vee (1-\mu_A)$
R_a	$1-\frac{\mu_A}{2}$	$\frac{1-2\mu_A+\sqrt{1+4\mu_A}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{1+4\mu_A}}{2}$	1
R_c	$0{,}5 \wedge \mu_A$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \wedge \mu_A$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \wedge \mu_A$	μ_A
R_s	$1-\mu_A$	$1-\mu_A^2$	$1-\sqrt{\mu_A}$	1
R_g	$0{,}5 \vee (1-\mu_A)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \vee (1-\mu_A^2)$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee (1-\sqrt{\mu_A})$	1
R_{sg}	$1-\mu_A$	$1-\mu_A^2$	$1-\sqrt{\mu_A}$	$0{,}5 \vee \mu_A$
R_{gg}	$0{,}5 \vee (1-\mu_A)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \vee (1-\mu_A^2)$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee (1-\sqrt{\mu_A})$	$0{,}5 \vee \mu_A$
R_{gs}	$0{,}5 \vee (1-\mu_A)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \vee (1-\mu_A^2)$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee (1-\sqrt{\mu_A})$	μ_A
R_{ss}	$1-\mu_A$	$1-\mu_A^2$	$1-\sqrt{\mu_A}$	μ_A
R_b	$0{,}5 \vee (1-\mu_A)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \vee (1-\mu_A)$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee (1-\mu_A)$	1
R_s	$\frac{1}{1+\mu_A}$	$\frac{\sqrt{1+4\mu_A^2}-1}{2\mu_A^2}$	$\frac{2+\mu_A-\sqrt{\mu_A^2+4\mu_A}}{2}$	1
R_*	$\frac{1}{1+\mu_A}$	$1-\frac{\mu_A(\mu_A+2)}{2}+\frac{\sqrt{\mu_A^2+4\mu_A'}}{2}$	$\frac{2\mu_A+1}{2\mu_A}-\frac{\sqrt{1+4\mu_A^2}}{2\mu_A}$	1
$R_{\ast}$	$0{,}5 \vee (1-\mu_A)$	$(1-\mu_A) \vee \left(\mu_A \vee \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee (1-\mu_A)$	$\mu_A \vee (1-\mu_A)$
$R_\Box$	$\begin{cases}1, & \mu_A<1\\0, & \mu_A=1\end{cases}$	$\begin{cases}1, & \mu_A<1\\0, & \mu_A=1\end{cases}$	$\begin{cases}1, & \mu_A<1\\0, & \mu_A=1\end{cases}$	1

Отношения между A' в сукцеденте и B' в следствии в обобщенном modus ponens, совпадающие с нашей интуицией, представлены в виде нечеткого условного вывода в табл. 4. Аналогично, отношения между B' в сукцеденте и A' в следствии в обобщенном modus tollens, которым они должны удовлетворять, представлены в табл. 5.
Отношение I в табл. 4 соответствует modus ponens. Отношение II-2 имеет следствие, несколько отличное от отношения II—1, но в случае отсутствия сильной причинной связи между «*x* есть А» и «*y* есть В» в высказывании «Если *x* есть *A,* то *y* есть *B»* выполнение отношения II -2 допускается. В отношении IV-1 содержится утверждение, что «Если *x* не есть *A,* то из антецедента нельзя получить никакой информации об *y».* Выполнение отношения IV-2 требует, чтобы нечеткое утверждение «Если *x* есть *A,* тогда *y* есть *B»* неявно подразумевало высказывание «Если *x* есть *A,* тогда *y* есть *B,* иначе *y* не есть В», и мы легко можем представить себе реальную ситуацию, когда это отношение выполняется. Отношение V соответствует modus tollens и отношение VIII аналогично отношению IV. В табл. 6 удовлетворение (0) или неудовлетворение (×) каждому критерию в табл. 4 и 5 для каждого метода проверялось с помощью использования значений следствия в табл. 2 и 3.

Таблица 4

Тип отношения	*x* есть *A'* (Сукс)	*y* есть *B'* (След.)
I (modus ponens)	*x* есть *A*	*y* есть *B*
II-1	*x* есть очень *A*	*y* есть очень *B*
II-2	*x* есть очень *A*	*y* есть *B*
III-1	*x* есть более или менее *A*	*y* есть более или менее *B*
III-2	*x* есть более или менее *A*	*y* есть *B*
IV-1	*x* есть не *A*	*y* неизвестен
IV-2	*x* есть не *A*	*y* есть не *B*

Таблица 6.5

Тип отношения	*y* есть *B'* (Сукс)	*x* есть *A* (След.)
V (modus tollens)	*y* есть не *B*	*x* есть не *A*
VI	*y* есть не (очень *B*)	*x* есть не (очень *A*)
VII	*y* есть не (более или менее *B*)	*x* есть не (более или менее *A*)
VIII-1	*y* есть *B*	*x* неизвестен
VIII-2	*y* есть *B*	*x* есть *A*

На основании табл. 6 делается вывод, что методы R_m и R_a не подходят для нечеткого рассуждения ни в случае обобщенного modus porieiis, ни

в случае обобщенного modus tollens, так как они не удовлетворяют критериям, которые выглядят вполне разумными. R_c является неплохим методом, а R_g, R_S и R_{Sg}—вполне удовлетворительными. Новые методы R_b, R_Δ, ……, $R_\square$, основанные на использовании импликаций многозначных логик, являются не очень хорошими.

Таблица 6

Тип отношения	Сукс	След.	R_m	R_a	R_c	R_s	R_g	R_{sg}	R_{gg}	R_{gs}	R_{ss}	R_b	R_Δ	$R_\blacktriangle$	R_*	$R_\#$	$R_\square$
I modus ponens	*A*	*B*	×	×	0	0	0	0	0	0	0	×	×	×	×	×	×
II-1	очень *A*	очень *B*	×	×	×	0	×	0	×	×	0	×	×	×	×	×	×
II-2	очень *A*	*B*	×	×	0	×	0	×	0	0	×	×	×	×	×	×	×
III-1	более или менее *A*	более или менее *B*	×	×	×	0	0	0	0	0	0	×	×	×	×	×	×
III-2	более или менее *A*	*B*	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
IV-1	не *A*	неизвестно	0	0	×	0	0	×	×	×	×	0	0	0	0	×	0
IV-2	не *A*	не *B*	×	×	×	×	×	0	0	0	0	×	×	×	×	×	×
V modus tollens	не *B*	не *A*	×	×	×	0	×	0	×	×	0	×	×	×	×	×	×
VI	не очень *B*	не очень *A*	×	×	×	0	×	0	×	0	×	×	×	×	×	×	×
VII	не более или менее *B*	не более или менее *A*	×	×	×	0	×	0	×	0	×	×	×	×	×	×	×
VIII-1	*B*	неизвестно	×	0	×	0	0	×	×	×	×	0	0	0	0	×	0
VIII-2	*B*	*A*	×	×	0	×	×	×	×	0	0	×	×	×	×	×	×

9.4.2. Свойства нечеткой импликации.

В ряде работ рассматривается аксиоматический подход к импликации, которая определяется как нечеткое бинарное отношение на истинностном пространстве и является нечетким обобщением таблицы импликации для двухзначной логики. Вводятся следующие 4 аксиомы, постулирующие свойства импликации, отвечающие интуитивному представлению о природе нечеткого вывода.

Импликацией называется бинарное отношение на истинностном пространстве $I \in \mathcal{F}([0, 1] \times [0, 1])$, определяющее свойство импликации $P \to Q$ между нечеткими высказываниями *P* и *Q*.

Аксиома 1. 1) Если значение функции истинности *P* равно τ $\tau \in \mathcal{F}[0, 1]$, тогда истинностное значение вывода modus po-nens, $\sigma \in \mathcal{F}[0, 1]$, задается σ = τ ° *I*.

2) Если значение функции истинности *Q* равно τ $\tau \in \mathcal{F}([0, 1])$, тогда истинностное значение вывода modus tollens задается Ω = *I* ° τ , где ° обозначает maxmin композицию.

Аксиома 2. Истинность вывода должна быть не меньше истинности исходного утверждения, а именно

1) для вывода modus ponens σ = τ ° *I*,

$$\mu_\sigma(v) \geqslant \mu_\tau(v) \quad \forall v \in [0, 1];$$

2) для вывода modus tollens Ω = *I* ° τ

$$\mu_\Omega(v) \geqslant \mu_\tau(v) \quad \forall v \in [0, 1].$$

Назовем истинностной любую функцию истинности, монотонно возрастающую до единицы и ложностной — любую функцию, монотонно убывающей от единичного значения, причем при всех значениях принадлежности больших нуля монотонность строгая.

Аксиома 3. Если функция принадлежности $\mu_I(\eta, \lambda)$ определяет отношение импликации *I* , то:

1) для постоянного η *I* должно являться истинностной функцией на λ ∈ [0, η] и

2) для постоянного λ *I* должно являться ложностной функцией на η ∈ [λ, 1].

Аксиома 4. Отношение импликации должно быть симметрично относительно выводов modus ponens и modus tollens, т. е.

$$\mu_{\tilde{I}}(\eta, \lambda) \equiv \mu_I(1-\lambda, 1-\eta) \quad \forall \eta, \lambda.$$

Легко можно указать ряд классов импликаций, удовлетворяющих аксиомам 1—4: например, отношения импликации, основанные на правиле импликации Лукасевита, где

$$\mu_I(\eta, \lambda) = 1 \wedge (1 - \eta + \lambda).$$

В частности, класс $\Sigma_1 = \{R_k\}$, где

$$\mu_{R_k}(\eta, \lambda) = 1 \wedge \left[0 \vee \left\{1 - \frac{1}{k}(\eta - \lambda)\right\}\right],$$

k — любое действительное число большее 0 и класс $\Sigma_r = \{S_i\}$, где

$$\mu_{S_i}(\eta, \lambda) = 1 \wedge (1 - \eta + \lambda)^i,$$

где *i* — любое действительное число, большее 0.

Беря за основу отношение

$$\mu_I(\eta, \lambda) = 1 \wedge \frac{\lambda(1-\eta)}{\eta(1-\lambda)},$$

можно получить класс $\Sigma_3 = \{\mathcal{P}_i\}$, где

$$\mu_{P_i}(\eta, \lambda) = 1 \wedge \left[\frac{\lambda(1-\eta)}{\eta(1-\eta)}\right]^{i/j},$$

f — любое конечное неотрицательное действительное число. Эти или другие возможные классы импликации выбираются, исходя из характера решаемой задачи.

С помощью операторов импликации вводится новый класс композиции отношений типа

$$(R \nabla S)_{ik} = \frac{1}{N_j} \sum_j (R_{ij} \to S_{jk}),$$

где → — оператор нечеткой импликации.

9.4.3. Применение приближенных рассуждений в прикладных задачах.

Одной из основных областей применения теории приближенвых рассуждепий и композиционных правил вывода являются нечеткие лингвистические регуляторы. Проведено сравнение четырех типов импликации, используемых при управлении работой парового котла с помощью лингвистических правил, а именно

1) $\mu(u, v) = \min(\mu(u), \mu(v)) = \mu(u) \wedge \mu(v), \quad u \in U, \ v \in V;$
2) $\mu(u, v) = \min(\mu_A(u), \mu_B(v)) \vee \min((1 - \mu_A(u)), 1);$
3) $\mu(u, v) = \min(1, (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))), \quad u \in U, \ v \in V;$
4) $\mu(u, v) = \max((1 - \mu_A(u)), \mu_B(v)), \quad u \in U, \ v \in V.$

Импликация 1 удобна тем, что сохраняет ширину значений функций принадлежности правил и позволяет выделить каждое правило и процесс его изменения даже из информации в табличной форме. Среди недостатков этого метода вывода можно отметить коммутативность, отсутствие разницы между выражениями типа $(A \wedge B) \to C$ и $A \to (B \to C)$ и невозможность использовать связку ИЛИ вместо И для интерпретации связки ИНАЧЕ для получения протокола применения правил:

Правило 1, ИНАЧЕ Правило 2, ИНАЧЕ...

Другие типы импликаций лишены этого недостатка за счет того, что каждому правилу нельзя сопоставить его область влияния. Например, арифметические связки в операции 3 приводят к получению новых

значений функций принадлежности и требуют некоторой аппроксимации.
Импликация 4 лишена всех указанных недостатков и является наиболее «человеческой» по природе, так как если антецедент *A* дает следствие *B,* то антецедент *A',* близкий к *A,* дает следствие *B',* близкое к *B.* Это свойство особенно важно для систем с участием «человеческого фактора», где все ситуации не могут быть заданы с помощью набора правил.
И качество других приложений следует упомянуть использование композиционного modus ponens в качестве семантического правила вывода на всех уровнях архитектуры баз данных: на экстенсиональном, интенсиональном и на уровне баз знаний. Для случая экспертных консультационных систем особенно важно, чтобы модель базы знаний обладала возможностью оперировать при принятии решений с нечетко заданной обстановкой. Особенно важным для экспертных систем, основанных на теории возможности, является введение распределения возможности в интенсиональные базы данных, чтобы выводить нечеткие семантические категории как внешние представления базы данных, и в базы знаний, чтобы вычислять функции, связанные с метаправилами.

Для дедуктивных консультационных систем, использующих приближенные рассуждения и взаимодействующих с реляционными базами данных, введение распределения возможности является наиболее привлекательным в связи с необходимостью расширения семантической ограниченности реляционной модели данных и создания гибкой и универсальной структуры управления, включающей в себя эвристические стратегии поиска ответа на вопросы. Одной пз многообещающих попыток в этом направлении является использование распределения возможностей для описания значений атрибутов в реляционных базах данных.

10. Логические аспекты нечеткости

10.1.Об экспертных системах управления с использованием нечеткой логики

Цель дайной работы , предлженной К.Дж. Эрнстом, состоит в том, чтобы показать потенциальную полезность нечеткой логики для практической реализации семантики и прагматики экспертных систем.

Этот подход более подробно объясняется на примере критической деятельности консультативных систем, свойства которых должны удовлетворять специфическим требованиям пользователей. В этой работе в общих чертах описываются логические и методологические средства, которые для таких систем может предложить теория возможностей на семантическом и прагматическом уровнях.

10.1.1. Для чего нужны экспертные системы управления

Экспертные системы представляют собой интерактивные консультационные системы, которые предоставляют пользователям экспертные заключения по специальным областям знаний. Многочисленные и важные результаты в разработке таких систем свидетельствуют о зрелости исследований в теории формальных рассуждений и управлении базами данных. Для того чтобы ограничить поле исследования, дадим предварительное определение.
Определение. Под экспертными системами будем понимать информационные поисковые системы,, ограниченные конкретными областями с:
а) нетривиальной способностью понимать сведения;
б) способностью определять правдоподобность ответов, которые даются пользователям;
в) способностью давать объяснение этим ответам.

Два последних свойства характеризуют надежность системы с точки зрения пользователей и предполагают проведение анализа на достоверность с помощью приближенных рассуждений.

Ключевая проблема разработки консультативных экспертных систем состоит в определении способов представления и использования, которыми обладает эксперт в области своей компетентности. Проблема осложняется еще и тем, что при достижении полезных выводов во многих важных областях эксперты опираются на неточные или неопределенные сведения. Так, например, происходит при принятии решений в организационных системах.
Для управления в организационных системах в качестве инструмента подготовки решений разработано очень немного экспертных систем, хотя их потенциальная полезность в этой области огромна. **Основная**

трудность, с которой сталкивались в таких прикладных задачах, состояла в необходимости <u>построения баз знаний</u>, дающих представление о процессах принятия решений в рассматриваемой области: в экспертных системах такие <u>знания моделировались с помощью наборов правил вывода</u>. Модельная версия базы знаний получалась переформулировкой простого описания правил принятия решений, которое давали эксперты. Задача обработки экспертных протоколов занимает особенно много времени, и, более того, без знания административных основ производственной деятельности и системного анализа ученый не может добиться ее эффективного решения. И если разработчик хочет построить экспертную систему, удовлетворяющую требованиям заказчика, то это желание — первое условие, которое должно быть выполнено.

Требования к экспертным системам как опорным системам принятия решений могут быть выражены в двух ключевых словах: **координация и контроль**. С проблемами координации исследователи сталкиваются каждый раз, когда несколько исследоватей должны распределить ресурсы или работы, ориентированные на достижение одной и той же цели. Сложность структуры принятия решений связана с двумя факторами:

— размером базы данных, который в общем случае вызывает необходимость в разработке более или менее сложной системы управления данными;

— частотой взаимодействия между исследователями, обусловленной тем, что у них нет полного представления о глобальной проблеме и процессах принятия решений, в которые они включены. С этой точки зрения база знаний экспертной системы играет роль координационного устройства, выражающего интегральные ограничения, накладываемые на процесс принятия решений.

Однако одной сложности недостаточно для того, чтобы оправдать использование экспертной системы: она должна сочетаться с ограничениями на задержки. В этом случае для того, чтобы изучить пространство возможных действий, согласованных с текущим состоянием базы данных и ограничениями на решение в целом, выраженными в базе данных, принимающий решение нуждается в интерактивном доступе к процессу управления. Когда для разрешения специального класса проблем управления исследователь сталкивается с ограничениями, обусловленными сложностью и задержками, использование экспертной системы в качестве консультанта по управлению может значительно увеличить степень автономности решения и уровень компетентности принимающих решения.

10.1.2. Архитектура экспертных систем управления

Экспертная система, отвечающая потребностям заказчика, должна характеризоваться двумя основными чертами: тщательно разработанной системой управления базой данных (СУБД) и базой сведений об экспертных моделях принятия решений. Разработка приемлемых для заказчиков экспертных систем должна охватывать четыре области исследования:

— реляционные СУБД для определения возможностей вывода моделей реляционных данных;

— приближенное рассуждение для управления нечеткой средой принятия решений исследователями с помощью операционных моделей;

— дедуктивные реляционные системы баз данных для описания правил определения данных с тем же самым формальным аппаратом вывода, который применяется в правилах принятия решений, содержащихся в базе данных операционной системы;

— принятие решений в организационных системах для преодоления трудностей в процессах координации и контроля, особенно на верхних уровнях иерархии.

Рассмотрим пример, в котором задача консультативной системы состоит в выработке рекомендаций относительно операционного контроля медперсонала в большом госпитале. Различаются три уровня в построении экспертной системы:

1) экстенсиональная база данных: основание отношений (синтаксические объекты), интеграционные ограничения (функциональные зависимости);

2) интенсиональная база данных: концептуальные и внешние схемы, правила интерпретации, семантические правила вывода (семантические постулаты);

3) база операционной системы: метаправила (выработки решений), используемые для управления системой базой дедуктивных данных.

Определим более точно семиотику языка представления, связанную с каждым из этих уровней, т. е. теоретические свойства, которым должен удовлетворять этот язык на синтаксическом, семантическом и прагматическом уровнях.

10.1.3. Синтаксические правила

В реляционной базе данных вся информация представляется в виде единой конструкции данных, а именно, в виде теоретико-множественного отношения. При этом n-арное отношение R определяется на совокупности доменов $D_1, D_2, ..., D_n$ (не обязательно различных) как подмножество прямого произведения $D_1 \times D_2 \times ... \times D_n$, т. е. в виде множества упорядоченных n -ок $(d_{i1}, d_{i2}, ..., d_{in})$ $(i = 1, 2, ..., m)$, таких, что d_{i1} принадлежит D_1, d_{i2} принадлежит D_2, ..., d_{in} принадлежит D_n. Это множество n-ок, называемых также элементами или синтаксическими объектами, определяет основание отношения R, n есть степень R, а число m, равное числу объектов в R, называется мощностью отношения. Для придания значений величинам, определенным в D_i, каждому домену D_i ставится в соответствие один или несколько признаков (все признаки одного отношения считаются различными).
Синтаксические правила, называемые интеграционными, представляют собой ограничения, накладываемые на объем отношений. Их роль заключается в том, чтобы защищать базу данных от необоснованных включений, вычеркиваний или изменений данных. Среди этих ограничений наиболее сильно влияют на построение схем базы данных ограничения типа функциональных зависимостей.
Определение. Пусть даны: n-арное отношение R, определенное на множестве признаков $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ и два подмножества $X \subseteq A$ и $Y \subseteq A$ — комбинации признаков из A. Множество признаков Y называется функционально-зависимым от множества признаков X в R (или X функционально определяет Y), если для любой пары объектов $R_{12}, r_2 \in R$ справедливо

$$r_1(X) = r_2(X) \to r_1(Y) = r_2(Y),$$

где объекты $r_1(X)$, $r_2(X)$, $r_1(Y)$, $r_2(Y)$ определены на X и Y соответственно.
Основание отношений и интеграционные ограничения образуют экстенсиональную базу данных.

10.1.4. Семантические правила

Понятия интенсивности и экстенсивности были введены и служили для объяснения различия между названием объектов и их смыслом. В реляционных базах данных свойства, семантически характеризующие каждый объект реального мира, описываются

набором признаков $A_1, A_2, ..., A_n$: говорят, что эти признаки определяют интенсиональную структуру рассматриваемого объекта. Таким образом, каждый объект реального мира в базе данных соответствует строке $(a_1, a_2, ..., a_n)$, определенной, по крайней мере, в одном отношении $R(A_1, A_2, ..., A_n)$. Эти отношения можно рассматривать как n-местные предикаты, подчиняющиеся семантическим правилам двух типов: **правилам интерпретации и семантическим правилам вывода**. **Определения отношений, свойств и семантических правил включаются в интенсиональную базу данных.**
В случае экспертных консультативных систем для организационного управления особенно важно, что операционная модель базы данных должна быть работоспособной в нечеткой среде принятия решений. На деле это приводит к введению в правила решения нечетких семантических категорий; с этой целью семантика базы данных усиливается обращением к **теории возможностей** и «**нечетким предикатам»,** определяемым как нечеткие ограничения на экстенсиональную базу данных.

10.1.5. Правила интерпретации

Правила интерпретации определяют сущность отношений на языке значений истинности или оценок возможностей.
Определение. Объект $(a_1, a_2, ..., a_n)$, определенный в отношении $R(A_1, A_2, ... A_n)$, для которого истинен предикат

$$\|R(A_1 = a_1, A_2 = a_2, ..., A_n = a_n)\| = \text{истинно},$$

называется интерпретацией.
Пример. Отношение ЧАСТЬ (Р#, имя, цвет, масса) истинно для интерпретации *(Р3,* винт, синий, 15), если часть с индексом Р3 представляет собой синий винт массой 15
Определение. Пусть заданы: множество признаков $A_1, A_2, ... , A_n$, определенное на доменах $D_1, D_2, ..., D_n$ соответственно. Пусть далее предикат F определен как имя нечеткого ограничения, наложенного на отношение $R(A_1, A_2, ..., A_n)$ и характеризуемого функцией распределения возможностей $P_{A_1}, {}_{A_2}, ..., {}_{A_n}$! Тогда интерпретацией отношения $R(A_1, A_2, ..., A_n)$ называется объект $(a_{i1}, a_{i2}, ... a_{in})$ определенный на основании R, степень совместимости которого с ограничением F равна $p_i(a_{i1}, a_{i2}, ... a_{in})$

$$\|R(A_1 = a_{i1}, A_2 = a_{i2}, ., A_n = a_{in})\| = F : p_i(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}).$$

Значение $p_i(a_{i1}, a_{i2}, ... a_{in})$ интерпретируется как возможность того, что предикат F семантически характеризует объект $(a_{i1}, a_{i2}, ... a_{in})$, определенный в R, т. е. интерпретация наделяется смыслом в контексте отношения R. Аналогичным образом в этом контексте функция распределения возможностей $p_{A_1, A_2, \ldots, A_n}$, соответствующая признакам $A_1, A_2, \ldots, A_n$, характеризует интенцию (смысл, содержание) предиката F. Для данного распределения возможностей p_A, которому соответствует $p_{A_1, A_2, \ldots, A_n}$, можно записать уравнение назначения возможностей: $F = P_A$.

Эти формальные пояснения подтверждают тот факт, что смысл предикатов — чисто субъективное понятие, поскольку он зависит от контекста, в котором определяются предикаты.

Пример. Пусть R (ИМЯ, ВОЗРАСТ) — отношение и $F \triangleq$ *молодой* — нечеткое ограничение, связывающее распределение возможностей $P_{\text{молодой}}$ с признаками имя и возраст. Пусть дана интерпретация R:

$$\| R(\text{ИМЯ} = \text{Джон},\ \text{ВОЗРАСТ} = 34) \| = \textit{молодой}\quad 0{,}5,$$

это означает, что в контексте отношения R возможность считать Джона молодым равна 0,5. Иными словами, утверждение «Джону 34 года» *означает* «Джон молодой» и возможность такой интерпретации в R оценивается значением 0,3

Примечание. Если F — прямое произведение n нечетких подмножеств $F_1, F_2, \ldots, F_n$, определяющих унарные нечеткие ограничения $R_1(A_1),\ R_2(A_2),\ \ldots,\ R_n(A_n)$, то получаем отношение :

$$P_{A_1, A_2, \ldots, A_n}(A_1, A_2, \ldots, A_n) = p_{A_1}(A_1) \wedge \ldots \wedge p_{A_n}(A_n),$$

где $p_{A_j}(A_j)$ —ассоциированная с F_j 3$(j=1, \ldots n)$ функция маргинального распределения возможностей. В этом случае говорят, что F — сепарабельный предикат.

10.1.6. Правила семантического вывода

Семантический вывод отличается от синтаксического тем, что он включает смысл предпосылок, сравнимых по их интенсиональной структуре, в то время как синтаксический вывод включает только их экстенсиональную структуру, как это было показано ранее. Правило семантического вывода устанавливает, что утверждение S можно вывести из множества условий истинности P, необходимых и достаточных для определения интенции S: в этом случае скажем, что P семантически определяет S (или S семантически зависит от P): $P \to S$. Это понятие семантической зависимости — **базовое в семантической теории, называемой «Семантика условной истинности», которая, в частности, включает в себя теорию возможностей Заде.** В базе данных семантические зависимости можно рассматривать как интенсиональную противоположность функциональных зависимостей,

которые отражают только синтаксические ограничения, накладываемые на экстенсиональные базы данных. В предлагаемом подходе к построению экспертных систем правила семантического вывода рассматриваются как семантические постулаты, на основе которых выводятся определения семантических категорий в пределах баз данных.

