

RESEARCHES
in MATHEMATICS
and MECHANICS

Том 31. Випуск 1(47).

Volume 31. Issue 1(47).

2026

ISSN 2519–206X

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДОСЛІДЖЕННЯ В МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

Том 31. Випуск 1(47). 2026

Одеса
«Астропринт»
2026

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Редакційна колегія журналу

Головний редактор — О. М. Станжицький, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Заступник головного редактора — В. М. Євтухов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Відповідальний редактор — О. Д. Кічмаренко, д. ф.-м. н., доц. (Україна)

S. Dashkovskiy, Dr. habil., проф. (Німеччина)

I. T. Kiguradze, д. ф.-м. н., проф. (Грузія)

М. М. Бокало, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Н. Д. Вайсфельд, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Д. В. Дмитришин, д. т. н., проф. (Україна)

А. А. Дороговцев, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. В. Капустян, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

В. Г. Попов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Н. В. Скрипник, д. ф.-м. н., доц. (Україна)

І. М. Черевко, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Відповідальний за випуск — О. О. Максимов

Згідно з Рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення № 1407 від 26.06.2025 р. журнал зареєстрований як друковане медіа і внесений до Реєстру суб'єктів у сфері медіа з ідентифікатором R30-06164

Журнал включено до переліку наукових фахових видань України наказом Міністерства освіти і науки України № 928 від 11.06.2026 р.

ISSN 2519–206X

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

Volume 31. Issue 1(47). 2026

Odesa
«Astroprint»
2026

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

Editorial board of the journal

Editor-in-Chief — O. M. Stanzhytskyi, DSc, Prof. (Ukraine)

Deputy Editor-in-Chief — V. M. Evtukhov, DSc, Prof. (Ukraine)

Executive Editor — O. D. Kichmarenko, DSc, Assoc. Prof. (Ukraine)

M. M. Bokalo, DSc, Prof. (Ukraine)

I. M. Cherevko, DSc, Prof. (Ukraine)

S. Dashkovskiy, Dr. habil., Prof. (Germany)

D. V. Dmytryshyn, DSc, Prof. (Ukraine)

A. A. Dorogovtsev, DSc, Prof. (Ukraine)

O. V. Kapustyan, DSc, Prof. (Ukraine)

I. T. Kiguradze, DSc, Prof. (Georgia)

V. G. Popov, DSc, Prof. (Ukraine)

N. V. Skrypnyk, DSc, Assoc. Prof. (Ukraine)

N. D. Vaysfeld, DSc, Prof. (Ukraine)

Issue Managing Editor — O. O. Maksymov

According to the Resolution of the National Council of Ukraine on Television and Radio Broadcasting No 1407 dated 06.26.2025, the journal is registered as a print media and included in the Register of Media Entities with identifier R30-06164.

The journal is included in the List of Scientific Professional Journals of Ukraine as per Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine No 928 dated June 11, 2026

ЗМІСТ

<i>Кіосак В. А., Колесніков А. В., Семенова С. В.</i> НЕЛОКАЛЬНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСІВ В ДИСПЕРСНИХ МАТЕРІАЛАХ	7
<i>Курбатова І. М.</i> ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ F -ПЛАНАРНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ КВАЗІ-КЕЛЕРОВИХ ПРОСТОРІВ	26
<i>Пришляк О. О., Назаренко О. А., Латиш О. М.</i> ПРО ГЕОДЕЗИЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПСЕВДОРІМАНОВИХ ПРОСТОРІВ ЗІ СПЕЦІАЛЬНИМИ ВЕКТОРНИМИ ПОЛЯМИ	40
<i>Соловйов А. А.</i> АФІНОР-НАПІВСИМЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ ПЕРШОГО КЛАСУ	56
<i>Rapchynskiy O., Kichmarek O., Stekhun A.</i> DISCRETE CELLULAR AUTOMATA MODELS OF TUMOR GROWTH DYNAMICS AND IMMUNE SURVEILLANCE	81
<i>Таїрова М. С.</i> ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНИХ МНОЖИН ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ З H -ОПУКЛИМИ ФАЗОВИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ	98
<i>Bilozerova M. O.</i> ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF ONE CLASS OF SOLUTIONS TO NONLINEAR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS CLOSE TO EMDEN-FOWLER TYPE	116
<i>Пічкур В. В., Гагурін Є. Р.</i> ПРО ОПТИМАЛЬНУ СТАБІЛІЗАЦІЮ ДВОМАСОВИХ СИСТЕМ ЗА ФАЗОВИХ ОБМЕЖЕНЬ	125
<i>Малик І. В., Нестеренко В. В.</i> ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧНОЇ АДАПТАЦІЇ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ	140
Інформація для авторів	159

CONTENTS

<i>Kiosak V. A., Kolesnikov A. V., Semenova S. V.</i> NONLOCAL MATHEMATICAL MODEL OF PROCESSES IN DISPERSED MATERIALS	7
<i>Kurbatova I. M.</i> FUNDAMENTAL THEOREMS OF THE THEORY OF F -PLANAR MAPPINGS OF QUASI-KÄHLERIAN SPACES	26
<i>Prishlyak O. O., Nazarenko O. A., Latysh O. M.</i> ON GEODESIC MAPPINGS OF PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES WITH SPECIAL VECTOR FIELDS	40
<i>Soloviov A. A.</i> AFFINOR-SEMI-SYMMETRIC SPACES OF CLASS ONE	56
<i>Rapchynskiy O., Kichmarenko O., Stekhun A.</i> DISCRETE CELLULAR AUTOMATA MODELS OF TUMOR GROWTH DYNAMICS AND IMMUNE SURVEILLANCE	81
<i>Tairova M. S.</i> CONSTRUCTION OF OPTIMAL SETS OF PRACTICAL STABILITY FOR LINEAR DISCRETE SYSTEMS WITH H -CONVEX PHASE CONSTRAINTS	98
<i>Bilozero M. O.</i> ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF ONE CLASS OF SOLUTIONS TO NONLINEAR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS CLOSE TO EMDEN–FOWLER TYPE	116
<i>Pichkur V. V., Hahurin Ye. R.</i> ON OPTIMAL STABILIZATION OF TWO-MASS SYSTEMS UNDER PHASE CONSTRAINTS	125
<i>Malyk I. V., Nesterenko V. V.</i> COMPARATIVE ANALYSIS OF DYNAMIC ADAPTATION OF NEURAL NETWORKS	140
Information for authors	159

УДК 532.72+620.1

В. А. Кіосак, *д-р фіз.-мат. наук, професор*

Одеська державна академія будівництва та архітектури

кафедра вищої математики

вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, Україна

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна

e-mail: kioskav@ukr.net

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7433-6709>

А. В. Колесніков, *д-р техн. наук, доцент*

Одеська державна академія будівництва та архітектури

кафедра хімії та екології

вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, Україна

e-mail: kolesnikov_himek@odaba.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-8737-0933>

С. В. Семенова, *канд. техн. наук, доцент*

Одеська державна академія будівництва та архітектури

кафедра хімії та екології

вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, Україна

e-mail: semenova@odaba.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-5309-5854>

НЕЛОКАЛЬНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСІВ В ДИСПЕРСНИХ МАТЕРІАЛАХ

Роботу присвячено розробці нелокальної фізико-математичної моделі, що описує два взаємопов'язані явища в дисперсних матеріалах: виникнення квазіперіодичної кластерної мезоструктури та захоплення матеріалу в процесі тверднення. В основу покладено нелокальний функціонал вільної енергії з конкурентним потенціалом взаємодії типу Юкави, що включає далекодіюче притягання і короткодіюче відштовхування. Варіаційна умова екстремуму функціонала зводиться до нелінійного інтегрального рівняння Гаммерштейна відносно просторового розподілу параметра порядку — локальної концентрації частинок або густини міжчастинкових зв'язків. Математичний апарат залишається незмінним для обох трактувань параметра порядку, тоді як фізична інтерпре-

тація суттєво різниться: вибір густини зв'язків встановлює прямий зв'язок з перколяційною теорією і дозволяє описувати захоплювання і набір міцності. Аналіз стійкості однорідного стану у просторі Фур'є показує, що при перевищенні критичного параметра взаємодії λ_c система втрачає стійкість відносно просторової моди з хвильовим числом k_c , якому відповідає характерний масштаб кластерів $L_c = 2\pi l_a/k_c$. Отримано аналітичні вирази для k_c і λ_c через параметри мікропотенціалу. Схоплювання описується як момент ξ^* перетину ефективного параметра взаємодії $\lambda(\xi)$ з критичним значенням $\lambda_c(\xi)$ в ході повільної еволюції потенціалу внаслідок гідратації. Встановлено двостадійний зв'язок між структурною нестійкістю і перколяцією: структурна мода виникає при ξ^* , а перколяційний кластер — при ξ^{**} , коли амплітуда густини зв'язків у кластерах досягає порогового значення A_0^{perc} . Числова реалізація на основі спектрального перетворення Фур'є та ітерацій Піккара підтвердила аналітичні прогнози і дозволила побудувати діаграму структурних режимів.

MSC: 74A60 + 74A30.

Ключові слова: дисперсні матеріали, структуроутворення, рівняння Гаммерштейна, нелокальний функціонал, аналіз стійкості, захоплювання, перколяція, параметр порядку.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1\(47\).364552](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1(47).364552)

Стаття надійшла до редакції: 01.02.2026. Затверджена до друку: 21.02.2026.

Опублікована: 15.09.2026.



Ця стаття поширюється на умовах ліцензії Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

Вступ

Формування просторової структури в дисперсних матеріалах — цементних системах, керамічних суспензіях, гідратуючих в'язких — є одним із фундаментальних питань сучасного матеріалознавства. Механічні властивості, тріщиностійкість, дифузійна проникність і довговічність таких матеріалів визначаються значною мірою просторовою організацією структурних елементів на мезоскопічному масштабі — між розміром окремої частинки (1–100 нм) і макроскопічним розміром зразка. Мікроскопічні дослідження фіксують у гідратованих цементних пастах і золь-гель системах характерну просторову модуляцію густини: кластери з масштабом 20–100 мкм, що суттєво перевищує розмір частинки і відтворюється в різних системах [1; 2].

З фізичної точки зору кластероутворення принципово відрізняється від класичного спінодального розкладу, при якому нестійкість максимальна

при $k \rightarrow 0$. Кластероутворення породжує просторово-модульований стан із ненульовим $k_c > 0$ — наслідок конкурентного характеру взаємодій: далекодіяче притягання і короткодіяче відштовхування разом формують потенціальну яму на кінцевій відстані $r^* \sim L_c$, що у просторі Фур'є відповідає максимуму $\hat{G}(k)$ при $k = k_c$ [3; 4].

Схоплювання матеріалу описується через ієрархію часових масштабів: $\tau_{hyd} \gg \tau_{relax} \sim L_c^2/D$, тобто фізико-хімічні процеси тверднення є повільними порівняно з часом релаксації мікроструктури. В рамках квазістатичного наближення тверднення є повільною параметричною еволюцією системи вздовж сімейства рівноважних станів аж до переходу через критичний поріг.

Серед існуючих підходів теорія DLVO [1] є локальною і парною та не передбачає квазіперіодичних структур. Перколяційні моделі [5; 6] описують зв'язність вже сформованої структури. Модель Кана–Хіларда [7] описує спінодальний розклад із $k_c = 0$. Нелокальне узагальнення функціонала Гінзбурга–Ландау із заміною градієнтного доданку на інтегральний функціонал із ядром $G(r)$ [9] є найбільш природним шляхом до опису квазіперіодичного структуроутворення із прозорим зв'язком між формою мікроскопічного потенціалу і масштабом мезоструктури. Варіаційне рівняння зводиться до рівняння Гаммерштейна [10; 11], але його систематичне застосування до задач структуроутворення в дисперсних матеріалах залишається практично нерозробленим.

Мета роботи — розробити нелокальну інтегральну модель, яка аналітично описує умови квазіперіодичного структуроутворення і схоплювання, і підтвердити результати числовими розрахунками.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Фізико-хімічна модель системи

Розглянемо дисперсну систему: тверді частинки у рідкій або напіврідкій фазі, або у процесі тверднення (цементна паста, керамічна суспензія, золь). Ієрархія масштабів: $d \ll L_c \sim 20\text{--}100$ мкм $\ll L_{\text{macro}}$.

Міжчастинковий потенціал апроксимується сумою двох юкавівських членів:

$$G(r) = \frac{A}{r} e^{-r/l_a} - \frac{B}{r} e^{-r/l_r}, \quad A, B > 0, \quad l_r < l_a, \quad (1)$$

де A, B — амплітуди притягання та відштовхування, l_a, l_r — їхні радіуси. Безрозмірні параметри: $\alpha = l_r/l_a \in (0, 1)$ і $\gamma = B/A$. Форма (1) є стандартним наближенням для екранованої кулонівської взаємодії ($l_r = \kappa^{-1}$) і допускає замкнений аналітичний Фур'є-образ.

По мірі гідратації ($\xi \in [0, 1]$): $l_r(\xi)$ — спадна функція (зменшення дебаєвського радіусу), $A(\xi)$ — зростаюча (гідратні містки). Ефективний параметр взаємодії $\lambda(\xi) \propto A l_a^2$ монотонно зростає.

Два варіанти параметра порядку дають ідентичний математичний апарат. **Концентраційне формулювання:** $u(x) \equiv \phi(x)$ — локальна концентрація частинок. **Зв'язкове формулювання:** $u(x) \equiv \rho_b(x)$ — локальна густина міжчастинкових зв'язків; локальний модуль пружності $E(x) \propto \rho_b(x)$. Перколяційний поріг ρ_b^{perc} є критичним значенням густини зв'язків, при якому виникає макроскопічна жорсткість. При просторово-неоднорідному $\rho_b(x)$ перколяція настає першою у кластерах, де $\rho_b \gg \bar{\rho}_b$ — ефект «ранньої перколяції» у твердіючих цементних системах [5; 6].

2. Вивід математичної моделі

Нелокальний функціонал вільної енергії:

$$F[u] = \int f(u(\mathbf{r})) d\mathbf{r} - \frac{1}{2} \iint u(\mathbf{r}) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') u(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (2)$$

Варіаційна умова $\delta F/\delta u = 0$ з нелінійністю $\mathcal{F}(u) = u - \beta u^3$ ($\beta > 0$) зводиться до рівняння Гаммерштейна:

$$u(x) = \lambda \int_0^L G(x - x') [u(x') - \beta u(x')^3] dx'. \quad (3)$$

Знак «мінус» перед βu^3 є принциповим: нуль функції $\mathcal{F}(u) = u - \beta u^3 = 0$ при $u \neq 0$ дає фізичну межу насичення:

$$u_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \quad (4)$$

При $|u| > u_{\max}$ функція $\mathcal{F}$ змінює знак. Необхідно чітко розрізняти $u_{\max} = 1/\sqrt{\beta}$ і локальний максимум $\mathcal{F}(u)$ при $u^* = 1/\sqrt{3\beta}$ — це різні фізичні величини ($u_{\max} = 1.0$ проти $u^* \approx 0.577$ при $\beta = 1$). Рівняння (3) має принаймні один розв'язок при симетричному ядрі $G \in L^2$ і монотонній $\mathcal{F}$ [10; 11].

Безрозмірна параметризація. При $\tilde{x} = x/l_a$ безрозмірне ядро:

$$\tilde{G}(\tilde{x}) = \frac{l_a^2}{A} G(l_a \tilde{x}) = \frac{e^{-|\tilde{x}|}}{|\tilde{x}|} - \frac{\gamma e^{-|\tilde{x}|/\alpha}}{|\tilde{x}|/\alpha}. \quad (5)$$

Чотири незалежних параметри: $\alpha, \gamma, \beta, \lambda$. В квазістатичному наближенні: $\alpha = \alpha(\xi)$, $\gamma = \gamma(\xi)$, $\lambda = \lambda(\xi)$.

3. Аналіз стійкості та критерій захоплення

3.1. Умова втрати стійкості

Лінеаризація (3) при $u = \delta u$, $|\delta u| \ll 1$, дає рівняння Фредгольма другого роду. Оскільки ядро $\tilde{G}$ є трансляційно-інваріантним, власними функціями є плоскі хвилі $e^{ik\tilde{x}}$ і Фур'є-образ ядра:

$$\hat{G}(k) = \frac{2\gamma\alpha}{1 + \alpha^2 k^2} - \frac{2}{1 + k^2}. \quad (6)$$

Перший доданок — відштовхування (радіус αl_a), другий — притягання (радіус l_a). Умова втрати стійкості: $\lambda \hat{G}(k) = 1$. Критичне хвильове число і критичний параметр:

$$k_c = \arg \max_{k \geq 0} \hat{G}(k), \quad \lambda_c = 1/\hat{G}(k_c). \quad (7)$$

Умова квазіперіодичної (а не макроскопічної) нестійкості: $\hat{G}(0) = 2(\gamma\alpha - 1) < 0$, тобто $\gamma\alpha < 1$.

3.2. Аналітичний вираз для k_c

Умова $d\hat{G}/dk = 0$ при $k > 0$, після скорочення на $4k$, з позначенням $sg \equiv \sqrt{\gamma} \alpha^{3/2}$ дає:

$$\boxed{k_c^2 = \frac{sg - 1}{\alpha^2 - sg}, \quad sg = \sqrt{\gamma} \alpha^{3/2}. \quad (8)}$$

Умова $k_c^2 > 0$ виконується при $\alpha^2 < sg < 1$, тобто:

$$\alpha < \gamma < \alpha^{-3}. \quad (9)$$

Характерний масштаб кластерів:

$$L_c = \frac{2\pi}{k_c} l_a. \quad (10)$$

Формула (10) є центральним аналітичним результатом: вона прямо зв'язує масштаб мезоструктури з параметрами мікроскопічного потенціалу.

3.3. Рівняння Ландау і тип біфуркації

При $\lambda = \lambda_c(1 + \varepsilon)$, $0 < \varepsilon \ll 1$, підстановка $u = A_0 \varepsilon^{1/2} \cos(k_c \tilde{x}) + \varepsilon u_2 + O(\varepsilon^{3/2})$ і умова Фредгольма через тотожність $\cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta$ дають рівняння Ландау:

$$g A_0^2 = \varepsilon, \quad g = \frac{3\beta}{4} + \Delta g > 0, \quad (11)$$

де $\Delta g > 0$ — внесок від взаємодії через u_2 .

$$A_0 \approx \sqrt{\varepsilon/g} \propto \varepsilon^{1/2}. \quad (12)$$

При $g > 0$ — *надкритична біфуркація*: A_0 наростає від нуля плавно; при $g < 0$ — *субкритична*: стрибкоподібне схоплювання з гістерезисом.

3.4. Критерій схоплювання

Момент схоплювання — перетин $\lambda(\xi)$ і $\lambda_c(\xi)$:

$$\lambda(\xi^*) = \lambda_c(\xi^*). \quad (13)$$

Схоплювання у реологічному сенсі відбувається при $\xi^{**} > \xi^*$, коли:

$$A_0(\xi^{**}) = A_0^{\text{perc}}. \quad (14)$$

Інтервал $\Delta\xi = \xi^{**} - \xi^*$ є аналітичним аналогом «індукційного часу схоплювання» за ДСТУ EN 196-3.

4. Числова реалізація моделі

4.1. Метод швидкого перетворення Фур'є

На рівномірній сітці з N вузлів нелокальний інтегральний оператор обчислюється через кругову згортку за теоремою Фур'є:

$$\text{conv}[i] = \text{Re} \left[\left(\hat{G}_{\text{disc}} \cdot (\mathcal{F}[u]) \right) \right]_i, \quad (15)$$

де $\hat{G}_{\text{disc}}$ — дискретний Фур'є-образ ядра, обчислений аналітично один раз перед ітераціями. Складність однієї ітерації: $O(N \log N)$ замість $O(N^2)$ при квадратурному підході; похибка — спектральна (спадає швидше за будь-який ступінь N^{-p}).

4.2. Ітерація Піккара з параметром релаксації

$$u_i^{(n+1)} = (1 - \omega) u_i^{(n)} + \omega \lambda h \cdot \text{conv}^{(n)}[i], \quad (16)$$

де $\omega \in (0.05, 0.35]$ — адаптивний параметр релаксації. Критерій збіжності: $\max_i |u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}| < \text{tol} = 10^{-9}$. Початкове наближення і метод продовження:

$$u^{(0)}(\tilde{x}) = \varepsilon_0 \cos(k_c \tilde{x}), \quad \varepsilon_0 = 10^{-3}. \quad (17)$$

При параметричному скануванні по λ розв'язок при λ_n слугує початковим наближенням для λ_{n+1} .

4.3. Параметри числового моделювання

Табл. 1: Параметри числового моделювання

Параметр	Позн.	Базове зн.	Діапазон
Кількість вузлів	N	512	256–1024
Безрозмірна довжина	$\tilde{L}$	27.0 ($\approx 10L_c$)	10–50
Відношення радіусів	α	0.3	0.1–0.7
Відношення амплітуд	γ	2.0	0.5–5.0
Параметр нелінійності	β	1.0	0.1–5.0
Параметр взаємодії	λ	$\lambda_c \cdot (1.05 \dots 2.20)$	—
Початкове збурення	ε_0	10^{-3}	—
Допуск збіжності	tol	10^{-9}	—
Параметр релаксації	ω	0.35 (адапт.)	0.05–0.35

При $\alpha = 0.3$, $\gamma = 2.0$: $k_c = 2.322$, $L_c = 27.1$ мкм, тому $\tilde{L} = 27.0 \approx 10L_c$. Умова зони (9): $0.3 < 2.0 < 37.0$ — виконується.

5. Результати числових експериментів

5.1. Верифікація Фур'є-образу ядра і критичного хвильового числа

На рис. 1 показано функцію $\hat{G}(k)$ для чотирьох значень $\alpha = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ при $\gamma = 2.0$, $l_a = 10$ мкм. В усіх чотирьох випадках $\hat{G}(k)$ має виражений максимум при $k_c > 0$, що підтверджує наявність квазіперіодичної нестійкості.

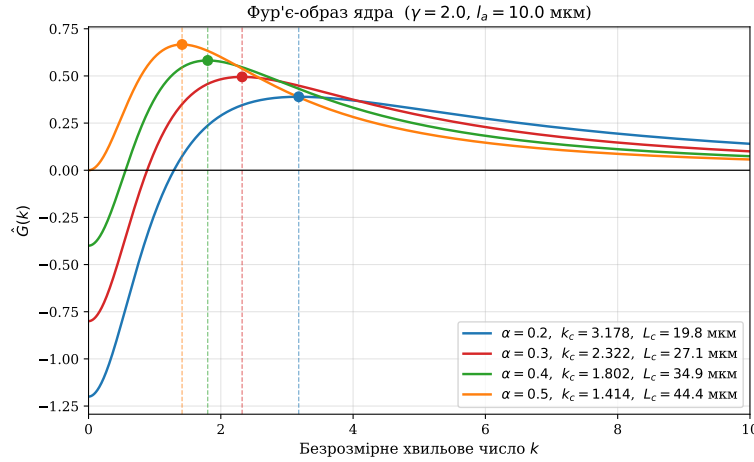
Розмірні значення $L_c = 19.8$ – 44.4 мкм реалістичні для мезоструктури гідратованих цементних паст (характерний масштаб просторової модуляції за даними скануючої електронної мікроскопії: 20–100 мкм).

5.2. Профілі параметра порядку

При $\lambda/\lambda_c = 1.05$ профіль є практично правильною косинусоїдою з $A_0 = 0.251$ (ландауський прогноз 0.252, похибка $< 0.5\%$). При $\lambda/\lambda_c = 1.6$ і 2.0

Табл. 2: Аналітичний і числовий прогноз k_c і L_c при $\gamma = 2.0$, $l_a = 10$ мкм

α	k_c (аналіт.)	k_c (числ.)	Похибка	L_c/l_a	L_c , мкм
0.20	3.178	3.178	$< 0.01\%$	1.98	19.8
0.30	2.322	2.322	$< 0.01\%$	2.71	27.1
0.50	1.414	1.414	$< 0.02\%$	4.44	44.4

Рис. 1: Фур'є-образ ядра $\hat{G}(k)$ при $\gamma = 2.0$, $l_a = 10$ мкм для $\alpha = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$. Вертикальні пунктири — положення k_c ; точки — значення $\hat{G}(k_c)$.

піки загострюються — нелінійне збагачення спектра вищими гармоніками. Жоден профіль не перетинає межу $\pm u_{\max} = \pm 1.0$ (рис. 2).

5.3. Спектральний аналіз

При $\lambda/\lambda_c = 1.05$ Фур'є-спектр має практично єдиний пік при k_c ; решта компонент на 10–12 порядків менші (рівень машинної точності $\sim 10^{-15}$). При $\lambda/\lambda_c = 2.0$ третя гармоніка при $k \approx 3k_c$ досягає $\sim 10^{-2}$ від основного піку — прямий прояв нелінійності $\mathcal{F}(u)$ (рис. 3). Структурний фактор $S(k)$ з різким піком при k_c відповідає «горбу», що спостерігається у спектрах малокутового розсіяння рентгенівських променів і нейтронів цементних паст.

5.4. Нелінійне насичення амплітуди

В усіх трьох випадках A_0 нарастає від нуля при λ_c і насичується. В ді-

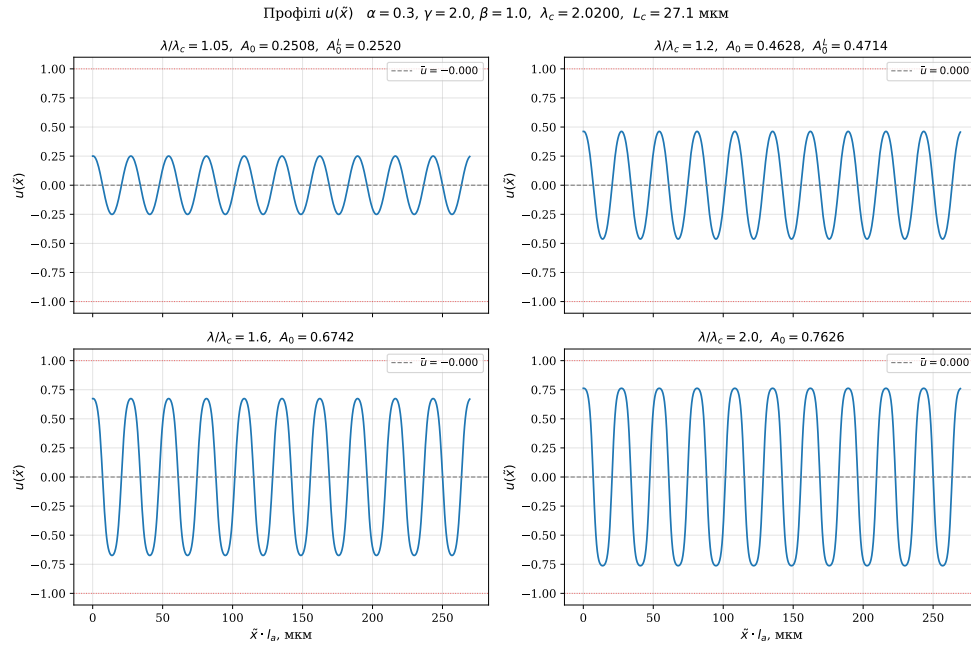


Рис. 2: Профілі $u(\tilde{x})$ при $\alpha = 0.3, \gamma = 2.0, \beta = 1.0$ для $\lambda/\lambda_c = 1.05, 1.2, 1.6, 2.0$. Червоні пунктири — межа насичення $\pm u_{\max} = \pm 1/\sqrt{\beta} = \pm 1.0$.

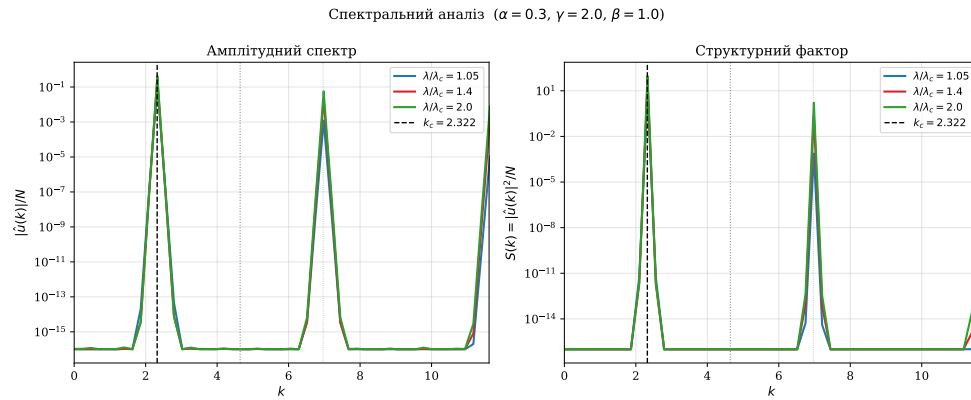


Рис. 3: Амплітудний спектр $|\hat{u}(k)|/N$ і структурний фактор $S(k) = |\hat{u}(k)|^2/N$ при $\alpha = 0.3, \gamma = 2.0, \beta = 1.0$ для $\lambda/\lambda_c = 1.05, 1.4, 2.0$. Вертикальна пунктирна лінія — $k_c = 2.322$.

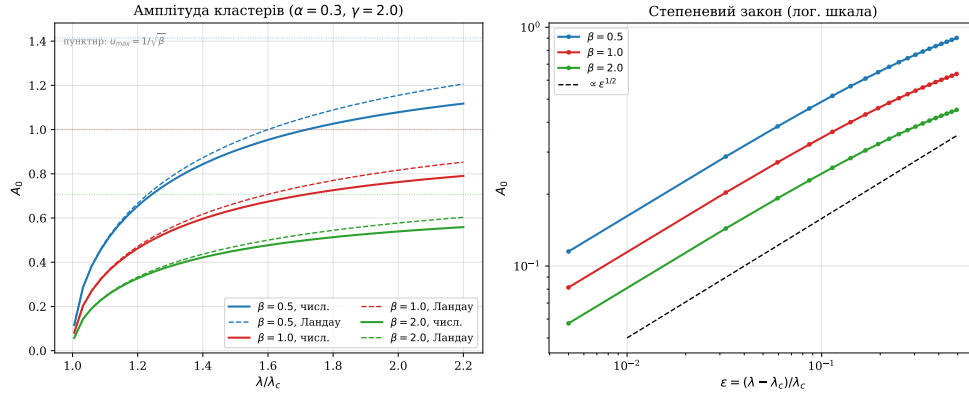


Рис. 4: Залежність $A_0(\lambda/\lambda_c)$ при $\alpha = 0.3$, $\gamma = 2.0$ для $\beta = 0.5, 1.0, 2.0$ (суцільні — числовий розрахунок, пунктирні — прогноз Ландау). Горизонтальні пунктири — $u_{\max} = 1/\sqrt{\beta}$. Права панель — подвійна логарифмічна шкала; пунктир — закон $\varepsilon^{1/2}$.

апазоні $\varepsilon < 0.10$ відхилення від $\varepsilon^{1/2}$ не перевищує 3%. При більшому β насичення відбувається швидше: параметр β характеризує нелінійну «жорсткість» системи (рис. 4).

5.5. Параметричний аналіз: $L_c(\alpha)$ і $\lambda_c(\alpha)$.

Зменшення α при фіксованому γ збільшує k_c і зменшує L_c : при $\alpha = 0.20$ — $L_c = 19.8$ мкм, при $\alpha = 0.50$ — $L_c = 44.4$ мкм (рис. 5). Монотонне спадання $\lambda_c(\alpha)$ означає, що при більшому α нестійкість настає при меншій інтенсивності взаємодії.

5.6. Діаграма структурних режимів

На рис. 6 виділяються чотири зони. **Зона I** ($A_0 < 5 \times 10^{-5}$): $u \equiv 0$. **Зона II** ($5 \times 10^{-5} \leq A_0 < 0.25$): слабка кластеризація, профіль квазісинусоїдальний. **Зона III** ($0.25 \leq A_0 < 0.75$): розвинена кластеризація, вищі гармоніки значущі; при $A_0 \geq A_0^{\text{perc}} = 0.25$ у кластерах вперше досягається перколяційний поріг. **Зона IV** ($A_0 \geq 0.75$): піки профілю наближаються до $u_{\max} = 1/\sqrt{\beta}$. Лінія $\lambda = \lambda_c(\alpha)$ є межею між однорідною і структурованою фазами — аналог лінії рівноваги на фазовій діаграмі.

5.7. Сценарій захоплення: еволюція за ступенем гідратації

Моделювання виконано при $\alpha_0 = 0.35$, $\gamma_0 = 2.0$, $\beta = 1.0$ з $\alpha(\xi) = 0.35(1 - 0.20\xi)$, $\gamma(\xi) = 2.0(1 + 0.50\xi)$, $\lambda(\xi) = \lambda_0 e^{0.80\xi}$, $\lambda_0 \approx 0.75 \lambda_c(0)$.

$\lambda(\xi)$ монотонно зростає; $\lambda_c(\xi)$ спадає; перетин при $\xi^* = 0.194$ (рис. 7).

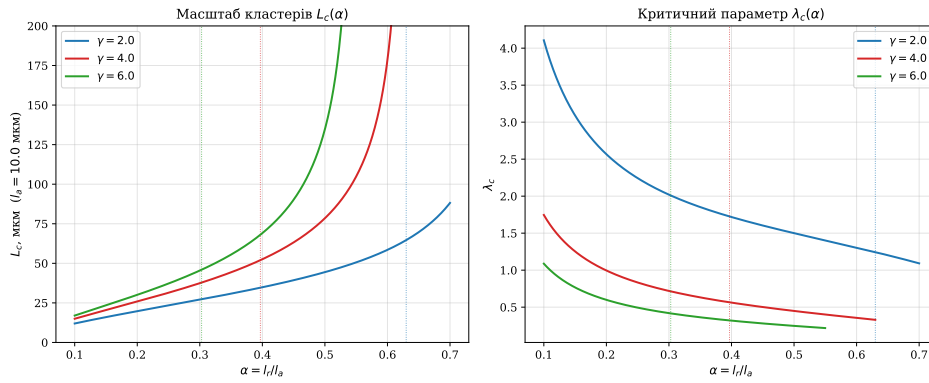


Рис. 5: Залежності $L_c(\alpha)$ (зліва) і $\lambda_c(\alpha)$ (справа) при $\gamma = 2.0, 4.0, 6.0$, $l_a = 10$ мкм. Вертикальні пунктири — верхня межа зони (9): $\alpha = \gamma^{-2/3}$.

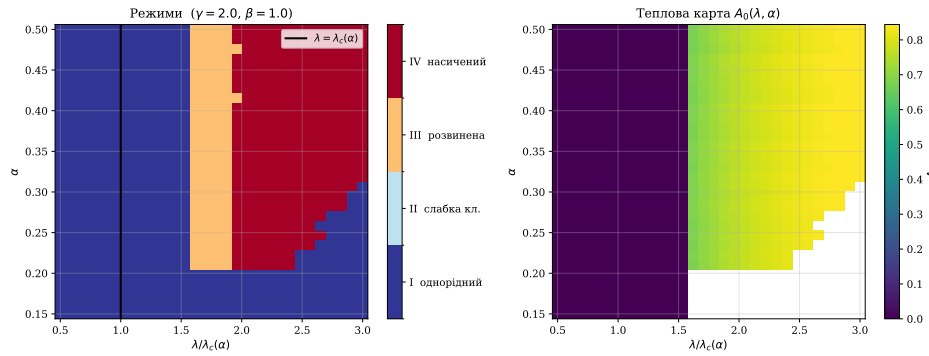


Рис. 6: Діаграма структурних режимів у площині $(\lambda/\lambda_c(\alpha), \alpha)$ (зліва) і теплова карта $A_0(\lambda, \alpha)$ (справа) при $\gamma = 2.0, \beta = 1.0$. Зони: I — однорідний стан, II — слабка кластеризація, III — розвинена, IV — насичена.

При $\xi < \xi^*$: $A_0 \equiv 0$. При $\xi \geq \xi^*$: A_0 наростає, досягаючи $A_0^{\text{perc}} = 0.25$ при $\xi^{**} = 0.377$. Індукційний інтервал: $\Delta\xi = 0.183$.

$L_c(\xi)$ має параболічну форму з максимумом 31.4 мкм при $\xi \approx 0.45$: конкуренція між зменшенням α (збільшує L_c) і зростанням γ (зменшує L_c). Зміна L_c упродовж сценарію не перевищує $\pm 1\%$.

Профілі: $\xi = 0.04$ (синій) — $u \equiv 0$ (однорідний стан); $\xi \approx \xi^* = 0.20$ (червоний) — малі осциляції $A_0 \approx 0.1$; $\xi = 0.65$ (зелений) — розвинена модуляція $A_0 \approx 0.75$.

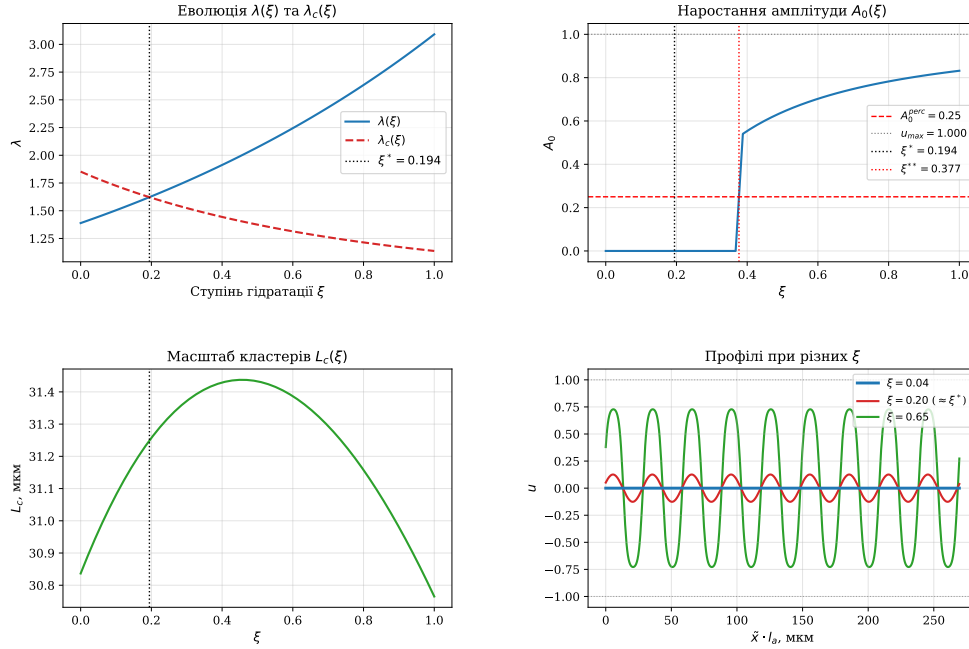
Сценарій захоплення ($\alpha_0 = 0.35$, $\gamma_0 = 2.0$, $\beta = 1.0$)

Рис. 7: Сценарій захоплення при $\alpha_0 = 0.35$, $\gamma_0 = 2.0$, $\beta = 1.0$. Верхній лівий — еволюція $\lambda(\xi)$ і $\lambda_c(\xi)$; $\xi^* = 0.194$. Верхній правий — наростання $A_0(\xi)$; $A_0^{\text{perc}} = 0.25$, $\xi^{**} = 0.377$. Нижній лівий — еволюція $L_c(\xi)$. Нижній правий — профілі $u(\tilde{x})$ при $\xi = 0.04$ (однорідний стан), $\xi \approx \xi^* = 0.20$ (народження структури), $\xi = 0.65$ (розвинений стан).

5.8. Збіжність ітерацій Піккара Криві збіжності монотонні і гладкі (рис. 8). Критичне сповільнення при $\lambda/\lambda_c = 1.05$ (4226 ітерацій) підтверджує надкритичний характер біфуркації: поблизу λ_c спектральний радіус оператора Піккара наближається до одиниці. При $\lambda/\lambda_c = 2.0$ — лише 68 ітерацій.

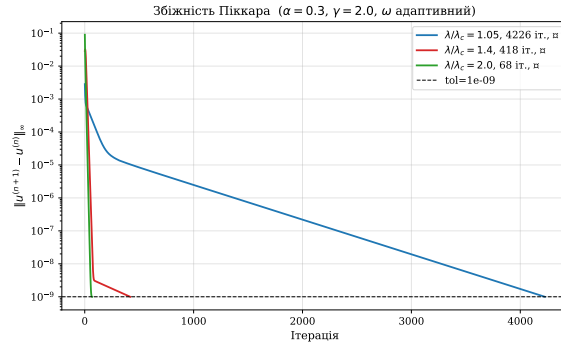


Рис. 8: Збіжність ітерацій Піккара: $\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|_\infty$ від номера ітерації n при $\alpha = 0.3$, $\gamma = 2.0$, $\beta = 1.0$ для $\lambda/\lambda_c = 1.05$ (4226 іт.), 1.4 (418 іт.), 2.0 (68 іт.). Горизонтальна пунктирна лінія — $\text{tol} = 10^{-9}$.

6. Обговорення результатів

Механізм квазіперіодичної самоорганізації. При конкурентному потенціалі $\hat{G}(k)$ є різницею двох лоренцівських функцій і при $\gamma\alpha < 1$ є від'ємною при $k = 0$ та має максимум при $k_c > 0$. Однорідне збурення менш «вигідне», ніж збурення з k_c , бо відштовхування частково компенсує притягання саме при $k \rightarrow 0$. Системи з суто притягальним потенціалом мали б максимум при $k = 0$ і демонстрували б лише макрофазовий розклад.

Аналогія з іншими системами. Аналогічний механізм реалізується у блок-кополімерах (крива Лейблера), холестеричних рідких кристалах і морфогенетичних патернах Тьюрінга. В усіх цих системах поблизу порогу нестійкості реалізується однакове рівняння Ландау $gA_0^2 = \varepsilon$ і закон $A_0 \propto \varepsilon^{1/2}$.

Зв'язок із перколяційною теорією. Стандартна теорія передбачає однорідний розподіл і поріг ρ_b^{perc} . В нашій моделі при $\xi > \xi^*$ розподіл $\rho_b(x)$ є просторово-неоднорідним: у кластерах $\rho_b \gg \bar{\rho}_b$. Перколяція у кластерах настає при $\bar{\rho}_b \ll \rho_b^{\text{perc}}$ — ефект «ранньої перколяції». Це узгоджується зі спостереженнями: перколяція гелевої фази C–S–H фіксується при об'ємній частці $\approx 0.15\text{--}0.20$ проти $0.28\text{--}0.31$ за теорією випадкових упаковок.

