А.Е. Кононюк

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ МАТЕМАТИКА

Книга 8

Пространства

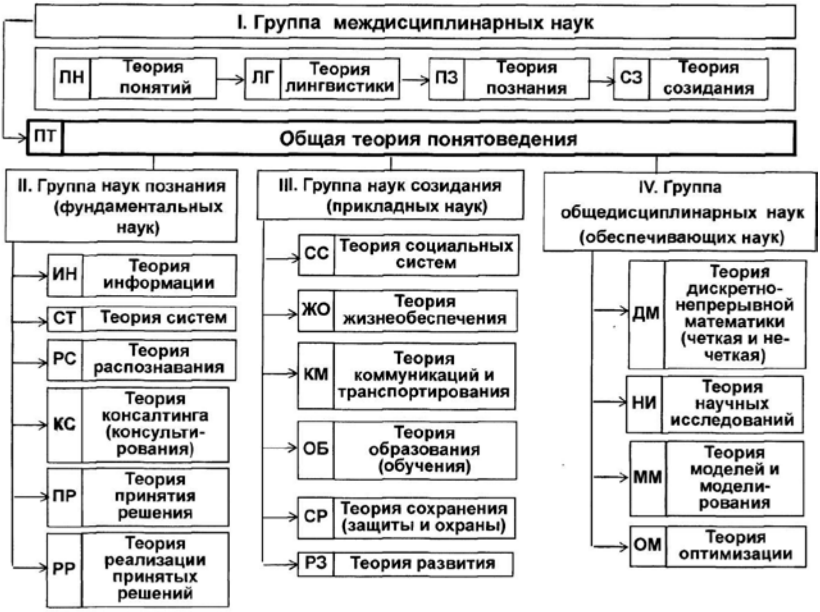
Часть 2

Векторные пространства

Киев
«Освіта України»
2016

Кононюк Анатолий Ефимович

Структурная схема развивающейся панмедийной системы наук



УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К65

Рецензенты:

В.В.Довгай - к-т физ.-мат. наук, доц. (Национальный технический университет „КПІ”);

В.В.Гавриленко - д-р физ.-мат. наук, проф., *О.П.Будя* - к-т техн. наук, проф. (Киевский университет экономики, туризма и права);

Н.К.Печурин - д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

Кононюк А. Е.

К213 Дискретно-непрерывная математика. (Пространства). — В 12-и кн. Кн.8. ч.2.— К.:Освіта України. 2016.—480 с.

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-6 (книга 8. ч.2)

Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, исспользуемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единную методолгически взамосвязанную математическую систему «Дискретно-непрерывная математика».

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов всех специальностей.

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-6 (книга 8. ч.2)

Оглавление

1. Начальные сведения об упорядоченных множествах

1.1. Упорядоченные множества

Определение 1. Множество M называется **упорядоченным**, если между его элементами установлено некоторое отношение $a < b$ ("a предшествует b"), обладающее следующими свойствами: 1) между любыми двумя элементами a и b существует одно и только одно из трех соотношений: $a = b$, $a < b$, $b < a$;

2) для любых трех элементов a, b и c из $a < b$, $b < c$ следует $a < c$.

Пустое множество считается упорядоченным.

Замечание. Знак = мы всегда понимаем в смысле тождества, совпадения элементов. Запись $a = b$ просто означает, что буквами a и b обозначен один и тот же элемент множества M. Поэтому из свойства 1) следует, что между двумя различными элементами выполняется одно и только одно из двух соотношений $a < b$ или $b < a$.

Если a предшествует b, то говорят, что b следует за a и пишут: $b > a$.

Отношение $a > b$ обладает, как легко проверить, свойствами, аналогичными 1) и 2). Его можно принять за основное, определив тогда через него отношение $a < b$.

Если в упорядоченном множестве M поменять ролями отношения < и >, т. е. вместо $a < b$ писать $a > b$, и наоборот, то получится новое упорядоченное множество M', порядок которого называется обратным относительно порядка M. Например, для приведенного выше порядка во множестве натуральных чисел обратным будет порядок:

$$..., 3, 2, 1.$$

Два упорядоченные множества, составленные из одних и тех же элементов, но расположенные в разном порядке, считаются различными. Поэтому при задании упорядоченного множества через его элементы необходимо указать их порядок. Будем считать, что запись слева направо соответствует порядку элементов, и сохраним прежнее обозначение фигурными скобками. Одно и то же множество можно упорядочить различным образом (если оно содержит не менее двух элементов). Так, множество натуральных чисел можно упорядочить обычным образом или в обратном порядке, можно нечетные числа поставить впереди четных или наоборот, располагая те и другие в возрастающем или убывающем порядке. Получим упорядоченные множества

$$\{1, 2, 3, ...\}, \qquad (1)$$

$$\{..., 3, 2, 1\}, \qquad (2)$$

$$\{1, 3, 5, ..., 2, 4, 6, ...\}, \qquad (3)$$

$$\{1, 3, 5, ..., 6, 4, 2\}, \qquad (4)$$

$$\{..., 5, 3, 1, 2, 4, 6, ...\}, \qquad (5)$$

$$\{..., 5, 3, 1, ..., 6, 4, 2\}. \qquad (6)$$

Элемент, не имеющий предшествующего, называется **первым**, а элемент, не имеющий следующего, - **последним**. Элементы a и b называются **соседними**, если не существует c, для которого $a < c < b$ или $b < c < a$. Если a и b - соседние и $a < b$, то говорят, что a непосредственно предшествует b, а b непосредственно следует за a. Упорядоченное множество (1) имеет первый элемен и не имеет последнего, множество (2), наоборот, имеет последний элемент, но не имеет первого, множество (4) имеет как первый элемент, так и последний, а множество (5) - ни первого элемента, ни последнего, множество (3) содержит два элемента, не имеющих непосредственно предшествующего, множество (6) - два элемента, не имеющих непосредственно следующего. Во всех этих множествах каждый элемент имеет соседний. Множество рациональных чисел, расположенных по возрастанию, не имеет соседних элементов, так как между любыми числами a и b лежит число $\frac{a+b}{2}$.

Если $a = b$ или $a < b$, то пишут: $a \le b$; если $a = b$ или $a > b$, то пишут: $a \ge b$. Из определения 1 легко вытекает справедливость следующих двух теорем:

Теорема 1. Если $a \le b$ и $b \le a$, то $a = b$.

Теорема 2. Если $a \le b$ и $b \le c$, то $a \le c$. Если $a \ge b$ и $b \ge c$, то $a \ge c$. При этом, если хотя бы в одном из данных неравенств имеется строгое неравенство, то и в полученном неравенстве будет строгое неравенство.

Определение 2. Два упорядоченных множества A и B называются подобными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок элементов, т. е. такое, что из

$$a_1 \to b_1,\ a_2 \to b_2 \text{ и } a_1 < a_2$$

следует $b_1 < b_2$.

Из определения 2 следует, что все множества, содержащие лишь один элемент, подобны и пустое множество подобно лишь самому себе. О подобных множествах говорят, что они имеют **один и тот же тип**. Отношение подобия обозначается так: $A \approx B$.

Отношение подобия обладает следующими тремя свойствами:

1) Рефлексивность: $A \approx A$

2) Симметрия: если $A \approx B$, то $B \approx A$.

3) Транзитивность: если $A \approx B$ и $B \approx C$, то $A \approx C$.

Сравнивая определение подобия с определением равномощности, убеждаемся, что первое включает второе, т. е. верна следующая

Теорема 3. Подобные множества равномощны; из $A \approx B$ следует $A \sim B$.

Обратное утверждение не верно. Так, множества (1) и (2) равномощны (даже просто равны как неупорядоченные множества), но не подобны, так как множество (1) имеет первый элемент, а множество (2) - не имеет, тогда как при соответствии подобия первому элементу одного множества должен соответствовать первый элемент другого. Тем не менее для конечных множеств теорема, обратная теореме 3, также верна. А именно:

Теорема 4. Если конечные, упорядоченные множества равномощны, то они подобны.

Эта теорема ввиду свойств 1) - 3) подобия является непосредственным следствием приведенной ниже теоремы 7. Для любых множеств в известной мере обратной теореме 3 является следующая теорема:

Теорема 5. Любое множество A, равномощное упорядоченному множеству B, само можно упорядочить, т. е. определить для его элементов отношение порядка, обладающее свойствами 1) и 2), и притом так, что полученное упорядоченное множество подобно B.

Доказательство. Если a_1 и a_2 - любые элементы множества A, b_1 и b_2 - соответствующие им, при взаимно однозначном отображении A и B, элементы B, и $b_1 < b_2$, то положим $a_1 < a_2$. Легко проверить, что определенное как отношение порядка в A обладает свойствами 1) и 2) и, очевидно, A подобно B.

Теорема 6. Любое конечное упорядоченное множество A содержит первый и последний элемент (если только A не пусто).

Доказательство. Пусть A не имеет последнего элемента. Берем любой элемент $a_1 \in A$. Так как он не последний, то существует

$a_2 \in A$ такой, что $a_1 < a_2$; так как a_2 - не последний, то существует $a_3 \in A$ такой, что $a_2 < a_3$. Если элемент a_n построен, то существует $a_{n+1} \in A$ такой, что $a_n < a_{n+1}$. По индукции элемент a_n построен для любого n.

Пусть

$$N' = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$$

Пусть

$$N' = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$$

- множество всех построенных элементов. Очевидно, что из $i < k$ следует по свойству 2) $a_i < a_k$, откуда по свойству 1) $a_i \neq a_k$. Значит, N' равномощно множеству натуральных чисел. Поэтому множество A бесконечно (см. теорему 5), что невозможно. Существование первого элемента доказывается аналогично.

Теорема 7. Любое конечное множество можно упорядочить. Все конечные упорядоченные множества с одним и тем же числом элементов $n > 0$ подобны отрезку $|1, n|$ натурального ряда и, значит, подобны между собой.

Доказательство. Пустое множество упорядочено по определению. Если $A \neq 0$- конечное множество, то $A \sim |1, n|$. Отрезок $|1, n|$, очевидно, есть упорядоченное множество. По теореме 5 множество A можно упорядочить. Пусть теперь A - любое конечное упорядоченное множество с числом элементов $n > 0$. По теореме 6 множество A содержит первый элемент a_1. Если $n > 1$, то множество

$$A_1 = A \setminus \{a_1\} \neq 0$$

и снова содержит первый элемент a_2, причем $a_1 < a_2$. Пусть уже построен элемент a_i. Если $i < n$, то

$$A_i = A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_i\} \neq 0$$

и по теореме 6 оно содержит первый элемент a_{i+1}, причем $a_i < a_{i+1}$. Так мы построим элементы a_i для всех $i \leq n$. Множество

$$A_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \sim |1, n| \sim A.$$

Множество A не равномощно собственному подмножеству (см. теорему 1). Значит,

$$A = A_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

Очевидно, что из $i < k$ следует $a_i < a_k$, т. е. A подобно отрезку $|1, n|$.

Из этой теоремы следует, что все n! возможных перестановок множества с n элементами имеют один и тот же тип.

1.2. Совершенно упорядоченные множества

Определение. Два элемента упорядоченного множества, один из которых мажорируется другим, называются *сравнимыми.* Упорядоченное множество, любые два элемента которого сравнимы, называется *совершенно упорядоченным.*
Так, всякое непустое множество вещественных чисел, упорядоченное по возрастанию (или убыванию), совершенно упорядочено.
Очевидно, совершенно упорядоченное множество — это решетка, в которой каждое двухточечное (а значит, и каждое конечное) подмножество обладает наибольшим и наименьшим элементами.
Сечением в совершенно упорядоченном множестве называют всякое разбиение этого множества на два непустых подмножества, каждый элемент одного из которых предшествует каждому элементу другого. Первое из этих подмножеств называют *нижним,* а второе—*верхним классом* сечения.
Возможны следующие типы сечений.
1° В нижнем классе есть наибольший элемент, а в верхнем—наименьший. Такое сечение называется *скачком.*
2° В нижнем классе нет наибольшего, а в верхнем — наименьшего элемента. Такое сечение называется *щелью.*

3° В нижнем классе есть наибольший элемент, а в верхнем нет наименьшего, либо в нижнем классе нет наибольшего элемента, но в верхнем есть наименьший. Такое сечение называется *дедекиндовым,* а наибольший элемент его нижнего класса или наименьший элемент верхнего—*рубежом* этого сечения.

Совершенно упорядоченное множество, в котором все сечения — дедекиндовы, называется *непрерывным.* Так, *множество* R *всех вещественных чисел, упорядоченное по возрастанию* (или убыванию), *непрерывно* (Дедекинд).

*В непрерывном совершенно упорядоченном множестве C (*как и вообще во всяком совершенно упорядоченном множестве без щелей.) *каждое ограниченное сверху (снизу) непустое подмножество M обладает верхней (нижней) гранью:* ею служит рубеж сечения в *C,* имеющего своим верхним (нижним) классом совокупность всех верхних (нижних) границ множества *M.*

В частности, каждое непустое множество M $\subset$ **R**, ограниченное сверху (снизу), обладает верхней (нижней) гранью. Неограниченность множества M $\subset$ **R** сверху (снизу) часто выражают записью $\sup M = +\infty$ $(\inf M = -\infty)$; здесь *M* рассматривается уже как подмножество упорядоченного множества $\overline{R}$, получаемого путем присоединения к **R** «бесконечно удаленных точек» — ∞ и +∞, на которые отношение порядка распространяется условиями $-\infty < x < +\infty$ для всех $x \in \mathbf{R}$ и $-\infty < +\infty$. Так как пустое множество $\varnothing$ содержится во всяком, то естественно считать $\sup \phi = -\infty$ и $\inf \phi = +\infty$ (в нарушение свойства $\inf M \leqslant \sup M$).

Интервалом в совершенно упорядоченном множестве C называется всякое его подмножество, которое вместе с любыми двумя различными своими точками содержит и все точки, лежащие *между* ними, т. е. следующие за одной из них и предшествующие другой. Очевидно, все множества вида

$$[a, b] = \{x \in C: a \leqslant x \leqslant b\}, \quad (a, b) = \{x \in C: a < x < b\},$$
$$[a, b) = \{x \in C: a \leqslant x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in C: a < x \leqslant b\},$$
$$[a, \rightarrow) = \{x \in C: a \leqslant x\}, \quad (a, \rightarrow) = \{x \in C: a < x\},$$
$$(\leftarrow, a] = \{x \in C: x \leqslant a\}, \quad (\leftarrow, a) = \{x \in C: x < a\},$$
$$(\leftarrow, \rightarrow) = C,$$

где *a≤b,* являются в *C* интервалами. При обращении порядка в *C* меняются лишь их обозначения: *[a, Ь]* на *[Ь, a], [a, Ь)* на *ф, a], (a,* ->) на (<—, *a)* и аналогично в других случаях.

При C = R вместо $[a, \rightarrow)$, $(a, \rightarrow)$, $(\leftarrow, a]$, $(\leftarrow, a)$ и

$(\leftarrow, \rightarrow)$ пишут соответственно $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$ и $(-\infty, +\infty)$.

Всякий интервал $I \subset \mathbf{R}$ *есть множество одного из девяти видов, указанных выше*. Действительно, пусть $a = \inf I$, $b = \sup I$ (где $a = -\infty$, если I неограничен снизу, и $b = +\infty$, если I неограничен сверху). Для каждого $x \in (a, b)$ существуют $a', b' \in I$ такие, что $a \leqslant a' < x < b' \leqslant b$, откуда $x \in I$. Таким образом, $(a, b) \subset I$, и так как I не содержит чисел x, удовлетворяющих неравенствам $x < a$ или $b < x$, то заключаем, что I есть либо (a, b), либо $[a, b)$, либо $(a, b]$, либо $[a, b]$, причем вторая и четвертая возможности исключаются, если $a = -\infty$, а третья и четвертая — если $b = +\infty$. Тем самым утверждение доказано (Оно справедливо для произвольного совершенно упорядоченного множества без щелей.)

1.3. Частично упорядоченное множество

Частично упорядоченное множество - непустое множество, на котором зафиксирован некоторый *порядок.*

Частично упорядоченное множество является примером *модели.*

Примеры частично упорядоченных множеств:

1) множество натуральных чисел с обычным порядком;

2) множество натуральных чисел, где $a \leqslant b$ означает, что a делит b;

3) множество всех подмножеств некоторого множества, где $a \leqslant b$ означает, что $a \subseteq b$;

4) множество всех действительных функций на отрезке [0, 1], где $f \leqslant g$ означает, что $f(t) \leqslant g(t)$ для всех $t \in [0, 1]$;

5) множество конечных возрастающих последовательностей натуральных чисел, где

$$(a_1, \ldots, a_k) \leqslant (b_1, \ldots, b_l)$$

означает, что $k \leqslant l$ и $a_i = b_i$ при $1 \leqslant i \leqslant k$;

6) произвольное непустое множество, где $a \leqslant b$ означает $a=b$ (такое частично упорядоченное множество называется тривиальным, или дискретным).

Каждое частично упорядоченное множество P можно рассматривать как *малую категорию,* объектами к оторой служат элементы множества P, а множество морфизмов H(a, b) одноэлементно, если

$a \leqslant b$, и пусто в остальных случаях. В свою очередь, каждая малая категория, где каждое из множеств H(*a, b*)содержит не более одного элемента, определяет частично упорядоченное множество.
Если на частично упорядоченном множестве P определить отношение $\trianglelefteq$, полагая $a \trianglelefteq b$, если $b \leqslant a$, то это отношение оказывается порядком. Возникающее таким образом частично упорядоченное множество называется дуальным, или двойственным, к *P*.
Отображение φ частично упорядоченного множества P в частично упорядоченное множество *P'* называется (анти)изотонным, или (анти)гомоморфизмом, если $a \leqslant b$ в P влечет

$$\varphi(a) \leqslant \varphi(b) \quad (\varphi(b) \leqslant \varphi(a))$$

в *P'*. Взаимно однозначный (анти)гомоморфизм называется. (анти)изоморфизмом. Тождественное отображение частично упорядоченного множества P на себя является антиизоморфизмом этого частично упорядоченного множества на дуальное ему. Изоморфизм является частным случаем *резидуалъного отображения.* Последовательное выполнение двух антигомоморфизмов дает гомоморфизм. Совокупность всех частично упорядоченных множеств образует *категорию,* если морфизмами считать изотопные отображения. Всякое непустое подмножество частично упорядоченного множества является частично упорядоченным множеством относительно индуцированного на нем порядка.
Если A- непустое подмножество частично упорядоченного множества *P,* то нижний конус A^{∇} (верхний конус $A^{\triangle}$)определяется как совокупность всех таких элементов $x \in P$,что $x \leqslant a \ (a \leqslant x)$ для всех $a \in A$. Если $a,\ b \in P$ и $a \leqslant b$, то подмножество

$$[a,\ b] = a^{\triangle} \cap b^{\nabla} = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

называется интервалом (хотя с точки зрения словоупотребления, принятого в математическом анализе, здесь следовало бы говорить отрезок.

1.4. Вполне упорядоченное множество

Вполне упорядоченное множество - множество P с заданным на нем бинарным отношением $\leqslant$, удовлетворяющим условиям:

1) для любых $x,\ y \in P$ либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$;
2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$;
3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$;

4) в любом непустом подмножестве $X \subset P$ ~ существует такой элемент *а,* что $a \leqslant x$ для всех $x \in X$; таким образом вполне упорядоченное множество - *линейно упорядоченное множество,* удовлетворяющее условию минимальности.

Примером вполне упорядоченного множества служит естественным образом упорядоченное множество натуральных чисел. С другой стороны, отрезок действительных чисел [0, 1] с естественным порядком не является вполне упорядоченным множеством. Любое подмножество вполне упорядоченного множества само вполне упорядоченное. Декартово произведение конечного числа вполне упорядоченного множества вполне упорядочено отношением *лексикографического порядка.* Линейно упорядоченное множество является вполне упорядоченным тогда и только тогда, когда оно не содержит подмножества, антиизоморфного (см. *Антиизоморфизм* частично упорядоченных множеств) множеству натуральных чисел.

Наименьший элемент вполне упорядоченного множества Р называется нулем (и обозначается 0). Для
$[0,\ a) = \{x \mid x \in P,\ x < a\}$ любого элемента $a \in P$ множество называется начальным отрезком множества *Р.* Для всякого элемента *а*, не являющегося наибольшим в *Р,* существует элемент, непосредственно следующий за ним; его принято обозначать *а*+1. Элемент вполне упорядоченного множества, не имеющий непосредственно предшествующего, называется предельным.

Теорема о сравнении. Для любых двух вполне упорядоченных множеств P_1 и P_2 имеет место одна и только одна из следующих ситуаций:
1) P_1 изоморфно P_2,
2) P_1 изоморфно некоторому начальному отрезку множества P_2,
3) P_2 изоморфно начальному отрезку множества P_1.

Принимая в числе аксиом теории множеств *выбора аксиому,* можно доказать, что на всяком непустом множестве можно ввести отношение порядка, превращающее его во вполне упорядоченное множество (т. е. всякое непустое множество можно вполне упорядочить). Эта теорема, называемая теоремой Цермело, на самом деле эквивалентна аксиоме выбора. Теорема Цермело и теорема о сравнении служат основанием для сравнения множеств по их мощности. *Порядковые типы* вполне упорядоченного множества называются трансфинитами, или *трансфинитными числами.*

Вполне упорядоченное множество совершенно упорядоченно. Действительно, в его подмножестве, образованном любыми двумя элементами, один из этих элементов — наименьший, и значит, они сравнимы.

Так называемый принцип полной математической индукции представляет собой лишь другую формулировку того, что натуральный ряд, упорядоченный отношением $\leq$, есть вполне упорядоченное множество. Распространением этого принципа на произвольные вполне упорядоченные множества является (непосредственно вытекающий из их определения) **принцип трансфинитной индукции**.

Если некоторое утверждение, относящееся к элементам вполне упорядоченного множества А, справедливо для наименьшего элемента этого множества и если, каков бы ни был элемент $x \in A$, из справедливости утверждения для всех элементов, предшествующих х, вытекает его справедливость для х, то это утверждение справедливо для каждого элемента множества А.

Широкие возможности применения этого принципа открылись после того как Э. Цермело доказал в 1904 г. следующее предложение (справедливость которого давно уже предполагалась Г. Кантором):

Каждое множество может быть вполне упорядочено (т. е. наделено отношением порядка, превращающим его во вполне упорядоченное множество).

При доказательстве этого предложения Цермело впервые явно использовал принцип теории множеств, который можно сформулировать следующим образом:

Принцип выбора. *Каковы бы ни была множество Е и непустое множество $\mathscr{P}$ его непустых подмножеств, существует отображение* ω *множества $\mathscr{P}$ в Е такое, что $\omega(P) \in P$ для каждого $P \in \mathscr{P}$.*

Иными словами, в *Е* существует подмножество, «набранное» по элементу *ω(P)* из каждого $P \in \mathscr{P}$.

Мы будем называть ω *функцией Цермело* на $\mathscr{P}$.

Классический математический анализ существенно опирается на применение принципа выбора, по крайней мере к конечным и счетным множествам. Общий же функциональный анализ немыслим в настоящее время без принятия принципа выбора (или какого-либо его эквивалента) во всей общности; это относится, в частности, и к общей теории линейных пространств.