Семантические постулаты. В контексте системы базы данных семантические постулаты представляют собой правила вывода, используемые для вывода более общих семантических категорий как подмножеств экстенсиональной базы данных. Точнее, семантический постулат — это формула, справедливость которой обоснована фактами, и которая заключается в точном обобщении отношений гипонимии, например, $A \to B$, где $A \triangleq$ мать и $B \triangleq$ женщина. (Отношение гипонимии выражает менее общие термины с помощью более общих терминов: говорят, что первые есть гипонимы последних.)

Таким образом **семантические постулаты — это соответствующие аксиомы теории базы данных**, которые дают возможность строить индуктивные процессы как особый тип рассуждений на отношениях базы данных, выводимых с помощью заключения. Одними из первых разработанных систем с правилами вывода, в которых предусматривается управление реляционной базой данных, были системы DADM и DEDUCE. Семантические категории, выведенные из семантических постулатов, называются **виртуальными отношениями**: они выражают взгляды пользователей на базовые отношения и в отличие от базовых отношений не имеют экстенсионального представления в базе данных. В контексте принятия решений пользователям, по-видимому, приходится создавать новые нечеткие семантические категории, и они могут делать это с помощью семантических постулатов.

Определение. Пусть даны: множество признаков $X=\{X_1, X_2, X_n\}$ и признак B, определенные на доменах $D_1, D_2, \ldots, D_n, D_{n+1}$. Рассмотрим нечеткие ограничения F_1, F_2, F_3, определенные на отношениях $R(X)$, $R(X, B)$ и $R(B)$, где $R(X, B)$ дает возможное представление семантической зависимости B на X. Назовем ограничение F_3 решением уравнений назначения, если:

$$\frac{\begin{array}{c} R(X) = F_1 \\ R(X,\ B) = F_2 \end{array}}{R(B) = F_3 = F_1 \circ F_2}\ .$$

Интенция ограничения F_3 выводится из интенций F_1 и F_2 с помощью композиционного правила °, определенного на $X \times B$. В терминах функций распределения возможностей это композиционное правило заключения выражено Заде как операция (min— max) -произведения:

$$p_B(b) = \bigvee_x [p_X(x) \wedge p_{X\ B}(x,\ b)],$$

где $x \in X$, $b \in B$ и $p_X(x)$, $p_B(b)$ — функции распределения возможностей соответственно у F_1 и F_2.

Композиционное правило вывода модус поненс. В теории нечетких множеств существуют несколько формулировок, которые обобщают булевый оператор импликации. Наиболее часто используются определения Гогена, Гейнеса, Лукасевича, Решера и Заде; их свойства и особые преимущества тщательно сравнивались многими исследователями. Важно отметить, что выбор правила импликации зависит от области приложений. В контексте интенсиоиалыюй базы данных представляется особенно удобным определение Луклсевпча:

$$p_{X,\ B}(x,\ b) = \min[1,\ 1 - p_X(x) + p_B(b)].$$

С нашей точки зрения основное преимущество возможноетного представления семантических зависимостей в этой формулировке состоит в том, что выражение Лукасевича допускает декомпозицию. Это свойство, изученное Болдуином, особенно полезно, когда семантические постулаты содержат нечеткие отношения высокой степени.

Применение определения импликации по Лукасевичу приводит к композиционному правилу модус поненс по Заде, обобщающему классическое правило модус поненс.

Определение. Композиционное правило модус поненс — это правило вывода, заключение которого находится как решение уравнений назначения

$$\begin{array}{ll} R(X) = F & \text{посылка} : F \\ R(X,\ B) = \overline{G'} \otimes \overline{H} & \text{вывод} : (G \to H), \\ \hline R(B) = K = F_0(\overline{G'} \oplus \overline{H}) & \text{заключение} : F_0(G \to H) = K, \end{array}$$

где F, G — именные нечеткие ограничения, наложенные на отношение $R(X)$, определенное на доменах $D_1 \times \ldots \times D_n$: H, K — нечеткие ограничения, наложенные на отношение $R(B)$, определенное на домене D_{n+1}; G'— дополнение G; $\overline{G'}, \overline{H}$ — цилиндрические продолжения G' и H.

10.1.7. Прагматические правила

Прагматические правила описывают условия использования данных в каждом контексте пользователей. Они хранятся в операционной базе

экспертной системы и выполняют две главные функции: представление правил решения и управление процессом оценки с использованием семантических постулатов. Действительно, эти правила реализуются как метаструктура, которая контролирует семантическую информацию, хранящуюся в интенсиональной базе данных.

10.1.8. Операционное представление

Решающие правила — это метаправила вывода, такие, что

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n \to A,$$

где условия C_1, C_2, ..., C_n задают информацию о посылках семантических постулатов R_1, R_2, ..., R_m; вывод A определяет действие на R_1, R_2, ..., R_m.

Условия метаправил относятся к объектам экстенсиональной базы данных: при активизации метаправила в процессе оценки запроса оно динамически порождает временную связь между объектами. Эта дискриптивная способность — важное свойство рассматриваемого метода, в котором использование правила обусловлено обращением к нему, ориентированным на содержание.

10.1.9. Стратегии управления

На каждом шаге обработки запроса метаправилами определяется пространство возможных действий. Такая структура управления неявно заложена в большинство систем, основанных на правилах вывода, но метаструктура управления дает пользователям возможность сделать явное и полное описание своего критерия предпочтения относительно: а) вывода множества правил, называемого **конфликтным множеством**, и условия которых не противоречат процессу вывода на данном шаге; б) выбора правила из конфликтного множества, которое следует применять в первую очередь.

При этом прагматическом подходе к структуре управления метаправилами описываются стратегии поиска, моделирующие поведение людей, принимающих решение. Проблема состоит в том, что такая система правил может уменьшить пространство поиска слишком резко. Метаправила, не использующие приближенное рассуждение, дают эффективный способ применения управляющих стратегий, которые позволяют производить исчерпывающие исследования в пределах схемы вывода. Пример такой структуры управления дает процедура MYCIN. Априорно метаправилами связываются меры допустимости, по которым определяют допустимое упорядочение правил вывода внутри конфликтного множества. Приведем пример из MYCIN.

Пример. Мы хотим сказать, что акционеры, уходящие на пенсию, предпочитают надежные акции — спекулятивным. Запишем метаправило.

Посылки: ($ AND (GREATER OBJCT AGE 60)
(THEREARE OLRULES ($ AND (MENTIONS FREEVAR PREMISE BLUE —CHIP)) SET1)
(THEREARE OLRULES ($ AND (MENTIONS FREEVAR PREMISE SPECULATIVE)) SET2))
Действие: (CONCLUDE SET I DOBEFORE SET2 0.8).

Управляющее действие DOBEFORE имеет степень правдоподобности, ратую 0,8, и указывает частичный порядок между двумя подмножествами правил. Важно отметить, что термины, предикаты и функции, выраженные в правилах вывода, — это термины метаязыка, использованные на метауровне вывода. С другой стороны, если правдоподобность равна нулю, то правила вычеркиваются из конфликтного множества

В рассматриваемом прагматическом подходе процедуры упорядочения, используемые в стратегиях управления, по своей природе скорее возможностные, чем вероятностные. Полагаем, что **теория возможностей пригодна для связи структуры управления с оценочными функциями, определяющими динамическое правило упорядочения**. К тому же этот подход должен дать объединенную теорию для описания правил определения данных в интенсиональной базе данных и правил решения в операционной базе.

В данной работе в общих чертах описаны управляющие экспертные системы, основанные на теории возможностей. Показано, что функции распределения возможностей можно ввести на двух уровнях:
— в интенсиональной базе данных для того, чтобы вывести нечеткие семантические категории как внешние представления о базе данных;
— в операционной базе, как оценивающие функции, связанные с метаправилами.

Возможностное значение используется на этом метауровне в качестве управляющей информации для обработки запроса.

Существует очень немного исследований по дедуктивным системам запроса, использующим приближенное рассуждение и взаимосвязанным с реляционными системами баз данных. В дальнейшем, опираясь на мощные и привлекательные принципы,

заложенные в теории возможностей, исследования могут развиваться в двух направлениях с тем, чтобы системы запроса учитывали:
— семантические ограничения модели реляционных данных;
— потребности для гибкой и зависящей от типа доменов структуры управления, включающей эвристические стратегии обработки запроса.

При построении экспертных систем управления перед учеными ставится проблема разработки и реализации структур управления, которые подходили бы к принятым в организационных системах процессам принятия решений.

10.2. Нечеткие рассуждения с нечетким условным высказыванием «если … то … иначе…»

10.2.1. Нечеткие рассуждения с высказыванием вида «если … то … иначе…»

Рассматриваются свойства методов нечеткого рассуждения, предложенных М. Мидзумото и Заде, с нечетким условным высказыванием «если *x* есть *A,* то *y* есть *B,* иначе *y* есть *G»,* где *A, B* и *C* — нечеткие понятия, и отмечается, что полученные с помощью этих методов выводы не всегда согласуются с нашей интуицией; предлагается новый метод, который интуитивно оправдан по нескольким критериям.

Форма рассуждений человека, как правило, не точная, а приблизительная, как в утверждении

Если помидор *красный,* то помидор *спелый.*
Этот помидор *очень красный.*

Этот помидор *очень спелый.*

В ряде работ предложены методы для таких рассуждений, в посылки которых включается нечеткое условное высказывание вида «если *x* есть *A,* то *y* есть *B»,* где *A* и *B*— нечеткие понятия.

Как обобщение такого нечеткого условного вывода, содержащего высказывание вида «если *x* есть *A,* то *y* есть *B»* Заде предложил нечеткий условный вывод в форме:

посылка 1: если *x* есть *A,* то *y* есть *B,* иначе *y* есть *C,*
посылка 2: *x* есть *A',*

следствие *y* есть *D.* (1)

Для такого типа выводов из двух посылок в (1) Заде предложил несколько методов получения следствия.
В работе рассматриваются свойства методов Заде и показывается, что получаемые с их помощью следствия не всегда совпадают с нашей интуицией; предлагается новый метод, который по нескольким критериям больше соответствует нашей интуиции.

Сосредоточим внимание на следующей форме вывода, содержащей нечеткое условное высказывание вида «если ... то ... иначе»:

посылка 1: если *x* есть *A, то y* есть *B,* иначе *y* есть С,
посылка 2: *x* есть *A',*

следствие: *y* есть *D,* (2)

где *x, y* — имена объектов; *A, A', B, C, D* — нечеткие понятия представленные нечеткими множествами областей определения *U, U, V, V, V* соответственно.
Примером вывода такого вида может служить следующий:

посылка 1: если *x высокий,* то *y бесспорно тяжелый,* иначе *y довольно легкий,*
посылка 2: *x довольно высокий,*

следствие: *y очень тяжелый.*

Посылка 1 вида «если *x* есть *A,* то *y* есть *B,* иначе *y* есть С» в (2) может представлять определенную связь между *A* и *B, C.* С этой точки зрения Заде предложил правила перевода (макси-минное и арифметическое правила), переводящие нечеткое условное высказывание «если *x* есть *A,* то *y* есть *B* .иначе *y* есть С» в нечеткое отношение в *U× V.*
Пусть *A, B я C* — нечеткие множества соответственно в *U, V* и *V,* записанные в виде

$$A=\int_U \mu_A(u)\ u;\quad B-\int_V \mu_B(v)/v;\quad C-\int_V \mu_C(v)/v. \qquad (3)$$

Тогда имеем
А. **Максиминное правило** *Rm':*

$$Rm'=(A\times B)\cup(\neg A\times C)=$$
$$=\int_{U\times V}(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee((1-\mu_A(u))\wedge\mu_C(v))/(u,\ v). \qquad (4)$$

Б. **Арифметическое правило** *Ra':*

$$Ra'=(\neg A\times V\oplus U\times B)\cap(A\times V\oplus U\times C)=$$
$$=\int_{U\times V}1\wedge(1-\mu_A(u)+\mu_B(v))\wedge(\mu_A(u)+\mu_C(v))/(u,\ v), \qquad (5)$$

где $\times$, $\cup$, $\cap$, $\neg$ и $\oplus$ обозначают прямое произведение, объединение, пересечение, дополнение и ограниченную сумму нечетких множеств соответственно.
Примечание. Если в приведенных правилах перевода *C* заменить на *V* (универсальную область нечеткого множества С), которое интерпретируется как *«неизвестно»,* то нечеткое условное высказывание «если *x* есть *A,* то *y* есть *B,* иначе *y* есть С» сводится к высказыванию «если *x* есть *A,* то *y* есть *B,* иначе *y неизвестно»,* т. е. к высказыванию «если *x* есть *A,* то *y* есть *B».* Таким образом, записанные здесь правила представляют собой обобщение хорошо известных правил перевода нечеткого условного высказывания «если *x* есть *A,* то *y* есть В». Например, при *C=V* правила *Rm'* в (4) и *Ra'* в (5) принимают вид:

$$Rm=(A\times B)\cup(\neg A\times V)=\int_{U\times V}(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee(1-\mu_A(u))/(u,\ v), \qquad (6)$$

$$Ra=(\neg A\times V)\oplus(U\times B)=\int_{U\times V}1\wedge(1-\mu_A(u)+\mu_B(v))/(u,\ v). \qquad (7)$$

К тому же в другом случае, при $C=\varnothing\ 0$ (пустое множество), правило *Rm'* сводится к «правилу минимума» *Re,* именно,

$$Rc=A\times B=\int_{U\times V}\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)/(u,\ v). \qquad (8)$$

Для высказывания «если *x* есть *A,* то *y* есть *B,* иначе *y* есть С» можно также определить правило *Rb',* опирающееся на импликаиию в бинарной логике.
В. **Размытое бинарное правило** *Rb'*

$$Rb'=(\neg A\times V\cup U\times B)\cap(A\times V\cup U\times C)=$$
$$=\int_{U\times V}(1-\mu_A(u)\vee\mu_B(v))\wedge(\mu_A(u)\vee\mu_C(v))/(u,\ v). \qquad (9)$$

Кроме того, для высказывания «если *x* есть *A,* то *y* есть *B,* иначе *y* есть С» введем новый метод *Rgg'.* Импликация $a\underset{g}{\rightarrow}b$ основана на правиле импликации в гёделевской логической системе $G_{\text{алеф}}$.
Г. **Правило** *Rgg':*

$$Rgg' = (A \times V \underset{g}{\Rightarrow} U \times B) \cap (\neg A \times V \underset{g}{\Rightarrow} U \times C) =$$

$$= \int_{U \times V} (\mu_A(u) \underset{g}{\rightarrow} \mu_B(v)) \wedge (1 - \mu_A(u) \underset{g}{\rightarrow} \mu_C(v))/(u, v), \quad (10)$$

где

$$\mu_A(u) \rightarrow \mu_B(v) = \begin{cases} 1 \ \ldots \ \mu_A(u) \leqslant \mu_B(v), \\ \mu_B(v) \ \ldots \ \mu_A(u) > \mu_B(v). \end{cases}$$

Для высказывания «если x есть A, то y есть B, иначе y есть С» на рис. 1 каждое правило (4), (5), (9) и (10) иллюстрируется диаграммой, которая будет полезной для дальнейших обсуждений.

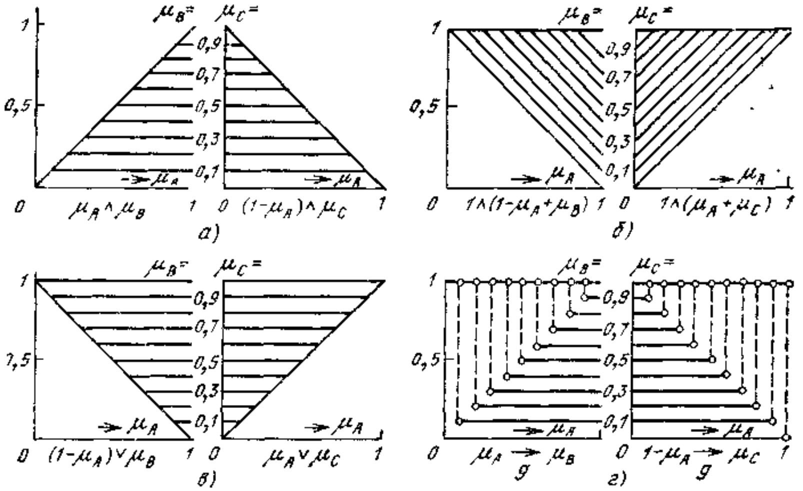


Рис. 1 Диаграмма правил (4), (5), (9) и (10):

а) Rm' : $(\mu_A \wedge \mu_B) \vee ((1-\mu_A) \wedge \mu_C)$;
б) Ra' : $1 \wedge (1-\mu_A+\mu_B) \wedge (\mu_A+\mu_C)$;
в) Rb' : $((1-\mu_A) \vee \mu_B) \wedge (\mu_A \vee \mu_C)$;
г) Rgg' : $(\mu_A \underset{g}{\rightarrow} \mu_B) \wedge (1-\mu_A \underset{g}{\rightarrow} \mu_C)$

Графическое изображение каждого правила состоит из двух диаграмм. Левая изображает ту часть правила, которая содержит $\mu_B(v)$ (например, $\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)$ в Rm'), используя $\mu_B(v)$ в качестве параметра, правая диаграмма иллюстрирует часть выражения, содержащую $\mu_C(v)$ (например, $(1-\mu_A(u)) \wedge \mu_C(v)$ в Rm'), используя в качестве параметра $\mu_C(v)$. Для удобства на этих рисунках вместо $\mu_A(u)$, $\mu_B(v)$ и $\mu_C(v)$ используются символы μ_A, μ_B и μ_C соответственно. Следствие D в (2) можно вывести из посылки 1 и посылки 2 с помощью (max-min)-композиции «°» нечеткого

множества A' в U и нечеткого отношения в $U \times V$, полученного выше. Таким образом, для каждого правила перевода можно получить следующие следствия:

$$Dm = A' \circ Rm' = A' \circ [(A \times B) \cup (\neg A \times C)] =$$

$$= \int_V \bigvee_u \{\mu_{A'}(u) \wedge [(\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u) \wedge (\mu_C(v))]\}/v, \quad (11)$$

$$Da = A' \circ Ra' = A' \circ [(\neg A \times V \oplus U \times B) \cap (A \times V \oplus U \times C)], \quad (12)$$

$$Db = A' \circ Rb' = A' \circ [(\neg A \times V \cup U \times B) \cap (A \times V \cup U \times C)], \quad (13)$$

$$Dgg = A' \circ Rgg' = A' \circ [(A \times V \underset{g}{\Rightarrow} U \times B) \cap (\neg A \times V \underset{g}{\Rightarrow} U \times C)]. \quad (14)$$

10.2.2. Сравнение методов нечеткого рассуждения

Используя (11) — (14), покажем, каковы будут следствия Dm, Da, Db и Dgg, если A' принимает следующие значения:

$A' = A$, (15) $A' =$ *очень* A $(= A^2)$, (16)

$A' =$ *более или менее* A $(= A^{0,5})$, (17)

$A' =$ *не* A $(= \neg A)$, (18) $A' =$ *не очень* A $(= \neg A^2)$, (19)

$A' =$ *не более или менее* A $(= \neg A^{0,5})$, (20)

т. е для типичных примеров нечетких множеств A'.

Следствия, выведенные по всем методам нечеткого рассуждения, представлены в табл. 1, в которой вместо $\mu_B(v)$ и $\mu_C(v)$ записаны символы μ_B и μ_C соответственно.

Таблица 1

Результаты вывода по каждому правилу

A' \ D	Dm	Da	Db	Dgg
A	$\mu_B \vee (0,5 \wedge \mu_C)$	$\frac{1+\mu_B}{2}$	$\mu_B \vee 0,5$	μ_B
Очень A	$\mu_B \vee \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \wedge \mu_C\right)$	$\frac{3+2\mu_B-\sqrt{5+4\mu_B}}{2}$	$\mu_B \vee \frac{3-\sqrt{5}}{2}$	μ_B
Более или менее A	$\mu_B \vee \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \wedge \mu_C\right)$	$\frac{\sqrt{5+4\mu_B}-1}{2} \wedge \frac{1+\mu_B+\mu_C}{2}$	$\begin{cases} \mu_B & \mu_B \geqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ (\mu_B \vee \mu_C \vee 0,5) \wedge \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \ldots\mu_B \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{\mu_B} & \ldots \mu_B+\mu_C \geqslant 1 \\ \mu_B \vee (\sqrt{\mu_B} \wedge \mu_C) & \ldots \mu_B+\mu_C < 1 \end{cases}$
Не A	$\mu_C \vee (0,5 \wedge \mu_B)$	$\frac{1+\mu_C}{2}$	$\mu_C \vee 0,5$	μ_C
Не очень A	$\mu_C \vee \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \wedge \mu_B\right)$	$\frac{2\mu_C-1+\sqrt{5-4\mu_C}}{2} \wedge \frac{1+\mu_C+\mu_B}{2}$	$\begin{cases} \mu_C & \ldots\mu_C \geqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ (\mu_C \vee \mu_B \vee 0,5) \wedge \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \ldots\mu_C \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} 1-(1-\mu_C)^2 & \ldots \mu_B+\mu_C \geqslant 1 \\ [1-(1-\mu_C)^2 \wedge \mu_B] \vee \mu_C & \ldots \mu_B+\mu_C < 1 \end{cases}$
Не более или менее A	$\mu_C \vee \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \wedge \mu_B\right)$	$\frac{3-\sqrt{5-4\mu_C}}{2}$	$\mu_C \vee \frac{3-\sqrt{5}}{2}$	μ_C

Покажем, как, используя диаграммы рис. 1, получить следствия D из табл. 1 дли каждого метода $(Rm',\ Ra',\ Rb',\ Rgg')$ при значениях A' из (15) — (20). Рассмотрим только случай (16): $A'=$ *очень* A.

А. Случай $Rm'=(A\times B)\cup(\neg A\times C)$. Пусть A — нечеткое множество и R_1, R_2 — нечеткие отношения Тогда в общем случае для (max-min) -композиции « $\circ$ » справедливо следующее тождество:

$$A\circ(R_1\cup R_2)=(A\circ R_1)\cup(A\circ R_2).$$

Используя это тождество, для (11) получаем

$$A'\circ[(A\times B)\cup(\neg A\times C)]=[A'\circ(A\times B)]\cup[A'\circ(\neg A\times C)]. \quad (21)$$

Поэтому при $A'=$*очень* A $(=A^2)$ функция принадлежности $A^2\circ(A\times B)$ задается выражением

$$\mu_{A^2\circ(A\times B)}(v)=\bigvee_u[\mu_A(u)^2\wedge(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))]. \quad (22)$$

Если, скажем, $\mu_B(v)=0{,}3$, то выражение в квадратных скобках в (22) будет иметь вид, показанный на рис. *2,а* штриховой линией, график которой получается из левой диаграммы рис. 1,а.