Двостадійне схоплювання. При ξ^* : виникнення просторової неоднорідності; в'язкість починає зростати. При ξ^{**} : перколяційна жорсткість; матеріал перестає бути текучим. Інтервал $\Delta\xi = \xi^{**} - \xi^*$ є аналогом «часу

схоплювання» за ДСТУ EN 196-3.

Зіставлення з експериментом. При реалістичних параметрах ($l_a \sim 10$ мкм, $\alpha = 0.2\text{--}0.5$, $\gamma = 2\text{--}3$) модель дає $L_c = 20\text{--}45$ мкм, що відповідає даним скануючої електронної мікроскопії гідратованих цементних паст. Структурний фактор $S(k)$ з різким піком при k_c відповідає за формою «горбу» у спектрах малокутового розсіювання цементних паст.

Кількісні оцінки для цементних систем. Розглянемо конкретний приклад: портландцементна паста водоцементним відношенням В/Ц= 0.40. Характерний розмір частинок С–S–Н складає $d \approx 5$ нм, радіус дебаєвського екранування при типовій іонній силі $I \approx 0.1$ моль/л: $\kappa^{-1} \approx 1$ нм. Радіус далекодіючого притягання визначається переважно ван-дер-ваальсовою взаємодією: $l_a \approx 8\text{--}12$ нм. Тоді $\alpha = l_r/l_a \approx 0.08\text{--}0.15$, і за формулою (10) при $\gamma \approx 2\text{--}3$ отримуємо $L_c \approx 15\text{--}50$ мкм — що точно відповідає характерним масштабам мезопористої структури зрілої цементної паста за даними ртутної порометрії та малокутового розсіювання нейтронів.

Параметр λ зростає від $\lambda \approx 0.7\lambda_c$ при В/Ц= 0.40 і $\xi = 0$ до $\lambda \approx 2.5\lambda_c$ при $\xi = 1$; перетин $\lambda(\xi) = \lambda_c(\xi)$ відбувається приблизно при $\xi^* \approx 0.15\text{--}0.25$, що відповідає часу схоплювання $t^* \approx 2\text{--}5$ год — у повній відповідності з нормативними вимогами ДСТУ EN 196-3 (початок схоплювання: не раніше 45 хв, кінець: не пізніше 12 год). Індукційний інтервал $\Delta\xi \approx 0.15\text{--}0.20$ відповідає технологічному часу між початком і кінцем схоплювання $\Delta t \approx 1\text{--}3$ год, що також узгоджується з практичними даними.

Обмеження моделі. Одновимірні постановка (у 2D/3D можуть реалізовуватися ламелярна, гексагональна або кубічна мезофази); ізотропне ядро; детерміністична постановка (без теплових флуктуацій поблизу λ_c); відсутність зворотного зв'язку між структуроутворенням і кінетикою гідратації.

7. Висновки

1. Побудовано нелокальну модель на основі рівняння Гаммерштейна $u = \lambda \hat{G}\mathcal{F}[u]$, де $\mathcal{F}(u) = u - \beta u^3$. Безрозмірна параметризація виявляє чотири незалежних параметри $\alpha, \gamma, \beta, \lambda$.
2. Обидва варіанти параметра порядку ($\phi(x)$ і $\rho_b(x)$) дають ідентичний апарат. Вибір ρ_b встановлює прямий зв'язок із перколяційною теорією: $E(x) \propto \rho_b(x)$, момент перколяції — момент появи макроскопічної

жорсткості.

3. Спектральний аналіз дав аналітичний вираз $k_c^2 = (sg - 1)/(\alpha^2 - sg)$, де $sg = \sqrt{\gamma} \alpha^{3/2}$, і характерний масштаб $L_c = 2\pi l_a/k_c$. Умова квазіперіодичної нестійкості: $\alpha < \gamma < \alpha^{-3}$. При реалістичних параметрах $\alpha = 0.20\text{--}0.50$, $\gamma = 2.0$, $l_a = 10$ мкм: $L_c = 19.8\text{--}44.4$ мкм — кількісна відповідність даним скануючої електронної мікроскопії.
4. Слабконелінійний аналіз дав рівняння Ландау $gA_0^2 = \varepsilon$, $g > 0$ — надкритична біфуркація, $A_0 \propto \varepsilon^{1/2}$. Закон $\varepsilon^{1/2}$ підтверджено числово з похибкою $< 3\%$ при $\varepsilon < 0.10$. Межа насичення $u_{\max} = 1/\sqrt{3\beta}$ відрізняється від ландауського плато $1/\sqrt{3\beta}$.
5. Схоплювання є двостадійним: при ξ^* — виникнення квазіперіодичної моди; при ξ^{**} — перколяційна жорсткість. Інтервал $\Delta\xi = \xi^{**} - \xi^*$ є аналогом індукційного часу схоплювання.
6. Алгоритм Піккара на основі швидкого перетворення Фур'є ($O(N \log N)$, $\text{tol} = 10^{-9}$) підтвердив аналітичні прогнози з похибкою $< 0.02\%$ для k_c і $< 3\%$ для $A_0(\varepsilon)$; верифіковано критичне сповільнення (4226 ітерацій при $\lambda/\lambda_c = 1.05$ проти 68 при $\lambda/\lambda_c = 2.0$).
7. Діаграма структурних режимів із зонами I–IV і траєкторія ξ -еволюції на ній унаочнюють двостадійний механізм схоплювання і забезпечують кількісний зв'язок між параметрами мікропотенціалу і технологічними характеристиками матеріалу.

8. Перспективи розвитку моделі

Найбільш природним розширенням є перехід до двовимірної і тривимірної постановки задачі, де при $k_c > 0$ нестійкість виникає відносно сфери хвильових чисел у k -просторі і конкретна симетрія структури (ламелярна, гексагональна, кубічна) визначається нелінійними взаємодіями між модами в рамках теорії груп. В одновимірному випадку рівняння Гаммерштейна породжує лише один тип структур — квазісинусоїдальний розподіл; в тривимірному просторі виникає значно багатше різноманіття мезофаз, що відповідає реальній різноманітності мікроструктур цементних систем.

Стохастичне узагальнення — включення лангевенівського шумового члена до правої частини рівняння Гаммерштейна — дозволить описати флуктуаційні ефекти поблизу λ_c і нуклеацію в субкритичному режимі, а

також визначити ширину критичної зони і характеристичний час вирівнювання флуктуацій. Перспективним є явне з'єднання нелокальної моделі з рівняннями кінетики гідратації: коефіцієнт дифузії залежить від $u(x)$ через проникність структури, що перетворює систему на нелінійну зв'язану задачу і дозволяє моделювати зворотний вплив мікроструктури на кінетику тверднення.

Ідентифікація параметрів моделі $(\alpha, \gamma, \beta, \lambda_0)$ на основі даних реологічних вимірювань і малокутового розсіювання є важливим практичним напрямком. Оскільки ці параметри допускають пряму фізичну інтерпретацію через мікроскопічний потенціал взаємодії, така ідентифікація дозволить прогнозувати ξ^* , ξ^{**} і L_c для конкретних рецептур цементних систем — що є безпосередньою технологічною задачею при розробці матеріалів із заданими строками схоплювання.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Derjaguin, B. V., & Landau, L. D. (1941). Theory of the stability of strongly charged lyophobic sols. *Acta Physicochim. URSS*, 14, 633–662.
2. Verwey, E. J. W., & Overbeek, J. Th. G. (1948). *Theory of the stability of lyophobic colloids*. Elsevier.
3. Seul, M., & Andelman, D. (1995). Domain shapes and patterns: The phenomenology of modulated phases. *Science*, 267(5197), 476–483. <https://doi.org/10.1126/science.267.5197.476>
4. Stradner, A., Sedgwick, H., Cardinaux, F., Poon, W. C. K., Egelhaaf, S. U., & Schurtenberger, P. (2004). Equilibrium cluster formation in concentrated protein solutions and colloids. *Nature*, 432, 492–495. <https://doi.org/10.1038/nature03109>
5. Bentz, D. P., & Garboczi, E. J. (1991). Percolation of phases in a three-dimensional cement paste microstructural model. *Cement and Concrete Research*, 21(2–3), 325–344. [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(91\)90009-J](https://doi.org/10.1016/0008-8846(91)90009-J)
6. Prabhu, A., Gimel, J.-C., Ayuela, A., Arrese-Igor, S., Gaitero, J. J., & Dolado, J. S. (2018). A multi-scale approach for percolation transition and its application to cement setting. *Scientific Reports*, 8, 14539. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-33918-6>
7. Cahn, J. W., & Hilliard, J. E. (1958). Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy. *J. Chem. Phys.*, 28(2), 258–267. <https://doi.org/10.1063/1.1744102>
8. Elder, K. R., & Grant, M. (2004). Modeling elastic and plastic deformations using phase field crystals. *Physical Review E*, 70(5), 051605. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.70.051605>
9. Cross, M. C., & Hohenberg, P. C. (1993). Pattern formation outside of equilibrium. *Reviews of Modern Physics*, 65(3), 851–1112. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.65.851>

10. Appell, J. M., Kalitvin, A. S., & Zabrejko, P. P. (2000). *Partial integral operators and integro-differential equations*. Marcel Dekker.
11. Atkinson, K., & Han, W. (2009). *Theoretical numerical analysis* (3rd ed.). Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0458-4>
12. Likos, C. N. (2001). Effective interactions in soft condensed matter physics. *Physics Reports*, 348(4-5), 267-439. [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(00\)00141-1](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00141-1)
13. Krasnosel'skii, M. A. (1964). *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*. Pergamon Press.

Kiosak V. A., Kolesnikov A. V., Semenova S. V.

NONLOCAL MATHEMATICAL MODEL OF PROCESSES IN DISPERSED MATERIALS

Summary

The paper presents a nonlocal physico-mathematical model describing two interrelated phenomena in dispersed materials: the emergence of a quasiperiodic cluster mesostructure and the setting of the material during hardening. The model is based on a nonlocal free energy functional with a competing Yukawa-type interaction potential combining long-range attraction and short-range repulsion. The variational stationarity condition reduces to a nonlinear Hammerstein integral equation for the order parameter spatial distribution, taken as local particle concentration or bond density. Both formulations share the same mathematical framework; the bond density choice establishes a direct link with percolation theory. Stability analysis of the homogeneous state in Fourier space shows that when λ exceeds a critical value λ_c , the system loses stability at wavenumber k_c with cluster scale $L_c = 2\pi l_a/k_c$. Analytical expressions for k_c and λ_c are derived. Setting is described as the moment ξ^* at which $\lambda(\xi)$ crosses $\lambda_c(\xi)$ during hydration. A two-stage mechanism is established: structural mode at ξ^* , percolation cluster at ξ^{**} when the bond amplitude reaches A_0^{perc} . A spectral FFT Picard algorithm confirms the analytical predictions and yields a structural regime diagram.

Keywords: dispersed materials, structure formation, Hammerstein equation, nonlocal functional, stability analysis, setting, percolation, order parameter.

REFERENCES

1. Derjaguin, B. V., & Landau, L. D. (1941). Theory of the stability of strongly charged lyophobic sols. *Acta Physicochim. URSS*, 14, 633–662.
2. Verwey, E. J. W., & Overbeek, J. Th. G. (1948). *Theory of the stability of lyophobic colloids*. Elsevier.
3. Seul, M., & Andelman, D. (1995). Domain shapes and patterns: The phenomenology of modulated phases. *Science*, 267(5197), 476–483. <https://doi.org/10.1126/science.267.5197.476>

4. Stradner, A., Sedgwick, H., Cardinaux, F., Poon, W. C. K., Egelhaaf, S. U., & Schurtenberger, P. (2004). Equilibrium cluster formation in concentrated protein solutions and colloids. *Nature*, 432, 492–495. <https://doi.org/10.1038/nature03109>
5. Bentz, D. P., & Garboczi, E. J. (1991). Percolation of phases in a three-dimensional cement paste microstructural model. *Cement and Concrete Research*, 21(2–3), 325–344. [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(91\)90009-J](https://doi.org/10.1016/0008-8846(91)90009-J)
6. Prabhu, A., Gimel, J.-C., Ayuela, A., Arrese-Igor, S., Gaitero, J. J., & Dolado, J. S. (2018). A multi-scale approach for percolation transition and its application to cement setting. *Scientific Reports*, 8, 14539. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-33918-6>
7. Cahn, J. W., & Hilliard, J. E. (1958). Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy. *J. Chem. Phys.*, 28(2), 258–267. <https://doi.org/10.1063/1.1744102>
8. Elder, K. R., & Grant, M. (2004). Modeling elastic and plastic deformations using phase field crystals. *Physical Review E*, 70(5), 051605. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.70.051605>
9. Cross, M. C., & Hohenberg, P. C. (1993). Pattern formation outside of equilibrium. *Reviews of Modern Physics*, 65(3), 851–1112. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.65.851>
10. Appell, J. M., Kalitvin, A. S., & Zabrejko, P. P. (2000). *Partial integral operators and integro-differential equations*. Marcel Dekker.
11. Atkinson, K., & Han, W. (2009). *Theoretical numerical analysis* (3rd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0458-4>
12. Likos, C. N. (2001). Effective interactions in soft condensed matter physics. *Physics Reports*, 348(4–5), 267–439. [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(00\)00141-1](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00141-1)
13. Krasnosel'skii, M. A. (1964). *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*. Pergamon Press.

УДК 517.764

І. М. Курбатова, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна

e-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0215-6060>

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ F -ПЛАНАРНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ КВАЗІ-КЕЛЕРОВИХ ПРОСТОРІВ

В роботі вирішуються основні питання теорії F -планарних відображень квазі-келерових просторів: 1) для будь-якого квазі-келерового простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) з'ясувати, допускає він F -планарні відображення зі збереженням майже комплексної структури в принципі чи ні; 2) якщо допускає, то знайти ті квазі-келерові простори $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, F_i^h)$, на які це відображення відбувається.

За допомогою методів, розроблених М. С. Синюковим в теорії геодезичних рівнянь ріманових просторів ми звели основні рівняння F -планарних відображень квазі-келерових просторів до нової форми, яка допускає ефективне дослідження і дозволяє отримати відповідь на питання 1) і 2) в результаті розв'язування системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій з коефіцієнтами із V_n .

Зауважимо, що за рахунок великого n навіть розв'язати лінійну однорідну алгебраїчну систему може бути технічно дуже складно. Тому велике значення мають інші підходи до вирішення питань існування (або неіснування) F -планарних відображень для певних класів просторів. Як приклад ми виділили широкий клас квазі-келерових просторів, що містить симетричні і рекурентні простори і не допускає нетривіальних F -планарних відображень зі збереженням майже комплексної структури.

MSC: 57R30.

Ключові слова: рімановий простір, тензор Рімана, тензор Річчі, майже комплексна структура, келеровий простір, квазі-келеровий простір, F -планарне відображення.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1\(47\).364553](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1(47).364553)

Стаття надійшла до редакції: 06.03.2026. Затверджена до друку: 16.03.2026.

Опублікована: 15.09.2026.



Ця стаття поширюється на умовах ліцензії Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).



1. Вступ

Ми продовжуємо дослідження F -планарних відображень многовидів, що наділені квазі-келеровою структурою ([2; 5; 6]) і є узагальненням геодезичних відображень ріманових просторів та голоморфно-проективних відображень келерових просторів ([3; 6]).

Нехай (V_n, g_{ij}, F_i^h) - рімановий простір з метричним тензором g_{ij} і афінорною структурою F_i^h .

За умов

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = -\delta_i^h, \quad (1)$$

$$g_{i\alpha} F_j^\alpha = -g_{j\alpha} F_i^\alpha, \quad (2)$$

$$F_{i,j}^h = -F_{\alpha,\beta}^h F_i^\alpha F_j^\beta \quad (3)$$

структура F_i^h називається *квазі-келеровою*, а рімановий простір V_n з такою структурою - *квазі-келеровим*.

Розглянемо квазі-келерові простори (V_n, g_{ij}, F_i^h) і $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$. Основні рівняння F -планарного відображення ([3])

$$(V_n, g_{ij}, F_i^h) \longrightarrow (\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h),$$

при $n > 3$ в загальній за відображенням системі координат (x^i) мають вигляд

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i} \delta_{j)}^h + \phi_{(i} F_{j)}^h, \quad (4)$$

$$F_i^h(x) = \bar{F}_i^h(x), \quad (5)$$

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = -\delta_i^h,$$

$$F_{ij} = -F_{ji}, \quad \bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} F_{ij} &= g_{i\alpha} F_j^\alpha = g_{i\bar{j}}, & \bar{F}_{ij} &= \bar{g}_{i\alpha} F_j^\alpha = \bar{g}_{i\bar{j}}, \\ F_{i,j}^h &= -F_{\alpha,\beta}^h F_i^\alpha F_j^\beta, & F_{i|j}^h &= -F_{\alpha|\beta}^h F_i^\alpha F_j^\beta, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\Gamma_{ij}^h, \bar{\Gamma}_{ij}^h$ символи Кристофеля $V_n, \bar{V}_n$, відповідно; $\psi_i(x), \phi_i(x)$ - деякі ковектори; дужками (i, j) позначено операцію симетрування; кома « $,$ » і вертикальна риска « $|$ » - знаки коваріантної похідної відносно зв'язності V_n і $\bar{V}_n$, відповідно.

Нагадаємо, що F -планарне відображення вважається тривіальним, якщо $\psi_i = \phi_i = 0$. Тому нетривіальні F -планарні відображення (V_n, g_{ij}, F_i^h) на $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ з основними рівняннями (4) можуть бути такими:

$$I \quad \psi_i = 0, \quad \phi_i \neq 0;$$

$$II \quad \psi_i \neq 0, \quad \phi_i = 0;$$

$$III \quad \psi_i \neq 0, \quad \phi_i \neq 0.$$

У випадку I F -планарне відображення називають *канонічним*; у випадку II воно є геодезичним відображенням ([1; 6]); відображення III називають *F -планарними основного типу*.

Раніше ми довели, що квазі-келерові простори не допускають нетривіальних геодезичних і канонічних F -планарних відображень, а в рівняннях (4)

$$\psi_\alpha F_i^\alpha = -\phi_i, \quad \phi_\alpha F_i^\alpha = \psi_i \quad (8)$$

і що вектор ψ_i є градієнтним, тобто існує інваріант $\psi(x)$ такий, що

$$\psi_i = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^i}. \quad (9)$$

Далі ми розглядаємо F -планарні відображення квазі-келерових просторів основного типу.

Дослідження проводяться в тензорній формі, локально, в класі достатньо гладких функцій.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

2. ЛІНІЙНА ФОРМА ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ F -ПЛАНАРНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ КВАЗІ-КЕЛЕРОВИХ ПРОСТОРІВ

1°. Будемо далі операцію згортання з афіном позначати таким чином:

$$A_{\bar{i} \dots}^{\dots} = A_{\alpha \dots}^{\dots} F_i^\alpha, \quad A_{\dots}^{\bar{i} \dots} = A_{\dots}^{\alpha \dots} F_\alpha^i$$

і називати *сполученням* по відповідному індексу. Очевидно, що з огляду на (1)

$$A_{\bar{i} \dots}^{\dots} = -A_{i \dots}^{\dots}, \quad A_{\dots}^{\bar{i} \dots} = -A_{\dots}^{i \dots}$$

При цьому вважаємо, що сполучення проводиться після коваріантного диференціювання, тобто

$$A_{i,j}^h = A_{\alpha,j}^h F_i^\alpha.$$

2°. Розглянемо квазі-келерові простори (V_n, g_{ij}, F_i^h) і $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$, які знаходяться в F -планарному відображенні

$$(V_n, g_{ij}, F_i^h) \longrightarrow (\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h).$$

Як відомо, $\bar{g}_{ij|k} = 0$, тому рівняння (4) може бути записане в іншій формі:

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik} - \psi_i \bar{F}_{jk} - \psi_j \bar{F}_{ik} \quad (10)$$

Легко бачити, що (4) і (10) - еквівалентні форми основних рівнянь F -планарних відображень. Вони є системами нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно $\bar{g}_{ij}$ і ψ_i . Сучасна теорія диференціальних рівнянь не дає регулярних методів розв'язування таких систем. Тому ми скористаємось методами, розробленими М. С. Синюковим в теорії геодезичних рівнянь ріманових просторів ([1]) і зведемо (10) до нової форми, яка допускає ефективне дослідження.

3°. Введемо в V_n двічі коваріантний симетричний і невироджений тензор

$$a_{ij} = e^{2\psi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, \quad (11)$$

де $\psi(x)$ - інваріант такий, що

$$\psi_i = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^i}.$$

З огляду на те, що $\bar{g}^{h\alpha} \bar{g}_{\alpha i} = \delta_i^h$, маємо

$$\bar{g}^{h\alpha}{}_{,j} \bar{g}_{\alpha i} + \bar{g}^{h\alpha} \bar{g}_{\alpha i,j} = 0.$$

Тому з урахуванням (10) коваріантна похідна a_{ij} в V_n приймає вигляд:

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} - \lambda_i F_{jk} - \lambda_j F_{ik}. \quad (12)$$

Тут

$$a_{ij} = a_{i\bar{j}} \quad (13)$$

і

$$\lambda_i = -e^{2\psi} \psi_\alpha \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\beta i}. \quad (14)$$

Легко довести, що вектор λ_i градієнтний. Дійсно, з (12) витікає

$$a_{\alpha\beta,k}g^{\alpha\beta} = (a_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta})_{,k} = 4\lambda_k,$$

до того ж $\lambda_i \neq 0$ при $\psi_i \neq 0$ і навпаки.

Має місце

Теорема 1. *Для того, щоб квазі-келеровий простір (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускав нетривіальне F -планарне відображення зі збереженням майже комплексної структури, необхідно і достатньо, щоб в ньому існував двічі коваріантний симетричний невідроджений тензор a_{ij} , що задовольняє умовам (12, 13) при деякому векторі $\lambda_i \neq 0$.*

Доведення не наводиться через його повну аналогію з ([1]).

Диференціальні рівняння в коваріантних похідних (12) є новою більш ефективною для досліджень формою основних рівнянь F -планарних відображень квазі-келерових просторів тому, що мають лінійний характер відносно невідомих функцій a_{ij}, λ_i . Ми переходимо до вивчення питань існування (або не існування) таких дифеоморфізмів.

3. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ F -ПЛАНАРНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ КВАЗІ-КЕЛЕРОВИХ ПРОСТОРІВ

1°. Будемо вивчати основні рівняння F -планарних відображень квазі-келерових просторів в новій формі (12). Їх умови інтегрованості вигляд:

$$\begin{aligned} a_{\alpha i} R_{jkl}^{\alpha} + a_{\alpha j} R_{ikl}^{\alpha} &= \lambda_{i,l} g_{kj} + \lambda_{j,l} g_{ki} - \lambda_{i,k} g_{lj} - \lambda_{j,k} g_{li} + \\ &+ \lambda_{\bar{i},l} F_{kj} + \lambda_{\bar{j},l} F_{ki} - \lambda_{\bar{i},k} F_{lj} - \lambda_{\bar{j},k} F_{li} + \\ &+ \lambda_{\alpha} F_{i,l}^{\alpha} F_{kj} + \lambda_{\alpha} F_{j,l}^{\alpha} F_{ki} - \lambda_{\alpha} F_{i,k}^{\alpha} F_{lj} - \lambda_{\alpha} F_{j,k}^{\alpha} F_{li} - \\ &- \lambda_{\bar{i}} F_{jk,l} - \lambda_{\bar{j}} F_{ik,l} + \lambda_{\bar{i}} F_{jl,k} + \lambda_{\bar{j}} F_{il,k} \end{aligned} \quad (15)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $\lambda_{i,l}$, отримуємо:

$$\begin{aligned} 2n(n-2)\lambda_{i,l} &= 2(n-2)\nu g_{il} + n \left(a_{\alpha i} R_{\bar{\beta}.l}^{\alpha\beta} + a_{\alpha l} R_{\bar{\beta}.i}^{\alpha\beta} \right) \\ &+ (n-1) \left(2a_{\alpha\beta} R_{i.l}^{\alpha\beta} + a_{\alpha i} R_l^{\alpha} + a_{\alpha l} R_i^{\alpha} \right) \\ &+ 2a_{\alpha\beta} R_{\bar{i}.l}^{\alpha\beta} + a_{\alpha\bar{i}} R_l^{\alpha} + a_{\alpha\bar{l}} R_i^{\alpha}. \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$\nu = \lambda_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}, \quad R_{\cdot i \cdot l}^{\alpha \beta} = g^{\delta\beta} R_{\cdot i\delta l}^{\alpha},$$

R_l^{α} - змішані компоненти тензора Річчі.

З умов інтегрованості співвідношень (16), які ми не наводимо через їх громіздкість, знаходимо:

$$\begin{aligned} 2n(n-2)\nu_{,k} = \lambda_{\alpha} \Big(2n(n-2)R_k^{\alpha} + n(n-4)R_{\cdot \bar{\beta} \cdot k}^{\alpha \beta} - 3n^2 R_{\cdot \bar{\beta} \cdot \bar{k}}^{\alpha \beta} - 2n\delta_k^{\alpha} \tilde{R} \Big) + \\ + a_{\alpha\beta} \Big((B_{\gamma k, \delta}^{\alpha\beta} + B_{\gamma \delta, k}^{\alpha\beta}) g^{\gamma\delta} - (B_{\gamma \bar{k}, \delta}^{\alpha\beta} + B_{\gamma \delta, \bar{k}}^{\alpha\beta}) F^{\gamma\delta} \Big), \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} B_{il}^{\alpha\beta} = (n-1) \Big(2R_{\cdot i \cdot l}^{\alpha\beta} + \delta_i^{\beta} R_l^{\alpha} + \delta_l^{\beta} R_i^{\alpha} \Big) \\ + 2R_{\cdot i \cdot \bar{l}}^{\alpha\beta} + F_i^{\beta} R_l^{\alpha} + F_l^{\beta} R_i^{\alpha} \\ + n \Big(\delta_i^{\beta} R_{\cdot \bar{\gamma} \cdot l}^{\alpha\gamma} + \delta_l^{\beta} R_{\cdot \bar{\gamma} \cdot i}^{\alpha\gamma} \Big). \end{aligned} \quad (18)$$

$$\tilde{R} = R_{\alpha\bar{\beta} \cdot \cdot}^{\alpha\beta}.$$

Співвідношення (12), (16) і (17) утворюють замкнену систему диференціальних рівнянь першого порядку типу Коші відносно шуканих функцій a_{ij} , λ_k та ν . Отже справедлива

Теорема 2. Для того, щоб квазі-келеровий простір (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускав нетривіальне F -планарне відображення зі збереженням майже комплексної структури, необхідно і достатньо, щоб система диференціальних рівнянь (12), (16) і (17) мала в ньому нетривіальний розв'язок

$$a_{ij}(x) \Big(= a_{ji}(x), \quad \det \|a_{ij}(x)\| \neq 0 \Big), \quad \lambda_i(x) (\neq 0), \quad \nu(x),$$

що задовольняє умови $a_{ij} = a_{\bar{i}\bar{j}}$.

Зазначена система диференціальних рівнянь (12), (16) та (17) є лінійною з коефіцієнтами внутрішнього характеру відносно простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) і в цьому просторі для будь-яких початкових значень

$$a_{ij}(x_{\circ}) = a_{ij}, \quad \lambda_i(x_{\circ}) = \lambda_i, \quad \nu(x_{\circ}) = \nu,$$

має не більш одного розв'язку і тому кількість довільних сталих в загальному розв'язку системи рівнянь (12), (16) та (17) (позначимо її (A)) за умови (13) не перевищує

$$N_o = (m + 1)^2, \quad (n = 2m).$$

2°. Питання про існування нетривіальних розв'язків системи (A) зводиться до дослідження умов інтегрованості її рівнянь та їх диференціальних продовжень, що являють собою алгебраїчну систему рівнянь відносно невідомих функцій з коефіцієнтами з V_n .

Для першої групи рівнянь (A) умови інтегрованості виходять з (15) заміною в них коваріантної похідної вектора λ_i виразом (16) в формі:

$$a_{\alpha\beta} T_{ijkl}^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha P_{ijkl}^\alpha = 0, \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} T_{ijkl}^{\alpha\beta} = & 2n(n-2) \left(\delta_i^\alpha R_{jlk}^\beta + \delta_j^\alpha R_{ilk}^\beta \right) - \\ & - \left(B_{\gamma k}^{\alpha\beta} g_{l\delta} - B_{\gamma l}^{\alpha\beta} g_{k\delta} \right) \left(O_{ij}^{\gamma\delta} + O_{ji}^{\gamma\delta} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$O_{ij}^{\gamma\beta} = \delta_i^\gamma \delta_j^\beta + F_i^\gamma F_j^\beta, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} P_{ijkl}^\alpha = & F_{i,l}^\alpha F_{kj} + F_{j,l}^\alpha F_{ki} - F_{i,k}^\alpha F_{lj} - F_{j,k}^\alpha F_{li} - \\ & - F_i^\alpha \left(F_{jk,l} - F_{jl,k} \right) - F_j^\alpha \left(F_{ik,l} - F_{il,k} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

B_{kl}^{ij} визначені формулою (18).

Аналогічно умови інтегрованості другої і третьої груп рівнянь (A) з урахуванням (12), (16) та (17) можна представити у вигляді

$$a_{\alpha\beta} L_{ikl}^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha M_{ikl}^\alpha = 0, \quad (23)$$

$$a_{\alpha\beta} \tilde{L}_{kl}^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha \tilde{M}_{kl}^\alpha + \nu S_{kl} = 0, \quad (24)$$

відповідно. Тут $L_{ikl}^{\alpha\beta}$, M_{ikl}^α , $\tilde{L}_{kl}^{\alpha\beta}$, $\tilde{M}_{kl}^\alpha$, S_{kl} - деякі тензори з компонентами внутрішнього характеру відносно V_n , які ми не наводимо через їх громіздкість.

Таким чином, умови інтегрованості системи (A) мають вигляд (19), (23), (24). Позначимо їх (B). Зауважимо, що (B) та їх диференціальні

продовження, які будемо позначати $(B_1), (B_2), \dots$, утворюють систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно a_{ij}, λ_i, ν з коефіцієнтами з V_n . Так як кількість невідомих функцій дорівнює $(m+1)^2$, що знайдеться таке натуральне число s , (B_s) та подальші продовження будуть наслідками $(B), (B_1), (B_2), \dots, (B_{s-1})$.

Має місце

Теорема 3. *Квазі-келеровий простір (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускає F -планарне відображення зі збереженням майже комплексної структури тоді і тільки тоді, коли система рівнянь $(B), (B_1), (B_2), \dots, (B_{s-1})$ має в V_n розв'язок*

$$a_{ij}(x) \left(= a_{ji}(x) \right), \quad \lambda_i(x), \quad \nu(x),$$

причому $\det \|a_{ij}(x)\| \neq 0$, $a_{\bar{i}\bar{j}} = a_{ij}$, $\lambda_i \neq 0$.

3°. Максимальне число суттєвих параметрів r , тобто початкових значень

$$a_{ij}(x_o) = a_{ij}, \quad \lambda_i(x_o) = \lambda_i, \quad \nu(x_o) = \nu,$$

від яких залежить в даному V_n загальний розв'язок системи (A) , називають *ступенем рухливості простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) відносно F -планарних відображень*. В нашому випадку

$$r \leq N_o = (m+1)^2.$$

Тут r досягає максимуму N_o тоді і тільки тоді, коли система (A) має в просторі V_n розв'язок при будь-яких початкових значеннях і отже коли ця система цілком інтегровна. В такому разі умови (B) виконуються тожньо відносно a_{ij}, λ_i і ν .

Вимагаючи, щоб перша група (19) рівнянь (B) виконувалася тожньо відносно a_{ij}, λ_i , отримуємо:

$$T_{ijkl}^{\alpha\beta} + T_{ijkl}^{\beta\alpha} = 0,$$

$$P_{ijkl}^{\alpha} = 0.$$

Звідси після певних алгебраїчних перетворень витікає, що

$$F_{i,j}^h = 0$$

і

$$R_{ijk}^h = \frac{R}{n(n+2)} \left(\delta_k^h g_{ij} - \delta_j^h g_{ik} + F_k^h F_{ij} - F_j^h F_{ik} + 2F_i^h F_{kj} \right).$$

Це свідчить про те, що наше (V_n, g_{ij}, F_i^h) необхідно є келеровим простором сталої голоморфної кривини.

І навпаки, якщо (V_n, g_{ij}, F_i^h) -келеровий простір сталої голоморфної кривини, то легко перевірити, що рівняння (B) виконуються тотожно.

Викнується

Теорема 4. *Серед квазі-келерових просторів (V_n, g_{ij}, F_i^h) келерові простори сталої голоморфної кривини і тільки вони мають максимальний ступінь рухливості відносно F -планарних відображень зі збереженням майже комплексної структури.*

4. F -ПЛАНАРНІ ВІДОБРАЖЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ КВАЗІ-КЕЛЕРОВИХ ПРОСТОРІВ

Розглянемо квазі-келеровий простір (V_n, g_{ij}, F_i^h) , в якому виконуються деякі умови. По-перше, зауважимо, що з огляду на (41) співвідношення (22) і (21) дають нам

$$P_{\gamma\delta\xi\eta}^\alpha O_{ij}^{\gamma\delta} O_{kl}^{\xi\eta} = 0.$$

Тоді з (19) маємо:

$$a_{\alpha\beta} \tilde{T}_{ijkl}^{\alpha\beta} = 0, \quad (25)$$

де

$$\tilde{T}_{ijkl}^{\alpha\beta} = T_{\gamma\delta\xi\eta}^{\alpha\beta} O_{ij}^{\gamma\delta} O_{kl}^{\xi\eta}.$$

Якщо тензор $T_{ijkl}^{\alpha\beta}$ в (19) задовольняє умови

$$\tilde{T}_{ijkl,m}^{\alpha\beta} = \tilde{T}_{\gamma\delta\xi\eta}^{\alpha\beta} A_{ijklm}^{\gamma\delta\xi\eta}, \quad (26)$$

де $A_{ijklm}^{\gamma\delta\xi\eta}$ - довільний тензор типу (4.5), то з (25) витікає:

$$a_{\alpha\beta,m} \tilde{T}_{ijkl}^{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} \tilde{T}_{ijkl,m}^{\alpha\beta} = 0,$$

і отже

$$a_{\alpha\beta,m} \tilde{T}_{ijkl}^{\alpha\beta} = 0. \quad (27)$$

З огляду на (12) і (20) останні співвідношення можна представити в такому вигляді:

$$\begin{aligned} & n \left(\lambda_i Q_{jmk} + \lambda_j Q_{imk} - \lambda_{\bar{i}} Q_{\bar{j}mk} - \lambda_{\bar{j}} Q_{\bar{i}mk} - \right. \\ & \left. - g_{mi} \lambda_\gamma Q_{jkl}^\gamma - g_{mj} \lambda_\gamma Q_{ikl}^\gamma - F_{mi} \lambda_\gamma Q_{\bar{j}kl}^\gamma - F_{mj} \lambda_\gamma Q_{\bar{i}kl}^\gamma \right) + \\ & + g_{ki} A_{jml} + g_{kj} A_{iml} - g_{li} A_{jmk} - g_{lj} A_{imk} + \\ & + F_{ki} A_{\bar{j}ml} + F_{kj} A_{\bar{i}ml} - F_{li} A_{\bar{j}mk} - F_{lj} A_{\bar{i}mk} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} Q_{ijkl} &= R_{\alpha\beta\gamma\delta} O_{ij}^{\alpha\beta} O_{kl}^{\gamma\delta}, \\ A_{iml} &= C_{\alpha m \beta} O_{il}^{\alpha\beta}, \\ C_{iml} &= -\lambda_\alpha Q_{ilm}^\alpha - \lambda_\alpha Q_{lim}^\alpha + g_{im} \lambda_\alpha Q_{.. \beta l}^\alpha + \lambda_i Q_{.lm}^\beta, \\ Q_{ijk}^h &= g^{h\alpha} Q_{\alpha ijk}, \quad Q_{..jk}^{hi} = g^{h\alpha} g^{i\beta} Q_{\alpha\beta jk}. \end{aligned}$$

Враховуючи те, що

$$Q_{ijkl} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} O_{ij}^{\alpha\beta} O_{kl}^{\gamma\delta} = R_{ijkl} + R_{\bar{i}jkl} + R_{ij\bar{k}l} + R_{ij\bar{l}k},$$

за допомогою певних алгебраїчних перетворень з рівняння (8) при $\lambda_i \neq 0$ знаходимо

$$R_{ijkl} + R_{\bar{i}jkl} + R_{ij\bar{k}l} + R_{ij\bar{l}k} = \frac{4R}{n(n+2)} \left(g_{li} g_{jk} - g_{ki} g_{jl} + F_{li} F_{jk} - F_{ki} F_{jl} + 2F_{ij} F_{lk} \right).$$

Таким чином, квазі-келеровий простір, в якому виконуються умови (26), виявився узагальнено F -плоским.

Справедлива

Теорема 5. *Квазі-келерові простори (V_n, g_{ij}, F_i^h) , що задовольняють умовам (26) і відмінні від узагальнено F -плоских, не допускають нетривіальних F -планарних відображень зі збереженням майже комплексної структури.*

Зауважимо, що симетричні і рекурентні ріманові простори задовольняють умовам (26), тому має місце

Теорема 6. *Симетричні і рекурентні квазі-келерові простори (V_n, g_{ij}, F_i^h) не допускають нетривіальних F -планарних відображень зі збереженням майже комплексної структури.*

Висновки

Ми розглядали ключові питання теорії F -планарних відображень квазі-келерових просторів:

1) як для будь-якого квазі-келерового простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) з'ясувати, допускає він F -планарні відображення зі збереженням майже комплексної структури в принципі чи ні;

2) якщо допускає, то як знайти ті квазі-келерові простори $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, F_i^h)$, на які це відображення відбувається.

Для відповіді на перше з цих питань треба з'ясувати, чи має система нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik} - \psi_i \bar{F}_{jk} - \psi_j \bar{F}_{ik}$$

розв'язки

$$\bar{g}_{ij}(x) \left(= \bar{g}_{ji}(x), \quad \det \|\bar{g}_{ij}(x)\| \neq 0 \right), \quad \psi_i(x) (\neq 0)$$

за умови

$$\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}.$$

Сучасна теорія диференціальних рівнянь не дає регулярних методів розв'язування таких систем. Тому ми скористалися методами, розробленими М. С. Синюковим в теорії геодезичних рівнянь ріманових просторів ([1]) і звели основні рівняння F -планарних відображень квазі-келерових просторів до нової форми, яка допускає ефективне дослідження (про це йдеться в Теоремі 1). За допомогою цієї нової форми відповідь на питання 1) і 2) можна отримати в результаті розв'язування системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій з коефіцієнтами із V_n (Теореми 2,3).

Отже ми отримали ефективний і простий спосіб для будь-якого квазі-келерового простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) з'ясувати, допускає він F -планарні відображення зі збереженням майже комплексної структури в принципі чи ні, і в разі позитивної відповіді знайти всі ті квазі-келерові простори $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, F_i^h)$, на які це відображення відбувається.

Зауважимо, що теоретично питання остаточно вирішено, але практично за рахунок великого n навіть розв'язати лінійну однорідну алгебраїчну систему може бути технічно дуже складно. Тому велике значення

мають інші підходи до вирішення питань як існування, так і неіснування F -планарних відображень для певних класів просторів. Ми виділили широкий клас квазі-келерових просторів, серед яких містяться симетричні і рекурентні, який не допускає нетривіальних F -планарних відображень зі збереженням майже комплексної структури (Теореми 5,6).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Синюков, Н. С. (1979). *Геодезические отображения римановых пространств*. Наука.
2. Широков, А. П. (1969). Структуры на дифференцируемых многообразиях. *Итоги науки. Серия: Математика. Алгебра. Топология. Геометрия*. 1967, 127–188.
3. Микеш, Й., & Синюков, Н. С. (1983). О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности. *Soviet Mathematics*, 27(1), 63–70.
4. Otsuki, T., & Tashiro, Y. (1954). On curves in Kahlerian spaces. *Math. J. Okayama Univ.*, 4, 57–78.
5. Grey, A., & Hervella, L. M. (1980). The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariant. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 123, 35–58.
6. Mikes, J., Stepanova, E., & Vanzurova, A. (2019). *Differential geometry of special mappings*. Palacky University Press.
7. Курбатова, І. (2025). F -планарні відображення спеціальних майже комплексних просторів. *Дослідження в математиці і механіці*, 28(2), 18–30.

Kurbatova I. M.

FUNDAMENTAL THEOREMS OF THE THEORY OF F -PLANAR MAPPINGS OF QUASI-KÄHLERIAN SPACES

Summary

The paper addresses the main issues of the theory of F -planar mappings of quasi-Kähler spaces: 1) for any quasi-Kähler space (V_n, g_{ij}, F_i^h) , find out whether it admits F -planar mappings with preservation of an almost complex structure in principle or not; 2) if it admits, then find those quasi-Kähler spaces $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, F_i^h)$, onto which this mapping occurs.

Using the methods developed by M. S. Sinyukov in the theory of geodesic equations of Riemannian spaces, we reduced the basic equations of F -planar mappings of quasi-Kähler spaces to a new form that allows for effective research and allows us to obtain an answer to questions 1) and 2) as a result of solving a system of linear homogeneous algebraic equations with unknown functions with coefficients from V_n .

Note that due to the large n , even solving a linear homogeneous algebraic system can be technically very difficult. Therefore, other approaches to solving the questions of existence (or non-existence) of F -planar mappings for certain classes of spaces are of great importance. As an example, we have singled out a wide class of quasi-Kähler spaces that contains symmetric and recurrent spaces and does not admit non-trivial F -planar mappings while preserving an almost complex structure.