1.5. Линейно упорядоченное множество

Линейно упорядоченное множество - частично упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов a и b имеет место $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$. Подмножество линейно упорядоченного множества само является линейно упорядоченнім множеством. Всякий максимальный (минимальный) элемент линейно упорядоченного множества оказывается наибольшим (наименьшим). Важнейший частный случай линейно упорядоченного множества - *вполне упорядоченные множества.* Среди подмножеств частично упорядоченного множества, являющихся линейно упорядоченными множествами, особенно важную роль играет *композиционный ряд.* Сечением линейно упорядоченного множества Р называется разбиение его на два подмножества А и В так, что $A \bigcup B = P$, $A \bigcap B$ - пусто, $A \subseteq B^{\triangledown}$ и $B \subseteq A^{\vartriangle}$,

где

$$B^{\triangledown} = \{x \in P,\ x \leqslant b,\ \ \forall b \in B\},$$
$$A^{\vartriangle} = \{x \in P,\ x \geqslant a,\ \forall a \in A\}.$$

Классы А и В называбтся нижним и верхним классами сечения. Различаются следующие типы сечений: скачок - в нижнем классе имеется наибольший элемент, а в верхнем - наименьший; д е д е к и н д о в о сечение - в нижнем (верхнем) классе имеется наибольший (наименьший) элемент, но в верхнем (нижнем) классе нет наименьшего (наибольшего); щель - в нижнем классе нет наибольшего элемента, а в верхнем - наименьшего. Линейно упорядоченное множество называется непрерывным, если все его сечения дедекиндовы. Подмножество D линейно упорядоченного множества Р называется плотным, если каждый не одноэлементный интервал множества Р содержит элементы, принадлежащие *D.* Линейно упорядоченнок множество действительных чисел может быть охарактеризовано как непрерывное линейно упорядоченное множество в котором нет ни наибольшего, ни наименьшего элементов, но содержится счетное плотное подмножество. Всякое счетное линейно упорядоченное множество изоморфно некоторому подмножеству линейно упорядоченного множества всех двоичных дробей отрезка [0, 1]. Решетка L изоморфна подмножеству линейно упорядоченного множества целых чисел тогда и только тогда, когда каждая ее подрешетка является ретрактом.

1.6. Принцип максимального элемента

Определение. Элемент a упорядоченного множества A называют *максимальным элементом* этого множества, если в A нет элементов, следующих за a.

Упорядоченное множество может обладать бесконечным множеством максимальных элементов. Так, в множестве A целых чисел, больших 1, «a делится на b» есть отношение порядка, и в A, упорядоченном этим отношением, максимальные элементы — это все простые числа.

Теорема 1. *Если каждое вполне упорядоченное подмножество упорядоченного множества A ограниченно, то любой элемент* $a \in A$ *мажорируется по крайней мере одним максимальным элементом.*

Доказательство. Через M^*, где $M \subset A$, будем обозначать совокупность тех $z \in A$, которые следуют за всеми $m \in M$; через M_x, где $x \in A$, — совокупность всех $m \in M$, предшествующих x. Очевидно, $x \in M_x$. Отрезками вполне упорядоченного множества $H \subset A$ будем называть само H и все множества вида H_h, где $h \in H$. Легко видеть, что H_g —отрезок H для всех $g \in A$, а именно, если $H_g \neq H$, то

$$H_g = H_{\min (H \setminus H_g)}. \tag{1}$$

В самом деле, пусть $h = \min (H \setminus H_g)$. Если $x \in H_g$, то $x \in H_h$, т. е. $x<h$, ибо иначе мы имели бы $h \leq x<g$, откуда следовало бы, что $h \in H_g$. Обратно, если $x \in H_h$, то $x \in H_g$, ибо иначе мы имели бы $x \in H \setminus H_g$,.а так как $x<h$, то h не было бы наименьшим элементом множества $H \setminus H_g$.

Согласно принципу выбора, на множестве $\mathfrak{A}$ всех непустых подмножеств множества A существует функция Цермело, т. е.

отображение ω множества $\mathfrak{A}$ в A, обладающее тем свойством, что $\omega(M) \in M$ для всех $M \in \mathfrak{A}$. При этом, так как $a \in A$, можно считать, что $\omega(A)=a$: иначе мы просто переправили бы значение $\omega(A)$ на a. Обозначим через $\mathscr{H}$ совокупность всех множеств $H \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющих следующим требованиям:

а) H вполне упорядоченно;

б) $x = \omega(H^*_x)$ для всех $x \in H$, Тогда:

1. $\mathscr{H}$ не пусто. Действительно, $H = \{a\} \in \mathscr{H}$, ибо $\omega(H_a^*) = \omega(\phi^*) = \omega(A) = a$.

2. $a=\min H$ для каждого $H \in \mathscr{H}$. Действительно, в силу а) и б), существует и равен $\omega(H_{\min H}^*) = \omega(\phi^*) = \omega(A) = a$.

3. Если $H \in \mathscr{H}$ и $H^* \neq \phi$, то множество $G = H \cup \{g\}$, где $g=\omega(H^*)$, содержит H как правильную часть и принадлежит $\mathscr{H}$. В самом деле, так как $\omega(H^*) \in H^*$, то g следует за всеми $h \in H$; при этом $\omega(G_g^*) = \omega(H^*) = g$.

4. Очевидно, всякий непустой отрезок множества из $\mathscr{H}$ есть множество из $\mathscr{H}$.

5. Если H, $G \in \mathscr{H}$ и $H \subset G$, то H — отрезок G. Действительно, если $H \neq G$, то пусть $g = \min(G \setminus H)$. Так как тогда $G_g \subset H$, то $G_g \subset H_g$. С другой стороны, так как $H \subset G$, то $H_g \subset G_g$. Следовательно, $H_g=G_g$, и остается показать, что $H = H_g$. Но в противном случае, в силу (1), мы имели бы $H_g=H_h$, где $h = \min(H \setminus H_g)$, откуда следовало бы, что $h = \omega(H_h^*) = \omega(H_g^*) = \omega(G_g^*) = g$, а это невозможно, поскольку $h \in H$, тогда как $g \notin H$.

6. Из любых двух множеств H, $G \in \mathscr{H}$ одно какое-нибудь является отрезком другого. В самом деле, если $H \neq G$, то, скажем, $G \setminus H \neq \varnothing$. Пусть $g = \min(G \setminus H)$. Так как, по 2, $a \in G \cap H$, то $g>a$ и потому $G_g \neq \varnothing$. Так как при этом $G_g \subset H$, то, в силу 4 и 5, G_g—отрезок H. Однако, как показано в 5, равенство $G_g=H_h$, где $h \in H$, невозможно. Следовательно, $G_g=H$, т. е. H — отрезок G.

Положим $Z = \bigcup\limits_{H \in \mathscr{H}} H$.

7. Если $h \in H$, где $H \in \mathscr{H}$, то всякий элемент $h' \in Z$, предшествующий h, принадлежит H. Действительно, $h' \in G$, где $G \in \mathscr{H}$. В случае, когда G — отрезок H, справедливость утверждения очевидна. В противном же случае в силу 6 $H = Q_g$, где $g \in G$; поэтому $h<g$, а тогда и $h' <g$, откуда $h' \in H$.

8. Z совершенно упорядоченно. В самом деле, пусть $h, g \in Z$, так что $h \in H$, $g \in G$, где H, $G \in \mathscr{H}$. В силу 6, скажем, $H \subset G$, и так как G совершенно упорядоченно, а $h, g \in G$, то h и g сравнимы.
9. Z вполне упорядоченно. Действительно, пусть $M \subset Z$ и $m \in M$, так что $m \in H$, где $H \in \mathscr{H}$. Тогда в силу 7 все элементы из M, мажорируемые элементом m, принадлежат H и потому среди них есть наименьший, а в силу 8, он будет наименьшим и во всем M.
10. $Z \in \mathscr{H}$. В самом деле, требование а) выполнено по 9. Если же $x \in Z$, так что $x \in H$, где $H \in \mathscr{H}$, то, в силу 7, $\bar{H}_x = \bar{Z}_x$ и потому $x = \omega(\bar{H}_x^*) = \omega(\bar{Z}_x^*)$, т. е. выполнено и требование б).
11. $Z^* = \varnothing$. Действительно, в противном случае, в силу 10 и 3, Z содержалось бы как правильная часть в множестве $Z \cup \omega(\bar{Z}^*) \in \mathscr{H}$, вопреки своему определению.
В силу 9 и предположения теоремы, Z обладает мажорантой z. Но тогда из 11 и 2 следует, что Z — максимальный элемент множества A, мажорирующий a, и теорема доказана.
Определение. Совершенно упорядоченные подмножества упорядоченного множества будут называться *цепями.*
Упорядоченное множество, в котором каждая цепь обладает верхней гранью, будет называться *индуктивным.*
А. Из теоремы 1 непосредственно следует
Принцип максимального элемента. *Каждый элемент индуктивного упорядоченного множества мажорируется по крайней мере одним максимальным элементом.*
Б. В свою очередь *принцип выбора, а с ним и теорема* 1, *являются следствиями принципа максимального элемента.* Действительно, пусть $\mathscr{P}$ —непустое множество непустых подмножеств множества E и Ф — совокупность всех функций Цермело на множествах $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$. Ф не пусто, ибо если $A \in \mathscr{P}$, то существует $a \in A$, и функция φ на $\mathscr{D} = \{A\} \subset \mathscr{P}$, относящая множеству A его элемент a, принадлежит Ф. Отношение ψ < φ, означающее, что ψ есть сужение φ, очевидно, является отношением порядка в Ф. Упорядоченное этим отношением Ф индуктивно. А именно, верхней гранью цепи Ψ в Ф, очевидно, служит наименьшее общее продолжение ψ всех φ ∈ Ψ, т. е. отображение множества $\mathscr{D}_\psi = \bigcup\limits_{\varphi \in \Psi} \mathscr{D}_\varphi$ (где $\mathscr{D}_\chi$ — область определения функции $\chi \in$ Ф), совпадающее на каждом $\mathscr{D}_\varphi$ $(\varphi \in \Psi)$ с φ. По принципу максимального элемента, Ф содержит хотя бы одну максимальную функцию Цермело ω. Но тогда $\mathscr{D}_\omega = \mathscr{P}$, т. е.

ω—функция Цермело на $\mathscr{P}$. Действительно, если бы существовало $M \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{D}_{\omega}$, то мы могли бы продолжить ω на $\mathscr{D}_{\omega} \cup \{M\}$, положив ω $(M) = m$ (где $m \in M$), так что продолженная функция также была бы функцией Цермело, в противоречие с максимальностью ω.

В. В дальнейшем нам понадобится еще одна форма принципа максимального элемента.

Определение. Свойство множеств называют *свойством конечного характера,* если множество обладает этим свойством тогда и только тогда, когда им обладают все его непустые конечные подмножества.

Теорема Тьюки — Тайхмюллера. *Пусть S—свойство конечного характера, определенное для подмножеств множества E. Всякое множество A $\subset$ E, обладающее свойством S, содержатся в максимальном множестве Z $\subset$ E, обладающем этим свойством.*

Доказательство. В силу принципа максимального элемента достаточно доказать, что множество $\mathfrak{S}$ всех множеств $M \subset E$, обладающих свойством S, упорядоченное по возрастанию, индуктивно. Но верхней гранью всякой цепи $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{S}$ служит объединение M всех множеств, образующих эту цепь. Действительно, так как S— свойство конечного характера, то нужно лишь показать, что всякое конечное множество $K = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$ обладает свойством S. Каждое x_k принадлежит некоторому множеству $M_k \in \mathfrak{M}$, и так как $\mathfrak{M}$ — цепь, то по 2.А одно из этих множеств, скажем, M_n, содержит остальные; а тогда $K \subset M_n$ и, следовательно, K обладает свойством S.

Г. *Центрированной системой множеств* называют всякую систему множеств, обладающую тем свойством, что каждое непустое конечное семейство множеств системы имеет непустое пересечение *(свойство конечного пересечения).* Так как это свойство — конечного характера, то в силу теоремы Тьюки — Тайхмюллера *всякая центрированная система множеств, принадлежащих некоторому множеству множеств $\mathfrak{M}$, содержится в максимальной центрированной системе множеств, принадлежащих $\mathfrak{M}$.*

Г'. Центрированная система множеств называется *мультипликативной,* если она содержит пересечение каждого конечного семейства входящих в нее множеств. Очевидно, *если множество множеств $\mathfrak{M}$ мультипликативно, то и всякая максимальная центрированная система $\mathfrak{G}$ множеств из $\mathfrak{M}$ мультипликативна.* В самом деле, если $G_1, \ldots, G_n \in \mathfrak{G}$, то по условию

$$G = \bigcap_{k=1}^{n} G_k \in \mathfrak{M}$$

и потому $G \in \mathfrak{G}$, ибо иначе G можно былобы присоединить к $\mathfrak{G}$ без нарушения центрированности, в противоречие с максимальностью $\mathfrak{G}$.
Д. Из теоремы Тьюки — Тайхмюллера непосредственно вытекает следующая

Теорема Хаусдорфа. *Всякая цепь в произвольном упорядоченном множестве содержатся хотя бы в одной максимальной цепи.*

Действительно, свойство подмножества упорядоченного множества быть цепью есть свойство конечного характера.

В свою очередь из теоремы Хаусдорфа вытекает принцип максимального элемента, притом в следующей, на вид усиленной формулировке;

Если в упорядоченном множестве A каждая цепь ограниченна сверху, то всякий элемент $a \in A$ мажорируется хотя бы одним максимальным элементом.

В самом деле, *{a}* есть цепь и потому, в силу теоремы Хаусдорфа, содержится в некоторой максимальной цепи; ее верхняя граница в силу максимальности этой цепи будет максимальным элементом множества *A,* очевидно, мажорирующим *a.*

Таким образом, теорема Тьюки — Тайхмюллера (как и теорема Хаусдорфа) действительно является лишь другой формой принципа максимального элемента.

2. Начальные сведения о группах

2.1. Три источника теории групп

Не следует думать, что определение группы целиком и полностью сложилось в уме какого-то одного математика. Понадобилась работа нескольких поколений математиков, занявшая в общей сложности около 100 лет, прежде чем идея группы сформировалась с ее сегодняшней ясностью. Истоки понятия группы обнаруживаются в трех дисциплинах: теории решения алгебраических уравнений; геометрии и теории чисел.

Основной задачей алгебры до XIX века было решение алгебраических уравнений. После того как в эпоху Возрождения были найдены формулы для решения уравнений третьей и четвертой степени, математики приложили много усилий к отысканию аналогичных формул для решения уравнений пятой степени и выше. Однако работа в этом направлении в течении нескольких столетий не давала положительных результатов. Это поставило перед математикой вопрос: существуют ли вообще такие формулы?

В 1771 году Ж. Лагранж и А. Вандермонд заметили, что вопрос о разрешимости каждого уравнения сводится к изучению подстановок из его корней. Затем в ряде работ П. Руффини (в 1799 году и позднее), посвященных разрешимости уравнения 5-й степени в радикалах, по существу описал группу подстановок из пяти символов. В 1824 году норвежский математик Н. Х. Абель доказал теорему: ни для какого $n>5$ нельзя указать формулу, которая выражала бы корни любого алгебраического уравнения n-й степени через его коэффициенты при помощи радикалов (т.е. при помощи действий сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня с целым показателем степени). Доказательство теоремы основывалось на глубоких связях между свойствами групп подстановок и свойствами корней алгебраических уравнений. Общее исследование проблем разрешимости алгебраических уравнений в радикалах было выполнено французским математиком Э. Галуа в 1830 году. В теории Галуа уже достаточно сознательно использовалась идея группы, им же впервые был введен и сам термин "группа".

Независимо и из других соображений идея группы возникла в геометрии, когда в середине XIX века на смену единой античной геометрии пришли многочисленные "геометрии" и остро встал вопрос об установлении связей и родства между ними. Выход из создавшегося положения был намечен исследованиями по проективной геометрии, посвященными изучению поведения фигур при различных преобразованиях. Постепенно интерес в этих исследованиях перешел на изучение самих преобразований и поиск их классификации. Таким "изучением геометрического родства" много занимался А. Мебиус. На более сознательном уровне классификацию геометрий дал А. Кэли (1854), он явно пользовался термином "группа", систематически использовал таблицы умножения, ныне называемые таблицами Кэли, и доказал представимость всякой конечной группы подстановками. Заключительным этапом на этом пути явилась "Эрлангенская программа" Ф. Клейна (1872), положившая в основу классификации геометрий понятие группы преобразований: **каждая геометрия определяется некоторой группой преобразований пространства, и только те свойства фигур принадлежат к данной геометрии, которые инвариантны относительно преобразований соответствующей группы.**

Третий источник понятия группы - <u>теория чисел</u>. Здесь основные на: Л. Эйлер, изучавший "вычеты, остающиеся при делении степеней" (1761), К. Гаусс с его "композицией двоичных квадратичных форм" (1801) и Кронекер, по существу описавший конечные абелевы группы на языке теории чисел (1870).

Осознание в конце XIX века принципиального единства теоретико-групповых идей, существовавших к тому времени независимо в разных областях математики, привело к выработке современного абстрактного понятия группы (С. Ли, Г. Фробениус и др.). Это был один из самых ранних примеров абстрактной алгебраической системы. Он послужил во многих отношениях образцом при перестройке других областей алгебры и всей математики на рубеже XX века - их путь уже не был столь извилистым и трудным. Изучение групп без предположения их конечности и без каких бы то ни было предположений о природе элементов впервые оформилось в самостоятельную область математики с выходом в 1916 году книги О. Ю. Шмидта "Абстрактная теория групп".

2.2. Определение группы

Прежде чем дать определение группы, сформулируем определение бинарной алгебраической операции.
Определение 1. Бинарной алгебраической операцией, заданной на множестве М, называется отображение *, сопоставляющее каждой упорядоченной паре элементов a и b из М некоторый элемент c из М, называемый композицией элементов a и b. Для обозначения композиции элементов a и b используется запись $a * b$.
Пример 1. Операция сложения (+) на множестве N натуральных чисел является бинарной алгебраической операцией.
Пример 2. Операция вычитания (-) на множестве N натуральных чисел не является бинарной алгебраической операцией, так как результат вычитания двух натуральных чисел не всегда принадлежит множеству N. Однако на множестве Z целых чисел операция вычитания является бинарной алгебраической операцией.
Пример 3. Операция деления (:) на множестве действительных чисел не всегда выполнима, поэтому деление не является бинарной алгебраической операцией на **R**. В то же время на множестве $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ действительных чисел без нуля операция деления является бинарной алгебраической операцией.

Определение 2. Бинарная алгебраическая операция *, определенная на множестве M, называется ассоциативной, если для любых элементов *a*, *b*, *c* из множества M выполняется равенство:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Пример 4. Операция сложения на множестве **R** действительных чисел является ассоциативной.
Пример 5. Операция вычитания на множестве **R** действительных чисел ассоциативной не является, так как, например:

$$(9 - 4) - 3 \neq 9 - (4 - 3)$$

Свойство ассоциативности позволяет однозначным образом определить композицию для любого конечного числа элементов множества M, то есть позволяет доказать независимость композиции любых *n* элементов от расстановки скобок. Например:

$$4 * ((5 * 2) * 3) = (4 * 5) * (2 * 3)$$

Определение 3. Бинарная алгебраическая операция *, определенная на множестве M, называется коммутативной, если для любых элементов *a, b* из множества M выполняется равенство:

$$a * b = b * a$$

Пример 6. Операция сложения на множестве **R** действительных чисел является коммутативной.

Пример 7. Операция вычитания на множестве **R** действительных чисел коммутативной не является, так как, например:

$$9 - 4 \neq 4 - 9$$

Определение 4. Множество G вместе с определенной на нем бинарной алгебраической операцией * называется группоидом. Группоид G с операцией * будем обозначать <G; *>. Множество G при этом называется носителем группоида.

Сформулируем теперь формальное определение группы.

1. Понятие группы

Определение 5. *Группой* называют непустое множество *G,* каждой паре *g, h* элементов которого отнесен некоторый элемент $k \in G$, в общем случае называемый далее *композицией* элементов *g, h* и обозначаемый *g*h,* причем выполнены следующие требования (аксиомы группы):

G1. *Для любых элементов g, h,* $k \in G$ *справедливо равенство*

$$(g * h) * k = g * (h * k)$$

(ассоциативность композиции).

G2'. *Каковы бы ни были элементы g,* $h \in G$, *уравнение g*x = h имеет, и притом только одно, решение* $x \in G$.

G2". *Каковы бы ни были элементы g,* $h \in G$, *уравнение y*g = h имеет, и притом только одно, решение y£G.*

Приведем еще одно определение группы

Определение 6. Множество G с заданной на нем бинарной алгебраической операцией * называется группой, если выполняются условия:

1) операция * ассоциативна;

2) в G существует такой элемент *e* (называемый нейтральным элементом), что для любого элемента *a* из G

$$a * e = e * a = a;$$

3) для любого элемента *a* из G существует такой элемент *a*' (называемый симметричным к элементу *a*), что

$$a * a' = a' * a = e.$$

Замечание 1. Если в группе операция * обозначается знаком "·" или знаком "×", то говорят о мультипликативной записи операции. При этом нейтральный элемент обозначают 1 и называют **единицей**, а симметричный элементу *a* обозначают a^{-1} и называют **обратным**.

Если в группе операция * обозначается знаком +, то говорят об аддитивной записи операции. При этом нейтральный элемент обозначают 0 и называют **нулем**, а симметричный элементу a обозначают a^{-1} и называют **противоположным**.

Пример 8. Множество целых чисел относительно операции сложения <Z; +> образует группу.

Пример 9. Множество положительных действительных чисел относительно операции умножения <R^{+}; ×> образует группу.

Пример 11. Множество {1, -1}, состоящее из целых чисел 1 и -1 относительно операции умножения также образует группу.

Пример 12 (группа переключателей). Назовем переключателем электрическую схему, имеющую три входа и три выхода, соединенные попарно в некотором порядке. Таких переключателей всего шесть (рис.1).

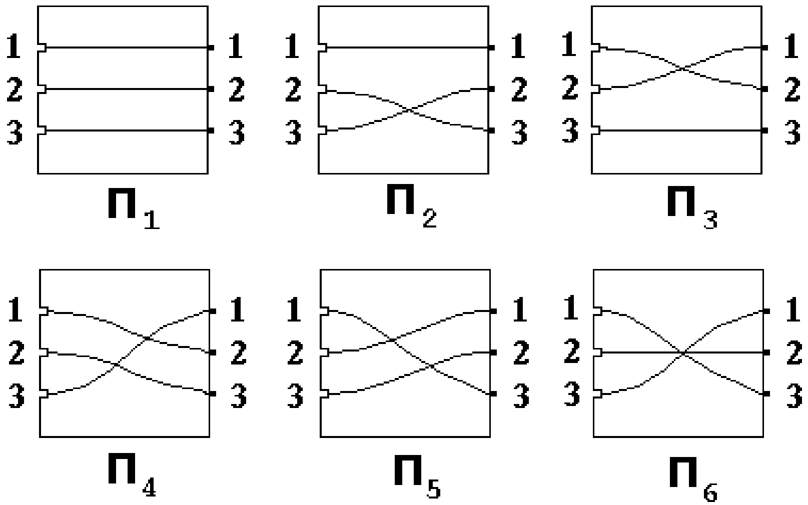


Рис. 1. Шесть переключателей

На множестве переключателей определим операцию * соединения переключателей. Например, в результате соединения переключателей $П_2$ и $П_4$ (рис. 2) вход 1 будет соединен с выходом 3, вход 2 - с выходом 2, вход 3 - с выходом 1. Точно такое же соответствие между входами и выходами осуществляет переключатель $П_5$. Поэтому можно записать

$$П_2 * П_4 = П_5.$$

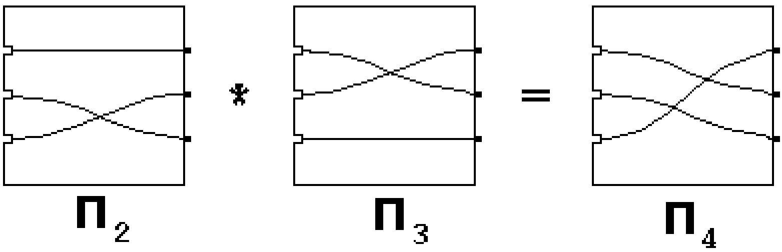


Рис.2. Результат соединения двух переключателей

Из определения операции соединения переключателей следует, что на множестве переключателей эта операция является бинарной алгебраической. Очевидно также, что операция соединения переключателей ассоциативна. Нейтральным элементом во множестве переключателей является переключатель $П_1$.

Результаты различных соединений переключателей удобно собрать в одну квадратную таблицу (рис. 3), в которой слева стоят левые переключатели, сверху - правые, а на пересечении соответствующих строк и столбцов - их соединения.