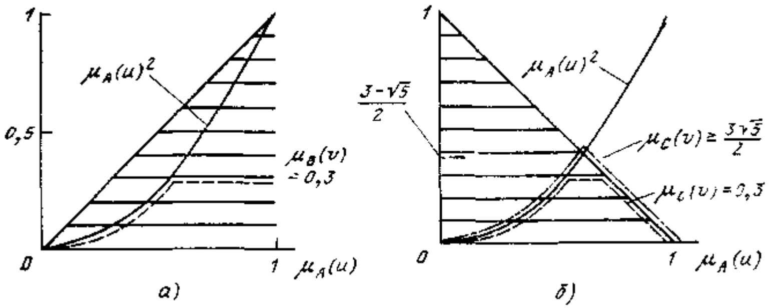


Рис. 2. $\mu_{A^2\circ(A\times B)}(v)$ (а) и $\mu_{A^2\circ(A\times C)}(v)$ (б)

Беря максимум этой линии, согласно (22) при $\mu_B(v)=0{,}3$ получаем $\mu_{A^2\circ(A\times B)}(v)=0{,}3$. В общем случае для любой функции принадлежности $\mu_B(v)$ можем получить

$$\mu_{A^2\circ(A\times B)}(v)=\mu_B(v). \quad (23)$$

С другой стороны, функция принадлежности $A^2\circ(\neg A\times C)$

в(21) сводится к следующему:

$$\mu_{A^2\circ(\neg A\times C)}(v)=\bigvee_u[\mu_A(u)^2\wedge(1-\mu_A(u)\wedge\mu_C(v))]. \quad (24)$$

Например, выражение в квадратных скобках в (24) при $\mu_C(v)=0{,}3$ $\left(\leqslant\frac{3-\sqrt5}{2}\right)$ показано штриховой линией на рис. *2,б,* а при $\mu_C(v)=0{,}7$ $\left(\geqslant\frac{3-\sqrt5}{2}\right)$ — штрихпунктирной линией. Таким образом, как можно видеть из рисунка, получаем

$$\mu_{A^2\circ(\neg A\times C)}(v)=\begin{cases}\mu_C(v)\ \dots\ \mu_C(v)\leqslant\frac{3-\sqrt5}{2}\ (=0{,}3819\ \dots),\\ \frac{3-\sqrt5}{2}\ \dots\ \mu_C(v)\geqslant\frac{3-\sqrt5}{2},\end{cases}$$

или, что эквивалентно,

$$\mu_{A^2\circ(\neg A\times C)}(v)=\frac{3-\sqrt5}{3}\wedge\mu_C(v) \quad (25)$$

Наконец, на основании (21), беря максимум ($\vee$) выражений (23) и (25) можно получить функцию принадлежности следствия

$$Dm=A^2\circ[(A\times B)\cup(\neg A\times C)]:$$

$$\mu_{Dm}(v)=\mu_B(v)\vee\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\wedge\mu_C(v)\right).$$

Б. **Случай** $Ra'=(\neg A\times V\oplus U\times B)\cap(A\times V\oplus U\times C)$. Опуская u и v в записи $\mu..(\cdot)$, функцию принадлежности μ_{Da} можно записать в виде

$$\mu_{Da}=\bigvee_u\{\mu_A^2\vee[1\wedge(1-\mu_A+\mu_B)\wedge(\mu_A+\mu_C)]\}. \quad (26)$$

В общем случае неравенство $\mu_A{}^2\leqslant\mu_A+\mu_C$ справедливо при любых μ_A и μ_C, и, таким образом, вместо (26) можно записать

$$\mu_{Da}=\bigvee_u\{\mu_A^2\wedge[1\wedge(1-\mu_A+\mu_B)]\},$$

что соответствует композиции A^2 и нечеткого отношения (7). Имеем

$$\mu_{Da}=\frac{3+2\mu_B-\sqrt{5+4\mu_B}}{2}.$$

В. **Случай** $Rb'=(\neg A\times V\cup U\times B)\cap(A\times V\cup U\times C)$. На основании (9) для функции принадлежности Rb' имеем

$$((1-\mu_A)\vee\mu_B)\wedge(\mu_A\vee\mu_C).$$

Диаграмма по обоим параметрам μ_B и μ_C получается взятием минимума ($\wedge$) по левой и правой частям зависимостей на рис. 1,*в*. Например, если $\mu_C = 0,5$ и $\mu_в = 0,2$, то получается диаграмма 1 на рис. 3, а при $\mu_C = 0,5$ и $\mu_в=0,7$— диаграмма *2.*

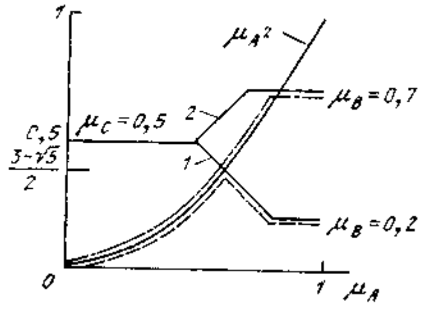


Рис. 3. μ_{Db}

Поэтому, когда $\mu_C=0,5$ и $\mu_B=0,2 \quad (\leqslant(3-\sqrt{5})/2)$, функция принадлежности μ_{Db} в (13) принимает значение $(3—\sqrt{5})/2$ в качестве максимального значения штриховой линии на рис. 3. Аналогично, когда $\mu_C = 0,5$ и $\mu_B=0,7 \quad (\geqslant(3-\sqrt{5})/2$, функция принадлежности $\mu_{Db} = 0,7$ как максимальное значение штрихпунктирной линии. Таким образам, в общем случае

$$\mu_{Db}=\begin{cases}\frac{3-\sqrt{5}}{2} \;\ldots\; \mu_B\leqslant\frac{3-\sqrt{5}}{2},\\ \mu_B \;\ldots\; \mu_B\geqslant\frac{3-\sqrt{5}}{2},\end{cases}$$

т. е.

$$\mu_{Db}=\mu_B\vee\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Г. **Случай** $Rgg'=(A\times V\underset{g}{\Rightarrow}U\times B)\cap(\neg A\times V_g\underset{g}{\Rightarrow}U\times C).$ Функция принадлежности *Rgg'* задается выражением

$$(\mu_A\underset{g}{\rightarrow}\mu_B)\wedge(1-\mu_A\underset{g}{\rightarrow}\mu_C).$$

Диаграммы по обоим параметрам $\mu_в$ и μ_C (рис. 4) получается с помощью операции $\wedge$ по левой и правой частям рис. 1,*г*.

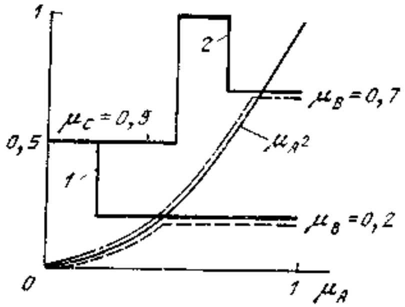


Рис. 4. μ_{Dgg}

Диаграмма 1 на рис. 4 получается при $\mu_C = 0,5$ и $\mu_в =0,2$. Диаграмма *2* — при $\mu_C = 0,5$ и $\mu_в = 0,7$. Функция принадлежности μ_{Dgg} следствия *Dgg* принимает значения 0,2 и 0,7 при $\mu_в = 0,2$ и 0,7 соответственно. То же самое справедливо для любого значения μ_C . Следовательно, в общем случае

$$\mu_{Dgg}=\mu_B.$$

Пример. Приведем пример, используя данные табл. 1. Пусть нечеткие множества *A, B* и *C* имеют вид, как на рис. *5,а,б.*

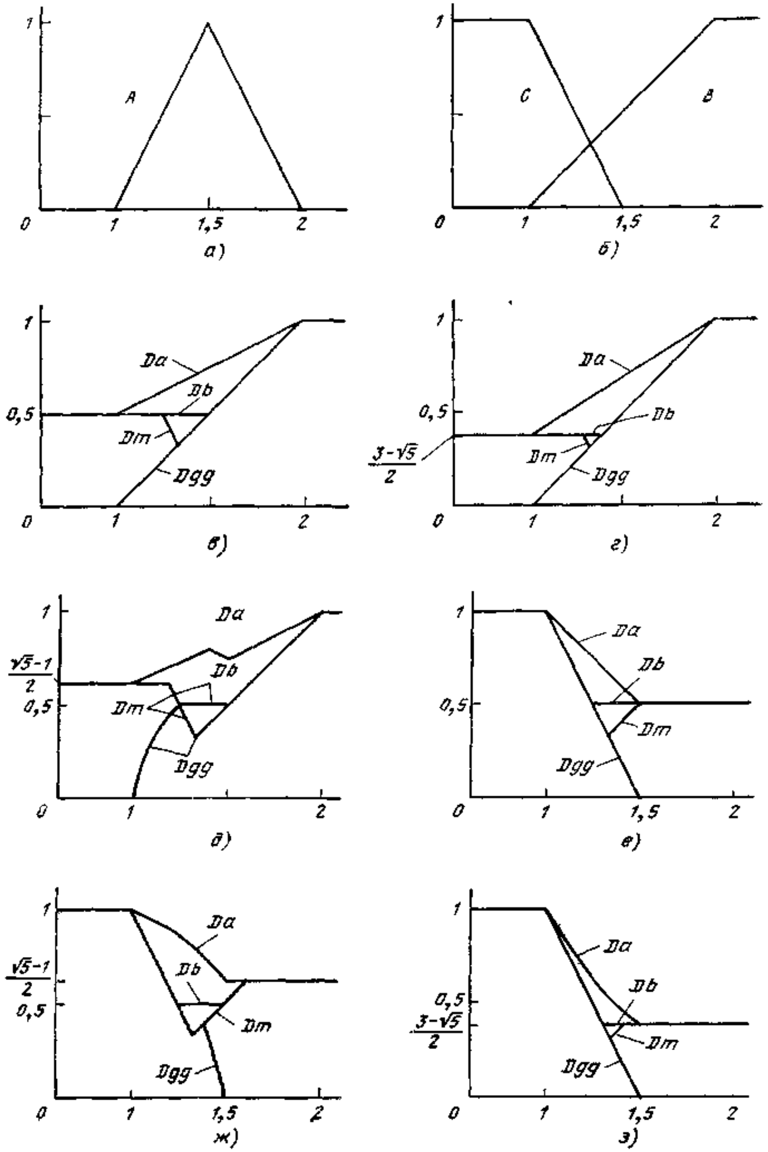


Рис 5 Нечеткие множества и следствия:
а — нечеткое множество *А; б* — нечеткие множества В и С: *в*—при *А'=А; г* —при *А'=очень А; д*—при *А'=более или менее А; е* — при *А' = не А; ж* — при *А'=не очень А: з* — при *А'— не более или менее А*

Тогда следствия по каждому методу(Rm', Ra', Rb', Rgg') показаны на рис. 5,*в*, *г.* Если в условном высказывании «если *х* есть *А*, то *у* есть *В*, иначе *у* есть С» *А'* есть соответственно *А* и *не А,* то в соответствии с нашей интуицией следствием *D* в (2) должно быть, по-видимому, *В* и *С.* А именно, естественными могут быть следующие выводы:

посылка 1: если *х* есть *А,* то *у/* есть В, иначе *у* есть С.
посылка 2. *х* есть *А*.
следствие: *у* есть В.

(27)

посылка 1: если *х* есть *А* , то *у* есть В, иначе *у* есть С.
посылка 2: *х* есть не *А* .
следствие: *у* есть С.

(28)

На основании данных табл. 1 и рис. 5 можно установить, что следствие *Dgg* равно *В '(*т. е. $\mu_в$) при *А' = А,* и равно С (т. е. μ_c) при *А '=не А* . А именно, правило *Rgg* удовлетворяет критериям (27), (28), тогда как другие правила *Rm', Ra'* и *Rb'* им не удовлетворяют. Остается невыясненным, однако, какого сорта следствия наиболее пригодны для следствия *D* в (2), когда *А'* равно *очень А, более или менее А, не очень* и *не более или менее А.* Поэтому нельзя утверждать, что наше новое правило *Rgg'* наилучшее для нечеткого условного вывода с высказыванием «если *х* есть *А,* то *у* есть *В,* иначе *у* есть С», то можно сказать, что правило *Rgg'* пригодно для нечеткого условного вывода, поскольку оно удовлетворяет совершенно естественным критериям (27) и (28).

Нами указано, что методы *Ra', Rm'* и *Rb'* нечеткого условного выводу с высказыванием «если *х* есть *А,* то *у* есть *В,* иначе *у* есть С» не дают следствий, которые совпадали бы с нашими интуитивными представлениями, и предложен улучшенный метод *Rgg',* удовлетворяющий интуиции при совершенно естественных критериях. В последующем необходимо рассмотреть формализацию методов вывода для более сложных форм вывода, таких как

если *х* есть A_1, то *у* есть B_1, иначе
если *х* есть A_2, то *у* есть B_2, иначе
.
.
.
если *х* есть A_n, то *у* есть B_n.
х есть *А'*

у есть *В'*.

10.3. Нечеткий вывод резолюционного типа

10.3.1. Резольвента в нечеткой логике

Рассматриваются некоторые свойства правил нечеткого вывода, основанных на резолюционном принципе, предложенные М. Мукаидоно. Им доказано, что при определенных условиях резольвента в нечеткой логике есть значимое логическое следствие, что она всегда имеет значение как логическое следствие в смысле уменьшения неопределенности.

Резолюционный принцип составляет основу методов машинной логики и применяется в интерактивных системах, построенных на двузначной логике. Основное правило вывода, используемое в таких системах, представляет собой итеративную процедуру вычисления резольвент по предыдущим заключениям.

Однако двузначная логика непригодна для обработки неопределенной аргументации и выводов, характерных для неформальных суждений, в которых многие объекты недоопределены и утверждения о них допускают несколько трактовок. Возможность изучать проблемы, содержащие некоторые виды неопределенности, обеспечивается нечеткой логикой. В нечетких условиях для логического или дедуктивного вывода плодотворное использование револющионного принципа **базируется не на двузначной, а на нечеткой логике.** Однако, как показывают исследования, не всегда можно достигнуть полезных выводов при применении нечеткого резолюционного принципа.

Ниже в первую очередь будет выяснено условие, при котором резольвента в нечеткой логике приводит к значимому логическому следствию. Во-вторых, будет доказано, что правило нечеткого вывода, опирающееся на резолюционный принцип, всегда осмысленно, поскольку уменьшает неопределенность. И хотя в разделе обсуждение нечеткого резолюционного принципа ограничено препозиционным исчислением, все рассуждения применимы и к исчислению предикатов, если учитывать унификацию.

Нечеткую логику можно определить как алгебраическую систему $\langle [0, 1], \cdot, \vee, \sim \rangle$, в которой множество значений истинности составляет замкнутый интервал [0, 1], а логические операторы И($\cdot$), ИЛИ ($\vee$) и НЕ($\sim$) определяются как $A \cdot B = \min(A, B)$, $A \vee B = \max(A, B)$, $\sim A = 1 - A$, $A, B \in [0, 1]$.

Определение 1. Переменная x_i (i=1, . ., n) или ее отрицание $\sim x_i$ называется *буквенной* переменной. Буквенные переменные x_i и $\sim x_i$

дополняют друг друга. *Высказыванием* называется формула, содержащая дизъюкцию ИЛИ ($\vee$) некоторых буквенных переменных. В нечеткой логике законы дополнения $(\sim x \vee x = 1, \ \sim x \cdot x = 0)$ не выполняются. Поэтому в нечеткой логике высказывание, в котором x_i и $\sim x_i$ встречаются одновременно, оказывается содержательным (хотя в рамках двузначной логики это высказывание будет тавтологией). Далее такое высказывание называется *дополнительным*. При заданной интерпретации значение истинности высказывания определяется однозначно подстановкой вместо каждой переменной ее значения из замкнутого интервала [0, 1], которое определяется интерпретацией высказывания. Таким образом, под **интерпретацией понимается отображение каждой переменной во множество значений истинности [0, 1].** При заданной интерпретации значение истинности высказывания C будет обозначаться через $T(C)$, а для множества высказываний S — через $T(S)$, причем, если $S = \{C_1, \ldots, C_n\}$, то $T(S)$ означает, что $T(S) = T(C_1 \cdot \ldots \cdot C_n)$.

Определение 2. Пусть два высказывания C_1 и C_2 соответственно равны $C_1 = x_i \vee L_1$ и $C_2 = \sim x_i \vee L_2$, где L_1 и L_2 не содержат буквенных переменных x_i или $\sim x_i$ в качестве факторов и не имеют дополнительных переменных. Тогда высказывание $L_1 \vee L_2$ называется *резольвентой* C_1 и C_2 с ключевым словом x_i, которое будем обозначать $R(C_1, C_2)$.

Следующие два хорошо известных правила вывода:

(модус поненс) если A и $A \to B$, то B, и

(силогизм) если $A \to B$ и $B \to C$, то $A \to C$

представляют собой частные случаи указанного правила вывода, которое выводит резольвенту $R(C_1, C_2)$ из двух предшествующих высказываний, когда импликация определяется как

$$A \to B = \sim A \vee B. \quad (1)$$

При таком определении импликации выписанные частные случаи справедливы, поскольку A и $A \to B$ равно $A \cdot (\sim A \vee B)$, а $A \to B$ и $B \to C$ равно $(\sim A \vee B) \cdot (\sim B \vee C)$ соответственно, а также и потому, что их резольвентами будут B и $\sim A \vee C = A \to C$ соответственно.

Рассмотрим постулат, согласно которому логическое следствие D из посылки C значимо только при выполнении для всех интерпретаций следующего условия:

$$T(C) \leqslant T(D), \text{ т. е } \quad T(C) = T(C \cdot D). \quad (2)$$

(В нечеткой логике этот постулат отражает только один аспект требований, обеспечивающих значимость логического следствия. В зависимости от приложений может потребоваться другой постулат).

Этот постулат разумен, поскольку любое логическое следствие в двузначной логике удовлетворяет условию (2). Действительно, в двузначной логике согласно (2) резольвента $R(C_1, C_2)$ высказываний C_1 и C_2 может рассматриваться как логическое следствие из посылок C_1 и C_2, поэтому в двузначной логике выполнено следующее условие: $T(C_1 \cdot C_2) \leqslant T(R(C_1, C_2))$, т. е. $T(C_1, C_2) = T(C_1 \cdot C_2 \cdot R(C_1, C_2))$, означающее, что истинность высказываний остается неизменной при всех интерпретациях, даже если к высказываниям добавить их резольвенту.

Однако в нечеткой логике записанное отношение не всегда выполняется. Например, пусть $C_1 = x_i \vee L_1$ и $C_2 = \sim x_i \vee L_2$ и пусть при некоторой интерпретации $x_i = 0,3$, $L_1 = 0,1$ и $L_2=0,2$. Тогда $C_1=0,3$ и $C_2 = 0,7$, т. е. $T(C_1 \cdot C_2) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,3$. С другой стороны, $T(R(C_1, C_2)) = T(L_1 \vee L_2) = 0,2$. Таким образом, в этом случае $T(C_1 \cdot C_2) \not\leqslant T(R(C_1, C_2))$. Как уже указано, в нечеткой логике вывод согласно определению 2 с помощью резольвенты не всегда значим в смысле (2). Рассмотрим условие, при котором резольвента в нечеткой логике значима как логическое следствие в смысле (2).

Теорема 1. Пусть C_1 и C_2— два высказывания и $R(C_1, C_2)$ — резольвента C_1 и C_2 с ключевым словом x_i. Тогда справедливы следующие соотношения:

1) если $T(x_i \cdot \sim x_i) \leqslant T(R(C_1, C_2))$, то $T(C_1, C_2) \leqslant T(R(C_1, C_2))$,

2) если $T(x_i \cdot \sim x_i) \geqslant T(R(C_1, C_2))$, то $T(C_1, C_2) \geqslant T(R(C_1, C_2))$.

Доказательство. Без потери общности можно предположить, что $C_1 = x_i \vee L_1$ и $C_2 = \sim x_i \vee L_2$, где L_1 и L_2 не содержат одновременно ни x_i ни $\sim x_i$, а $L_1 \vee L_2$ не содержит дополнительной переменной. Тогда $C_1 \cdot C_2 = x_i \cdot \sim x_i \vee x_i \cdot L_2 \vee \sim x_i \cdot L_1 \vee L_1 \cdot L_2$ и $R(C_1, C_2) = L_1 \vee L_2$. Следовательно, всегда выполняются следующие три неравенства:

1) $x_i \cdot L_2 \leqslant L_1 \vee L_2$,

2) $\sim x_i \cdot L_1 \leqslant L_1 \vee L_2$,

3) $L_1 \cdot L_2 \leqslant L_1 \vee L_2$.

Взяв точную верхнюю грань ($\vee$) от обеих частей этих неравенств, получим $x_i \cdot L_2 \vee \sim x_i \cdot L_1 \vee L_1 \cdot L_2 \leqslant L_1 \vee L_2$. Поэтому, если $T(x_i \cdot \sim x_i) \leqslant T(L_1 \vee L_2) = T(R(C_1, C_2))$, то $T(C_1 \cdot C_2) \leqslant T(R(C_1, C_2))$, и если $T(x_i \cdot \sim x_i) \geqslant T(L_1 \vee L_2) = T(R(C_1, C_2))$, то $T(C_1 \cdot C_2) \geqslant T(R(C_1, C_2))$, что и требовалось доказать.

На основе этой теоремы приходим к следующему выводу: в нечеткой

логике резольвента становится или не становится значимым логическим следствием в смысле (2) в зависимости от значения истинности своего ключевого слова. Другими словами, в нечеткой логике для получения значимого логического следствия в смысле (2) нужно использовать некоторое ключевое слово, удовлетворяющее условию 1 теоремы 1. При использовании неопределенного ключевого слова нельзя получить значимое логическое следствие (теорема 1, условие 2). В двузначной логике соотношение $\sim x_i \cdot x_i = 0$ всегда выполняется (ключевое слово x_i не несет неопределенности); тогда остается только случай 1 теоремы 1 и резольвента всегда обладает значимостью как логическое следствие в смысле (2). В нечеткой логике резольвенту можно принять в качестве вывода лишь тогда, когда проверено, удовлетворяет или нет значение истинности ключевого слова переменной условию 1 теоремы 1.

Следствие 1. Пусть C_1 и C_2 — два высказывания. Если $T(R(C_1, C_2)) \geqslant 0,5$, то $T(C_1 \cdot C_2) \leqslant T(R(C_1, C_2))$.

Доказательство. Пусть $R(C_1, C_2)$ — резольвента C_1 и C_2 с ключевым словом x_i. Для всех интерпретаций всегда справедливо соотношение $T(x_i \cdot \sim x_i) \leqslant 0,5$. Поэтому если $T(R(C_1, C_2)) \geqslant 0,5$, то $T(x_i \cdot \sim x_j \leqslant T(R(C_1, C_2))$. Следовательно, по теореме 1 имеем $T(C_1 \cdot C_2) \leqslant T(R(C_1, C_2))$, что и требовалось доказать.

Согласно следствию 1 при значении истинности резольвенты, большем или равном 0,5, резольвента всегда будет значимой.

Следствие 2. Пусть C_1 и C_2 — два высказывания. Если $T(C_1 \cdot C_2) > 0,5$, то $T(C_1 \cdot C_2) \leqslant T(R(C_1, C_2))$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1 предположим, что $C_1 = x_i \vee L_1$ и $C_2 = \sim x_i \vee L_2$. Тогда $C_1 \cdot C_2 = x_i \cdot \sim x_i \vee x_i \cdot L_2 \vee \sim x_i \cdot L_1 \vee L_1 \cdot L_2$. С другой стороны, всегда выполняется неравенство $T(x_i \sim x_i) \leq 0,5$. Если $T(C_1 \cdot C_2) > 0,5$, то получим либо $T(L_1) > 0,5$, либо $T(L_2) > 0,5$ и, значит $T(L_1 \vee L_2) = T(R(C_1, C_2)) \geqslant 0,5$. Следовательно, $T(x_i \cdot \sim x_i) < T(R(C_1, C_2))$ и $T(C_1 \cdot C_2) \leqslant T(R(C_1, C_2))$, что и требовалось доказать.

Если значение истинности посылки больше 0,5, то в силу следствия 2 выводы на основе резольвенты всегда значимы в смысле (2).

Следствие 3. Пусть C_1 и C_2 — два высказывания и $R(C_1, C_2)$ — резольвента C_1 и C_2 с ключевым словом x_i. Если $T(x_i \cdot \sim x_i) = T(R(C_1, C_2))$, то $T(C_1 \cdot C_2) = T(R(C_1, C_2))$.

Доказательство следует с очевидностью из теоремы 1 (1) и (2). Утверждение, обратное следствию 3, не всегда справедливо. Пусть S есть множество высказываний. Тогда множество, которое содержит S

и все резольвенты, получаемые из каждой пары предложений из S, обозначим его $R^1(S)$, называется *революционным множеством* множества S первого порядка. Для множества S резолюционное множество $R^n(S)$ n-го порядка определяется как

$$R^0(S) = S, \quad R^n(S) = R^1(R^{n-1}(S)).$$

Теорема 2. Пусть S — множество высказываний и G — высказывание из $R^n(S)$. Если Г(G) ≤0,5, то в S найдется высказывание C, такое, что T(C)≤0,5.

Доказательство. Без потери общности можно предположить, что G есть элемент множества $R^n(S)—R^{n-1}(S)$. Пусть C_i есть элемент множества $R^i(S)—R^{i-1}(S)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. Если для всех высказываний C_{i-1}, из $R^{i-1}(S)$ значение истинности $T(C_{i-1})>0{,}5$, то согласно следствию 2 имеем: $T(C_i)\geqslant T(R^{i-1}(S))$, т. е. $T(C_i)>0,5$. Обратно, если $T(C_i)<0,5$, то найдется в $R^{i-1}(S)$ элемент C_{i-1}, такой, что $T(C_{i-1})\leq 0,5$для $i=n$, $n—1$, ... , 1. Поэтому, положив $G = G_n$ и $C = C_0$, придем к утверждению теоремы, т. е. если $T(G)\leq 0,5$ для $G\in R^n(S)$, то можно показать, что в $S = R^0(S)$ существует элемент С, такой, что $T(C)$ ≤^0,5.

Теорема 3. Пусть S — множество высказываний и G — высказывание из множества $R^n(S)$. Если $T(G)\geq 0,5$, то в S найдется $R^n(S)$ такое, что $T(C)\leqslant T(G)$.

Доказательство. Без потери общности можно предположить, что G есть элемент множества $R^n(S)—R^{n-1}(S)$. Предположим, что C_i — элемент множества $R^i(S)—R^{i-1}(S)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. Если $T(C_i)\geq 0,5$, то в $R^{i-1}(S)$ существуют два высказывания C'_{i-1} и C''_{i-1}, таких, что C_i есть резольвента C'_{i-1} и C''_{i-1} и согласно следствию 2 $T(C'_{i-1}\cdot C''_{i-1})\leqslant T(C_i)$, т. е. справедливо неравенство либо $T(C'_{i-1})\leq T(C_i)$, либо $T(C''_{i-1})\leq T(C_i)$. Без потери общности можно предположить, что $T(C'_{i-1})\leq T(C_i)$. Если $T(C'_{i-1})\leq 0,5$, то утверждение теоремы следует непосредственно, поскольку в S существует высказывание C, такое, что по теореме 2 $T(C)\leqslant 0{,}5\leqslant T(G)$. Таким образом, положив $C'_{i-1} = C_{i-1}$, имеем $T(C_{i-1})\leq 0,5$. Проведенное рассмотрение справедливо для всех i: $1\leq i\leq n$. Поэтому подстановка $G = C_n$ и $C = C'_0$ завершает доказательство, т. е. если T(G)≥0,5, то в S существует высказывание С, такое, что $T(C)\leq T(G)$.

Теорема 4. Пусть S — множество высказываний и G — элемент множества $R^n(S)$. Если T(C)>0,5 для всех высказываний C из множества S, то $T(S)\leq T(G)$.