Keywords: *Riemannian space, Riemannian tensor, Ricci tensor, almost complex structure, Kählerian space, quasi-Kählerian space, F -planar mapping.*

REFERENCES

1. Sinyukov, N. S. (1979). *Geodesicheskiye otobrazheniya rimanovikh prostranstv* [Geodesic mappings of Riemannian spaces]. Nauka. [in Russian].
2. Shirokov, A. P. (1969). *Struktury na differentsiruyemykh mnogoobraziyakh* [Structures on differentiable manifolds]. *Itogi nauki. Ser. Mat. Algebra. Topol. Geom. 1967*, 127–188. [in Russian].
3. Mikes, J., & Sinyukov, N. S. (1983). *O kvaziplanarnykh otobrazheniyakh prostranstv affinnoy svyaznosti* [On quasilplanar mappings of spaces of affine connection]. *Soviet Mathematics*, 27(1), 63–70. [in Russian].

4. Otsuki, T., & Tashiro, Y. (1954). On curves in Kahlerian spaces. *Math. J. Okayama Univ.*, 4, 57–78.
5. Grey, A., & Hervella, L. M. (1980). The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariant. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 123, 35–58.
6. Mikes, J., Stepanova, E., & Vanzurova, A. (2019). *Differential geometry of special mappings*. Palacky University Press.
7. Kurbatova, I. (2025). F -planar mappings of special almost complex spaces [F -planarni vidobrazhennia spetsialnykh maizhe kompleksnykh prostoriv]. *Doslidzhennia v matematytsi i mekhanitsi*, 28(2), 18–30. [in Ukrainian].

УДК 514.765.1+512.813.4

О. О. Пришляк, д-р фіз.-мат. наук, професор

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
кафедра комп'ютерних методів механіки і процесів керування
пр. академіка Глушкова, 4-е, м. Київ, 03127, Україна
e-mail: prishlyak@knu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7164-807X>

О. А. Назаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Одеська державна академія будівництва та архітектури
кафедра вищої математики
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, Україна
e-mail: gelo.fabrica@ukr.net

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0405-6522>

О. М. Латиш, ст. викладач

Національний університет «Одеська морська академія»
кафедра інженерної механіки і судноремонту
вул. Дідріхсона, 8, м. Одеса, 65029, Україна
e-mail: latysh.o@ukr.net

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-8914-2889>

ПРО ГЕОДЕЗИЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПСЕВДОРІМАНОВИХ ПРОСТОРІВ ЗІ СПЕЦІАЛЬНИМИ ВЕКТОРНИМИ ПОЛЯМИ

У статті досліджуються геодезичні відображення псевдоріманових просторів, які є одним із фундаментальних об'єктів сучасної диференціальної геометрії. Теорія геодезичних відображень бере свій початок у роботах Е. Бельтрамі, У. Діні та Т. Леві-Чевіті і протягом понад півтора століття залишається важливим напрямом геометричних досліджень. Значний внесок у її розвиток зробили Г. Вейль, Л. П. Ейзенхарт, Т. Томас, В. Ф. Каган, М. С. Синюков та їхні послідовники, які створили інваріантний тензорний апарат дослідження відображень та розробили ефективні методи аналізу відповідних диференціальних рівнянь.

Актуальність роботи зумовлена необхідністю подальшого вивчення геометричних властивостей псевдоріманових просторів і встановлення умов існування їх геодезичних відображень. Особливий інтерес до таких досліджень пов'язаний не лише з внутрішніми проблемами диференціальної геометрії, а й із численними застосуваннями в математичній фізиці, механіці, теорії гравітації та моделюванні динамічних процесів, де траєкторії руху можуть інтерпретуватися як геодезичні лінії відповідних просторів.

Метою роботи є дослідження нових характеристик спеціальних псевдоріманових просторів та їх геодезичних відображень. Об'єктом дослідження виступають спеціальні класи псевдоріманових просторів, а предметом — системи диференціальних рівнянь, умови їх інтегрованості та диференціальні продовження, що характеризують можливість існування геодезичних відображень.

Для досягнення поставленої мети використано класичні методи ріманової геометрії, локальні методи дослідження в класі достатньо гладких функцій і тензорний апарат. Отримані результати сприяють подальшому розвитку теорії геодезичних відображень та поглиблюють уявлення про геометричну будову псевдоріманових просторів.

MSC: 53B35.

Ключові слова: геодезичні відображення, псевдоріманові простори, рекурентні простори, еквідистантні простори, умови інтегрованості, векторна оболонка тензора Рімана.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1\(47\).364554](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1(47).364554)

Стаття надійшла до редакції: 11.03.2026. Затверджена до друку: 21.03.2026.

Опублікована: 15.09.2026.



Ця стаття поширюється на умовах ліцензії Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

Вступ

За свою більше ніж 160 річну історію теорія геодезичних відображень приваблювала увагу багатьох дослідників. Першим питання про геодезичне відображення поверхні V_2 на площину E_2 розглянув Е. Бельтрамі [1] в 1865 році, розв'язуючи задачі картографії. Пізніше в 1869 році У. Діні [2] поставив загальну задачу про можливість геодезичного відображення V_2 на $\bar{V}_2$. Ним, по суті, ця задача була розв'язана для ріманових просторів, однак розв'язок був надзвичайно складний, і всі роки після того, він багато разів уточнювався та модифікувався цілим рядом вчених. Серед цих робіт особливе місце займає робота 1896 року Т. Леві Чевіті [3], в якій він, виходячи з рівнянь динаміки, сформулював постановку задачі та отримав основні рівняння. Після того, як тензорні методи дослідження зайняли домінуючі позиції в диференціальній геометрії, Г. Вейль, Л. П. Ейзенхарт, Т. Томас, В. Ф. Каган та інші побудували струнку теорію геодезичних відображень псевдоріманових просторів, інваріантну відносно вибору системи координат [4–7]. Новий поштовх ця теорія отримала після робіт М.С. Синюкова, який звів задачу до дослідження лінійної системи

диференціальних рівнянь [7].

В теорії геодезичних відображень працювала велика кількість вчених як математиків, так і фізиків, зацікавлених в застосуванні результатів для моделювання динамічних процесів [8]. Як відомо, рух деяких типів механічних систем, багато процесів в гравітаційних та електромагнітних полях, в суцільних середовищах протікають по траєкторіях, які можна розглядати, як геодезичні лінії афіннозв'язного або псевдоріманового простору, що визначаються енергетичним режимом, при якому зовнішні сили відсутні, або по деяким кривим, вектор кривини яких це вектор узагальнених зовнішніх сил.

Вивчення відображень (морфізмів) різних типів геометричних структур складає актуальну частину сучасної диференціальної геометрії. Під відображенням в сучасній геометрії розуміють дифеоморфізм, що зберігає ті чи інші властивості геометричних об'єктів. Одним із центральних в сучасній геометрії є пошук відповіді на питання: допускає чи не допускає псевдоріманів простір відображення.

Особливе місце в розвитку теорії відображень займає одеська геометрична школа. Хоча формально школа бере початок від В.Ф. Кагана, основні успіхи пов'язані з роботами професора М. С. Синюкова та його учнів: М. Л. Гаврильченка, С. Г. Лейка, І. М. Курбатової, Н. В. Яблонської, О. М. Синюкової та інших [7; 9].

Метою даної роботи є дослідження нових характеристик псевдоріманових просторів та їх геодезичних відображень.

Об'єктом дослідження є спеціальні псевдоріманові простори і їх геодезичні відображення.

Предметом дослідження являються диференціальні рівняння, їх умови інтегрованості та диференціальні продовження, які характеризують те, допускає чи не допускає заданий узагальнений простір вказаний тип відображення.

Методи дослідження це класичні методи дослідження ріманової геометрії. Дослідження ведуться локально, в класі достатньо гладких функцій з використанням тензорних методів.

1. ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

Геодезичною лінією в псевдорімановому просторі V_n з метричним тензором g_{ij} називають криву, яка задовольняє умові

$$\psi_{i,\alpha}\psi^\alpha = \rho\psi_i \quad (1)$$

тут кома це знак коваріантної похідної $\psi_{i,\alpha} = \partial_j\psi_i - \psi_\alpha\Gamma_{ij}^\alpha$, Γ_{ij}^h - символи Христофеля, а $\psi_h = \psi^\alpha g_{\alpha h}$ [10].

Взаємно однозначна відповідність між точками псевдоріманових просторів V_n з метричним тензором g_{ij} і $\bar{V}_n$ з метричним тензором $\bar{g}_{ij}$ називається *геодезичним відображенням*, якщо при ній кожна геодезична лінія V_n переходить в геодезичну лінію $\bar{V}_n$. Геодезичні відображення відмінні від гомотетії називають *нетривіальними*.

Необхідною і достатньою умовою того, щоб псевдоріманів простір V_n допускав нетривіальні геодезичні відображення є існування в ньому розв'язків систем диференціальних рівнянь в коваріантних похідних

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} \quad (2)$$

відносно тензора $a_{ij}(=a_{ji} \neq c g_{ij})$ та вектора $\lambda_i (\neq 0)$ [7].

Тут кома знак коваріантної похідної

$$a_{ij,k} = \partial_k a_{ij} - a_{\alpha j} \Gamma_{ik}^\alpha - a_{\alpha i} \Gamma_{jk}^\alpha. \quad (3)$$

Систему (2) називають *лінійною формою основних рівнянь теорії геодезичних відображень*. При відомих розв'язках системи (2) метричні тензори псевдоріманових просторів V_n та $\bar{V}_n$ можуть бути знайдені з рівнянь

$$a_{ij} = e^{2\psi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}; \quad (4)$$

$$\lambda_i = -e^{2\psi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} \psi_\beta. \quad (5)$$

Тут $\bar{g}^{ij}$ елементи оберненої матриці метричного тензора $\bar{g}_{ij}$ псевдоріманового простору $\bar{V}_n$ геодезично відповідного псевдорімановому простору V_n , $\psi_i = \frac{1}{2(n+1)} \partial_i \ln \frac{|\bar{g}_{ij}|}{|g_{ij}|}$ [11; 12].

Об'єкти псевдоріманового простору V_n , які визначені за допомогою метричного тензора g_{ij} називають, *внутрішніми об'єктами псевдоріманового простору* [13; 14]. Крім внутрішніх об'єктів вивчають і об'єкти, які не є внутрішніми, зокрема тензор D_{ijk}^h такий, що

$$D_{ijk}^h = R_{ijk}^h - B(\delta_k^h g_{ij} - \delta_j^h g_{ik}), \quad (6)$$

де δ_i^h — символи Кронекера, R_{ijk} — тензор Рімана, а B — деякий інваріант.

Якщо тензор $D_{ijk}^h = 0$, то псевдоріманів простір V_n є простором сталої кривини і

$$B = \frac{R}{n(n-1)}. \quad (7)$$

Тут R — скалярна кривина, яка визначається за формулою

$$R = R_{\beta\gamma\alpha}^\alpha g^{\beta\gamma}. \quad (8)$$

І навпаки, якщо виконується умова (7), то тензор D_{ijk}^h співпадає з тензором конциркулярної кривини, який визначається за формулою

$$Y_{ijk}^h = R_{ijk}^h - \frac{R}{n(n-1)} (\delta_k^h g_{ij} - \delta_j^h g_{ik}). \quad (9)$$

Псевдоріманові простори, в яких існує тензор $T_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ такий, що

$$T_{j_1 j_2 \dots j_m, k}^{i_1 i_2 \dots i_r} = \rho_k T_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_r} \quad (10)$$

називають *T-рекурентними* [15].

А якщо умови (10) виконуються для тензора Рімана, то такі простори називають *рекурентними*.

Векторні поля $u_k \neq 0$, які задовольняють для ненульових тензорів $T_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ умові

$$u_k T_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_r} + u_{j_1} T_{j_2 k \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_r} + u_{j_2} T_{k j_1 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_r} = 0 \quad (11)$$

називають *векторними оболонками тензора* $T_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ відносно індексів j_1 та j_2 [16].

Якщо векторна оболонка задається відносно кососиметричної пари індексів тензора Рімана, тобто

$$u_i R_{jkl}^h + u_k R_{jli}^h + u_l R_{jik}^h = 0 \quad (12)$$

то вона називається *векторною оболонкою тензора Рімана*.

Враховуючи властивість тензора Рімана

$$R_{ijk,l}^h + R_{ikl,j}^h + R_{ilj,k}^h = 0 \quad (13)$$

легко переконатись, що в рекурентних псевдоріманових просторах існує векторна оболонка тензора Рімана. Тому псевдоріманові простори, в яких виконуються умови (12) називають *слабо рекурентними просторами*. Якщо умові (11) буде задовольняє тензор D_{ijk}^h , тобто

$$u_i D_{jkl}^h + u_k D_{jli}^h + u_l D_{jik}^h = 0, \quad (14)$$

то такі простори будемо називать *D-слабо рекурентними псевдорімановими просторами*.

2. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Далі ми розглянемо геодезичні відображення *D-слабо рекурентних псевдоріманових просторів*.

Домножимо рівняння (14) на g^{hl} та згорнемо по індексам h та l

$$u_\alpha D_{ijk}^\alpha + u_j D_{ik} + u_k D_{ij} = 0. \quad (15)$$

Тут

$$D_{ij} = D_{ij\alpha}^\alpha = R_{ij} - B(n-1)g_{ij}, \quad (16)$$

а R_{ij} — тензор Річчі, такий що

$$R_{ij} = R_{ij\alpha}^\alpha. \quad (17)$$

При отриманні формули (15) скористались властивістю тензора D_{ijk}^h

$$D_{ijk}^h + D_{ikj}^h = 0. \quad (18)$$

Підставимо (16) в (15) та врахуємо означення тензора D_{ijk}^h

$$u_\alpha R_{ijk}^\alpha = B(u_k g_{ij} - u_j g_{ik}) + u_k R_{ij} - u_j R_{ik} - B(n-1)(u_k g_{ij} - u_j g_{ik}).$$

Групуємо, отримаємо

$$u_\alpha R_{ijk}^\alpha = u_k(R_{ij} - B(n-2)g_{ij}) - u_j(R_{ik} - B(n-2)g_{ik}) \quad (19)$$

Позначимо

$$R_{ij} - B(n-2)g_{ij} = M_{ij}. \quad (20)$$

Тоді (19) прийме вигляд

$$u_\alpha R_{ijk}^\alpha = u_k M_{ij} - u_j M_{ik}. \quad (21)$$

Умови інтегрування лінійної форми основних рівнянь теорії геодезичних відображень будуть мати вид

$$a_{\alpha i} R_{jkl}^\alpha + a_{\alpha j} R_{ikl}^\alpha = \lambda_{li} g_{jk} + \lambda_{lj} g_{ik} - \lambda_{ki} g_{jl} - \lambda_{kj} g_{il}, \quad (22)$$

тут $\lambda_{ij} = \lambda_{i,j}$.

Домножимо рівняння (22) на вектор $u^l = u_\alpha g^{\alpha l}$ та згорнемо по індексу l

$$a_{\alpha i} R_{jk\beta}^\alpha u^\beta + a_{\alpha j} R_{ik\beta}^\alpha u^\beta = u^\alpha \lambda_{\alpha i} g_{jk} + u^\alpha \lambda_{\alpha j} g_{ik} - \lambda_{ki} u_j - \lambda_{kj} u_i. \quad (23)$$

Скористаємось властивостями тензора Рімана

$$a_{\alpha i} R_{jk\beta}^\alpha u^\beta = a_i^\alpha R_{\alpha jk\beta} u^\beta = a_i^\alpha u^\beta R_{k\beta\alpha j} = a_i^\alpha u_\beta R_{kj\alpha}^\beta.$$

Підставимо отримане в рівняння (23) та врахуємо рівняння (21)

$$\begin{aligned} a_{\alpha i} u^{\alpha} M_{kj} - a_i^{\alpha} M_{\alpha k} u_j + a_{\alpha j} u^{\alpha} M_{ki} - a_j^{\alpha} M_{\alpha k} u_i = \\ = u^{\alpha} \lambda_{\alpha i} g_{jk} + u^{\alpha} \lambda_{\alpha j} g_{ik} - u_j \lambda_{ki} - u_i \lambda_{kj}. \end{aligned} \quad (24)$$

Згрупуємо останнє

$$\begin{aligned} a_{\alpha i} u^{\alpha} M_{kj} + a_{\alpha j} u^{\alpha} M_{ki} = \\ = u^{\alpha} \lambda_{\alpha i} g_{jk} + u^{\alpha} \lambda_{\alpha j} g_{ik} + u_j (a_i^{\alpha} M_{\alpha k} - \lambda_{ki}) + u_i (a_j^{\alpha} M_{\alpha k} - \lambda_{kj}). \end{aligned} \quad (25)$$

Переконаємося, що вираз в дужках симетричний, тобто

$$a_i^{\alpha} M_{\alpha k} - \lambda_{ki} = a_k^{\alpha} M_{\alpha i} - \lambda_{ik}. \quad (26)$$

Для цього врахуємо означення тензора M_{ij} , симетричність тензора a_{ij} , градієнтність вектора $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \lambda_{i,j} = \lambda_{,ij}$ та відому властивість тензора Річчі

$$a_{\alpha i} R_j^{\alpha} = a_{\alpha j} R_i^{\alpha}. \quad (27)$$

Проальтернуємо рівняння (25) по індексам k та i

$$\begin{aligned} a_{\alpha i} u^{\alpha} M_{kj} - a_{\alpha k} u^{\alpha} M_{ij} = \\ = u^{\alpha} \lambda_{\alpha i} g_{jk} - u^{\alpha} \lambda_{\alpha k} g_{ij} + u_i (a_j^{\alpha} M_{\alpha k} - \lambda_{kj}) - u_k (a_j^{\alpha} M_{\alpha i} - \lambda_{ij}). \end{aligned} \quad (28)$$

В рівнянні (28) перепозначимо індекси k та j

$$\begin{aligned} a_{\alpha i} u^{\alpha} M_{kj} - a_{\alpha j} u^{\alpha} M_{ik} = \\ = u^{\alpha} \lambda_{\alpha i} g_{jk} - u^{\alpha} \lambda_{\alpha j} g_{ik} + u_i (a_j^{\alpha} M_{\alpha k} - \lambda_{kj}) - u_j (a_k^{\alpha} M_{\alpha i} - \lambda_{ki}). \end{aligned} \quad (29)$$

Додавши рівняння (29) та (25) після зведення подібних, отримаємо

$$a_{\alpha i} u^{\alpha} M_{kj} = u^{\alpha} \lambda_{\alpha i} g_{jk} + u_i (a_j^{\alpha} M_{\alpha k} - \lambda_{kj}). \quad (30)$$

Домножимо рівняння (30) на тензор g^{jk} та згорнемо по індексах j та k

$$u^{\alpha} \lambda_{\alpha i} = \frac{M}{n} a_{\alpha i} u^{\alpha} - \tau u_i. \quad (31)$$

Тут $M = M_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$; $\tau = \frac{1}{n} (a_{\alpha}^{\gamma} M_{\gamma\beta} - \lambda_{\alpha\beta}) g^{\alpha\beta}$.

Підставимо вираз (31) в рівняння (30)

$$a_{\alpha i} u^\alpha \left(M_{kj} - \frac{M}{n} g_{kj} \right) = u_i (a_j^\alpha M_{\alpha k} - \lambda_{kj} - \tau g_{kj}). \quad (32)$$

Так як вектор $u_i \neq 0$, то підберемо деякий вектор ξ^i так, щоб $\xi^\alpha u_\alpha = 1$.

Домножимо рівняння (32) на вектор ξ^i та згорнемо по індексу i .

$$a_j^\alpha M_{\alpha k} - \lambda_{kj} - \tau g_{kj} = \frac{1}{\tau} \left(M_{kj} - \frac{M}{n} g_{kj} \right). \quad (33)$$

де $\frac{1}{\tau} = a_{\alpha\beta} u^\alpha \xi^\beta$.

Врахуємо вираз (33) в рівнянні (32)

$$(a_{\alpha i} u^\alpha - \frac{1}{\tau} u_i) \left(M_{kj} - \frac{M}{n} g_{kj} \right) = 0. \quad (34)$$

Таким чином, доведено теорему.

Теорема 1. *Якщо D -слаборекурентний псевдоріманів простір V_n допускає нетривіальні геодезичні відображення, то в ньому виконується хоча б одна з умов*

$$M_{kj} - \frac{M}{n} g_{kj} = 0 \quad (35)$$

або

$$a_{\alpha i} u^\alpha = \frac{1}{\tau} u_i. \quad (36)$$

Розглянемо псевдоріманові D -слаборекурентні простори, в яких виконується умова (35). Врахувавши означення тензора M_{ij} (20), будемо мати

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij} + B \frac{(n-1)(n-2)}{n} g_{ij} \quad (37)$$

Домножимо рівняння (37) на g_{ij} та згорнемо по індексах i та j , отримаємо $B = 0$, і тоді рівняння (37) прийме вигляд

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij}. \quad (38)$$

Псевдоріманові простори, в яких виконуються умови (38), називають *просторами Ейнштейна* [17].

Таким чином, D -слаборекурентні псевдоріманові простори, які допускають нетривіальні геодезичні відображення і, в яких виконується умова (35), будуть слаборекурентними просторами Ейнштейна і тоді

$$u_\alpha R_{ijk}^\alpha = (u_k g_{ij} - u_j g_{ik}) \frac{R}{n}. \quad (39)$$

Домножимо на g^{ij} та згорнемо по індексах i та j

$$\frac{R}{n} u_k = \frac{R}{n} (n-1) u_k$$

і тоді $R = 0$. Тобто ці простори будуть просторами нульової скалярної кривини, а їх тензор Річчі задовольняє умові

$$R_{ij} = 0. \quad (40)$$

Рівняння (33) прийме вигляд

$$\lambda_{ij} + \tau g_{ij} = 0. \quad (41)$$

Простори, в яких існує векторне поле, що задовольняє умові (41), називають *еквідистантними*.

Умови інтегрування рівняння (41) мають вигляд [18]

$$\lambda_\alpha R_{ijk}^\alpha = \tau_j g_{ik} - \tau_k g_{ij}. \quad (42)$$

Домножимо дану тотожність на g^{ij} та згорнемо по індексам i та j . Врахувавши (40), переконаємося, що $\tau_i \stackrel{def}{=} \partial_i \tau = 0$. Тоді (42) прийме вигляд

$$\lambda_\alpha R_{ijk}^\alpha = 0. \quad (43)$$

Із рівнянь (40) також витікає, що скалярна кривина псевдоріманового простору V_n дорівнює нулю, тобто $R = 0$ і (39) можна записати в вигляді

$$u_\alpha R_{ijk}^\alpha = 0. \quad (44)$$

Тоді рівняння (7) дає можливість переконатися, що інваріант $B = 0$. Отже, рівняння (14) набуде вигляду (12).

Домноживши (12) на вектор u^i та згорнувши по індексу i , з урахуванням (44), отримаємо

$$u_\alpha u^\alpha = 0. \quad (45)$$

Тобто має місце теорема

Теорема 2. Якщо слаборекурентний псевдоріманів простір V_n , відмінний від простору сталої кривини, допускає нетривіальні геодезичні відображення, то він або еквідистантний Річчі плоский простір з ізотропним вектором u_i або виконується умова (36).

Розглянемо D -слаборекурентні псевдоріманові простори, в яких виконуються умови (36).

Вираз (36) коваріантно продиференціюємо:

$$\lambda_\alpha u^\alpha g_{ij} + \lambda_i u_j + a_{\alpha i} u_{,j}^\alpha = \tau_{,j} u_i + \tau u_{i,j}. \quad (46)$$

Домножимо рівняння (46) на вектор u^i , згорнемо по індексу i та врахуємо рівняння (36)

$$2\lambda_\alpha u^\alpha u_j = \tau_{,j} u_\alpha u^\alpha. \quad (47)$$

Якщо вектор u_i — ізотропний, тобто

$$u_\alpha u^\alpha = 0, \quad (48)$$

то тоді

$$\lambda_\alpha u^\alpha = 0 \quad (49)$$

і

$$\lambda_\alpha u_{,i}^\alpha + \lambda_{\alpha,i} u^\alpha = 0. \quad (50)$$

А рівняння (31) набувають вигляду

$$\lambda_\alpha u_{,i}^\alpha = \left(\tau - \frac{M}{n} \frac{1}{\tau} \right) u_i. \quad (51)$$

З урахуванням рівнянь (48), (49), (51) продиференціюємо (46)

$$\lambda_{i,k} u_j + \lambda_i u_{j,k} + \lambda_i u_{k,j} + a_{\alpha i} u_{,jk}^\alpha = \tau_{,jk} u_i + \tau_{,j} u_{i,k} + \tau_{,k} u_{i,j} + \tau u_{i,jk}. \quad (52)$$

Домноживши на u^i та згорнувши по i , переконаємось, що

$$u^\alpha \lambda_{\alpha,k} = 0 \quad (53)$$

і

$$\tau = \frac{M}{n} \frac{1}{\tau}. \quad (54)$$

Таким чином, має місце

Наслідок. Якщо в псевдорімановому просторі V_n , що допускає спеціальне векторне поле (14) і нетривіальні геодезичні відображення, виконуються умови (36) та (48), то спеціальне векторне поле u_i ортогональне вектору λ_i із лінійного основного рівняння теорії геодезичних відображень.

Висновки

Теорія геодезичних відображень є одним із інструментів моделювання фізичних полів по траєкторіям руху пробних частинок. В спеціальних псевдоріманових просторах є можливість продемонструвати можливості, переваги та складності застосування теорії геодезичних відображень псевдоріманових просторів. В роботі досліджуються нетривіальні геодезичні відображення псевдоріманових просторів які допускають спеціальні векторні поля. Знайдено характеристики розв'язків лінійної системи основних рівнянь теорії геодезичних відображень. Ці простори є або еквідистантними псевдорімановими просторами, або вектор, що задає спеціальне векторне поле є власним вектором матриці розв'язку лінійної системи основних рівнянь теорії геодезичних відображень. Отримані результати відкривають широкі можливості для детального подальшого вивчення геодезичних відображень псевдоріманових просторів, що допускають спеціальні векторні поля.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Beltrami, E. (1865). Risoluzione del problema: riportari i punti di una supercie sopraun piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentante da lineerette. *Ann. Mat.*, 1 (7), 185–204.
2. Dini, U. (1869). Sobre un problema che is presenta nella theoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra. *Ann. Mat.*, S.2, III, 269–293.
3. Levi-Civita, T. (1896). Sulle transformationi delle equazioni dinamiche. *Ann. Mat. Milano*, Ser. 2, 24, 255–300.
4. Weyl, H. (1921). Zur Infinitesimalgeometrie Einordnung der projectiven und der konformen Auffassung. *Gottinger Nachtr.*, 99–112.
5. Eisenhart, L. P. (1926). *Riemannian geometry*. Princeton University Press.

6. Thomas, T. Y. (1925). On projective and equiprojective geometries of paths. *PWC. Nat. Acad. Sci. USA*, 11, 198–203.
7. Mikeš, J., Kiosak, V. A., & Vanžurova, O. (2008). *Geodesic mappings of manifolds with affine connection*. Palacký University Press.
8. Matveev, V. S. (2005). Beltrami problem, Lichnerowicz–Obata conjecture and applications of integrable systems in differential geometry. *Tr. Semin. Vektorn. Tenzorn. Anal.*, 26, 214–238.
9. Gavrilchenko, M. L., & Kinzerska, N. N. (1999). Infinitesimal geodesic deformations of the totally geodesic manifolds. In *Differ. Geom. and Appl.: Proc. 7th Int. Conf., DGA 98* (pp. 185–189). Masaryk University.
10. Kiosak, V., Prishlyak, O., & Lesechko, O. (2021). On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(4), 13–26. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2140>
11. Kiosak, V., Savchenko, A., & Makarenko, L. (2020). Invariant transformations that preserve mappings. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120003. <https://doi.org/10.1063/5.0100787>
12. Kiosak, V., Kusik, L., & Isaiev, V. (2022). Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 15(2), 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
13. Kiosak, V., Savchenko, A., & Latysh, O. (2021). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(1), 80–91. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1936>
14. Kiosak, V. A., & Kovalova, G. V. (2020). Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature. *Mathematical Studies*, 53(2), 212–217. <https://doi.org/10.30970/ms.53.2.212-217>
15. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kovalova, G. (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proceedings of the International Geometry Center*, 13(1), 35–48. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1711>
16. Doikov, D., & Kiosak, V. (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040001. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
17. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kamienieva, A. (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces with constant scalar curvature. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040002. <https://doi.org/10.1063/5.0033661>
18. Kiosak, V., Prishlyak, O., & Gudyreva, O. (2024). On geodesic mappings of threesymmetric spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(1), 56–64. <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i1.2647>

Prishlyak O. O., Nazarenko O. A., Latysh O. M.

ON GEODESIC MAPPINGS OF PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES WITH SPECIAL VECTOR FIELDS

Summary

The paper investigates geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces, which constitute one of the fundamental objects of modern differential geometry. The theory of geodesic mappings originated in the works of E. Beltrami, U. Dini, and T. Levi-Civita and has remained an important field of geometric research for more than a century and a half. Significant contributions to its development were made by H. Weyl, L. P. Eisenhart, T. Y. Thomas, V. F. Kagan, M. S. Sinyukov, and their followers, who established an invariant tensor apparatus for the study of mappings and developed effective methods for the analysis of the corresponding differential equations.

The relevance of the present study is determined by the need for a deeper understanding of the geometric properties of pseudo-Riemannian spaces and the conditions ensuring the existence of their geodesic mappings. Interest in such investigations is motivated not only by intrinsic problems of differential geometry but also by numerous applications in mathematical physics, mechanics, gravitation theory, and the modeling of dynamical processes, where trajectories of motion may be interpreted as geodesic lines of the corresponding spaces.

The aim of the paper is to investigate new characteristics of special pseudo-Riemannian spaces and their geodesic mappings. The objects of study are special classes of pseudo-Riemannian spaces, whereas the subject of the investigation comprises systems of differential equations, their integrability conditions, and differential prolongations characterizing the possibility of the existence of geodesic mappings.

To achieve this goal, classical methods of Riemannian geometry, local methods in the class of sufficiently smooth functions, and tensor analysis are employed. The obtained results contribute to the further development of the theory of geodesic mappings and provide a deeper insight into the geometric structure of pseudo-Riemannian spaces.

Keywords: geodesic mappings, pseudo-Riemannian spaces, recurrent spaces, equidistant spaces, integrability conditions, vector hull of the Riemann tensor.

REFERENCES

1. Beltrami, E. (1865). Risoluzione del problema: riportari i punti di una supercie sopraun piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentante da lineerette. *Ann. Mat.*, 1(7), 185–204.
2. Dini, U. (1869). Sobre un problema che is presenta nella theoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra. *Ann. Mat.*, S.2, III, 269–293.
3. Levi-Civita, T. (1896). Sulle transformationi delle equazioni dinamiche. *Ann. Mat. Milano*, Ser. 2, 24, 255–300.
4. Weyl, H. (1921). Zur Infinitesimalgeometrie Einordnung der projectiven und der konformen Auffassung. *Gottinger Nachtr.*, 99–112.
5. Eisenhart, L. P. (1926). *Riemannian geometry*. Princeton University Press.
6. Thomas, T. Y. (1925). On projective and equiprojective geometries of paths. *PWC. Nat. Acad. Sci. USA*, 11, 198–203.
7. Mikeš, J., Kiosak, V. A., & Vanžurova, O. (2008). *Geodesic mappings of manifolds with affine connection*. Palacký University Press.
8. Matveev, V. S. (2005). Beltrami problem, Lichnerowicz–Obata conjecture and applications of integrable systems in differential geometry. *Tr. Semin. Vektorn. Tenzorn. Anal.*, 26, 214–238.
9. Gavrilchenko, M. L., & Kinzerska, N. N. (1999). Infinitesimal geodesic deformations of the totally geodesic manifolds. In *Differ. Geom. and Appl.: Proc. 7th Int. Conf., DGA 98* (pp. 185–189). Masaryk University.
10. Kiosak, V., Prishlyak, O., & Lesechko, O. (2021). On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(4), 13–26. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2140>
11. Kiosak, V., Savchenko, A., & Makarenko, L. (2020). Invariant transformations that preserve mappings. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120003. <https://doi.org/10.1063/5.0100787>
12. Kiosak, V., Kusik, L., & Isaiev, V. (2022). Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 15(2), 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
13. Kiosak, V., Savchenko, A., & Latysh, O. (2021). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(1), 80–91. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1936>
14. Kiosak, V. A., & Kovalova, G. V. (2020). Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature. *Mathematical Studies*, 53(2), 212–217. <https://doi.org/10.30970/ms.53.2.212-217>
15. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kovalova, G. (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proceedings of the International Geometry Center*, 13(1), 35–48. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1711>

16. Doikov, D., & Kiosak, V. (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040001. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
17. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kamienieva, A. (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces with constant scalar curvature. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040002. <https://doi.org/10.1063/5.0033661>
18. Kiosak, V., Prishlyak, O., & Gudyreva, O. (2024). On geodesic mappings of threesymmetric spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(1), 56–64. <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i1.2647>

УДК 514.07

А. А. Соловйов, аспірант

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна

e-mail: andrey-solovyov@stud.onu.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-7923-6912>

АФІНОР-НАПІВСИМЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ ПЕРШОГО КЛАСУ

В роботі досліджено локальну геометрію псевдоріманових просторів першого класу, наділених еліптичною афінорною напівсиметричною структурою другого ступеня. Застосування спеціальної операції спряження тензорів з афінором дозволило проаналізувати диференціальні та алгебраїчні властивості тензорів Рімана і Річчі. Досліджено алгебраїчну структуру другої квадратичної форми простору; доведено, що умова рівності нулю тензора Річчі обмежує ранг другої квадратичної форми одиницею, що призводить до того, що тензор Рімана дорівнює нулю. На основі цього встановлено теорему про неіснування Річчі-пласких просторів першого класу. Для просторів із заданою афінорною структурою доведено комутативність тензора Річчі з другою квадратичною формою. Головним результатом роботи є доведення того, що тензор Річчі в афінор-напівсиметричних просторах першого класу дорівнює нулю. Як наслідок, обґрунтовано несумісність умов гіперповерхні плоского простору з напівсиметричною майже комплексною структурою та доведено, що афінор-напівсиметричних просторів першого класу не існує.

MSC: 53B35.

Ключові слова: рімановий простір, псевдорімановий простір, тензор Рімана, тензор Річчі, відображення просторів, тензор деформації, простори афінної зв'язності, коваріантна похідна, афінор, афінорна структура, напівсиметрична афінорна структура, антисиметрична афінорна структура, майже комплексна афінорна структура, операція спряження, геометричний об'єкт.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1\(47\).361649](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1(47).361649)

Стаття надійшла до редакції: 07.04.2026. Затверджена до друку: 15.04.2026.

Опублікована: 15.09.2026.



Ця стаття поширюється на умовах ліцензії Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).



Вступ

Сучасна диференціальна геометрія приділяє значну увагу дослідженню псевдоріманових просторів, наділених додатковими алгебраїчними та диференціально-геометричними структурами. Однією з фундаментальних проблем у цій галузі є теорія ізометричних занурень та занурень многовидів у простори вищої розмірності, зокрема у плоскі евклідові або псевдо-евклідові простори. Геометричні та топологічні властивості таких підмноговидів безпосередньо пов'язані з поняттям класу простору.

У широкому сенсі під класом псевдоріманового простору V_n розуміють мінімальну корозмірність p , яка необхідна для локального ізометричного вкладення цього простору у плоский простір розмірності $n + p$. Простори довільного класу p характеризуються складною системою диференціальних рівнянь Гауса, Кодацці та Річчі, які пов'язують внутрішню кривизну многовиду з його зовнішньою геометрією за допомогою p систем симетричних тензорів другого рангу (других квадратичних форм) та тензорів зв'язності нормального розшарування. Зі збільшенням класу дослідження таких просторів стає надзвичайно складним через нелінійний характер зазначених рівнянь, що спонукає геометрів шукати додаткові структурні обмеження або розглядати класифіковані випадки нижчих порядків.

Найбільш детально вивченим і водночас геометрично багатим є випадок просторів першого класу, де корозмірність вкладення дорівнює одиниці ($p = 1$). За означенням, простір першого класу є гіперповерхнею у плоскому просторі вищої розмірності. Головною тензорною ознакою таких просторів є те, що їхній тензор Рімана повністю детермінується лише однією другою квадратичною формою b_{ij} відповідно до класичного рівняння Гауса. При цьому ця квадратична форма має задовольняти спеціальній диференціальній тотожності. Теорія гіперповерхонь дозволяє застосовувати інструмент лінійної алгебри до аналізу кривини, оскільки друга квадратична форма може бути інтерпретована як лінійний оператор, чий власні значення (головні кривизни) визначають внутрішню геометрію многовиду.

Актуальним напрямком досліджень є вивчення просторів першого класу, які додатково наділені афінорними структурами. У даній роботі розглядаються афінор-напівсиметричні простори, що містять еліптичну афінорну структуру другого ступеня (майже комплексну структуру $F^2 =$

$-I$), яка додатково напівсиметрична. Для ефективного аналізу взаємодії цих двох обмежень вводиться спеціальна операція спряження тензорів за допомогою структурного афінора. Метою роботи є встановлення диференціально-геометричних характеристик таких просторів, дослідження умов інтегрованості афінора та перевірка сумісності умов першого класу з напівсиметричною майже комплексною структурою. Головні результати роботи присвячені аналізу тензора Річчі та доведенню теорем, які вказують на суттєві обмеження, які накладені структурним афінором.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Простори першого класу. Розглянемо псевдоріманів простір V_n з метричним тензором $g_{ij}(x)$.

Означення 1. Простором V_n першого класу називають гіперповерхню плаского простору.

Тензорні ознаки просторів першого класу:

$$R_{hijk} = e(b_{hk}b_{ij} - b_{hj}b_{ik}) \quad (e = \pm 1), \quad (1)$$

тут b_{ij} - друга квадратично форма простору V_n , для якої додатково виконується

$$b_{ij,k} - b_{ik,j} = 0, \quad (2)$$

де « $,$ » - знак коваріантної похідної [21] у просторі V_n . Відзначимо, що V_n не може бути пласким простором, тобто $R_{hijk} \neq 0$, що характерно для просторів нульового класу.

Для просторів першого класу виконується

$$R_{ij} = e(bb_{ij} - b_{i\alpha}b_j^\alpha), \quad (3)$$

де $b \stackrel{def}{=} b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$. Цей вираз перепишемо у вигляді

$$b_{i\alpha}b_j^\alpha = bb_{ij} - eR_{ij}. \quad (4)$$

Далі, тотожність (1) домножимо на b_l^h , просумуємо за індексом h та зробимо заміну індексів $l \rightarrow h$.

$$b_{h\alpha}R_{ijk}^\alpha = e(b_{h\alpha}b_k^\alpha b_{ij} - b_{h\alpha}b_j^\alpha b_{ik}), \quad (5)$$

Тут врахуємо (4)

$$b_{h\alpha}R_{ijk}^\alpha = ebb_{hk}b_{ij} - R_{hk}b_{ij} - ebb_{hj}b_{ik} + R_{hj}b_{ik}, \quad (6)$$

або, підставляючи (1)

$$b_{h\alpha}R_{ijk}^\alpha = bR_{hijk} + R_{hj}b_{ik} - R_{hk}b_{ij}. \quad (7)$$

Далі, згортаючи цей вираз отримаємо

$$b_{h\alpha}R_{.k}^\alpha = b_{k\alpha}R_{.h}^\alpha. \quad (8)$$

Про довільні тензори ς_{ij} та ι_{ij} для яких виконуються умови

$$\varsigma_{i\alpha}\iota_j^\alpha = \varsigma_{j\alpha}\iota_i^\alpha \quad (9)$$

кажуть, що вони комутують.

Доведена

Лема 1. У псевдоріманових просторах першого класу тензор Річчі комутує з тензором b_{ij} .

Умови інтегрування тензора b_{ij} з урахуванням тотожності Річчі отримаємо, симетруючи вираз (7) за індексами i, h

$$b_{hi,[jk]} = R_{hj}b_{ik} - R_{hk}b_{ij} + R_{ij}b_{hk} - R_{ik}b_{hj}. \quad (10)$$

Умови інтегрування тензора кривини з урахуванням тотожності Річчі матимуть вигляд

$$R_{hijk,[lp]} = R_{\alpha ijk}R_{.hlp}^\alpha + R_{h\alpha jk}R_{.ilp}^\alpha + R_{hi\alpha k}R_{.jlp}^\alpha + R_{hij\alpha}R_{.klp}^\alpha, \quad (11)$$

або, підставляючи (1)

$$\begin{aligned} R_{hijk,[lp]} = & (b_{\alpha k}b_{ij} - b_{\alpha j}b_{ik})(b_p^\alpha b_{hl} - b_l^\alpha b_{hp}) + \\ & + (b_{hk}b_{\alpha j} - b_{hj}b_{\alpha k})(b_p^\alpha b_{il} - b_l^\alpha b_{ip}) + \\ & + (b_{hk}b_{i\alpha} - b_{h\alpha}b_{ik})(b_p^\alpha b_{jl} - b_l^\alpha b_{jp}) + \\ & + (b_{h\alpha}b_{ij} - b_{hj}b_{i\alpha})(b_p^\alpha b_{kl} - b_l^\alpha b_{kp}). \end{aligned} \quad (12)$$

Розкриємо дужки, врахуємо (4)

$$\begin{aligned}
R_{hijk,[lp]} = & e(R_{pk}(b_{il}b_{hj} - b_{ij}b_{hl}) + R_{lk}(b_{ij}b_{hp} - b_{ip}b_{hj}) \\
& + R_{pj}(b_{ik}b_{hl} - b_{il}b_{hk}) + R_{lj}(b_{ip}b_{hk} - b_{ik}b_{hp}) \\
& + R_{ip}(b_{kl}b_{hj} - b_{jl}b_{hk}) + R_{il}(b_{jp}b_{hk} - b_{kp}b_{hj}) \\
& + R_{hp}(b_{jl}b_{ik} - b_{kl}b_{ij}) + R_{hl}(b_{kp}b_{ij} - b_{ik}b_{jp})) \quad (13)
\end{aligned}$$

та візьмемо до уваги (1)

$$\begin{aligned}
R_{hijk,[lp]} = & R_{pk}R_{ihjl} + R_{lk}R_{ihpj} + R_{pj}R_{ihlk} + R_{lj}R_{ihkp} \\
& + R_{ip}R_{kjhl} + R_{il}R_{jkhp} + R_{hp}R_{jkil} + R_{hl}R_{kjip}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Розглянемо випадок, коли тензор Річчі простору першого класу дорівнює нулю. Тоді вираз (4) приймає вид

$$b_{i\alpha}b_j^\alpha = bb_{ij}. \quad (15)$$

Тут, оскільки b_{ij} - друга квадратична форма, $b \neq 0$. Поділимо обидві частини рівності на b^2 та підніmemo один індекс за допомогою метричного тензора:

$$\left(\frac{1}{b}b_i^\alpha\right)\left(\frac{1}{b}b_\alpha^j\right) = \frac{1}{b}b_i^j. \quad (16)$$

Введемо в розгляд тензор $P_i^j = \frac{1}{b}b_i^j$. Тоді отримана тотожність набуває матричного вигляду:

$$P_i^\alpha P_\alpha^j = P_i^j \quad \text{або} \quad P^2 = P, \quad (17)$$

тобто тензор P - ідемпотентний. Фундаментальна теорема про ідемпотентні матриці стверджує, що алгебраїчний ранг такої матриці дорівнює її сліду.