	$П_1$	**$П_2$**	**$П_3$**	**$П_4$**	**$П_5$**	**$П_6$**
$П_1$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$П_6$
$П_2$	$П_2$	$П_1$	$П_4$	$П_3$	$П_6$	$П_5$
$П_3$	$П_3$	$П_5$	$П_1$	$П_6$	$П_2$	$П_4$
$П_4$	$П_4$	$П_6$	$П_2$	$П_5$	$П_1$	$П_3$
$П_5$	$П_5$	$П_3$	$П_6$	$П_1$	$П_4$	$П_2$
$П_6$	$П_6$	$П_4$	$П_5$	$П_2$	$П_3$	$П_1$

Рис. 3. Таблица соединений переключателей

Из таблицы соединений на рисунке 3 определяем, что

$$П_1 * П_1 = П_1,\ П_2 * П_2 = П_1,\ П_3 * П_3 = П_1,$$

$$П_6 * П_6 = П_1,\ П_4 * П_5 = П_5 * П_4 = П_1.$$

Следовательно, для каждого переключателя П существует симметричный ему переключатель П':

$$П_1' = П_1,\ П_2' = П_2,\ П_3' = П_3,\ П_4' = П_5,\ П_5' = П_4,\ П_6' = П_6.$$

Таким образом, множество переключателей относительно операции соединения переключателей образует группу.

Определение 7. Группа с коммутативной бинарной алгебраической операцией называется **абелевой группой**.

Все приведенные выше примеры групп, кроме группы переключателей, являются абелевыми группами.

Группа переключателей абелевой не является, так как, например,

$$П_3 * П_4 = П_6,\ П_4 * П_3 = П_2 \text{ (рис. 4)}.$$

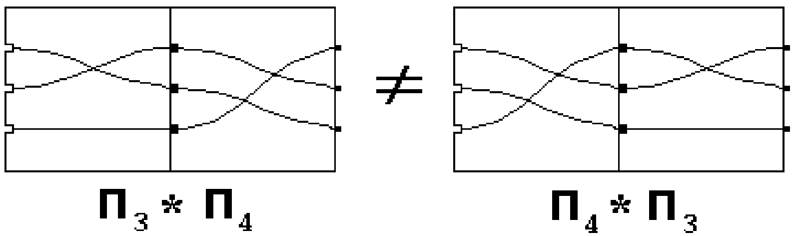


Рис. 4. Соединение двух пар переключателей

Рассмотрим одну занимательную задачу, связанную со свойствами бинарных алгебраических операций.

Пример 13. Задача о наследовании признака. Пусть имеется конечное множество М простейших существ, каждое из которых обладает одним из признаков А, В, С. Пусть, например, эти признаки характеризуют форму глаз соответственно круглые, квадратные и треугольные.

Известно, что в результате слияния двух существ X и Y получается одно новое существо Z. При этом наследование формы глаз осуществляется по закону * описанному таблицей на рисунке 5.

	●	■	▲
●	●	■	▲
■	■	▲	●
▲	▲	●	■

Рис. 5. Таблица для операции наследования

В результате эволюции существ остается одно существо. Требуется доказать, что форма глаз оставшегося существа не зависит от того, в каком порядке сливаются существа.

Из таблицы на рисунке 5 видно, что операция слияния признаков существ ассоциативна и коммутативна. Поэтому наследуемый признак результата слияния всех существ с признаками s_1, s_2, ... , s_3 не зависит от порядка их попарного слияния и совпадает с композицией s_1*s_2*...*s_3.

Например, если в исходном множестве содержатся существа с признаками a, b, c, d и слияние существ происходит в следующем порядке: сначала сливаются a и d, затем b и c и, наконец, оставшиеся два существа, то признак результата слияния существ выражается формулой:

$$(a*d)*(b*c) = a*(d*(b*c)) = a*((b*c)*d) = (a*(b*c))*d = ((a*b)*c)*d = a*b*c*d.$$

Так, если в исходном множестве содержатся два существа с треугольными глазами и по одному существу с квадратными и круглыми глазами, то в результате эволюции останется существо с треугольными глазами.

2.3.Преобразования множества

Пусть каждому элементу x некоторого множества X ставится в соответствие по определенному правилу элемент *y* множества Y; тогда говорят, что задано **отображение** множества X в множество Y. Элемент *y* называют **образом** элемента *x*, а элемент *x* - **прообразом** элемента *y*. Зависимость между образом и его прообразом выражают следующей записью:

$$y = \alpha(x),$$

где обозначает данное отображение.

На рисунке 6 дано стрелочное представление некоторого отображения а из множества $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ во множество $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

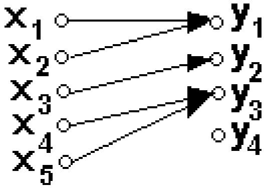


Рис. 6. Стрелочное представление отображения

Если при отображении каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента множества X, то называют отображением множества X на множество Y или (**сюръекцией** X на Y). На рисунке 7 приведен пример отображения множества X на множество Y.

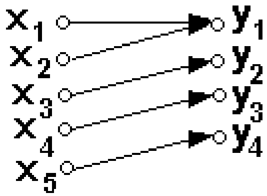


Рис. 7. Отображение множества X на множество Y

Отображение множества X на множество Y называется **взаимно однозначным** (или **биекцией** множества X на множество Y), если для каждого элемента множества Y во множестве X найдется ровно один прообраз.

Таким образом, если α - биекция множества X на множество Y, то для любых элементов y_1 и y_2 из множества Y

$$\alpha(y_1) = \alpha(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

При стрелочном представлении отображения это означает, что на рисунке отсутствуют точки, в которых сходятся две или более стрелок.

На рисунке 8 приведен пример взаимно однозначного отображения множества X на множество Y.

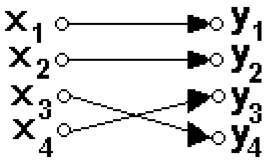


Рис. 8. Взаимно однозначное отображение

Для всякого взаимно однозначного отображения множества X на множество Y существует **обратное отображение** множества Y на множество X. Обратное отображение определяется тем, что каждому элементу y множества Y ставится в соответствие его прообраз x из множества X. Если исходное отображение обозначается буквой α, то обратное отображение обозначают символом α^{-1} и пишут

$$x = \alpha^{-1}(y).$$

Очевидно, обратное отображение также является взаимно однозначным.

Взаимно однозначное отображение множества на себя называется **преобразованием** этого множества.

Два преобразования α и β одного и того же множества М называются **равными**, если они одинаково действуют на элементы множества М, то есть для любого элемента х из множества М

$$\alpha(x) = \beta(x).$$

Определим теперь **композицию** (произведение) двух отображений. Пусть α - отображение множества X во множество Y и β - отображение множества Y во множество Z. Последовательное выполнение отображений α и β, сопоставляющее каждому элементу *x* из множества X некоторый элемент z из множества Z по закону $z = \beta(\alpha(x))$ (рис. 9), является отображением множества X во множество Z. Это отображение называется композицией отображений α и β и обозначается $\beta \cdot \alpha$.

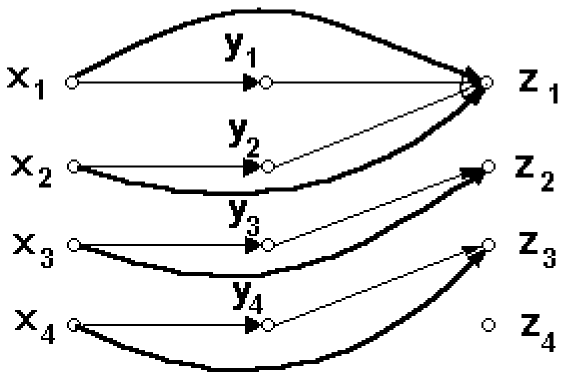


Рис. 9. Стрелочное представление композиции отображений

Очевидно, если α и β являются преобразованиями множества М, то и их композиция $\beta \cdot \alpha$ также является преобразованием множества М. Таким образом, композиция двух преобразований множества М является бинарной алгебраической операцией на совокупности всех преобразований заданного множества М.

Выясним теперь свойства композиции преобразований. Оказывается, совокупность всех преобразований фиксированного множества М относительно композиции преобразований образует группу.

Докажем сначала, что операция композиции преобразований ассоциативна. Пусть *x* - произвольный элемент множества М и α, β, γ - преобразования этого множества и пусть

$$\alpha(x) = x1,\ \beta(x) = x2,\ \gamma(x2) = x3,$$

тогда

$$\beta \cdot \alpha(x) = x2,\ \gamma \cdot \beta(x1) = x3,$$

следовательно,

$$\gamma \cdot (\beta \cdot \alpha)(x) = \gamma(x2) = x3,\ (\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha(x) = \gamma \cdot \beta(x1) = x3.$$

Поэтому для любого элемента x из множества М

$$\gamma \cdot (\beta \cdot \alpha)(x) = (\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha(x) \text{ (рис. 10)},$$

Таким образом, по определению равенства преобразований

$$\gamma \cdot (\beta \cdot \alpha) = (\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha.$$

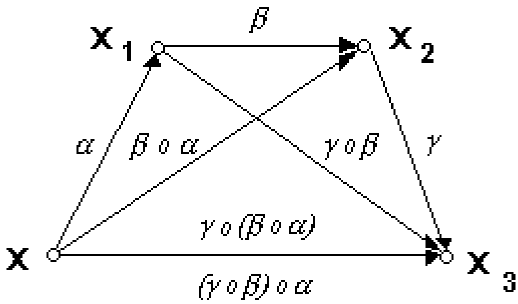


Рис. 10. Ассоциативность произведения преобразований

Нейтральным элементом во множестве преобразований служит тождественно преобразование е, переводящее каждый элемент х из М в себя:

$$\varepsilon(x) = x.$$

Докажем это. Пусть

$$\alpha(x) = x1,$$

тогда

$$\varepsilon \cdot \alpha(x) = \varepsilon(x1) = x1 = \alpha(x) = \alpha(\varepsilon(x)) = \alpha \cdot \alpha(x).$$

Поэтому

$$\varepsilon \cdot \alpha = \alpha \cdot \varepsilon = \alpha,$$

то есть ε является нейтральным элементом относительно композиции преобразований.

Симметричным элементом для преобразования α является обратное преобразование α^{-1}.

Действительно, если α (x) = x1, то

$$\alpha^{-1} \cdot \alpha (x) = \alpha^{-1}(x1) = x = \varepsilon (x)$$

и

$$\alpha \cdot \alpha^{-1}(x1) = \alpha (x) = x1 = \varepsilon (x1).$$

Следовательно,

$$\alpha^{-1}\,\alpha = \alpha \cdot \alpha^{-1} = \varepsilon ,$$

что и требовалось доказать. Таким образом, совокупность всех преобразований множества М относительно композиции преобразований образует группу.

Группа всех преобразований произвольного множества М не является абелевой. Для того, чтобы это доказать, достаточно указать хотя бы два преобразования α и β множества М и хотя бы один элемент x из М, на который преобразования $\alpha \cdot \beta$ и $\beta \cdot \alpha$ действуют по разному. Пусть, например, α и β - два преобразования множества М = {a, b, c}, стрелочные представления которых приведены на рисунке 11.

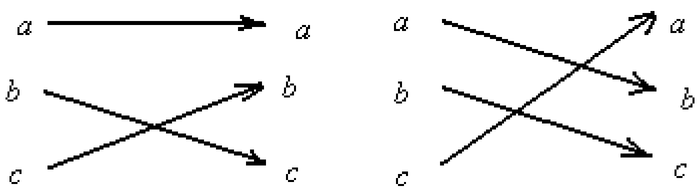


Рис. 11. Два преобразования

Тогда

$$\alpha \cdot \beta (b) = \alpha (c) = b \text{ и } \beta \cdot \alpha (b) = \beta (c) = a,$$

поэтому

$$\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha.$$

2.4. Группа подстановок

Определение 8. Преобразования конечного множества М называются **подстановками** множества М. Если множество М содержит n элементов, то группа преобразований множества М называется **группой подстановок n-й степени** или **симметрической группой n-й степени** и обозначается S_n.

Пример 14. Рассмотрим симметрическую группу 3-ей степени множества М = {a, b, c}. Число подстановок множества М равно шести. Подстановки удобно описывать с помощью специальных схем, в которых под каждым элементом указывается его образ. На рисунке 12 перечислены все подстановки симметрической группы S_3.

$$P_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Рис. 12. Подстановки симметрической группы S_3

Здесь, например, подстановка

$$P_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

это преобразование множества М такое, что $a \to b$, $b \to a$, $c \to c$.

Схемы, отличающиеся только порядком столбцов, определяют одну и ту же подстановку и поэтому не считаются различными, например:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

При таком представлении подстановок легко находится их произведение (следует только помнить, что сначала выполняется правый сомножитель, затем левый):

$$P_5 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = P_6$$

При таком определении умножения подстановок роль единицы выполняет тождественная подстановка P_1. Для нахождения обратной подстановки достаточно переставить местами верхнюю и нижнюю строки подстановки, например:

$$(P_4)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = P_5$$

Произведение подстановок удобно представлять с помощью квадратной таблицы (рис. 13), в которой слева стоят левые множители, сверху - правые, а на пересечении соответствующих строк и столбцов - их произведения.

	P_1	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	P_2	P_1	P_5	P_6	P_3	P_4
P_3	P_3	P_4	P_1	P_2	P_6	P_5
P_4	P_4	P_3	P_6	P_5	P_1	P_2
P_5	P_5	P_6	P_2	P_1	P_4	P_3
P_6	P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1

Рис. 13. Таблица Кэли симметрической группы S_3

Таблицы такого рода можно составить для любой конечной группы, их называют таблицами Кэли.

Таблицы Кэли являются удобным способом представления групповых операций для конечных групп. Этими таблицами довольно легко пользоваться. Например, чтобы найти по таблице группы S_3 (рис. 13) обратную данной подстановке, надо в строчке, отмеченной слева данной подстановкой, найти нейтральный элемент P_1; в заголовке столбца, в котором находится этот элемент, и стоит подстановка симметричная данной. Как легко видеть, для группы S_3 имеем:

$$P_1^{-1} = P_1,\ P_2^{-1} = P_2,\ P_3^{-1} = P_3,\ P_4^{-1} = P_5,\ P_5^{-1} = P_4,\ P_6^{-1} = P_6.$$

Элементами множества M, на котором выполняются подстановки, могут быть любые предметы, а не только буквы a, b, c. В таком смысле можно говорить о подстановках любых предметов. Так как при этом природа предметов значения не имеет, то эти предметы обычно обозначаются числами, и речь идет о подстановках чисел.

2.5. Подгруппы

Естественно возникает вопрос: нельзя ли получить группу, взяв не все, а только некоторые из элементов группы и сохранив для них ту же алгебраическую операцию? Нетрудно убедиться, что ответ на этот вопрос утвердительный.

В самом деле, рассмотрим, например, подмножество $\{P_1, P_2\}$ симметрической группы S_3. Для этого множества таблица Кэли выглядит так, как показано на рисунке 14.

	$П_1$	**$П_2$**
$П_1$	$П_1$	$П_2$
$П_2$	$П_2$	P_1

Рис. 14. Таблица Кэли

Очевидно, операция, соответствующая приведенной таблице, является бинарной алгебраической операцией на множестве $\{P_1, P_2\}$. Нетрудно также проверить, что все групповые аксиомы выполнены. Следовательно, группоид <{P_1, P_2}; ▪ > является группой.

Точно также можно убедиться, что подмножество {P_1, P_3} в свою очередь образует группу, как и подмножество {P_1, P_6}.

Что же касается подмножества {P_1, P_5}, то оно подгруппы не образует, так как P_5 ▪ P_5 = P_4. Эти простые рассуждения оправдывают введение следующего общего определения.

Определение. Пусть задана какая-нибудь группа <G; *>; тогда, если множество H, состоящее из некоторых элементов множества G, образует группу относительно операции *, то группа <H; *> называется подгруппой группы <G; *>.

Таким образом, структуры <{P_1, P_3}; ▪ > и <{P_1, P_6}; ▪ > являются подгруппами симметрической группы S_3.

Теорема (критерий подгруппы). Непустое подмножество H группы G = <G; *> образует подгруппу группы G, тогда и только тогда, когда:

1) для любых двух элементов a, b из H их композиция a * b принадлежит H;

2) для любого элемента a из H симметричный ему элемент a' также принадлежит H.

Действительно, условие 1 означает что операция * будет также бинарной алгебраической операцией на множестве H. Это условие также называется условием замкнутости множества H относительно данной операции. Ассоциативность операции * на H вытекает из ее ассоциативности на G. Наконец, из условий 1 и 2 следует, что H содержит нейтральный элемент e: взяв какой-нибудь элемент a из H, по условию 2 мы найдем в H симметричный ему элемент a', а по условию 1 получим, что нейтральный элемент e = a * a' также содержится в H. Воспользовавшись критерием подгруппы, нетрудно проверить, что множество {P_1, P_4, P_5} является подгруппой (порядка 3) симметрической группы S_3. Таблица Кэли для этой подгруппы приведена на рисунке 15. Эта таблица легко получается из таблицы Кэли группы S_3 (рис. 13) удалением лишних строк и столбцов.

	$П_1$	**$П_4$**	**$П_5$**
$П_1$	$П_1$	$П_4$	$П_5$
$П_4$	$П_4$	$П_5$	$П_1$
$П_5$	$П_5$	$П_1$	$П_4$

Рис. 15. Таблица Кэли для подгруппы порядка 3

Других подгрупп порядка 3 в симметрической группе S_3 нет. Читателю предлагается самому убедиться в этом. Подгрупп порядка 4 и 5 в группе S_3 не имеется вовсе.
Итак, симметрическая группа S_3 имеет всего три подгруппы порядка 2 $<\{P_1, P_2\}; \cdot >$, $<\{P_1, P_3\}; \cdot >$ и $<\{P_1, P_6\}; \cdot >$, одну подгруппу порядка 3 $<\{P_1, P_4, P_5\}; \cdot >$ и две тривиальных подгруппы порядка 1 $<\{P_1; \cdot >$ и порядка 6 $<\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}; \cdot >$.
Интересно отметить, что все нетривиальные подгруппы симметрической группы S_3 оказались абелевыми, хотя сама группа S_3 таковой не является.

2.6. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп

Определение 10. Пусть $\mathbf{G_1} = <G_1; *>$ и $\mathbf{G_2} = <G_2; \cdot >$ - два группоида. **Гомоморфизмом** группоида G_1 на группоид G_2 называется сюръекция $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ множества G_1 на множество G_2, сохраняющая групповую операцию:

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Если для группоидов $\mathbf{G_1}$ и $\mathbf{G_2}$ такая сюръекция существует, то говорят, что группоид $\mathbf{G_1}$ гомоморфно отображается на группоид $\mathbf{G_2}$.

Изоморфизмом группоида $\mathbf{G_1}$ на группоид $\mathbf{G_2}$ называется биекция φ : $G_1 \rightarrow G_2$ множества G_1 на множество G_2, сохраняющая групповую операцию:

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Если между двумя группоидами $\mathbf{G_1}$ и $\mathbf{G_2}$ можно установить изоморфизм, то группоиды $\mathbf{G_1}$ и $\mathbf{G_2}$ называют изоморфными. Факт изоморфизма группоидов $\mathbf{G_1}$ и $\mathbf{G_2}$ обозначают: $\mathbf{G_1}$ $\mathbf{G_2}$.
Так как группа является группоидом, то можно говорить и о гомоморфизме и изоморфизме групп.
Пример 15. Пусть $\mathbf{G_1}$ = <Z; +> и $\mathbf{G_2}$ = <{1, -1}; $\cdot$ > - две группы. Отображение φ, сопоставляющее каждому целому четному числу число 1, а каждому целому нечетному числу - число -1, является гомоморфизмом группы $\mathbf{G_1}$ на группу $\mathbf{G_2}$**.**
Пример 16. Пусть $\mathbf{G_1}$ = <Z; +> - аддитивная группа целых чисел, $\mathbf{G_2}$ = <{5 $\cdot$ k | k $\in$ Z}; +> - аддитивная группа целых чисел, кратных 5. Отображение φ(a) = 5 $\cdot$ a является изоморфизмом группы $\mathbf{G_1}$ на группу $\mathbf{G_2}$.
Пример 17. Аддитивная группа действительных чисел <R; +> изоморфна мультипликативной группе положительных действительных чисел <R+; $\cdot$ >. Изоморфизм этих групп устанавливается, например, биекцией $\varphi(a) = 2^a$. Действительно,

$$\varphi(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Этот пример показывает, что между группами можно установить иногда несколько изоморфизмов (в данном случае бесконечно много, так как для любого положительного отличного от 1 числа x отображение $\varphi(a) = x^a$ устанавливает изоморфизм между группами). Изоморфные группы отличаются друг от друга по сути дела лишь обозначениями и с точки зрения теории групп считаются одинаковыми.

2.7. Свойства гомоморфизмов и изоморфизмов групп

Пусть $\mathbf{G_1}$ = <G_1; *> - группа, $\mathbf{G_2}$ = <G_2; $\cdot$ > - группоид и существует гомоморфизм φ группы $\mathbf{G_1}$ на группу $\mathbf{G_2}$. Возникает вопрос: какие свойства операции * группы $\mathbf{G_1}$ переносятся на операцию $\cdot$ группы $\mathbf{G_2}$? Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.
Теорема 2. Если группа $\mathbf{G_1}$ = <G_1; *> гомоморфно отображается на группоид $\mathbf{G_2}$ = <G_2; $\cdot$ >, то группоид G_2 является группой.
Доказательство. Пусть φ - гомоморфизм группы $\mathbf{G_1}$ на группоид G_2.

Рассмотрим три элемента a_2, b_2, c_2 из множества G_2. Так как φ - сюръекция, то во множестве $\mathbf{G_1}$ существуют прообразы этих элементов a_1, b_1, c_1: $a_2 = \varphi(a_1)$, $b_2 = \varphi(b_1)$, $c_2 = \varphi(c_1)$. Так как для элементов a_2, b_2, c_2 выполняется равенство:

$(a_2 \blacksquare b_2) \blacksquare c_2 = (\varphi(a_1) \blacksquare \varphi(b_1)) \blacksquare \varphi(c_1) = \varphi(a_1*b_1) \blacksquare \varphi(c_1) = \varphi(a_1*b_1)*c_1) = = \varphi(a_1*(b_1*c_1)) = \varphi(a_1) \blacksquare \varphi(b_1*c_1) = \varphi(a_1) \blacksquare (\varphi(b_1) \blacksquare \varphi(c_1)) = a_2 \blacksquare (b_2 \blacksquare c_2)$,

то операция $\blacksquare$ в группоиде $\mathbf{G_2}$ ассоциативна.

Элемент $\varphi(e_1) = e_2$ (образ нейтрального элемента группы $\mathbf{G_1}$) является нейтральным элементом группоида $\mathbf{G_2}$, так как

$$e_2 \blacksquare a_2 = \varphi(e_1*a_1) = \varphi(a_1) = a_2$$

и

$$a_2 \blacksquare e_2 = a_2$$

(доказывается аналогично).

Симметричным для элемента $a_2 = \varphi(a_1)$ группоида $\mathbf{G_2}$ является элемент $\varphi(a_1')$ - образ элемента симметричного a_1 в группе $\mathbf{G_1}$. Проверка предоставляется читателю.

По ходу доказательства теоремы мы установили еще один важный факт. При гомоморфизме группы G_1 на группу G_2 нейтральный элемент группы G_1 отображается в нейтральный элемент группы G_2, а взаимно симметричные элементы из G_1 отображаются во взаимно симметричные элементы из G_2.

Выше были рассмотрены группы подстановок. Важность этих групп определяется тем, что их подгруппами в известном смысле исчерпываются все конечные группы. Именно справедливо следующее предложение, открытое английским математиком Кэли.

Теорема Кэли. Любая конечная группа G порядка n изоморфна некоторой подгруппе группы подстановок.

Доказательство теоремы Кэли несложно и его можно найти в любой книге по теории групп.