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

Доказательство. Если G — элемент S , то утверждение теоремы очевидно. Предположим, что G есть элемент множества $R^1(S)—S$, т. е. $G = C_1$ есть резольвента двух высказываний C'_0 и C''_0 множества S . По предположению теоремы $T(C_0'\cdot C_0'')>0{,}5.$ Поэтому согласно следствию 2 $T(C_0'\cdot C_0'')\leqslant T(C_1)$, т. е. 0,5< $T(S)\leqslant T(C_0'\cdot C_0'')\leqslant T(C_1)$. Тогда имеем $0{,}5<T(R^1(S))=T(S)$. Далее, пусть C_i — элемент $R^i(S)—R^{i-1}(S)$ и $0{,}5<T(R^{i-1}(S))$. Тогда аналогично можно показать, что в $R^{i-1}(S)$ существуют два высказывания C'_{i-1} и C''_{i-1} для которых C_i есть резольвента. Тогда имеем $T(C'_{i-1}\cdot C''_{i-1})\leqslant T(C_i)$, т. е. $T(R^{i-1}(S))\leqslant T(C_i)$ и $0{,}5<T(R^i(S)=T(R^{i-1}(S))$. Поэтому, положив $C_n = G$, придем к утверждению теоремы $T(S)\leq T(G)$.

Из теоремы 4 известно, что если значение истинности высказываний в посылках всегда больше 0,5, то всегда можно итеративно вычислить резольвенту как значимое логическое следствие.

Следствие 4. Пусть S — множество высказываний. Если $T(C)>0,5$ для всех высказываний $C\in S$, то $T(R^n(S))=T(S)>0{,}5$ для всех n.

Доказательство. Из доказательства теоремы 4 имеем: $T(R^i(S))=T(R^{i-1}(S))>0{,}5$ для всех i: $1\leq i\leq n$, поэтому $T(R^n(S))=T(S)>0{,}5.$

Следствие 5. Пусть S — множество высказываний и G — элемент множества $R^n(S)$. Если $T(G)<T(C)$ для всех высказываний $C\in S$, то в S найдется высказывание C', такое, что $T(C')\leq 0,5$.

Доказательство с очевидностью вытекает из теоремы, обратной теореме 4.

Следствие 6 . Пусть S множество высказываний $\{C_1, \ldots, C_n\}$, $\max(T(C_1), \ldots, T(C_n))=b$ и $\min(T(C_1), \ldots, T(C_n))=a>$ 0,5. Тогда $a\leq T(G)\leq b$ для всех $G\in R^n(S)$.

Доказательство. Пусть $T(S)$ означает $\min(T(C_1), \ldots, T(C_n))$.

Если $T(S)=a<0,5$, то по теореме 4 $a\leq T(G)$. С другой стороны, если C_i — резольвента C'_{i-1} и C''_{i-1}, то неравенство $max(C'_{i-1}, C''_{i-1})\geq C_i$ всегда выполняется. Поэтому $T(G)\leq b$.

Согласно следствию, если все значения истинности высказываний в посылках больше 0,5, то значение истинности любого логического следствия, полученного на основе резольвенты, всегда заключено между минимальным и максимальным значениями истинности посылок.

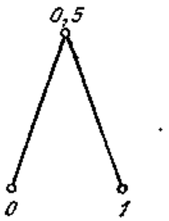
10.3.2. Резольвента и неопределенность

В предыдущем разделе выяснено, что в нечеткой логике вывод резольвенты не всегда приводит к значимым результатам в смысле условия (2). Данный раздел будет посвящен выяснению важности революционного метода в нечеткой логике.
Принято считать, что среди всевозможных значений истинности [0,1] значения 0 и 1 несут различную и вполне определенную информацию и что неопределенность высказывания достигает максимума при значении истинности 0,5. Поэтому на множестве [0,1] можно ввести отношение частичного порядка, характеризующее некоторые виды неопределенности.
Определение 3. Пусть a и b — элементы множества V=[0, 1]. Будем писать $a \gg b$ тогда и только тогда, когда $0{,}5 \geq a \geq b$ или $0{,}5 \leq a \leq b$.
Пример. $0{,}3 \gg 0{,}1$, $0{,}6 \gg 0{,}9$, $0{,}2 \not\gg 0{,}8$, $0{,}8 \not\gg 0{,}2$.

Теорема 5. Пусть S — множество высказываний и G — резольвента любых двух высказываний множества S. Тогда для всех интерпретаций

$$T(S) \gg T(S \cdot G). \tag{3}$$

Доказательство. Если $T(S)>0{,}5$, то по следствию 2 имеем $T(S) \leq T(G)$. Поэтому $T(S \cdot G)=T(S)$. В этом случае имеем $0{,}5< T(S \cdot G) =T(S)$, откуда по определению 3 $T(S) \gg T(S \cdot G)$.
Предположим, что $T(S) \leq 0{,}5$. Тогда $0{,}5 \leq T(S) \geq T(S \cdot G)$, поскольку всегда истинно неравенство $T(S) \geq T(S \cdot G)$. Отсюда имеем $T(S) \gg T(S \cdot G)$
Из теоремы следует, что в смысле отношения (3) выводы, к которым приходили в рамках нечеткой логики с помощью вычисления резольвенты, всегда значимы, поскольку уменьшается неопределенность, описываемая отношением частичного порядкака $\gg$ (рис.1).



Отношение частичного порядка $\gg$, описывающее неопределенность

Теорема 6. Пусть S — множество высказываний. Тогда при всех n и всех интерпретациях выполняется неравенство $T(S) \gg T(R^n(S))$.
Доказательство. Пусть высказывание C есть элемент множества $R^1(S)$—S. Тогда по теореме 5 справедливо строгое неравенство $T(S) \gg T(S \cdot C)$. Поскольку соотношение это справедливо для любого высказывания C из множества $R^1(S)$—S , то $T(S) \gg T(R^1(S))$. А так как неравенство $T(R^{i-1}(S)) \gg T(R^{i-1}(S) \cdot C)$ справедливо для каждого $C \in R^i(S) - R^{i-1}(S)$, то аналогично можно показать, что $T(R^{i-1}(S)) \gg T(R^i(S))$ для каждого i $(2 \leq i \leq n)$. В силу предыдущих рассуждений $T(S) \gg T(R^1(S)) \gg \ldots \gg T(R^n(S))$, что и требовалось доказать.
Примечание. В пропозициональной логике резольвента (см. определение 2) равна согласованности, которая используется для получения всех простых импликантов переключательной функции. Аналогично этому в нечеткой логике определим **нечеткую согласованность**. Нечеткая согласованность применима для вывода всех нечетких простых импликантов и для минимизации нечетких переключательных функций. Если G — нечеткая согласованность двух высказываний C_1 и C_2, то неравенство $T(C_1 \cdot C_2) \leqslant T(G)$ выполняется для всех интерпретаций, т. е. нечеткая согласованность — значимое логическое следствие в смысле (2). Если же ее рассматривать с позиций двузначной логики, то она окажется не больше чем тавтологией, поскольку в нечетких согласованностях имеется, по крайней мере, одна пара дополнительных букв.

При рассмотрении нечеткого вывода или нечеткого рассуждения нужно выяснить следующие два аспекта:
1. Какая форма будет принята в качестве правила вывода для получения логического следствия из посылки и как определяется нечеткая импликация «→», если в качестве правила нечеткого вывода принято модус поненс или силлогизм.
2. Как постулируется значение для нечеткого вывода?
В нечетком выводе на основе резольвенты, описанном в данном разделе, в качестве правила используется общая форма модус поненс и определение импликации $A \rightarrow B$ соответствует выражению $\sim A \vee B$. В соответствии с этим правилом вывода рассмотрены два типа понятия значимости. Первое обычное понятие: если D есть логическое следствие из посылки С, то постулируется, что $T(C) = T(C \cdot D)$ для всех интерпретаций. Второе: для всех интерпретаций $T(C) \gg T(C \cdot D)$ и, следовательно, на основе логического следствия можно уменьшить неопределенность.
Наши выводы состоят в следующем:

1) при определенном условии, зависящем от значения истинности ключевого слова, предназначенного для получения резольвенты, резольвента в нечеткой логике есть значимое логическое следствие в первом смысле;
2) резольвента в нечеткой логике всегда представляет собой значимое логическое следствие при втором определении значимости.

10.4. Модальная семантика и теория нечетких множеств

10.4.1. Условные модальности на диаграмме Венна

В этом разделе описано исследование, проведенное А Прадом, на предмет связи между модальной семантикой и теориями Заде: возможностей и нечетких множеств. Аристотелевы модальности (возможность, невозможность, необходимость, случайность) естественно обобщаются на случай нечетких множеств с помощью диаграмм Венна и α-срезов. При таком подходе мы возвращаемся к теории возможностей Заде. Многозначные модальности рассматриваются на основе нечетких мер Суджено. Подчеркиваются связи с мультипликативными логиками. Подход непосредственно связан с условными возможностями и необходимостями. Наконец, в связи с оценкой сходства между двумя нечеткими множествами проясняется интерес к понятиям необходимости. Показано, что два введенных модальных понятия особенно важны для построения теории нечетких чисел.
Л. А. Заде обновил интерпретацию понятий нечетких множеств и наметил новые перспективы теории, сформулировав так называемую **теорию возможностей**, в которой нечеткие множества рассматриваются как «распределения возможностей», т. е. как множества более или менее возможных значений переменной. С самого начала было ясно, что меры возможностей (опирающиеся на распределения возможностей) хотя и очень отличаются от вероятностных мер, но так же, как и вероятностные меры, представляют частные случаи нечетких мер Суджено на конечных универсумах. Различные типы нечетких мер соответствуют различным точкам зрения на оценку определенности событий.
Теория возможностей Заде, допуская несколько (в действительности — континуум) степеней возможности, очевидно, отходит от модальной семантики. Однако различия и сходства с модальной семантикой до

сих пор, по-видимому, еще по-настоящему не изучены. Данная работа представляет попытку продвинуться в этом направлении.
После введения четырех аристотелевых модальностей на диаграмме Венна в результате естественного процесса «размывания» и использования α-срезов будет осуществлен переход к теории возможностей Заде. Попутно будут введены многозначные модальности, отличные от возможностей, которые рассматриваются в рамках нечетких мер. Будет затронут вопрос о связи с мультипликативной логикой. Намечены области приложений понятий возможности и необходимости к мерам сходства нечетких множеств и к нечетким числам.
Пусть X — универсум, для удобства — конечный. Дополнение четкого или нечеткого подмножества A в X будет обозначаться $\overline{A}$.

10.4.1.1. Четкие подмножества

Пусть A и B — два непустых (не нечетких) подмножества на *одном и том же* универсуме X. Пусть χ_A и χ_B — их характеристические функции. Рассмотрим следующий вопрос: что можно сказать относительно принадлежности множеству B (или $\overline{B}$) элементов множества А? Возможны четыре ситуации, соответствующие четырем аристотелевым модальностям.

1.Невозможность. Если $B \cap A = \varnothing$, что эквивалентно $A \supset \overline{B}$, и $\overline{B} \cup \overline{A} = X$, то невозможно, чтобы элемент, принадлежащий A, принадлежал B. Другими словами, если через IMB $(B|A)$ (читается «невозможность B при известном А») обозначить степень невозможности для элемента из A принадлежать множеству B, то будем иметь

$$\mathrm{IMB}(B|A) = \begin{cases} 1, & \text{если } B \cap A = \varnothing \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$
$$= \inf_{x \in X} \max\left(\chi_{\overline{A}}(x),\ \ \chi_{\overline{B}}(x)\right).$$

2. Возможность. Если $B \cap A \neq \varnothing$, что эквивалентно $A \not\subset \overline{B}$,то возможно, что элемент множества A принадлежит B, т. е.

$$\mathrm{POS}(B|A) = \begin{cases} 1, & \text{если } B \cap A \neq \varnothing, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$
$$= \sup_{x \in X} \min\left(\chi_A(x),\ \ \chi_B(x)\right).$$

3. Случайность (контингенция). Если $\bar{B} \cap A = \varnothing$, что эквивалентно $A \not\subset B$, то вполне допустимо, что элемент, принадлежащий множеству *A,* принадлежити множеству *B,* т. е.

$$\mathrm{CONT}\,(B|A) = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{B} \cap A \neq \varnothing, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$
$$= \sup_{x \in X} \min\,(\gamma_A(x),\ \chi_{\bar{B}}(x)).$$

4.Необходимость. Если $\bar{B} \cap A = \varnothing$, что эквивалентно $A \subset B$ и $B \cup \bar{A} = X,$ то элемент, принадлежащий *A,* необходимо принадлежит и *B,* т е.

$$\mathrm{NES}\,(B|A) = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{B} \cap A \neq \varnothing, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$
$$= \inf_{x \in X} \max\,(\chi_{\bar{A}}(x),\ \chi_B\ x)).$$

Примечание 1. Пусть x_0 — элемент *A.* Высказывание «возможно, что $x_0 \in$ B», которое истинно тогда и только тогда, когда *POS(B|A) =1,* обозначим $\Diamond\,(x_0 \in B)$; тогда $\neg \Diamond\,(x_0 \in B)$, $\Diamond \neg\,(x_0 \in$ $\in B)$ [н $\neg \Diamond \neg\,(x_0 \in B) \equiv \Box\,(x_0 \in B)$ соответствуют высказываниям «невозможно, что $x_0 \in B$» (истинно тогда и только тогда, когда IMP(B|A) = 1), «может случиться, что $x_0 \in$ B» (истинно тогда и только тогда, когда CONT (B|A) = 1) и «с необходимостью $x_0 \in$ B» (истинно тогда и только тогда, когда NES(B|A)=1) соответственно. Нечто подобное получим для «относительных модальностей, изученных при аксиоматическом подходе. Теперь обычная четверка модальностей выражается в форме IMP *(B|A)=* $= 1 - \mathrm{POS}(B|A)$, $\mathrm{CONT}(B|A) = \mathrm{POS}(\bar{B}|A)$, $\mathrm{NES}(B|A) = 1 -$ $- \mathrm{POS}(\bar{B}|A)$.

Примечание 2. Ситуации 1—4 соответствуют случаям, когда $\forall x \in A,\ x \notin B$; $\exists x \in A,\ x \in B$; $\exists x \in A,\ x \notin B$; $\forall x \in A,\ x \in B$ соответетвенно. Параллелизм между модальностями и универсальными квантификаторами хорошо известен.

Примечание 3. В пропозиционном исчислении импликация *P→Q* определяется как $\neg(P \wedge \neg Q)$; в модальной логике строгая импликация Левиса $P \prec Q$ вводится как $\neg \Diamond (P \wedge \neg Q)$ (или, что эквивалентно, как $\Box\,(P \to Q)$). Приравнивание *P* и $x_0 \in A$, Q и $x_0 \in B$ в ситуации 4 соответствует импликации Левиса, где $x_0 \in A$ истинно по предположению.

Теперь рассмотрим, что происходит с понятиями модальности, когда А или *B* становится нечетким множеством.

10.4.1.2. Случаи, когда множество *B* — нечеткое , а множество *A* —четкое

Хорошо известно, что нечеткое множество *B* (функцию принадлежности которого будем обозначать $\mu_{\tilde{B}}$) можно представить с помощью ее α-срезов $\tilde{B}_\alpha = \{x \in X,\ \mu_{\tilde{B}}(x) \geqslant \alpha\}$, где $\alpha \in]0,\ 1]$. Имеем:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \sup_{\alpha \in]0,\,1]} \min\,(\alpha,\ \chi_{\tilde{B}_\alpha}(x)), \qquad (1)$$

и если α<β, то $\tilde{B}_\alpha \supset \tilde{B}_\beta$.

На рис. *1,а* нечеткое подмножество $\tilde{B}$ изображено через некоторые его α-срезы; для достаточно малых значений α множество А может включаться в $\tilde{B}$, тогда как для бóльших значений α имеем только $A \cap \tilde{B}_\alpha \neq \varnothing$, а для α, близких к 1, возможно $A \cap \tilde{B}_\alpha = \varnothing$.

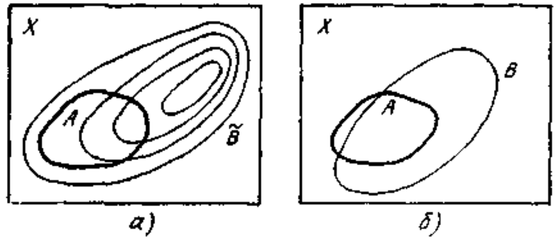


Рис. 1

Примечание 4. Описанную ситуацию не нужно путать с ситуацией, изображенной на рис. 1,б, где (не нечеткое) множество *B почти* содержит А, т. е. разность 1 —|A∩B|/|A | (это не что иное как *P(B|A)*— вероятность события *B* при известном А) почти равна 1, где |A|— мощность множества А. Таким образом, поскольку POS(B|A) = 1 тогда и только тогда, когда P(B|A)>0 и NES(B|A)=1 тогда и только тогда, когда *P(B|A) = 1,* то |A∩B|/ |*A*\ можно —с некоторой натяжкой — рассматривать как «степень возможности» для множества А принадлежать множеству *B* (соответствующая «необходимость» различия между логическими суждениями в зависимости от характера устанавливаемой ими достоверности модальности должна быть равна $1 - (|A \cap \bar{B}|/|A|) = |A \cap B|/|A|!)$. Использовать вероятности в качестве степеней возможности предлагалось и в других работах. Однако отметим, что $POS(B|A) = POS(A|B)$, в то время как $P(A|B) \neq P(B|A)$\ имеем только $P(B|A)>0$ тогда и только тогда, когда $P(A|B)>0$.

Рассмотрение α-срезов $\tilde{B}_\alpha$ множества $\tilde{B}$ открывает, по-видимому, естественный путь для обобщения точки зрения, представленный в разд. 11.4.1.1. Рассмотрим сначала «возможностную ситуацию». Если $\tilde{B}_\alpha \cap A \neq \varnothing$, то возможно $(\mathrm{POS}(\tilde{B}_\alpha|A)=1)$, что элемент, принадлежащий множеству А, принадлежит $\tilde{B}_\alpha$ и поэтому принадлежит $\tilde{B}$ со степенью принадлежности, по крайней мере, равной α. Множество $\tilde{B}$ может рассматриваться как приближенное описание четкого подмножества B (например, если процесс восприятия не позволяет наблюдать B точно). Тогда представляется естественным говорить, что возможность POS($\tilde{B}$ |A) того, что элемент, принадлежащий A, принадлежит плохо определенному подмножеству $\tilde{B}$, равна, по крайней мере, α; как только $B_\alpha \cap A \neq \varnothing$ — неопределенность на $\tilde{B}$ индуцирует неопределенность относительно возможности.

Поскольку $A \cap \tilde{B}_\alpha \neq \varnothing$ влечет $\forall \beta \leqslant \alpha$: $A \cap \tilde{B}_\beta \neq \varnothing$, то можно также провести различение между центральными элементами множества $\tilde{B}$ (т. е. теми элементами, которые принадлежат $\tilde{B}_\alpha$ при больших значениях α) и периферическими элементами (которые принадлежат $\tilde{B}_\alpha$, когда α мало, но лишь настолько, чтобы не быть слишком большим); возможность POS ($\tilde{B}$ |A) должна быть тем больше, чем более централен в $\tilde{B}$ элемент множества A. Возможность будет тем больше, чем больше значение α, при котором $A \cap \tilde{B}_\alpha \neq \varnothing$. Величина POS ($\tilde{B}$ |A) оценивает степень уверенности в том, что $\tilde{B} \cap A$ непусто. Более строго утверждаем, что

$$\mathrm{POS}(\tilde{B}|A) = \begin{cases} 0, \text{ если } \forall \alpha \in]0,1], \quad \tilde{B}_\alpha \cap A = \varnothing, \\ \sup(\{\alpha, \alpha \in]0,1], \ \tilde{B}_\alpha \cap A \neq \varnothing\}) \\ \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где sup обозначает наименьшую верхнюю грань, или

$$\mathrm{POS}(\tilde{B}|A) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \min(\alpha, \mathrm{POS}(\tilde{B}_\alpha|A)). \tag{2}$$

Подставляяв правую часть значение возможности

$\mathrm{POS}(\tilde{B}_\alpha|A)$,

получаем

$$\mathrm{POS}(\tilde{B}|A) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \min(\alpha, \sup_{x \in X} \min(\chi_A(x), \chi_{\tilde{B}_\alpha}(x))) = \\ = \sup_{x \in X} \min(\chi_A(x), \sup_{\alpha \in]0,1]} \min(\alpha, \chi_{\tilde{B}_\alpha}(x))) = \sup_{x \in A} \mu_{\tilde{B}}(x) \tag{3}$$

Примечание 5. Скалярная мощность нечеткого множества $\tilde{F}$ с конечным универсумом X определяется как $|\tilde{F}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{F}}(x)$.

Заметим, что $|A \cap \tilde{B}| = \sum_{x \in A} \mu_{\tilde{B}}(x) \leqslant \alpha^* \cdot |A|$,

где $\alpha^* = \sup\{\alpha \in]0, 1]$,
$A \cap \tilde{B} \neq \varnothing\} = \mathrm{POS}(\tilde{B}|A)$.

Тогда $\mathrm{POS}(\tilde{B}|A) \geqslant |A \cap \tilde{B}|/|A| = P(\tilde{B}|A)$,

где $P(\tilde{B}|A)$ —скалярная условная вероятность $\tilde{B}$ при известном А в предположении равномерности вероятностного распределения.

Аналогично, если $A \subset \tilde{B}_\alpha$, то элемент, принадлежащий A, с необходимостью (NES($\tilde{B}_\alpha|A) = 1$) принадлежит $\tilde{B}_\alpha$; действительно, если $A \subset \tilde{B}_\alpha$, то $\forall \beta \leqslant \alpha$: $A \subset \tilde{B}_\beta$ и $\mathrm{NES}(\tilde{B}_\beta|A) = 1$. Таким образом, чем больше значение α, при котором еще $A \subset \tilde{B}_\alpha$, тем более «централен» во множестве $\tilde{B}$ любой элемент множества А и тем больше должна быть необходимость NES($\tilde{B}$ |A). Величина NES($\tilde{B}$ |A) оценивает степень уверенности в том, что множество $\bar{A} \cap \tilde{B}$ пусто. Поэтому

$$\mathrm{NES}(\tilde{B}|A) = \begin{cases} 0, \text{ если } A \not\subset \operatorname{supp} \tilde{B}, \\ \sup(\{\alpha \in]0,1], A \subset \tilde{B}_\alpha\}) \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где носитель множества $\tilde{B}$ определяется как множество $\operatorname{supp}\tilde{B} = \{x, \mu_{\tilde{B}}(x) > 0\}$,

$$\mathrm{NES}(\tilde{B}|A) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \min(\alpha, \mathrm{NES}(\tilde{B}_\alpha|A)) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \min(\alpha, \\ \inf_{x \in X} \max(\chi_{\bar{A}}(x), \chi_{\tilde{B}_\alpha}(x))) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \inf_{x \in A} \min(\alpha, \chi_{\tilde{B}_\alpha}(x)). \tag{4}$$

При $\alpha^* = \sup(\{\alpha, \forall x \in A, \chi_{\tilde{B}_\alpha}(x) = 1\})$, ($\alpha^* = 0$ тогда и только тогда, когда $A \not\subset \operatorname{supp} \tilde{B}$) имеем $\forall \alpha \leqslant \alpha^*$, $\inf_{x \in A} \min(\alpha, \chi_{\tilde{B}_\alpha}(\alpha)) = \alpha$.

Если α*≠ 1, то $\exists\, x^* \in A, \forall \alpha > \alpha^*: \chi_{\tilde B_\alpha}(x^*) = 0$ и $\inf\limits_{x\in A} \min(\alpha, \chi_{\tilde B_\alpha}(x)) = 0$, а величина NES ($\tilde B$ |A) = α*.

Однако $\forall x \in A$, $\sup\limits_{\alpha\in]0,1]} \min(\alpha, \chi_{\tilde B_\alpha}(x)) \geqslant \sup\limits_{\alpha\in]0,1]} \inf\limits_{x\in A} \min(\alpha, \chi_{\tilde B_\alpha}(x)) = \alpha^*$. Наконец,

$$\alpha^* = \inf_{x\in A} \sup_{\alpha\in]0,1]} \min(\alpha, \chi_{\tilde B_\alpha}(x)).$$

Следовательно,

$$\mathrm{NES}(\tilde B | A) = \inf_{x\in A} \mu_{\tilde B}(x). \quad (5)$$

Случай невозможности и контингенциальности несколько отличен от предыдущего. Если $\tilde B_\alpha \cap A = \varnothing$,то $\forall\beta,\ 1 \geqslant \beta \geqslant \alpha:\ \tilde B_\alpha \cap A = \varnothing$. Невозможность IMP($\tilde B$ |A) должна быть тем больше, чем меньше найдется значение а, такое, что $\tilde B_\alpha \cap A = \varnothing$. Тогда, используя *f(t)* = = 1—*t* в качестве оператора, обращающего порядок, имеем

$$\mathrm{IMP}(\tilde B|A) = \begin{cases} 0, \text{ если } \tilde B_1 \cap A \neq \varnothing, \\ 1 - \inf(\{\alpha \in]0,1],\ \tilde B_\alpha \cap A = \varnothing\}) \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где inf обозначает наибольшую нижнюю грань.

Поскольку $\inf(\{\alpha \in]0,1,\ \tilde B_\alpha \cap A = \varnothing\}) = \sup(\{\alpha \in]0,1],\ \tilde B_\alpha \cap A \neq \varnothing\}) = \mathrm{POS}(\tilde B|A)$, то имеем

$$\mathrm{IMP}(\tilde B|A) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \min(1-\alpha,\ \mathrm{IMP}(\tilde B_\alpha|A)) = \inf_{x\in A}(1 - \mu_{\tilde B}(x)). \quad (6)$$

Аналогично получаем

$$\mathrm{CONT}(\tilde B|A) = \begin{cases} 0, \text{ если } A \subset \tilde B_1 \\ 1 - \inf(\{\alpha \in]0,1],\ A \not\subset \tilde B_\alpha\}) \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\mathrm{CONT}(\tilde B|A) = \inf_{\alpha\in]0,1]} \max(1-\alpha,\ \mathrm{CONT}(\tilde B_\alpha|A)) = \sup_{x\in A}(1 - \mu_{\tilde B}(x)). \quad (7)$$

Четыре модальности сохраняются: $\mathrm{IMP}(\tilde B|A) = 1 - \mathrm{POS}(\tilde B|A)$, $\mathrm{CONT}(\tilde B|A) = \mathrm{POS}(\bar{\tilde B}|A)$, $\mathrm{NES}(\tilde B|A) = 1 - \mathrm{POS}(\bar{\tilde B}|A)$.