Обчислимо слід P_i^j :

$$P_\alpha^\alpha = \frac{1}{b}b_\alpha^\alpha = \frac{1}{b}b = 1. \quad (18)$$

Оскільки слід дорівнює одиниці, то ранг ідемпотентної матриці P_i^j дорівнює 1. Очевидно, що множення матриці на b не змінює її рангу, тому ранг вихідного тензора b_{ij} також дорівнює 1.

У тензорній алгебрі будь-який симетричний тензор другого рангу, що має алгебраїчний ранг 1, завжди можна подати у вигляді прямого добутку деякого ковектора v_i на самого себе:

$$b_{ij} = v_i v_j. \quad (19)$$

Підставимо отриманий розклад (19) в тензорну ознаку просторів першого класу (1):

$$R_{hijk} = e(v_h v_k v_i v_j - v_h v_j v_i v_k) = 0. \quad (20)$$

Таким чином отримуємо, що Річчі-пласкі простори першого класу плоскі. Але на початку роботи було зазначено, що V_n - це не плоский простір, тому доведена

Теорема 1. *Не існує Річчі-пласких просторів першого класу.*

Таким чином, досліджено алгебраїчні умови другої квадратичної форми просторів першого класу, а також доведено, що вони не можуть бути Річчі-пласкими.

2. Афінор-напівсиметричні простори.

Розглянемо псевдоріманів простір V_n з метричним тензором $g_{ij}(x)$, у якому визначено тензор $F_i^h(x)$ [17].

Задля зручності введемо в V_n операцію спряження [18] :

$$A_{i\dots}^{\dots} \stackrel{def}{=} A_{\alpha\dots}^{\dots} F_i^{\alpha} \quad B_{\dots}^{\bar{i}\dots} \stackrel{def}{=} B^{\alpha\dots}_{\dots} F_{\alpha}^i, \quad (21)$$

де A і B - довільні тензори будь-якої валентності [19] .

Означення 2. Довільний тензор $A_{i_1\dots i_l}^{j_1\dots j_k}$ називається напівсиметричним [20] , якщо альтренування його першого та другого індексів коваріантної похідної дорівнює нулю:

$$A_{i_1\dots i_l, [i_{l+1} i_{l+2}]}^{j_1\dots j_k} = 0. \quad (22)$$

Означення 3. Простір V_n назовемо афінор-напівсиметричним [?], якщо в ньому визначена напівсиметрична афінорна структура $F_i^h(x)$, тобто афінор $F_i^h(x)$ (або його ще називають структурний афінор) задовольняє умовам

$$F_{ij, [kl]} = 0. \quad (23)$$

Тут індекс опускається за допомогою метричного тензора

$$F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^{\alpha}. \quad (24)$$

Розглянемо псевдорімановий простір V_n , у якому визначена еліптична афінорна напівсиметрична структура другого ступеня [24], тобто

$$F_{\alpha}^h F_{\cdot i}^{\alpha} = -\delta_i^h, \quad (25)$$

яка додатково задовольняє

$$F_{(ij)} = 0, \quad (26)$$

де круглі дужки в індексах позначають операцію симетрування, а δ_i^h - символи Кронекера. [31], які визначаються наступними умовами

$$\delta_i^h = \begin{cases} 1, & i = h \\ 0, & i \neq h \end{cases}. \quad (27)$$

Афінорні структури, які задовольняють (25) називають майже комплексними [25]. З урахуванням (21) формула (25) в термінах операції спряження приймає вид

$$F_{\cdot i}^h = -\delta_i^h. \quad (28)$$

Запишемо умови інтегрування афінора [32] з урахуванням тотжності Річчі в термінах операції спряження

$$F_{ij,kl} - F_{ij,lk} = F_{\alpha j} R_{\cdot ikl}^{\alpha} + F_{i\alpha} R_{\cdot jkl}^{\alpha}. \quad (29)$$

Враховуючи антисиметричність афінору, будемо мати

$$F_{\alpha j} R_{\cdot ikl}^{\alpha} + F_{i\alpha} R_{\cdot jkl}^{\alpha} = F_{\alpha j} R_{\cdot ikl}^{\alpha} - F_{\alpha i} R_{\cdot jkl}^{\alpha}, \quad (30)$$

таким чином, умови інтегрування афінора [26] в термінах операції спряження записується у вигляді

$$F_{ij,kl} - F_{ij,lk} = R_{\bar{j}ikl} - R_{\bar{i}jkl}, \quad (31)$$

або, з урахуванням антисиметричності тензора кривини

$$F_{ij,kl} - F_{ij,lk} = -(R_{\bar{i}jkl} + R_{\bar{j}ikl}). \quad (32)$$

Тут врахуємо (23)

$$R_{\bar{i}jkl} = -R_{\bar{i}\bar{j}kl}. \quad (33)$$

З властивості симетрії тензора кривини випливає

$$R_{kl\bar{i}j} = -R_{kl\bar{i}\bar{j}}. \quad (34)$$

Згорнувши з афінором за індексом j , беручи до уваги майже комплексність (25) простору та зробивши заміну індексів у термінах операції спряжіння будемо мати

$$R_{ij\bar{k}l} = R_{ijkl}. \quad (35)$$

Умови інтегрування довільного тензора $A_{i_1 i_2 \dots i_q}$ з урахуванням тотожності Річчі матимуть вигляд

$$A_{i_1 i_2 \dots i_q, [kl]} = A_{\alpha i_2 \dots i_q} R_{i_1 k l}^{\alpha} + A_{i_1 \alpha \dots i_q} R_{i_2 k l}^{\alpha} + A_{i_1 i_2 \dots \alpha} R_{i_q k l}^{\alpha}. \quad (36)$$

Цей вираз спряжемо за індексами k, l

$$A_{i_1 i_2 \dots i_q, [\bar{k}l]} = A_{\alpha i_2 \dots i_q} R_{i_1 \bar{k} l}^{\alpha} + A_{i_1 \alpha \dots i_q} R_{i_2 \bar{k} l}^{\alpha} + A_{i_1 i_2 \dots \alpha} R_{i_q \bar{k} l}^{\alpha} \quad (37)$$

та врахуємо (35)

$$A_{i_1 i_2 \dots i_q, [\bar{k}l]} = A_{\alpha i_2 \dots i_q} R_{i_1 k l}^{\alpha} + A_{i_1 \alpha \dots i_q} R_{i_2 k l}^{\alpha} + A_{i_1 i_2 \dots \alpha} R_{i_q k l}^{\alpha}, \quad (38)$$

або, порівнюючи з (36),

$$A_{i_1 i_2 \dots i_q, [\bar{k}l]} = A_{i_1 i_2 \dots i_q, [kl]}. \quad (39)$$

Таким чином, доведена

Лема 2. У афінор-напівсиметричних просторах для довільного тензора $A_{i_1 i_2 \dots i_q}$ виконується (39).

В силу (25) мають місце наступні властивості:

$$A_{i \dots}^{\dots} = -A_{i \dots}^{\dots}, \quad B_{i \dots}^{\bar{\dots}} = -B_{i \dots}^{\dots}, \quad (40)$$

а в силу (26) наступне:

$$\begin{aligned} A_{\bar{\alpha} \dots}^{\dots} B_{i \dots}^{\alpha \dots} &= A_{\bar{\beta} \dots}^{\dots} F_{\alpha}^{\beta} B_{i \dots}^{\alpha \dots} = -A_{\bar{\beta} \dots}^{\dots} F_{\alpha}^{\beta} B_{i \dots}^{\alpha \dots} = \\ &= -A_{\bar{\beta} \dots}^{\dots} B_{i \dots}^{\bar{\beta} \dots} = -A_{\alpha \dots}^{\dots} B_{i \dots}^{\alpha \dots}, \end{aligned} \quad (41)$$

тому, враховуючи дві останні властивості, маємо

$$A_{\bar{\alpha} \dots}^{\dots} B_{i \dots}^{\bar{\alpha} \dots} = A_{\alpha \dots}^{\dots} B_{i \dots}^{\alpha \dots}. \quad (42)$$

Метричний тензор задовольняє співвідношенню [27]

$$g_{i\bar{j}} = g_{\alpha\beta} F_i^{\alpha} F_{\bar{j}}^{\beta} = F_{\beta i} F_{\bar{j}}^{\beta} \stackrel{(26)}{=} -F_{i\beta} F_{\bar{j}}^{\beta} \stackrel{(25)}{=} g_{ij} \quad (43)$$

$$g_{ij} = g_{\alpha j} F_{\cdot i}^{\alpha} = F_{ji} \stackrel{(26)}{=} -F_{ij} = -g_{i\alpha} F_{\cdot j}^{\alpha} = -g_{i\bar{j}}. \quad (44)$$

Символи Кронекера задовольняють співвідношенню

$$\delta_{\bar{i}}^h = \delta_{\alpha}^h F_{\cdot i}^{\alpha} = F_{\cdot i}^h = -F_{\cdot i}^h = -\delta_i^{\alpha} F_{\alpha}^h = -\delta_i^{\bar{h}}, \quad (45)$$

тому

$$\delta_{\bar{i}}^{\bar{h}} = -\delta_{\bar{i}}^h \stackrel{(26)}{=} \delta_i^h. \quad (46)$$

Тензор Рімана додатково до відомих тотожностей [28] задовольняє наступним властивостям:

$$R_{\bar{h}ijk} \stackrel{(33)}{=} -R_{\bar{h}ijk} \stackrel{(25)}{=} R_{hijk}, \quad (47)$$

$$R_{\bar{i}jkl} = R_{kl\bar{i}j} = -R_{i\bar{j}kl} = -R_{kl\bar{i}j}. \quad (48)$$

Згорнемо (33) за індексами i, l

$$R_{\alpha i j \beta} F_{\cdot \gamma}^{\alpha} g^{\beta \gamma} = -R_{\bar{i}j} \quad (49)$$

$$R_{\alpha i j \beta} F^{\beta \alpha} = R_{\bar{i}j} \quad (50)$$

$$R_{\cdot j k \beta}^{\bar{\beta}} = -R_{\bar{j}k} \quad (51)$$

Згорнемо рівність $R_{h\bar{i}j\bar{k}} = R_{\bar{h}i j \bar{k}}$ за індексами h, k

$$R_{\bar{i}j} = R_{\alpha i j \beta} F_{\cdot \gamma}^{\alpha} F_{\cdot \delta}^{\beta} g^{\gamma \delta} = -R_{\alpha i j \beta} F_{\cdot \gamma}^{\alpha} F^{\gamma \beta} = R_{ij}, \quad (52)$$

тому

$$R_{\bar{i}j} = -R_{i\bar{j}}. \quad (53)$$

Вираз (32) проциклюємо за індексами j, k, l

$$R_{i\bar{j}kl} + R_{i\bar{k}lj} + R_{i\bar{l}jk} = 0 \quad (54)$$

та згорнемо за індексами i, j

$$R_{\cdot \alpha k l}^{\bar{\alpha}} = R_{\bar{k}l} - R_{\bar{l}k}. \quad (55)$$

З урахуванням (53) ця тотожність набуває вигляду

$$R_{\cdot \alpha k l}^{\bar{\alpha}} = 2R_{\bar{k}l}. \quad (56)$$

Рівність (25) коваріантно продиференціюємо [29] за напрямком x^k

$$F_{\alpha,k}^h F_{\cdot i}^\alpha + F_{\alpha}^h F_{\cdot i,k}^\alpha = 0, \quad (57)$$

$$F_{\alpha,k}^h F_{\cdot i}^\alpha - F_{\alpha}^h F_{\cdot i,k}^\alpha = 0, \quad (58)$$

$$F_{\cdot i,k}^h = F_{\cdot i,k}^{\bar{h}}. \quad (59)$$

Аналогічно,

$$F_{\bar{h}i,k} = F_{\bar{h}i,k}. \quad (60)$$

Таким чином, отримано алгебраїчні та диференціальні властивості об'єктів внутрішньої геометрії просторів, в яких визначена розглянута афінорна структура.

3. Приклади афінор-напівсиметричних просторів.

У цьому розділі побудовано три нетривіальних приклади чотиривимірних афінор-напівсиметричних просторів, тобто таких просторів, які наділено кососиметричною майже комплексною напівсиметричною структурою, але при цьому не є плоскими або келеровими, тобто одночасно виконуються

$$F_{\cdot i,j}^h \neq 0 \quad (61)$$

та

$$R_{\cdot ijk}^h \neq 0. \quad (62)$$

Приклад 1.

Розглянемо викривлений добуток двох двовимірних евклідових просторів

$$M^4 = \mathbb{E}^2 \times_{x^1} \mathbb{E}^2. \quad (63)$$

Введемо локальну систему координат (x^1, x^2, x^3, x^4) .

Матриця метричного тензора g_{ij} цього простору подається у вигляді:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x^1)^2 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Безпосереднім обчисленням знаходимо символи Крістоффеля другого роду, які представимо у вигляді матриць за верхнім індексом Γ_{ij}^k :

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x^1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (65)$$

$$\Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{x^1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x^1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{x^1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Використовуючи отримані матриці, обчислимо компоненти тензора Рімана $R_{.jkl}^i$. Ненульовими компонентами є лише:

$$R_{.434}^3 = -R_{.334}^4 = -1. \quad (67)$$

Оскільки тензор Рімана не дорівнює тотожно нулю, простір не є плоским.

Задамо структурний афімор $F_{.j}^i$ матрицею:

$$F_{.j}^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Безпосередньо видно, що $F^2 = -I$, що підтверджує наявність майже комплексної структури. Опустивши верхній індекс за допомогою метричного тензора ($F_{ij} = g_{i\alpha} F_{.j}^\alpha$), матриця двічі коваріантного афінора записується у вигляді:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x^1)^2 \\ 0 & 0 & -(x^1)^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Оскільки $F_{ij} = -F_{ji}$, структура є кососиметричною.

Для дослідження диференціальних властивостей обчислимо коваріантну похідну $\nabla_k F_{.j}^i$. В силу сталості матриці (98) маємо:

$$\nabla_k F_{.j}^i = \Gamma_{\alpha k}^i F_{.j}^\alpha - \Gamma_{jk}^\alpha F_{.\alpha}^i. \quad (70)$$

Зокрема, для компоненти $\nabla_3 F_{.2}^3$ отримуємо:

$$\nabla_3 F_{.2}^3 = \Gamma_{13}^3 F_{.2}^1 - \Gamma_{23}^m F_{.m}^3 = \frac{1}{x^1} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{x^1} \neq 0. \quad (71)$$

Отже, структура не є келеровою.

Перевіримо, чи буде структура напівсиметричною, тобто чи будуть виконуватись такі тотожності:

$$F_{ij,[kl]} = F_{\alpha j} R_{.ikl}^\alpha + F_{i\alpha} R_{.jkl}^\alpha = 0. \quad (72)$$

Оскільки ненульові компоненти тензора кривини визначаються лише індексами 3 та 4 відповідно до (97), рівність (102) достатньо перевірити для $k = 3, l = 4$. Розглянемо можливі ненульові комбінації для індексів i та j :

1) При $i = 3, j = 3$:

$$F_{43} R_{.334}^4 + F_{34} R_{.334}^4 = -(x^1)^2 \cdot 1 + (x^1)^2 \cdot 1 = 0. \quad (73)$$

2) При $i = 4, j = 4$:

$$F_{34} R_{.434}^3 + F_{43} R_{.434}^3 = (x^1)^2 \cdot (-1) + (-(x^1)^2) \cdot (-1) = 0. \quad (74)$$

3) При $i = 3, j = 4$:

$$F_{44} R_{.334}^4 + F_{33} R_{.434}^3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 0. \quad (75)$$

Для всіх інших наборів індексів компоненти тензора кривини або афінора перетворюють відповідні доданки на нуль. Таким чином, тотожність $F_{ij,[kl]} = 0$ виконується для всього простору, що доводить його напівсиметричність.

Приклад 2.

Розглянемо інший приклад чотиривимірного псевдоріманового простору M^4 .

Введемо в розгляд локальну систему координат (u, v, ρ, ϕ) . Матриця метричного тензора g_{ij} цього простору матиме вигляд

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^2 \cosh^2 \rho & u^2 \sinh^2 \rho \\ 0 & 0 & u^2 \sinh^2 \rho & u^2 \sinh^2 \rho \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Відповідно, лінійний елемент даного простору визначається виразом:

$$ds^2 = du^2 + 2dudv + 2dv^2 + u^2 (\cosh^2 \rho d\rho^2 + 2 \sinh^2 \rho d\rho d\phi + \sinh^2 \rho d\phi^2). \quad (77)$$

Еліптичну афінорну структуру (структурний афінор) F_i^h задамо за допомогою матриці, компоненти якої явно залежать від просторової координати ρ :

$$F_i^h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh \rho & \sinh \rho \\ 0 & 0 & -\frac{\cosh^2 \rho}{\sinh \rho} & -\sinh \rho \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Проведемо аналіз алгебраїчних та диференціальних властивостей побудованої геометричної структури многовиду.

Лема 3. *Тензорне поле (78) визначає майже комплексну структуру на многовиді M^4 .*

Доведення. Безпосереднім обчисленням квадрата матриці афінора F_i^h одержуємо:

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-2 & 0 & 0 \\ -1+1 & -2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh^2 \rho - \cosh^2 \rho & \sinh^2 \rho - \sinh^2 \rho \\ 0 & 0 & -\cosh^2 \rho + \cosh^2 \rho & -\cosh^2 \rho + \sinh^2 \rho \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Враховуючи фундаментальну гіперболічну тотожність $\sinh^2 \rho - \cosh^2 \rho = -1$, маємо:

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\delta_i^h. \quad (80)$$

Отже, умова майже комплексної структури $F^2 = -I$ виконується тотожно у кожній точці простору.

Лема 4. *Майже комплексна структура (78) є кососиметричною відносно метрики (76).*

Доведення. Опустимо перший індекс афінора за допомогою метричного тензора простору $F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha$:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^2 \sinh^2 \rho \cosh^2 \rho \\ 0 & 0 & -u^2 \sinh^2 \rho \cosh^2 \rho & 0 \end{pmatrix}. \quad (81)$$

З одержаної структури матриці очевидно впливає антисиметричність тензора: $F_{ij} = -F_{ji}$, тобто $F_{(ij)} = 0$.

Теорема 2. Псевдоріманів простір M^4 із метричним тензором (76) та афінором (78) є непласким афінор-напівсиметричним некелеровим простором.

Доведення.

Безпосереднім обчисленням знаходимо символи Крістоффеля другого роду:

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2u \cosh^2 \rho & -2u \sinh^2 \rho \\ 0 & 0 & -2u \sinh^2 \rho & -2u \sinh^2 \rho \end{pmatrix}, \quad (82)$$

$$\Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u \cosh^2 \rho & u \sinh^2 \rho \\ 0 & 0 & u \sinh^2 \rho & u \sinh^2 \rho \end{pmatrix}, \quad (83)$$

$$\Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{u} & 0 & -\sinh \rho \cosh \rho & -\sinh \rho \cosh \rho \\ 0 & 0 & -\sinh \rho \cosh \rho & -\sinh \rho \cosh \rho \end{pmatrix}, \quad (84)$$

$$\Gamma_{ij}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{u} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \coth \rho (\cosh^2 \rho + 1) & \coth \rho \cosh^2 \rho \\ \frac{1}{u} & 0 & \coth \rho \cosh^2 \rho & \sinh \rho \cosh \rho \end{pmatrix}. \quad (85)$$

Використовуючи отримані матриці, обчислимо компоненти тензора Рімана R^i_{jkl} . Ненульовими компонентами (з точністю до косої симетрії за двома останніми індексами) є:

$$R^3_{334} = R^3_{434} = -R^4_{434} = -3 \sinh^2 \rho, \quad (86)$$

$$R^4_{334} = 3 \cosh^2 \rho. \quad (87)$$

Оскільки тензор Рімана не дорівнює тотожно нулю, простір не є плоским.

Для перевірки напівсиметричності структури скористаємося тотожністю Річчі:

$$F_{ij,[kl]} = F_{\alpha j} R^{\alpha}_{ikl} + F_{i\alpha} R^{\alpha}_{jkl}. \quad (88)$$

Оскільки ненульові компоненти тензора кривини визначаються лише індексами 3 та 4, рівність (102) достатньо перевірити для фіксованих індексів $k = 3, l = 4$. Для скорочення громіздких виразів введемо позначення $\Phi = u^2 \sinh^2 \rho \cosh^2 \rho$, тоді, відповідно, $F_{34} = -F_{43} = \Phi$.

Розглянемо всі можливі комбінації вільних індексів i та j , що можуть дати ненульові доданки:

1) При $i = 3, j = 3$:

$$F_{43} R^4_{334} + F_{34} R^4_{334} = (-\Phi) \cdot (3 \cosh^2 \rho) + \Phi \cdot (3 \cosh^2 \rho) = 0. \quad (89)$$

2) При $i = 4, j = 4$:

$$F_{34} R^3_{434} + F_{43} R^3_{434} = \Phi \cdot (-3 \sinh^2 \rho) + (-\Phi) \cdot (-3 \sinh^2 \rho) = 0. \quad (90)$$

3) При $i = 3, j = 4$:

$$F_{44} R^4_{334} + F_{33} R^3_{434} = 0 \cdot (3 \cosh^2 \rho) + 0 \cdot (-3 \sinh^2 \rho) = 0. \quad (91)$$

4) При $i = 1$ або $i = 2$:

$$F_{\alpha j} R^{\alpha}_{134} + F_{1\alpha} R^{\alpha}_{j34} = 0. \quad (92)$$

Для всіх інших наборів індексів компоненти тензора кривини або відповідні компоненти афінора перетворюють доданки на нуль. Таким чином, тотожність $F_{ij,[kl]} = 0$ виконується для всього простору, що доводить його напівсиметричність.

Приклад 3.

Розглянемо псевдоріманів простір Уокера з нейтральною сигнатурою. Введемо локальну систему координат (x^1, x^2, x^3, x^4) .

Матриця метричного тензора g_{ij} цього простору подається у вигляді:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (x^3)^2 e^{x^1} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Безпосереднім обчисленням знаходимо символи Крістоффеля другого роду, які представимо у вигляді матриць за верхнім індексом Γ_{ij}^k :

$$\Gamma_{ij}^1 = \Gamma_{ij}^3 = 0 \quad (94)$$

$$\Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x^3)^2 e^{x^1} & 0 & x^3 e^{x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^3 e^{x^1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (95)$$

$$\Gamma_{ij}^4 = \begin{pmatrix} -x^3 e^{x^1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (96)$$

Використовуючи отримані матриці, обчислимо компоненти тензора Рімана R_{jkl}^i . Ненульовими компонентами є лише:

$$R_{113}^4 = -R_{131}^4 = e^{x^1}. \quad (97)$$

Оскільки тензор Рімана не дорівнює тотожно нулю, простір не є плоским.

Матриця афінора $F_{\cdot j}^i$ матиме вигляд:

$$F_{\cdot j}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(x^3)^2 e^{x^1} & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(x^3)^2 e^{x^1} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Безпосередньо видно, що $F^2 = -I$, що підтверджує наявність майже комплексної структури. Опустивши верхній індекс за допомогою метричного

тензора ($F_{ij} = g_{i\alpha} F_{.j}^\alpha$), матриця двічі коваріантного афінора записується у вигляді:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(x^3)^2 e^{x^1} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(x^3)^2 e^{x^1} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (99)$$

Оскільки $F_{ij} = -F_{ji}$, структура є косиметричною.

Для дослідження диференціальних властивостей обчислимо коваріантну похідну $\nabla_k F_{.j}^i$:

$$\nabla_k F_{.j}^i = \partial_k F_{.j}^i + \Gamma_{\alpha k}^i F_{.j}^\alpha - \Gamma_{jk}^\alpha F_{.\alpha}^i. \quad (100)$$

Зокрема, для компоненти $\nabla_1 F_{.1}^2$ отримуємо (враховуючи, що $\partial_1 F_{.1}^2 = 0$):

$$\nabla_1 F_{.1}^2 = \Gamma_{31}^2 F_{.1}^3 - \Gamma_{11}^4 F_{.4}^2 = (x^3 e^{x^1}) \cdot (-1) - (-x^3 e^{x^1}) \cdot (-1) = -2x^3 e^{x^1} \neq 0. \quad (101)$$

Отже, структура не є келеровою.

Перевіримо, чи буде структура напівсиметричною, тобто чи будуть виконуватись такі тотожності:

$$F_{ij,[kl]} = F_{\alpha j} R_{.ikl}^\alpha + F_{i\alpha} R_{.jkl}^\alpha = 0. \quad (102)$$

Оскільки ненульові компоненти тензора кривини визначаються лише індексами 1 та 3 відповідно до (97), рівність (102) достатньо перевірити для $k = 1, l = 3$. Враховуючи, що єдиною ненульовою компонентою $R_{.i13}^\alpha \in R_{.113}^4$ (тобто коли $\alpha = 4, i = 1$), сума зводиться до аналізу доданків із F_{4j} та F_{i4} . Розглянемо можливі комбінації для індексів i та j :

1) При $i = 1, j = 1$:

$$F_{41} R_{.113}^4 + F_{14} R_{.113}^4 = 1 \cdot e^{x^1} + (-1) \cdot e^{x^1} = 0. \quad (103)$$

2) При $i = 1, j \neq 1$: Згідно з матрицею коваріантного афінора, $F_{4j} = 0$ для всіх $j \in \{2, 3, 4\}$. Тому:

$$F_{4j} R_{.113}^4 + F_{1\alpha} R_{.j13}^\alpha = 0 \cdot e^{x^1} + 0 = 0. \quad (104)$$

3) При $i \neq 1, j = 1$: Аналогічно, $F_{i4} = 0$ для всіх $i \in \{2, 3, 4\}$. Тоді:

$$F_{\alpha 1} R_{.i13}^\alpha + F_{i4} R_{.113}^4 = 0 + 0 \cdot e^{x^1} = 0. \quad (105)$$

Для всіх інших наборів індексів ($i \neq 1$ та $j \neq 1$) тензор кривини дорівнює нулю. Таким чином, тотожність $F_{ij,[kl]} = 0$ виконується для всього простору, що доводить його напівсиметричність.

4. Афінор-напівсиметричні простори першого класу.

Розглянемо властивості просторів першого класу, у якому визначена еліптична афінорна напівсиметрична структура другого ступеня. Вираз (7) спряжемо за індексами j, k

$$b_{h\alpha} R_{i\bar{j}\bar{k}}^\alpha = b R_{hi\bar{j}\bar{k}} + R_{h\bar{j}} b_{i\bar{k}} - R_{h\bar{k}} b_{i\bar{j}}, \quad (106)$$

або, з урахуванням властивостей тензора кривини у афінор-напівсиметричних просторах

$$b_{h\alpha} R_{ijk}^\alpha = b R_{hijk} + R_{h\bar{j}} b_{i\bar{k}} - R_{h\bar{k}} b_{i\bar{j}}. \quad (107)$$

Отриману тотожність віднімемо від (7)

$$R_{hj} b_{ik} - R_{hk} b_{ij} - R_{h\bar{j}} b_{i\bar{k}} + R_{h\bar{k}} b_{i\bar{j}} = 0. \quad (108)$$

Згортаючи за індексами h, k з урахуванням (8)

$$R_{i\alpha} b_j^\alpha = \frac{R}{2} b_{ij}. \quad (109)$$

Доведена

Лема 5. У афінор-напівсиметричних просторах першого класу тензор b_{ij} задовольняє (109).

Рівність (1) згорнемо з тензором Річчі

$$R_{h\alpha} R_{ijk}^\alpha = e(R_{h\alpha} b_k^\alpha b_{ij} - R_{h\alpha} b_j^\alpha b_{ik}) \quad (110)$$

та врахуємо (109)

$$R_{h\alpha} R_{ijk}^\alpha = \frac{R}{2} R_{hijk}. \quad (111)$$

Означення 4. Простори, у яких визначено довільний симетричний тензор A_{ij} такий, що задовольняє

$$A_{\alpha h} R_{ijk}^\alpha = \gamma R_{hijk}, \quad (112)$$

де $\gamma \neq 0$ - деякий інваріант, назовемо A -сильно напівсиметричними з інваріантом γ .

Лема 6. *Афінор-напівсиметричні простори першого класу є Річчі-сильно напівсиметричними з інваріантом $\gamma = \frac{R}{2}$.*

Вираз (112) згорнемо за індексами i, j

$$A_{\alpha h} R_{.k}^{\alpha} = \gamma R_{hk}. \quad (113)$$

Тут, беручи до уваги симетричність тензору Річчі, доводимо

Лема 7. *У A -сильно напівсиметричних просторах тензор A_{ij} комутує з тензором Річчі.*

Вираз (113) згорнемо та отримаємо

$$A_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} = \gamma R. \quad (114)$$

Наслідок 1. *У афінор-напівсиметричних просторах першого класу виконуються*

$$R_{h\alpha} R_j^{\alpha} = \frac{R}{2} R_{hj}, \quad (115)$$

$$R^2 = 2R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}. \quad (116)$$

Рівність (108) згорнемо за індексами i, k

$$R_{hj} b - R_{h\alpha} b_j^{\alpha} + R_{h\bar{\alpha}} b_{\bar{j}}^{\alpha} = 0. \quad (117)$$

Або, беручи до уваги (53) та (109)

$$R_{hj} b - \frac{R}{2} b_{hj} - \frac{R}{2} b_{\bar{h}\bar{j}} = 0, \quad (118)$$

тобто

$$R_{hj} = \frac{R}{2b} (b_{hj} + b_{\bar{h}\bar{j}}). \quad (119)$$

Вираз спряжемо (14) за індексами l, p

$$\begin{aligned} R_{hijk, [\bar{l}\bar{p}]} &= R_{\bar{p}k} R_{ihj\bar{l}} + R_{\bar{l}k} R_{ih\bar{p}j} + R_{\bar{p}j} R_{ih\bar{l}k} + R_{\bar{l}j} R_{ihk\bar{p}} \\ &+ R_{i\bar{p}} R_{kjh\bar{l}} + R_{i\bar{l}} R_{jkh\bar{p}} + R_{h\bar{p}} R_{jki\bar{l}} + R_{h\bar{l}} R_{kji\bar{p}}. \end{aligned} \quad (120)$$

З (39) випливає

$$R_{hijk, [\bar{l}\bar{p}]} = R_{hijk, [lp]}, \quad (121)$$

тому, підставляючи сюди (14), (120) будемо мати

$$\begin{aligned}
& R_{\bar{p}k}R_{ihj\bar{l}} + R_{\bar{l}k}R_{ih\bar{p}j} + R_{\bar{p}j}R_{ih\bar{l}k} + R_{\bar{l}j}R_{ihk\bar{p}} \\
& + R_{i\bar{p}}R_{kjh\bar{l}} + R_{i\bar{l}}R_{jkh\bar{p}} + R_{h\bar{p}}R_{jki\bar{l}} + R_{h\bar{l}}R_{kji\bar{p}} = \\
& = R_{pk}R_{ihjl} + R_{lk}R_{ihpj} + R_{pj}R_{ihlk} + R_{lj}R_{ihkp} \\
& + R_{ip}R_{kjhl} + R_{il}R_{jkh p} + R_{hp}R_{jkil} + R_{hl}R_{kji p}. \quad (122)
\end{aligned}$$

Отриманий вираз згорнемо за індексами h, l

$$\begin{aligned}
& -R_{\bar{p}k}R_{ij\bar{\alpha}}^{\alpha} - R_{k\bar{\alpha}}R_{i\bar{p}j}^{\alpha} + R_{\bar{p}j}R_{ik\bar{\alpha}}^{\alpha} - R_{j\bar{\alpha}}R_{ik\bar{p}}^{\alpha} \\
& + R_{i\bar{p}}R_{kj\bar{\alpha}}^{\alpha} + R_{i\bar{\alpha}}R_{\bar{p}jk}^{\alpha} - R_{\bar{p}\alpha}R_{ijk}^{\bar{\alpha}} = \\
& = -R_{pk}R_{ij} - R_{k\alpha}R_{ipj}^{\alpha} + R_{pj}R_{ik} - R_{j\alpha}R_{ikp}^{\alpha} \\
& + R_{i\alpha}R_{pj k}^{\alpha} - R_{p\alpha}R_{ijk}^{\alpha} + RR_{kji p} \quad (123)
\end{aligned}$$

та перепишемо, враховуючи (51), (53), (56) та (111)

$$\begin{aligned}
& R_{\bar{p}k}R_{ij} - \frac{R}{2}R_{i\bar{k}\bar{p}j} - R_{\bar{p}j}R_{ik} - \frac{R}{2}R_{i\bar{j}k\bar{p}} - 2R_{i\bar{p}}R_{kj} = \\
& = -R_{pk}R_{ij} + \frac{R}{2}R_{ipjk} + R_{pj}R_{ik}. \quad (124)
\end{aligned}$$

Цю тотожність спряжемо за індексами p, i та використаємо алгебраїчну тотожність Б'янкі

$$R_{pk}R_{ij} - RR_{ipjk} - R_{pj}R_{ik} - 2R_{i\bar{p}}R_{kj} = -R_{\bar{p}k}R_{ij} + R_{\bar{p}j}R_{ik}. \quad (125)$$

Отриману рівність згорнемо за індексами p, k

$$RR_{ij} - R_{i\alpha}R_j^{\alpha} = 0 \quad (126)$$

та підставимо (115)

$$RR_{ij} = 0. \quad (127)$$

Звідси отримуємо, що тензор Річчі $R_{ij} = 0$ або скалярна кривина

$R = 0$, але нульова скалярна кривина є наслідком того, що тензор Річчі дорівнює нулю. Більш того, виконується й зворотнє. Дійсно, якщо $R = 0$, підставляючи це у вираз (119) отримуємо, що $R_{ij} = 0$. Враховуючи Теорему 1, доведено

Наслідок 2. Афінор-напівсиметричних просторів першого класу не існує.

Таким чином, у роботі досліджено псевдоріманові простори першого класу, наділені еліптичною афінорною напівсиметричною структурою другого ступеня. Алгебраїчний аналіз другої квадратичної форми цих просторів показав, що наявність такої геометричної структури неможлива у таких просторах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Eisenhart, L. P. (1926). *Riemannian Geometry*. Princeton University Press.
2. Schouten, J. A., & Struik, D. J. (1935). *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie* (Bd. 1). P. Noordhoff n.v.
3. Kiosak, V., Savchenko, O., & Shevchenko, T. (2018). Holomorphically Projective Mappings of Special Kahler Manifolds. *AIP Conference Proceedings, 2025*, 08004. <https://doi.org/10.1063/1.5064924>.
4. Kahler, E. (1933). Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metric. *Sem. Hamburg. Univ*, 9, 173–186.
5. Yano, K. (1965). *Differential geometry of complex and almost complex spaces*. Pergamon Press.
6. Suguri, T. (1956). Determination of various affine connexions in almost Hermitian space. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., A*, 10(2), 151–166.
7. Reboucas, M. J., Santos, J., & Teixeira, A. F. F. (2004). Classification of energy momentum tensors in $n \leq 5$ dimensional space-time. *Brazilian J. of Physics*, 34(2A), 535–543.
8. Fedorova, A., Kiosak, V., Matveev, V., & Rosemann, S. (2012). The only Kahler manifold with degree of mobility at least 3 is $(CP^n, g_{\text{Fubini-Study}})$. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 105(1), 153–188. <https://doi.org/10.1112/plms/pdr053>
9. Doikov, D., & Kiosak, V. (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conf. Proc*, 2302, 040001.
10. Kiosak, V. A., & Kovalova, G. V. (2020). Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature. *Mathematical Studies*, 53(2), 212–217.
11. Kiosak, V., & Matveev, V. S. (2014). There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. *J. Geom. Phys*, 78, 1–11.
12. Lesechko, O., & Soloviov, A. (2023). Conformally flat Kahler spaces. *Researches in Mathematics and Mechanics*, 28(1–2), 47–63.
13. Kiosak, V., Kusik, L., & Isaiev, V. (2022). Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 15(2), 110–120.
14. Kiosak, V., Latysh, O., & Kuzmich, V. (2024). Split curvature. *Proc. Int. Geom. Center*, 17(3), 232–243.

15. Kiosak, V., Savchenko, A., & Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conf. Proc.*, 2164, 040001.
16. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kamienieva, A. (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces with constant scalar curvature. *AIP Conf. Proc.*, 2302, 040002.
17. Kiosak, V., Savchenko, A., & Khniunin, S. (2020). On the typology of quasi-Einstein spaces. *AIP Conf. Proc.*, 2302, 040003.
18. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kovalova, G. (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proc. Int. Geom. Center*, 13(1), 35–48.
19. Kiosak, V., Lesechko, O., & Latysh, O. (2022). On geodesic mappings of symmetric pairs. *Proc. Int. Geom. Center*, 15, 230–238.
20. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kusik, L. (2022). On the properties of Ricci solitons. *AIP Conf. Proc.*, 2522, 120006.
21. Kiosak, V., Savchenko, A., & Latysh, O. (2021). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(1), 80–91.
22. Kiosak, V., Savchenko, A., & Makarenko, L. (2022). Invariant transformations that preserve mappings. *AIP Conf. Proc.*, 2522, 120003.
23. Lesechko, O., Latysh, O., & Kamienieva, A. (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. *AIP Conf. Proc.*, 2164, 040002.
24. Kiosak, V., Lesechko, O., & Savchenko, O. (2018). Mappings of spaces with affine connection. In *Proc. 17th Conf. on Applied Mathematics, APLIMAT*, Bratislava (pp. 563–569). Curran Associates, Inc.
25. Kiosak, V., Prishlyak, O., & Gudyreva, O. (2024). On geodesic mappings of threesymmetric spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 17(1), 56–64.
26. Kiosak, V., Prishlyak, O., & Lesechko, O. (2021). On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(4), 13–26.
27. Savchenko, A., Shevchenko, T., & Hedulian, S. (2024). Conformal recurrent Kahler spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 17(1), 88–98.
28. Savchenko, A., Vashpanova, N., & Vasylieva, N. (2021). Generalized $\phi(\text{Ric})$ -vector fields in special pseudo-Riemannian spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(4), 1–12.
29. Savchenko, A., & Zarichnyi, M. (2010). Metrization of free groups on ultrametric spaces. *Topology Appl.*, 157(4), 724–729.
30. Zarichnyi, M., Savchenko, A., & Kiosak, V. (2019). Strong topology on the set of persistence diagrams. *AIP Conf. Proc.*, 2164, 040006.
31. Fedchenko, Yu., & Lesechko, O. (2021). Special semi-reducible pseudo-Riemannian spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(1), 48–59.
32. Lesechko, O., Latysh, O., & Sychak, T. (2020). Conformally flat Kahler spaces. *AIP Conf. Proc.*, 2302, 040004.
33. Fedchenko, Yu., Lesechko, O., & Marianko, Ya. (2025). Semi-reducible pseudo-Riemannian spaces with additional conditions. *Proc. Int. Geom. Center*, 18(2), 233–247.

Soloviov A. A.

AFFINOR-SEMI-SYMMETRIC SPACES OF CLASS ONE

Summary

The paper investigates the local geometry of pseudo-Riemannian spaces of class one endowed with an elliptic affinor semi-symmetric structure of the second degree. The application of the operation of conjugation with an affinor allowed analyzing the differential and algebraic properties of the Riemann and Ricci tensors. The algebraic structure of the second fundamental form is investigated; it is proved that the vanishing of the Ricci tensor restricts the rank of the second fundamental form to one, which leads to the identical vanishing of the Riemann tensor. Based on this, a theorem on the non-existence of Ricci-flat spaces of class one is established. For spaces with the given affinor structure, the commutativity of the Ricci tensor with the second fundamental form is proved. The main result is the proof of the identical vanishing of the Ricci tensor in affinor-semi-symmetric spaces of class one. As a consequence, the incompatibility of the conditions of a flat space hypersurface with a semi-symmetric almost complex structure is substantiated, and the non-existence of affinor-semi-symmetric spaces of class one is proved.

Keywords: Riemannian space, pseudo-Riemannian space, Riemann tensor, Ricci tensor, mapping of spaces, deformation tensor, affine connection spaces, covariant derivative, affinor, affinor structure, semi-symmetric affinor structure, antisymmetric affinor structure, almost complex space, conjugation operation, geometric object.

REFERENCES

1. Eisenhart, L. P. (1926). *Riemannian Geometry*. Princeton University Press.
2. Schouten, J. A., & Struik, D. J. (1935). *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie* (Bd. 1). P. Noordhoff n.v.
3. Kiosak, V., Savchenko, O., & Shevchenko, T. (2018). Holomorphically Projective Mappings of Special Kahler Manifolds. *AIP Conference Proceedings, 2025*, 08004. <https://doi.org/10.1063/1.5064924>.
4. Kahler, E. (1933). Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metric. *Sem. Hamburg. Univ*, 9, 173–186.
5. Yano, K. (1965). *Differential geometry of complex and almost complex spaces*. Pergamon Press.