2.8. Геометрия данной группы

Пусть даны множество произвольных элементов М и некоторая группа его преобразований G. Условимся называть множество М **пространством**, элементы его - **точками**, а каждую совокупность точек - **фигурой**. Фигуру А назовем **равной** (или **эквивалентной**), фигуре В, если в группе G существует преобразование, переводящее фигуру А в фигуру В.

Из условий, характеризующих группу преобразований, тотчас следует, что:

1) если фигура А равна фигуре В, то фигура В равна фигуре В (симметричность отношения равенства фигур).

В самом деле, если фигура А равна фигуре В, то некоторое преобразование g группы G преобразует А в В; тогда обратное преобразование g^{-1} преобразует В в А. Так как по определению группы преобразование g^{-1} входит в группу G, то в группе G есть преобразование, переводящее В в А, следовательно, фигура В равна фигуре А.

2) если фигура А равна фигуре В и фигура В равна фигуре С, то фигура А равна фигуре С (транзитивность отношения равенства фигур).

Действительно, если А равна В, то в группе G существует преобразование g, переводящее А в В; и если В равна С, то в группе G существует преобразование h, превращающее В в С. Так как композиция элементов группы также принадлежит группе, то в G имеется преобразование h ▪ g, переводящее фигуру А в фигуру С. Следовательно, фигура А равна фигуре С.

3) каждая фигура А равна сама себе (рефлексивность отношения равенства фигур).

Это следует из того, что тождественное преобразование принадлежит любой группе преобразований.

Следуя Ф. Клейну, назовем геометрическими такие свойства фигур пространства М и такие связанные с фигурами величины, которые инвариантны относительно любого преобразования из данной группы G и которые, следовательно, одинаковы у всех эквивалентных фигур. Систему предложений о свойствах фигур и величин, инвариантных относительно всех преобразований группы G, мы будем называть геометрией группы G.

Идея Клейна рассматривать различные геометрии как теории инвариантов соответствующих групп, позволила раскрыть глубокие связи между геометриями, открытыми и исследованными к восьмидесятым годам XIX столетия. Эта идея была изложена Клейном в лекции, которую он прочел при вступлении на должность профессора Эрлангенского университета в 1872 году. В этой лекции Клейн призывал переосмыслить все отдельные "геометрии" на основе групповой точки зрения. С тех пор эту точку зрения математики называют "Эрлангенской программой".

2.9. Геометрические преобразования плоскости

Ниже мы собираемся рассмотреть группы симметрий различных плоских фигур. Для понимания этого материала необходимо вспомнить некоторые определения и факты из курса элементарной геометрии, касающиеся геометрических преобразований плоскости.

Подобием называется такое преобразование на множестве точек плоскости, которое изменяет расстояния между произвольными точками плоскости в постоянное число раз k (k>0), то есть, какие бы две точки M и N мы не взяли, в результате преобразования подобия они перейдут в такие точки M' и N', что

$$M'N' = k \cdot MN,$$

где через MN обозначено расстояние между точками M и N.

В преобразовании подобия точки, лежащие на одной прямой, преобразуются в точки, также лежащие на одной прямой с сохранением порядка их следования. Действительно, соотношение AB + BC = AC выполняется только для трех точек одной прямой, таких что B лежит между A и C. Но из справедливости этого соотношения для точек A, B, C следует, что $A'B' + B'C' = k \cdot AB + k \cdot BC = k \cdot (AB +$

BC) = k · AC = A'C', то есть точки A', B', C' также лежат на одной прямой и B' - находится между A' и C'.

Таким образом, подобия переводят прямые в прямые. При этом углы между прямыми сохраняются.

Так как композиция подобий является подобием и преобразование обратное подобию также является подобием, то множество всех подобий плоскости образует подгруппу группы всех преобразований плоскости.

Различают подобия первого и второго рода в зависимости от того, имеют ли данная и преобразованная фигуры одинаковые или противоположные ориентации.

Каждое подобие однозначно определяется заданием образов A', B', C' трех точек A, B, C, не принадлежащих одной прямой. На рисунке 16 упомянутые тройки точек задают подобие второго рода.

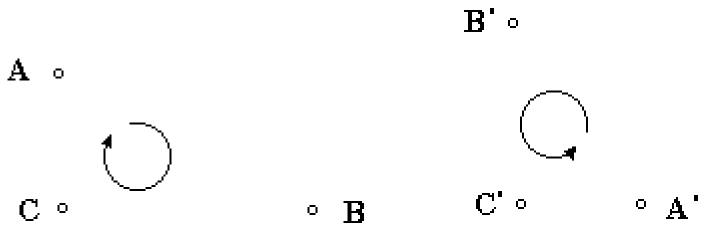


Рис. 16. Преобразование подобия второго рода

Если известен род подобия, то для его задания достаточно задать образы двух различных точек.

Подобия плоскости с коэффициентом k = 1 образуют важный класс преобразований, сохраняющих расстояния между произвольными точками плоскости. Элементы этого класса называются **движениями** (или перемещениями) плоскости.

Множество всех движений плоскости образует подгруппу группы подобий этой плоскости.

Также как и подобия, движения делятся на движения первого рода и второго рода. Простейшим движением второго рода является осевая симметрия.

Осевой симметрией (или отражением) относительно прямой l называется движение плоскости, в котором неподвижными являются те и только те точки, которые лежат на прямой l. Прямая l называется **осью симметрии**. При этом оказывается, что для любой точки M, не лежащей на прямой l, ее образом является такая точка M', что отрезок MM' перпендикулярен прямой l и делится ею пополам.

Осевая симметрия однозначно определяется осью симметрии или парой соответственных точек A и A' (A - A').

Параллельным переносом называется движение плоскости такое, что для любых двух пар соответственных точек A и A', B и B' вектор AA' равен вектору BB'. Другими словами, для любой точки A вектор AA' равен одному и тому же вектору **a** - вектору переноса.

Параллельный перенос определяется парой соответственных точек A, A' или вектором AA'.

Множество всех параллельных переносов плоскости образует подгруппу группы движений плоскости.

Любой параллельный перенос может быть представлен в виде композиции двух отражений от параллельных прямых.

Центральной симметрией (**отражением от точки**) называется движение, при котором середины отрезков, соединяющих пары соответственных точек A и A' совпадают с некоторой фиксированной точкой O - центром симметрии.

Центральная симметрия однозначно определяется центром симметрии или парой соответственных точек.

Композиция двух симметрий является переносом (в частности, тождественным преобразованием).

Вращением (или **поворотом**) на угол а вокруг точки О называется движение, при котором точка О остается на месте и каждой точке А отличной от О ставится в соответствие точка А' такая, что угол МОМ' равен углу α.

Вращение является движением первого рода. Множество всех вращений вокруг фиксированной точки О образует подгруппу группы движений плоскости. Композиция двух вращений с произвольными центрами является либо вращением, либо параллельным переносом. Отражение от точки является частным случаем поворота (поворотом с углом π). Каждое вращение можно представить в виде композиции двух отражений от прямых, проходящих через центр поворота.

Скользящим отражением называется композиция отражения от прямой s и параллельного переноса на вектор параллельный прямой s.

Последовательность выполнения движений, упомянутых в определении скользящего отражения, безразлична.

Любое скользящее отражение может быть представлено в виде композиции трех отражений от прямых.

Теорема о классификации движений плоскости.

Всякое движение плоскости представляет собой одно из трех:
а) перенос; б) вращение; в) скользящее отражение, в частности, одно отражение относительно прямой.

Это значит, что любые две равные фигуры на плоскости могут быть переведены одна в другую одним из указанных преобразований. Или еще: каким бы движениям мы не подвергли фигуру, как бы ее ни переносили, ни поворачивали, ни отражали от прямых, результатом будет одно из указанных движений.

Из теоремы о классификации движений плоскости, в частности, следует:

а) всякое движение первого рода является либо параллельным переносом, либо вращением;

б) всякое движение второго рода является либо отражением от прямой, либо скользящим отражением;

в) любое движение может быть представлено в виде композиции не более чем трех отражений от прямых.

Для того, чтобы произвести классификацию всех преобразований подобия, рассмотрим один частный случай подобия - гомотетию.

Гомотетией с центром O и коэффициентом k отличным от 0 называется такое подобие плоскости, которое каждой точке M сопоставляет точку M' такую, что выполняется равенство: OM'= k · OM. Если k > 0, то точки M и M' лежат по одну сторону от центра O, при k < 0 - по разные стороны от O.

При k = -1 гомотетия совпадает с центральной симметрией, при k = 1 - с тождественным преобразованием. Соответственные прямые в гомотетии либо параллельны, либо совпадают.

Множество всевозможных гомотетий относительно фиксирован-ного центра O образует подгруппу группы подобий плоскости.

Теорема о классификации подобий плоскости.

Любое преобразование подобия можно представить в виде композиции движения и гомотетии.

На этом мы завершаем обзор преобразований плоскости и переходим к рассмотрению групп симметрий различных плоских фигур.

2.10. Симметрии плоской геометрической фигуры

Симметрия является той идеей, посредством которой

человек на протяжении веков пытался постичь и

создать порядок, красоту и совершенство.

Герман Вейль

Понятие группы позволяет в точных терминах охарактеризовать симметричность той или иной геометрической фигуры. Каждой фигуре F можно сопоставить множество DF всех преобразований плоскости, оставляющих фигуру F инвариантной. Множество преобразований DF образует группу относительно композиции преобразований. Она и характеризует симметричность фигуры. Чем больше преобразований содержится в этой группе, тем более симметричной является фигура F. Так, например, круг более симметричен по сравнению с квадратом.

Если группа DF всех преобразований, оставляющих фигуру F инвариантной, содержит более одного элемента, то она называется **группой симметрий фигуры** F, а ее элементы - **симметриями фигуры** F. Если же группа DF состоит из одного тождественного преобразования, то говорят, что фигура F не имеет симметрий. Ниже при изучении симметрий фигур мы ограничимся движениями плоскости.

Если при отражении от точки O фигура F переходит сама в себя, то точка O называется **центром симметрии фигуры** F. При этом говорят также, что фигура F обладает центральной симметрией.

Например, центром симметрии отрезка является его середина, центром симметрии прямой является каждая точка этой прямой, центром симметрии окружности является ее центр.

Если при отражении от прямой p фигура F переходит сама в себя, то прямая p называется **осью симметрии фигуры** F. При этом говорят также, что фигура F обладает осевой симметрией.

Например, каждая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии, осью симметрии равнобедренного треугольника является его высота.

Точку O называют **центром поворотной симметрии** порядка n (n - натуральное число, n > 1) фигуры F, если фигура F остается инвариантной при повороте вокруг точки O на угол $2\pi/n$, и не существует натурального числа m (m>n) такого, что при повороте вокруг точки O на угол $2\pi/m$ фигура остается инвариантной. При этом говорят, что фигура F обладает поворотной симметрией порядка n.

Например, правильный пятиугольник не обладает центральной симметрией, но обладает поворотной симметрией порядка 5, так как при повороте вокруг точки О на угол $2\pi/5$ он отобразится на себя и угол $2\pi/5$ - наименьший из углов, обладающих таким свойством.

В принципе возможны пять симметрий плоской фигуры: 1) параллельный перенос; 2) центральная симметрия; 3) поворот на угол

$\varphi \neq 0$ и $\varphi \neq \pi$; 4) скользящая симметрия; 5) осевая симметрия.

Но для ограниченной фигуры параллельный перенос и скользящая симметрия не являются ее симметриями. В частности, для многоугольников возможны только три вида симметрий фигуры: 1) поворот на угол φ ($\varphi \neq 0, \pi$); 2) центральная симметрия; 3) осевая симметрия.

Отсюда следует, что всякая симметрия ограниченной фигуры имеет хотя бы одну инвариантную точку.

Наибольший теоретический и прикладной интерес представляет группа симметрий правильного n-угольника, называемая **диэдричес-кой группой** Dn или **группой диэдра**. Элементами Dn являются, во-первых, n поворотов вокруг центра многоугольника на углы $\varphi_k = k \cdot (2\pi/n)$, где k = 0,1, ..., (n-1), во-вторых, n осевых симметрий. Осями симметрии служат: в случае четного n - n/2 диагоналей, соединяющих противоположные вершины, и (n/2) прямых, соединяющих середины противоположных сторон; в случае нечетного n - n высот многоугольника (рис. 17). Других симметрий у многоугольника нет.

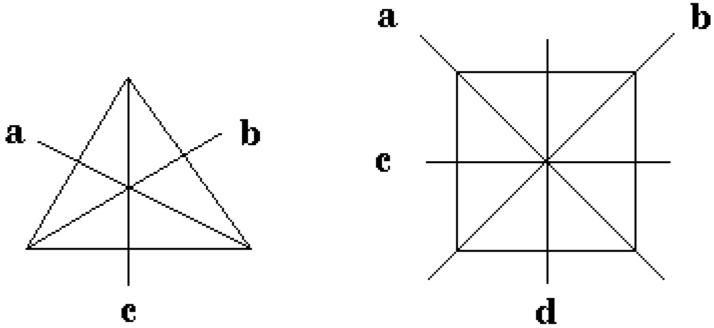


Рис. 17. Оси симметрий правильных многоугольников

Используя группы симметрий Е. С. Федоров в 1890 году решил задачу классификации правильных пространственных систем точек, являющуюся одной из основных задач кристаллографии. Существует всего 17 плоских федоровских групп, они были найдены непосредственно; пространственных федоровских групп - 230, и только теория групп позволила провести их исчерпывающую классификацию. Это был исторически первый случай применения теории групп непосредственно в естествознании.

2.11. Симметрии неограниченных фигур

Симметрия обозначает тот вид согласованности

отдельных частей, который объединяет их в единое целое.

Красота тесно связана с симметрией.

Г. Вейль. Симметрия

У неограниченных фигур могут быть элементы симметрии, связанные с переносами. Такими фигурами, например, являются точки на прямой, расположенные на равных расстояниях одна от другой, или квадратная решетка на плоскости (рис. 18).

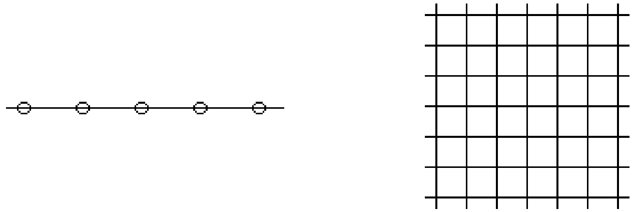


Рис. 18. Две фигуры, имеющие в качестве симметрий параллельные переносы

Фигура, имеющая в качестве симметрии скользящее отражение, изображена на рисунке 19.

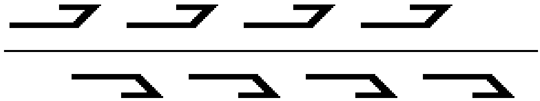


Рис. 19. Фигура, имеющая в качестве симметрии скользящее отражение

Особый интерес представляют правильные системы фигур на плоскости такие, в которых каждая фигура может быть совмещена с любой другой с помощью некоторого движения, совмещающего всю систему саму с собой. Особое значение правильных систем состоит в том, что они служат геометрическими моделями расположения атомов в кристаллах. На плоскости примером правильной системы может служить "паркет" - система равных многоугольников, покрывающих всю плоскость, прилегая друг к другу по сторонам. Паркеты из правильных многоугольников составляются только из треугольников, квадратов и шестиугольников (рис. 20) (доказывается, например, с помощью подсчета углов).

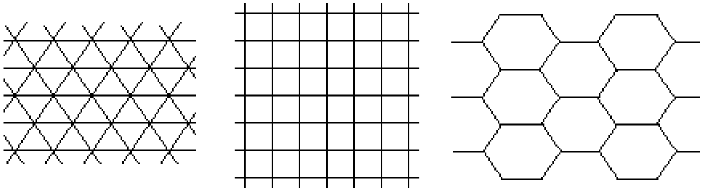


Рис. 20. Паркеты из правильных многоугольников

2.12. Симметрия в природе и искусстве

Помимо кристаллов симметрия в природе наблюдается у живых организмов. Подавляющее число животных, по крайней мере со стороны внешнего строения, имеет вертикальную плоскость симметрии; поворотную симметрию имеют морские звезды (рис. 20). У растений наблюдается симметрия цветов и симметрия листьев (рис. 21).

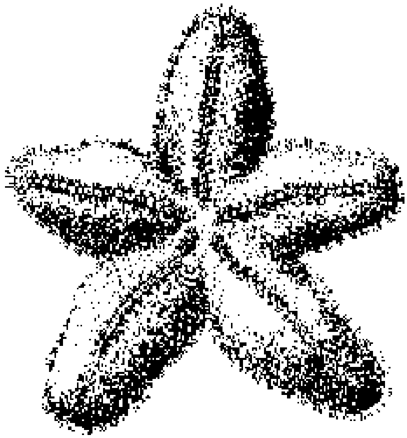


Рис. 20. Морская звезда

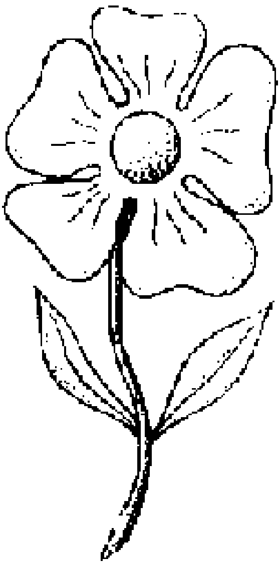


Рис. 21. Растение

Отражение в воде дает еще один пример симметрии (рис. 22).

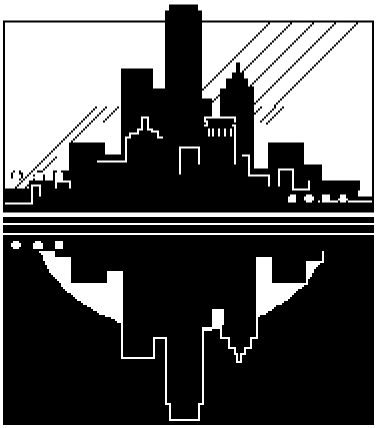


Рис. 22. Отражение в воде

В архитектуре симметрия зданий и фасадов играет существенную роль, как геометрическая основа прекрасного (рис. 23).

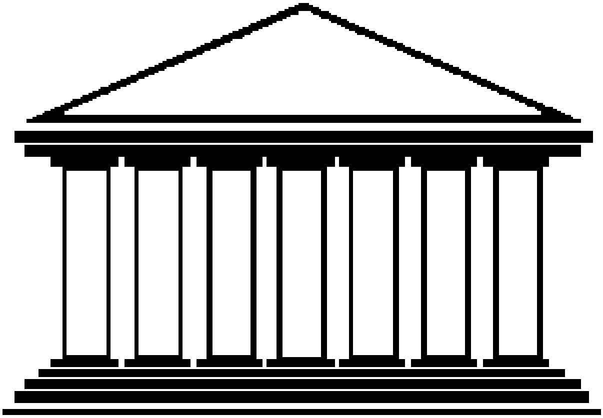


Рис. 23. Симметричное здание

Решетка сада на рисунке 24 обладает переносной симметрией.

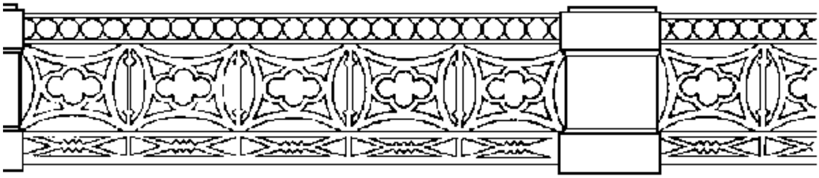


Рис. 24. Решетка сада

В культурах всех народов мира большую роль играют символы. На рисунках 25-28 приведены изображения некоторых древнейших символов, каждый из которых, как минимум, обладает осевой симметрией.

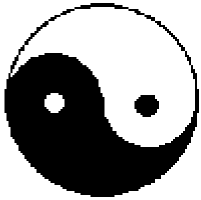
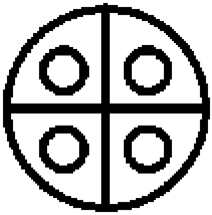


Рис. 25. Китайский символ
Рис. 26. Зонт- азиатский символ Инь-Янь господства



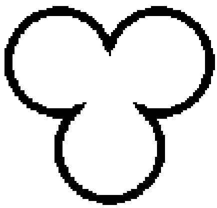


Рис.27.Земной круг индейцев хопи Аризоны

Рис. 28. Символ троицы как элемент украшения церковных окон

Читатель легко приведет десятки других примеров симметрии. Мы же закончим этот раздел интересным орнаментом (рис. 29), известным под названием "Куры Пенроуза".

Рис. 29. Куры Пенроуза

Ниже приводится список книг, по которым можно подробнее познакомиться с затронутыми в статье понятиями.

2.13.Упорядоченная группа

Упорядоченная группа G - группа, на которой задано отношение порядка $\leqslant$ такое, что для любых *a, b, x, y* из G неравенство $a \leqslant b$ влечет за собой $xay \leqslant xby$. Порядок, как правило, подразумевается линейным и в этом случае понятие упорядоченная группа совпадает с понятием *линейно упорядоченной группы.* Иногда порядком называют произвольный частичный порядок и, соответственно, упорядоченными группами - произвольные *частично упорядоченные группы.*

Порядковым гомоморфизмом (частично) упорядоченной группы G в упорядоченной группе H называется гомоморфизм j группы G в группу H такой, что $x \leqslant y,\ x,\ y \in G,\ \Longrightarrow x\varphi \leqslant y\varphi$ в H. Ядрами порядковых гомоморфизмов являются нормальные выпуклые подгруппы и только они. Множество правых смежных классов линейно упорядоченной группы G по выпуклой подгруппе Н линейно упорядочено, если считать $Hx \leqslant Hy$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant y$. Если *Н* - выпуклая нормальная подгруппа линейно упорядоченной группы *G,* то это отношение порядка превращает факторгруппу *G/Н* в линейно упорядоченную группу.

Выпукллая подгруппа - подгруппа Н (частично) *упорядоченной группы, G,* являющаяся *выпуклым подмножеством G* относительно заданного отношения порядка. Инвариантные выпуклые подгруппы и только они являются ядрами гомоморфизмов частично упорядоченных групп, сохраняющих порядок. Подгруппа упорядочиваемой группы, выпуклая при всяком линейном упорядочении, называется абсолютно выпуклой подгруппой, а выпуклая при некотором ее линейном порядке - относительно выпуклой подгруппой. Пересечение всех нееднничных относительно выпуклых подгрупп упорядочиваемой группы есть абсолютно выпуклая подгруппа, объединение всех собственных относительно выпуклых подгрупп также есть абсолютно выпуклая подгруппа. Абелевы группы без кручения не имеют нетривиальных абсолютно выпуклых подгрупп. Подгруппа Н доупорядочиваемой группы G абсолютно выпукла тогда и только тогда, когда для любых элементов $g \notin H$, $a \in H$ пересечение $S(g) \bigcap S(ga)$ не пусто, где $S(x)$ - минимальная инвариантная подполугруппа *G,* содержащая *х.* Выпуклая l-подгруппа *Н структурно упорядоченной группы* изолирована, т. е. для любого натурального пиз $x^n \in H$ следует $x \in H$.