10.4.1.3. Случаи, когда множество *A* — нечеткое , а множество *B* —четкое

Представление $\tilde A$ с помощью его α-срезов позволяет провести анализ, аналогичный проделанному в предыдущем подразделе. Получаем

$$\mathrm{POS}(B|\tilde A) = \sup_{x\in B} \mu_{\tilde A}(x). \quad (8)$$

Поскольку из $\tilde A_\alpha \subset B$ следует, что $\forall\beta,\ 1 \geqslant \beta \geqslant \alpha:\ \tilde A_\beta \supset B$, то необходимость NES($\tilde A$ |B) должна быть больше, чем меньше найдется значение α, при котором $\tilde A_\alpha \subset B$. Теперь имеем:

$$\mathrm{NES}(B|\tilde A) = \begin{cases} 0, \text{ если } \tilde A_1 \not\subset B, \\ 1 - \inf(\{\alpha \in]0,1],\ \tilde A_\alpha \subset B\}) \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\mathrm{NES}(B|\tilde A) = \inf_{\alpha\in]0,1]} \max(1-\alpha,\ \mathrm{NES}(B|\tilde A_\alpha)) = \inf_{x\in \bar B}(1 - \mu_{\tilde A}(x)), \quad (9)$$

$$\mathrm{IMP}(B|\tilde A) = \inf_{x\in P}(1 - \mu_{\tilde A}(x)), \quad (10)$$

$$\mathrm{CONT}(B|\tilde A) = \sup_{x\in \bar B} \mu_{\tilde A}(x) \quad (11)$$

и

$$\mathrm{IMP}(B|\tilde A) = 1 - \mathrm{POS}(B|\tilde A), \quad \mathrm{CONT}(B|\tilde A) = \mathrm{POS}(\bar B|\tilde A),$$

$$\mathrm{NES}(B|\tilde A) = 1 - \mathrm{POS}(\bar B|\tilde A).$$

10.4.1.4 *A* и *B* — нечеткие множества

Теперь рассмотрим α-срезы $\tilde A_\alpha$ и β-срезы $\tilde B_\beta$ множеств $\tilde A$ и $\tilde B$ соответственно. Если $\tilde B_\beta \cap \tilde A_\alpha \neq \varnothing$, то $\mathrm{POS}(\tilde B_\beta|\tilde A_\alpha) = 1$. Значение $\mathrm{POS}(\tilde B_\beta|\tilde A_\alpha)$ должно быть тем больше, чем больше найдутся значения α и β, такие, что $\tilde B_\beta \cap \tilde A_\alpha \neq \varnothing$. Таким образом, полагаем

$$\mathrm{POS}(\tilde B|\tilde A) = \begin{cases} 0, \text{ если } \operatorname{supp} \tilde A \cap \operatorname{supp} \tilde B = \varnothing, \\ \sup(\{\alpha * \beta,\ \alpha \in]0,1],\ \beta \in]0,1],\ \tilde B_\beta \cap \tilde A_\alpha \neq \varnothing\}) \\ \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где * —некоторый бинарный оператор агрегирования, принимающий свои значения на [0, 1], очевидно, коммутативный, желательно ассоциативный и для того, чтобы включались формулы (2) и (3) в качестве частных случаев, удовлетворяющий условию ∀ α: α* 1 = α и условию $\alpha * \beta \leqslant \alpha' * \beta'$, если $\alpha \leqslant \alpha'$ и $\beta \leqslant \beta'$, что гарантирует возрастание $\text{POS}(\tilde{A}|\tilde{B})$, когда значения α и β таковы, что $\tilde{B}_\beta \cap \tilde{A}_\alpha \neq \varnothing$. Из этих четырех условий следует, что операторы * должны быть треугольными нормами. Три треугольные нормы заслуживают особого внимания: 1) $\alpha * \beta = \min(\alpha, \beta)$; 2) $\alpha * \beta = \alpha \cdot \beta$; 3) $\alpha * \beta = \max(0, \alpha + \beta - 1)$. Имеем

$$\max(0, \alpha + \beta - 1) \leqslant \alpha \cdot \beta \leqslant \min(\alpha, \beta)$$

и min оказывается наибольшей треугольной нормой. Таким образом,

$$\text{POS}(\tilde{B}|\tilde{A}) = \sup_{\alpha \in]0,1],\, \beta \in]0,1]} \min(\alpha * \beta, \sup_{x \in X} \chi_{\tilde{A}_\alpha \cap \tilde{B}_\beta}(x)).$$

Поскольку

$(\tilde{A} \cap_* \tilde{B})_\gamma = \bigcup_{\alpha * \beta \geqslant \gamma} \tilde{A}_\alpha \cap \tilde{B}_\beta$, где $\mu_{\tilde{A} \cap_* \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) * \mu_{\tilde{B}}(x)$, то

имеем $\text{POS}(\tilde{B}|\tilde{A}) = \sup_{\gamma \in]0,1]} \min(\gamma, \sup_{x \in X} \chi_{\tilde{A} \cap_* \tilde{B}_\gamma}(x))$,

$$\text{POS}(\tilde{B}|\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \text{ если } \alpha * \beta = \min(\alpha, \beta) = \quad (12)$$

$$= \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x), \text{ если } \alpha * \beta = \alpha \cdot \beta = \quad (12')$$

$$= \sup_{x \in X} \max(0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1), \text{ если } \alpha * \beta = \max(0, \alpha + \beta - 1). \quad (12'')$$

Формула (12), как и (12') и (12"), заключает в себе формулы (3) и (8). До конца этого подраздела будем использовать для простоты изложения только операцию min.

Значение $\text{NES}(\tilde{B}|\tilde{A})$ должно быть тем больше, чем меньше найдется значение α и больше значение β, такие, что $\tilde{A}_\alpha \subset \tilde{B}_\beta$. Таким образом, полагаем

$$\text{NES}(\tilde{B}|\tilde{A}) = \begin{cases} 0, \text{ если } \tilde{A}_1 \not\subset \operatorname{supp} \tilde{B}, \\ \sup(\{\min(1-\alpha, \beta), \alpha \in]0,1], \beta \in]0,1], \tilde{A}_\alpha \subset \tilde{B}_\beta\}), \\ 1, \text{ если } \operatorname{supp} \tilde{A} \subset \tilde{B}_1. \end{cases}$$

Замечая, что если $\alpha \leqslant \beta$ и $\tilde{A}_{1-\alpha} \subset \tilde{B}_\beta$, то $\tilde{A}_{1-\alpha} \subset \tilde{B}_\alpha$, и можно показать справедливость соотношения

$$\text{NES}(\tilde{B}|\tilde{A}) = \inf_{x \in X} \max(1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \quad (13)$$

которое заключает в себе (5) и (9).

Формулы (6) и (10) обобщаются в виде

$$\text{IMP}(\tilde{B}|\tilde{A}) = \inf_{x \in X} \max(1 - \mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)), \quad (14)$$

а (7) и (11) в виде

$$\text{CONT}(\tilde{B}|\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_B(x)). \quad (15)$$

Какой бы оператор * мы ни выбрали, используя одну и ту же треугольную норму для всех четырех модальностей, получим следующие формулы:

$$\text{IMP}(\tilde{B}|\tilde{A}) = 1 - \text{POS}(\tilde{B}|\tilde{A}); \; \text{CONT}(\tilde{B}|\tilde{A}) = \text{POS}(\bar{\tilde{B}}|\tilde{A});$$

$$\text{NES}(\tilde{B}|\tilde{A}) = 1 - \text{POS}(\bar{\tilde{B}}|\tilde{A}), \quad (16).$$

$$\text{POS}(\tilde{B}|\tilde{A}) = \text{POS}(\tilde{A}|\tilde{B}),$$

$$\quad (17)$$

$$\text{IMP}(\tilde{B}|\tilde{A}) = \text{IMP}(\tilde{A}|\tilde{B}),$$

$$\text{NES}(\tilde{B}|\tilde{A}) = 1 - \text{POS}(\bar{\tilde{B}}|\tilde{A}) = 1 - \text{POS}(\tilde{A}|\bar{\tilde{B}}) = \text{NES}(\bar{\tilde{A}}|\bar{\tilde{B}}),$$

$$\quad (18)$$

$$\text{CONT}(\tilde{B}|\tilde{A}) = \text{POS}(\bar{\tilde{B}}|\tilde{A}) = \text{POS}(\tilde{A}|\bar{\tilde{B}}) = \text{CONT}(\bar{\tilde{A}}|\bar{\tilde{B}}).$$

Стоит заметить, что в этой структуре сохраняется квадрат модальностей и при этом принята в расчет нечеткость.

10.4.2. Меры возможностей и другие нечеткие меры

10.4.2.1. Развитие теории возможностей Заде

Вспомним основные положения теории возможностей, разработанные Заде. Пусть π_u—отображение из X в [0, 1], называемое распределением возможностей. Положив

$$\forall F \subset X, \; \Pi_u(F) = \sup_{x \in F} \pi_u(x) \quad (19)$$

и для нечеткого подмножества $\tilde{F}$

$$\Pi_u(\tilde{F}) = \sup_{x \in X} \min(\mu_{\tilde{F}}(x), \pi_u(x)), \quad (20)$$

на основе π_u построим отображение Π_u из $\mathscr{P}(X)$ (или, обобщая на основе соотношения (20), — из множества нечетких подмножеств множества X) в [0, 1], которое называется *возможностной мерой.* Для любой пары нечетких или четких подмножеств F и G нечеткая мера удовлетворяет условию

$$\Pi_u(\breve{F} \cup \breve{G}) = \max(\Pi_u(\breve{F}), \Pi_u(\breve{G})), \quad (21)$$

где

$$\forall x, \ \mu_{\breve{F} \cup \breve{G}}(x) = \max(\mu_{\breve{F}}(x), \mu_{\breve{G}}(x)).$$

Отображение π_u можно рассматривать как функцию принадлежности нечеткого подмножества множества X — нечеткого подмножества значений, которые более или менее возможны для переменной *и*. Функция $\Pi_u(F)$ оценивает возможность того, что переменная *и*, априорные возможные значения которой ограничены отображением π_u, принимает свои значения внутри нечеткого подмножества $\tilde{F}$.

Итак, $\pi_u(x) = \Pi_u(\{x\})$ —это возможность того, что переменная *и* равна x.

Сравнение (3) или (8) и (19), (12) и (20) приводит к

$$\Pi_u(\breve{F}) = \mathrm{POS}(\breve{F}|\pi_u) \quad (22)$$

10.4.2.2. Другие нечеткие меры

С мерой возможностей Π_u связана мера необходимости N_u, которая определяется как

$$N_u(\breve{F}) = 1 - \Pi_u(\breve{F}) = \inf_{x \in X} \max(\mu_{\breve{F}}(x), \ 1 - \pi_u(x)) = \mathrm{NES}(\breve{F}|\pi_u)$$

и удовлетворяет условию

$$N_u(\breve{F} \cap \breve{G}) = \min(N_u(\breve{F}), N_u(\breve{G})),$$

где $\forall x, \ \mu_{\breve{F} \cap \breve{G}}(x) = \min(\mu_{\breve{F}}(x), \mu_{\breve{G}}(x))$.

Отметим, что с целью распространения определения (19) на другие меры, не нарушая условия (21), можно при агрегировании μ_F и π_u использовать операторы, отличные от *min(p, q),* например операторы $p \cdot q$ или $\max(0, p + q - 1)$. И поскольку они не убывают на $\mathscr{P}(X)$, то Π_u и N_u будут нечеткими мерами в смысле Суджено, если $\Pi_u(X) = 1 = N_u(X)$ и $\Pi_u(\varnothing) = N_u(\varnothing) = 0$. Кроме того, в (2) и (4) легко распознать нечеткие интегралы по Суджено.

Меры $\mathrm{POS}(\cdot|\breve{A})$, $\mathrm{POS}(\breve{B}|\cdot)$, $\mathrm{CONT}(\breve{B}|\cdot)$ будут нечеткими, если выполняются условия нормализации, так как

$$\mathrm{POS}(\breve{F} \cup G|\breve{A}) = \max(\mathrm{POS}(\breve{F}|\breve{A}), \mathrm{POS}(\breve{G}|\breve{A})),$$

$$\mathrm{POS}(\breve{B}|\breve{F} \cup \breve{G}) = \max(\mathrm{POS}(\breve{B}|\breve{F}), \mathrm{POS}(\breve{B}|\breve{G})),$$

$$\mathrm{CONT}(\breve{B}|\breve{F} \cup \breve{G}) = \max(\mathrm{CONT}(\breve{B}|\breve{F}), \mathrm{CONT}(\breve{B}|\breve{G})).$$

А.Е. Кононюк Дискретно-непрерывная математика

Мера $\mathrm{NES}(\cdot|\tilde{A})$ будет мерой необходимости

$$\mathrm{NES}(\breve{F} \cap \breve{G}|\breve{A}) = \min(\mathrm{NES}(\breve{F}|\breve{A}), \mathrm{NES}(\breve{G}|\breve{A})).$$

Положив

$$\mathrm{COMP}(\breve{B}|\breve{A}) = \inf_{x \in X} \max(\mu_{\breve{A}}(x), \mu_{\breve{B}}(x)), \quad (23)$$

имеем

$$\mathrm{COMP}(B|A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \cup B = X \ (\text{т. е. } B \supset \bar{A}), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

что может интерпретирпиятый как степень дополнительности $\tilde{B}$ относительно $\tilde{A}$. Имеем $\mathrm{COMP}(\breve{B}|\breve{A}) = \mathrm{COMP}(\breve{A}|\breve{B})$. Заметим, что

$$\mathrm{COMP}(\breve{B}|\breve{A}) = \mathrm{NES}(\breve{B}|\bar{\breve{A}}) = \mathrm{NES}(\breve{A}|\bar{\breve{B}}) = \mathrm{IMP}(\bar{\breve{A}}|\breve{B}).$$

Во всяком случае, $\mathrm{COMP}(\cdot|\tilde{A})$, $\mathrm{COMP}(\tilde{B}|\bullet)$ — это меры необходимости:

$$\mathrm{COMP}(\breve{F} \cap \breve{G}|\breve{A}) = \min(\mathrm{COMP}(\breve{F}|\breve{A}), \mathrm{COMP}(\breve{G}|\breve{A})),$$

$$\mathrm{COMP}(\breve{B}|\breve{F} \cap \breve{G}) = \min(\mathrm{COMP}(\breve{B}|\breve{F}), \mathrm{COMP}(\breve{B}|\breve{G})).$$

Меры $\mathrm{IMP}(\breve{B}|\cdot)$, $\mathrm{IMP}(\cdot|\breve{A})$, $\mathrm{NES}(\breve{B}|\cdot)$ удовлетворяют условиям:

$$\mathrm{IMP}(\breve{B}|\breve{F} \cup \breve{G}) = \min(\mathrm{IMP}(\breve{B}|\breve{F}), \mathrm{IMP}(\breve{B}|\breve{G})),$$

$$\mathrm{IMP}(\breve{F} \cup \breve{G}|\breve{A}) = \min(\mathrm{IMP}(\breve{F}|\breve{A}), \mathrm{IMP}(\breve{G}|\breve{A})),$$

$$\mathrm{NES}(\breve{B}|\breve{F} \cup \breve{G}) = \min(\mathrm{NES}(\breve{B}|\breve{F}), \mathrm{NES}(\breve{B}|\breve{G})).$$

Они будут называться комерами необходимости, так как их ограничение на $\mathscr{P}(X)$ невозрастающее. Положив

$$\mathrm{NONC}(\breve{B}|\breve{A}) = \sup_{x \in X} \min(1 - \mu_{\breve{A}}(x), 1 - \mu_{\breve{B}}(x)) =$$

$$= 1 - \mathrm{COMP}(\breve{B}|\breve{A}) = \mathrm{POS}(\bar{\breve{B}}|\bar{\breve{A}}); \quad (24)$$

имеем

$$\mathrm{NONC}(B|A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \cup B \neq X \ (\text{т. е. } B \not\supset \bar{A}), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Мера $\mathrm{NONC}(\breve{B}|\breve{A})$ может рассматриваться как степень «недополнительности» $\tilde{B}$ относительно $\tilde{A}$; если $\mathrm{NONC}(B|A) = 1$, то третье подмножество $(X-(A \cup B))$ не пусто. Имеем $\mathrm{NONC}(\tilde{B}|\tilde{A}) =$

$= \mathrm{NONC}(\tilde{A} \mid \tilde{B})$.

Меры $\mathrm{NONC}(\check{B}|\cdot)$, $\mathrm{NONC}(\cdot|A)$, $\mathrm{CONT}(\cdot|\check{A})$ удовлетворяют условиям

$$\mathrm{NONC}(\check{B}|\bar{F} \cap \check{G}) = \max(\mathrm{NONC}(\check{B}|\bar{F}), \mathrm{NONC}(\check{B}|\check{G})),$$

$$\mathrm{NONC}(\bar{F} \cap \check{G}|\check{A}) = \max(\mathrm{NONC}(\bar{F}|\check{A}), \mathrm{NONC}(\check{G}|\check{A})),$$

$$\mathrm{CONT}(\bar{F} \cap \check{G}|\check{A}) = \max(\mathrm{CONT}(\bar{F}|\check{A}), \mathrm{CONT}(\check{G}|\check{A})).$$

Они будут называться номерами возможности. Комеры возможности должны определяться выражением

$$\bar{P}(X) = \int_{x \in \bar{F}} p(x)\, dx$$

с тем, чтобы если

$F \cup G = X$, то $\bar{P}(F \cap G) = \bar{P}(F) + \bar{P}(G)$.

Кроме того,имеем

$$\mathrm{POS}(\check{B}|\bar{F} \cap \check{G}) \leqslant \min(\mathrm{POS}(\check{B}|\bar{F}), \mathrm{POS}(\check{B}|\check{G})),$$

$$\mathrm{NES}(\check{B}|\bar{F} \cap \check{G}) \geqslant \max(\mathrm{NES}(\check{B}|\bar{F}), \mathrm{NES}(\check{B}|\check{G})).$$

10.4.3. Связь с многозначными логиками

Распределение возможностей π_u может интерпретироваться как значение истинности *v(Px)* высказывания: *Px=«x* есть возможное значение для *u»,* т. е. π_u = «есть возможное значение для *u*» рассматривается как «нечеткий предикат». Если принять, что $v(\neg Px) = 1 - v(Px)$, то $1 - \pi_u$ есть значение истинности высказывания *«x* не есть возможное значение для *u*»= $\neg Px$.

Мера возможности $\Pi_u(F) = \sup_{x \in F} \pi_u(x)$ — оценка высказывания *«u,* возможно, принимает свои значения в *F»* и одновременно значение истинности высказывания «в *F* существует *x* и *x* есть возможное значение для *u*» при условии, что

$$v(\exists x \in F, Px) = \sup_{x \in F} v(Px).$$

Необходимость того же события *(«u* принимаетсвои значения в F») выражается как

$$N_u(F) = 1 - \Pi_u(\bar{F}) = \inf_{x \in F} (1 - \pi_u(x))$$

и определяет значение истинности утверждения «любое значение *x* вне *F*($\forall x \notin F$) не есть возможное значение для *u*» (которое в

действительности означает «необходимо, чтобы переменная *u* принималасвои значения в *F»),* причем $v(\forall x \in \bar{F}, \neg Px) = \sup_{x \in \bar{F}} v(\neg Px)$.

В общем случае величина $\mathrm{NES}(\bar{B}|\bar{A}) = \inf_{x \in X} \max(1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$ есть не что иное, как значение истинности утверждения «$\forall x \in X$ если *x* есть $\tilde{A}$, то *x* есть $\tilde{B}$» в многозначной логике, где интерпретационная функция импликации имеет вид $v(P \to Q) = \max(1 - v(P), v(Q))$. Если использовать импликацию Лукасевича $v(P \to Q) = \min(1, 1 - v(P) + v(Q))$, то должны получить

$$\mathrm{NES}(\check{B}|\check{A}) = \inf_{x \in X} \min(1, 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)), \quad (25)$$

что соответствует треугольной норме $p * q = \max(0, p + q - 1)$.

Аналогично $\mathrm{POS}(\check{B}|\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$ соответствует $v(\exists x \in X, A(x) \wedge B(x))$, где $v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q))$.

На этой основе многозначные логики, по-видимому, могут иметь модальную интерпретацию, которую Лукасевич всегда поддерживал.

Примечание 6. Могут оказаться полезными и другие, отличные от $\forall$ и *E,* квантификаторы. Так, квантификатор «возможные значения для *u* составляют долю ρ элементов из *B»* имеет значение истинности, равное

$$\sup_{\substack{C \subset B \\ |C| = \rho\ |B|}} \inf_{x \in X} \pi_u(x), \quad (26)$$

в то время как величина

$$\inf_{\substack{C \subset B \\ |C| = \rho\ |B|}} \sup_{x \in C} \pi_u(x) \quad (27)$$

равна значению истинности высказывания «во всех подмножествах, содержащих долю ρ (по крайней мере) элементов множества *B,* существует элемент, доставляющий возможное значение для *u*». При ρ = 1 и ρ =1/|B| выражение (26) опять дает значения истинности высказываний «$\forall x \in B$ есть возможное значение для *u*» и «$\exists x \in B$ и *x* есть возможное значение для и» соответственно; при ρ =1/|B| и ρ =1 определение (27) снова приводит к значениям истинности тех же высказываний.

10.4.4. Приложения к мерам сходства и нечетким числам

10.4.4.1. Меры сходства нечетких множеств

Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — два нормализованных нечетких подмножества, определенные на одном и том же универсуме *X*. Тогда $\mathrm{POS}(\tilde{B}|\tilde{A}) = \mathrm{POS}(\tilde{A}|\tilde{B})$ и $\min(\mathrm{NES}(\tilde{B}|\tilde{A}), \mathrm{NES}(\tilde{A}|\tilde{B}))$ (для симметризации выраженияможно использовать и другие операторы агрегации) можно рассматривать как скалярные оценки сходства между $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$.

Значение POS($\tilde{B}$ | $\tilde{A}$) (а это не что иное, как согласованность $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ равно высоте множества $\tilde{A} \cap \tilde{B}$. Имеем POS($\tilde{A}$ | $\tilde{A}$) = 1, но несмотря на то, что формы функции принадлежности $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ в общем случае очень отличаются друг от друга, может оказаться, что и $\mathrm{POS}(\tilde{B}|\tilde{A}) = 1$. Мера $\mathrm{NES}(\tilde{B}|\tilde{A})$ оценивает невозможность для «типичного» элемента множества $\tilde{A}$ быть «типичным» элементом дополнения множества $\tilde{B}$. Согласно (13) величина $\mathrm{NES}(\tilde{A}|\tilde{A})$ может стать меньше 1 (но всегда больше 1/2), как только множество $\tilde{A}$ становится нечетким: это связано с неопределенностью размещения границ $\tilde{A}$; если $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ (т. е. $\forall x : \mu_{\tilde{A}}(x) \leqslant \mu_{\tilde{B}}(x)$), то $1/2 \le \mathrm{NES}(\tilde{B} | \tilde{A}) \le 1$; поскольку NES($\tilde{B}$ | $\tilde{A}$) = 1 тогда и только тогда, когда $\tilde{B}_1 \supset \mathrm{supp}\,\tilde{A}$, то $\min(\mathrm{NES}(\tilde{B}|\tilde{A}), \mathrm{NES}(\tilde{A}|\tilde{B}))$ равен 1 только тогда, когда множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ равны и не нечеткие. При таком показателе сходства нечеткие подмножества, плохо определенные по самой своей природе, не могут признаваться сходными со степенью, равной 1. Стоит отметить, что всегда $\mathrm{POS}(\tilde{B}|\tilde{A}) \geqslant \mathrm{NES}(\tilde{B}|\tilde{A})$ (при условии, что $\tilde{A}$ нормализовано). Использование вместо (12) и (13) формул (12") и (25) не должно сильно изменить поведение рассмотренных здесь показателей сходства.

Если множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ имеют различные универсумы *X* и Y, и если на $X \times Y$ известно (нечеткое) отношение *R*, то величины

$\mathrm{POS}(\tilde{B}|\tilde{A} \circ R)$ и $\mathrm{NES}(\tilde{B}|\tilde{A} \circ R)$ (где $\mu_{\tilde{A} \circ R}(y) = \sup_{x \in X} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_R(x,y))$) позволяют оценить совпадение $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ по отношению *R*. Имеем $\mathrm{POS}(\tilde{B}|\tilde{A} \circ R) = \mathrm{POS}(\tilde{B} \circ R^{-1}|\tilde{A})$ и $\mathrm{NES}(\tilde{B}|\tilde{A} \circ R) = \mathrm{NES}(\overline{\overline{\tilde{B}} \circ R^{-1}}|\tilde{A})$, где $\mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y)$.