6. Suguri, T. (1956). Determination of various affine connexions in almost Hermitian space. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., A*, 10(2), 151–166.
7. Reboucas, M. J., Santos, J., & Teixeira, A. F. F. (2004). Classification of energy momentum tensors in $n \leq 5$ dimensional space-time. *Brazilian J. of Physics*, 34(2A), 535–543.
8. Fedorova, A., Kiosak, V., Matveev, V., & Rosemann, S. (2012). The only Kahler manifold with degree of mobility at least 3 is $(CP^n, g_{\text{Fubini-Study}})$. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 105(1), 153–188. <https://doi.org/10.1112/plms/pdr053>
9. Doikov, D., & Kiosak, V. (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conf. Proc.*, 2302, 040001.
10. Kiosak, V. A., & Kovalova, G. V. (2020). Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature. *Mathematical Studies*, 53(2), 212–217.
11. Kiosak, V., & Matveev, V. S. (2014). There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. *J. Geom. Phys.*, 78, 1–11.
12. Lesechko, O., & Soloviov, A. (2023). Conformally flat Kahler spaces. *Researches in Mathematics and Mechanics*, 28(1–2), 47–63.
13. Kiosak, V., Kusik, L., & Isaiev, V. (2022). Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 15(2), 110–120.
14. Kiosak, V., Latysh, O., & Kuzmich, V. (2024). Split curvature. *Proc. Int. Geom. Center*, 17(3), 232–243.
15. Kiosak, V., Savchenko, A., & Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conf. Proc.*, 2164, 040001.
16. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kamienieva, A. (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces with constant scalar curvature. *AIP Conf. Proc.*, 2302, 040002.
17. Kiosak, V., Savchenko, A., & Khniunin, S. (2020). On the typology of quasi-Einstein spaces. *AIP Conf. Proc.*, 2302, 040003.
18. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kovalova, G. (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proc. Int. Geom. Center*, 13(1), 35–48.
19. Kiosak, V., Lesechko, O., & Latysh, O. (2022). On geodesic mappings of symmetric pairs. *Proc. Int. Geom. Center*, 15, 230–238.
20. Kiosak, V., Savchenko, A., & Kusik, L. (2022). On the properties of Ricci solitons. *AIP Conf. Proc.*, 2522, 120006.
21. Kiosak, V., Savchenko, A., & Latysh, O. (2021). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(1), 80–91.
22. Kiosak, V., Savchenko, A., & Makarenko, L. (2022). Invariant transformations that preserve mappings. *AIP Conf. Proc.*, 2522, 120003.
23. Lesechko, O., Latysh, O., & Kamienieva, A. (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. *AIP Conf. Proc.*, 2164, 040002.

24. Kiosak, V., Lesechko, O., & Savchenko, O. (2018). Mappings of spaces with affine connection. In *Proc. 17th Conf. on Applied Mathematics, APLIMAT*, Bratislava (pp. 563–569). Curran Associates, Inc.
25. Kiosak, V., Prishlyak, O., & Gudyreva, O. (2024). On geodesic mappings of threesymmetric spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 17(1), 56–64.
26. Kiosak, V., Prishlyak, O., & Lesechko, O. (2021). On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(4), 13–26.
27. Savchenko, A., Shevchenko, T., & Hedulian, S. (2024). Conformal recurrent Kahler spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 17(1), 88–98.
28. Savchenko, A., Vashpanova, N., & Vasylieva, N. (2021). Generalized $\phi(\text{Ric})$ -vector fields in special pseudo-Riemannian spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(4), 1–12.
29. Savchenko, A., & Zarichnyi, M. (2010). Metrization of free groups on ultrametric spaces. *Topology Appl*, 157(4), 724–729.
30. Zarichnyi, M., Savchenko, A., & Kiosak, V. (2019). Strong topology on the set of persistence diagrams. *AIP Conf. Proc*, 2164, 040006.
31. Fedchenko, Yu., & Lesechko, O. (2021). Special semi-reducible pseudo-Riemannian spaces. *Proc. Int. Geom. Center*, 14(1), 48–59.
32. Lesechko, O., Latysh, O., & Spychak, T. (2020). Conformally flat Kahler spaces. *AIP Conf. Proc*, 2302, 040004.
33. Fedchenko, Yu., Lesechko, O., & Marianko, Ya. (2025). Semi-reducible pseudo-Riemannian spaces with additional conditions. *Proc. Int. Geom. Center*, 18(2), 233–247.

UDC 519.87:616-006

O. D. Rapchynskyi, *PhD Student*

Odesa Polytechnic National University

Department of Applied Mathematics and Information Technologies

1 Shevchenko Avenue, Odesa, 65044, Ukraine

e-mail: 6258036@as.op.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-3702-7370>

O. D. Kichmarenko, *Doctor of Physical and Mathematical Sciences,*
Professor

Military Academy (Odesa)

Department of Fundamental Sciences

10 Fontanska Doroha, Odesa, 65009, Ukraine

e-mail: olga.kichmarenko@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7388-4922>

A. O. Stekhun, *Candidate of Physical and Mathematical Sciences,*
Associate Professor

Odesa I. I. Mechnikov National University

Department of Optimal Control and Economic Cybernetics

2 Zmilenka Vsevoloda St, Odesa, 65082, Ukraine

e-mail: a.stehun@onu.edu.ua; angela.stehun@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3140-2689>

DISCRETE CELLULAR AUTOMATA MODELS OF TUMOR GROWTH DYNAMICS AND IMMUNE SURVEILLANCE

Mathematical modeling and simulation play a central role in elucidating tumor growth dynamics and evaluating therapeutic interventions in oncology. A cellular automata approach consisting of three discrete models of increasing complexity was investigated: (i) an uncontrolled proliferation model capturing exponential tumor expansion; (ii) a spatially constrained proliferation model reproducing logistic-like saturation due to microenvironmental limits; and (iii) an immune response model incorporating effector cell interactions and cytokine-mediated chemotaxis. These models operate on two-dimensional lattices with stochastic update rules calibrated by biologically relevant division and death rates. Simulation experiments demonstrate that the uncontrolled model reproduces classical exponential growth behavior, while the spatially constrained model yields sigmoidal growth curves consistent with Verhulst dynamics. The immune response model further enables simulation of

interactions among tumor cells, effector lymphocytes, and cytokine signals, capturing complex biological dynamics that are difficult to derive or compute with traditional analytical methods. Parameter sensitivity analyses reveal critical regimes of cytokine secretion and effector recruitment that govern the transition between tumor containment and escape. This discrete, rule-based model provides a powerful tool for exploring tumor-immune interactions and evaluating potential treatment strategies.

MSC: 92C50, 92C37, 68Q80.

Keywords: cellular automata, tumor growth, simulation, immune response, chemotaxis.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1\(47\).364555](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1(47).364555)

Received: 15.03.2026. *Accepted for publication:* 27.03.2026.

Published: 15.09.2026.



This article is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0).

INTRODUCTION

Mathematical and computer models are vital tools in cancer research. They can show how tumors grow, spread, and respond to treatments in ways that are difficult to capture with traditional equations. Cellular automata (CA) are simple grid models where each cell follows a few basic rules [1; 2]. Even with these simple rules, CA can display complex patterns because cells interact with each other and their environment.

Analytical models face difficulty in incorporating the full spectrum of complex cell-cell and cell-environment interactions, and their complexity grows rapidly as new biological details are added. In many practical applications, sufficiently accurate simulations can provide reliable insight without requiring closed-form solutions. CA simulations overcome these challenges by tracking each cell on a lattice, updating its state based on probabilistic rules for division, death, movement, and immune interaction. Computer simulations enable systematic exploration of parameter spaces and sensitivity analyses to identify threshold effects and critical transitions.

This work examines three CA models with growing complexity: uncontrolled growth, space-limited growth, and immune-driven tumor suppression. Our simulations show that simple rules can produce familiar growth curves: exponential growth in the first model and S-shaped (logistic [3]) growth in the second. The third model illustrates how immune cell lifespan, chemical signals,

and arrival rate affect tumor control [4; 5]. The goals are to demonstrate the usefulness of CA in cancer modeling and confirm known growth laws.

MAIN RESULTS1. Model of uncontrolled cancer cell proliferation

Let $x_{i,j}(t) \in \{0, 1\}$ denote the presence of a tumor cell at lattice site (i, j) at discrete time t . The lattice is unbounded, and time advances in uniform steps of length Δt , where T_d is the mean time between cell divisions.

Cell division follows a Poisson (memoryless) process with rate $1/T_d$, giving the probability of a division event in one time step as

$$p_d = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{T_d}}. \quad (1)$$

This form comes from the fact that the expected number of division events in interval Δt is $\Delta t/T_d$, and the exponential distribution yields $1 - e^{-\Delta t/T_d}$ as the chance of at least one event.

Initially, a single cancer cell occupies the origin:

$$x_{0,0}(0) = 1, \quad x_{i,j}(0) = 0 \quad (i, j) \neq (0, 0). \quad (2)$$

At each time step, each occupied site divides with probability p_d , placing a daughter cell on a randomly chosen empty von Neumann neighbor. We then define the total tumor size by

$$X(t) = \sum_{i,j} x_{i,j}(t), \quad (3)$$

which under these rules exhibits exponential growth on average. This behavior corresponds to classical exponential tumor growth models [1; 6–8].

Simulation of uncontrolled tumor growth.

Tumor expansion without spatial constraints or competition was simulated on an unbounded lattice up to $t = 500$ days with $\Delta t = 1$ day and $T_d = 5$ days. Snapshots at $t = 125, 250, 375, 500$ days are shown in Fig. 1. For mean division times $T_d \in \{5, 6, 7, 8\}$ days ($\Delta t = 1$ day), the tumor size $X(t)$ was computed up to $t = 1000$ days (Fig. 2), and the values appear in Table 3.

2. Model of spatially constrained proliferation

In many solid tumors the available space for cell growth is limited by the surrounding tissue [9; 10]. To account for spatial constraints, we restrict the

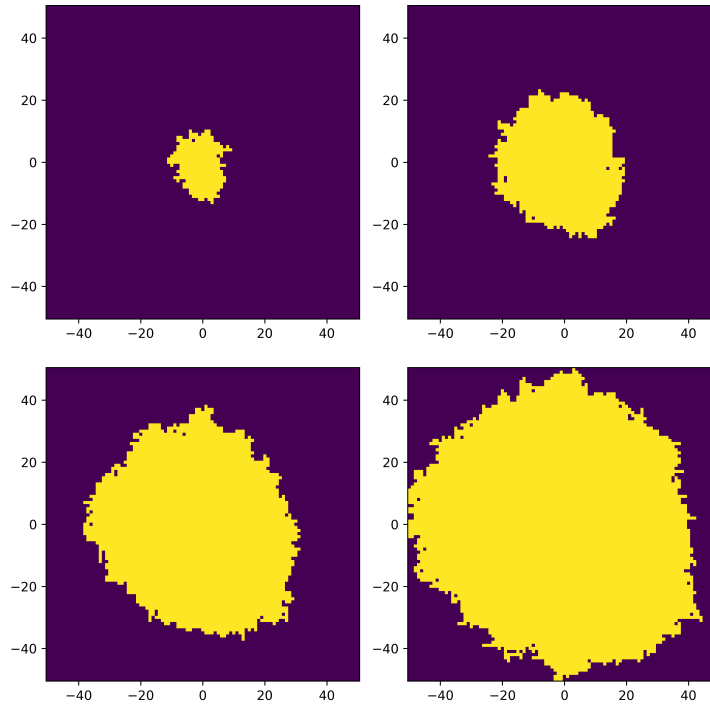


Figure 1: Snapshots of cell distribution at $t = 125, 250, 375, 500$ days under uncontrolled growth on an unbounded lattice.

Table 3: Tumor size $X(t)$ at various time points for different mean division times T_d .

T_d (days)	$t = 250$	$t = 500$	$t = 750$	$t = 1000$
5	1437	6533	16021	29534
6	1044	4909	11665	21430
7	612	3231	8184	15169
8	590	2786	6773	12633

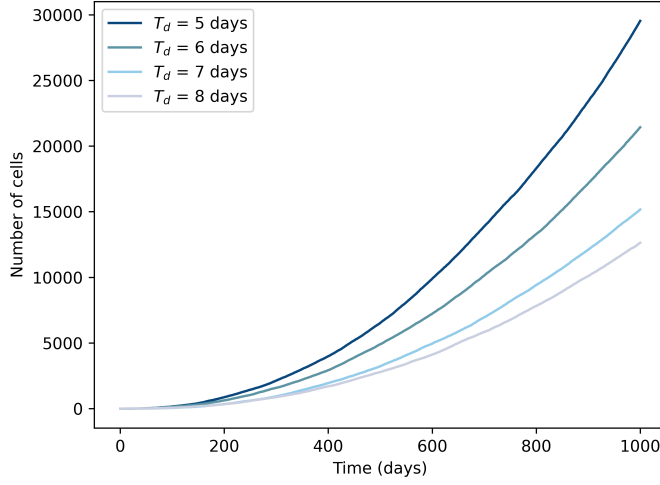


Figure 2: Uncontrolled proliferation model: tumor size $X(t)$ over 1000 days for mean division times $T_d = 5, 6, 7, 8$ days.

cellular automaton to a finite square domain of side length $2L + 1$ centered at the origin:

$$\mathcal{D} = \{(i, j): -L \leq i, j \leq L\}.$$

Division proceeds as in the unconstrained model, but a daughter cell can only be placed on a neighbor site if it lies within $\mathcal{D}$. Under these rules, cell proliferation saturates when most sites in $\mathcal{D}$ become occupied. The maximum tumor size is therefore

$$X_{\max} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{D}} 1 = (2L + 1)^2. \quad (4)$$

Simulation results exhibit an initial exponential growth phase followed by a plateau as $X(t)$ approaches $X_{\max}$. This sigmoidal behavior is consistent with classical Verhulst (logistic) dynamics and is widely used in mathematical oncology [11–17].

Simulation of spatially constrained tumor growth.

The CA model on the finite domain $\mathcal{D} = \{(i, j): -L \leq i, j \leq L\}$ with $L = 50$ was simulated using $\Delta t = 1$ day and $T_d = 5$ days. The tumor size $X(t)$ was recorded and plotted in Fig. 3, demonstrating logistic-type saturation as

$X(t)$ approaches the plateau $X_{\max} = (2L + 1)^2 = 10201$. The tumor sizes at selected time points for various mean division times are listed in Table 4.

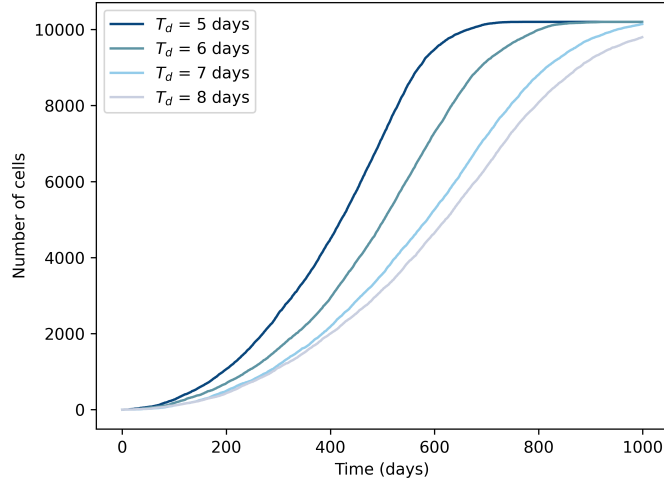


Figure 3: Spatially constrained proliferation model: growth curve $X(t)$ on the finite domain, showing sigmoidal saturation near $X_{\max} = 10201$.

Table 4: Tumor size $X(t)$ at $t = 250, 500, 750, 1000$ days for mean division times T_d under spatial constraint ($L = 50$).

T_d (days)	$t = 250$	$t = 500$	$t = 750$	$t = 1000$
5	1695	7176	10199	10201
6	1087	4929	9649	10201
7	780	3569	8083	10143
8	735	3157	7318	9798

3. Immune response model

In physiological conditions, tumor growth is restrained by the host immune system [5; 18–20]. Effector lymphocytes, specifically T cells, recognize and bind to abnormal cells such as cancer, forming a tumor-effector complex [21–23].

Let $x_{i,j}(t) \in \{0, 1\}$ denote a tumor cell and $y_{i,j}(t) \in \{0, 1\}$ an effector cell at site (i, j) and time t . Define the complex indicator

$$c_{i,j}(t) = x_{i,j}(t) y_{i,j}(t) \in \{0, 1\}, \quad (5)$$

so that $c_{i,j}(t) = 1$ exactly when both a tumor cell and an effector occupy the same lattice site. Additionally, we denote the total effector cell population $Y(t) = \sum_{i,j} y_{i,j}(t)$ and the total tumor-effector complex population $C(t) = \sum_{i,j} c_{i,j}(t)$, in direct analogy to the tumor size $X(t)$.

The initial condition is

$$\begin{aligned} x_{0,0}(0) &= 1, \\ x_{i,j}(0) &= 0, \quad (i,j) \neq (0,0), \\ Y(0) &= 0, \quad C(0) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

i.e. one tumor cell at the origin and no effector cells or complexes.

Cell death.

Effector cells have mean lifetime T_y , giving per-step death probability

$$p_y = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{T_y}}. \tag{7}$$

Tumor cells in complex die with mean lifetime T_x , yielding

$$p_x = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{T_x}}. \tag{8}$$

When $c_{i,j}(t) = 1$, an effector may kill the tumor cell with probability p_x , and the effector itself may die of natural causes with probability p_y . Independent random draws determine whether each cell survives or is removed at that time step.

Tumor cell division.

Tumor cells not bound in a tumor-effector complex ($c_{i,j}(t) = 0$) divide using the same stochastic rule as in the uncontrolled proliferation model. At each time step, such a cell divides with probability p_d (1), placing its daughter on a randomly chosen empty von Neumann neighbor within the domain.

Regulatory effect of cytokines

Cytokines secreted by each tumor-effector complex diffuse rapidly through the tissue and decay exponentially with mean lifetime T_c . Under a quasi-steady approximation, the contribution of a single complex at lattice site (k, ℓ) to the cytokine level in cell (i, j) is

$$u_{i,j}^{(k,\ell)} = \alpha \int_0^\infty e^{-t/T_c} \frac{1}{4\pi D t} e^{-\frac{\Delta L^2((i-k)^2+(j-\ell)^2)}{4Dt}} dt, \quad (9)$$

where ΔL is the lattice spacing, α the secretion rate, D the diffusion coefficient, and t_C the cytokine lifetime [5]. The total cytokine concentration at (i, j) and time t is then

$$U_{i,j}(t) = \sum_{k,\ell} c_{k,\ell}(t) u_{i,j}^{(k,\ell)}.$$

Note that under the quasi-steady approximation, $u_{i,j}^{(k,\ell)}$ depends only on the spatial distance and not on time. Thus, one can precompute its values for all distances present in the lattice and store them in a lookup table. During simulation, these precomputed kernel values can be retrieved directly, significantly reducing computational overhead.

Effector cell movement.

Effector cells do not divide but migrate toward regions of high cytokine concentration, which correspond to active tumor-effector complexes. At each time step, an effector at lattice site (i, j) selects one of its four von Neumann neighbors

$$\mathcal{N}_{i,j} = \{(i+1, j), (i-1, j), (i, j+1), (i, j-1)\}$$

and moves into neighbor $(i', j') \in \mathcal{N}_{i,j}$ with probability

$$p_{i',j'} = \frac{1 + \chi U_{i',j'}(t)}{\sum_{(m,n) \in \mathcal{N}_{i,j}} (1 + \chi U_{m,n}(t))},$$

where $U_{m,n}(t)$ is the cytokine concentration and χ is the chemotactic sensitivity [5]. This bias directs effector cells toward regions of active immune response.

If an effector moves into a site (i', j') already occupied by a tumor cell (i.e. $x_{i',j'}(t) = 1$), they immediately form a tumor-effector complex, setting $c_{i',j'}(t) = 1$.

Effector cells begin with zero population inside the domain (6) and enter exclusively through a one-cell-wide boundary ring. Let N_0 denote the constant

ambient effector concentration outside the lattice. Since the ring is exactly one lattice cell thick, its total entry length (excluding corner cells) is four sides of length $2L$. Hence the per-step influx probability is

$$p_{\text{in}} = 1 - e^{-8L N_0 \Delta L}, \quad (10)$$

Upon an influx event, a new effector is placed at a uniformly random boundary site. Effector cells may also leave the domain by moving beyond its boundary.

Simulation of immune response model.

The model was simulated with the parameters listed in Table 5. Simulations were run from $t = 0$ until $t = 70$ days. To focus on immune-mediated clearance, effector influx was delayed until the tumor cell count reached 150-190 cells.

Under these conditions, in most trials the immune response eliminated the tumor between day 40 and day 70. Figure 4 shows the time courses of the tumor cell count, effector cell count, and tumor-effector complex count. Complexes vanish immediately upon tumor eradication, confirming the correctness of the implementation.

Table 5: Model parameters used in the simulations

Parameter	Value
Time step Δt	1 min
Tumor cell lifetime T_x	720 min (0.5 day)
Effector lifetime T_y	4320 min (3 days)
Cytokine lifetime T_c	720 min (0.5 day)
Tumor division time T_d	7200 min (5 days)
Cytokine rate α	1 cell/min
Ambient effector density N_0	4×10^{-6} cells/ μm^2
Chemotactic sensitivity χ	1000
Boundary width ΔL	10 μm
Domain half-width L	500 μm
Diffusion coefficient D	2000 $\mu\text{m}^2/\text{min}$

Impact of chemotactic sensitivity.

To assess the role of cytokine-driven chemotaxis, we varied the sensitivity parameter χ while holding all other parameters fixed (Table 5). Figure 5

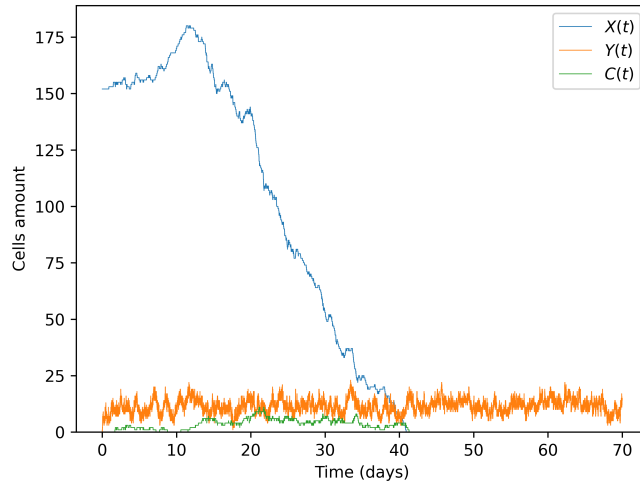


Figure 4: Time courses of tumor cells, effector cells, and tumor-effector complexes under the specified parameters are plotted over 70 days.

displays representative time courses of tumor cells, effector cells, and tumor-effector complexes for several different values of χ .

These results underscore the pivotal role of cytokine-mediated chemotaxis in orchestrating an effective antitumor response: sufficient chemotactic sensitivity enables rapid effector accumulation at tumor sites and decisive tumor control, whereas without chemotaxis effector cells wander aimlessly and fail to control tumor growth.

Impact of ambient effector density.

The ambient effector density N_0 governs the supply of new immune cells at the boundary. To assess its effect, we ran simulations for low and high values of N_0 , holding all other parameters as in Table 5. Figure 6 shows representative time courses for these two scenarios.

These simulations underscore the critical role of immune influx: when effector supply is low, tumors grow unchecked, whereas a robust supply leads to rapid tumor clearance.

Impact of effector lifetime.

Effector lifetime T_y critically determines immune persistence in the tissue. To assess its effect, we compared short-lived and long-lived effectors while

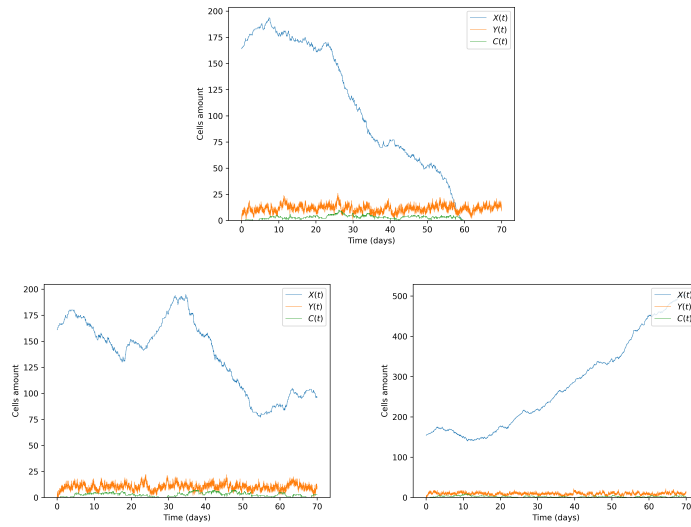


Figure 5: Simulation results under varying chemotactic sensitivity χ : $\chi = 1000$, $\chi = 500$, and $\chi = 0$, respectively. Tumor cells, effector cells, and tumor-effector complexes are plotted over 70 days.

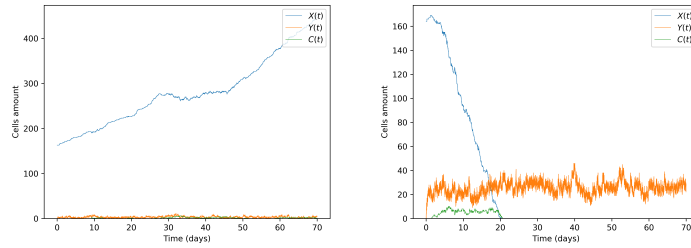


Figure 6: Simulation results under varying ambient effector density: (left) $N_0 = 10^{-6}$, (right) $N_0 = 10^{-5}$. Tumor cells, effector cells, and tumor-effector complexes are plotted over 70 days.

holding all other parameters fixed (Table 5). Figure 7 shows representative time courses for these two scenarios.

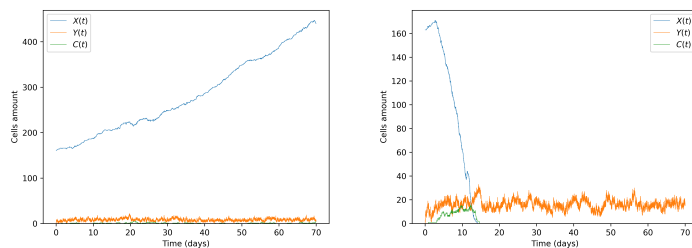


Figure 7: Simulation results under varying effector lifetime: (left) $T_y = 1$ day; (right) $T_y = 14$ days. Tumor cells, effector cells, and tumor-effector complexes over 70 days.

Short-lived effectors are removed too rapidly to establish sufficient tumor-effector interactions, allowing unchecked tumor expansion. In contrast, long-lived effectors persist in the tissue, accumulate at the tumor interface, and achieve complete tumor eradication. Thus, effector cell longevity is a key factor for sustained antitumor immunity in the model.

CONCLUSION

We demonstrated that cellular automata models of increasing complexity can both reproduce classical tumor growth laws and reveal key immune-tumor interactions. The uncontrolled-proliferation model yields exponential expansion, the spatially constrained model produces logistic-type saturation, and the immune response model shows how effector cell lifetime, chemotactic sensitivity, and boundary influx determine the balance between tumor eradication and escape.

Such a rule-based model is very flexible and can easily include different microenvironments, extra immune pathways, and therapeutic strategies. Moreover, as computational power increases, simulations will become increasingly efficient, making cellular automata models exceptionally promising as excellent aids for practical modeling of cancer and other complex biological processes.

REFERENCES

1. Murray, J. D. (2002). *Mathematical biology I: An introduction* (3rd ed.). Springer.
2. Kansal, A. R., Torquato, E. C., Chiocca, S., & Deisboeck, T. S. (2000). Simulated brain tumour growth dynamics using a three-dimensional cellular automaton. *J. Theor. Biol.*, *203*, 367–382. <https://doi.org/10.1006/jtbi.2000.2000>
3. Verhulst, P. F. (1845). Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouv. Mém. Acad. Roy. Sci. Belles-Lett. Brux.*, *18*, 1–41.
4. Kuznetsov, V. A., Makalkin, I. A., Taylor, M. A., & Perelson, A. S. (1994). Nonlinear dynamics of immunogenic tumors: Parameter estimation and global bifurcation analysis. *Bull. Math. Biol.*, *56*, 295–321. <https://doi.org/10.1007/BF02460644>
5. Cooper, A. K., & Kim, P. S. (2014). A cellular automata and a partial differential equation model of tumor-immune dynamics and chemotaxis. In *Mathematical models of tumor-immune system dynamics* (pp. 21–46). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1793-8_2
6. Laird, A. K. (1964). Dynamics of tumor growth. *Br. J. Cancer*, *18*, 490–502. <https://doi.org/10.1038/bjc.1964.55>
7. Steel, G. G. (1977). *Growth kinetics of tumours: Cell population kinetics in relation to the growth and treatment of cancer*. Clarendon Press.
8. Benzekry, S., Lamont, C., Beheshti, A., Tracz, A., Ebos, J., Hlatky, L., & Hahnfeldt, P. (2014). Classical mathematical models for description and prediction of experimental tumor growth. *PLoS Comput. Biol.*, *10*, e1003800. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1003800>
9. Byrne, H. M., & Drasdo, D. (2009). Individual-based and continuum models of growing cell populations: A comparison. *J. Math. Biol.*, *58*, 657–687. <https://doi.org/10.1007/s00285-008-0212-0>
10. Anderson, A. R. A. (2005). A hybrid mathematical model of solid tumour invasion: The importance of cell adhesion. *IMA J. Math. Med. Biol.*, *22*, 163–186. <https://doi.org/10.1093/imammb/dqi005>
11. Tsoularis, A., & Wallace, J. (2002). Analysis of logistic growth models. *Math. Biosci.*, *179*, 21–55. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00096-2](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00096-2)
12. Gerlee, P. (2013). The model muddle: In search of tumor growth laws. *Cancer Res.*, *73*, 2407–2411. <https://doi.org/10.1158/0008-5472.CAN-12-4355>
13. Tracqui, P. (2009). Biophysical models of tumour growth. *Rep. Prog. Phys.*, *72*, 056701. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/72/5/056701>
14. Ward, J. P., & King, J. R. (1999). Mathematical modelling of avascular tumour growth II: Modelling growth saturation. *IMA J. Math. Med. Biol.*, *16*, 171–211. <https://doi.org/10.1093/imammb/16.2.171>
15. Enderling, H., & Chaplain, M. A. J. (2014). Mathematical modelling of tumour growth and treatment. *Curr. Pharm. Des.*, *20*, 4934–4940. <https://doi.org/10.2174/1381612819666131125150434>

16. Simeoni, M., Magni, P., Cammia, C., De Nicolao, G., Croci, V., Pesenti, E., Germani, M., Poggese, I., & Rocchetti, M. (2004). Predictive pharmacokinetic-pharmacodynamic modeling of tumor growth kinetics in xenograft models after administration of anticancer agents. *Cancer Res.*, *64*, 1094–1101. <https://doi.org/10.1158/0008-5472.can-03-2524>
17. Norton, L. (1988). A Gompertzian model of human breast cancer growth. *Cancer Res.*, *48*, 7067–7071.
18. Dunn, G. P., Bruce, A. T., Ikeda, H., Old, L. J., & Schreiber, R. D. (2002). Cancer immunoediting: From immunosurveillance to tumor escape. *Nat. Immunol.*, *3*, 991–998. <https://doi.org/10.1038/ni1102-991>
19. Hanahan, D., & Weinberg, R. A. (2011). Hallmarks of cancer: The next generation. *Cell*, *144*, 646–674. <https://doi.org/10.1016/j.cell.2011.02.013>
20. Schreiber, R. D., Old, L. J., & Smyth, M. J. (2011). Cancer immunoediting: Integrating immunity's roles in cancer suppression and promotion. *Science*, *331*, 1565–1570. <https://doi.org/10.1126/science.1203486>
21. Kirschner, D., & Panetta, J. C. (1998). Modeling immunotherapy of the tumor-immune interaction. *J. Math. Biol.*, *37*, 235–252. <https://doi.org/10.1007/s002850050127>
22. de Pillis, L. G., Radunskaya, A. E., & Wiseman, C. L. (2005). A validated mathematical model of cell-mediated immune response to tumor growth. *Cancer Res.*, *65*, 7950–7958. <https://doi.org/10.1158/0008-5472.CAN-05-0564>
23. Eftimie, R., Bramson, J. L., & Earn, D. J. D. (2011). Interactions between the immune system and cancer: A brief review of non-spatial mathematical models. *Bull. Math. Biol.*, *73*, 2–32. <https://doi.org/10.1007/s11538-010-9526-3>

Рапчинський О., Кічмаренко О., Стехун А.

ДИСКРЕТНІ МОДЕЛІ КЛІТИННИХ АВТОМАТІВ ДИНАМІКИ РОСТУ ПУХЛИНИ ТА ІМУННОГО НАГЛЯДУ

Резюме

У статті досліджено дискретні моделі клітинних автоматів для опису динаміки росту пухлини та імунного нагляду. Розглянуто три моделі зростаючої складності: модель неконтрольованої проліферації, яка відтворює експоненціальне розширення пухлинної популяції; модель проліферації з просторовими обмеженнями, що демонструє логістичне насичення, зумовлене обмеженістю мікрооточення; а також модель імунної відповіді, яка враховує взаємодію ефекторних клітин із пухлинними клітинами та хемотаксис, опосередкований цитокінами. Моделі реалізовано на двовимірних ґратках із використанням стохастичних правил оновлення, параметризованих біологічно обґрунтованими швидкостями поділу та загибелі клітин. Чисельні експерименти показують, що модель неконтрольованого росту відтворює класичну експоненціальну динаміку, тоді як модель із просторовими обмеженнями приводить до S-подібних кривих росту, узгоджених із динамікою Ферхюльста. Модель імунної відповіді дозволяє моделювати взаємодію пухлинних клітин, ефекторних лімфоцитів і цитокинових сигналів, виявляючи складні біологічні режими, які важко описати суто аналітичними методами. Аналіз чутливості параметрів виявляє критичні режими секреції цитокінів та рекрутування ефекторних клітин, що визначають перехід між стримуванням пухлини та її імунним уникненням. *Ключові слова:* клітинні автомати, ріст пухлини, моделювання, імунна відповідь, хемотаксис.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Murray, J. D. (2002). *Mathematical biology I: An introduction* (3rd ed.). Springer.
2. Kansal, A. R., Torquato, E. C., Chiocca, S., & Deisboeck, T. S. (2000). Simulated brain tumour growth dynamics using a three-dimensional cellular automaton. *J. Theor. Biol.*, 203, 367–382. <https://doi.org/10.1006/jtbi.2000.2000>
3. Verhulst, P. F. (1845). Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouv. Mém. Acad. Roy. Sci. Belles-Lett. Brux.*, 18, 1–41.
4. Kuznetsov, V. A., Makalkin, I. A., Taylor, M. A., & Perelson, A. S. (1994). Nonlinear dynamics of immunogenic tumors: Parameter estimation and global bifurcation analysis. *Bull. Math. Biol.*, 56, 295–321. <https://doi.org/10.1007/BF02460644>
5. Cooper, A. K., & Kim, P. S. (2014). A cellular automata and a partial differential equation model of tumor-immune dynamics and chemotaxis. In *Mathematical models of tumor-immune system dynamics* (pp. 21–46). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1793-8_2
6. Laird, A. K. (1964). Dynamics of tumor growth. *Br. J. Cancer*, 18, 490–502. <https://doi.org/10.1038/bjc.1964.55>

7. Steel, G. G. (1977). *Growth kinetics of tumours: Cell population kinetics in relation to the growth and treatment of cancer*. Clarendon Press.
8. Benzekry, S., Lamont, C., Beheshti, A., Tracz, A., Ebos, J., Hlatky, L., & Hahnfeldt, P. (2014). Classical mathematical models for description and prediction of experimental tumor growth. *PLoS Comput. Biol.*, *10*, e1003800. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1003800>
9. Byrne, H. M., & Drasdo, D. (2009). Individual-based and continuum models of growing cell populations: A comparison. *J. Math. Biol.*, *58*, 657–687. <https://doi.org/10.1007/s00285-008-0212-0>
10. Anderson, A. R. A. (2005). A hybrid mathematical model of solid tumour invasion: The importance of cell adhesion. *IMA J. Math. Med. Biol.*, *22*, 163–186. <https://doi.org/10.1093/imammb/dqi005>
11. Tsoularis, A., & Wallace, J. (2002). Analysis of logistic growth models. *Math. Biosci.*, *179*, 21–55. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00096-2](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00096-2)
12. Gerlee, P. (2013). The model muddle: In search of tumor growth laws. *Cancer Res.*, *73*, 2407–2411. <https://doi.org/10.1158/0008-5472.CAN-12-4355>
13. Tracqui, P. (2009). Biophysical models of tumour growth. *Rep. Prog. Phys.*, *72*, 056701. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/72/5/056701>
14. Ward, J. P., & King, J. R. (1999). Mathematical modelling of avascular tumour growth II: Modelling growth saturation. *IMA J. Math. Med. Biol.*, *16*, 171–211. <https://doi.org/10.1093/imammb/16.2.171>
15. Enderling, H., & Chaplain, M. A. J. (2014). Mathematical modelling of tumour growth and treatment. *Curr. Pharm. Des.*, *20*, 4934–4940. <https://doi.org/10.2174/1381612819666131125150434>
16. Simeoni, M., Magni, P., Cammia, C., De Nicolao, G., Croci, V., Pesenti, E., Germani, M., Poggesi, I., & Rocchetti, M. (2004). Predictive pharmacokinetic–pharmacodynamic modeling of tumor growth kinetics in xenograft models after administration of anticancer agents. *Cancer Res.*, *64*, 1094–1101. <https://doi.org/10.1158/0008-5472.can-03-2524>
17. Norton, L. (1988). A Gompertzian model of human breast cancer growth. *Cancer Res.*, *48*, 7067–7071.
18. Dunn, G. P., Bruce, A. T., Ikeda, H., Old, L. J., & Schreiber, R. D. (2002). Cancer immunoediting: From immunosurveillance to tumor escape. *Nat. Immunol.*, *3*, 991–998. <https://doi.org/10.1038/ni1102-991>
19. Hanahan, D., & Weinberg, R. A. (2011). Hallmarks of cancer: The next generation. *Cell*, *144*, 646–674. <https://doi.org/10.1016/j.cell.2011.02.013>
20. Schreiber, R. D., Old, L. J., & Smyth, M. J. (2011). Cancer immunoediting: Integrating immunity’s roles in cancer suppression and promotion. *Science*, *331*, 1565–1570. <https://doi.org/10.1126/science.1203486>
21. Kirschner, D., & Panetta, J. C. (1998). Modeling immunotherapy of the tumor–immune interaction. *J. Math. Biol.*, *37*, 235–252. <https://doi.org/10.1007/s002850050127>

-
22. de Pillis, L. G., Radunskaya, A. E., & Wiseman, C. L. (2005). A validated mathematical model of cell-mediated immune response to tumor growth. *Cancer Res.*, 65, 7950–7958. <https://doi.org/10.1158/0008-5472.CAN-05-0564>
 23. Eftimie, R., Bramson, J. L., & Earn, D. J. D. (2011). Interactions between the immune system and cancer: A brief review of non-spatial mathematical models. *Bull. Math. Biol.*, 73, 2–32. <https://doi.org/10.1007/s11538-010-9526-3>

УДК 517.938

М. С. Таїрова, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

кафедра оптимального управління та економічної кібернетики

вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна

e-mail: mason@onu.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0001-5609-2552>

ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНИХ МНОЖИН ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ З H-ОПУКЛИМИ ФАЗОВИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

У статті досліджується задача побудови оптимальних множин практичної стійкості лінійних однорідних і неоднорідних дискретних систем за наявності H -опуклих фазових обмежень. Подібні задачі виникають у математичному моделюванні динамічних процесів та в задачах керування системами з обмеженнями на фазові змінні. Для досліджуваних систем отримано аналітичні представлення функції Мінковського та оберненої функції Мінковського оптимальної множини практичної стійкості. Встановлено умови побудови максимальної множини початкових станів, для яких траєкторії системи не виходять за межі заданих фазових обмежень протягом скінченного проміжку часу. Розглянуто випадок фазових обмежень, заданих у вигляді багатокутників та політопів, що є важливим підкласом H -опуклих множин. Доведено теореми про H -опуклість оптимальних множин практичної стійкості та практичної напівстійкості. Отримані результати можуть бути використані для аналізу дискретних динамічних систем та розробки алгоритмів перевірки практичної стійкості за наявності фазових обмежень.

MSC: 39A30, 93D20, 52A27.

Ключові слова: H -опуклість, практична стійкість, практична напівстійкість, дискретні системи, оптимальна множина практичної стійкості, функція Мінковського, обернена функція Мінковського, фазові обмеження.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1\(47\).364556](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1(47).364556)

Стаття надійшла до редакції: 05.05.2026. Затверджена до друку: 15.05.2026.

Опублікована: 15.09.2026.



Ця стаття поширюється на умовах ліцензії Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).



Вступ

Обмеження на фазові змінні є характерною особливістю багатьох математичних моделей реальних динамічних систем. Такі обмеження виникають у задачах керування технічними, економічними та біологічними системами і відображають фізичні, технологічні або ресурсні межі функціонування об'єкта. Наявність фазових обмежень істотно впливає на поведінку розв'язків та потребує спеціальних методів дослідження, оскільки класичні підходи до аналізу стійкості не завжди забезпечують виконання умов допустимості траєкторій.

Одним із ефективних підходів до дослідження систем із фазовими обмеженнями є теорія практичної стійкості [1; 9]. Використання ідей другого методу Ляпунова дозволяє отримувати критерії практичної стійкості для широких класів диференціальних та дискретних систем [1; 3–6; 9]. У межах цього підходу важливе значення має задача побудови множини початкових умов, для яких траєкторії системи залишаються в заданій допустимій області протягом усього часу спостереження [7–9]. Найбільшу за включенням множину таких початкових умов називають оптимальною множиною практичної стійкості. Її визначення є складною обчислювальною задачею, складність якої суттєво зростає зі збільшенням розмірності фазового простору.

Для лінійних систем з опуклими фазовими обмеженнями оптимальні множини практичної стійкості є опуклими компактами, що створює можливість застосування методів опуклого аналізу. Зокрема, для їх опису можуть бути використані функція Мінковського, обернена функція Мінковського та опорна функція опуклої множини.

У даній роботі розглядаються задачі практичної стійкості лінійних однорідних та неоднорідних дискретних систем за умови H -опуклих фазових обмежень. До класу H -опуклих множин належать, зокрема, опуклі політопи та багатокутники, які широко застосовуються при математичному моделюванні та в задачах керування [11]. Метою роботи є побудова оптимальних множин практичної стійкості та практичної напівстійкості для зазначеного класу систем. Для досягнення цієї мети отримано аналітичні представлення функції Мінковського та оберненої функції Мінковського оптимальних множин, а також доведено теореми про їх H -опуклість.