Система $\Sigma(G)$ выпуклых подгрупп линейно упорядоченной группы обладает свойствами:

а) $\Sigma(G)$ линейно упорядочена по включению и замкнута относительно пересечений н объединений;

б) $\Sigma(G)$ инфраинвариантна, т. е. для любой $H \in \Sigma(G)$ и любого $x \in G$ верно $x^{-1}Hx \in \Sigma(G)$;

в) если А<В - скачок в $\Sigma(G)$, т. е. А, $B \in \Sigma(G)$, $A \subset B$, и между ними нет выпуклых подгрупп, то А нормальна в *В,* факторгруппа

B/A- архимедова группа и $[[N_G(B),\ N_G(B)],\ B] \subseteq A,$ где N_G(B)- нормализатор B в G;

г) все подгруппы из $\Sigma\ (G)$строго изолированны, т. е. для любого конечного набора *x, g*$_1$*, ... , g*$_n$ из G и любой подгруппы $H \in \Sigma\ (G)$ соотношение $x \cdot g_1^{-1}\ xg_1\ \ldots\ g_n^{-1}\ xg_n \in H$ влечет за собой $x \in H.$

Расширение G упорядоченной группы H с помощью упорядоченной группы является упорядоченная группа , если порядок H устойчив относительно внутренних автоморфизмов *G.* Расширение G упорядоченной группы H с помощью конечной группы является упорядоченной группой, если G без кручения и порядок в H устойчив относительно внутренних автоморфизмов *G.*

Порядковый тип счетной упорядоченной группы имеет вид $\eta^{\alpha}\xi,$ где $\eta,\ \ \xi$ - порядковые типы множества целых и рациональных чисел соответственно, а α - произвольный счетный ординал. Всякая упорядоченная группа G является топологической группой относительно интервальной топологии, в которой базой открытых множеств являются открытые интервалы

$$(a,\ b) = \{x \in G \mid a < x < b\}.$$

Выпуклые подгруппы упорядоченной группы открыты в этой топологии.

2.14. Частично упорядоченная группа

Частично упорядоченная группа - группа G, на которой задано отношение частичного порядка $\leqslant$ такое, что для любых *a, b, x, y* из G неравенство $a \leqslant b$ влечет за собой $xay \leqslant xby.$

Множество $P = \{x \in G \mid x \geqslant 1\}$ частично упорядоченной группы, называемое положительным конусом, или целой частью, группы G, обладает свойствами:

1) $PP \subseteq P$;

2) $P \cap P^{-1} = \{1\}$;

3) $x^{-1}Px \subseteq P$ для любых $x \in G$.

Всякое подмножество Р группы G, удовлетворяющее условиям 1) - 3), задает на G частичный порядок $(x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x^{-1}y \in P)$, для которого Р служит положительным конусом.

Примеры частично упорядоченных групп:

- аддитивная группа действительных чисел с обычным порядком; группа $F(X, \mathbb{R})$ функций, заданных на произвольном множестве X со значениями в $\mathbb{R}$, с операцией $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ и отношением порядка $f \leqslant g$, если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in X$; - группа (М) всех автоморфизмов линейно упорядоченного множества М на себя, относительно суперпозиции отображений и с отношением порядка: $\varphi \leqslant \psi$, если $\varphi(m) \leqslant \psi(m)$ для любого $m \in M$, $\varphi, \psi \in A(M)$.

Основными понятиями теории частично упорядоченных групп являются понятия порядкового гомоморфизма (см. *Упорядоченная группа*), *выпуклой подгруппы,* декартова и лексикографического. произведений.

Важнейшие классы частично упорядоченных групп: *линейно упорядоченные группы, структурно упорядоченные группы.*

2.15. Линейно упорядоченная группа

Линейно упорядоченная группа - алгебраическая система G, являющаяся группой относительно операции умножения, линейно упорядоченным множеством относительно бинарного отношения порядка $\leqslant$ и удовлетворяющая аксиоме: для любых элементов $x, y, z \in G$ из $x \leqslant y$ следует $xz \leqslant yz$ и $zx \leqslant zy$.

Множество положительных элементов $P = \{x \in G, \ x \geqslant e\}$ линейно упорядоченной группы G обладает свойствами:

1) $PP \subseteq P$, 2) $P \cap P^{-1} = e$, 3) $g^{-1}Pg \subseteq P$, 4) $P \cup P^{-1} = G$.

Обратно, если в группе G имеется множество P, удовлетворяющее свойствам 1) - 4), то G может быть превращена в линейно упорядоченную группу, множество положительных элементов которой есть *P*.

Имеется большое число признаков упорядочиваемости группы. Упорядочиваемые группы являются группами без кручения с однозначным извлечением корня. Упорядочиваемыми являются все абелевы группы без кручения, нильпотентные группы без кручения, свободные группы и свободные разрешимые группы. Существуют простые и нехопфовы линейно упорядоченные группы. Факторгруппа упорядочиваемой группы по ее центру упорядочиваема.

Прямое, полное прямое и свободное произведения, а также сплетение линейно упорядоченных групп могут быть линейно упорядочены с продолжением порядков сомножителей. Группа, аппроксимируемая упорядочиваемыми группами, сама упорядочиваема. Для упорядочиваемых групп справедлива локальная теорема (см. *Мальцева локальные теоремы*). Линейно упорядоченная группа вкладывается в мультипликативную группу линейно упорядоченного тела и в простую линейно упорядоченную группу. Класс упорядочиваемых групп - аксиоматизируемый. Линейно упорядоченная группа является *топологической группой* с интервальной топологией. Линейно упорядоченная группа является *архимедовой группой* тогда и только тогда, когда она не имеет нетривиальных выпуклых подгрупп. Любая архимедова линейно упорядоченная группа изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы действительных чисел с естественным порядком. Множество всех выпуклых подгрупп линейно упорядоченной группы образует полную инфраинвариантную систему, факторы которой архимедовы, и, значит, линейно упорядоченные группы обладают разрешимыми нормальными системами (см. *Подгрупп система*).

Специфическими для теории линейно упорядоченных групп являются вопросы, связанные с продолжением частичных порядков (см. *Доупорядочиваемая группа*). Имеется ряд обобщений понятия линейно упорядоченная группа.

2.16. Структурно упорядоченная группа

Структурно упорядоченная группа - решеточно упорядоченная группа, l- группа,- группа *G,* на множестве элементов которой задано отношение частичного порядка $\leqslant$, обладающее свойствами:
1) *G* - решетка относительно $\leqslant$, т. е. для любых $x,\ y \in G$ существуют элементы $x \wedge y,\ x \vee y$ такие, что $x \wedge y \leqslant x,\ y$ и $x \vee y \geqslant x,\ y$; для любого $z \in G,\ z \leqslant x,\ y$ выполнено $z \leqslant x \wedge y$, и для любого $t \in G$ и $x,\ y \leqslant t$ выполнено $x \vee y \leqslant t$;
2) для любых $a,\ b,\ x,\ y \in G$ неравенство $a \leqslant b$ влечет за собой $xay \leqslant xby$. Эквивалентным образом структурно упорядоченная группа может быть определена как алгебраическая. система в сигнатуре $< \cdot, ^{-1},\ e, \vee, \wedge >$, удовлетворяющая аксиомам:
3) $\langle G, \cdot, ^{-1},\ e \rangle$ - группа;
4) $\langle G, \vee,\ \wedge \rangle$ - решетка;
5) $x\,(y \vee z)\,t = xyt \vee xzt$ и $x\,(y \wedge z)\,t = xyt \wedge\ xzt$ для любых $x,\ y,\ z,\ \ t \in G.$
Решетка элементов структурно упорядоченной группы дистрибутивна. Модулем (соответственно положительной и отрицательной частью) элемента *x* называется элемент $|x| = x \vee x^{-1}$ (соответственно $x^{+} = x \vee e$ и $x^{-} = x \wedge e$). В структурно упорядоченной группе верны соотношения:

$$x = x^{+}x^{-},\ |\,x\,|^{-1} \leqslant x \leqslant |\,x\,|,$$
$$|\,x\,| = x^{+}\,(x^{-})^{-1},\ x^{+} \wedge (x^{-})^{-1} = e,$$
$$(x \vee y)^{-1} = x^{-1} \wedge y^{-1},\ (x \wedge y)^{-1} = x^{-1} \vee y^{-1}.$$

Элементы *x* и *y* называются ортогональными, если $|x| \vee |y| = e$.
Ортогональные элементы перестановочны. Подмножество H l-группы G называется l-подгруппой, если H - подгруппа и подрешетка в G; *l* -подгруппа H называется *l-* идеалом структурно упорядоченной группы *G,* если она нормальна и выпукла в *G.* Множество l-подгрупп структурно упорядоченной группы образует подрешетку решетки всех ее подгрупп. Решетка l-идеалов структурно упорядоченной группы дистрибутивна. *l* - гомоморфизмом l-группы G в l-группу H называется гомоморфизм Ф группы G в группу H такой, что

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y), \ \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y).$$

Ядрами l-гомоморфизмов являются в точности l-идеалы l-групп. Если G есть l-группа, $M \subset G,$ то множество $M^{\perp} = \{x \in G| \ \ |x| \wedge |m|$-e для всякого $m \in M\}$ является выпуклой l-подгруппой в *G.*
Группа A(L) взаимно однозначных сохраняющих порядок отображений линейно упорядоченного множества L на себя есть l-группа (если для $f, \ g \in A\ (L)$ положить $f \leqslant g$ тогда и только тогда, когда $f(\alpha) \leqslant g(\alpha)$ для любого $\alpha \in L)$, Всякая l-группа l-изоморфна l-подгруппе структурно упорядоченной группы A(L) для некоторого подходящего множества L.
Класс всех структурно упорядоченных групп является многообразием сигнатуры $\langle \cdot, ^{-1}, \ e, \ \wedge, \ \vee \rangle$. Важнейшее его подмногообразие- класс структурно упорядоченных групп, аппроксимирующихся линейно упорядоченными группами (класс представимых l -групп).

Е. *Для того чтобы непустое множество H $\subset$ G было подгруппой группы G, необходимо и достаточно, чтобы* $g * h^{-1} \in H$, *каковы бы ни были g,* $h \in H$. В самом деле, из проведенного ранее рассуждения видно, что *нейтральный элемент подгруппы H группы G совпадает с нейтральным элементом группы;* поэтому из ранего рассуждения вытекает, что элемент h^{-1}, обратный к элементу $h \in H$ в *G,* совпадает с обратным к *h* в *H* и, значит, содержится в *H;* а тогда, поскольку *H* — группа, $g*h^{-1} \in H$ для всех *g,* $h \in H$. Обратно, пусть это условие выполнено. Беря $g \in H$, получаем, что $e = g * g^{-1} \in H$, значит, $h^{-1} = e * h^{-1} \in H$ для любого $h \in H$ и, следовательно, H вместе с любыми своими элементами g, h содержит их композицию $g * h = g * (h^{-1})^{-1}$. Тогда выполнение аксиомы G1 в H вытекает из выполнения ее в G. Выполнение же аксиом G2' и G2" в H следует из того, что решениями уравнений $g*x = h$ и $y*g = h$ служат $x = g^{-1} * h$ и $y = h * g^{-1}$.

Легко видеть также, что *для того чтобы непустое множество $H \subset G$ было подгруппой группы G, необходимо и достаточно, чтобы $g * h \in H$ и $g^{-1} \in H$, каковы бы ни были g, $h \in H$.*

Из Е следует, в частности, что всякое непустое множество чисел или функций, содержащее вместе с любыми своими элементами g, h их разность $g—h$, является группой относительно сложения.

Определение. *Гомоморфизмом группы G в группу G'* называют отображение φ: $G \to G'$, переводящее композицию любых элементов $g, h \in G$ в композицию их образов $\varphi(g)$, $\varphi(h)$ в G', т. е. удовлетворяющее условию

$$\varphi(g * h) = \varphi(g) * \varphi(h) \text{ для всех } g,\ h \in G.$$

Взаимно однозначный гомоморфизм G на G' называют *изоморфизмом группы G на группу G'*.

Примеры. 1. Отображение, относящее каждому элементу группы G нейтральный элемент группы G', очевидно, есть гомоморфизм G в G'.

2. Отображение, относящее каждому элементу подгруппы H группы G этот же элемент в G, очевидно, есть гомоморфизм группы H в G.

Ж. *При гомоморфизме φ группы G в группу G' нейтральный элемент e группы G переходит в нейтральный элемент e' группы G' и элемент, обратный к $g \in G$, переходит в элемент, обратный к $\varphi(g)$.*

Действительно,

$$\varphi(e) = \varphi(e * e) = \varphi(e) * \varphi(e), \quad \text{откуда} \quad \varphi(e) = e',$$

и

$$\varphi(g) * \varphi(g^{-1}) = \varphi(g * g^{-1}) = \varphi(e) = e',$$

откуда

$$\varphi(g^{-1}) = [\varphi(g)]^{-1}.$$

3. *При гомоморфизме φ группы G в группу G' образ $\varphi(H)$ всякой подгруппы H группы G есть подгруппа группы G' и прообраз $\varphi^{-1}(H')$ всякой подгруппы H' группы G' есть подгруппа группы G.*

Действительно, пусть $g', h' \in \varphi(H)$, так что $g' = \varphi(g)$, $h' = \varphi(h)$, где g, $h \in H$. Тогда в силу Ж

$$g' * h'^{-1} = \varphi(g) * [\varphi(h)]^{-1} = \varphi(g) * \varphi(h^{-1}) =$$

$= \varphi(g * h^{-1})$, и так как, по Е, $g * h^{-1} \in H$, то $g' * h'^{-1} \in \varphi(H)$, так что φ *(H),* согласно E, — подгруппа группы *G'*. Точно так же, пусть $g,\ h \in \varphi^{-1}(H')$, так что $\varphi(g) = g' \in H'$ и $\varphi(h) = h' \in H$. В силу Ж и Е тогда $\varphi(g * h^{-1}) = \varphi(g) * [\varphi(h)]^{-1} =$ $= g' * h'^{-1} \in H'$, откуда $g * h^{-1} \in \varphi^{-1}(H')$ и, значит, $\varphi^{-1}(H')$ по *E,*—подгруппа группы *G*.

И. Из 3 следует, что *прообраз* φ^{-1} *(е') нейтрального элемента е' группы G' относительно гомоморфизма* φ *группы G в G' есть подгруппа группы G.* Эту подгруппу называют *ядром гомоморфизма* φ. Мы будем обозначать ее K_φ.

Пример. $z \to e^{2\pi i z}$ есть гомоморфизм аддитивной группы C комплексных чисел на мультипликативную группу C* ненулевых комплексных чисел. Ядром его служит группа Z.

К. *Суперпозиция* $\psi \circ \varphi$ *гомоморфизма* φ *группы G в H и гомоморфизма* ψ *группы H в K есть гомоморфизм G в K.* В самом деле,

$$\psi(\varphi(g * h)) = \psi(\varphi(g) * \varphi(h)) = \psi(\varphi(g)) * \psi(\varphi(h)).$$

Л. Для указания того, что существует изоморфизм группы *G* на группу *G',* мы будем пользоваться записью *G~G'.* Отношение ~ обладает следующими свойствами:

1° *G ~ G (рефлексивность).* Действительно, тождественное отображение *G* на себя есть изоморфизм.

2° *Если G~H, то H~G (симметричность).* В самом деле, *если* φ — *изоморфизм G на H*, *то* φ^{-1} — *изоморфизм H на G,* ибо φ^{-1} — взаимно однозначное отображение *H* на *G* и для любых $g,\ h \in H$ имеем

$$\varphi(\varphi^{-1}(g) * \varphi^{-1}(h)) = \varphi(\varphi^{-1}(g)) * \varphi(\varphi^{-1}(h)) = g * h,$$

откуда

$$\varphi^{-1}(g * h) = \varphi^{-1}(g) * \varphi^{-1}(h).$$

3° *Если G~H и H~K, то G~K (транзитивность).* Действительно, из K следует, что *если* φ—*изоморфизм G на H*, *а* φ — *изоморфизм H на K, то* $\chi = \psi \circ \varphi$ — *изоморфизм G на K.*

Группы *G* и *H*, для которых существует изоморфизм *G* на *H*, а значит, согласно 2°, и изоморфизм *H* на *G,* называют *изоморфными.*

Так, группы **R** и $\mathbf{R}_+$ изоморфны; изоморфизм **R** на $\mathbf{R}_+$ осуществляется потенцированием, а $\mathbf{R}_+$ иа **R** — логарифмированием.

2.17. Коммутативные группы

Определение. *Коммутативной группой* называют группу *G,* удовлетворяющую аксиоме

G3. *Для любых двух элементов* $g,\ h \in G$ *справедливо равенство* $g * h = h * g$ *(коммутативность* композиции).

Так, все аддитивные и мультипликативные числовые группы (т. е. группы чисел относительно сложения или умножения) коммутативны. Группа всех подстановок множества, содержащего более двух элементов, не коммутативна.

А. При общем рассмотрении коммутативных групп обычно пользуются аддитивными терминами и обозначениями: закон композиции называют *сложением* и обозначают символом +; нейтральный элемент группы называют *нулем* и обозначают символом 0; элемент, обратный к a, называют *противоположным* a и обозначают $—a$; решение $(—a)+b$ уравнения $a+x=b$ называют *разностью* элементов b и a и обозначают $b—a$; сумму n слагаемых, каждое. из которых равно a, обозначают na, и это обозначение распространяют на все целые n, полагая $1a —a$, $0a = 0$ (где 0 слева — число, а справа — нуль группы) и $na = -(-n)a = (-n)(-a)$, если $n < 0$; при этом сохраняются обычные правила «действий над одночленами»:

$$(mn)a = m(na),\quad (m+n)a = ma+na,\quad n(a+b) = na+nb.$$

Определение . *Аддитивной группой* называют коммутативную группу с аддитивной записью закона композиции. Подгруппа аддитивной группы, образованная одним нулевым элементом, называется *нулевой подгруппой* этой группы.

В дальнейшем мы почти всегда будем рассматривать коммутативные группы как аддитивные, часто не оговаривая этого.

Б. Так как G2" есть следствие G2' и G3, то для коммутативных групп аксиомы G2' и G2" сводятся к одной аксиоме

G2. *Каковы бы ни были элементы* $g, h \in G$, уравнение $g+x — h$ *имеет, и притом только одно, решение* $x \in G$.

В. Пусть G— аддитивная группа. Под *суммой* $A+B$ *множеств* $A, B \subset G$ понимают множество, образованное всевозможными суммами $a+b$, где $a \in A$, $b \in B$. В частности, $A+B=\varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $A=\varnothing$ *или* $B=\varnothing$. Аналогично определяется *разность* $A — B$. Очевидно,

$$(A+B)+C = A+(B+C) \quad \text{и} \quad A+B = B+A,$$

т. е. *сложение множеств ассоциативно и коммутативно.*

Г. Под $— A$ понимают множество, образованное элементами $— a$, противоположными всевозможным элементам $a \in A$. В частности, $—\varnothing=\varnothing$. Очевидно,

$$A-B = A+(-B) \quad \text{и} \quad -(A+B) = (-A)+(-B).$$

Если $-A = A$, то A называют *симметричным множеством.*
Очевидно, $A \cup (-A)$ и $A \cap (-A)$ *симметричны, каково бы ни было множество* $A \subset G$. Отображение $x \to -x$ группы G на себя называют *симметрией.*

Д. Из 1.Е следует, что *для того чтобы множество H элементов коммутативной группы G было ее подгруппой, необходимо и достаточно, чтобы* $H - H \subset H$; и тогда $H - H = H$, поскольку, с другой стороны, $H - H - \{0\} \subset H - H$. Так как подгрупа H симметрична, то для нее также $H + H = H - H = H$; но выполнения одного равенства $H + H = H$ еше недостаточно, чтобы множество $H \subset G$ было подгруппой.

Е. Из В, Г и Д следует, что *сумма* $H = H_1 + H_2$ *подгрупп* H_1 *и* H_2 *коммутативной группы G также является подгруппой этой группы.* Действительно,

$$H - H = (H_1 + H_2) - (H_1 + H_2) = \\ = H_1 + H_2 + (-H_1) + (-H_2) = \\ = [H_1 + (-H_1)] + [H_2 + (-H_2)] = H_1 + H_2 = H.$$

Ж. Каждый элемент a коммутативной группы G порождает ее отображение $x \to x + a$ на себя, называемое *переносом* (или *сдвигом)* на a. Очевидно, *переносы образуют подгруппу группы всех преобразований множества G, изоморфную группе G.* Результат переноса множества $A \subset G$ на a мы будем обозначать $A + a$; очевидно, $A + a = A + \{a\}$. Под $A - a$ будет пониматься $A + (-a)$.

З. Пусть G и G' — аддитивные группы. *Если* φ*—гомоморфизм G в G', то, очевидно,*

$$\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B), \qquad \varphi(-A) = -\varphi(A)$$

и

$$\varphi(A + a) = \varphi(A) + \varphi(a)$$

для любых $A, B \subset G$ *и* $a \in G$.

И. Пусть G и G' — аддитивные группы. *Если* φ*—гомоморфизм G в G'* и $A \subset G$, $B \subset G'$, *то*

$$\varphi^{-1}(\varphi(A) + B) = A + \varphi^{-1}(B).$$

Действительно, так как $\varphi(A + \varphi^{-1}(B)) = \varphi(A) + \varphi(\varphi^{-1}(B)) \subset \subset \varphi(A) + B$, то $A + \varphi^{-1}(B) \subset \varphi^{-1}(\varphi(A) + B)$. С другой стороны, если $x \in \varphi^{-1}(\varphi(A) + B)$, то $\varphi(x) = \varphi(a) + b$, где $a \in A$, $b \in B$; поэтому $\varphi(x - a) = \varphi(x) - \varphi(a) \in B$ и, значит, $x - a \in \varphi^{-1}(B)$, откуда $x \in A + \varphi^{-1}(B)$; тем самым $\varphi^{-1}(\varphi(A) + B) \subset A + \varphi^{-1}(B)$.

И'. Беря в И, в частности, $B = \{0\}$, получаем, что

$$\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A + K_\varphi.$$

2.18. Факторгруппы коммутативной группы

А. Образы $H+a$ подгруппы H коммутативной группы G при переносах на всевозможные элементы $a \in G$ называют *смежными классами* (или просто *классами*) G по H.

Классы $H+a$ и $H+b$ *совпадают, если* $a - b \in H$, и не пересекаются, если $a - b \notin H$. Действительно, если $a - b \in H$, то $a \in H+b$, откуда $H+a \subset H+H+b \subset H+b$; а так как $a - b \in H$ влечет $b - a \in H$, то, совершенно так же, $H+b \subset H+a$; таким образом, если $a - b \in H$, то $H+a = H+b$.

С другой стороны, если $c \in (H+a) \cap (H+b)$, то $c - a \in H$ и $c - b \in H$, следовательно, по доказанному, $H+a = H+c = H+b$ и, значит, $a - b \in H - H \subset H$; таким образом, если $a - b \notin H$, то классы $H+a$ и $H+b$ не пересекаются.

Так как каждый элемент $a \in G$ принадлежит некоторому классу G по H, а именно $H+a$, то заключаем, что смежные классы G по H образуют разбиение группы G.

Теорема 1. *Смежные классы коммутативной группы G по ее подгруппе H образуют коммутативную группу относительно операции сложения множеств.*

Доказательство. Прежде всего

$$(H+a)+(H+b) = H+(a+b), \quad (1)$$

так что сумма двух классов G по H есть снова класс G по H. Далее, аксиомы G1 и G3 выполнены в силу 2. В. Наконец, каковы бы ни были классы A и B группы G по H, существует, и притом только один, класс X, удовлетворяющий уравнению $A+X=B$, а именно, $X=H+x$, где x — разность любого $b \in B$ с любым $a \in A$; в самом деле, так как, в силу А, $A = H+a$ и $B = H+b$, то $A+X = (H+a)+(H+(b-a)) = H+b = B$; с другой стороны, $A+X=B$ влечет $X \subset B - A = H+(b-a)$, откуда в силу А $X = H+(b-a)$; таким образом, выполнена и аксиома G2.

Определение. Группу смежных классов коммутативной группы G по ее подгруппе H называют *факторгруппой* группы G по H и обозначают G/H. Отображение G на G/H, относящее каждому элементу $x \in G$ содержащий его класс $H+x$, называют *каноническим отображением G на G/H*.

Б. Из равенства (1) следует, что *нулем факторгруппы G/H служит класс H и каноническое отображение* φ *группы G на G/H есть* *гомоморфизм.* Так как при этом $H+a = H$ означает, что $a = 0 + a \in H$, то *ядром гомоморфизма* φ *служит* H: $\varphi^{-1}(\{H\}) = H$.

В. Очевидно, каноническое отображение группы G на ее факторгруппу $G/\{0\}$ по нулевой подгруппе (относящее каждому элементу $x \in G$ образованный им класс $\{x\}$ по $\{0\}$) есть изоморфизм.