Может также понадобиться оценить сходство прямых произведений нечетких подмножеств. Прямое произведение двух нечетких подмножеств $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$, определенных соответственно на *X* и Y, определяется выражением: $\forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad \mu_{\tilde{F} \times \tilde{G}}(x, y) = \min(\mu_{\tilde{F}}(x), \mu_{\tilde{G}}(y))$. Легко подсчитать $\mathrm{POS}(\tilde{B}_1 \times \tilde{B}_2|\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2)$ и $\mathrm{NES}(\tilde{B}_1 \times \tilde{B}_2|\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2)$, где $\tilde{A}_1$ и $\tilde{B}_1$ — нечеткие подмножества на *X*, а $\tilde{A}_2$ и $\tilde{B}_2$ — на Y, благодаря следующим результатам (доказательство см. в приложении):

$$\mathrm{POS}(\tilde{B}_1 \times \tilde{B}_2|\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2) = \min(\mathrm{POS}(\tilde{B}_1|\tilde{A}_1), \mathrm{POS}(\tilde{B}_2|\tilde{A}_2)), \quad (28)$$

если $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ — нормализованные подмножества: $\sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}_1}(x) = 1$, $\sup_{y \in Y} \mu_{\tilde{A}_2}(y) = 1$, то

$$\mathrm{NES}(\tilde{B}_1 \times \tilde{B}_2|\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2) = \min(\mathrm{NES}(\tilde{B}_1|\tilde{A}_1), \mathrm{NES}(\tilde{B}_2|\tilde{A}_2)). \quad (29)$$

10.4.4.2. Нечеткие числа

Нечеткое число *M* определяется как нечеткое подмножество действительной прямой **R**, такое, что :
его функция принадлежности μ_M кусочно-непрерывна;
$\forall x, \forall y > x, \forall z \in [x, y], \mu_M(z) \geqslant \min(\mu_M(x), \mu_M(y))$ (выпуклость);
$\exists x_0 \in \mathbf{R}, \mu_M(x_0) = 1$ (нормализация).

Функция принадлежности μ_M может рассматриваться как функция распределения возможных значений плохо определенного числа, которое обозначим через *M*. Эта интерпретация объясняет, почему *M* называется нечетким числом.

Понятия возможности и необходимости позволяют ввести четыре замечательных нечетких подмножества, связанных с *M:*

нечеткое множество M* значений, которые, *возможно,* больше или равны значению *M:*

$$\mu_{M^*}(t)=\sup_{x\leq t}\mu_M(x); \qquad \textbf{(30)}$$

нечеткие множество M* значений, которые, *возможно,* меньше или равны значению *M:*

$$\mu_{M_*}(t)=\sup_{x\geq t}\mu_M(x); \qquad (31)$$

нечеткое «рожество *M*** значений, которые с *необходимостью* больше значения *M:*

$$\mu_{M^{**}}(t)=\inf_{x\geq t}(1-\mu_M(x)); \qquad (32)$$

нечеткое множествоM** значений, которые с *необходимостью* меньше значения *M:*

$$\mu_{M_{**}}(t)=\inf_{x\leq t}(1-\mu_M(x)). \qquad (33)$$

Для введенных множеств выполняются следующие соотношения:

$$M^*\cap M_*=M, \qquad (34)$$

$$M^*\cup M_*=\mathbf{R}, \qquad (35)$$

$$M^{**}\cup M_{**}=\overline{M}, \qquad (36)$$

$$M^{**}\cap M_{**}=\varnothing, \qquad (37)$$

$$M^*\supset M^{**}, \qquad (38)$$

$$M_*\supset M_{**}. \qquad (39)$$

Все эти подмножества изображены на рис. 2.

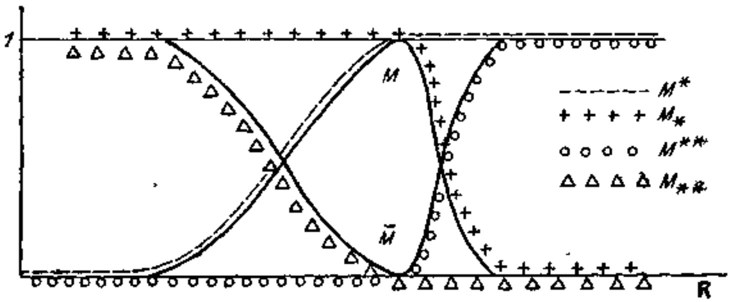


Рис.2

Соотношение (34) обобщает соотношение $[a,\ b]=[a,+\infty)\cap$ $\cap(-\infty,\ b]$, а (36) обобщает $[\overline{a,\ b}]=(-\infty,\ a[\cup]b,\ +\infty)$

Число *M* можно определить с помощью *M** и M_*, или *M*** иM_{**}. Из соображений прикладного характера предложено рассматривать нечеткие числа как пару *{*M_{**}*, M**)* безотносительно к понятиям возможности или необходимости. Такие нечеткие множества, как *M*, M**,* M_*, M_{**} могут представлять собой интерес при изучении топологических свойств нечетких чисел.

Теория возможностей Заде представляет собой, по-видимому, обобщение обычной модальной семантики. Вместе с возможностью можно ввести и другие модальности. Необходимость — это не дубликат возможности: если известна возможность события, то непосредственно вывести его необходимость нельзя. Возможность и необходимость явно отличаются от вероятности.

Меры сходства, основанные на .возможности и необходимости, успешно использовались в системах совмещения образов, в искусственном интеллекте, для оценки смысла слов или выражений, означающих более или менее одно и то же. Помимо этого возможность и необходимость, по-видимому, особенно важны в теории нечетких чисел.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство (28).

$$\begin{aligned}
&\mathrm{POS}(\tilde{B}_1\times\tilde{B}_2|\tilde{A}_1\times\tilde{A}_2)=\\
&=\sup_{x,y}\min[\min(\mu_{\tilde{B}_1}(x),\ \mu_{\tilde{B}_2}(y)),\ \min(\mu_{\tilde{A}_1}(x),\mu_{\tilde{A}_2}(y))]=\\
&=\sup_y\sup_x\min[\min(\mu_{\tilde{B}_1}(x),\ \mu_{\tilde{A}_1}(x),\ \min(\mu_{\tilde{B}_2}(y),\ \mu_{\tilde{A}_2}(y))]=\\
&=\sup_y\min[\sup_x\min(\mu_{\tilde{B}_1}(x),\ \mu_{\tilde{A}_1}(x)),\min(\mu_{\tilde{B}_2}(y),\ \mu_{\tilde{A}_2}(y))]=\\
&=\min[\sup_x\min(\mu_{\tilde{B}_1}(x),\ \mu_{\tilde{A}_1}(x)),\ \sup_y\min(\mu_{\tilde{B}_2}(y),\ \mu_{\tilde{A}_2}(y))]=\\
&=\min(\mathrm{POS}(\tilde{B}_1|\tilde{A}_1),\quad \mathrm{POS}(\tilde{B}_2|\tilde{A}_2)).
\end{aligned}$$

Доказательство (29). Сначала докажем следующую лемму, где $c\in[0,1]$, а f и g — отображения со значениями в [0, 1]:

$$\inf_x\max[\min(f(x),\ c),\ g(x)]=\min[c,\ \inf_x\max(f(x),\ g(x))]$$

тогда и только тогда, когда $\inf_x g(x)\leq c$, Имеем

$$\begin{aligned}
&\inf_x\max[\min(f(x),\ c),\ g(x)]=\inf_x\min[\max(f(x),\ g(x)),\ \max(c,\ g(x))]=\\
&=\min[\inf_x\max(f(x),\ g(x)),\ \max(c,\ \inf_x g(x))].
\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}
&\mathrm{NES}\,(\widehat{B}_1\times\widehat{B}_2\,|\,\widehat{A}_1\times\widehat{A}_2)=\\
&=\inf_{x,y}\max\,(\min\,(\mu_{\widehat{B}_1}(x),\ \mu_{\widehat{B}_2}(y)),\ 1-\min\,(\mu_{\widehat{A}_1}(x),\ \mu_{\widehat{A}_2}(y)))=\\
&=\inf_{y}\inf_{x}\max\,\{\max\,[\min\,(\mu_{\widehat{B}_1}(x),\mu_{\widehat{B}_2}(y)),1-\mu_{\widehat{A}_1}(x)],1-\mu_{\widehat{A}_2}(y)\}=\\
&=\inf_{y}\max\,\{\inf_{x}\max\,[\min\,(\mu_{\widehat{B}_1}(x),\mu_{\widehat{B}_2}(y)),1-\mu_{\widehat{A}_1}(x)],1-\mu_{\widehat{A}_2}(y)\}.
\end{aligned}$$

Если $\mu_{\widehat{A}_1}$ нормализована, то, применяя лемму, получим

$$\mathrm{NES}\,(\widehat{B}_1\times\widehat{B}_2\,|\,\widehat{A}_1\times\widehat{A}_2)=\inf_{y}\max\,\{\min\,(\mu_{\widehat{B}_2}(y),\ \inf_{x}\max\,(\mu_{\widehat{B}_1}(x),\ 1-\mu_{\widehat{A}_1}(x)))\ ,\ 1-\mu_{\widehat{A}_2}(y)\}.$$

Если $\mu_{\widehat{A}_2}$ нормализована, применяя лемму, получим далее

$$\mathrm{NES}\,(\widehat{B}_1\times\widehat{B}_2\,|\,\widehat{A}_1\times\widehat{A}_2)=\min\,(\inf_{x}\max\,(\mu_{\widehat{B}_1}(x),\ 1-\mu_{\widehat{A}_1}(x)),$$

$$\inf_{y}\max\,(\mu_{\widehat{B}_2}(y),\ 1-\mu_{\widehat{A}_2}(y)))=\min\,(\mathrm{NES}\,(\widehat{B}_1\,|\,\widehat{A}_1),\ \mathrm{NES}\,(\widehat{B}_2\,|\,A_2))\ .$$

10.5. Простейшие семантические операторы

10.5.1. Введение

Для описания нечетких семантических связок И и ИЛИ вводятся обобщенные математические операторы. Явная структура переменных, определяющих нечеткие множества, приводит, по крайнеймере, к трем связкам, каждой из них соответствуют различные аксиомы и различные математические операторы.
Для семантических связок И и ИЛИ, как и для их теоретико-множественного эквивалента — операций пересечения и объединения, — применительно к созданной им теории нечетких множеств Л. Заде предложил использовать операторы взятия минимума и максимума. Позднее были введены другие операторы, основанные на алгебраическом произведении, ограниченной сумме или более сложных операторах. Проведенные к настоящему времени экспериментальные исследования того, какие же из предложенных математических операторов наиболее соответствуют понятию семантической связки, не позволяют прийти к определенным решениям. Аксиоматические обоснования были рассмотрены в раде работ, причем в этих работах оправдывались операторы взятия

минимума и максимума. Некоторые объединяющие обоснования различных математических операторов, использованных для представления семантических связок, предоставило введение Т-норм . Для построения удовлетворительной аксиоматики должна быть очень тщательно рассмотрена точная природа множеств и требования идемпотентности. Пусть X — множество людей, а семейство $\mathscr{A}$ нечетких множеств, описывающих различные подмножества X, характеризуется возрастом каждого индивидуума, например, $\mathscr{A}=$ {старый, очень старый, молодой, ...}: тогда идемпотентность, по-видимому, подтверждается: «быть старым и старым» тождественно «быть старым».
Пусть второе семейство $\mathscr{B}$ подмножеств множества X характеризуется денежным доходом каждого индивидуума, например,$\mathscr{B}=$ = {богатый, бедный, довольно богатый, ...}: связь между $A\in\mathscr{A}$ и $B\in\mathscr{B}$ получается с помощью некоторых классических операторов продолжения подмножеств A и В до подмножества A' и B' множества X. Однако в этом случае чувствуется, что идемпотентность не обязана сохраняться. В качестве контрпримера рассмотрим двух женщин: Еву и Мэри. Пусть $\mu_{\text{богатая}}$ (Ева) =0,7, $\mu_{\text{молодая}}$ (Ева) = 0,2, $\mu_{\text{богатая}}$ (Мэри) =0,4, $\mu_{\text{молодая}}$ (Мэри) =0,2. Применение оператора взятия минимума приводит к заключению, что обе женщины с одной и той же интенсивностью 0,2 принадлежат к множеству «молодая и богатая». Допуская, что я предпочитаю жениться на «молодой и богатой» женщине, и что мое предпочтение должно привести меня к той женщине, которая в наибольшей степени принадлежит этому множеству, я чувствую, что Ева должна принадлежать ему больше, чем Мэри. Таким образом, оператор минимума оказывается здесь неподходящим.
В предлагаемом подходе , предложенном Ф. Сметсом, принимаются во внимание основные переменные, зависящие от $x\in X$, которыми характеризуются элементы семейств $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, ... Нечеткие подмножества A множества X могут подразделяться на одномерные и многомерные, если степень принадлежности $x\in X$ подмножеству A есть явная функция от одной или нескольких переменных, каждая из которых зависит от x. В том, что все подмножества X могут быть так разделены, уверенности нет: основные переменные, описывающие множества «красивых женщин» или «симпатичных людей», вряд ли существуют (тем не менее следует признать, что основная задача психометрических исследований как раз и состоит в определении количественно оцениваемых переменных, квантифицирующих такие понятия). В то время как применение операторов минимума и максимума для одномерных переменных нечетких множеств, по-

видимому, оправдано, они не подходят для многомерных переменных множеств. Основание этого положения строго аксиоматическое. Сначала введем аксиомы Беллмана — Гертса, которые оправдывают применение операторов минимума и максимума, а затем определение Т-норм и их конорм — S-норм.

10.5.1.1. Аксиомы БЕЛЛМАНА — ГЕРТСА

Пусть $\cap$ и $\cup$ — два бинарных оператора, ставящих в соответствие элементу из $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ элемент из $\mathcal{A}$.. и таких, что для всех $A,\ B,\ C\subseteq\mathcal{A}$ выполняются свойства:

А1. Коммутативности $A\cap B=B\cap A,\ A\cup B=B\cup A.$

А2. Ассоциативности $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$

А3. Дистрибутивности $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$

А4. Идемпотентности $A\cap A=A,\ A\cup A=A.$

Пусть $\mu_A(x),\ \mu_B(x)\in[0,1]$ — степени принадлежности $x\in\mathcal{A}$ к $A,\ B\subseteq\mathcal{A}.$

А5. Пусть $\mu_{A\cap B}(x)$ и $\mu_{A\cup B}(x)$ — функции, зависящие только от $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$., Тогда

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min(\mu_A(x),\ \mu_B(x)),$$

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max(\mu_A(x),\ \mu_B(x)).$$

10.5.1.2. Т-норма и S-норма

Т-норма — это бинарная функция из [0,1] × [0,1] в [0,1], такая, что:

Т1) $T(0,0)=0,\ T(x,1)=x,$

Т2) $T(x,\ y)\leqslant T(u,\ v)$ всякий раз, когда $x\leqslant u,\ y\leqslant v,$

Т3) $T(x,\ y)=T(y,\ x),$

Т4) $T(T(x,\ y),\ z)=T(x,\ T(y,\ z))$

Пусть дана Т-норма, определим S-норму как отображение из [0,1] × [0,1] в [0,1], основанное на отношении

$$S(x,\ y)=1-T(1-x,\ 1-y);\qquad(1)$$

S-норма удовлетворяет условиям:

1) $S(1,1)=1$ и $S(x,\ 0)=x,$

2) $S(x,\ y)\leqslant S(u,\ v)$ всякий раз, когда $x\leqslant u,\ y\leqslant v,$

3) $S(x,\ y)=S(y,\ x),$

4) $S(S(x,\ y),\ z)=S(x,\ S(y,\ z)).$

Показано, что те Т-нормы, которые удовлетворяют условию

$$T(x,\ y)+S(x,\ y)=x+y,\qquad(2)$$

принадлежат семейству T_s-норм (и их порядковым суммам) при $0\leq s\leq\infty$, где

$$T_s(x,\ y)=\begin{cases}\min(x,\ y), & s=0,\\ xy, & s=1,\\ \max(x+y-1,\ 0), & s=\infty,\\ \log_s(1+(s^x-1)(s^y-1)/(s-1)), & 0<s<\infty,\ s\neq 1.\end{cases}$$

Единственная идемпотентная T_s -норма — это T_0 -норма.

10.5.1.3. Отрицание

Воспользуемся определением Заде, введенным для дополнения к множеству $\mu_{\bar{A}}(x)=1-\mu_A(x)$. Чтобы обосновать это определение Беллману и Гертсу кроме свойства инволюции $(\bar{\bar{A}}=A)$ потребовались дополнительные свойства.

10.5.2. Многомерные нечеткие множества

Пусть дано множество X с элементами x. Пусть h_v (v=l, 2, ..., p) — множество характеристик, приданных x, которые могут быть описаны так, как если бы они были определены на действительной прямой R.

Пусть $\mathcal{A}_v$ — семейство определенных на X нечетких множеств, таких, что для каждого $x\in X$ принадлежность $\mu_A{}^V(x)$ характеристики h_v может быть выражена как явная функция от некоторой переменной $h_v: X\to R$, т. е.

$$\mu_{Av}(x)=f_v(h_v(x)).$$

Пусть семейство $\mathcal{A}_v$ замкнуто для операций отрицания, объединения и пересечения.

Пусть $\mathcal{A}$ — семейство нечетких множеств, определенных на X таких, что каждое множество $A\in\mathcal{A}$ получается из объединений, пересечений и отрицаний нечетких множеств $A^v\in\mathcal{A}_v$ для v=l, 2, ..., p при том ограничении, что соответствующая основная переменная h_v, которая соответствует $\mathcal{A}_v$, отличается от каждой из остальных характеристик.

Пусть, например, X — множество людей x с ростом h_1, весом h_2 и денежным доходом h_3... и пусть

$\mathcal{A}_1$ = {высокий, низкий, очень высокий, среднего роста,...},
$\mathcal{A}_2$ = {толстый, худой, очень тяжелый, ... },
$\mathcal{A}_3$ = {богатый, бедный, не очень богатый, ... }.
Пусть $\mathcal{A}$ есть семейство множеств, которые можно описать словами, определяющими элементы $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ и их комбинациями с помощью связок И и ИЛИ. Очевидно, не все множества, определенные на *X,* можно представить как некоторые элементы из $\mathcal{A}$, так как некоторые подмножества *X* не допускают представления через явные переменные, определенные действительными числами. Ограничимся изучением тех множеств, определенных на *X,* для которых основные переменные принимаются единодушно.
Для каждого *x* и каждого $A^{\nu}{}_i \in \mathcal{A}_\nu$ величина

$$\mu_{A_i^\nu}(x) \in [0, 1]$$

означает степень принадлежности *x* к $A^\nu{}_i$. Для упрощенияо бозначений будем писать

$$\mu_{A_i^\nu}(x) = a^{\nu}{}_i \quad \text{и} \quad \mu_A(x) = a,$$

опуская аргумент *x.*
Далее будет описана проблема оценивания *a* при заданных значениях соответствующих степеней принадлежности a_i.

10.5.3. Типы связок

Можно рассматривать три типа связок. Пусть $\wedge$ и $\vee$ соответствуют операторам И и ИЛИ, определенным на $\mathcal{A}_\nu \times \mathcal{A}_\nu$ и со значениями в $\mathcal{A}_\nu$. Пусть × и + соответствуют операторам И и ИЛИ на $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_p$ со значениями в $\mathcal{A}$ (определение корректно, поскольку × и + ассоциативные операторы). Пусть ∩ и $\bigcup$ соответствуют операторам И и ИЛИ (определенным на $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ со значениями в $\mathcal{A}$ *).* Опираясь на определенные в разд. 2 три семейства $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$, приведем пример использования трех типов связок И: ((высокий ∧ , очень высокий) ×толстый×бедный) ∩ (очень высокий × худой × не очень богатый)). Покажем, что ∧ и ∨ соответствуют операторам взятия минимума и максимума *(*T_0-, S_0-нормы), что × и + опираются на некоторую T-норму, и что ∩ и $\bigcup$ представляют собой новые операторы.

10.5.4. Базисные множества

10.5.4.1. Базисные множества семейства $\mathcal{A}$

Под базисными множествами семейства $\mathcal{A}$ понимается любое множество $A \in \mathcal{A}$, для которого допустимо представление в виде $A = A^1 \times A^2 \times \dots \times A^p = \bigtimes_{\nu=1}^{p} A^\nu$, где $A^\nu \in \mathcal{A}_\nu$, $\nu = 1, \dots, p$. Функция, представляющая степень принадлежности *a* базисного множества *A,* должна зависеть только от a^ν $(\nu=1,\dots,p)$ и быть коммутативной, ассоциативной и монотонной по включению. Если $p = 2$ и $A^2 = X$, то $A=A^1$ и если $A^1=A^2 = \varnothing$, то $A = \varnothing$. Поэтому функция, представляющая оператор ×, будет T-нормой. Пусть $a = T(\{a^\nu\})$, где
$T\colon [0, 1]^p \to [0, 1]$ есть оператор, полученный итеративным применением T-норм, например T_1-нормы: $T(\{a^\nu\}) = \prod_{\nu=1}^{p} a^\nu$. Поскольку $\mathcal{A}^\nu$ — элементы различных семейств $\mathcal{A}_\nu$, то понятие идемпотентности здесь бессмысленно. Действительно, если, например $A=A^1 \times A^2$, где $A^1 \in \mathcal{A}_1$ и $A^2 \in \mathcal{A}_2$, то эти два семейства подмножеств множества *X* зависят соответственно от двух различных характеристик *x.*
Однако понятие равенства элементов $\mathcal{A}_1$ элементами из $\mathcal{A}_2$ не определено.

10.5.4.2. Пересечение двух базисных множеств

Пусть A и *B* — базисные множества $\mathcal{A}$, т. е. $A = \bigtimes_{\nu=1}^{p} A^\nu$ и $B = \bigtimes_{\nu=1}^{p} B^\nu$. Определим пересечение A и B в виде

$$A \cap B = \bigtimes_{\nu=1}^{p} \; A^\nu \wedge B^\nu), \qquad (3)$$

где $\cap : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ и $\wedge : \mathcal{A}_\nu \times \mathcal{A}_\nu \to \mathcal{A}_\nu$, а *X* представляется с помощью T-нормы. Разумно требовать, чтобы оператор ∩ был коммутативдым, ассоциативным, монотонным по включению и обладал свойством *T1.*
При $p=1$ имеем $A \cap B = A^1 \wedge B^1$, поэтому оператор ∧ также должен представляться через T-норму.
Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — базисные множества семейства $\mathcal{A}$, т. е.

$A_i = \times_{i=1}^{p} A^{v}{}_i$, тогда из (3) получаем

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \times_{v=1}^{p} \left(A_1^v \wedge A_2^v \wedge \ldots \wedge A_n^v\right). \qquad (4)$$

Поскольку каждое семейство $\mathcal{A}_v$ замкнуто относительно пересечения, то $A^v{}_1 \wedge A^v{}_2 \wedge \ldots \wedge A^v{}_n \in \mathcal{A}_n$ и $\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ есть базисное множество семейства $\mathcal{A}$.

10.5.5. Небазисные множества

10.5.5.1. Небазисные множества семейства $\mathcal{A}$.

Небазисные множества семейства $\mathcal{A}$ можно построить как объединение базисных множеств $A_i \in \mathcal{A}$.

Итак, пусть для каждого $A \in \mathcal{A}$ существует *n,* такое, что $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, где каждое A_i — базисное множество семейства $\mathcal{A}$, т. е.

$A_i = \times_{v=1}^{p} A^v{}_i$, где $A^v{}_i \in \mathcal{A}_v$ для всех v.

Постулируем, что для всех $n \geq 1$ степень принадлежности x объединению $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ определяется выражением

$$\mu_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i} - \sum_{i>j=1}^{n} \mu_{A_i \cap A_j} + \sum_{i>j>k=1}^{n} \mu_{A_i \cap A_j \cap A_k} \ldots -$$

$$-(-1)^n \mu_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}, \qquad \textbf{(5)}$$

где

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

и аргументы x для всех функций μ опущены, постулат есть не что иное, как обобщенная форма требований аддитивности, с которыми обычно сталкиваются или же которые накладывают на степень принадлежности.

10.5.5.2. Случай *p=1*

Когда *p=1,* операторы ∩ и ⋃ сводятся к тем, которые были рассмотрены Беллманом и Гертсом; их аксиомы оправдывают представление через операторы взятия минимума и максимума. Этот же вывод можно получить, требуя, чтобы ∩ и ⋃ были *T*- и S-нормами при $p=1$. Соотношение (5) при $n=2$ сводится к $\mu_{A \cup B} = \mu_A + \mu_B - \mu_{A \cap B}$. При $a = \mu_A$ и $b = \mu_B$ имеем *S(a, b)=a + b—T(a, b).*

Таким образом, T-норма совпадает с T_s-нормой. Дополнительное требование, согласно которому оператор ∩ должен быть идемпотентным, приводит к тому, что s = 0. Поэтому при p=1 операторы минимума и максимума должны представлять связки ∩ и ⋃ . При *p=1* операторы ∩ и ⋃ сводятся к операторам ∧ и ∨, поэтому ∧ и ∨ должны быть T_0- и S_0-нормами.

10.5.5.3. Общие случаи, когда операторы ∧ представлены операторами минимума

Пусть множественные операторы ∧ представлены оператором минимума. Пусть $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, где A_i — базисные множества семейства $\mathcal{A}$, тогда по (4) А есть базисное множество $\mathcal{A}$ такое, что

$$\mu_{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = T\left(\left\{\bigwedge_{i=1}^{n} \mu_{A_i^v}\right\}\right), \qquad \textbf{(6)}$$

где T получается из T-нормы, представляющей оператор ×.

Соотношение (5) позволяет вычислить степень принадлежности любого подмножества $\mathcal{A}$, которое выражено в виде объединения базисных множеств семейства $\mathcal{A}$.

По построению оператор ∩ коммутативен и ассоциативен. Докажем свойство дистрибутивности при $n=3$ и $A, B, C \in \mathcal{A}$.