В статті використовуються такі позначення: $\mathbb{R}^n$ – n -вимірний евклідов простір зі скалярним добутком $\langle x, y \rangle$ і нормою $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$; $\overline{k, m} = \{k, k+1, \dots, m\}$; M^T – транспонування матриці (вектора) M ; ∂A , $\text{int} A$ – границя і внутрішність множини $A \subset \mathbb{R}^n$; $c(A, \psi) = \sup_{x \in A} \langle x, \psi \rangle$ – опорна функція множини $A \subset \mathbb{R}^n$, $\psi \in \mathbb{R}^n$ [12; 13]; $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

1. Основні означення.

Розглянемо лінійну дискретну систему вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + b(t), \quad (1)$$

де $A(t)$ – невироджена матриця розмірності $n \times n$, $b(t)$ – вектор розмірності n , $t \in \overline{0, N-1}$. Позначимо як $x(t, x_0)$ розв’язок системи (1) з умовою Коші $x(0) = x_0$, $t \in \overline{0, N}$. Запишемо загальний розв’язок (1) у вигляді

$$x(t) = \Theta(t)x_0 + y(t), t \in \overline{1, N},$$

де $\Theta(t, s) = A(t-1)A(t-2) \dots A(s) = \prod_{s \leq i \leq t-1} A(i)$ – невироджена матриця, $\Theta(t) = \Theta(t, 0)$, $y(t) = \sum_{0 \leq i \leq t-1} \Theta(t, i+1)b(i)$, $\Theta(s, s) = I$ – одинична матриця, $s \in \overline{1, t}$, $t \in \overline{1, N}$, зокрема $\Theta(0) = I$, $y(0) = 0$.

Фазові обмеження задають багатозначним відображенням з $H(t)$ -опуклими компактними значеннями $\Phi : \overline{0, N} \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $t \in \overline{0, N}$ [11]. Це означає, що

$$\Phi(t) = \bigcap_{\psi \in H(t)} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi)\}. \quad (2)$$

Тут $H(t)$ є замкнутою підмножиною одиничної сфери S . Розв’язок $y(t) = x(t, 0)$ системи (1), який відповідає нульовій початковій умові, будемо називати незбуреним, тобто таким, який досліджується на відповідний вид практичної стійкості. При цьому $y(t) \in \text{int} \Phi(t)$, $t \in \overline{0, N}$.

Нехай $G_0 \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in G_0$. Наведемо такі означення [1; 7; 9].

Означення 1. Незбурений розв’язок системи (1) називають $\{G_0, \Phi(t), 0, N\}$ -стійким, якщо для довільного $x_0 \in G_0$ розв’язок

$$x(t, x_0) \in \Phi(t)$$

для всіх $t \in \overline{0, N}$.

Означення 2. Множина $G_* \subset \mathbb{R}^n$ називається максимальною множиною практичної стійкості, яка визначається фазовими обмеженнями $\Phi(t) \subset \mathbb{R}^n$, $t \in \overline{0, N}$, якщо:

1. незбурений розв'язок системи (1) $\in \{G_*, \Phi(t), 0, N\}$ -стійким;
2. множина $G_0 \subset \mathbb{R}^n$ міститься в G_* , якщо має місце $\{G_0, \Phi(t), 0, N\}$ -стійкість незбуреного розв'язку системи (1).

Множина G_* є опуклим компактом, $0 \in \text{int}G_*$ [7; 9].

2. Випадок однорідної системи.

Розглянемо систему (1) за умови $b(t) = 0$, $t \in \overline{0, N-1}$. Тоді $y(t) = 0$, $t \in \overline{0, N}$ і $0 \in \text{int}\Phi(t)$, $t \in \overline{0, N}$.

Теорема 1. *Функція Мінковського множини G_* має вигляд*

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}, \psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Тоді

$$G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : m(x_0) \leq 1\}, \quad \partial G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : m(x_0) = 1\},$$

$$\text{int}G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : m(x_0) < 1\}.$$

Доведення.

За означенням функції Мінковського

$$m(x_0) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{x_0}{\lambda} \in G_* \right\},$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\frac{x_0}{\lambda} \in G_*$, то $\Theta(t)\frac{x_0}{\lambda} \in \Phi(t)$ для всіх $t \in \overline{0, N}$. За властивостями опорних функцій маємо

$$\left\langle \Theta(t)\frac{x_0}{\lambda}, \psi \right\rangle \leq c(\Phi(t), \psi),$$

для всіх $\psi \in S$ та $t \in \overline{0, N}$.

Враховуючи умову $H(t)$ -опуклості $\Phi(t)$, а також властивості опорної функції [12; 13], одержуємо

$$\left\langle \Theta(t)\frac{x_0}{\lambda}, \psi \right\rangle \leq c(\Phi(t), \psi), \quad \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}. \quad (4)$$

Оскільки $0 \in \text{int}\Phi(t)$, то $c(\Phi(t), \psi) > 0$ для всіх $\psi \in H(t)$. Тому з (4) маємо

$$\lambda \geq \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)}, \quad \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}.$$

Звідси

$$\lambda \geq \max_{t \in \overline{0, N}} \max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)}.$$

Тоді за означенням функції Мінковського

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}, \psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Обґрунтуємо другу частину теореми. Точка $x_0 \in \partial G_*$ тоді і тільки тоді, коли [7; 9]

$$\Theta(t)x_0 \in \Phi(t), \quad t \in \overline{0, N}$$

і знайдеться такий момент $s_0 \in \overline{0, N}$, що

$$\Theta(s_0)x_0 \in \partial\Phi(s_0).$$

Звідси з властивостей опорної функції випливає, що для будь-яких $\psi \in H(t)$, $t \in \overline{0, N}$

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi),$$

але існує вектор $\psi_0 \in H(t)$ такий, що

$$\langle \Theta(s_0)x_0, \psi_0 \rangle = c(\Phi(s_0), \psi_0).$$

Тому при $\psi \in H(t)$, $t \in \overline{0, N}$ має місце нерівність

$$\frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)} \leq 1,$$

але

$$\frac{\langle \Theta(s_0)x_0, \psi_0 \rangle}{c(\Phi(s_0), \psi_0)} = 1.$$

Остаточно одержуємо

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}} \max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)} = 1.$$

Точка $x_0 \in \text{int}G_*$ тоді і тільки тоді, коли виконується [7; 9]

$$\Theta(t)x_0 \in \text{int}\Phi(t), \quad t \in \overline{0, N}.$$

З властивостей опорної функції випливає, що для будь-яких $\psi \in H(t)$, $t \in \overline{0, N}$ маємо

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle < c(\Phi(t), \psi),$$

як наслідок,

$$\frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)} < 1.$$

Звідси, враховуючи неперервність опорної функції маємо

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}} \max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)} < 1.$$

Теорема 2. *Обернена функція Мінковського множини G_* має вигляд*

$$d(x_0) = \min_{t \in \overline{0, N}, \psi \in P(t)} \frac{c(\Phi(t), \psi)}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$P(t) = \{\psi \in H(t) : \langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle > 0\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} G_* &= \{x_0 \in \mathbb{R}^n : d(x_0) \geq 1\} = \\ &= \cup_{e \in S} L(e), \quad L(e) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = ke, k \in [0, d(e)]\} = [0, d(e)]e. \end{aligned}$$

Доведення. Запишемо обернену функцію Мінковського множини G_*

$$d(x_0) = \sup \{\lambda > 0 : \lambda x_0 \in G_*\},$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$. Точка $\lambda x_0 \in G_*$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda \Theta(t)x_0 \in \Phi(t), \quad t \in \overline{0, N}.$$

З властивостей опорної функції

$$\langle \lambda \Theta(t)x_0, \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi), \quad \psi \in S, \quad t \in \overline{0, N}.$$

Звідси

$$\lambda \leq \frac{c(\Phi(t), \psi)}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle},$$

для всіх $\psi \in S$ за умови $\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle > 0$.

Остаточно

$$d(x_0) = \min_{t \in \overline{0, N}, \psi \in P(t)} \frac{c(\Phi(t), \psi)}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}.$$

Тут $P(t) = \{\psi \in H(t) : \langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle > 0\}$.

Наслідок 1. Нехай фазові обмеження мають вигляд

$$\Phi(t) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : |x_k| \leq r_k, k = 1, 2, \dots, n\},$$

де $r_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тоді функція Мінковського множини G_* має вигляд

$$m(x_0) = \max_{t \in [0, N]} \max_{k=1,2,\dots,n} \frac{|(\Theta(t)x_0)_k|}{r_k},$$

а обернена функція Мінковського множини G_* записується так

$$d(x_0) = \min_{t \in [0, N]} \min_{k \in I(t)} \frac{r_k}{|(\Theta(t)x_0)_k|}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$I(t) = \{k = 1, 2, \dots, n : (\Theta(t)x_0)_k \neq 0\}.$$

Доведення. Розглянемо

$$H(t) = \{e_{(1)}, e_{(2)}, \dots, e_{(n)}, -e_{(1)}, -e_{(2)}, \dots, -e_{(n)}\},$$

де $e_{(1)}, e_{(2)}, \dots, e_{(n)}$ – стандартний ортонормований базис в $\mathbb{R}^n$. Тоді

$$\Phi(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e_{(k)} \rangle \leq r_k, \langle x, -e_{(k)} \rangle \leq r_k, k = 1, 2, \dots, n\}.$$

За означенням опорної функції [12; 13]

$$c(\Phi(t), e_{(k)}) = c(\Phi(t), -e_{(k)}) = r_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \cap_{k=1,2,\dots,n} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e_{(k)} \rangle \leq c(\Phi(t), e_{(k)}), \langle x, -e_{(k)} \rangle \leq c(\Phi(t), -e_{(k)})\} = \\ &= \cap_{\psi \in H(t)} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi)\}. \end{aligned}$$

Робимо висновок, що множина $\Phi(t)$ є $H(t)$ -опуклою [11]. Помітимо, що

$$\begin{aligned} \max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)} &= \max_{k=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{\langle \Theta(t)x_0, e_{(k)} \rangle}{r_k}, \frac{\langle \Theta(t)x_0, -e_{(k)} \rangle}{r_k} \right\} = \\ &= \max_{k=1,2,\dots,n} \frac{|(\Theta(t)x_0)_k|}{r_k}. \end{aligned}$$

Аналогічно показуємо, що

$$\min_{\psi \in P(t)} \frac{c(\Phi(t), \psi)}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle} = \min_{k \in I(t)} \frac{r_k}{|(\Theta(t)x_0)_k|}.$$

За теорем 1, 2 випливає твердження наслідку.

Наслідок 2. Нехай фазові обмеження мають вигляд

$$\Phi(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle h_{(k)}, x \rangle \leq r_k, k = 1, 2, \dots, M\},$$

де $h_{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $\|h_{(k)}\| = 1$, $r_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, M$. Тоді функція Мінковського множини G_* має вигляд

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}} \max_{k=1,2,\dots,M} \frac{\langle \Theta(t)x_0, h_{(k)} \rangle}{r_k},$$

а обернена функція Мінковського множини G_* записується так

$$d(x_0) = \min_{t \in \overline{0, N}} \min_{k \in I(t)} \frac{r_k}{\langle \Theta(t)x_0, h_{(k)} \rangle}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$I(t) = \{k = 1, 2, \dots, M : \langle \Theta(t)x_0, h_{(k)} \rangle > 0\}.$$

Доведення. Розглянемо

$$H(t) = \{h_{(1)}, h_{(2)}, \dots, h_{(M)}\}.$$

Тоді за означенням опорної функції [12; 13]

$$c(\Phi(t), h_{(k)}) = r_k, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \cap_{k=1,2,\dots,M} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, h_{(k)} \rangle \leq c(\Phi(t), h_{(k)})\} = \\ &= \cap_{\psi \in H(t)} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi)\}. \end{aligned}$$

Робимо висновок, що множина $\Phi(t)$ є $H(t)$ -опуклою [11]. Далі

$$\max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)} = \max_{k=1,2,\dots,M} \frac{\langle \Theta(t)x_0, h_{(k)} \rangle}{r_k}.$$

Аналогічно показуємо, що

$$\min_{\psi \in P(t)} \frac{c(\Phi(t), \psi)}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle} = \min_{k \in I(t)} \frac{r_k}{\langle \Theta(t)x_0, h_{(k)} \rangle}.$$

З теорем 1, 2 випливає твердження наслідку.

Теорема 3. Множина G_* є H -опуклим компактом, де

$$H = \cup_{t \in \overline{0, N}} R(t),$$

$$R(t) = \left\{ \xi \in S : \xi = \frac{\Theta^T(t)\psi}{\|\Theta^T(t)\psi\|}, \psi \in H(t) \right\}, t \in \overline{0, N}.$$

Доведення. Виберемо довільну точку $x_0 \in G_*$. За означенням 2 маємо

$$x(t) = \Theta(t)x_0 \in \Phi(t), t \in \overline{0, N}.$$

Тоді за умовою $H(t)$ -опуклості $\Phi(t)$, а також властивості опорної функції [12; 13]

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle = \langle x_0, \Theta^T(t)\psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi), \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}.$$

Зафіксуємо $t \in \overline{0, N}$. Оскільки фундаментальна матриця $\Theta(t)$ є невиродженою, то для довільного $\psi \in H(t)$ знайдеться таке $p \in \mathbb{R}^n$, що $p = \Theta^T(t)\psi$ і

$$\langle x_0, p \rangle \leq c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}p).$$

Позначимо $\xi = \frac{p}{\|p\|}$. Тоді, враховуючи додатну однорідність опорної функції [12]

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi).$$

При цьому

$$\xi = \frac{\Theta^T(t)\psi}{\|\Theta^T(t)\psi\|} \in R(t) \subseteq S.$$

Оскільки $t \in \overline{0, N}$ є довільною точкою, то

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq \min_{t \in \overline{0, N}} c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi) = F(\xi),$$

де

$$\xi \in H = \cup_{t \in \overline{0, N}} R(t) \subseteq S.$$

Отже,

$$G_* \subseteq \cap_{\xi \in H} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi \rangle \leq F(\xi)\}.$$

Разом з тим, якщо для деякої точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ має місце

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq F(\xi), \xi \in H,$$

то для всіх $t \in \overline{0, N}$ виконується

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi)$$

для всіх $\xi \in H$, зокрема і для $\xi \in R(t)$. Підставляємо в останній вираз

$$\xi = \frac{\Theta^T(t)\psi}{\|\Theta^T(t)\psi\|},$$

одержуємо

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi), \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}.$$

Це означає, що

$$x(t) = \Theta(t)x_0 \in \Phi(t), t \in \overline{0, N}.$$

За означенням 2 маємо $x_0 \in G_*$. Отже,

$$G_* = \cap_{\xi \in H} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi \rangle \leq F(\xi)\}.$$

З означення опорної функції випливає, що при фіксованих $\xi \in H$ значення $c(G_*, \xi)$ співпадає з $F(\xi)$, разом з тим $c(G_*, \xi) = \overline{co}F(\xi)$, $\xi \in S$, де $\overline{co}F(\psi)$ – опукле замикання функції $F(\psi)$ [9].

3. Випадок неоднорідної лінійної дискретної системи.

Розглянемо систему (1) за умови, що існує $t \in \overline{0, N-1}$, для якого $b(t) \neq 0$. Тоді незбурений розв'язок $y(t)$, $t \in \overline{0, N}$ системи (1) не дорівнює тотожно нулеві. У цьому випадку умову $y(t) \in \text{int}\Phi(t)$, $t \in \overline{0, N}$ можемо записати так

$$c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle > 0, \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}.$$

Теорема 4. Функція Мінковського множини G_* має вигляд

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}, \psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Тоді

$$G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : m(x_0) \leq 1\}, \quad \partial G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : m(x_0) = 1\},$$

$$\text{int}G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : m(x_0) < 1\}.$$

Доведення.

За означенням функції Мінковського

$$m(x_0) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{x_0}{\lambda} \in G_* \right\},$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\frac{x_0}{\lambda} \in G_*$, то $\Theta(t)\frac{x_0}{\lambda} \in \Phi(t)$ для всіх $t \in \overline{0, N}$. За властивостями опорних функцій маємо

$$\left\langle \Theta(t)\frac{x_0}{\lambda}, \psi \right\rangle + \langle y(t), \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi),$$

для всіх $\psi \in S$ та $t \in \overline{0, N}$.

Враховуючи умову $H(t)$ -опуклості $\Phi(t)$, а також властивості опорної функції [12; 13], одержуємо

$$\left\langle \Theta(t) \frac{x_0}{\lambda}, \psi \right\rangle \leq c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle, \quad \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}. \quad (6)$$

Для всіх $\psi \in H(t)$, враховуючи що $c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle > 0$ з (6) маємо

$$\lambda \geq \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle}, \quad \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}.$$

Звідси

$$\lambda \geq \max_{t \in \overline{0, N}} \max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle}.$$

Тоді за означенням функції Мінковського

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}, \psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Обґрунтуємо другу частину теореми. Точка $x_0 \in \partial G_*$ тоді і тільки тоді, коли [7; 9]

$$\Theta(t)x_0 + y(t) \in \Phi(t), t \in \overline{0, N}$$

і знайдеться такий момент $s_0 \in \overline{0, N}$, що

$$\Theta(s_0)x_0 + y(s_0) \in \partial\Phi(s_0).$$

Звідси з властивостей опорної функції випливає, що для будь-яких $\psi \in H(t)$, $t \in \overline{0, N}$

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle + \langle y(t), \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi),$$

але існує вектор $\psi_0 \in H(t)$ такий, що

$$\langle \Theta(s_0)x_0, \psi_0 \rangle + \langle y(s_0), \psi_0 \rangle = c(\Phi(s_0), \psi_0),$$

$$\langle \Theta(s_0)x_0, \psi_0 \rangle = c(\Phi(s_0), \psi_0) - \langle y(s_0), \psi_0 \rangle.$$

Тому при $\psi \in H(t)$, $t \in \overline{0, N}$ має місце нерівність

$$\frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle} \leq 1,$$

але

$$\frac{\langle \Theta(s_0)x_0, \psi_0 \rangle}{c(\Phi(s_0), \psi_0) - \langle y(s_0), \psi_0 \rangle} = 1.$$

Остаточно одержуємо

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}} \max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle} = 1.$$

Точка $x_0 \in \text{int}G_*$ тоді і тільки тоді, коли виконується [7; 9]

$$\Theta(t)x_0 + y(t) \in \text{int}\Phi(t), \quad t \in \overline{0, N}.$$

З властивостей опорної функції випливає, що для будь-яких $\psi \in H(t)$, $t \in \overline{0, N}$ маємо

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle + \langle y(t), \psi \rangle < c(\Phi(t), \psi),$$

як наслідок,

$$\frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle} < 1.$$

Звідси, враховуючи неперервність опорної функції маємо

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}} \max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle} < 1.$$

Теорема 5. *Обернена функція Мінковського множини G_* має вигляд*

$$d(x_0) = \min_{t \in \overline{0, N}, \psi \in P(t)} \frac{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$P(t) = \{\psi \in H(t) : \langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle > 0\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} G_* &= \{x_0 \in \mathbb{R}^n : d(x_0) \geq 1\} = \\ &= \cup_{e \in S} L(e), \quad L(e) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = ke, k \in [0, d(e)]\} = [0, d(e)]e. \end{aligned}$$

Доведення. Запишемо обернену функцію Мінковського множини G_*

$$d(x_0) = \sup \{\lambda > 0 : \lambda x_0 \in G_*\},$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$. Точка $\lambda x_0 \in G_*$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda \Theta(t)x_0 + y(t) \in \Phi(t), \quad t \in \overline{0, N}.$$

З властивостей опорної функції

$$\langle \lambda \Theta(t)x_0, \psi \rangle + \langle y(t), \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi), \quad \psi \in S, \quad t \in \overline{0, N}.$$

Звідси

$$\lambda \leq \frac{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle},$$

для всіх $\psi \in S$ за умови $\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle > 0$.

Остаточно

$$d(x_0) = \min_{t \in \overline{0, N}, \psi \in P(t)} \frac{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}.$$

Теорема 6. Множина G_* є H -опуклим компактом, де

$$H = \cup_{t \in \overline{0, N}} R(t),$$

$$R(t) = \left\{ \xi \in S : \xi = \frac{\Theta^T(t)\psi}{\|\Theta^T(t)\psi\|}, \psi \in H(t) \right\}, t \in \overline{0, N}.$$

Доведення. Виберемо довільну точку $x_0 \in G_*$. За означенням 2 маємо

$$x(t) = \Theta(t)x_0 + y(t) \in \Phi(t), t \in \overline{0, N}.$$

Тоді за умовою $H(t)$ -опуклості $\Phi(t)$, а також властивості опорної функції [12; 13]

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle = \langle x_0, \Theta^T(t)\psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle, \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}.$$

Зафіксуємо $t \in \overline{0, N}$. Оскільки фундаментальна матриця $\Theta(t)$ є невиродженою, то для довільного $\psi \in H(t)$ знайдеться таке $p \in \mathbb{R}^n$, що $p = \Theta^T(t)\psi$ і

$$\langle x_0, p \rangle \leq c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}p) - \langle y(t), (\Theta^T(t))^{-1}p \rangle.$$

Позначимо $\xi = \frac{p}{\|p\|}$. Тоді, враховуючи додатну однорідність опорної функції [12].

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi) - \langle y(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi \rangle.$$

При цьому

$$\xi = \frac{\Theta^T(t)\psi}{\|\Theta^T(t)\psi\|} \in R(t) \subseteq S.$$

Оскільки $t \in \overline{0, N}$ є довільною точкою, то

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq \min_{t \in \overline{0, N}} (c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi) - \langle y(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi \rangle) = F(\xi),$$

де

$$\xi \in H = \cup_{t \in \overline{0, N}} R(t) \subseteq S.$$

Отже,

$$G_* \subseteq \cap_{\xi \in H} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi \rangle \leq F(\xi)\}.$$

Разом з тим, якщо для деякої точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ має місце

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq F(\xi), \xi \in H,$$

то для всіх $t \in \overline{0, N}$ виконується

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi) - \langle y(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi \rangle$$

для всіх $\xi \in H$, зокрема і для $\xi \in R(t)$. Підставляємо в останній вираз

$$\xi = \frac{\Theta^T(t)\psi}{\|\Theta^T(t)\psi\|},$$

одержуємо

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle, \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}.$$

Це означає, що

$$x(t) = \Theta(t)x_0 + y(t) \in \Phi(t), t \in \overline{0, N}.$$

За означенням 2 маємо $x_0 \in G_*$. Отже,

$$G_* = \cap_{\xi \in H} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi \rangle \leq F(\xi)\}.$$

З означення опорної функції випливає, що при фіксованих $\xi \in H$ значення $c(G_*, \xi)$ співпадає з $F(\xi)$, разом з тим $c(G_*, \xi) = \overline{co}F(\xi)$, $\xi \in S$, де $\overline{co}F(\psi)$ – опукле замикання функції $F(\psi)$ [9].

Висновки

Стаття висвітлює побудову максимальної множини практичної стійкості лінійної дискретної системи з H -опуклими фазовими обмеженнями. Знайдено функцію Мінковського і обернену функцію Мінковського таких множин. Як наслідок, наведено випадок фазових обмежень у формі багатокутників. Обґрунтовано теорему про H -опуклість оптимальної множини практичної стійкості.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гаращенко, Ф. Г., & Бублик, Б. М. (2000). Розвиток методів практичної стійкості та їх використання для аналізу, оцінки і оптимізації динаміки пучків. *Вісник Київського університету. Кібернетика*, (1), 4–17.
2. LaSalle, J., & Lefschetz, S. (1961). *Stability by Liapunov's direct method with applications*. Academic Press.
3. Bashnyakov, O. M., Pichkur, V. V., & Khitko, I. V. (2012). Conditions of practical stability of discrete systems and Lyapunov functions. *System Research and Information Technologies*, (3), 125–133.
4. Grippo, L., & Lampariello, F. (1976). Practical stability of discrete-time systems. *Journal of the Franklin Institute*, 302(3), 213–224.
5. Lakshmikantham, V., Leela, S., & Martynyuk, A. A. (1990). *Practical stability of nonlinear systems*. World Scientific.
6. Pichkur, V. V. (2017). On practical stability of differential inclusions using Lyapunov functions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, 22(5), 1977–1986.
7. Башняков, О. М., Гаращенко, Ф. Г., & Пічкур, В. В. (2008). *Практична стійкість, оцінки та оптимізація*. Київський університет.
8. Garashchenko, F. G., & Pichkur, V. V. (1999). On optimal sets of practical stability. *Journal of Automation and Information Sciences*, 31(5), 1–12.
9. Пічкур, В. В., Капустян, О. В., & Собчук, В. В. (2023). *Стійкість та аттрактори еволюційних рівнянь*. ВПЦ «Київський університет».
10. Pichkur, V. V. (2019). Maximum sets of initial conditions in practical stability and stabilization of differential inclusions. In *Modern mathematics and mechanics* (pp. 397–410). Springer.
11. Ostapenko, V. (2008). Convexity in differential games. In *Pareto optimality, game theory and equilibria* (pp. 307–348). Springer.
12. Rockafellar, R. T. (1997). *Convex analysis*. Princeton University Press.
13. Chikrii, A. A. (2013). *Conflict-controlled processes*. Springer.
14. Bashnyakov, A. N., Pichkur, V. V., & Khitko, I. V. (2011). On maximal initial data set in problems of practical stability of discrete systems. *Journal of Automation and Information Sciences*, 43(3), 1–8.
15. Galor, O. (2007). *Discrete dynamical systems*. Springer.
16. Pichkur, V. V., & Linder, Ya. M. (2021). Practical stability of discrete systems: Maximum sets of initial conditions concept. In *Contemporary approaches and methods in fundamental mathematics and mechanics* (pp. 381–394). Springer.
17. Pichkur, V. V., Linder, Ya. M., & Tairova, M. S. (2021). On the practical stability of discrete inclusions with spatial components. *Journal of Mathematical Sciences*, 254(2), 280–286.

-
18. Haddad, W. M., & Chellaboina, V. (2008). *Nonlinear dynamical systems and control: A Lyapunov-based approach*. Princeton University Press.

Tairova M. S.

CONSTRUCTION OF OPTIMAL SETS OF PRACTICAL STABILITY FOR LINEAR DISCRETE SYSTEMS WITH H -CONVEX PHASE CONSTRAINTS

Summary

The paper investigates the problem of constructing optimal sets of practical stability for linear homogeneous and nonhomogeneous discrete systems under H -convex phase constraints. Such problems arise in the mathematical modeling of dynamical processes and in control problems with state constraints. Analytical representations of the Minkowski function and the inverse Minkowski function of the optimal practical stability set are obtained. Conditions for constructing the maximal set of initial states whose trajectories remain within the prescribed phase constraints over a finite time interval are established. Particular attention is paid to phase constraints represented by polygons and polytopes, which form an important subclass of H -convex sets. The H -convexity of optimal practical stability and practical semistability sets is proved. The obtained results can be applied to the analysis of discrete dynamical systems and to the development of computational methods for verifying practical stability under phase constraints.

Keywords: H -convexity, practical stability, practical semistability, discrete systems, optimal practical stability set, Minkowski function, inverse Minkowski function, phase constraints.

REFERENCES

1. Garashchenko, F. G., & Bublyk, B. M. (2000). Rozvytok metodiv praktychnoi stiikosti ta yikh vykorystannia dlia analizu, otsinky i optymizatsii dynamiky puchkiv [Development of methods of practical stability and their application to analysis, estimation and optimization of bundle dynamics]. *Visnyk Kyivskoho Universytetu. Kibernetika*, (1), 4–17. [in Ukrainian].
2. LaSalle, J., & Lefschetz, S. (1961). *Stability by Liapunov's direct method with applications*. Academic Press.
3. Bashnyakov, O. M., Pichkur, V. V., & Khitko, I. V. (2012). Conditions of practical stability of discrete systems and Lyapunov functions. *System Research and Information Technologies*, (3), 125–133.

4. Grippo, L., & Lampariello, F. (1976). Practical stability of discrete-time systems. *Journal of the Franklin Institute*, 302(3), 213–224.
5. Lakshmikantham, V., Leela, S., & Martynyuk, A. A. (1990). *Practical stability of nonlinear systems*. World Scientific.
6. Pichkur, V. V. (2017). On practical stability of differential inclusions using Lyapunov functions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, 22(5), 1977–1986.
7. Bashnyakov, O. M., Garashchenko, F. G., & Pichkur, V. V. (2008). *Praktychna stiikist, otsinky ta optymizatsiia* [Practical stability, estimates and optimization]. Kyivskyi Universytet. [in Ukrainian].
8. Garashchenko, F. G., & Pichkur, V. V. (1999). On optimal sets of practical stability. *Journal of Automation and Information Sciences*, 31(5), 1–12.
9. Pichkur, V. V., Kapustian, O. V., & Sobchuk, V. V. (2023). *Stiikist ta atraktory evoliutsiinykh rivnian* [Stability and attractors of evolution equations]. Kyivskyi Universytet.
10. Pichkur, V. V. (2019). Maximum sets of initial conditions in practical stability and stabilization of differential inclusions. In *Modern mathematics and mechanics* (pp. 397–410). Springer.
11. Ostapenko, V. (2008). Convexity in differential games. In *Pareto optimality, game theory and equilibria* (pp. 307–348). Springer.
12. Rockafellar, R. T. (1997). *Convex analysis*. Princeton University Press.
13. Chikrii, A. A. (2013). *Conflict-controlled processes*. Springer.
14. Bashnyakov, A. N., Pichkur, V. V., & Khitko, I. V. (2011). On maximal initial data set in problems of practical stability of discrete systems. *Journal of Automation and Information Sciences*, 43(3), 1–8.
15. Galor, O. (2007). *Discrete dynamical systems*. Springer.
16. Pichkur, V. V., & Linder, Ya. M. (2021). Practical stability of discrete systems: Maximum sets of initial conditions concept. In *Contemporary approaches and methods in fundamental mathematics and mechanics* (pp. 381–394). Springer.
17. Pichkur, V. V., Linder, Ya. M., & Tairova, M. S. (2021). On the practical stability of discrete inclusions with spatial components. *Journal of Mathematical Sciences*, 254(2), 280–286.
18. Haddad, W. M., & Chellaboina, V. (2008). *Nonlinear dynamical systems and control: A Lyapunov-based approach*. Princeton University Press.

UDC 517.925

M. O. Bilozerova, *CandSc (Physics & Mathematics), Assoc. Prof.*

Odesa I. I. Mechnikov National University

Department of Algebra, Geometry and Differential Equations

2 Zmiiienka Vsevoloda St, Odesa, 65082, Ukraine

e-mail: marbel@ukr.net

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3177-790X>

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF ONE CLASS OF SOLUTIONS TO NONLINEAR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS CLOSE TO EMDEN–FOWLER TYPE

Necessary and sufficient conditions of existence of one class of critical solutions to nonlinear differential equations, that are in some sense close to equations of Emden–Fowler type were found. Asymptotic representations for such solutions and their first order derivatives are also established.

MSC: 34C41, 34A10.

Keywords: differential equations, asymptotic, slowly varying solutions, regularly varying nonlinearities, slowly varying derivatives, nonlinear equations.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1\(47\).370967](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1(47).370967)

Received: 01.05.2026. Accepted for publication: 11.05.2026.

Published: 15.09.2026.



This article is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0).

INTRODUCTION

Differential equation

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y') \exp(R(\ln |y|, \ln |yy'|)), \quad (1)$$

where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$), $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$ are continuous functions, $R :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, $R :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ is continuously differentiable function. Here $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} is either the interval $[y_i^0; Y_i[$, * or the interval $]Y_i; y_i^0]$ ($i = 0, 1$). Moreover, it is supposed, that every function φ_i ($i = 0, 1$) is regularly varying [1] of the order σ_i as the argument tends to Y_i and $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$.

Moreover, suppose the function R satisfy the conditions

$$\lim_{(y_0, y_1) \rightarrow (+\infty, +\infty)} R(y_0, y_1) = +\infty, \quad (2)$$

$$\lim_{y_i \rightarrow +\infty} \frac{y_i \frac{\partial R}{\partial y_i}(y_0, y_1)}{R(y_0, y_1)} = \gamma_i, \text{ uniformly by } y_j \quad i, j \in \{0, 1\}, \quad i \neq j, \quad (3)$$

where $0 < \gamma_0 + \gamma_1 < 1$, $\gamma_0 \neq 0$.

Definition 1. The solution y of equation (1) is called $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ if it is defined on $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ and

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0. \quad (4)$$

In special cases $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions to differential equations of the type (1) are established in partial cases of equation in papers for example [3] and [4]. In spacial cases asymptotic behavior of solutions and their derivatives essentially changes. For example, if $\lambda_0 = 1$ such solutions are rapidly varying functions. In the work [6] it was proved, that all of strongly decreasing and strongly increasing solutions to partial cases of equation (1) are rapidly varying. In this work cases $\lambda_0 = \pm\infty$ are considered. In the paper [5] such solutions to equation (1) are also established. Here is the result that cover the cases if conditions to results of the paper [5] are not satisfied.

MAIN RESULTS

To present the result we need the next definition.

Let the function $\varphi : \Delta_Y \rightarrow]0, +\infty[$ be a regularly varying function of the order σ as $z \rightarrow Y$ ($z \in \Delta_Y$) ($Y \in \{0, \infty\}$, Δ_Y is a onesided neighborhood of Y).

Definition 2. We say that function φ satisfies the condition S if for any slowly varying as $z \rightarrow Y$ ($z \in \Delta_Y$) function $L : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0; +\infty[$, such, that

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y \\ z \in \Delta_Y}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0,$$

the following equality takes place

$$\Theta(zL(z)) = \Theta(z)(1 + o(1)) \quad \text{as } z \rightarrow Y, \quad (z \in \Delta_Y),$$

where $\Theta(z) = \varphi(z)|z|^{-\sigma}$.

*If $Y_i = +\infty$ ($Y_i = -\infty$) we respectively suppose, that $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$) .

Let introduce next notations

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{as } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{as } \omega < +\infty, \end{cases} \quad \Theta_i(z) = \varphi_i(z)|z|^{-\sigma_i}, \quad (i = 0, 1)$$

and in case $\lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| \text{sign} y_0^0 = Y_0$,

$$N(t) = \alpha_0 p(t) |\pi_\omega(t)|^{\sigma_0+1} \Theta_0(|\pi_\omega(t)| \text{sign} y_0^0) \text{ as } t \in [b, \omega[,$$

$$I_0(t) = \alpha_0 \int_{A_\omega^0}^t p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0} \Theta_0(|\pi_\omega(\tau)| \text{sign} y_0^0) d\tau,$$

$$A_\omega^0 = \begin{cases} b, \text{ as } \int_b^\omega p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0} \Theta_0(|\pi_\omega(\tau)| \text{sign} y_0^0) d\tau = +\infty, \\ \omega, \text{ as } \int_b^\omega p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0} \Theta_0(|\pi_\omega(\tau)| \text{sign} y_0^0) d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Here we choose $b \in [a, \omega[$ by such a way, that $|\pi_\omega(t)| \text{sign} y_0^0 \in \Delta_0$ as $t \in [b, \omega[$.

Theorem 1. *Let in the equation (1) function p is continuously differentiable on its domain. If function φ_0 satisfies condition S and*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \ln |\pi_\omega(t)| N'(t)}{R(|\ln |\pi_\omega(t)||, |\ln |\pi_\omega(t)||) N(t)} = 0, \quad (5)$$

then conditions

$$\alpha_0 y_1^0 (1 - \sigma_0 - \sigma_1) \ln |\pi_\omega(t)| > 0 \text{ as } t \in [a, \omega[, \quad (6)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y_1^0 \exp \left(\frac{1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} R(|\ln |\pi_\omega(t)||, |\ln |\pi_\omega(t)||) \right) = Y_1.$$

together with conditions

$$Y_0 = \begin{cases} \pm\infty, & \text{as } \omega = +\infty, \\ 0, & \text{as } \omega < +\infty, \end{cases} \quad \pi_\omega(t) y_0^0 y_1^0 > 0 \text{ as } t \in [a; \omega[. \quad (7)$$

are necessary and sufficient for the existence of $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solutions of the equation (1). Moreover, for every such solution the next asymptotic representations take place as $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t) |y'(t)|^{-\sigma_0}}{\varphi_1(y'(t)) \exp(R(\ln |y(t)|, \ln |y(t)y'(t)|))} = \frac{(1 - \sigma_0 - \sigma_1) N(t) |\ln |\pi_\omega(t)||}{R(|\ln |\pi_\omega(t)||, |\ln |\pi_\omega(t)||)} [1 + o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [1 + o(1)]. \quad (8)$$

Proof. *The necessity.*

Let function $y : [t_0, \omega[\rightarrow R$ is a $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solution of the equation (1).
 Let function $y : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0}$ is a $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solution of the equation (1).
 By (4) it follows from the equality

$$\frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2} = \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' \cdot \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-2} + 1,$$

that

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' \cdot \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-2} = -1 + o(1) \text{ as } t \uparrow \omega.$$

From this by (4) the next asymptotic representations take place

$$y(t) = \pi_\omega(t)y'(t)[1 + o(1)], \quad y''(t) = o\left(\frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)}\right) \text{ as } t \uparrow \omega. \quad (9)$$

Let us rewrite (1) in the form

$$\frac{y''(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}} = I'_0(t) \exp(R(\ln |y(t)|, \ln |y(t)y'(t)|))[1 + o(1)] \text{ as } t \uparrow \omega. \quad (10)$$

The second of representations (8) follows from this relations. Let's rewrite (10), using the first of asymptotic representations (9), in the form

$$\frac{y''(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}} = \frac{N(t) \exp(R(\ln |y(t)|, \ln |y(t)y'(t)|))y'(t)[1 + o(1)]}{y(t)} \text{ as } t \uparrow \omega. \quad (11)$$

Let's suppose, that conditions (5) are valid. By properties of the function R , there exist a twice continuously differentiable function $\tilde{R} :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$ such, that

$$\tilde{R}(z) = R(z, z)[1 + o(1)], \quad z\tilde{R}'(z) = R(z, z)(\gamma_0 + \gamma_1)[1 + o(1)], \quad (12)$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{R}''(z)R(z, z)}{(\tilde{R}'(z))^2} = \frac{\mu}{\mu-1}.$$

By the conditions (4), (12), (5) and the first of asymptotic representations (9) we have from the equality

$$\left(\frac{N(t) \exp(R(\ln |y(t)|, \ln |y(t)y'(t)|))}{\tilde{R}'(|\ln |\pi_\omega(t)|||)}\right)' = \frac{N(t) \exp(R(\ln |y(t)|, \ln |y(t)y'(t)|))y'(t)}{y(t)} \times$$

$$\times \left(\frac{y(t)}{\pi_\omega(t)y'(t)} \left(\frac{N'(t)\pi_\omega(t)}{N(t)\widetilde{R}'(|\ln|\pi_\omega(t)||)} - \frac{\widetilde{R}(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{(\widetilde{R}'(|\ln|\pi_\omega(t)||))^2} \frac{\widetilde{R}''(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{\widetilde{R}'(|\ln|\pi_\omega(t)||)} \right) + 1 + \frac{y(t)y''(t)}{(y'(t))^2} \right)$$

the next representation as $t \uparrow \omega$

$$\left(\frac{N(t) \exp(R(\ln|y(t)|, \ln|y(t)y'(t)|))}{\widetilde{R}'(|\ln|\pi_\omega(t)||)} \right)' = \frac{N(t) \exp(R(\ln|y(t)|, \ln|y(t)y'(t)|))}{\widetilde{R}'(|\ln|\pi_\omega(t)||)} [1+o(1)].$$

So, using properties of the function φ_1 and (11) we get

$$\frac{y'(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}} = \frac{N(t) \exp(R(\ln|y(t)|, \ln|y(t)y'(t)|))}{\widetilde{R}'(|\ln|\pi_\omega(t)||)} (1-\sigma_0-\sigma_1)[1+o(1)] \text{ as } t \uparrow \omega.$$

The first of the representations (8) follows from this relations using (12). Taking into account sign of the function $y'(t)$ we obtain conditions (6). The necessity is proved.

The sufficiency. Let's suppose, that the function φ_1 satisfies condition S and conditions (7), (5), (6) take place. Let's consider the twice continuously differentiable function $\widetilde{R}:]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$, that satisfies (12) as in the proof of theorem 1. Let's also use the same function F with the same properties as in the proof of theorem 1.

Taking

$$F(y'(t), y(t)) = \begin{pmatrix} \frac{|1-\sigma_0-\sigma_1|N(t)}{\widetilde{R}'(|\ln|\pi_\omega(t)||)} [1+z_1(x)] \\ \frac{1}{\pi_\omega(t)} [1+z_2(x)] \end{pmatrix},$$

where

$$x = \beta \ln|\pi_\omega(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{as } \omega = +\infty, \\ -1 & \text{as } \omega = -\infty, \end{cases}$$

we can reduce the equation (1) to the system

$$\begin{cases} z'_1 = \beta G_0(x) \left[\frac{K_1(x, z_1, z_2)|1+z_2|^{\sigma_0}}{(1-\sigma_0-\sigma_1)} \left(1 - \sigma_0 - \sigma_1 - \frac{\Psi_1(x, z_1, z_2)L'_1(\Psi_1(x, z_1, z_2))}{L_1(\Psi_1(x, z_1, z_2))} \right) - \right. \\ \left. - G_1(x)[1+z_1] - K_2(x, z_1, z_2) \left(1 + z_1 + \frac{K_1(x, z_1, z_2)G_0(x)|1+z_2|^{\sigma_0}}{|1-\sigma_0-\sigma_1|} \right) + \frac{G_2(x)[1+z_1]}{R(|\ln|\pi_\omega(t)||)} \right], \\ z'_2 = \beta[1+z_2] \left[\frac{K_1(x, z_1, z_2)G_0(x)|1+z_2|^{\sigma_0}}{|1-\sigma_0-\sigma_1|[1+z_1]} - z_2 \right], \end{cases} \quad (13)$$

where

$$G_0(x) = \tilde{R}'(|\ln |\pi_\omega(t(x))||), \quad G_1(x) = \frac{\pi_\omega(t(x))N'(t(x))}{\tilde{R}'(|\ln |\pi_\omega(t(x))||)N(t(x))},$$

$$G_2(x) = \frac{\tilde{R}''(|\ln |\pi_\omega(t(x))||)\tilde{R}(|\ln |\pi_\omega(t(x))||)}{(\tilde{R}'(|\ln |\pi_\omega(t(x))||))^2},$$

$$\Psi_0(x, z_1, z_2) = F_0^{-1} \left(\frac{(1 - \sigma_0 - \sigma_1)N(t(x))}{\tilde{R}'(|\ln |\pi_\omega(t(x))||)}[1 + z_1], \frac{1}{\pi_\omega(t(x))}[1 + z_2] \right),$$

$$\Psi_1(x, z_1, z_2) = F_1^{-1} \left(\frac{(1 - \sigma_0 - \sigma_1)N(t(x))}{\tilde{R}'(|\ln |\pi_\omega(t(x))||)}[1 + z_1], \frac{1}{\pi_\omega(t(x))}[1 + z_2] \right),$$

$$K_1(x, z_1, z_2) = \frac{\Theta_0(\Psi_0(t(x), z_1, z_2))}{\Theta_0(|\pi_\omega(t(x))|)},$$

$$K_2(x, z_1, z_2) = \frac{\tilde{R}'(|\ln |\Psi_0(t(x), z_1, z_2)\Psi_1(t(x), z_1, z_2)||)}{\tilde{R}'(|\ln |\pi_\omega(t(x))||)}.$$

We get

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K_i(x, z_1, z_2) = 1 \text{ uniformly by } (z_1, z_2) \in \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right] \quad (14)$$

as in the proof of the theorem 1.