Г. *Пусть G и G'—коммутативные группы,* φ— *гомоморфизм G в G', К — его ядро и F— подгруппа группы G.* $F = \varphi^{-1}(\varphi(F))$ *тогда и только тогда, когда* $F \supset K$. Действительно, согласно 2.И', $\varphi^{-1}(\varphi(F)) = K + F$, но если $K + F = F$, то $K = K + \{0\} \subset F$. Обратно, если $K \subset F$, то в силу 2.Д $F \subset \{0\} + F \subset K + F \subset F + F = F$, и следовательно, $K+F = F$.

Д. *Пусть G и G' — коммутативные группы,* φ—*гомоморфизм G в G', К—его ядро и F — подгруппа группы G, содержащая К. Тогда отображение*

$$F + x \to \varphi(F + x), \tag{2}$$

относящее каждому классу F+ x группы G по F класс $\varphi(F + x) = \varphi(F) + \varphi(x)$ *группы* φ(G) *по y(F), есть изоморфизм G/F на φ(G)/φ(F).* Действительно, так как $\varphi(x)$ пробегает φ(G), когда x пробегает G, то (2) есть отображение G/F. на всё $\varphi(G)/\varphi(F)$. Далее, так как

$$\varphi((F + x) + (F + y)) = \varphi(F + x) + \varphi(F + y),$$

то (2)—гомоморфизм G/F на $\varphi(G)/\varphi(F)$. Наконец, если $\varphi(F + x_1) = \varphi(F + x_2)$, т. е. $\varphi(F) + \varphi(x_1) = \varphi(F) + \varphi(x_2)$, то в силу 2.Д $\varphi(x_1 - x_2) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \in \varphi(F) - \varphi(F) = \varphi(F)$, следовательно, по Г, $x_1 - x_2 \in \varphi^{-1}(\varphi(F)) = F$, откуда, по А, $F + x_1 = F + x_2$; тем самым (2) взаимно однозначно.

Е. *Если* φ—*гомоморфизм G на G', а К—его ядро, то*

$$K + x \to \varphi(x) \tag{3}$$

есть изоморфизм G/K на G'. Действительно, это сразу следует из Д, если взять там $F=K$ и заметить, что (3) есть суперпозиция изоморфизма $K + x \to \varphi(K + x) = \{\varphi(x)\}$ G/K на $G'/\{0\}$ и изоморфизма $\{\varphi(x)\} \to \varphi(x)$ $G'/\{0\}$ на G'.

Ж. *Если К и F—-подгруппы, коммутативной группы G, причем* $K \subset F$, *то отображение*

$$K + x \to \omega_{F,K}(K + x) = F + x,$$

относящее каждому классу К+х группы G по К содержащий его класс F + x по F, есть гомоморфизм G/K на G/F; ядром этого гомоморфизма *служит F/K.* Действительно, очевидно, $\omega_{F,K}$ есть отображение G/K на всё *G/F.* Далее, в силу 2.Д

$$\omega_{F,K}((K+x)+(K+y))=\omega_{F,K}(K+x+y)=F+x+y=$$
$$=(F+x)+(F+y)=\omega_{F,K}(K+x)+\omega_{F,K}(K+y),$$

так что $\omega_{F,K}$ — гомоморфизм *G/K* на *G/F.* Наконец, *K+ x* принадлежит ядру этого гомоморфизма, т. е. $\omega_{F,K}(K+x)=F$, тогда и только тогда, когда $K+x\subset F$, т. е. $K+x\in F/K$.

Заметим, что если ω_K и ω_F — канонические отображения группы *G* соответственно на ее факторгруппы *G/K* и *G/F,* то

$$\omega_F=\omega_{F,K}\circ\omega_K. \quad \textbf{(4)}$$

3. Из Ж и Е следует, что *если K и F—подгруппы коммутативной группы G, причем K⊂F, то*

$$G/F\sim(G/K)/(F/K).$$

2.19. Суммы и произведения коммутативных групп

Определение. Коммутативную группу *G* называют *прямой суммой* ее подгрупп $H_1, ..., H_n$ и пишут

$$G=H_1\oplus\ldots\oplus H_n,$$

если каждый элемент $x\in G$ однозначно представим в виде

$$x=x_1+\ldots+x_n, \quad \text{где} \quad x_1\in H_1,\ \ldots,\ x_n\in H_n.$$

Если *G* есть прямая сумма своих подгрупп H_1, и H_2, то каждую из них называют *алгебраическим дополнением* другой.

А. *Для того чтобы* $G=H_1\oplus H_2$, *необходимо и достаточно, чтобы* $H_1+H_2=G$ *и* $H_1\cap H_2=\{0\}$. Действительно, пусть $G=H_1\oplus H_2$. Так как тогда каждый элемент $x\in G$ представим в виде

$$x=x_1+x_2, \quad \text{где} \quad x_1\in H_1,\ x_2\in H_2, \quad \textbf{(1)}$$

то $G=H_1+H_2$. При этом, если $x\in H_1\cap H_2$, то, положив $x_1=x, x_2=0$ или $x_1=0, x_2=x,$ мы в обоих случаях получим представление *x* в виде (1); поскольку такое представление единственно, заключаем, что $x=0$, так что $H_1\cap H_2=\{0\}$. Обратно, пусть $H_1+H_2=G$ и $H_1\cap H_2=\{0\}$.

В силу первого из этих условий, каждый элемент $x \in G$ представим в виде (1). Если одновременно $x = x'_1 + x'_2$, где $x'_1 \in H_1$, $x'_2 \in H_2$, то, вычтя из (1), получим $x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2$. Но левая часть принадлежит H_1, а правая H_2. Следовательно, $x_1 - x'_1 \in H_1 \cap H_2$, а тогда из второго условия следует, что $x_1 - x'_1 = 0$, т. е. $x'_1 = x_1$ и так же $x'_2 = x_2$; тем самым $G = H_1 \oplus H_2$.

Б. *Если* $G = H_1 \oplus H_2$, *то отображение* φ, *относящее каждому элементу* $x_2 \in H_2$ *класс* $H_1 + x_2$ *группы* G *по* H_1, *есть изоморфизм* H_2 *на* G/H_1. В самом деле, так как $H_1 + H_2 = G$, то φ есть отображение H_2 на G/H_v Далее, в силу 2.Д

$$\varphi(x'_2 + x''_2) = H_1 + x'_2 + x''_2 = (H + x'_2) + (H + x''_2) =$$
$$= \varphi(x'_2) + \varphi(x''_2),$$

так что φ—гомоморфизм H_2 на G/H_1. Наконец, если $\varphi(x'_2) = \varphi(x''_2)$, то в силу 2.Д $x'_2 - x''_2 \in H_1 - H_1 = H_1$, и так как, с другой стороны, $x'_2 - x''_2 \in H_2$, то $x'_2 = x''_2$; таким образом φ взаимно однозначно.

В. Понятие прямой суммы подгрупп тесно связано с понятием прямой суммы групп. Пусть $G_1 .....G_n$ — коммутативные группы. Произведение $\prod_{k=1}^{n} G_k$ множеств $G_1,.....G_n$ является группой относительно сложения по правилу

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

(„покоординатного" сложения). Элементы этой группы $G = \prod_{k=1}^{n} G_k$, все координаты которых, кроме k-й, равны нулю, а k-я пробегает G_k, образуют подгруппу $\tilde{G}_k$, изоморфную G_k, и, очевидно, $G = \tilde{G}_1 \oplus \ldots \oplus \tilde{G}_n$. Обратно, если $G = H_1 \oplus \ldots \oplus H_n$, то отображение, относящее каждому элементу $(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{k=1}^{n} H_k$ элемент $x = x_1 + \ldots + x_n \in G$, есть, очевидно, изоморфизм группы $\prod_{k=1}^{n} H_k$ на G. В связи с этим группу $G = \prod_{k=1}^{n} G_k$ называют *прямой суммой групп* $G_1,.....G_n$.

При переходе к произвольным (вообще бесконечным) семействам групп это понятие раздваивается.

Определение. *Прямым произведением семейства коммутативных групп* $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ называют произведение $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ семейства множеств $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$, наделенное покоординатным сложением

$$(x_\alpha)_{\alpha \in A} + (y_\alpha)_{\alpha \in A} = (x_\alpha + y_\alpha)_{\alpha \in A},$$

очевидно превращающим *G* в группу. *Прямой суммой семейства групп* $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ называют подгруппу $\sum_{\alpha \in A} G_\alpha$ группы *G*, образованную теми элементами из G, у которых лишь конечное число координат отлично от нуля.

Замечание. Таким образом, $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha = \sum_{\alpha \in A} G_\alpha$ *тогда и только тогда, когда множество индексов* A *конечно.*

Г. Очевидно, *совокупность* G^A *всех функций на непустом множестве* A *со значениями в аддитивной группе G является аддитивной группой относительно «поточечного» сложения, изоморфной произведению* $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$, *где все* $G_\alpha = G$.

Д. Очевидно, *проектирование прямого произведения* $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ *семейства групп* $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ *на каждую из групп* G_α, *относящее каждой точке* $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in G$ *ее координату или проекцию* $\mathrm{pr}_\alpha(x) = x_\alpha$ *в* G_α, *есть гомоморфизм G на* G_α.

2.20. Кольцо

Для изучения общих свойств операций умножения и сложения, их внутренней связи между собой, безотносительно природы элементов, над которыми операции производятся, и было введено понятие кольца.

Кольца являются основным объектом изучения теории колец — крупного раздела общей алгебры, в котором разработаны инструментальные средства, нашедшие широкое применение в алгебраической геометрии, алгебраической теории чисел,

алгебраической K-теории, теории инвариантов.

Кольцо — это множество **R**, на котором заданы две бинарные операции: + и ×(называемые **сложение** и **умножение**), со следующими свойствами, выполняющимися для любых $a,b,c \in \mathbf{R}$:

1. коммутативность сложения;
2. ассоциативность сложения;
3. существование нейтрального элемента относительно сложения;
4. существование противоположного элемента относительно сложения;
5. ассоциативность умножения;
6. дистрибутивность.

Иными словами, кольцо — это универсальная алгебра (R,+,×) , такая что алгебра (R,+) — абелева группа, и операция × дистрибутивна слева и справа относительно +.

2.21. Упорядоченное кольцо

Упорядоченное кольцо - частично упорядоченное кольцо,- кольцо **R** (не обязательно ассоциативное), являющееся *частично упорядоченной группой* по сложению, в котором для любых *a, b*, $c \in R$ неравенства $a \leqslant b$ и $c \geqslant 0$ влекут за собой неравенства $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$. Всякое кольцо является упорядоченным кольцом с тривиальным порядком. Примерами упорядоченного кольцо служат также *упорядоченные поля*; кольцо действительных функций на множестве *X,* где $f \leqslant g$ означает, что $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in X$;

кольцо матриц над упорядоченным кольцом *R,* где, по определению, $\|a_{ij}\| \leqslant \|b_{ij}\|$, если $a_{ij} \leqslant b_{ij}$ для всех *i, j*.
Если А - упорядоченное кольцо, то множество

$$P = \{x \mid x \in R, \quad x \geqslant 0\}$$

называется его положительным конусом. Положительный конус упорядоченного кольца однозначно определяет его порядок: $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $y - x \in P$. Подмножество Р кольца R служит положительным конусом для некоторого порядка в том и только в том случае, когда

$$P \cap (-P) = \{0\}, \quad P + P \subseteq P \quad \text{и} \quad PP \subseteq P.$$

Равенство $P \cup (-P) = R$ равносильно линейности этого порядка. Упорядоченное кольцо, являющееся линейно упорядоченным множеством или решеткой (структурой), называемой соответственно линейно упорядоченным или структурно упорядоченным (решеточно упорядоченным) кольцом (см. также *Архимедово кольцо*). Решеточно упорядоченное кольцо оказывается дистрибутивной решеткой, а его аддитивная группа не имеет кручения (ср. *Структурно упорядоченная группа*). Некоторые вопросы теории ассоциативных колец и, в частности, теория радикалов имеют аналоги в ассоциативных структурно упорядоченных колец. Класс колец, допускающих превращение в структурно упорядоченные кольца, не аксиоматизируем. Если *a, b, c* - элементы структурно упорядоченного кольца и $c \geqslant 0$, то справедливы соотношения

$$(a \vee b)\, c \geqslant ac \vee bc, \quad c\,(a \vee b) \geqslant ca \vee cb,$$
$$(a \wedge b)\, c \leqslant ac \wedge bc, \quad c\,(a \wedge b) \leqslant ca \wedge cb.$$

Идеалы структурно упорядоченных колец, являющиеся *выпуклыми подгруппами* аддитивной группы, называются l-идеалами. Факторкольцо по l-идеалу естественным образом превращается в структурно упорядоченное кольцо. Остается справедливой теорема о гомоморфизме. Структурно упорядоченное кольцо R называется функциональным кольцом, или *f*-кольцом, если выполнено любое из следующих эквивалентных друг другу условий:

(1) R изоморфно структурно упорядоченному подкольцу прямого произведения линейно упорядоченных колец;

(2) для любых $a, b, \ x \in R$ справедлива импликация $(a \wedge b = 0) \Rightarrow (a \wedge bx = a \wedge xb = 0)$;

(3) для любого подмножества $X \subseteq R$ множество $\{y \mid y \in R, \quad \forall x \in X \ x \wedge y = 0\}$ является l-идеалом;

(4) для любых $a, \ b \in R$ $(a \vee 0)(b \vee 0) \wedge (-a \vee 0) = (b \vee 0)(a \vee 0) \wedge (-a \vee 0) = 0.$

Условие (4) показывает, что *f*-кольца образуют многообразие сигнатуры $\{+, -, 0, \cdot, \vee, \wedge\}$. Входящие в это условие равенства не вытекают одно из другого. Не всякое *f*-кольцо вложимо в *f*-кольцо с единицей. Если *a, b, c* - элементы *f*-кольца и $c \geqslant 0$, то справедливы соотношения

$$(a \vee b)c = ac \vee bc, \quad c(a \vee b) = ca \vee cb,$$
$$(a \wedge b)c = ac \wedge bc, \quad c(a \wedge b) = ca \wedge cb,$$
$$(a \vee (-a))(b \vee (-b)) = ab \vee (-ab), \quad a^2 \geqslant 0,$$

а также импликация $(a \wedge b = 0) \Rightarrow (ab = 0)$. Порядок упорядоченного кольца R с положительным конусом P можно продолжить до линейного так, что R становится линейно упорядоченным кольцом в том и только в том случае, когда для любого конечного множества $a_1, \ldots, a_n$ из R можно выбрать $\varepsilon_i = 1$ или -1 так, что в полукольце, порожденном конусом P и элементами $\varepsilon_1 a_1, \ \ldots, \ \varepsilon_n a_n$, сумма любых двух ненулевых элементов отлична от нуля. При P={0} получается критерий возможности превращения данного кольца в линейно упорядоченное.

2.22. Понятие поля

Определение. *Полем* называют множество К, в котором определены операции сложения и умножения, причем выполнены следующие условия:

1. К— коммутативная группа относительно операции сложения.
2. $K^* = K \setminus \{0\}$—коммутативная группа относительно операции умножения.
3. Умножение дистрибутивно относительно сложения, т. е.

$$\gamma(\alpha+\beta)=\gamma\alpha+\gamma\beta \quad \text{для всех} \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma \in K.$$

Нейтральный элемент мультипликативной группы К* называется *единицей* поля К и обозначается 1.

Так, **R** и **C** — поля (относительно обычных операций сложения и умножения чисел); **R** называют *полем вещественных чисел,* **C** — *полем комплексных чисел.*

В дальнейшем К будет всюду обозначать поле.

А. Из условия 2 следует, что $K \neq \{0\}$ и $1 \neq 0$. Таким образом, каждое поле содержит по крайней мере два различных элемента 0 и 1.

Б. $\lambda \cdot 0=0$ *для всех* $\lambda \in K$. Действительно, в силу условия 3, $\lambda\cdot 0+\lambda\cdot 0=\lambda\cdot(0+0)=\lambda\cdot 0$, откуда $\lambda \cdot 0= 0$.

В. $(\lambda\mu)\nu=\lambda(\mu\nu)$ *для всех* $\lambda,\ \mu,\ \nu \in K$. В самом деле, если λ, μ, и ν отличны от 0, то это следует из условия 2, если же хотя бы одно из них равно нулю, то $(\lambda\mu)\nu=0=\lambda(\mu\nu)$ в силу Б.

Г. $1 \cdot \lambda= \lambda$ *для всех* $\lambda \in K$. Действительно, при $\lambda\neq 0$ это следует из условия 2, а при $\lambda=0$ — из Б.

Д. $(-1)\cdot\lambda = -\lambda$ *для всех* $\lambda \in K$. Действительно, в силу Г и Б $(-1)\cdot\lambda+\lambda=(-1)\cdot\lambda+1\cdot\lambda=[(-1)+1]\cdot\lambda=$
$=0\cdot\lambda=0.$

Е. Из Д следует, что $\mu-\lambda=\mu+(-1)\lambda$ *для всех* $\lambda,\ \mu \in K$.

2.23. Скалярное поле

Определения Скалярное поле определяется скалярной функцией точки $u = u(M) = u(x,\ y,\ z) = u(\bar{r})$, где $M(x,\ y,\ z)$ - точка пространства, $\bar{r} = (x,\ y,\ z)$ - ее радиус-вектор.

Поверхности уровня

$$u(x,\ y,\ z) = C,\ C - const.$$

Линии уровня плоского скалярного поля

$$u(x,\ y) = C,\ C - const.$$

Оператор Гамильтона (линейный дифференциальный оператор ∇ *(набла)):*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}.$$

Градиент

Градиент скалярного поля - вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}, \quad \operatorname{grad} u = \nabla u.$$

Свойства градиента

$$\begin{gathered}
\operatorname{grad}\ c = \bar{0},\ c - const,\\
\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v,\\
\operatorname{grad}(cu) = c \operatorname{grad} u,\ c - const,\\
\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v,\\
\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2},\\
\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u, \quad \operatorname{grad} u^n = n u^{n-1} \operatorname{grad} u.\\
\operatorname{grad}|\bar{r}| = \bar{r}/|\bar{r}|.
\end{gathered}$$

Градиент скалярного поля в циллиндрических координатах

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\bar{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{e}_z.$$

Градиент скалярного поля в сферических координатах

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\bar{e}_\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\bar{e}_\varphi.$$

Производная скалярного поля и по направлению
$\bar{l} = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{t\to 0}\frac{u(x+t\cos\alpha,\ y+t\cos\beta,\ z+t\cos\gamma)-u(x,\ y,\ z)}{t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\operatorname{grad} u\cdot\bar{l}\right) = \left|\operatorname{grad} u\right|\cos\left(\widehat{\operatorname{grad} u,\ \bar{l}}\right).$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\max} = \left|\operatorname{grad} u\right|,$$ если $\bar{l}$ имеет направление grad *u*.

2.24. Векторное поле

Определение

Векторное поле определяется векторной функцией точки

$$\bar{F} = \bar{F}(M) = \bar{F}(\bar{r}) = P(x,\ y,\ z)\bar{i} + Q(x,\ y,\ z)\bar{j} + R(x,\ y,\ z)\bar{k},$$

где $M(x, y, z)$ - точка пространства, $\bar{r} = (x, y, z)$ - ее радиус-вектор.

Векторная линия

Векторная линия (силовая линия, линия тока) поля - решение системы

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Дивергенция (расходимость) векторного поля

$$div\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \overline{F}.$$

Свойства дивергенции

$$div\,\bar{c} = 0,\ \bar{c} - const,\ div\,\bar{r} = 3.$$

$$div\left(\overline{F_1} + \overline{F_2}\right) = div\overline{F_1} + div\overline{F_2},\quad div\left(c\overline{F}\right) = c\,div\overline{F},\ c - const,$$

$$div\left(u\overline{F}\right) = u\,div\overline{F} + \overline{F}\cdot \mathrm{grad}u,\quad div\left(u\cdot\bar{c}\right) = \bar{c}\cdot \mathrm{grad}u,\ \bar{c} - const.$$

Дивергенция векторного поля в цилиндрических координатах

$$div\overline{F} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho F_\rho\right) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \rho\frac{\partial F_z}{\partial z}\right).$$

Дивергенция векторного поля в сферических координатах

$$div\overline{F} = \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(F_\rho \rho^2 \sin\theta\right) + \rho\frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_0 \sin\theta\right) + \rho\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\right).$$

Ротор (вихрь) векторного поля

$$rot\,\overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}$$

или в символическом виде

$$rot\,\overline{F} = \left[\nabla,\ \overline{F}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Свойства ротора

$$rot\overline{c} = \overline{0},\ \ \overline{c} - const,\ \ rot\,\overline{r} = \overline{0},$$

$$rot\left(\overline{F_1} + \overline{F_2}\right) = rot\,\overline{F_1} + rot\,\overline{F_2},\ \ rot\left(u\overline{F}\right) = u\,rot\,\overline{F} + [\mathrm{grad}u,$$

$$div\left[\overline{F_1},\ \overline{F_2}\right] = \overline{F_2}\cdot rot\,\overline{F_1} - \overline{F_1}\cdot rot\,\overline{F_2}.$$

Поток векторного поля

Поток векторного поля $\overline{F}(M)$ через поверхность S в сторону, определяемую единичным вектором нормали

$$\overline{n} = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma),$$

$$\Pi = \iint_S (\overline{F}\cdot\overline{n})dS = \iint_S F_n dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos$$
$$= \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy,$$

где F_n - величина проекции вектора $\overline{F}$ на направление вектора $\overline{n}$

Если поверхность *S* задана уравнением $z = f(x,\ y),\ (x;\ y)\in D,$ поток через верхнюю сторону поверхности можно вычислить по формуле

$$\Pi = \iint_D \left(-\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}P(x,\ y,\ f(x,\ y)) - \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}Q(x,\ y\right.$$
$$\left. + R(x,\ y,\ f(x,\ y))\right)dxdy.$$

Если уравнение поверхности *S* есть $\overline{r} = \overline{r}(u,\ v),\ (u;\ v)\in G,$ то

$$\Pi = \iint_G \overline{F}(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v))\left[\frac{\partial\overline{r}}{\partial u},\ \frac{\partial\overline{r}}{\partial v}\right]dudv.$$

Линейный интеграл

Линейный интеграл от вектора $\overline{F}$ по линии *l*

$$\int_l \overline{F}\cdot d\overline{r} = \int_l F_s ds = \int_l Pdx + Qdy + Rdz,$$

где F_s - проекция вектора $\overline{F}$ на касательную к l. Линейный интеграл выражает работу векторного поля $\overline{F}$ вдоль линии l.

Циркуляция

Циркуляция векторного поля $\overline{F}$ вдоль контура l - линейный интеграл вдоль замкнутой линии l: $\oint_l \overline{F} \cdot d\overline{r}$.

Формула Стокса

$$\oint_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

или в векторной форме

$$\int_{\partial S} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \iint_S \left(\overline{n} \cdot rot\,\overline{F}\right)dS,$$

где $\overline{n}$ единичный вектор нормали к поверхности S, направление которого таково, что при обходе контура $l = \partial S$ поверхность S остается слева.

Формула Остроградского

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint_{\partial V} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS = \iint_{\partial V} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

или в векторной форме

$$\iiint\limits_{V} div\overline{F}dV = \iint\limits_{\partial V} F_n dS,$$

где $\partial V = S$ - внешняя сторона поверхности, ограничивающей тело V; $\overline{n}$ - единичный вектор внешней нормали к ней.

Потенциальное векторное поле

Векторное поле $\overline{F}$ - потенциальное, если $\overline{F} = \mathrm{grad}u.$ Функция *u* называется потенциалом векторного поля $\overline{F}$. Поле $\overline{F} = (P,\ Q,\ R)$ потенциально в односвязной области тогда и только тогда, когда $rot\overline{F} = \overline{0}$ или $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$ Потенциал в этом случае можно найти, например, по формуле

$$u(x,\ y,\ z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,\ y,\ z)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,\ y,\ z)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0,\ y_0,\ z)dz + C.$$

Соленоидальное векторное поле

Векторное поле $\overline{F}$ называется соленоидальным, если $div\overline{F} = 0.$

Оператор Лапласа

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Оператор Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Оператор Лапласа в сферических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Уравнение Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими.