Из (5) получаем

$$\mu_{A \cup B \cup C} = \mu_A + \mu_B + \mu_C - \mu_{A \cup B} - \mu_{A \cap C} - \mu_{B \cap C} - \mu_{A \cap B \cap C}.$$

Объединяя *A* ⋃ *B,* из (5) получаем

$$\mu_{(A \cup B) \cup C} = \mu_A + \mu_B - \mu_{A \cap B} + \mu_C - \mu_{(A \cup B) \cap C},$$

поэтому

$$\mu_{(A \cup B) \cap C} = \mu_{A \cap C} + \mu_{B \cap C} - \mu_{A \cap B \cap C}. \qquad \textbf{(7)}$$

Для взаимной дистрибутивности пересечения относительно объединения требуется, чтобы

$$\mu_{(A\cup B)\cap C} = \mu_{(A\cap C)\cup(B\cap C)}. \quad (8)$$

Согласно (5) правую часть (8) можно переписать в виде

$$\mu_{A\cap C} + \mu_{B\cap C} - \mu_{A\cap B\cap C\cap C}. \quad (9)$$

В силу идемпотентности $C\cap C=C$. Таким образом, (7) и (9) совпадают и $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$. Наконец, оператор $\bigcup$ идемпотентен, так как

$$\mu_{A\cup A} = \mu_A + \mu_A - \mu_{A\cap A} = \mu_A, \quad A\bigcup A = A.$$

Поэтому $\bigcup$ и $\cap$ удовлетворяют требованиям (аксиомам) А1—А4 Беллмана — Гертса, но не удовлетворяют аксиоме А5. Действительно, чтобы подсчитать Л1ПЛ2 или $A_1\cap A_2$ для $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$, понадобятся все степени принадлежности

$$\mu_{A_i^\nu}$$

для всех i=1,2 и ν=1, 2,... , p, а не только μ_{A_1} и μ_{A_2}.

10.5.6. Дополнение и оператор +

Пусть для любого $A^\nu \in \mathscr{A}_\nu$ и $A \in \mathscr{A}$ степень принадлежности их дополнений $\overline{A}^{\,\nu}$ и $\overline{A}$ соответственно равны

$$1-\mu_{A^\nu}(x) \text{ и } 1-\mu_A(x).$$

Пусть $A = \underset{\nu=1}{\overset{p}{\times}} A^\nu$ есть базисное множество семейства $\mathscr{A}$, тогда $\mu_A = T(\{a^\nu\})$ и

$$\mu_{\overline{A}} = 1-\mu_A = 1-T(\{a^\nu\}) = S(\{1-a^\nu\}), \quad (10)$$

где $S:[0,1]^p \to [0,1]$ соответствует итеративному применению S-нормы, ассоциированной с Т-нормой, представляющей множественные операторы ×.

Множественный оператор $+ : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \times \ldots \mathscr{A}_p \to \mathscr{A}$ можно представить как объединение, при котором

$$A = \overset{p}{\underset{\nu=1}{+}} A^\nu \text{ и } A^\nu \in \mathscr{A}^\nu \in \mathscr{A}_\nu, \quad \mu_A = S(\{a^\nu\}).$$

Применение закона де Моргана для × и + дает, как и в (10),

$$\overline{\underset{\nu=1}{\overset{p}{\times}} A^\nu} = \overset{p}{\underset{\nu=1}{+}} \overline{A^\nu} \text{ и } \overline{\overset{p}{\underset{\nu=1}{+}} A^\nu} = \underset{\nu=1}{\overset{p}{\times}} \overline{A^\nu}.$$

Для определения

$$\bigcup_{i=1}^{n} \overset{p}{\underset{\nu=1}{+}} A^\nu{}_i \text{ и } \bigcap_{i=1}^{n} \overset{p}{\underset{\nu=1}{+}} A^\nu{}_i$$

для $A^\nu{}_i \ni \mathscr{A}_\nu$ для всех i и всех ν, можно построить операторы так, как это было сделано выше для $\cap\times$ и $\bigcup\times$ и затем вывести, что они подчиняются закону де Моргана.

Можно также постулировать закон де Моргана для $\cap$ и $\bigcup$ и вывести структуру математической функции, описывающей $\cap\times$ и $\bigcup\times$.

Пусть

$$\mu_{\overline{\underset{i\ \nu}{\cap\times} A_i^\nu}} = 1 - T(\{\bigwedge_i a_i^\nu\}) = S(\{1-\bigwedge_i a_i^\nu\}) = S(\{\bigvee_i (1-a_i^\nu)\})$$

$\overline{\underset{i}{\bigcap} \underset{\nu}{\times} A_i{}^\nu} = \underset{i}{\bigcup} \underset{\nu}{+} \overline{A_i{}^\nu}$, тогда

и определяет $\mu_{\underset{i\ \nu}{\cup+} A_i^\nu} = S(\{\bigvee_i a_i^\nu\})$. Аналогично из

$$\overline{\underset{i}{\bigcup} \underset{\nu}{\times} A_i^\nu} = \underset{i}{\bigcap} \underset{\nu}{+} \overline{A_i^\nu}$$

имеем

$$\mu_{\underset{i\ \nu}{\cup\times} A_i^\nu} = 1 - \mu_{\overline{\underset{i\ \nu}{\cup\times} A_i^\nu}} = 1 - \sum_i T(\{a_i^\nu\}) + \sum_{i>j} T(\{a_i^\nu \wedge a_j^\nu\})\ldots =$$

$$= 1 - \sum_i [1-S(\{1-a_i^\nu\})] + \sum_{i>j} [1-S(\{(1-a_i^\nu)\vee(1-a_j^\nu)\})]\ldots =$$

$$= \sum_i S_p(\{1-a_i^\nu\}) - \sum_{i>j} S(\{(1-a_i^\nu)\vee(1-a_j^\nu)\})\ldots$$

Итак, при $A_i = \overset{p}{\underset{\nu=1}{+}} A^\nu{}_i,\ A^\nu{}_i \in \mathscr{A}_\nu$ имеем

$$\mu_{\underset{i}{\cap} A_i} = \sum_i \mu_{A_i} - \sum_{i>j} \mu_{A_i \cup A_j} \ldots \quad (11)$$

Эти соотношения копируют соответствующие соотношения для $\cap\times$ и $\bigcup\times$ и удовлетворяют требованиям коммутативности, ассоциативности, взаимной дитрибутивности и идемпотентности.

ПРИМЕР

Пусть Т-норма, представляющая оператор ×, будет T_0-нормой. Тогда, если $\mu_{A_i^\nu}(x) = a^\nu{}_i$ и $A^\nu{}_i \in \mathscr{A}_\nu$ для всех i=1, ..., n и всех ν=1, ..., p, то

$$\mu_{\bigcap\limits_i \times\limits_v A_i^v} = \prod_v \bigwedge_i a_i^v,$$

$$\mu_{\bigcup\limits_i \times\limits_v A_i^v} = \sum_i \prod_v a_i^v - \sum_{i>j} \prod_v a_i^v \wedge a_j^v + \ldots - (-1)^n \prod_v \bigwedge_i a_i^v,$$

$$\mu_{\bigcap\limits_i +\limits_v A_i^v} = 1 - \sum_i \prod_v (1 - a_i^v) + \sum_{i>j} \prod_v (1 - a_i^v \vee a_j^v) \ldots,$$

$$\mu_{\bigcup\limits_i +\limits_v A_i^v} = \sum_v \bigvee_i a_i^v - \sum_{v>p} (\bigvee_i a_i^v)(\bigvee_i a_i^p) + \ldots$$

Введены математические операторы, которые могут быть использованы для моделирования семантики операторов И и ИЛИ, применительно к сложным подмножествам, определение которых явным образом зависит от нескольких переменных. Дальнейшее обобщение можно получить, считая, что операторы $\bigwedge : \mathscr{A}_v \times \mathscr{A}_v \to \to \mathscr{A}_v$ и Т-нормы зависят от v. В вычислительном отношении эти операторы сложны, поскольку требуют запоминания всех переменных и не обладают простотой минимаксных и других классических операторов. Тем не менее они сохраняют требуемые аксиоматические свойства и их большая гибкость может в будущем оправдать интерес к ним.

10.6 Модель нечеткой системы, основанная на нечеткой логической структуре

Х. Танака, Т. Цукияма, К- Асаи [1]

Нечеткое условное высказывание «если $\underset{\sim}{A}$, то $\underset{\sim}{B}$» может рассматриваться как вербальное выражение нечеткой системы. Множества $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$ интерпретируются как нечеткий вход и нечеткий выход системы, отношение между которыми определяется моделью нечеткой системы *R.* Рассматриваемая проблема состоит в отыскании модели нечеткой системы $B = A \circ R$, основанной на заданной нечеткой логической структуре.

10.6.1. Введение

Нечеткость в процессах человеческого мышления привлекла внимание в связи с исследованиями и разработками таких, ориентированных на

человека, систем, как социальные или управленческие. Концепция нечеткости была подвергнута обсуждению с позиций нечеткой логики, представляющей собой важнейший понятийный аппарат исследования социальных систем. Здесь будет рассмотрен предложенный *Х. Танака, Т. Цукияма, К. Асаи,* метод моделирования систем, использующий нечеткую логику. Если нечеткие отношения вход — выход заданы, то модель системы можно сформулировать с помощью композиционного правила вывода. Система описывается матрицей отношения *R,* которая называется представлением системы. Тогда системное уравнение определяется выражением $B_1 = \underset{\sim}{A}_1 * R$, где

$\underset{\sim}{A}_1$ — нечеткое входное, $\underset{\sim}{B}_1$ — нечеткое выходное множества, а через $*$ обозначен некоторый оператор.

В социально-ориентированных системах пары вход—выход задаются нечеткими условными высказываниями (предложениями) типа «если $\underset{\sim}{A}$, то $\underset{\sim}{B}$», где $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$ — нечеткие подмножества входного универсума *U* и выходного универсума *V* соответственно. Совокупность таких высказываний можно рассматривать как вербальное задание нечеткой системы. Имея дело с нечетким условным высказыванием «если $\underset{\sim}{A}$, то $\underset{\sim}{B}$», которое в нечеткой логике записывается в виде $\underset{\sim}{A} \to \underset{\sim}{B}$, будем считать множество $\underset{\sim}{A}$ нечетким входным, множество $\underset{\sim}{B}$ — нечетким выходным. Поэтому запись $A \to \underset{\sim}{B}$ будет интерпретироваться как пара вход — выход $(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$.

В данном подходе упор делается на получение модели нечеткой системы, основанной на заданной логической структуре. Рассматриваются два различных типа системных моделей, соответствующих двум различным типам логических структур. Модели систем названы модель-I и модель- II . Относительно логической структуры модели-I предполагается, что большому входному множеству соответствует большое выходное множество. Для логической структуры модели-II, наоборот, предполагается, что большому входному множеству соответствует небольшое выходное множество. Рассматриваемая проблема состоит в том, чтобы получить системное представление *R* с некоторым оператором $*$, таким, что
1) $\underset{\sim}{B}_i = \underset{\sim}{A}_i * R$ для данной пары вход — выход $\underset{\sim}{A}_i \to \underset{\sim}{B}_i$ и 2) с логической структурой, заданной моделью-I или моделью- II в системе *R.*

10.6.2. Нечеткие правила вывода

Примером модели вывода может служить следующее правило:

нечеткое входное множество $\underset{\sim}{A}_1$: x мало,

нечеткое отношение R: x и y приблизительно равны (нечеткая система)

нечеткое выходное множество $\underset{\sim}{B}_1 = \underset{\sim}{A}_1 \circ R$: y более или менее мало.

Здесь $\circ$ — операция взятия минимаксного произведения.

Поскольку такое нечеткое высказывание, как $\underset{\sim}{A} \Rightarrow \underset{\sim}{B}$, задает нечеткое отношение между входными и выходными множествами, то нечеткую систему R можно определить условием

$$R = (A \times B) \cup (\overline{A} \times v), \quad \textbf{(1)}$$

где $\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B}$ —прямое произведение множеств $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$, а $\overline{\underset{\sim}{A}}$ — дополнение $\underset{\sim}{A}$. В эквивалентной формулировке имеем

$$R(u, v) = (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (\mu_{\overline{A}}(u) \wedge \mu_V(v)), \quad (2)$$

где μ_A, μ_B и μ_V — функции принадлежности множествам A, B и V, причем $(\mu_V(v)=1$ для всех v, а $\vee$ и $\wedge$ обозначают max и min соответственно, и $\mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A$.

Более общее высказывание «если $\underset{\sim}{A}$, то $\underset{\sim}{B}$, иначе $\underset{\sim}{C}$» можно записать как

$$R = \underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} \cup \overline{\underset{\sim}{A}} \times \underset{\sim}{C}. \quad \textbf{(3)}$$

Когда задана такая нечеткая система R, для входного $\underset{\sim}{A}$ и выходного $\underset{\sim}{B}$ множеств выполняется условие

$$\underset{\sim}{B} \neq \underset{\sim}{A} \circ R, \quad (4)$$

откуда следует, что система R задает не точное представление данного условного высказывания $\underset{\sim}{A} \rightarrow \underset{\sim}{B}$. Однако если использовать следующее определение $\underset{\sim}{R}$, данное Гёделем:

$$\mu_R(u, v) = \begin{cases} 1, \text{ если } \mu_A(u) \leqslant \mu_B(v), \\ \mu_B(v), \text{ если } \mu_A(u) > \mu_B(v), \end{cases} \quad \textbf{(5)}$$

то получим уравнение

$$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{B} \quad (6)$$

точно представляющее условное высказывание «если A, то B, иначе V». Нужно отметить, что «иначе С» заменяется на «иначе V». Чтобы привести определение Гёделя для альтернативы «иначе C», введем α-уровневое множество

$$\underset{\sim}{A}^{\alpha} \triangleq \{u | \mu_A(u) \geqslant \alpha, \quad u \in U\}, \quad \alpha \in [0, 1], \quad \textbf{(7)}$$

которое используется для исследования свойства дополнительности на множестве α-уровня, так как в нечетких подмножествах не существует дополнения (в четком теоретико-множественном смысле). Вместо условного высказывания «если A, то B, иначе С» для упрощения записи будем использовать обозначение $\underset{\sim}{A} \rightarrow \underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{C})$ и будем предполагать, что нечеткие множества $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$ нормальные, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \max_{u \in U} \mu_i(u) = 1 \\ \min_{u \in U} \mu_i(u) = 0, \end{aligned}\right\} i \in \{A, B\}. \quad (8)$$

Если множества в высказывании $A \rightarrow B(C)$ не нечеткие, то очевидно, что

$$A \circ R = B, \quad (9)$$

даже если воспользоваться следующим определением:

$$R = A \times B \cup \overline{A} \times C. \quad (10)$$

Имея это в виду, дадим следующее определение представления системы.

Определение 1. Нечеткое условное высказывание $\underset{\sim}{A} \rightarrow \underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{C})$ представляются в виде

$$\underset{\sim}{R} = \sup_{\alpha' \in [0, 1]} \alpha' \Big(\bigcap_{\alpha \leqslant \alpha'} R^{\alpha} \Big), \quad (11)$$

где

$$R^{\alpha} = A^{\alpha} \times B^{\alpha} \cup \overline{(A^{\alpha})} \times C^{\alpha}. \quad (12)$$

С этим определением связано следующее утверждение.

Утверждение 1. Представление системы $\underset{\sim}{R}$, задаваемое определением 1, эквивалентно представлению

$$R = A \otimes B, \quad \textbf{(13)}$$

функция принадлежности которого определяется как

$$\mu_R(u, v) = \begin{cases} \mu_C(v); & \mu_A(u) \leqslant \mu_B(v), \\ \mu_A(u) \wedge \mu_B(v) = \mu_B(v); & \mu_A(u) > \mu_B(v). \end{cases} \quad (14)$$

Утверждение 1 доказывается в приложении.

Представление системы $\underset{\sim}{R}$ в виде (11) соответствует определению Гёделя для случая $C=V$. Утверждение 1 определяет смысл представления системы соотношением (13).

10.6.3. Модель нечеткой системы

До сих пор рассматривалось представление системы *R,* содержащее только одно высказывание $A \to B(C)$. Теперь предположим, что задано много высказываний типа следующих:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{A}_1 \to \underset{\sim}{B}_1(\underset{\sim}{C}_1), \\ \underset{\sim}{A}_2 \to \underset{\sim}{B}_2(\underset{\sim}{C}_2), \\ \vdots \\ \underset{\sim}{A}_n \to \underset{\sim}{B}_n(\underset{\sim}{C}_n). \end{array}\right\} \quad \textbf{(15)}$$

Построим представление системы *R,* соответствующее системе высказываний (15). Здесь возникает проблема, как установить связки между нечеткими высказываниями. Рассмотрим (15) как высказывание: $\underset{\sim}{A}_1 \to \underset{\sim}{B}_1(\underset{\sim}{C}_1)$ и $\underset{\sim}{A}_2 \to \underset{\sim}{B}_2(\underset{\sim}{C}_2)$ и ... и $\underset{\sim}{A}_n \to \underset{\sim}{B}_n(\underset{\sim}{C}_n)$.

Следующее отношение:

$$\underset{\sim}{C}_i \supset \bigcup_j \underset{\sim}{B}_j \quad \textbf{(16)}$$

оказывается вполне допустимым, поскольку $\overline{A}_i$ обладает возможностью соответствовать условию

$\underset{\sim}{B} \supset \underset{\sim}{B}_1 \cup \ldots \cup \underset{\sim}{B}_{i-1} \cup \underset{\sim}{B}_{i-1} \cup \underset{\sim}{B}_{i+1} \cup \ldots \cup \underset{\sim}{B}_n$.

Поэтому в общем случае $\underset{\sim}{C}_i$ рассматривается как *V,* т. е. C_i= V. Если же (15) представлять как высказывание $\underset{\sim}{A}_1 \to \underset{\sim}{B}_1(\underset{\sim}{C}_1)$ или $\underset{\sim}{A}_2 \to \underset{\sim}{B}_2(\underset{\sim}{C}_2)$ или, ... или $\underset{\sim}{A}_n \to \underset{\sim}{B}_n(\underset{\sim}{C}_n)$, то при этом справедливо отношение

$$\underset{\sim}{C}_i \subset \bigcap_j \underset{\sim}{B}_j, \quad (17)$$

поскольку $\underset{\sim}{A}_i$ обладает возможностью соответствовать $\underset{\sim}{B} \subset \underset{\sim}{B}_1 \cap \ldots \cap \underset{\sim}{B}_{i-1} \cap \underset{\sim}{B}_{i+1} \cap \ldots \cap \underset{\sim}{B}_n$. Поэтому в общем случае предполагается, что $\underset{\sim}{C}_i = \varnothing$. Тогда для упрощения будем предполагать, что $\underset{\sim}{C} = V$ или $C = \varnothing$. Исходя из сказанного, будем придерживаться следующей интерпретации: запись $\underset{\sim}{C} = V$ означает «любой элемент в *V*», а запись $\underset{\sim}{C} = \varnothing$ — «неизвестен как элемент *V*». Рассматриваемая проблема состоит в получении представления системы

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X} * \underset{\sim}{R} \quad \textbf{(18)}$$

введением следующих двух логических структур.

Модель-I. Моделью-I называется система $\underset{\sim}{R}$, такая, что выполняются следующие условия:

1) для всех заданных пар вход—выход $(\underset{\sim}{A}_i, \underset{\sim}{B}_i)$

$\underset{\sim}{B}_i = \underset{\sim}{A}_i * \underset{\sim}{R}$;

2) для входных множеств $\underset{\sim}{A}'_i$ и $\underset{\sim}{A}''_i$ за исключением данного входного множества $\underset{\sim}{A}_i$

$$\underset{\sim}{A}'_i \subset \underset{\sim}{A}_i \subset \underset{\sim}{A}''_i \Rightarrow \underset{\sim}{B}'_i = \underset{\sim}{A}'_i * \underset{\sim}{R} \subset \underset{\sim}{B}_i \subset \underset{\sim}{B}''_i = \underset{\sim}{A}''_i * \underset{\sim}{R}.$$

Модель-II. Моделью-II называется система $\underset{\sim}{R}$, такая, что выполняются следующие условия:

1) для всех заданных парвход— выход $(\underset{\sim}{A}_i, \underset{\sim}{B}_i)$

$\underset{\sim}{B}_i = \underset{\sim}{A}_i * \underset{\sim}{R}$;

2) для данных нечетких входных множеств $\underset{\sim}{A}'_i$ и $\underset{\sim}{A}''_i$, за исключением данной пары вход — выход

$$\underset{\sim}{A}'_i \subset \underset{\sim}{A}_i \subset \underset{\sim}{A}''_i \Rightarrow \underset{\sim}{B}'_i = \underset{\sim}{A}'_i * \underset{\sim}{R} \supset \underset{\sim}{B}_i \supset \underset{\sim}{B}'_i = \underset{\sim}{A}'_i * \underset{\sim}{R}.$$

Описанные логические структуры приводят к следующему выводу. В модели-I пересечение $\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2$ должно быть ассоциировано с $\underset{\sim}{B} \subset \underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2$, в модели-II пересечение $\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2$ должно быть ассоциировано с $\underset{\sim}{B} \supset \underset{\sim}{B}_1 \cup \underset{\sim}{B}_2$. Следовательно, модель-I и модель-II могут рассматриваться как двойственные системы.

10.6.4. Представление системы в модели- I

Модель-I представляет такое отношение между входным и выходным множествами, при котором, чем меньше нечеткое входное множество, тем меньше нечеткое выходное. Эти соответствия проиллюстрированы на рис. 1.

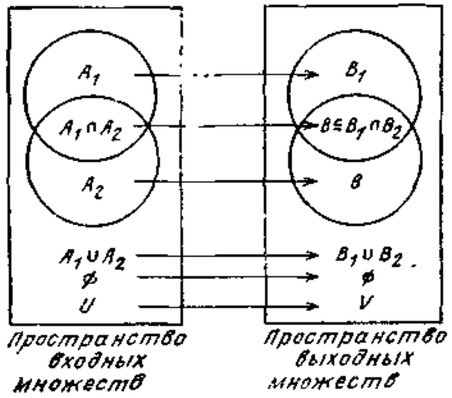


Рис. 1 Логическая структура модели I

Система, удовлетворяющая условиям модели-I, может быть определена выражением

$$\chi_Y(v) = \sup_{u \in U}\{\chi_X(u) \wedge \chi_R(u, v)\}, \quad (19)$$

где χ_X, χ_Y и χ_R —характеристические функции входного множества X, выходного Y и отношения R соответственно.
Поскольку каждое нечеткое подмножество может быть составлено из его уровневых множеств, то представление нечеткой системы, соответствующее (19), можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\mu_Y(v) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \sup_{u \in U}\{\chi_{X^\alpha}(u) \wedge \chi_{R^\alpha}(u, v)\}] = \\ &= \sup_{u \in U}\{\sup_{\alpha \in [0,1]}(\alpha \wedge \chi_{X^\alpha}(u)) \wedge \sup_{\alpha \in [0,1]}(\alpha \wedge \chi_{R^\alpha}(u, v))\} = \\ &= \sup_{u \in U}\{\mu_X(u) \wedge \mu_R(u, v)\} = \mu_{X \circ R}(v). \qquad \mathbf{(20)}\end{aligned}$$

Отсюда следует допустимость для модели-I (max—min) -оператора.
Предположим, что $\hat{R}$ уже построено с помощью отношений вход — выход и предъявляется дополнительная информация $\underset{\sim}{A}_1 \to \underset{\sim}{B}_1$. Тогда определим представление системы $\hat{R}$, содержащее $\hat{R}'$ и $\underset{\sim}{A}_1 \to \underset{\sim}{B}_1$, выражением

$$\underset{\sim}{\hat{R}} = \underset{\sim}{A}_1 \otimes \underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{\hat{R}}'. \quad (21)$$

Если считать, что R' не содержит информации относительно входного множества $\underset{\sim}{A}_1$, то система $\hat{R}$ на выходе, соответствующая входному множеству $\underset{\sim}{A}_1$ может рассматриваться как «любой элемент в V», т. е.

$$\underset{\sim}{A}_1 \circ \hat{R}' = V. \quad (22)$$

Следовательно, имеем

$$\underset{\sim}{A}_1 \circ \underset{\sim}{\hat{R}} = \underset{\sim}{B}_1. \quad (23)$$

Нужно заметить, что в модели-I $\underset{\sim}{C}$ = V.
Рассмотрим два отношения вход — выход $\underset{\sim}{A}_1 \to \underset{\sim}{B}_1$ и $\underset{\sim}{A}_2 \to \underset{\sim}{B}_2$, которые не противоречат друг другу в смысле (22). Говоря более точно, непротиворечивые отношения можно записать как

$$\left.\begin{aligned}\underset{\sim}{A}_1 \circ (\underset{\sim}{A}_2 \otimes \underset{\sim}{B}_2) = V, \\ \underset{\sim}{A}_2 \circ (\underset{\sim}{A}_1 \otimes \underset{\sim}{B}_1) = V.\end{aligned}\right\} \quad \mathbf{(24)}$$

Для двух отношений, удовлетворяющих (24), имеем

$$(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2) \circ (\underset{\sim}{A}_1 \otimes \underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2 \otimes \underset{\sim}{B}_2) \subseteq \underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2. \quad (25)$$

Поэтому в данной постановке справедливы следующие логические структуры:

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\sim}{A}_1 \to \underset{\sim}{B}_1, \\ &\underset{\sim}{A}_2 \to \underset{\sim}{B}_2, \\ &\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2 \to \underset{\sim}{B} \subseteq \underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2.\end{aligned}\right\} \quad \mathbf{(26)}$$

Предположение, подобное (24), исключает логическое противоречие, состоящее в том, что данные пары $(\underset{\sim}{A}_i, \underset{\sim}{B}_i)$ противоречат логической структуре модели-I. Простой пример противоречия строится на парах $\underset{\sim}{A}_1 \to \underset{\sim}{B}_1$ и $\underset{\sim}{A}_2 \to \underset{\sim}{B}_2$ таких, что $\underset{\sim}{A}_1 \supset \underset{\sim}{A}_2$ и $\underset{\sim}{B}_1 \subset \underset{\sim}{B}_2$.
Предположение (22) должно рассматриваться как предварительное, поскольку необходимое и достаточное условия для исключения логического противоречия очень сложные. В качестве более слабой по сравнению с (22) формы можно использовать следующее условие:

$$\underset{\sim}{A}_1 \circ \underset{\sim}{\hat{R}}' \supseteq \underset{\sim}{B}_1. \quad (27)$$

Пусть в общем случае данные пары не удовлетворяют условию (22) или (27). Чтобы избежать противоречия, можно предложить следующие процедуры. Для данных $\underset{\sim}{\hat{R}}_0$ и $\underset{\sim}{A}_1 \to \underset{\sim}{B}_1$ выбрать одну из альтернатив:

1) рассматривать B_1 как $B_1 \cap (A_1 \circ \hat{R}_0)$,

2) заменить $\hat{R}_0$ так, чтобы $(A_1 \circ \hat{R}_0) \supseteq B_1$

Из альтернативы 1 следует, что пары вход — выход, формирующие $\hat{R}_0$, предшествуют задаваемой теперь паре $A_1 \to B_1$. Наоборот, из альтернативы 2 следует, что заданная теперь пара $A_1 \to B_1$ предшествует ранее заданным парам, т. е. $\hat{R}_0$. Нужно отметить, что представление системы, сформированное согласно процедуре 1, эквивалентно представлению

$$\hat{R} = (A_1 \otimes B_1) \cap (A_2 \otimes B_2) \cap \ldots \cap (A_n \otimes B_n), \qquad \textbf{(28)}$$

достроенному без учета непротиворечивых условий.