By (7) it is clear, that

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{1}{\pi_\omega(t)} = Y_0^0.$$

Moreover, it follows from (5) and (6), that

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{|1 - \sigma_0 - \sigma_1|N(t)}{\tilde{R}'(|\ln |\pi_\omega(t)||)} = \Upsilon.$$

Therefore, we can choose $t_0 \in [a, \omega[$ such, that

$$\left(\begin{array}{c} \frac{(1 - \sigma_0 - \sigma_1)N(t)}{\tilde{R}'(|\ln |\pi_\omega(t)||)}[1 + z_1(x)] \\ \frac{1}{\pi_\omega(t)}[1 + z_2(x)] \end{array} \right) \in F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}) \text{ as } t \in [t_0, \omega[, |z_i| \leq \frac{1}{2} (i = 1, 2).$$

Then we consider the system (13) on the set

$$\Omega = [x_0, +\infty[\times D, \text{ where } x_0 = \beta \ln |t_0|,$$

$$D = \{(z_1, z_2) : |z_i| \leq \frac{1}{2}, (i = 1, 2)\}.$$

Let's rewrite the system (13) in the form

$$\begin{cases} z'_1 = G_0(x)[A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + R_1(x, z_1, z_2) + R_2(z_2)], \\ z'_2 = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + R_3(x, z_1, z_2) + R_4(z_2), \end{cases}$$

where

$$A_{11} = A_{22} = -\beta, \quad A_{12} = \beta\sigma_0, \quad A_{21} = 0,$$

$$\begin{aligned} R_1(x, z_1, z_2) = & \beta ((K_1(x, z_1, z_2) - 1)|1 + z_2|^{\sigma_0} - (K_2(x, z_1, z_2) - 1) - G_1(x)[1 + z_1] + \\ & + \frac{G_2(x)}{R(|\ln |\pi_\omega(x)||)[1 + z_2]} - \frac{K_1(x, z_1, z_2)}{|1 - \sigma_0 - \sigma_1|} \frac{\Psi_1(x, z_1, z_2)L'_1(\Psi_1(x, z_1, z_2))}{L_1(\Psi_1(x, z_1, z_2))} - \\ & - \frac{G_0(x)K_2(x, z_1, z_2)K_1(x, z_1, z_2)}{|1 - \sigma_0 - \sigma_1|} |1 + z_2|^{\sigma_0}) , \\ R_2(z_2) = & (|1 + z_2|^{\sigma_0} - \sigma_0 z_2 - 1), \\ R_3(x, z_1, z_2) = & \beta \frac{G_0(x)K_1(x, z_1, z_2)}{|1 - \sigma_0 - \sigma_1|} \frac{|1 + z_2|^{\sigma_0+1}}{1 + z_1}, \\ R_4(z_2) = & -\beta z_2^2. \end{aligned}$$

It follows from (7) and (5) that

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G_i(x) = 0 (i = 0, 1), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G_2(x) = \frac{\mu - 1}{\mu}.$$

By the character of the function G_0 it is clear, that

$$\int_{x_0}^{\infty} G_0(x) dx = \infty.$$

So, using (14) we have as $i = 2, 4$

$$\lim_{|z_1|+|z_2| \rightarrow 0} \frac{R_i(z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0 \text{ uniformly by } x : x \in]x_0, +\infty[,$$

and as $i = 1, 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R_i(x, z_1, z_2) = 0 \text{ uniformly by } z_1, z_2 : (z_1, z_2) \in D.$$

So, for the system of differential equations (13) all conditions of theorem 2.8 from [2] are fulfilled. According to this theorem, the system (13) has at least one solution $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2 (x_1 \geq x_0)$, that tends to zero as $x \rightarrow +\infty$. This solution is corresponded by such solution y of the equation (1), that admit asymptotic representations(8) as $t \uparrow \omega$. By the representations and (1) it is clear that the obtained solution is indeed $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solution. The theorem is proved.

CONCLUSION

For differential equations with a spacial class of nonlinearities that are close regularly varying as arguments tend to critical points, necessary and sufficient conditions of existence of one class of solutions were found. Asymptotic representations for the solutions to such equations and their first order derivatives are also established.

REFERENCES

1. Bingham, N. H., Goldie, C. M., & Teugels, J. L. (1987). *Regular variation*. Cambridge University Press.
2. Evtukhov, V. M., & Samoilenko, A. M. (2010). Conditions for the existence of vanishing at a singular point of real solutions of non-autonomous systems of quasi-linear differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 62(1), 52–80.
3. Belozeroва, M. A., & Gerzhanovskaya, G. A. (2019). Asymptotic representations of solutions with slowly varying derivatives of essentially nonlinear ordinary differential equations of the second order. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, 77, 1–12.
4. Gerzhanovskaya, G. A. (2017). Asymptotic representations of rapidly varying solutions of essential nonlinear differential equations of the second order. *Nonlinear Oscillations*, 20(3), 329–345.
5. Bilozerova, M. O. (2024). Asymptotic representations of one class of solutions with slowly varying derivatives to nonlinear second order differential equations. *Researches in Mathematics and Mechanics*, 30(2(44)), 69–79.
6. Manojlovic, J., & Milosevic, J. (2022). Asymptotic equivalence relations for rapidly varying solutions of sublinear differential equations of Emden–Fowler type. *Advances in Continuous and Discrete Models*, 2022, 19.

Білозерова М. О.

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, БЛИЗЬКИХ ДО РІВНЯННЯ ТИПУ ЕМДЕНА–ФАУЛЕРА

Резюме

Знайдено необхідні та достатні умови існування одного класу особливих розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь, які є у деякому сенсі близькими до рівнянь типу Емдена–Фаулера. Також знайдено асимптотичні зображення для таких розв'язків та їх похідних першого порядку.

Ключові слова: Диференціальні рівняння, асимптотика, повільно змінні розв'язки, правильно змінні нелінійності, повільно змінні похідні, нелінійні рівняння.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Bingham, N. H., Goldie, C. M., & Teugels, J. L. (1987). *Regular variation*. Cambridge University Press.
2. Evtukhov, V. M., & Samoilenko, A. M. (2010). Conditions for the existence of vanishing at a singular point of real solutions of non-autonomous systems of quasi-linear differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 62(1), 52–80.
3. Bilozerova, M. A., & Gerzhanovskaya, G. A. (2019). Asymptotic representations of solutions with slowly varying derivatives of essentially nonlinear ordinary differential equations of the second order. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, 77, 1–12.
4. Gerzhanovskaya, G. A. (2017). Asymptotic representations of rapidly varying solutions of essential nonlinear differential equations of the second order. *Nonlinear Oscillations*, 20(3), 329–345.
5. Bilozerova, M. O. (2024). Asymptotic representations of one class of solutions with slowly varying derivatives to nonlinear second order differential equations. *Researches in Mathematics and Mechanics*, 30(2(44)), 69–79.
6. Manojlovic, J., & Milosevic, J. (2022). Asymptotic equivalence relations for rapidly varying solutions of sublinear differential equations of Emden–Fowler type. *Advances in Continuous and Discrete Models*, 2022, 19.

УДК 517.977:517.925:531.36

В. В. Пічкур, д-р фіз.-мат. наук, доцент

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

факультет комп'ютерних наук та кібернетики

вул. Володимирська, 60, м. Київ, 01033, Україна

e-mail: volodymyr.pichkur@knu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-5641-8145>

Є. Р. Гагурін, аспірант

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

факультет комп'ютерних наук та кібернетики

вул. Володимирська, 60, м. Київ, 01033, Україна

e-mail: zhenyahaHurin@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0000-0269-6783>

ПРО ОПТИМАЛЬНУ СТАБІЛІЗАЦІЮ ДВОМАСОВИХ СИСТЕМ ЗА ФАЗОВИХ ОБМЕЖЕНЬ

У статті висвітлюється комбінований підхід до розв'язання задачі оптимальної стабілізації двомасових коливальних систем, який, з одного боку, використовує достатні умови оптимальності, а з іншого — методи практичної стійкості, для забезпечення обмежень на стан системи. Розглянуто два види фазових обмежень: у формі багатокутника та еліпсоїдального вигляду. Математична модель описується лінійною неавтономною системою. Конструювання оптимального керування здійснюється за допомогою матричного рівняння Ріккаті. Доведено теореми про побудову оптимального керування за заданих фазових обмежень. Наведено результати комп'ютерного моделювання. Побудований алгоритм може бути застосований для розв'язування прикладних задач, пов'язаних з гасінням надлишкових коливань у системах керування.

MSC: 49K15, 49N35, 93D15.

Ключові слова: оптимальна стабілізація, практична стійкість, коливна система, фазові обмеження, функція Ляпунова.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1\(47\).370968](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1(47).370968)

Стаття надійшла до редакції: 01.04.2026. Затверджена до друку: 11.04.2026.

Опублікована: 15.09.2026.



Ця стаття поширюється на умовах ліцензії Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).



Вступ

Задача стабілізації коливальних процесів виникає в задачах, пов'язаних з керуванням літальними апаратами, робототехнікою, керуванням транспортними системами, будівництвом мостів і складних споруд [2]. Основна мета такої задачі полягає в мінімізації небажаних коливань за допомогою зовнішнього керуючого впливу. Наприклад, при керуванні безпілотним літальним апаратом виникає проблема його утримання в заданій точці за наявності недетермінованих збурень. Побудова математичної моделі коливного процесу приводить до систем диференціальних рівнянь, наявність технічних вимог до функціонування системи визначає обмеження на стан системи і критерій якості перехідного процесу [2]. Таким чином, постає необхідність розробки алгоритмів оптимальної стабілізації систем керування коливними процесами з умовами на фазові координати.

При розв'язанні задачі стабілізації динамічних систем використовується принцип керування з оберненим зв'язком. Наявні підходи включають методи керування спектром, використання функцій Ляпунова та матричних нерівностей [1; 5; 6; 8; 11; 15]. Основні методи розв'язання задач оптимальної стабілізації базуються на другому методі Ляпунова та достатніх умовах оптимальності, які висвітлені в [5; 10; 17; 18]. Однак в цих дослідженнях зазвичай не враховуються фазові обмеження. У такому випадку доцільно застосовувати методи теорії практичної стійкості, де основним методом дослідження виступає другий метод Ляпунова [3; 7; 9; 14]. Оптимальні множини та їх властивості, а також оцінки областей практичної стійкості вивчалися у працях [4; 7; 14]. Зазначимо, що саме застосування методів практичної стійкості дозволяє звести задачу керування з фазовими обмеженнями до задачі практичної стабілізації [7; 12; 13].

У статті висвітлюється комбінований підхід до розв'язання задачі оптимальної стабілізації двомасових коливальних систем, який, з одного боку, використовує достатні умови оптимальності, а з іншого — методи практичної стійкості, для забезпечення обмежень на стан системи. Розглянуто два види фазових обмежень: у формі багатокутника та еліпсоїдального вигляду. Наведено твердження про розв'язування задачі стабілізації за таких обмежень та результати комп'ютерного моделювання.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Постановка задачі. Досліджується система твердих тіл з масами m_1 та m_2 з'єднані пружиною з коефіцієнтом жорсткості k , що ковзають без тертя вздовж горизонтальної поверхні. Нехай x_1 – координата центру мас лівого тіла, x_2 – координата центру мас правого тіла. Керування u описує силовий вплив, що прикладається до лівого тіла. Коефіцієнт жорсткості $k = k(t)$ є неперервною функцією часу, для якої справджується умова $k(t) \geq k_0 > 0$, $t \geq t_0$. Динаміка коливної моделі описується системою диференціальних рівнянь [2; 6]

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k(t)}{m_1}x_1 + \frac{k(t)}{m_1}x_2 + \frac{1}{m_1}u, \quad \ddot{x}_2 = \frac{k(t)}{m_2}x_1 - \frac{k(t)}{m_2}x_2.$$

Введемо заміну змінних $\dot{x}_1 = v_1$, $\dot{x}_2 = v_2$ і отримаємо вектор фазового стану системи $x = (x_1, x_2, v_1, v_2)^T$. Запишемо математичну модель у формі системи диференціальних рівнянь у нормальній формі

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

де $x = (x_1, x_2, v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^4$, $u \in \mathbb{R}$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k(t)}{m_1} & \frac{k(t)}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k(t)}{m_2} & -\frac{k(t)}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином матриця $A(t)$ є неперервною за $t \geq t_0$ і система (1) є лінійною і неавтономною. На вектор стану системи (1) накладаються обмеження. У статті розглядаються два класи фазових обмежень: у вигляді багатогранника та узагальненого еліпсоїда. Клас Ω допустимих керувань складається з m -вимірних керувань з оберненим зв'язком $u(t, x)$, які є локально ліпшицевими за змінною x та кусково неперервними за змінною t , $u(t, 0) = 0$, $t \geq t_0$ і такі, що відповідні траєкторії системи (1) не порушують фазові обмеження. В статті керування вибираються у формі лінійного оберненого зв'язку.

На розв'язках системи (1) розглядається квадратичний критерій якості

$$\mathcal{I}(u) = \int_{t_0}^{\infty} \left(\langle Qx, x \rangle + R(t) u^2 \right) dt, \quad (2)$$

де $Q \geq 0$ – 4×4 симетрична невід’ємно визначена матриця, $R(t) \geq r_0 > 0$ – неперервна скалярна функція, $t \geq t_0$. Матриця Q обирається у діагональній формі $Q = \text{diag}(q_1, q_2, q_3, q_4)$, де $q_k \geq 0, k = 1, 2, 3, 4, \max_{k=1,2,3,4} q_k > 0$. Задача оптимальної стабілізації двомасової системи (1) полягає у побудові допустимого керування $u_*(t, x)$ у класі Ω , такого, що забезпечує глобальну асимптотичну стійкість нульового розв’язку системи (не порушуючи визначені фазові обмеження) та мінімізує критерій якості (2) для початкових умов $x(t_0) = x_0 \in G_0$.

2. Стабілізація системи з фазовими обмеженнями у вигляді багатокутника. Припустимо, що обмеження на фазовий вектор має вигляд узагальненого прямокутного паралелепіпеда

$$|x_1(t)| \leq \bar{x}_1, \quad |x_2(t)| \leq \bar{x}_2, \quad |v_1(t)| \leq \bar{v}_1, \quad |v_2(t)| \leq \bar{v}_2, \quad t \geq t_0, \quad (3)$$

Множина, яка задається за допомогою співвідношень (3), є опуклим компактом, що містить початок координат у своїй внутрішності і її можна визначити так

$$\Phi = \{x \in \mathbb{R}^4 : \langle l_s, x \rangle \leq 1, \quad s = 1, 2, \dots, 8\}, \quad (4)$$

де вектори $l_s \in \mathbb{R}^4$ визначаються наступним способом

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{e_1}{\bar{x}_1}, & l_2 &= -\frac{e_1}{\bar{x}_1}, & l_3 &= \frac{e_2}{\bar{x}_2}, & l_4 &= -\frac{e_2}{\bar{x}_2}, \\ l_5 &= \frac{e_3}{\bar{v}_1}, & l_6 &= -\frac{e_3}{\bar{v}_1}, & l_7 &= \frac{e_4}{\bar{v}_2}, & l_8 &= -\frac{e_4}{\bar{v}_2}, \end{aligned}$$

e_1, e_2, e_3, e_4 – вектори стандартного базису з $\mathbb{R}^4$. Множина початкових умов задається так

$$G_0 = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x_1| \leq \delta_1, |x_2| \leq \delta_2, |v_1| \leq \mu_1, |v_2| \leq \mu_2\}, \quad (5)$$

де $0 < \delta_i < \bar{x}_i, 0 < \mu_i < \bar{v}_i, i = 1, 2$ такі, що $G_0 \subset \text{int } \Phi$.

Для побудови оптимального керування необхідно знайти симетричну додатно визначену матрицю $P(t)$ розмірності 4×4 , яка є розв’язком матричного рівняння Ріккати [1; 5; 17]. Враховуючи, що $B = \frac{1}{m_1} e_3$, рівняння Ріккати для двомасової системи (1) записується так

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - \frac{1}{m_1^2 R(t)} P(t) e_3 e_3^T P(t) + Q = 0, \quad P(t_0) = P_0, \quad (6)$$

де $P_0 > 0$ – задана симетрична додатно визначена матриця.

Покладемо $P^{(j)}(t) = P(t) e_j$ j -й стовпець матриці $P(t)$. Тоді

$$P(t) e_3 e_3^T P(t) = P^{(3)}(t) (P^{(3)}(t))^T, \quad (7)$$

де $P^{(3)}(t) = (P_{13}(t), P_{23}(t), P_{33}(t), P_{43}(t))^T$ – третій стовпець матриці $P(t)$.

Тоді оптимальне керування визначається так

$$u_*(t, x) = -\frac{1}{m_1 R(t)} (P_{31}(t) x_1 + P_{32}(t) x_2 + P_{33}(t) v_1 + P_{34}(t) v_2). \quad (8)$$

Конструкція функції Ляпунова є такою

$$\mathcal{V}_*(t, x) = \langle P(t)x, x \rangle = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 P_{ij}(t) x_i x_j.$$

Для розв'язку $P(t)$ матричного рівняння (6) вимагаємо рівномірної обмеженості власних значень цієї матриці. Тоді з нерівності Релея [14]

$$P(t) - \sigma_0 I \geq 0 \quad \text{та} \quad \|P(t)\| \leq \sigma_1, \quad t \geq t_0,$$

де I – одинична матриця розмірності 4×4 . Тоді функція $\mathcal{V}_*(t, x)$ є додатно визначеною, радіально необмеженою та допускає нескінченно малу вищу границю [14].

Визначимо за допомогою функції Ляпунова еліпсоїд

$$\mathcal{E}(t, r) = \{x \in \mathbb{R}^4 : \langle P(t)x, x \rangle \leq r^2\},$$

для якого $G_0 \subseteq \mathcal{E}(t_0, r)$. Отже

$$G_0 \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 : \langle P(t_0)x, x \rangle \leq r^2\}. \quad (9)$$

Оскільки G_0 задано рівнянням (5), то r визначається з (9).

Застосовуючи властивості опорних функцій [14], робимо висновок, що включення $\mathcal{E}(t, r) \subseteq \Phi$ виконується для всіх $t \geq t_0$ тоді і тільки тоді, коли

$$r \leq \inf_{t \geq t_0} \left\{ \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{[P^{-1}(t)]_{11}}}, \frac{\bar{x}_2}{\sqrt{[P^{-1}(t)]_{22}}}, \frac{\bar{v}_1}{\sqrt{[P^{-1}(t)]_{33}}}, \frac{\bar{v}_2}{\sqrt{[P^{-1}(t)]_{44}}} \right\}. \quad (10)$$

Має місце таке твердження.

Теорема 1. Нехай $k(t) \geq k_0 > 0$ – неперервна функція, $R(t) \geq r_0 > 0$ – неперервна скалярна функція. Припустимо, що існує симетрична додатно визначена матриця $P(t)$, що є розв’язком рівняння Ріккати (6), власні значення якої є рівномірно обмеженими і параметр $r > 0$ задовольняє умови (9) та (10). Тоді лінійне керування з оберненим зв’язком

$$u_*(t, x) = -\frac{1}{m_1 R(t)} (P_{31}(t) x_1 + P_{32}(t) x_2 + P_{33}(t) v_1 + P_{34}(t) v_2)$$

розв’язує задачу оптимальної стабілізації для задачі оптимальної стабілізації (1)–(2) з фазовими обмеженнями (4). Таким способом

1. нульовий розв’язок $x \equiv 0$ системи (1) при $u_*(t, x)$ є глобально асимптотично стійким;
2. для довільного початкового стану $x_0 \in G_0$ відповідна траєкторія системи (1) задовольняє фазовим обмеженням (3);
3. мінімальне значення критерію якості (2) дорівнює

$$\mathcal{I}(u_*) = \langle P(t_0) x_0, x_0 \rangle.$$

Доведення. Функція Ляпунова $\mathcal{V}_*(t, x) = \langle P(t)x, x \rangle$ є додатно визначеною, допускає нескінченно малу верхню межу та є радіально необмеженою [14]. Умова $G_0 \subseteq \mathcal{E}(t_0, r)$ виконується за припущенням (9). Включення $\mathcal{E}(t, r) \subseteq \Phi(t)$ виконується для всіх $t \geq t_0$, що впливає з умови (10).

Знайдемо повну похідну функції $\mathcal{V}_*(t, x)$ вздовж траєкторій системи (1). Використовуючи тотожність (7) отримуємо

$$\frac{\partial \mathcal{V}_*(t, x)}{\partial t} + \langle \text{grad}_x \mathcal{V}_*(t, x), A(t)x + Bu_* \rangle + \langle Qx, x \rangle + R(t)u_*^2(t, x) = 0.$$

Для довільного допустимого керування $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{V}_*(t, x)}{\partial t} + \langle \text{grad}_x \mathcal{V}_*(t, x), A(t)x + Bu \rangle + \langle Qx, x \rangle + R(t)u^2(t, x) = \\ & = R(t) \left(u(t, x) + \frac{\langle P^{(3)}(t), x \rangle}{m_1 R(t)} \right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

рівність досягається при $u = u_*(t, x)$, оскільки $R(t) > 0$.

Тоді за теоремою Барбашина–Красовського [14] нульовий розв’язок системи (1) є глобально асимптотично стійким, фазові обмеження (4) не порушуються, а мінімальне значення функціонала дорівнює

$$\mathcal{I}(u_*) = \mathcal{V}_*(t_0, x_0) = \langle P(t_0)x_0, x_0 \rangle.$$

3. Випадок еліпсоїдальних фазових обмежень. Розглянемо фазові обмеження у формі еліпсоїда. Для $t \geq t_0$ визначимо обмеження на фазові координати так

$$\Phi(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \frac{x_1^2}{\bar{x}_1^2(t)} + \frac{x_2^2}{\bar{x}_2^2(t)} + \frac{v_1^2}{\bar{v}_1^2(t)} + \frac{v_2^2}{\bar{v}_2^2(t)} \leq 1 \right\}, \quad (11)$$

де $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{v}_1(t), \bar{v}_2(t) > 0$ – неперервні обмежені функції. Множина (11) є опуклим компактом, що містить початок координат у своїй внутрішності.

Введемо матрицю

$$H(t) = \text{diag} \left(\frac{1}{\bar{x}_1^2(t)}, \frac{1}{\bar{x}_2^2(t)}, \frac{1}{\bar{v}_1^2(t)}, \frac{1}{\bar{v}_2^2(t)} \right) > 0.$$

Тоді $\Phi(t) = \{x \in \mathbb{R}^4 : \langle H(t)x, x \rangle \leq 1\}$.

Опорна функція еліпсоїда $\Phi(t)$ у напрямку $\psi \in \mathbb{R}^4$ визначається так

$$\begin{aligned} c(\Phi(t), \psi) &= \sqrt{\langle H^{-1}(t)\psi, \psi \rangle} = \\ &= \sqrt{\bar{x}_1^2(t)\psi_1^2 + \bar{x}_2^2(t)\psi_2^2 + \bar{v}_1^2(t)\psi_3^2 + \bar{v}_2^2(t)\psi_4^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Відповідно до (11), множина початкових умов має вигляд

$$G_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \frac{x_1^2}{\delta_1^2} + \frac{x_2^2}{\delta_2^2} + \frac{v_1^2}{\mu_1^2} + \frac{v_2^2}{\mu_2^2} \leq 1 \right\},$$

де $0 < \delta_i < \bar{x}_i(t_0)$ та $0 < \mu_i < \bar{v}_i(t_0)$, $i = 1, 2$ звідки слідує $G_0 \subset \text{int } \Phi(t_0)$.

Зазначимо, що оптимальне керування визначається з (8).

Аналогічно до попереднього випадку, функція Ляпунова має вигляд

$$\mathcal{V}_*(t, x) = \langle P(t)x, x \rangle.$$

За допомогою функції Ляпунова визначимо еліпсоїд

$$\mathcal{E}(t, r) = \{x : \langle P(t)x, x \rangle \leq r^2\}.$$

при цьому необхідно, щоб

$$G_0 \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 : \langle P(t_0)x, x \rangle \leq r^2\}. \quad (13)$$

Умова $\mathcal{E}(t, r) \subseteq \Phi(t)$, $t \geq t_0$ визначається з використанням (12) і набуває вигляду

$$\frac{r \sqrt{\langle P^{-1}(t)\psi, \psi \rangle}}{\sqrt{\langle H^{-1}(t)\psi, \psi \rangle}} \leq 1, \quad \|\psi\| = 1, \quad t \geq t_0. \quad (14)$$

Беручи мінімум лівої частини останньої нерівності за ψ на одиничній сфері для всіх $t \geq t_0$, маємо

$$r^2 \leq \inf_{t \geq t_0} \lambda_{\min}(P^{1/2}(t) H^{-1}(t) P^{1/2}(t)), \quad (15)$$

де $\lambda_{\min}(\cdot)$ – найменше власне значення відповідної матриці. У формі матричної нерівності співвідношення (14) є еквівалентним до

$$r^2 P^{-1}(t) \leq H^{-1}(t), \quad t \geq t_0. \quad (16)$$

Має місце таке твердження.

Теорема 2. Нехай $k(t) \geq k_0 > 0$ – неперервна функція, $R(t) \geq r_0 > 0$ – неперервна скалярна функція, $\bar{x}_i(t), \bar{v}_i(t) > 0$, $i = 1, 2$ – неперервні обмежені функції, що визначають опуклі фазові обмеження (11). Якщо існує симетрична додатно визначена матриця $P(t)$, що є розв’язком рівняння Ріккати (6), власні значення якої є рівномірно обмеженими і параметр $r > 0$ задовольняє умови (13) та (15), тоді лінійне керування з оберненим зв’язком

$$u_*(t, x) = -\frac{1}{m_1 R(t)} (P_{31}(t) x_1 + P_{32}(t) x_2 + P_{33}(t) v_1 + P_{34}(t) v_2)$$

розв’язує задачу оптимальної стабілізації для задачі оптимальної стабілізації (1)–(2) за фазових обмежень (11). Таким способом,

1. нульовий розв’язок $x \equiv 0$ системи (1) при $u_*(t, x)$ є глобально асимптотично стійким;
2. для будь-якого початкового стану $x_0 \in G_0$ траєкторія системи (1) задовольняє фазовим обмеженням (11);

3. мінімальне значення критерія якості (2) дорівнює

$$\mathcal{I}(u_*) = \langle P(t_0) x_0, x_0 \rangle.$$

Обґрунтування теореми здійснюється аналогічного до доведення теореми 1.

4. Обчислювальні експерименти та обговорення результатів.

На основі теорем 1, 2 розроблено обчислювальні методи розв'язування задачі стабілізації (1)–(2) за фазових обмежень (3) та (11). Параметри системи (1) вибиралися такі

$$m_1 = 1.5, \quad m_2 = 0.8, \quad R = 1, \quad Q = \text{diag}(25, 25, 8, 8).$$

Жорсткість пружини описується за допомогою функції

$$k(t) = 12 + 6 \cos(0.8t),$$

при цьому $k(t) \geq k_0 = 6 > 0$ для всіх $t \geq 0$.

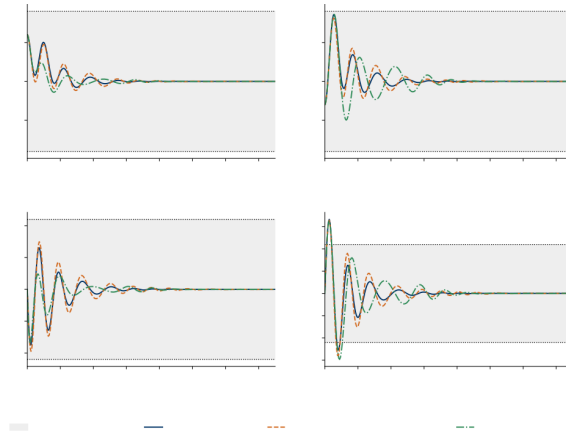
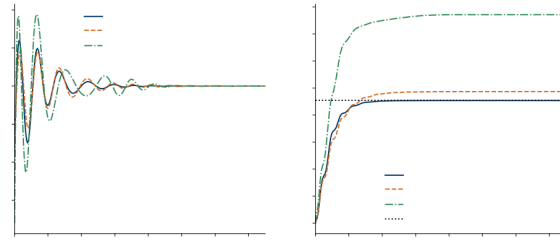


Рис. 1: Експеримент 1. Траєкторії системи

У кожному обчислювальному експерименті порівнюються три методики конструювання керування: у вигляді лінійного оберненого зв'язку (8); як субоптимальний LQR u_{DLQR} [16]; у формі PD-керування u_{PD} [1], що є пропорційно-диференціальним регулятором, який діє лише на ліве тіло, $u_{\text{PD}} = -30 x_1 - 12 v_1$.

Рис. 2: Експеримент 1. Керування $u(t)$ та значення критерія якості

У першому експерименті початкова умова $x_0 = (0.6, -0.3, 0, 0)^T$, фазові обмеження задані прямокутним паралелепіпедом

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0.9, \quad \bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 2.2.$$

На рисунках 1, 2 видно, що побудований алгоритм оптимальної стабілізації доставляє найкраще значення критерія якості, що збігається з теоретичним значенням, а також найшвидше стабілізує систему. Порівняємо основні характеристики застосованих алгоритмів.

Табл. 6: Результат роботи алгоритмів при фазових обмеженнях у вигляді багатокутника

Тип керування	Практ. $I(u)$	Теор. $I(u)$	Похибка (%)	Час вст. (с)
Оптимальне (u_*)	113.41	113.58	0.153	8.77
Субоптимальний LQR (u_{DLQR})	121.71	113.58	7.154	11.47
PD-керування (u_{PD})	192.87	113.58	69.808	10.35

Дані в таблиці 6 підтверджують ефективність розробленого алгоритму, оскільки він стабілізує систему за найменший проміжок часу й доставляє мінімальне значення критерія якості з найменшою похибкою. Під практичним значенням критерія якості розуміється значення функціонала (2), в якому інтегрування здійснюється від t_0 до T , де T – час зупинки алгоритму. Алгоритм зупиняє роботу, за умови, що стани системи в сусідніх моментах часу не відрізняються від нульового, з точністю до машинного епсілон.

У другому експерименті $x_0 = (0.5, -0.25, 0, 0)^T$, фазові обмеження є

еліпсоїдом з межами, що спадають за раціонально-дробовим законом

$$\bar{x}_1(t) = \bar{x}_2(t) = 0.1 + \frac{0.6}{1 + 0.5t}, \quad \bar{v}_1(t) = \bar{v}_2(t) = 0.15 + \frac{2.0}{1 + 0.5t}.$$

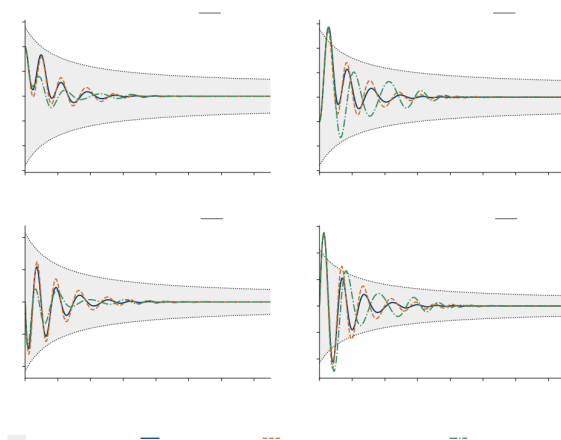


Рис. 3: Експеримент 2. Траєкторії системи

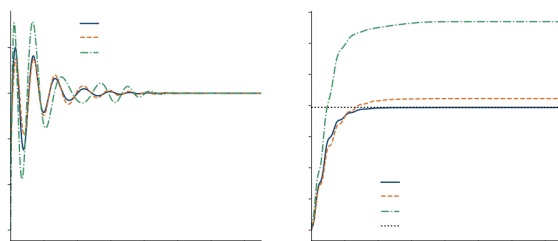


Рис. 4: Експеримент 2. Керування $u(t)$ та значення критерія якості

На рисунках 3, 4 видно, що побудований алгоритм оптимальної стабілізації доставляє найкраще значення критерія якості, що збігається з теоретичним значенням, а також найшвидше стабілізує систему. Аналогічно до попереднього випадку порівнюємо основні характеристики застосованих алгоритмів.

Дані в таблиці 7 підтверджують ефективність розробленого алгоритму, оскільки він стабілізує систему за найменший проміжок часу й доставляє мінімальне значення критерія якості з найменшою похибкою.

Табл. 7: Результат роботи алгоритмів при фазових обмеженнях у вигляді еліпсоїда

Тип керування	Практ. I(u)	Теор. I(u)	Похибка (%)	Час вст. (с)
Оптимальне (u_*)	78.76	78.88	0.153	8.28
Субоптимальний LQR (u_{DLQR})	84.52	78.88	7.154	11.43
PD-керування (u_{PD})	133.94	78.88	69.808	9.61

Висновки

В статті розроблено обчислювальні методи для розв'язування задачі оптимальної стабілізації двомасової коливної системи за фазових обмежень. Розглядаються фазові обмеження у вигляді багатокутника та узагальненого еліпсоїда. На основі достатніх умов оптимальності обґрунтовано теореми і побудовано алгоритми знаходження оптимального керування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Bacciotti, A. (2019). *Stability and control of linear systems*. Springer-Verlag.
2. Fuller, C. C., Elliott, S. J., & Nelson, P. A. (1996). *Active control of vibration*. Academic Press.
3. Гаращенко, Ф. Г., & Бублик, Б. М. (2000). Розвиток методів практичної стійкості та їх використання для аналізу, оцінки і оптимізації динаміки пучків. *Вісник Київського університету. Кібернетика*, (1), 4–17.
4. Garashchenko, F. G., & Pichkur, V. V. (1999). On optimal sets of practical stability. *Journal of Automation and Information Sciences*, 31(4–5), 1–12.
5. Haddad, W. M., & Chellaboina, V. (2008). *Nonlinear dynamical systems and control: A Lyapunov-based approach*. Princeton University Press.
6. Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice Hall.
7. Кириченко, Н. Ф. (1978). *Введение в теорию стабилизации движения*. Вища школа.
8. Кунцевич, В. М., и Лычак, М. М. (1977). *Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова*. Наука.
9. LaSalle, L. P., & Lefschetz, S. (1961). *Stability by Lyapunov's direct method*. Academic Press.
10. Malkin, I. G. (1958). *Theory of stability of motion*. United States Atomic Energy Commission.
11. Мазко, О. Г. (2023). *Матричні методи аналізу та синтезу динамічних систем*. Наукова думка.

12. Pichkur, V. (2017). On practical stability of differential inclusions using Lyapunov functions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 22(5), 1977–1986.
13. Pichkur, V. V., & Sasonkina, M. S. (2012). Practical stabilization of discrete control systems. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 81(6), 877–884.
14. Капустян, О. В., Пічкур В. В., і Собчук, В. В. (2023). *Стійкість та аттрактори еволюційних рівнянь*. Київський національний університет імені Тараса Шевченка.
15. Terrell, W. J. (2009). *Stability and stabilization: An introduction*. Princeton University Press.
16. Vlahakis, E., Dritsas, L., & Halikias, G. (2019). Distributed LQR-based suboptimal control for coupled linear systems. *IFAC-PapersOnLine*, 52(20), 109–114.
17. Zabczyk, J. (2020). *Mathematical control theory: An introduction*. Birkhäuser.
18. Zubov, V. I. (1962). *Mathematical methods for the study of automatic control systems*. Pergamon Press.

Pichkur V. V., Hahurin Ye. R.

ON OPTIMAL STABILIZATION OF TWO-MASS SYSTEMS UNDER PHASE CONSTRAINTS

Summary

The article highlights a combined approach to solving the optimal stabilization problem for two-mass oscillatory systems. This approach utilizes sufficient optimality conditions on the one hand, and practical stability methods on the other, to ensure constraints on the system state. Two types of phase constraints are considered: in the form of a polygon and of an ellipsoidal type. The mathematical model is described by a linear non-autonomous system. The construction of the optimal control is carried out using the matrix Riccati equation. Theorems on the construction of optimal control under specified phase constraints are proven. The results of computer modeling are presented. The constructed algorithm can be applied to solve applied problems related to damping excess oscillations in control systems.

Keywords: optimal stabilization, practical stability, oscillatory system, phase constraints, Lyapunov function.

REFERENCES

1. Bacciotti, A. (2019). *Stability and control of linear systems*. Springer-Verlag.
2. Fuller, C. C., Elliott, S. J., & Nelson, P. A. (1996). *Active control of vibration*. Academic Press.
3. Garashchenko, F. G., & Bublyk, B. M. (2000). Rozvytok metodiv praktychnoi stiiikosti ta yikh vykorystannia dlia analizu, otsinky i optymizatsii dynamiky puchkiv [Development of methods of practical stability and their application to analysis, estimation and optimization of bundle dynamics]. *Visnyk Kyivskoho Universytetu. Kibernetika*, (1), 4–17. [in Ukrainian].
4. Garashchenko, F. G., & Pichkur, V. V. (1999). On optimal sets of practical stability. *Journal of Automation and Information Sciences*, 31(4–5), 1–12.
5. Haddad, W. M., & Chellaboina, V. (2008). *Nonlinear dynamical systems and control: A Lyapunov-based approach*. Princeton University Press.
6. Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice Hall.
7. Kirichenko, N. F. (1978). *Vvedeniye v teoriyu stabilizatsii dvizheniya* [Introduction to the theory of motion stabilization]. Vyshcha shkola. [in Russian].

8. Kuntsevich, V. M., & Lychak, M. M. (1977). *Sintez sistem avtomaticheskogo upravleniya s pomoshchyu funktsiy Lyapunova* [Synthesis of control systems using Lyapunov functions]. Nauka. [in Russian].
9. LaSalle, L. P., & Lefschetz, S. (1961). *Stability by Lyapunov's direct method*. Academic Press.
10. Malkin, I. G. (1958). *Theory of stability of motion*. United States Atomic Energy Commission.
11. Mazko, O. G. (2023). *Matrychni metody analizu ta syntezu dynamichnykh system* [Matrix methods for analysis and synthesis of dynamic systems]. Naukova dumka. [in Ukrainian].
12. Pichkur, V. (2017). On practical stability of differential inclusions using Lyapunov functions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 22(5), 1977–1986.
13. Pichkur, V. V., & Sasonkina, M. S. (2012). Practical stabilization of discrete control systems. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 81(6), 877–884.
14. Kapustian, O. V., Pichkur, V. V., & Sobchuk, V. V. (2023). *Stikist ta atraktory evoliutsiinykh rivnian* [Stability and attractors of evolutionary equations]. Kyivskyi natsionalnyi universytet imeni Tarasa Shevchenka. [in Ukrainian].
15. Terrell, W. J. (2009). *Stability and stabilization: An introduction*. Princeton University Press.
16. Vlahakis, E., Dritsas, L., & Halikias, G. (2019). Distributed LQR-based suboptimal control for coupled linear systems. *IFAC-PapersOnLine*, 52(20), 109–114.
17. Zabczyk, J. (2020). *Mathematical control theory: An introduction*. Birkhäuser.
18. Zubov, V. I. (1962). *Mathematical methods for the study of automatic control systems*. Pergamon Press.

УДК 004.032.26:519.6

І. В. Малик, д-р фіз.-мат. наук, професор

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

кафедра математичних проблем управління і кібернетики

вул. Коцюбинського, 2, м. Чернівці, 58012, Україна

e-mail: i.malyk@chnu.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1291-9167>

В. В. Нестеренко, аспірант

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

кафедра прикладної математики та інформаційних технологій

вул. Коцюбинського, 2, м. Чернівці, 58012, Україна

e-mail: nesterenko.volodymyr@chnu.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0002-1296-976X>

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧНОЇ АДАПТАЦІЇ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

Мета. Метою роботи є систематизація методів динамічної адаптації нейронних мереж і визначення впливу структурного проріджування, зростання архітектури, комбінованої перебудови й умовного виконання на точність класифікації, кількість параметрів та оцінену вартість прямого проходу.

Методи. У роботі виокремлено структурне проріджування, зростання архітектури, комбіновану перебудову й умовне виконання. Для кожної групи описано механізми зміни структури, спосіб контролю складності та врахування обмежень на обчислювальні витрати. Експериментальне порівняння виконано на наборах зображень різної складності з фіксованим поділом на навчальну, валідаційну й тестову вибірки. Для всіх методів використано спільні навчальні бюджети та початкові значення генератора випадкових чисел. Якість оцінювали за фінальною та найвищою валідаційною точністю, а також за її динамікою впродовж навчання. Компактність визначали за кількістю параметрів і часткою ненульових ваг, обчислювальні витрати — за оціненою кількістю операцій прямого проходу.

Результати. За коротких навчальних протоколів методи структурного проріджування та помірною стиснення загалом забезпечили найбільш збалансоване співвідношення точності, компактності моделі й обчислювальних витрат. Агресивніше стиснення зменшувало розмір моделі, але могло супроводжуватися втратою точності. Умовне виконання не дало конкурентної точності на складнішому наборі зображень, що свідчить про чутливість таких підходів до навчального бюджету та конфігурації керувального механізму.