Операции второго порядка

$$rot\,\mathrm{grad}\,u = \left[\nabla,\ \nabla u\right] = \overline{0},\quad div\,rot\overline{F} = \nabla\cdot\left[\nabla,\ \overline{F}\right] = 0,$$
$$div\,\mathrm{grad}\,u = \nabla\cdot\nabla u = \nabla^2 u = \Delta u,$$
$$\mathrm{grad}\,div\overline{F} = \nabla\left(\nabla\cdot\overline{F}\right) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z}\right)\overline{i} +$$
$$+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\overline{k},$$
$$rot\,rot\overline{F} = \left[\nabla,\left[\nabla,\ \overline{F}\right]\right] = \nabla\cdot\left(\nabla\cdot F\right) - \left(\nabla\cdot\nabla\right)\overline{F} = \mathrm{grad}\,div\overline{F} - \Delta\overline{F},$$

$$\Delta\overline{F} = \Delta P\overline{i} + \Delta Q\overline{j} + \Delta R\overline{k}.$$

где

2.25. Конечные поля

Определение конечного поля

Ранее дано определение поля F как коммутативного кольца с единицей, в котором каждый ненулевой элемент имеет мультипликативный обратный элемент. В теории помехоустойчивых кодов весьма важное значение имеют поля, образованные конечным множеством элементов – так называемые конечные поля Галуа (Galois Field), обозначаемые GF. В связи с этим дадим их развернутое определение.

Конечным полем GF называется конечное множество элементов, замкнутое по отношению к двум заданным в нем операциям комбинирования элементов. Под замкнутостью понимается тот факт, что результаты операций не выходят за пределы конечного множества введенных элементов. Для конечных полей выполняются следующие аксиомы.

1. GF.1. Из введенных операций над элементами поля одна называется сложением и обозначается как $a+b$, а другая - умножением и обозначается как ab.
2. GF.2. Для любого элемента a существует обратный элемент по сложению $(-a)$ и обратный элемент по умножению a^{-1} (если $a \neq 0$) такие, что $a+(-a)=0$ и $a \cdot a^{-1}=1$. Наличие обратных элементов позволяет наряду с операциями сложения и умножения выполнять также вычитание и деление: $a-b=a+(-b)$, $a/b=a \cdot b^{-1}$. Поэтому иногда просто говорят, что в поле определены все четыре арифметические операции (кроме деления на 0).
3. GF.3. Поле всегда содержит мультипликативную единицу 1 и аддитивную единицу 0, такие что $a+0=a$, и $a \cdot 1=a$ для любого элемента поля.
4. GF.4. Для введенных операций выполняются обычные правила ассоциативности $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a(bc)=(ab)c$,

коммутативности $a+b=b+a$, $ab=ba$ и дистрибутивности $a(b+c)=ab+ac$.

5. GF.5. Результатом сложения или умножения двух элементов поля является третий элемент из того же конечного множества.

Аксиомы GF.1 – GF.5 являются общими для полей как с конечным, так и с бесконечным числом элементов. Специфику же конечного поля определяет аксиома GF.5, где ключевыми являются слова «из того же конечного множества».

Требование конечности множества определяет ряд ограничений как на количество элементов поля GF, так и на понятия «сложение» и «умножение».

Конечные поля существуют не при любом числе элементов, а только в том случае, если их количество – простое число p или его степень p^m, где m – целое. В первом случае поле $GF(p)$ называется простым, а во втором – расширением $GF(p^m)$ простого поля.

Очевидно, операции комбинирования элементов конечного поля не могут быть обычными сложением и умножением. Выполнение аксиомы GF.5 для простого конечного поля обеспечивается совершением арифметических операций по модулю числа p, которое носит название характеристики конечного поля. Можно убедиться, что в кольце вычетов по модулю p каждый ненулевой элемент имеет обратный элемент тогда и только тогда, когда p – простое число. Следовательно, кольцо вычетов по модулю простого числа p является простым полем $GF(p)$. Элементами этого поля являются целые числа $0, 1, 2, \ldots, p-1$. Операции сложения и умножения в таком поле производятся по модулю p. Пример простейшего двоичного поля $GF(2)$ приведен в 2.26.

Элементами β расширенного поля $GF(p^m)$ могут быть, например, все многочлены степени $m-1$ или меньше, коэффициенты которых лежат в простом поле $GF(p)$. Число p^m называется порядком расширенного поля и определяет количество различных многочленов.

Правила сложения и умножения полиномов – элементов расширенного конечного поля получаются из обычных правил сложения и умножения полиномов с последующим приведением результата по модулю некоторого специального многочлена $p(x)$ степени m. Такое приведение эквивалентно делению многочлена результата на $p(x)$ и использованию только остатка.

Очевидно, любые результаты вычислений в поле после приведения по модулю $p(x)$ должны оставаться обратимыми – только в этом случае наша система образует поле. Для этого используемый полином $p(x)$ должен быть неприводимым в поле $GF(p)$, т.е. его нельзя разложить на множители, используя только многочлены с коэффициентами из $GF(p)$. Это означает также, что $p(x)$ не имеет корней в поле $GF(p)$. Аналогом неприводимого полинома является простое число в поле вещественных чисел. К сожалению, регулярных методов поиска неприводимых полиномов не существует, они обычно определяются перебором. К настоящему времени имеются подробные таблицы неприводимых полиномов. Особым свойством конечных полей является связь между собой всех ненулевых элементов β и возможность выражения каждого из них через один элемент α, называемый примитивным, как некоторую целую степень этого элемента. Множество p^m-1 ненулевых элементов расширения $GF(p)$ образует циклическую мультипликативную группу, т.е. элементы находятся между собой в соотношении $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{p^m-1}, \alpha^{p^m}=1$. Примитивных элементов в $GF(p^m)$ может быть несколько.

Построение конечного поля

Построим конечное поле $GF(2)$ и его расширение $GF(2^4)$. Пусть элементами $GF(2)$ являются 0 и 1, а элементами $GF(2^4)$ – 16 всевозможных полиномов степени 3 и менее с коэффициентами из $GF(2)$:

$$0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1, \dots, x^3+x^2+x+1$$

Теперь необходимо определить операции над элементами таким образом, чтобы их результаты не давали новых элементов, кроме уже введенных. В поле $GF(2)$ обычные операции умножения (на 0 и 1) и деления (на 1) не выводят результат за пределы множества 0; 1. Однако при сложении и вычитании элементов это требование может уже не выполняться: $1+1=2$; $-1+(-1)=-2$ и т. д. Свойства конечного поля будут, очевидно, соблюдаться, если в качестве операции сложения использовать суммирование по модулю 2 $(\mathrm{mod}\ 2)$:

$$0+0=0;\ 0+1=1;\ 1+0=1;\ 1+1=0.$$

причем операции сложения и вычитания в поле $GF(2)$ совпадают. Этим мы будем пользоваться в дальнейшем, заменяя, например, полином вида x^n-1 на x^n-1 в тех случаях, когда полиномы заданы над полем характеристики 2. Если, однако, характеристика поля $p \neq 2$, такая замена неправомерна, и полиномы каждого вида нужно рассматривать самостоятельно.

В поле $GF(2^4)$ операцией, которая может вывести результат за пределы поля, является умножение многочленов. Обычное перемножение может дать полином степени больше 3, не принадлежащий множеству элементов $GF(2^4)$. Действительно, используя представление полиномов через векторы их коэффициентов, получим

$$(1101)(1001) \leftrightarrow (x^3+x^2+1)(x^3+1) = x^6+x^5+x^3+x^3+x^2+1 =$$
$$x^6+x^5+(1+1)x^3+x^2+1 = x^6+x^5+x^2+1 \leftrightarrow 1100101.$$

Поэтому введем дополнительное условие, чтобы x удовлетворял некоторому уравнению степени $m=4$, например, $p(x)=x^4+x+1=0$ или $x^4=x+1$. Тогда $x^5=x^2+x$; $x^6=x^3+x^2$; $x^7=x^4+x^3=x^3+x+1$ и т.д., а $x^6+x^5+x^2+1=x^3+x^2+x^2+x+x^2+1=x^3+x^2+x+1 \leftrightarrow 1111$, т.е. не выходит за пределы поля $GF(2^4)$.

Нетрудно видеть, что результат проделанного преобразования полинома $x^6+x^5+x^2+1$ эквивалентен вычислению остатка от его деления на полином $p(x)=x^4+x+1$, т.е. приведению произведения многочленов по модулю $p(x)$:

$$
\begin{array}{lcr|lcl}
x^6+x^5+x^2+1 & \leftrightarrow & 1100101 & 10011 & \leftrightarrow & x^4+x+1 \\
\cline{4-4}
 & & 10011 & 110 & \leftrightarrow & x^2+x \text{ — частное} \\
\cline{3-3}
 & & 10100 & & & \\
 & & 10011 & & & \\
\cline{3-3}
 & & 01111 & & & \\
 & & 00000 & & & \\
\cline{3-3}
 & & 1111 & & \leftrightarrow & x^3+x^2+x+1 \text{ — остаток.}
\end{array}
$$

Или
$$x^6+x^5+x^2+1=(x^2+x)p(x)+x^3+x^2+x+1=(x^3+x^2+x+1)(\bmod p(x)).$$

Делением на полиномы первой степени x и $x+1$, и второй степени x^2, x^2+1 и x^2+x+1 можно убедиться, что рассматриваемый многочлен $p(x)=x^4+x+1$ неприводим над $GF(2)$, а следовательно, не имеет в нем корней. В противном случае $p(x)$ раскладывался бы на сомножители $x+0=x$ и $x+1$, ибо корнями в поле $GF(2)$ могут быть только 0 или 1.

Для нахождения примитивных элементов поля, как и неприводимых полиномов, приходится прибегать к таблицам. В нашем примере поля $GF(2^4)$, задаваемого многочленом $p(x)=x^4+x+1$, примитивным элементом является $\alpha=x$. Последовательно применяя равенства $\alpha^{j+1}=x\alpha^j$ и $p(x)=0$ (или, что эквивалентно, $x^4=x+1$), получим упорядоченное по степеням примитивного элемента α множество элементов β, составляющее конечное поле $GF(2^4)$.

В табл. 1 даны различные представления элементов β поля $GF(2^4)$, заданного полиномом $p_1(x)=x^4+x+1$, а также полиномом $p_2(x)=x^4+x^3+1$.

Представление элементов поля по степеням примитивного элемента α удобно, в частности, при умножении элементов друг на друга. Для этого достаточно сложить их степени по модулю p^m-1 (применительно к табл. 1 – по модулю 15). Например,

$$\beta_{10}\beta_{13}=(x^2+x+1)(x^3+x^2+1)=\alpha^{10}\alpha^{13}\leftrightarrow(10+13)\bmod 15=8\leftrightarrow\alpha^8=x^2+1$$

Прямые вычисления дают то же, но более трудоемко:

$$\beta_{10}\beta_{13} = (x^2+x+1)(x^3+x^2+1) = x^5+x^4+x^3+x^4+x^3+x^2+x^2+x+1 =$$
$$= x^5+x+1 = x^2+x+x+1 = x^2+1.$$

Таблица 1. Различные представления элементов поля $GF(2^4)$

Ненулевые элементы поля $GF(2^4)$	$p_1(x)=x^4+x+1$			$p_2(x)=x^4+x^3+1$	
	Представление элементов поля через			Представление через	
	полином	вектор	степень α	вектор	степень γ
β_0	1	0001	$\alpha^0=1$	0001	1
β_1	x	0010	α^1	0111	γ^7
β_2	x^2	0100	α^2	1100	γ^{14}
β_3	x^3	1000	α^3	1111	γ^6
β_4	$x+1$	0110	α^4	0110	γ^{13}
β_5	x^2+x	0110	α^5	1011	γ^5
β_6	x^3+x^2	1100	α^6	0011	γ^{12}
β_7	x^3+x+1	1011	α^7	1001	γ^4
β_8	x^2+1	0101	α^8	1101	γ^{11}
β_9	x^3+x	1010	α^9	1000	γ^3
β_{10}	x^2+x+1	0111	α^{10}	1010	γ^{10}
β_{11}	x^3+x^2+x	1110	α^{11}	0100	γ^2
β_{12}	x^3+x^2+x+	1111	α^{12}	0101	γ^9
β_{13}	x^3+x^2+1	1101	α^{13}	0010	γ^1
β_{14}	x^3+1	1001	α^{14}	1110	γ^8

$\alpha^{15}=\alpha^0=1$ $\quad\quad$ $\gamma^{15}=\gamma^0=1$

Ненулевые элементы $GF(2^4)$ расположены в порядке нарастания степени примитивного элемента и образуют циклическую группу порядка 15. При этом $\alpha^{15}=1$, $\alpha^{16}=\alpha$, $\alpha^{17}=\alpha^2$, … , $\alpha^{30}=1$ и т.д.

Нетрудно убедиться, что примитивным в поле $GF(2^4)$ является не только один элемент α, но и α^2, α^4, α^8 и ряд других (предлагается их отыскать самостоятельно), а α^3 и α^5 таковыми не являются.

Основные свойства конечных полей и полиномов

Связь между элементами конечного поля

Все ненулевые элементы β конечного поля $GF(2^m)$ являются степенями одного примитивного элемента:

$$\beta=\alpha^s,\quad s=0,1,2,\ldots,p^m-2;\quad \alpha^{p^m-1}=1.$$

Порядок элемента поля

Порядком β элемента $\beta^{p^m}=\beta$ конечного поля называется наименьшее значение β, для которого $\beta^q=1$. Пусть $\beta=\alpha^i$. Поскольку ненулевые элементы β образуют циклическую группу, порядок элемента α^i может быть определен из равенства

$$q=\frac{p^m-1}{НОД\left[p^m-1,i\right]},$$

где $НОД$ – наибольший общий делитель. Порядки элементов $x^q - 1$ лежат в пределах от 1 (элемент $\varphi(x)$) до n (примитивные элементы), но $p^m - 1$ всегда кратно порядку элемента.

Возведение многочлена над полем $GF(p)$ в степень p

Если $\varphi(x)$ – произвольный многочлен, коэффициенты которого лежат в $GF(p)$, то $\varphi^p(x) = \varphi(x^p)$. Справедливость этого утверждения вытекает из того, что все по парные или многократные произведения в $\varphi^p(x)$ появляются с коэффициентами, которые делятся на p, и значит, равны 0 в $GF(p)$.

Так для многочлена над полем характеристики $p = 2$ справедливо $\varphi^2(x) = \varphi(x^2)$, в чем можно убедиться на примере:

$$\varphi^2(x) = (x^2 + x + 1) = x^4 + x^2 + 1 + (1+1)(x^3 + x^2 + x) = x^4 + x^2 + 1 = \varphi(x^2)$$

Корни полиномов

Ключевым при построении кодов и их декодировании является вопрос о корнях полиномов, соответствующих кодовым комбинациям. Напомним, что из теории полиномов над полем вещественных чисел (не конечных!) известно, что полином степени m всегда имеет m корней, только не все они обязательно лежат в поле вещественных чисел (на вещественной оси). Часть корней может находиться в поле комплексных чисел как некотором расширении поля вещественных чисел.

Известная аналогия этому имеется и в конечных полях. Любой многочлен степени m, в том числе и неприводимый над полем

$GF(p)$ (не имеющий корней среди элементов этого поля), всегда имеет m корней в расширении $GF(p^m)$, и этими корнями является часть элементов поля $GF(p^m)$. Как элементы конечного поля, корни находятся между собой в определенном соотношении. Если $\varphi(x)$ – неприводимый полином с коэффициентами из $GF(p)$ и β_1 – его корень, то $\beta_1^p, \beta_1^{p^2}, \beta_1^{p^3}, \dots$ также являются его корнями. В поле $GF(p^m)$ корнями неприводимого полинома степени m будут $\beta_1, \beta_2 = \beta_1^2, \beta_3 = \beta_1^4, \dots, \beta_m = \beta_1^{2^{m-1}}$.

Полиномы $x^n - 1$

Для дальнейшего обсуждения процедур кодирования и декодирования полезно иметь в виду следующие свойства многочлена вида $x^n - 1$. Для любого элемента β как циклической группы справедливо равенство $\beta^{p^m} = \beta$. Это означает, что любой из элементов β является корнем уравнения $x^{p^m} = x$ или, что то же самое, корнем полинома $x^{p^m} - x$ или $x\left(x^{p^m-1} - 1\right)$. Нулевой элемент $\beta = 0$ – корень полинома x, а каждый из ненулевых элементов поля $GF(p^m)$ – один из корней полинома $x^{p^m-1} - 1$. Таким образом,

$$x^{p^m} - x = \prod_{i=1}^{p^m} (x - \beta_i).$$

Пусть q – порядок элемента поля β, т.е. $\beta^q = 1$. Следовательно, β – корень полинома $x^q - 1$. Если β является также и корнем неприводимого многочлена $\varphi(x)$, то $x^q - 1$ делится без остатка на $\varphi(x)$.

В более общем случае минимальное значение n, для которого произвольный многочлен $\varphi(x)$ без кратных корней делит $x^n - 1$, совпадает с наименьшим общим кратным (НОК) порядков корней $\varphi(x)$.

Многочлен $x^n - 1$ делится на $x^m - 1$ только в том случае, если n делится на m. Действительно, если корни $x^m - 1$ являются также корнями $x^n - 1$, то n должно делиться на m.

Циклотомические классы

Каждый из корней β_i полинома $\varphi(x)$ в поле $GF(p^m)$ есть степень примитивного элемента α. Показатели степеней, соответствующие корням

$$\beta_1 = \alpha^s,\ \beta_2 = \alpha^{sp},\ \beta_3 = \alpha^{sp^2},\ \beta_4 = \alpha^{sp^3},\ldots,$$

образуют циклотомический класс чисел $\{s, sp, sp^2, sp^3, \ldots\}$ по модулю $p^m - 1$, а весь набор показателей степеней примитивного элемента в поле $GF(p^m)$ распадается на не перекрывающиеся циклотомические классы K_s. Индекс s равен наименьшему из чисел в классе и называется представителем класса по модулю $p^m - 1$.

С другой стороны, как отмечалось в 5.3.5, каждый из $p^m - 1$ ненулевых элементов β поля $GF(p^m)$ является одним из корней полинома $x^{p^m-1}-1$, который, в свою очередь, раскладывается на произведение неприводимых полиномов $\varphi_i(x)$ меньшей степени. Каждый из циклотомических классов содержит набор показателей степеней примитивного элемента, соответствующих корням одного из полиномов $\varphi_i(x)$.

Убедимся в этом на примере полинома $x^{15}-1$ над полем $GF(2)$. Поскольку сложение и вычитание по модулю 2 здесь неразличимы, то записи $x^{15}-1$ и $x^{15}+1$ эквивалентны. Разложение $x^{15}+1$ на неприводимые полиномы $\varphi_i(x)$ выглядит следующим образом:

.

$$x^{15}+1=(x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)(x^4+x^2+1)$$

В табл. 2 приведено распределение элементов поля β, представленных степенями примитивного элемента α, по циклотомическим классам K_s с указанием соответствующих им неприводимых полиномов $\varphi_i(x)$.

Класс K_0 содержит один элемент, K_5 – два элемента, а классы K_1, K_3 и K_7 – по четыре элемента. Это значит, что неприводимый над полем $GF(2)$ полином, имеющий в качестве корня элемент α^0 поля $GF(2^4)$, должен быть полиномом первой степени, т.е. $\varphi_0(x)=x+1$. Корни α^5 и α^{10} принадлежат неприводимому полиному 2-й степени, который определяется по известному правилу:

$$\varphi_5(x) = (x - корень\,1)(x - корень\,2) = (x + \alpha^5)(x + \alpha^{10}) =$$
$$= x^2 + x\alpha^5 + x\alpha^{10} + \alpha^{15} = x^2 + x(x^2 + x) + x(x^2 + x + 1) + 1 = x^2 + x + 1.$$

Остальные ненулевые элементы поля $GF(2^4)$ являются корнями неприводимых полиномов $\varphi_1(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_7(x)$ четвертой степени, вычисляемых аналогичным образом.

Имея в виду связь между корнями одного полинома, часто об его корнях говорят в единственном числе: «неприводимый полином имеет корень...», понимая под корнем один элемент поля, соответствующий, как правило, младшему из чисел циклотомического ряда, называемому его представителем.

Таблица 2. Распределение элементов поля $GF(2^4)$ по циклотомическим классам

Корни $\varphi_i(x)$				Циклотомические классы K_s	Полиномы $\varphi_i(x)$
β_1	$\beta_2 = \beta$	$\beta_3 = \beta_1^4$	$\beta_4 = \beta_1^8$		
$\alpha^0 =$	$\alpha^0 = 1$	$\alpha^0 = 1$	$\alpha^0 = 1$	$K_0 = \{0\}$	$x + 1$
α	α^2	α^4	α^8	$K_1 = \{1,2,3,4\}$	$x^4 + x + 1$
α^3	α^6	α^{12}	$\alpha^{24} = \alpha$	$K_3 = \{3,6,12,$	$x^4 + x^3 + x^2 +$
α^5	α^{10}	$\alpha^{20} = \alpha$	$\alpha^{40} = \alpha$	$K_5 = \{5,10\}$	$x^2 + x + 1$
α^7	α^{14}	$\alpha^{28} = \alpha$	$\alpha^{56} = \alpha$	$K_7 = \{7,14,13$	$x^4 + x^3 + 1$

Минимальные многочлены

Рассмотренное распределение элементов конечного поля по циклотомическим классам позволяет лучше понять следующее важное в теории кодирования понятие. Минимальным многочленом или минимальной функцией элемента β поля $GF(p^m)$ называется многочлен $M(x)$ с коэффициентами из $GF(p^m)$ наименьшей степени, для которого β является корнем, т.е. $M(\beta)=0$. Обсудим его основные свойства.

Прежде всего, очевидно, что минимальный многочлен должен быть неприводимым, иначе он раскладывался бы на полиномы меньшей степени.

Любой другой полином, имеющий тот же корень β, что и минимальный, делится на $M(x)$. На $M(x)$ делится и полином $x^{p^m}-1$, т.к. корнями последнего будут все ненулевые элементы поля $GF(p^m)$. Степень минимального многочлена определяется количеством компонентов циклотомического класса, которому соответствует его корень (табл.2). Действительно, минимальный многочлен, показатели корней которого принадлежат циклотомическому классу K_s, может быть записан в виде

$$M^{(s)}(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots=\prod_i(x-\beta_i)=\prod_{j\in K_s}\left(x-\alpha^j\right)$$

Для $s=5$:

$$M^{(5)}(x)=\left(x+\alpha^3\right)\left(x+\alpha^6\right)\left(x+\alpha^{12}\right)\left(x+\alpha^9\right)=x^4+x^3+x^2+x+1$$

Аналогично для $s=3$:

$$M^{(3)}(x) = (x+\alpha^3)(x+\alpha^6)(x+\alpha^{12})(x+\alpha^9) = x^4+x^3+x^2+x+1$$

С учетом (5.10) справедливо равенство

$$x^{p^m-1} - 1 = \prod_s M^{(s)}(x),$$

где s пробегает все множество классов по модулю $p^m - 1$, т.е. многочлен $x^{p^m-1} - 1$ раскладывается на произведение минимальных многочленов элементов, показатели которых принадлежат каждому из циклотомических классов по модулю $p^m - 1$.

Минимальные многочлены элементов β и β^p равны. В частности, в поле $GF(2^m)$ равны минимальные многочлены элементов β и β^2. В этом можно убедиться, обратив внимание на тот факт, что элементы β и β^2 всегда соответствуют одному циклотомическому классу (табл.2), а следовательно, принадлежат набору корней одного неприводимого полинома. Более того, между собой равны минимальные многочлены всех элементов, соответствующих одному циклотомическому классу, т.к. любые два соседние из таких элементов находятся в соотношении β и β^2.