Если на n парах $(A_i \to B_i)$ выполняются условия непротиворечивости типа условий (24), то имеем

$$\left.\begin{aligned} &A_i \circ \hat{R} = B_i, \\ &(A_i \cap A_j) \circ \hat{R} \subseteq B_i \cap B_j, \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

где $\hat{R} = (A_1 \otimes B_1) \cap \ldots \cap (A_n \otimes B_n)$. Таким образом, эта система имеет логическую структуру модели-I. Отношения вход — выход, полученные экспертным путем, рассматривались как причинные связи в том смысле, что с увеличением нечеткого множества входов увеличивается нечеткое множество выходов.

Пример 1. В проблеме принятия решений альтернативные действия представлены как нечеткие множества в пространстве, которое характеризуется следующими элементами

a_1) сдерживание зарплаты рабочих,
a_2) вложения в оборудование,
a_3) введение автоматизированных механизмов,
a_4) усиление активности по рекламе продукции и корпорации,
a_5) вложения в исследования и разработки.

Результаты, соответствующие альтернативным решениям, также описываются нечеткими множествами в пространстве, которое характеризуется следующими элементами:

b_1) увеличение продажи,
b_2) увеличение производительности,
b_3) увеличение прибыли,
b_4) увеличение темпов.

Два отношения на вход — выход заданы в виде

$$\left.\begin{aligned} &A_1 = 1{,}0/a_1 + 0{,}8/a_2 + 0{,}4/a_3 + 0/a_4 + 0/a_5 \\ &\quad \to B_1 = 0/b_1 + 0{,}4/b_2 + 0{,}8/b_3 + 1{,}0/b_4, \\ &A_2 = 0/a_1 + 0{,}1/a_2 + 0{,}6/a_3 + 0{,}8/a_4 + 1{,}0/a_5 \\ &\quad \to B_2 = 1{,}0/b_1 + 0{,}6/b_2 + 0{,}1/b_3 + 0/b_4. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Система $\hat{R}$, заданная двумя парами вход — выход, имеет вид

$$\hat{R} = A_1 \otimes B_1 \cap A_2 \otimes B_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0{,}4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (31)$$

Этот пример удовлетворяет условию непротиворечивости (24). Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} &A_1 \circ \hat{R} = B_1, \quad A_2 \circ \hat{R} = B_2, \\ &(A_1 \cap A_2) \circ \hat{R} = (B_1 \cap B_2). \end{aligned} \qquad \textbf{(32)}$$

Рассмотрим другое нечеткое входное множество

$$A^* = 0/a_1 + 0{,}6/a_2 + 1{,}0/a_3 + 0{,}6/a_4 + 0/a_5, \qquad (33)$$

которое считается средним между A_1 и A_2. Применяя A^* к $\hat{R}$, получаем:

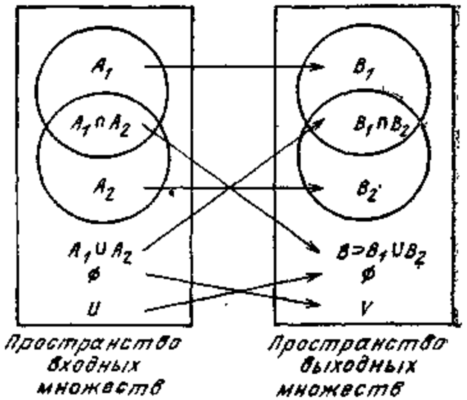
$$B^* = A^* \circ \hat{R} = [0 \quad 1{,}0 \quad 0{,}6 \quad 0], \qquad \textbf{(34)}$$

что можно рассматривать как среднее между B_1 и B_2.

Таким образом, данное представление системы $\hat{R}$ можно считать адекватным в том смысле, что среднее между B_1 и B_2 выходное множество B^* соответствует среднему входному множеству A^*.

10.6.5. Представление системы в модели- II

Рассмотрим представление системы в модели- II , которое в противоположность модели-I наделено отношением, при котором, чем меньше нечеткое множество входов, тем больше нечеткое множество выходов. Это соответствие проиллюстрировано на рис. 2.



Рие. 2. Логическая структура модели- II

Рассмотрим сначала не нечеткий случай, для которого отношения вход — выход можно представить в виде

$$\chi_Y(v) = \inf_{u \in U} \{(1 - \chi_X(u)) \vee \chi_R(u, v)\} = \inf_{u \in U} \{\chi_{\overline{X}}(u) \vee \chi_R(u, v)\}. \quad (35)$$

Используя процесс размывания, аналогичный примененному в модели-I, получаем следующее представление нечеткой системы:

$$\begin{aligned}\mu_Y(v) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \inf_{u \in U} \{\chi_{\overline{X}\alpha}(u) \vee \chi_{R^\alpha}(u, v)\}] = \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \inf_{u' \in \{u \mid \chi_{X^\alpha}(u) = 1\}} \{\chi_R(u', v)\}] = \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \inf_{u' \in \{u \mid \chi_{X^\alpha}(u) > \chi_{R^\alpha}(u, v)\}} \{\chi_{R^\alpha}(u', v)\}] = \\ &= \inf_{u' \in \{u \mid \mu_X(u) > \mu_R(u, v)\}} \{\mu_R(u', v)\}, \qquad (36)\end{aligned}$$

где $\inf\{\mu_R(u', v)\} = 1$, если множество $\{u \mid \mu_X(u) > \mu_R(u, v)\}$ пустое. Эта операция в (36) называется δ-композицией и обозначается δ . С ее помощью получаем системное представление модели-II, выведенное из данных пар вход — выход.

Предположим, что на основе пар вход — выход уже построено отношение R^*_o и теперь сообщается дополнительная информация $\underset{\sim}{A}_1 \to \underset{\sim}{B}_1$. Так как в модели- II отношения вход — выход связаны посредством «или», т. е. $\underset{\sim}{A}_1 \to \underset{\sim}{B}_1$ или $\underset{\sim}{A}_2 \to \underset{\sim}{B}_2$ или... или $\underset{\sim}{A}_n \to \underset{\sim}{B}_n$, то представление системы $\underset{\sim}{R}$ * определим как

$$\underset{\sim}{R}^* = (A_1 \times B_1) \cup R_0^*.$$

Полагая, что $\underset{\sim}{R}\ {}^*_o$ не несет информации относительно $\underset{\sim}{A}_1$, систему $\underset{\sim}{R}\ {}^*_0$ на выходе, соответствующую $\underset{\sim}{A}_1$, можно рассматривать как «элемент, не известный в *V»*, т. е.

$$\underset{\sim}{A}_1 \,\delta\, \underset{\sim}{R}_0^* = \emptyset. \quad (38)$$

Нужно отметить, что в модели- II C= $\emptyset$.

Применяя $\underset{\sim}{A}_1$ к $\underset{\sim}{R}^*$, получим

$$\underset{\sim}{A}_1 \,\delta\, [(\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{B}_1) \cup \underset{\sim}{R}_0^*] = \underset{\sim}{B}_1, \quad (39)$$

что удовлетворяет свойству модели- II.

Теперь рассмотрим две пары вход — выход $\underset{\sim}{A}_1 \to \underset{\sim}{B}_1$ и $\underset{\sim}{A}_2 \to \underset{\sim}{B}_2$.

Запишем условие непротиворечивости

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\sim}{A}_1 \,\delta\, (\underset{\sim}{A}_2 \times \underset{\sim}{B}_2) = \emptyset, \\ &\underset{\sim}{A}_2 \,\delta\, (\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{B}_1) = \emptyset.\end{aligned}\right\}$$

Очевидно, что

$$\underset{\sim}{B} = (\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2) \,\delta\, \underset{\sim}{R}^* \supseteq \underset{\sim}{B}_1 \cup \underset{\sim}{B}_2. \quad \mathbf{(41)}$$

Следовательно, получим

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\sim}{A}_1 \to \underset{\sim}{B}_1, \\ &\underset{\sim}{A}_2 \to \underset{\sim}{B}_2, \\ &\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2 \to \underset{\sim}{B} \supset \underset{\sim}{B}_1 \cup \underset{\sim}{B}_2.\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Вообще говоря, если существует условие непротиворечивости на *n* парах $(\underset{\sim}{A}_i \to \underset{\sim}{B}_i)$, аналогичное (40), то имеем

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\sim}{A}_i \,\delta\, \underset{\sim}{R}^* = \underset{\sim}{B}_i, \\ &(\underset{\sim}{A}_i \cap \underset{\sim}{A}_j) \,\delta\, \underset{\sim}{R}^* \supseteq \underset{\sim}{B}_i \cup \underset{\sim}{B}_j,\end{aligned}\right\} \quad \mathbf{(43)}$$

что удовлетворяет логической структуре модели- II.

Вместо (40) можно использовать менее жесткое условие

$$\underset{\sim}{A}_1 \,\delta\, \underset{\sim}{B}_0^* \subseteq \underset{\sim}{B}_1. \quad \mathbf{(44)}$$

Если же для используемых данных условия непротиворечивости вроде (44) не существует, то можно рассмотреть следующие процедуры.

Для разрешения противоречия при заданных $\underset{\sim}{R}\ {}^*_o$ и $\underset{\sim}{A}_1 \to \underset{\sim}{B}_1$ можно выбрать одну из двух альтернатив:

1) рассматривать $\underset{\sim}{B}_1$ как $\underset{\sim}{B}_1 \cup (\underset{\sim}{A}_1 \delta \underset{\sim}{R}^*{}_0)$;

2) заменить $\underset{\sim}{R}\,{}^*{}_o$ так, чтобы $(\underset{\sim}{A}_1 \delta \underset{\sim}{R}^*{}_0) \subset \underset{\sim}{B}_1$.

Смысл альтернатив 1 и 2 описан в разд. 3. Выбор альтернативы 1 или 2 зависит от предпочтений на исходных данных.

Как указывалось ранее, логическая структура модели- II такова, что чем больше нечеткое входное воздействие, тем меньше реакция на выходе системы. Это можно пояснить следующим образом. Чем больше импульсов поступает на вход системы, тем меньше разброс значений на выходе из нее. Например, в медицинской диагностике с ростом числа обследований больного сокращается число возможных диагнозов заболеваний. С этой точки зрения модель- II можно применять к классификации образов, в системах обработки информации, кластерном анализе и т. п.

Пример 2. Рассмотрим проблему кластерного анализа, в которой пространство на входе характеризуется следующими ключевыми словами:

a_1) исследование операций,
a_2) разработка систем,
a_3) промышленная разработка,
a_4) исследование рынка,
a_5) анализ стоимости,

а на выходе — следующими кластерами:

b_1) разработка продукции,
b_2) науки управления,
b_3) социальные науки,
b_4) математика.

Если заданы два отношения вход — выход

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\sim}{A}_1 = 1,0/a_1 + 0,8/a_2 + 0,2/a_3 + 0/a_4 + 0/a_5 \\ &\quad \to \underset{\sim}{B} = 0,4/b_1 + 0,2/b_2 + 0,3/b_3 + 1,0/b_4, \\ &\underset{\sim}{A}_2 = 0/a_1 + 0/a_2 + 0,5/a_3 + 1,0/a_4 + 0,2/a_5 \\ &\quad \to \underset{\sim}{B}_2 = 0,5/b_1 + 1,0/b_2 + 0,1/b_3 + 0/b_4, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

то система R^* запишется в виде

$$R^* = (\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{B}_1) \cup (\underset{\sim}{A}_2 \times \underset{\sim}{B}_2) = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 & 1,0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 & 0,8 \\ 0,5 & 0,5 & 0,2 & 0,2 \\ 0,5 & 1,0 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{46}$$

В этом примере выполняется условие непротиворечивости, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\sim}{A}_1 \,\delta\, (\underset{\sim}{A}_2 \times \underset{\sim}{B}_2) = \varnothing, \\ &\underset{\sim}{A}_2 \,\delta\, (\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{B}_2) = \varnothing. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Следовательно, имеем

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\sim}{A}_1 \,\delta\, \underset{\sim}{R}^* = \underset{\sim}{B}_1, \\ &\underset{\sim}{A}_2 \,\delta\, \underset{\sim}{R}^* = \underset{\sim}{B}_2, \\ &(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2) \,\delta\, \underset{\sim}{R}^* \supset \underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Подавая на вход системы $\underset{\sim}{R}\,*$ воздействие, описываемое нечетким множеством

$$\underset{\sim}{A}^* = 0/a_1 + 0,5/a_2 + 1,0/a_3 + 0/a_4 + 0/a_5, \tag{49}$$

получаем

$$\underset{\sim}{B}^* = \underset{\sim}{A}^* \,\delta\, \underset{\sim}{R}^* = [0 \;\; 0,5 \;\; 1,0 \;\; 0 \;\; 0] \,\delta \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 & 1,0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 & 0,8 \\ 0,5 & 0,5 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 1,0 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0 \end{bmatrix} = [0,4 \;\; 0,2 \;\; 0,2 \;\; 0,2].$$

Для нечеткого входного множества, сильно отличающегося от данных нечетких входных множеств $\underset{\sim}{A}_i$, выходное множество системы $\underset{\sim}{R}\,*$ должно быть близко
к нулю, как в приведенном примере, поскольку $\underset{\sim}{R}\,*$ строится по данным отношениям вход — оыход. Тот факт, что нечеткое выходное множество $\underset{\sim}{B}\,*$ близко к нулю, означает, что к нечеткому входному множеству $\underset{\sim}{A}\,*$ приложимо определение «неизвестно».

На основе двух различных типов логических структур рассмотрены модели нечеткого вывода. Предложенный подход состоит в следующем. Поскольку для нечетких подмножеств не существует дополнения, заданные нечеткие множества декомпозируются на α-уровневые множества, на которых и рассматривается закон дополнительности. Следовательно, предлагаемая формулировка переносится на четкий случай и затем размывается для получения нечеткой формулировки. Эта идея, естественно, приводит к пригодному для рассматриваемой модели определению Гёделя. Описанный прием для исключения логического противоречия в отношениях вход — выход нужно рассматривать лишь как экспериментальный. Если данные непротиворечивы, то модели пригодны для работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Из определения 1 следует, что

$$R(u,\ v)=\sup_{\alpha'}[\alpha\wedge\inf_{\alpha'\in[0,\alpha']}\{\chi_{A^\alpha}(u)\wedge\chi_{B^\alpha}(v)\}\vee\{(1-\chi_{A^\alpha}(u))\wedge\chi_{C^\alpha}(v)\}].$$

Сначала рассмотрим случай $\mu_A(u)>\mu_B(v)$. Для $\forall\alpha'>\mu_B(v)$ найдется α, такое, что $\mu_A(u)>\alpha>\mu_B(v)$, где $R(u, v)=\varnothing$. Для $\forall\alpha'\leqslant\mu(v)$ имеем

$$R(u,\ v)=\sup_{\alpha'\in[0,\ \mu_B(v)]}[\alpha'\wedge\inf_{\alpha\in[0,\ \alpha']}\{\chi_{A^\alpha}(u)\wedge\chi_{B^\alpha}(v)\}]=$$

$$=\sup_{\alpha'\in[0,\ \mu_B(v)]}[\alpha'\wedge\chi_{A^{\alpha'}}(u)\wedge\chi_{B^{\alpha'}}(v)]=\mu_A(u)\wedge\mu_B(v), \qquad (51)$$

поскольку в этом случае

$1-\chi_{A^\alpha}(u)=0.$

Далее рассмотрим случай $\mu_A(u)\leqslant\mu_B(v)$.

Тогда

$$\chi_{A^\alpha}(u)\wedge\chi_{B^\alpha}(v)\vee(1-\chi_{A^\alpha}(u))=1,$$

откуда следует, что

$$R(u,\ v)=\sup_{\alpha'\in[0,\ 1]}[\alpha'\wedge\inf_{\alpha\in[0,\ \alpha']}\{(\chi_{A^\alpha}(u)\wedge\chi_{B^\alpha}(v))\vee\chi_{C^\alpha}(v)\}]=$$

$$=\sup_{\alpha'\in[0,\ 1]}[\alpha'\wedge\{(\chi_{A^{\alpha'}}(u)\wedge\chi_{B^{\alpha'}}(v))\vee\chi_{C^{\alpha'}}(v)\}]=$$

$$=(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee\mu_C(v)=\mu_C(v). \qquad (52)$$

Из (51) и (52) заключаем, что

$$\mu_R=\begin{cases}\mu_C(v), & \mu_A(u)\leqslant\mu_B(v),\\ \mu_A(u)\wedge\mu_B(v), & \mu_A(u)\geqslant\mu_B(v).\end{cases}$$

Литература

1. Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф., Силов В.Б., Тарасов В.Б. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта /Под ред. Д. А. Поспелова. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
2. Аверкин А.Н., Нгуен X. Использование нечеткого отношения моделирования для экспертных систем. - М.: ВЦ АН СССР, 1988.
3. Алиев Р.А., Абдикеев Н.М., Шахназаров М.М. Производственные системы с искусственным интеллектом. - М: Радио и связь. 1990.
4. Батыршин И.З. О мерах энтропии размытых множеств // Исследование операций и аналитическое проектирование в технике / Под ред. Ю.В. Кожевникова. -Казань: Казанск.авиац.ин-т, 1978, 40-45.
5. Батыршин И.З. О метрических свойствах алгебры Клини // XIX Всесоюзная алгебраическая конф. /Тез. докл.- Львов, 1987, ч. 2.- С. 19-20.
6. Батыршин И.З. Меры энтропии и метрические свойства алгебры нечетких множеств //Нечеткие системы: моделирование структуры и оптимизация/Под ред. А.В. Язенина. - Калинин:КГУ, 1987, 4-16.
7. Батыршин И.З. Лексикографические оценки правдоподобности с универсальными границами. I. - Техническая кибернетика. Известия академических наук. N 5.-1994. - С. 28-45.
8. Батыршин И.З. Лексикографические оценки правдоподобности с универсальными границами. II. Операции отрицания. - Теория и системы управления. Известия РАН, 1995, 5, 133-151.
9. Батыршин И.З. Общий взгляд на основные черты и направления развития нечеткой логики Л. Заде. - Новости искусственного интеллекта, № 2 - 3, 2001, 25 - 27.
10. Батыршин И.З. Методы представления и обработки нечеткой информации в интеллектуальных системах. - Новости искусственного интеллекта, 1996, 2, 9 - 65.
11. Батыршин И.З.. Параметрические классы нечетких конъюнкций в задачах оптимизации нечетких моделей. - Исследования по информатике, вып. 2. ИПИАН РТ. -Казань: Отечество, 2000, 63-70.
12. Батыршин И.З., Вагин В.Н. Об алгебре размытых множеств и алгебрах Де Моргана//Управление при наличии расплывчатых категорий/ Тез. докл. 3-го научно-техн. семинара - Пермь, 1980.- С. 27-29.

13. Батыршин И.З., Мотыгуллин А.Э. Оптимизация нечетких моделей Мамдани по параметрам операций. - Исследования по информатике, вып. 2. ИПИАН РТ. -Казань: Отечество, 2000, 71-76.
14. Батыршин И.З., Скворцов В.В. О полезностной интерпретации функции принадлежностии//Модели выбора альтернатив в нечеткой среде/ Тез.докл. Межреспубликанск.научн.конф.- Рига, 1984.- С. 100-102.
15. Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Нечеткие модели принятия решений: дедукция, индукция, аналогия. Монография. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001.
16. Биркгоф Г. Теория решеток.- М.:Наука, 1984.
17. Борисов А.Н., Алексеев А.В., Меркурьева Г.В. и др. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений.- М: Радио и связь. 1989.
18. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования.- Рига:Зинатне, 1990.
19. Васильев В.И., Ильясов Б.Г. Интеллектуальные системы управления с использованием нечеткой логики. Учебное пособие. - Уфа: УГАТУ, 1995. 20. Гетманова А.Д. Отрицания в системах формальной логики. - М.: МГПИ, 1972.
21. Гретцер Г. Общая теория решеток.- М.:Мир, 1982.
22. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. - М: Радио и связь. 1990.
23. Заде Л.А. Тени нечетких множеств. - Проблемы передачи информации. -1966,II,1,37-44.
24. Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений. - В кн.: Математика сегодня. - М.: Знание, 1974, 5-49.
25. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. - М.: Мир, 1976.- 165 с.
26. Заде Л. Роль мягких вычислений и нечеткой логики в понимании, конструировании и развитии информационных / интеллектуальных систем. - Новости искусственного интеллекта, № 2 - 3, 2001, 7-11.
27. Закуанов Р.А., Батыршин И.З., Бикушев Г.С., Архиреев В.П. Представление нечетких понятий в гибридной экспертной системе СМОПЛЕКС. - Труды международного семинара "Мягкие вычисления - 96"/ Под ред. И.З. Батыршина, Д.А. Поспелова, Казань, 1996, 122 -128. (URL: http://fuzzy.nm.ru/)

28. Зиновьев А.А. Очерк многозначной логики. - В кн.: Проблемы логики и теории познания. - М.: МГУ, 1968, с. 113 - 204.
29. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. - М.: Радио и связь, 1982.
30. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Коровин С.Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой.- М.: Наука, 1990.
31. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения /Под ред. Р.Р. Ягера.- М.: Радио и связь, 1986.
32. Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика.- М. Наука, 1986.
33. Прикладные нечеткие системы /Асаи К., Ватада Д., Иваи С. и др. /Под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено.- М.: Мир, 1993.
34. Салимов А.Х., Батыршин И.З. Оптимизация нейро-нечетких моделей Сугено по параметрам операций, в кн.: Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. - М. Наука, Физматлит, 2001, 95 -100.
35. Тарасов В.Б., Желтов С.Ю., Степанов А.А. Нечеткие модели в обработке изображений: обзор зарубежных достижений. - Новости искусственного интеллекта, 3, 1993, с. 40 - 64.
36. Экспертные системы. Принципы работы и примеры/Под ред. Р. Форсайта.-М.: Радио и связь, 1987.- 224 с.
37. Aliev R n.A. Semantic analysis and experimental selection of appropriate fuzzy logics, in: Proccedings of First Internat. Conf. on Soft Computing and Computing with Words in System Analysis, Decision and Control. Antalya, Turkey. Verlag b- Quadrat Verlag, 2001, 29 - 42.
38. Alsina C., Trillas E., Valverde L. On some logical connectives for fuzzy sets theory. - J. Math. Anal. Appl., 93, 1983, 15 - 26.
39. Aczel J. Lectures on Functional Equations and Their Applications. New York: Academic Press, 1966.
40. Bandler W., Kohout L. Fuzzy power sets and fuzzy implication operators. - Fuzzy Sets and Systems, 4,1980,13-30.

41. Batyrshin I.Z. On fuzzinesstic measures of entropy on Kleene algebras.- Fuzzy Sets and Systems, 34, 1, 1990, 47-60.

42 Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.

43. Круглов В.В., Дли М.И. Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой логики и нечеткого вывода. – М.: Физматлит, 2002.

44. Леоленков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб., 2003.

45. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М., 2004.

46. Масалович А. Нечеткая логика в бизнесе и финансах. www.tora-centre.ru/library/fuzzy/fuzzy-.htm [1]

С примерами использования иерархических нечетких баз знаний для решения прикладных задач можно ознакомится в следующей литературе:

[2, 3] - медицинская диагностика;
[4] - медицинская диагностика, прогнозирование числа заболеваний, оценка качества проектов,

расследование дорожно-транспортных происшествий, управление технологическим процессом биоконверсии;
[5-7] - диагностирование трещин кирпичных конструкций зданий;
[8, 9] - прогнозирование результатов футбольных чемпионатов;
[10] - управления динамическими объектами.

Примечания

1. ↑ *Jang, Jyh-Shing R* (1991). "Fuzzy Modeling Using Generalized Neural Networks and Kalman Filter Algorithm" in *Proceedings of the 9th National Conference on Artificial Intelligence, Anaheim, CA, USA, July 14–19*. **2**: 762–767.
2. ↑ Jang, J.-S.R. (1993). «ANFIS: adaptive-network-based fuzzy inference system». *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **23** (3). DOI:10.1109/21.256541.
3. ↑ *Abraham, A. (2005), "Adaptation of Fuzzy Inference System Using Neural Learning", in Nedjah, Nadia & de Macedo Mourelle, Luiza, Fuzzy Systems Engineering: Theory and Practice, vol. 181, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Germany: Springer Verlag, сс. 53–83*
4. ↑ Jang, Sun, Mizutani (1997) — Neuro-Fuzzy and Soft Computing — Prentice Hall, pp 335—368, ISBN 0-13-261066-3
5. ↑ Tahmasebi, P. (2012). «A hybrid neural networks-fuzzy logic-genetic algorithm for grade estimation». *Computers & Geosciences* **42**: 18–27.