Висновки. Уперше в межах єдиного короткого експериментального протоколу системно зіставлено чотири групи методів динамічної адаптації нейронних мереж. Отримані результати показують, що вибір методу має визначатися вимогами конкретної задачі, складністю даних, базовою архітектурою та доступними ресурсами. Для практичного оцінювання моделей доцільно поєднувати показники точності й компактності з вимірюванням фактичної затримки та енергоспоживання на цільовому обладнанні.

MSC: 68T07.

Ключові слова: нейронні мережі, оптимізація гіперпараметрів, глибинне навчання, машинне навчання, архітектура нейронної мережі, динамічна адаптація, складність алгоритму, адаптивні обчислення.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1\(47\).371266](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1(47).371266)

Стаття надійшла до редакції: 15.05.2026. *Затверджена до друку:* 24.05.2026.

Опублікована: 15.09.2026.



Ця стаття поширюється на умовах ліцензії Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

Вступ

Щоб досягти високої точності класифікації, часто використовують моделі з великою кількістю параметрів і значними обчислювальними витратами. На пристроях з обмеженою пам'яттю, часом відповіді та енергоспоживанням такі моделі можуть бути непридатними. Одним із підходів до зменшення цих витрат є динамічна зміна структури мережі. На відміну від статичних моделей із фіксованим графом обчислень, динамічні нейронні мережі можуть змінювати структуру під час навчання або активувати лише частину компонентів для конкретного вхідного прикладу. Тому такі методи варто порівнювати не лише за точністю, а й за компактністю моделі та обчислювальними витратами.

Динамічну адаптацію нейронних мереж реалізують кількома способами. Методи проріджування зменшують надмірність моделі, вилучаючи окремі ваги, канали, фільтри або шари [1–3]. Методи зростання архітектури, навпаки, збільшують ємність моделі, коли її поточної структури недостатньо для подання даних [4; 5]. Гібридні підходи поєднують вилучення та додавання структурних компонентів, а методи умовного виконання визначають маршрут обчислень залежно від властивостей вхідного прикладу [6; 7]. LayerMerge і CHWP враховують структуру шарів та фільтрів під час стиснення, а Always-Sparse Training поєднує підтримання розрідже-

ної структури зі зростанням з'єднань [8–10]. Усі ці підходи мають спільне завдання: зберегти якість моделі за обмежених обчислювальних ресурсів. Водночас вони відрізняються моментом і гранулярністю адаптації, базовими архітектурами, навчальними бюджетами та показниками вартості обчислень. Через це їхні результати важко безпосередньо порівнювати.

Актуальність

У задачах класифікації нейронні мережі часто працюють не лише на серверах, а й на пристроях з обмеженою пам'яттю, часом відповіді та енергоспоживанням. За таких умов високої точності недостатньо: важливими стають кількість параметрів і обчислень, потрібних для отримання прогнозу. Динамічна адаптація дає змогу змінювати структуру моделі або обсяг обчислень під час навчання чи для конкретного входу. Тому потрібно встановити, як різні механізми адаптації впливають на точність і вартість використання моделі.

Мета дослідження

Метою дослідження є систематизація методів динамічної адаптації нейронних мереж і визначення того, як структурне проріджування, зростання архітектури, комбінована перебудова та умовне виконання впливають на точність класифікації, кількість параметрів і оцінену вартість прямого проходу. Результати роботи мають допомогти обрати метод адаптації для задач класифікації з ресурсними обмеженнями.

Методологія

Методологія поєднує огляд підходів до динамічної адаптації з їх експериментальним зіставленням. Методи поділено за характером зміни структури мережі: проріджування, зростання, комбінована перебудова та умовне виконання по-різному змінюють її ємність і обчислювальне навантаження. Щоб зіставити ці підходи в однакових умовах, для всіх експериментів зафіксовано поділ даних, бюджет навчання та показники якості й обчислювальних витрат.

Проріджування та стиснення

Методи проріджування починають з повної або надмірно параметризованої архітектури та поступово вилучають найменш значущі ваги, канали, фільтри або шари. До цієї групи належать *Learning both Weights*

and Connections [1], Deep Compression [11], Network Slimming [2], Runtime Neural Pruning [12], PruneTrain [13], MorphNet [14] і LayerMerge [8]. Серед інших представників — L-OBS, CBS, CUP, нейропластичне проріджування та CHWP [9; 15–18]. Попри відмінності в критеріях важливості, ці підходи оцінюють внесок структурних компонентів у якість моделі й вилучають найменш корисні з них. Завдяки цьому скорочену архітектуру не потрібно повністю проектувати вручну.

Бінарна маска M описує узагальнений процес проріджування:

$$\widetilde{W} = M \odot W, \quad (1)$$

де $\odot$ позначає поелементне множення, $W = \{w_i, i \in I\}$ — ваги переходів нейронної мережі між шарами, $\widetilde{W}$ — оптимізовані ваги після проріджування. Нульові елементи маски вимикають відповідні параметри або структурні блоки. За вагового проріджування маску часто визначають пороговим правилом

$$M_i = \mathbf{1}_{\{|w_i| > \tau\}}, \quad (2)$$

де w_i — ваговий параметр, τ — поріг важливості, а $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ — індикаторна функція. Для каналів або фільтрів замість модуля ваги використовують оцінку важливості s_i :

$$M_i = \mathbf{1}_{\{s_i > \tau\}}. \quad (3)$$

Оцінку s_i можуть обчислювати за нормами ваг, масштабовальними коефіцієнтами пакетної нормалізації, градієнтною інформацією, матрицею Гессе або спеціальними регуляризаторами.

Деякі методи враховують обчислювальні витрати або заданий рівень розрідженості безпосередньо в цільовій функції. Для заданої архітектури $\mathcal{A}$ ваги W^* знаходять із задачі

$$W^* \in \arg \min_W [\mathcal{L}_{\text{task}}(W; \mathcal{A}) + \lambda R(W, \mathcal{A})], \quad (4)$$

де W^* — один із розв’язків задачі, $\mathcal{L}_{\text{task}}(W; \mathcal{A})$ — функція втрат основної задачі, $R(W, \mathcal{A})$ — регуляризаційний доданок, що штрафує за надмірну складність моделі або відхилення від заданого рівня розрідженості, а λ визначає його вплив на оптимізацію.

Якщо маску M або інші структурні змінні навчають разом із вагами, оптимізують усі ці змінні. В інших методах маску періодично оновлюють

або формують після оптимізації ваг, використовуючи оцінки важливості s_i .

Доданок $R(W, \mathcal{A})$ не завжди задають безпосередньо через ваги. У Network Slimming регуляризацію накладають на масштабувальні коефіцієнти пакетної нормалізації, у PruneTrain — на групи параметрів, а в MorphNet — на апаратно орієнтовану оцінку вартості структури. Тому методи цієї групи різняться регуляризатором і способом оновлення структури.

Методи зростання архітектури

На відміну від проріджування, методи зростання починають із компактної архітектури й додають вузли, канали або з'єднання, коли поточної ємності моделі вже недостатньо. До цієї групи належать GWR [4], GradMax [19], Dynamically Growing Neural Network Architecture [20] і DEN [21]. Інші підходи використовують динамічні вузли або розріджене навчання зі зростанням з'єднань [5; 10]. Такий механізм корисний у безперервному навчанні та на периферійних пристроях, коли оптимальний початковий розмір моделі невідомий.

На кроці t архітектура зростає за правилом

$$\mathcal{A}_{t+1} = \mathcal{A}_t \cup \Delta\mathcal{A}_t, \quad (5)$$

де $\Delta\mathcal{A}_t$ — множина елементів, що додаються на кроці t . У найпростішій схемі до неї включають елементи з оцінкою r_u , вищою за поріг:

$$\Delta\mathcal{A}_t = \{u \mid r_u > \tau_g\}, \quad (6)$$

де r_u — оцінка доцільності включення елемента u , а τ_g — поріг зростання. Значення r_u можуть ґрунтуватися на величині градієнта, локальній похибці апроксимації, новизні вхідних даних або потребі в окремому підпросторі ознак. Отже, архітектуру розширюють лише для тих елементів, для яких обраний критерій вказує на недостатню ємність моделі.

Гібридні підходи зростання та проріджування

Гібридні методи поєднують додавання та вилучення структурних елементів у процесі перебудови архітектури. До цієї групи належать AdaNet [22], NeST [23], Always-Sparse Training [10] і підходи на основі динамічних вузлів [5]. У загальному випадку вони вилучають малокорисні елементи та додають нові, коли поточна структура обмежує подальше зменшення функції втрат.

На кроці t архітектура оновлюється за правилом

$$\mathcal{A}_{t+1} = (\mathcal{A}_t \setminus \mathcal{P}_t) \cup \mathcal{G}_t, \quad (7)$$

де $\mathcal{P}_t$ — множина елементів, вибраних для вилучення, а $\mathcal{G}_t$ — множина елементів, доданих на кроці t . Поєднання цих операцій дає змогу контролювати компактність моделі та компенсувати можливе зниження її виразності після проріджування.

Умовне виконання, керувальні механізми та динамічне маршрутування

Методи умовного виконання добирають активний маршрут обчислень окремо для кожного вхідного прикладу. До них належить SkipNet, у якому керувальна мережа вибірково пропускає залишкові блоки [7]. Інші представники цього класу — Channel Gating, Conditional Computation, IamNN, Dynamic Slimmable Network та Instance-wise Sparsity [6; 24–27]. Для різних входів активуються різні частини спільного графа, тому обчислювальні витрати залежать від вибраного маршруту.

Нехай $z_l(x) \in \{0, 1\}$ — керувальна змінна для l -го шару, блоку або каналу за входу x . Тоді механізм умовної активації можна подати так:

$$\begin{aligned} z_l(x) &= \mathbf{1}_{\{g_l(x) > \tau\}}, \\ s(x) &= f_{\mathcal{A}, W, z(x)}(x), \\ \hat{y}(x) &= \arg \max_{k \in \{1, \dots, K\}} s_k(x). \end{aligned} \quad (8)$$

де $g_l(x)$ — оцінка керувального механізму для l -го компонента, $s(x)$ — вектор вихідних оцінок класів, K — кількість класів, а $\hat{y}(x)$ — прогнозована мітка.

Щоб уникнути тривіального розв'язку з активацією всіх компонентів, до цільової функції додають штраф за обчислювальні витрати:

$$(W^*, z^*) \in \arg \min_{W, z} [\mathcal{L}_{\text{task}}(W, z) + \beta \mathbb{E}_x[C(z(x))]]. \quad (9)$$

Тут $C(z(x))$ — оцінка вартості маршруту, активованого для входу x , $\mathbb{E}_x[\cdot]$ — усереднення за вхідними даними, а β визначає вагу штрафу. Спосіб оптимізації керувальних функцій g_l залежить від конкретного методу. На відміну від проріджування, умовне виконання не фіксує одну скорочену структуру, а добирає маршрут для кожного входу.

Узагальнювальне порівняння

Розглянуті підходи об'єднує те, що вони оптимізують не лише вагові параметри, а й структуру або маршрут виконання моделі. Проріджування скорочує наявну мережу, зростання збільшує її ємність, а гібридні методи поєднують обидва напрями перебудови. Умовне виконання, своєю чергою, добирає активну частину мережі для кожного входу. Такий поділ дає змогу зіставити методи за моментом, гранулярністю та очікуваною вартістю структурних змін.

Експериментальна постановка

Порівняння проведено у двох контрольованих протоколах. Перший ґрунтується на MNIST — наборі одноканальних зображень рукописних цифр розміром 28×28 пікселів [28]. У другому використано CIFAR-10 — набір кольорових зображень розміром 32×32 пікселі з 10 класами [29; 30]. MNIST розглянуто як простіший, а CIFAR-10 — як складніший сценарій оцінювання.

Індекси офіційних навчальних частин одноразово перемішали з початковим значенням генератора випадкових чисел 42. Початковий сегмент утворив валідаційну вибірку, а наступний — навчальну; їхні обсяги наведено в табл. 8. Тестові вибірки сформовано з початкових сегментів офіційних тестових частин. Навчальні, валідаційні й тестові підвибірки не перетиналися та були спільними для всіх порівнюваних методів.

Табл. 8: Параметри експериментальних протоколів

Набір даних	Навчальна	Валідаційна	Тестова	Епохи
MNIST	10000	2000	2000	8
CIFAR-10	20000	5000	5000	12

Основне порівняння виконано за валідаційними показниками. Кожен експеримент повторили для п'яти початкових значень генератора випадкових чисел: 7, 11, 23, 42 і 99. Ці значення впливали на ініціалізацію моделі та порядок навчальних даних, але не змінювали склад зафіксованих підвибірок. У таблицях наведено середні значення та стандартні відхилення. Бюджети у 8 епох для MNIST і 12 епох для CIFAR-10 визначили до

запуску експериментів, щоб усі методи пройшли заплановані етапи структурної адаптації та донавчання. Довші режими донавчання не входили до основного короткого протоколу.

Якість класифікації оцінювали за фінальною та найвищою валідаційною точністю, а також за її динамікою за епохами. Компактність моделі характеризували кількістю параметрів, кількістю й часткою ненульових ваг; обчислювальні витрати — оцінкою FLOPs прямого проходу. Для методів умовного виконання додатково зберігали характеристики маршрутизації, зокрема частку ранніх виходів і середню вартість активованої підмережі.

Результати

Результати на MNIST

Найвищу середню валідаційну точність наприкінці навчання на MNIST продемонстрував PruneTrain (табл. 9). Близьку середню точність продемонстрував Network Slimming, а Runtime Neural Pruning також залишився на конкурентному рівні. Серед цих трьох методів PruneTrain мав найменше стандартне відхилення, тобто найменший розкид результатів між запусками.

Wide CNN + BN досягла найвищої валідаційної точності в окремому запуску, але її середня фінальна точність була нижчою, а розкид між запусками — більшим, ніж у PruneTrain і Network Slimming. ASFP мав найменшу кількість параметрів і найнижчу оцінку FLOPs, проте поступився лідерам за точністю. За обраного протоколу PruneTrain і Network Slimming забезпечили найкраще співвідношення фінальної валідаційної точності, компактності моделі та оціненої вартості прямого проходу.

Табл. 9: Порівняння методів на MNIST за п'ятьма запусками

Метод	Сер. вал. точн.	Ст. відх.	Макс. вал. точн.	Параметри	Оц. FLOPs
PruneTrain	0.831	0.006	0.831	11 550	2 614 735
Network Slimming	0.827	0.016	0.828	11 314	2 560 280
Runtime Neural Pruning	0.819	0.030	0.819	11 816	2 806 420
ASFP	0.796	0.016	0.810	7 774	1 669 985
Wide CNN + BN	0.794	0.050	0.837	16 474	4 505 914
Weights+Connections CNN	0.773	0.053	0.825	16 474	4 505 914
MorphNet	0.767	0.038	0.800	10 214	2 256 083
LayerMerge	0.755	0.079	0.792	14 586	4 502 170

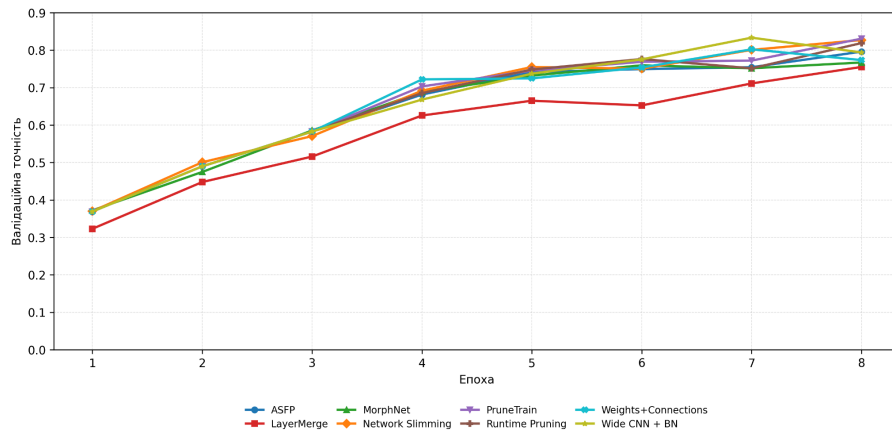


Рис. 1: Динаміка валідаційної точності методів на MNIST. Лінії показують середні значення, а заштриховані області — розкид між п'ятьма запусками.

Рисунок 1 показує, як ці відмінності формуються впродовж навчання. PruneTrain і Network Slimming уже на ранніх епохах досягають високої валідаційної точності та зберігають близькі траєкторії до завершення протоколу. Для Wide CNN + BN криві окремих запусків розходяться сильніше. Отже, графік доповнює табличні результати оцінкою стабільності навчання, а не лише фінальної точності.

Результати на CIFAR-10

На CIFAR-10 різниця між підходами виявилася виразнішою, ніж на MNIST (табл. 10). Найвищу середню валідаційну точність наприкінці навчання забезпечила повна базова модель Wide CNN + BN. Серед адаптивних і компресійних підходів найкращий результат мав Weights+Connections CNN. Deep CNN, Runtime Neural Pruning, LayerMerge, MorphNet і Network Slimming утворили близьку за результатами групу з валідаційною точністю від 0,627 до 0,642.

На CIFAR-10 агресивніше стиснення супроводжувалося нижчою точністю. ASFP і Channel Pruning мали найнижчі оцінки FLOPs серед методів структурного проріджування, однак поступалися за точністю повній моделі й менш агресивним схемам стиснення. Жоден із розглянутих методів умовного виконання в межах цього протоколу не досяг конкурентної валідаційної точності. Отже, за бюджету в 12 епох адаптивне маршрутування не мало переваги за використаними показниками. Його ефективність

доцільно окремо оцінити за довгих режимів навчання та на спеціально підібраних архітектурах.

Табл. 10: Порівняння методів на CIFAR-10 за п'ятьма запусками

Метод	Сер. вал. точн.	Ст. відх.	Макс. вал. точн.	Параметри	Оц. FLOPs
Wide CNN + BN	0.674	0.008	0.674	92 298	18 498 346
Weights+Connections CNN	0.652	0.009	0.652	53 186	10 772 746
Deep CNN	0.642	0.004	0.643	76 066	10 818 346
Runtime Neural Pruning	0.640	0.010	0.643	40 258	6 962 429
LayerMerge	0.635	0.016	0.636	50 530	10 767 466
MorphNet	0.629	0.007	0.629	34 034	5 700 736
Network Slimming	0.627	0.009	0.628	38 184	6 439 268
PruneTrain	0.617	0.015	0.620	35 100	6 046 295
Channel Pruning	0.612	0.023	0.617	20 785	3 277 917
ASFP	0.581	0.018	0.599	13 919	2 419 568
Dynamic Slimmable	0.494	0.029	0.495	608 147	177 735 812
Channel Gating	0.470	0.022	0.470	345 945	94 969 553
IamNN	0.448	0.007	0.450	382 800	110 902 788
Conditional Computation	0.444	0.010	0.444	467 787	133 108 650
Instance-wise Sparsity	0.440	0.022	0.445	208 971	59 759 082
SkipNet	0.412	0.057	0.417	346 234	94 969 553

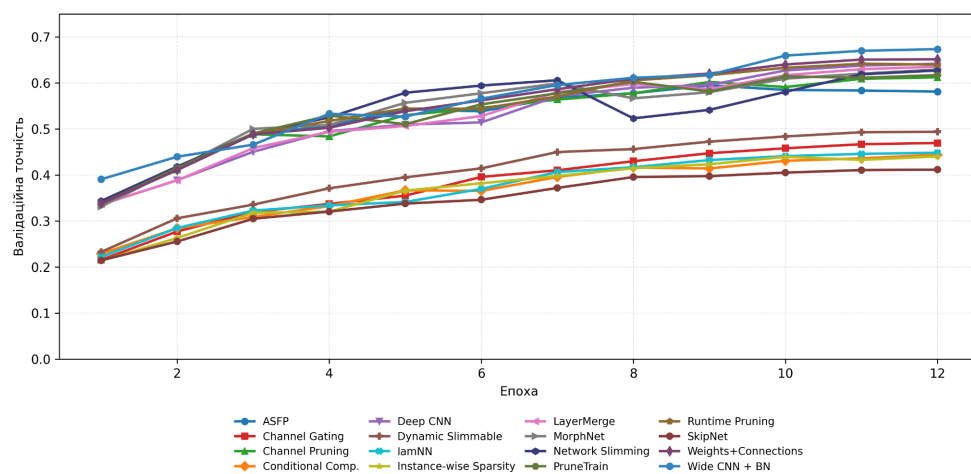


Рис. 2: Динаміка валідаційної точності методів на CIFAR-10. Лінії показують середні значення, а заштриховані області — розкид між п'ятьма запусками.

Криві на рис. 2 засвідчують, що методи умовного виконання відстають

від повної моделі та методів структурного проріджування вже на ранніх епохах. До завершення 12-ї епохи цей розрив не зменшується. Отже, за заданого бюджету навчання ці методи не лише мають нижчу фінальну точність, а й не скорочують розрив з іншими підходами впродовж навчання.

Обговорення

Порівняння на MNIST і CIFAR-10 у межах заданих навчальних бюджетів показало, що ефективність методів динамічної адаптації залежить від складності набору даних, базової архітектури та протоколу навчання. На MNIST найвищі результати за середньою валідаційною точністю наприкінці навчання продемонстрували PruneTrain і Network Slimming; на CIFAR-10 найточнішою була повна базова модель Wide CNN + BN, а серед адаптивних і компресійних підходів — Weights+Connections CNN. Отже, за розглянутих умов жоден із методів не мав безумовної переваги одночасно за точністю, компактністю та оціненими обчислювальними витратами.

Порівнювати ці результати з даними літератури слід з урахуванням різних поділів даних, базових архітектур і тривалості навчання. На повному MNIST за довших режимів автори Learning both Weights and Connections повідомляють про тестову точність 99,2% для прорідженої LeNet-5 за приблизно 12-разового зменшення кількості ваг [1]; у роботах Deep Compression, DeepHoyer і FreezeNet також розглянуто стиснення зі збереженням високої якості [11; 31; 32]. Праці про Network Slimming, ASFP, CondenseNet, LayerMerge і CHWP оцінюють стиснення на CIFAR-10 в інших експериментальних конфігураціях [2; 8; 9; 33; 34]. Тому результати цієї роботи характеризують порівняльну поведінку реалізованих методів за спільних скорочених підвибірок і коротких бюджетів навчання, а не їхню граничну точність.

Агресивніше стиснення зменшує кількість параметрів і оцінку FLOPs, однак може супроводжуватися втратою точності: ASFP був найкомпактнішим методом в обох протоколах, проте поступався лідерам за валідаційною точністю. Методи умовного виконання на CIFAR-10 у межах короткого протоколу також не забезпечили конкурентної точності, що вказує на їхню чутливість до тривалості навчання, конфігурації керувального механізму та базової архітектури. Отже, ці підходи потребують оцінювання

в цільових сценаріях, де адаптивний розподіл обчислень має практичну цінність.

Наукова новизна

У роботі вперше в межах єдиного короткого експериментального протоколу системно зіставлено чотири групи методів динамічної адаптації нейронних мереж. Запропоноване зіставлення враховує не лише валідаційну точність, а й співвідношення між якістю класифікації, компактністю моделі та оціненими обчислювальними витратами.

Висновки

У роботі систематизовано методи динамічної адаптації нейронних мереж за характером зміни структури та умовами виконання обчислень. Запропонована схема охоплює структурне проріджування, зростання архітектури, комбіновану перебудову й умовне виконання та дає змогу описувати їх за спільними ознаками: моментом і гранулярністю адаптації, способом контролю складності та очікуваними обчислювальними витратами.

Порівняльне оцінювання в єдиному експериментальному протоколі показало, що жоден із розглянутих підходів не має безумовної переваги одночасно за точністю, компактністю моделі та обчислювальними витратами. Вибір методу має визначатися вимогами конкретної задачі, складністю даних, базовою архітектурою й доступним навчальним бюджетом. За обраних протоколів методи структурного проріджування та помірного стиснення загалом забезпечували найбільш збалансоване співвідношення якості моделі й витрат, тоді як агресивне стиснення та умовне виконання потребують ретельнішого налаштування й оцінювання в цільовому сценарії застосування.

Отримані результати також показують, що оцінка FLOPs є лише наближеним показником обчислювальної ефективності й не замінює вимірювання фактичної затримки та енергоспоживання на цільовому обладнанні. Подальші дослідження варто спрямувати на перевірку методів за довших протоколів навчання, добір архітектур для динамічної маршрутизації та апаратно орієнтоване оцінювання моделей. Особливий інтерес становлять гібридні методи, що поєднують проріджування, зростання й умовне виконання в одному циклі адаптації. Для них важливо формалізувати правила

взаємодії цих механізмів, критерії додавання та вилучення структурних елементів, а також спосіб урахування обчислювальних обмежень у спільній оптимізаційній задачі. Це дасть змогу точніше встановити межі застосовності окремих підходів у ресурсно обмежених системах.

Розкриття інформації

Декларація щодо використання штучного інтелекту (ШІ) та технологій, що допомагають авторам. Під час підготовки цієї роботи автори використовували OpenAI Codex (GPT-5) для допомоги в підготовці програмного коду експериментального середовища, а також мовного й стилістичного редагування тексту. Автори перевірили фактичну точність і бібліографічні посилання та несуть повну відповідальність за кінцевий результат.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування. Дослідження виконано без зовнішнього фінансування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Han, S., Pool, J., Tran, J., & Dally, W. J. (2015). *Learning both weights and connections for efficient neural networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1506.02626>
2. Liu, Z., Li, J., Shen, Z., Huang, G., Yan, S., & Zhang, C. (2017). *Learning efficient convolutional networks through network slimming*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1708.06519>
3. Hoefler, T., Alistarh, D., Ben-Nun, T., Dryden, N., & Peste, A. (2021). *Sparsity in deep learning: Pruning and growth for efficient inference and training in neural networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2102.00554>
4. Marsland, S., Shapiro, J., & Nehmzow, U. (2002). A self-organising network that grows when required. *Neural Networks*, 15(8), 1041–1058. [https://doi.org/10.1016/S0893-6080\(02\)00078-3](https://doi.org/10.1016/S0893-6080(02)00078-3)
5. Wang, M., Yang, X., Qian, Y., Lei, Y., Cai, J., Huan, Z., Lin, X., & Dong, H. (2022). Adaptive neural network structure optimization algorithm based on dynamic nodes. *Current Issues in Molecular Biology*, 44(2), 817–832. <https://doi.org/10.3390/cimb44020056>
6. Bengio, E., Bacon, P.-L., Pineau, J., & Precup, D. (2016). *Conditional computation in neural networks for faster models*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1511.06297>
7. Wang, X., Yu, F., Dou, Z.-Y., Darrell, T., & Gonzalez, J. E. (2018). *SkipNet: Learning dynamic routing in convolutional networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.09485>

8. Kim, J., Halabi, M. E., Ji, M., & Song, H. O. (2024). *LayerMerge: Neural network depth compression through layer pruning and merging*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2406.12837>
9. Geng, X., Gao, J., Zhang, Y., & Xu, D. (2024). Complex hybrid weighted pruning method for accelerating convolutional neural networks. *Scientific Reports*, 14, 5570. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-55942-5>
10. Heddes, M., Srinivasa, N., Givargis, T., & Nicolau, A. (2025). *Always-sparse training by growing connections with guided stochastic exploration*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2401.06898>
11. Han, S., Mao, H., & Dally, W. J. (2016). *Deep compression: Compressing deep neural networks with pruning, trained quantization and Huffman coding*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1510.00149>
12. Lin, J., Rao, Y., Lu, J., & Zhou, J. (2017). Runtime neural pruning. In *Advances in neural information processing systems*. Curran Associates, Inc. https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2017/file/a51fb975227d6640e4fe47854476d133-Paper.pdf
13. Lym, S., Choukse, E., Zangeneh, S., Wen, W., Sanghavi, S., & Erez, M. (2019). PruneTrain: Fast neural network training by dynamic sparse model reconfiguration. In *Proceedings of the International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis* (pp. 1–13). ACM. <https://doi.org/10.1145/3295500.3356156>
14. Gordon, A., Eban, E., Nachum, O., Chen, B., Wu, H., Yang, T.-J., & Choi, E. (2018). *MorphNet: Fast & simple resource-constrained structure learning of deep networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.06798>
15. Dong, X., Chen, S., & Pan, S. J. (2017). *Learning to prune deep neural networks via layer-wise optimal brain surgeon*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1705.07565>
16. Yu, X., Serra, T., Ramalingam, S., & Zhe, S. (2022). *The combinatorial brain surgeon: Pruning weights that cancel one another in neural networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.04466>
17. Duggal, R., Xiao, C., Vuduc, R., & Sun, J. (2019). *CUP: Cluster pruning for compressing deep neural networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1911.08630>
18. Camacho, J. D., Villaseñor, C., Lopez-Franco, C., & Arana-Daniel, N. (2022). Neuroplasticity-based pruning method for deep convolutional neural networks. *Applied Sciences*, 12(10), 4945. <https://doi.org/10.3390/app12104945>
19. Evci, U., van Merriënboer, B., Unterthiner, T., Vladymyrov, M., & Pedregosa, F. (2022). *GradMax: Growing neural networks using gradient information*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2201.05125>
20. Piyasena, D., Thathsara, M., Kanagarajah, S., Lam, S. K., & Wu, M. (2020). Dynamically growing neural network architecture for lifelong deep learning on the edge. In *2020 30th International Conference on Field-Programmable Logic and Applications (FPL)* (pp. 262–268). <https://doi.org/10.1109/FPL50879.2020.00051>

21. Yoon, J., Yang, E., Lee, J., & Hwang, S. J. (2018). *Lifelong learning with dynamically expandable networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1708.01547>
22. Cortes, C., Gonzalvo, X., Kuznetsov, V., Mohri, M., & Yang, S. (2017). *AdaNet: Adaptive structural learning of artificial neural networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1607.01097>
23. Dai, X., Yin, H., & Jha, N. K. (2018). *NeST: A neural network synthesis tool based on a grow-and-prune paradigm*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.02017>
24. Hua, W., Zhou, Y., De Sa, C., Zhang, Z., & Suh, G. E. (2019). *Channel gating neural networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1805.12549>
25. Leroux, S., Molchanov, P., Simoens, P., Dhoedt, B., Breuel, T., & Kautz, J. (2018). *IamNN: Iterative and adaptive mobile neural network for efficient image classification*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1804.10123>
26. Li, C., Wang, G., Wang, B., Liang, X., Li, Z., & Chang, X. (2021). *Dynamic slimmable network*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.13258>
27. Liu, C., Wang, Y., Han, K., Xu, C., & Xu, C. (2019). *Learning instance-wise sparsity for accelerating deep models*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1907.11840>
28. LeCun, Y., Bottou, L., Bengio, Y., & Haffner, P. (1998). Gradient-based learning applied to document recognition. *Proceedings of the IEEE*, 86(11), 2278–2324. <https://doi.org/10.1109/5.726791>
29. Krizhevsky, A. (2009). Learning multiple layers of features from tiny images. In *Technical Report, Computer Science Department, University of Toronto, University of Toronto*. <https://www.cs.toronto.edu/~kriz/learning-features-2009-TR.pdf>
30. *A well-known image classification dataset* (n.d.). CIFAR-10 — UCI Machine Learning Repository. <https://doi.org/10.24432/C5889J>
31. Yang, H., Wen, W., & Li, H. (2020). *DeepHoyer: Learning sparser neural network with differentiable scale-invariant sparsity measures*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1908.09979>
32. Wimmer, P., Mehnert, J., & Condurache, A. (2020). *FreezeNet: Full performance by reduced storage costs* [Proceedings of the Asian Conference on Computer Vision (ACCV)]. https://openaccess.thecvf.com/content/ACCV2020/html/Wimmer_FreezeNet_Full_Performance_by_Reduced_Storage_Costs_ACCV_2020_paper.html
33. He, Y., Dong, X., Kang, G., Fu, Y., Yan, C., & Yang, Y. (2018). *Asymptotic soft filter pruning for deep convolutional neural networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1808.07471>
34. Huang, G., Liu, S., van der Maaten, L., & Weinberger, K. Q. (2018). *CondenseNet: An efficient DenseNet using learned group convolutions*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.09224>

Malyk I. V., Nesterenko V. V.

COMPARATIVE ANALYSIS OF DYNAMIC ADAPTATION OF NEURAL NETWORKS

Summary

Purpose. The study aims to systematize methods for dynamic adaptation of neural networks and to determine how structural pruning, architecture growth, combined restructuring, and conditional execution affect classification accuracy, parameter count, and estimated forward-pass cost.

Methods. The study distinguishes structural pruning, architecture growth, combined restructuring, and conditional execution. For each group, it describes the mechanisms of structural change, the approach to complexity control, and the treatment of computational constraints. Experimental comparison was performed on image datasets of different complexity with fixed training, validation, and test subsets. Classification quality was assessed by final and best validation accuracy and training dynamics; model compactness was assessed by parameter count and the proportion of nonzero weights; computational cost was assessed by the number of forward-pass operations.

Results. Under short training protocols, structural pruning and moderate compression generally provided the most balanced trade-off among accuracy, model compactness, and computational cost. More aggressive compression reduced model size but could decrease accuracy. Conditional execution did not achieve competitive accuracy on the more complex image dataset, indicating that such methods are sensitive to the training budget and the configuration of the control mechanism.

Conclusions. For the first time, four groups of dynamic neural-network adaptation methods were systematically compared within a unified short experimental protocol. The results show that method selection should be guided by task requirements, data complexity, the base architecture, and available resources. Practical model assessment should complement accuracy and compactness measures with measurements of actual inference latency and energy consumption on target hardware.

Keywords: neural networks, hyperparameter optimization, deep learning, machine learning, neural network architecture, dynamic adaptation, computational cost, adaptive computation.

REFERENCES

1. Han, S., Pool, J., Tran, J., & Dally, W. J. (2015). *Learning both weights and connections for efficient neural networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1506.02626>
2. Liu, Z., Li, J., Shen, Z., Huang, G., Yan, S., & Zhang, C. (2017). *Learning efficient convolutional networks through network slimming*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1708.06519>
3. Hoeffer, T., Alistarh, D., Ben-Nun, T., Dryden, N., & Peste, A. (2021). *Sparsity in deep learning: Pruning and growth for efficient inference and training in neural networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2102.00554>
4. Marsland, S., Shapiro, J., & Nehmzow, U. (2002). A self-organising network that grows when required. *Neural Networks*, 15(8), 1041–1058. [https://doi.org/10.1016/S0893-6080\(02\)00078-3](https://doi.org/10.1016/S0893-6080(02)00078-3)
5. Wang, M., Yang, X., Qian, Y., Lei, Y., Cai, J., Huan, Z., Lin, X., & Dong, H. (2022). Adaptive neural network structure optimization algorithm based on dynamic nodes. *Current Issues in Molecular Biology*, 44(2), 817–832. <https://doi.org/10.3390/cimb44020056>
6. Bengio, E., Bacon, P.-L., Pineau, J., & Precup, D. (2016). *Conditional computation in neural networks for faster models*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1511.06297>
7. Wang, X., Yu, F., Dou, Z.-Y., Darrell, T., & Gonzalez, J. E. (2018). *SkipNet: Learning dynamic routing in convolutional networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.09485>
8. Kim, J., Halabi, M. E., Ji, M., & Song, H. O. (2024). *LayerMerge: Neural network depth compression through layer pruning and merging*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2406.12837>
9. Geng, X., Gao, J., Zhang, Y., & Xu, D. (2024). Complex hybrid weighted pruning method for accelerating convolutional neural networks. *Scientific Reports*, 14, 5570. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-55942-5>
10. Heddes, M., Srinivasa, N., Givargis, T., & Nicolau, A. (2025). *Always-sparse training by growing connections with guided stochastic exploration*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2401.06898>
11. Han, S., Mao, H., & Dally, W. J. (2016). *Deep compression: Compressing deep neural networks with pruning, trained quantization and Huffman coding*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1510.00149>
12. Lin, J., Rao, Y., Lu, J., & Zhou, J. (2017). Runtime neural pruning. In *Advances in neural information processing systems*. Curran Associates, Inc. https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2017/file/a51fb975227d6640e4fe47854476d133-Paper.pdf
13. Lym, S., Choukse, E., Zangeneh, S., Wen, W., Sanghavi, S., & Erez, M. (2019). PruneTrain: Fast neural network training by dynamic sparse model reconfiguration. In *Proceedings of the International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis* (pp. 1–13). ACM. <https://doi.org/10.1145/3295500.3356156>

14. Gordon, A., Eban, E., Nachum, O., Chen, B., Wu, H., Yang, T.-J., & Choi, E. (2018). *MorphNet: Fast & simple resource-constrained structure learning of deep networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.06798>
15. Dong, X., Chen, S., & Pan, S. J. (2017). *Learning to prune deep neural networks via layer-wise optimal brain surgeon*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1705.07565>
16. Yu, X., Serra, T., Ramalingam, S., & Zhe, S. (2022). *The combinatorial brain surgeon: Pruning weights that cancel one another in neural networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.04466>
17. Duggal, R., Xiao, C., Vuduc, R., & Sun, J. (2019). *CUP: Cluster pruning for compressing deep neural networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1911.08630>
18. Camacho, J. D., Villaseñor, C., Lopez-Franco, C., & Arana-Daniel, N. (2022). Neuroplasticity-based pruning method for deep convolutional neural networks. *Applied Sciences*, 12(10), 4945. <https://doi.org/10.3390/app12104945>
19. Evci, U., van Merriënboer, B., Unterthiner, T., Vladymyrov, M., & Pedregosa, F. (2022). *GradMax: Growing neural networks using gradient information*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2201.05125>
20. Piyasena, D., Thatthasara, M., Kanagarajah, S., Lam, S. K., & Wu, M. (2020). Dynamically growing neural network architecture for lifelong deep learning on the edge. In *2020 30th International Conference on Field-Programmable Logic and Applications (FPL)* (pp. 262–268). <https://doi.org/10.1109/FPL50879.2020.00051>
21. Yoon, J., Yang, E., Lee, J., & Hwang, S. J. (2018). *Lifelong learning with dynamically expandable networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1708.01547>
22. Cortes, C., Gonzalvo, X., Kuznetsov, V., Mohri, M., & Yang, S. (2017). *AdaNet: Adaptive structural learning of artificial neural networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1607.01097>
23. Dai, X., Yin, H., & Jha, N. K. (2018). *NeST: A neural network synthesis tool based on a grow-and-prune paradigm*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.02017>
24. Hua, W., Zhou, Y., De Sa, C., Zhang, Z., & Suh, G. E. (2019). *Channel gating neural networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1805.12549>
25. Leroux, S., Molchanov, P., Simoens, P., Dhoedt, B., Breuel, T., & Kautz, J. (2018). *IamNN: Iterative and adaptive mobile neural network for efficient image classification*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1804.10123>
26. Li, C., Wang, G., Wang, B., Liang, X., Li, Z., & Chang, X. (2021). *Dynamic slimmable network*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.13258>
27. Liu, C., Wang, Y., Han, K., Xu, C., & Xu, C. (2019). *Learning instance-wise sparsity for accelerating deep models*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1907.11840>
28. LeCun, Y., Bottou, L., Bengio, Y., & Haffner, P. (1998). Gradient-based learning applied to document recognition. *Proceedings of the IEEE*, 86(11), 2278–2324. <https://doi.org/10.1109/5.726791>

29. Krizhevsky, A. (2009). Learning multiple layers of features from tiny images. In *Technical Report, Computer Science Department, University of Toronto, University of Toronto*. <https://www.cs.toronto.edu/~kriz/learning-features-2009-TR.pdf>
30. *A well-known image classification dataset* (n.d.). CIFAR-10 — UCI Machine Learning Repository. <https://doi.org/10.24432/C5889J>
31. Yang, H., Wen, W., & Li, H. (2020). *DeepHoyer: Learning sparser neural network with differentiable scale-invariant sparsity measures*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1908.09979>
32. Wimmer, P., Mehnert, J., & Condurache, A. (2020). *FreezeNet: Full performance by reduced storage costs* [Proceedings of the Asian Conference on Computer Vision (ACCV)]. https://openaccess.thecvf.com/content/ACCV2020/html/Wimmer_FreezeNet_Full_Performance_by_Reduced_Storage_Costs_ACCV_2020_paper.html
33. He, Y., Dong, X., Kang, G., Fu, Y., Yan, C., & Yang, Y. (2018). *Asymptotic soft filter pruning for deep convolutional neural networks*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1808.07471>
34. Huang, G., Liu, S., van der Maaten, L., & Weinberger, K. Q. (2018). *CondenseNet: An efficient DenseNet using learned group convolutions*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.09224>

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ (скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською або англійською мовою.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

`rmm-journal@onu.edu.ua`

або завантажувати через сайт журналу

`www.rmm-journal.onu.edu.ua`

Вона повинна складатися з

- 1) вихідного TeX-файла,
- 2) PDF-файла,
- 3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
- 4) документа з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адреса для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи L^AT_EX відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:

- УДК;
- список авторів;
- місце роботи авторів;
- назва статті;
- резюме мовою оригіналу обсягом не менше 100 слів;
- Mathematical Subject Classification (2010);

- список ключових слів мовою оригіналу;
- основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;
- анотація іншою мовою повинна містити назву, список авторів, резюме обсягом не менше 100 слів та список ключових слів;
- додатково, якщо стаття написана українською мовою, після анотації англійською мовою додається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *APA 7* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема й у співавторстві.

Редакційна колегія журналу
«Дослідження в математиці і механіці»
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Змієнка Всеволода, 2
м. Одеса, 65082

Українською та англійською мовами

Згідно з Рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення № 1407 від 26.06.2025 р. журнал зареєстрований як друковане медіа і внесений до Реєстру суб'єктів у сфері медіа з ідентифікатором R30-06164

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова
Протокол № 10 від 26 травня 2026 р.

Відповідальний за випуск *О. О. Максимов*
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Наклад 100 пр. Зам. № 346(69).

Адреса редколегії:
вул. Змієнка Всеволода, 2, м.Одеса, 65082, Україна
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»
вул. Разумовська, 21, м.Одеса, 65091, Україна
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
astro_print@ukr.net
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. 2026. Т. 31, вип. 1(47). С. 1–161.