И еще об одном свойстве минимального многочлена, имеющем отношение к нахождению примитивных элементов поля. Минимальный многочлен, корнем которого является примитивный элемент поля, называется примитивным многочленом. Его степень всегда равна m. Для практических приложений важно иметь в виду следующее. В тех случаях, когда неприводимый многочлен $p(x)$, задающий операции в поле, является также и примитивным многочленом, примитивным элементом поля будет элемент $\alpha = x$.

Таблицы неприводимых многочленов обычно содержат сведения о том, какие из многочленов являются примитивными, что позволяет избежать возможных затруднений в определении примитивных элементов поля. В табл. 3 приведены примитивные многочлены над $GF(2)$ для m от 1 до 20.

Помимо представленных в таблице примитивными являются также полиномы, векторы коэффициентов которых написаны в обратном порядке. Такие полиномы называются двойственными, или взаимными исходным.

Таблица 3. Примитивные многочлены до степени $m = 20$

$x+1$	x^6+x+1	$x^{11}+x^2+1$	$x^{16}+x^{12}+x^3+x$
x^2+x+1	x^7+x^3+1	$x^{12}+x^6+x^4+x$	$x^{17}+x^3+1$
x^3+x+1	$x^8+x^4+x^3+x^2$	$x^{13}+x^4+x^3+x$	$x^{18}+x^7+1$
x^4+x+1	x^9+x^4+1	$x^{14}+x^9+x^5+x$	$x^{19}+x^5+x^2+x$
x^5+x^2+	$x^{10}+x^3+1$	$x^{15}+x+1$	$x^{20}+x^3+1$

Это пары x^3+x^2+1 и x^3+x+1; x^4+x^3+x+1 и x^4+x+1 и т.д. Использовавшийся ранее при построении $GF(2^4)$ полином $p(x)=x^4+x+1$ примитивен, на основании чего в качестве примитивного элемента поля был взят $\alpha = x$.

Изоморфизм конечных полей

Расширение конечного поля $GF(p^m)$ может быть задано разными полиномами одинаковых степеней m. В каком соотношении находятся эти поля? Прежде всего, очевидно, ненулевыми элементами любого поля порядка p^m является тот же полный набор всевозможных многочленов степени $m-1$ и ниже, отличающийся для разных полиномов $p(x)$ лишь порядком следования элементов p по степеням примитивного элемента.

В теории конечных полей доказывается, что все поля $GF(p^m)$ одного порядка p^m изоморфны («подобны по форме»), т.е. между $GF_1(p^m)$ и $GF_2(p^m)$ существует взаимнооднозначное отображение f друг на друга, сохраняющее операции сложения и умножения. Это означает, что для любых двух элементов β_i и β_j из $GF_1(p^m)$ справедливы соотношения

$$f(\beta_i + \beta_j) = f(\beta_i) + f(\beta_j),$$
$$f(\beta_i \beta_j) = f(\beta_i) f(\beta_j).$$

Нетрудно убедиться, что между полями, построенными на основе неприводимых полиномов $p_1(x) = x^4 + x + 1$ и $p_2(x) = x^4 + x^3 + 1$ (табл.1), существует взаимнооднозначное отображение: $\alpha = f(\gamma) = \gamma^7 = x^4 + x^3 + 1$. Простой подстановкой можно убедиться, что при таком отображении сохраняются операции сложения и умножения. Например, для сложения

$$f(\beta_4 + \beta_7) = f(\alpha^4 + \alpha^7) = f(\alpha^3) = \gamma^{21} = \gamma^6 = \alpha^3 = \beta_3$$
$$f(\beta_4) + f(\beta_7) = f(\alpha^4) + f(\alpha^7) = \gamma^{28} + \gamma^{49} = \gamma^{13} + \gamma^4 = \gamma^6 = \beta_3$$

Аналогично для умножения

$$f(\beta_4 \beta_7) = f(\alpha^4 \alpha^7) = f(\alpha^{11}) = \gamma^2 = \alpha^{11} = \beta_{11},$$
$$f(\beta_4)(\beta_7) = f(\alpha^4) f(\alpha^7) = \gamma^{28}\gamma^{49} = \gamma^{13}\gamma^4 = \gamma^{17} = \gamma^2 = \beta_{11}.$$

3. Введение в теорию векторных пространств

3.1. Понятие векторного пространства

Определение вектора

Вектором называется упорядоченное множество из n элементов поля, обозначаемое как $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Величины $a_i \in F$ называются компонентами (координатами) вектора. Число компонентов вектора n называется длиной вектора. Векторы считаются равными, если равны их соответствующие компоненты. Число ненулевых компонентов вектора называют весом вектора.

Сложение двух векторов длины n определяется следующим образом:

.

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] + [b_1, b_2, \ldots, b_n] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n]$$

Умножение элемента поля на вектор производится покомпонентно:

$$a[b_1, b_2, \ldots, b_n] = [ab_1, ab_2, \ldots, ab_n],$$

причем сложение и умножение компонентов векторов происходит по правилам сложения и умножения в поле F.

Для векторов введено понятие нормы, которая для вектора A определяется как $\|A\| = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, где символ Σ означает суммирование в поле действительных чисел. Если компоненты вектора принадлежат двоичному полю, то норма вектора совпадает с числом его ненулевых компонентов, т.е. с его весом.

Вектор $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k$, где α_i – элементы поля, называют линейной комбинацией векторов $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Векторы $u_1, u_2, \ldots, u_k$ называются линейно зависимыми, если в F существуют такие элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, по крайней мере один из которых не равен нулю, такие что $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k = 0$ и линейно независимыми в противном случае. Если векторы линейно зависимы, то любой из них может быть выражен через линейную комбинацию остальных.

Определение векторного пространства

Множество V называется векторным пространством, если для него выполняются следующие аксиомы:

V. 1. Множество V является аддитивной абелевой группой.

V.2. Для любого вектора $v \in V$ и любого скаляра – элемента α поля F определено произведение αv, являющееся вектором. Это произведение определено так, что $lv = v$, где l – единичный элемент поля F.

V.3. Выполняются законы дистрибутивности

$$\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2 \text{ и } (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v,$$

где α, β – скаляры, а v_1 и v_2 – векторы.

V.4. Выполняется закон ассоциативности

$$(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v),$$

где α, β – скаляры, а v – вектор.

Приведем еще одно определение . *Векторным пространством над, полем* К называют аддитивную группу *Е,* для которой определено отображение $(x,\ \lambda) \to \lambda x$ произведения *Е* × К в *Е,* удовлетворяющее следующим условиям:

1. $(\lambda\mu)\,x = \lambda(\mu x)$ для всех $\lambda,\ \mu \in$ К и $x \in E$;
2. $1x = x$ для всех $x \in E$;
3. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ для всех $\lambda \in$ К и $x, y \in E$;
4. $(\lambda + \mu)\,x = \lambda x + \mu x$ для всех $\lambda, \mu \in$ К и $x \in E$.

Элементы векторного пространства над К называются его *точками* или *векторами,* а элементы поля К — *скалярами.* Отображение *Е* в *Е,* при котором все векторы $x \in E$ умножаются на один и тот же скаляр $\lambda \neq 0$, называется *гомотетией* с *коэффициентом гомотетии* λ. *Вещественным (комплексным) векторным пространством* называют векторное пространство над **R** (над **C**). Вещественное векторное пространство, получающееся, если в комплексном векторном пространстве *Е* рассматривать умножение лишь на вещественные скаляры, называется *вещественным векторным пространством, ассоциированным с комплексным векторным пространством Е,* и обозначается $E_{\mathbf{R}}$.

В дальнейшем, рассматривая свойства, общие векторным пространствам над произвольными полями К, мы будем для краткости слова «над *К»* часто опускать и говорить просто «векторное пространство»; если же речь будет идти о каком-нибудь определенном векторном пространстве, то мы будем опускать слово «векторное», т. е. говорить просто «пространство».

Свойства векторного пространства

1. Максимальное число линейно независимых векторов в V называется размерностью пространства V над полем F.

2. Совокупность n любых линейно независимых векторов называется базисом и-мерного пространства, если каждый из векторов пространства может быть представлен в виде линейной комбинации этих векторов. Векторы совокупности называются базисными.

3. Подмножество W векторного пространства V такое, что любая линейная комбинация векторов этого подмножества снова принадлежит W, называется подпространством пространства V. Легко проверить, что все векторы подпространства удовлетворяют аксиомам V.1 – V.4. Очевидно, что размерность подпространства не превышает размерности пространства, т.к. во всем пространстве содержится не более n линейно независимых векторов. Каждое подпространство можно рассматривать как самостоятельное пространство. Следовательно, каждое подпространство имеет свой базис.

4. Скалярным произведением двух векторов одинаковой длины n: $v = [a_1, a_2, \dots, a_k]$ и $u = [b_1, b_2, \dots, b_k]$ называется скаляр, определяемый как

$$(vu) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n).$$

Можно показать, что $(vu) = (uv)$ и $(w(u+v)) = (wu) + (wv)$.

Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то говорят, что эти векторы ортогональны. Два пространства называются взаимно ортогональными, если каждый вектор одного пространства ортогонален любому вектору другого пространства.

Множество всех векторов пространства V, ортогональных подпространству V_1, образуют подпространство V_2 пространства V. Подпространство V_2 часто называют нулевым пространством для V_1.

Можно показать, что если V_1 – подпространство размерности k n-мерного векторного пространства V, то размерность нулевого пространства равна $n-k$.

5. Для векторного пространства определено понятие расстояния между двумя векторами, которое совпадает с нормой разности этих векторов

$$d(A,B)=\|A-B\|=\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2,$$

где суммирование производится в поле действительных чисел.

Примеры.

1. Совокупность всех направленных отрезков на плоскости с началом в некоторой фиксированной точке *O* есть вещественное векторное пространство при обычном определении сложения направленных отрезков и умножения их на вещественные числа.
2. Та же совокупность становится комплексным векторным пространством, если сложение и умножение на вещественные числа определены по-старому, а умножение на $i=\sqrt{-1}$ определено как поворот в плоскости на 90° против часовой стрелки.
3. В силу 2.5.В, Г, K^n $(n\geqslant 1)$ есть векторное пространство над К, если сложение и умножение на скаляры $\lambda\in K$ определены формулами

$(x_1, \ldots, x_n)+(y_1, \ldots, y_n)=(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$ (1) и

$\lambda(x_1, \ldots, x_n)=(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. (2)

В частности, K^1 *есть* К, *рассматриваемое как векторное пространство над самим собой.*

Рассматривая K^n как векторное пространство, мы всегда будем считать, что операции сложения и умножения на скаляры определены в нем формулами (1) и (2).

4. Непустая совокупность *E* функций со значениями в К, определенных на некотором множестве *A,* является векторным пространством над К относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на скаляр, если выполнены следующие условия:

1° $x(t)\in E$, $y(t)\in E$ влечет $x(t)+y(t)\in E$ и

2° $x(t)\in E$, $\lambda\in K$ влечет $\lambda x(t)\in E$.

Действительно, тогда $x(t)\in E$, $y(t)\in E$ влечет $x(t)-y(t)=$ $=x(t)+(-1)\,y(t)\in E$, так что в силу 2.4.Г и 2.1.Е *E* — аддитивная группа; выполнение же условий 1—4 определения 1 очевидно.

5. Так, совокупность *C* (*I*) всех непрерывных комплексных функций на интервале $I\subset\mathbf{R}$ есть комплексное векторное пространство; то же верно и для совокупностей $C^n(I)$ и $C^\infty(I)$ всех комплексных

функций на I, обладающих соответственно непрерывной n-й производной или производными всех порядков. Под $C^0(I)$ будет пониматься $C(I)$.

6. Пусть p— фиксированное число > 0. Совокупность l^p всех комплексных числовых последовательностей (ζ_n), для которых $\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|^p<\infty$, удовлетворяет условиям 1°—2° примера 4. Действительно, будучи непрерывной положительной функцией на замкнутом интервале $0\leqslant t\leqslant 1$, $t^p+(1-t)^p$ достигает на нем наименьшего значения $c_p > 0$, и потому при $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta>0$ имеем

$$\alpha^p+\beta^p=\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^p+\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^p\right](\alpha+\beta)^p\geqslant c_p(\alpha+\beta)^p,$$

откуда

$$(\alpha+\beta)^p\leqslant c_p^{-1}(\alpha^p+\beta^p).$$

Полученное неравенство справедливо и при $\alpha+\beta=0$. Следовательно, если $x=(\xi_n)\in l^p$ и $y=(\eta_n)\in l^p$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(|\xi_n|+|\eta_n|)^p\leqslant$$
$$\leqslant c_p^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p+\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p\right)<\infty,$$

т. е. и $x+y=(\xi_n+\eta_n)\in l^p$. Таким образом, l^p удовлетворяет условию Г примера 4. Выполнение же условия 2° очевидно. Тем самым l^p — векторное пространство над C. Совершенно так же убедимся в том, что совокупность $l^p{}_{\mathbf{R}}$ всех вещественных числовых последовательностей (α_n), для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^p<\infty,$$

есть векторное пространство над **R**.

7. Аналогично устанавливается, что совокупность $L^p(I)$ ($L^p{}_{\mathbf{R}}(I)$) всех измеримых комплексных (вещественных) функций $f(t)$ на интервале $I\subset$ R, для которых $\int_I|f(t)|^p\,dt<\infty$, есть векторное пространство над **C** (над **R**).

8. Совокупность l^{∞} $(l^{\infty}_{\mathbf{R}})$ всех ограниченных комплексных (вещественных) числовых последовательностей, очевидно, также является векторным пространством над **C** (над **R**).

9) Множество числовых вещественных функций одной переменной, непрерывных на интервале (0; 1) относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число.

10) Множество многочленов от одной буквы с коэффициентами из поля K относительно сложения многочленов и умножения многочленов на скаляр.

11) Множество комплексных чисел относительно сложения комплексных чисел и умножения на действительное число.

12) Множество матриц одного и того же размера с элементами из поля K относительно сложения матриц и умножения матриц на скаляр.

Следующий пример является важным частным случаем примера 4.

13) Пусть $n \in N$ - произвольное натуральное число. Обозначим через K^n множество всех столбцов высоты n, т.е. множество матриц над полем K размера $n \times 1$.

Множество K^n является векторным пространством над полем K и называется арифметическим векторным пространством столбцов высоты n над полем K.

В частности, если вместо произвольного поля K взять поле действительных чисел R, то векторное пространство R^n называется вещественным арифметическим векторным пространством столбцов высоты n.

Аналогично, векторным пространством является и множество матриц над полем K размера $1 \times n$ или, иначе, строк длины n. Оно обозначается также через K^n и также называется арифметическим векторным пространством строк длины n над полем K.

3.2. Системы векторов векторного пространства.

Определение. Системой векторов векторного пространства называют любое конечное непустое множество векторов этого пространства.

Обозначение: $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Определение. Выражение

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n, \qquad (1)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ - скаляры поля K, $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V$ – векторы векторного пространства V, называется линейной комбинацией системы векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются коэффициентами этой линейной комбинации.

Определение. Если все коэффициенты линейной комбинации (1) равны нулю, то такую линейную комбинацию называют тривиальной, в противном случае – нетривиальной.

Пример. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ система из трех векторов векторного пространства V. Тогда

$$0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

– тривиальная линейная комбинация данной системы векторов;

$$-e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

– нетривиальная линейная комбинация данной системы векторов, т.к. первый коэффициент этой комбинации $\alpha_1 = -1 \neq 0$.

Определение. Если какой-либо вектор x векторного пространства V может быть представлен в виде:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

то говорят, что вектор x линейно выражается через векторы системы $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. В этом случае говорят также, что система $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ линейно представляет вектор x.

Замечание. В этом и предыдущем определении слово "линейно" часто пропускают и говорят, что система представляет вектор или вектор выражается через векторы системы и т.п.

Пример. Пусть $\left\{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ – система из двух столбцов арифметического вещественного векторного пространства столбцов высоты 2. Тогда столбец $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix}$ линейно выражается через столбцы системы или данная система столбцов линейно представляет столбец x. Действительно,

$$x = 2e_1 - 3e_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ -4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

А. **Отметим некоторые простые свойства векторных пространств**, непосредственно вытекающие из условий 1) — 4) определения 1. 1° $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$ *для всех векторов x, y и скаляров λ.*
Действительно, в силу условия 3, $\lambda x = \lambda[(x - y) + y] =$
$= \lambda(x - y) + \lambda y.$
Совершенно так же, на основании условия 4, доказывается свойство
2° $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$ *для всех векторов x и скаляров* λ, μ.
Из 1° следует, в частности,
3° $\lambda \cdot 0 = 0$ *для всех скаляров* λ .
В самом деле, $\lambda \cdot 0 = \lambda(x - x).$
Аналогично, из 2° следует
4° $0 \cdot x = 0$ *для всех векторов x (* 0 слева означает нуль поля скаляров, а справа — нулевой вектор.*).* Имеет место и свойство, обратное свойствам 3°—4°:
5° *Если* $\lambda x = 0$*, то* $\lambda=0$ *или* $x=Q$. Действительно, при $\lambda \neq 0$ в силу условий 2 и 1 и свойства 3° имеем:
$x = 1x = (\lambda^{-1}\lambda)x = \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}0 = 0.$

6° (—1)x = —*x для всех векторов x.*
В самом деле, в силу условий 2 и 4 и свойства 4°

$$x+(-1)\,x=1x+(-1)\,x=[1+(-1)]\,x=0x=0.$$

7° $nx=\underbrace{x+\ldots+x}_{n \text{ раз}}$ *для всех векторов x и натуральных чисел n.*

Действительно, при *n=1* это — условие 2, а при *n>1* применяем индукцию.

8° $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sum_{l=1}^{m}x_l=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\lambda_k x_l$ *для любых конечных наборов скаляров* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ *и векторов* $x_1,\ldots,x_m$.

В самом деле, это получается индукцией по *m* и *n* из условий 3 и 4 определения 1.

Б. Пусть *A* — множество в- векторном пространстве *E* над K и $\lambda\in$ K. Под λA понимают множество всех векторов λx, где *x* пробегает *A*. В частности, $\lambda\varnothing=\varnothing$. Из условий 1—4 определения 1 следует, что

1'. $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$ для всех λ, $\mu\in$ K и $A\subset E$;

2'. $1A=A$ для всех $A\subset E$;

3'. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ для всех $\lambda\in$ K и $A, B\subset E$;

4'. $(\lambda+\mu)A\subset\lambda A+\mu A$ для всех λ, $\mu\in$ K и $A\subset E$.

Определение 2. Пусть *E*—векторное пространство над K. *Линейной комбинацией семейства векторов* $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ из *E* (или *линейной комбинацией векторов* x_α $(\alpha\in A)$) называется всякий вектор $x\in E$, представимый в виде

$$x=\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha x_\alpha, \quad (3)$$

где $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$—семейство скаляров из K, в котором $\lambda_\alpha\neq 0$ лишь для конечного числа индексов α, а под $\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha x_\alpha$ понимается сумма

$$\sum_{\alpha\in A'}\lambda_\alpha x_\alpha,$$

распространенная на (любое) конечное множествоиндексов A', вне которого все $\lambda_\alpha=0$. Скаляры λ_α называют *коэффициентами* линейной комбинации (3). В частности, *линейные комбинации конечного семейства векторов* $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$— это всевозможные суммы вида

$$x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k, \quad (4)$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in$ K.

Нулевой вектор считается, по определению, (единственной) *линейной комбинацией пустого семейства векторов.*

Замечание. Очевидно, линейная комбинация $\sum_{l=1}^{m} \lambda_{k_l} x_{k_l}$ всякого подсемейства $(x_{k_l})_{1 \leqslant l \leqslant m}$ семейства $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ может быть представлена в виде линейной комбинации (4) всего семейства, в которой $\lambda_k = 0$ при $k \notin \{k_1, \ldots, k_m\}$.

Смысл определения 2 заключается в том, чтолинейную комбинацию всякого конечного подсемейства семейства $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ можно представить в виде формальной линейной комбинации всех векторов семейства, даже если множество индексов его бесконечно.

Так как суммы (3) фактически конечны, то с ними можно оперировать по обычным правилам действий над многочленами.

Определение. Пусть E и F — векторные пространства над одним и тем же полем К. Отображение φ пространства E в F называют *изоморфизмом E на F,* если оно взаимно однозначно, $\varphi(E)=F$ и

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y), \qquad \varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x) \tag{5}$$

для всех $x, y \in E$ и $\lambda \in$ К. Если существует изоморфизм E на $F,$ то говорят, что *E изоморфно F*; мы будем выражать это записью $E \sim F$.

Примеры. 1. Введя на плоскости декартовы координаты с началом O и отнеся каждому направленному отрезку $\overrightarrow{OM}$ упорядоченную пару его координат (x, y), получим изоморфизм пространства примера 1 к определению l на $\mathbf{R}^2$.

Аналогично, отнеся отрезку $\overrightarrow{OM}$ число $x+iy$, получим изоморфизм пространства примера 2 к определению 1 на **C**.

2. Всякая гомотетия в векторном пространстве E есть изоморфизм E на себя.

3. Можно показать, что векторные пространства примеров 5—8 к определению 1 изоморфны.

В. Очевидно, *изоморфизм* φ *векторного пространства E на векторное пространство F есть также изоморфизм аддитивной группы E на аддитивную группу F.* В частности, $\varphi(0)=0$.

Г. Из условий (5) следует, что *изоморфизм E на F переводит каждую линейную комбинацию* $\sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha x_\alpha$ *семейства* $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ *векторов из E в такую же линейную комбинацию* $\sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha y_\alpha$ *семейства* $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ *их образов в F.*

Д. Для изоморфизма групп, можно установить, что *отношение изоморфизма векторных пространств рефлексивно, симметрично и транзитивно;* при этом, *если* φ—*изоморфизм E на F, то* φ^{-1} — *изоморфизм F на E.* Векторные пространства *E* и *F,* для которых существует изоморфизм *E* на *F* (а значит, и изоморфизм *F* на *E),* называют *изоморфными.*

Так, вещественное векторное пространство, ассоциированное с $\mathbf{C}^n$, изоморфно $\mathbf{R}^{2n}$; изоморфизм осуществляется, например, отнесением каждой точке $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ точки

$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^{2n}$, где $x_k = \Re z_k$, $y_k = \Im z_k$

(k=1, ..., n.).

3.3. Основные алгебраические структуры: векторные (линейные) пространства.

Определение. Пусть A и K – произвольные непустые множества. $K \times A$ – декартово произведение этих множеств. Отображение $K \times A \to A$ называют внешней бинарной алгебраической операцией, определенной на множестве A над множеством K.

Другими словами, каждой паре элементов $(\alpha; a)$ из декартова произведения $K \times A$ ставится в соответствие единственный для этой пары элемент $\alpha * a \in A$. (Обычно при написании результата алгебраической операции элемент $\alpha \in K$ пишется слева от элемента $a \in A$).

Пример 1. Пусть $R[x]$ – множество многочленов от одной переменной x с действительными коэффициентами, R – поле действительных чисел. Тогда операция умножения многочлена на число является внешней алгебраической операцией на множестве многочленов: $R \times R[x] \to R[x]$, т.е. в результате опять получается многочлен с действительными коэффициентами.

Пример 2. Пусть V – множество всех векторов как направленных отрезков. Тогда умножение вектора на число есть внешняя алгебраическая операция на множестве V : $R\times V\to V$, так как в результате получается вектор (направленный отрезок).

Определение. Пусть V - произвольное множество, элементы которого мы будем называть векторами, К - поле, элементы которого мы будем называть скалярами. Пусть на множестве V определена внутренняя бинарная алгебраическая операция, которую мы будем обозначать знаком + и называть сложением векторов. Пусть также на множестве V определена внешняя бинарная алгебраическая операция над полем К, которую мы будем называть умножением вектора на скаляр и обозначать знаком умножения. Другими словами определены два отображения:

$$V\times V\to V,\ \ \forall x,y\in V:\ (x,y)\to x+y\in V\ ;$$

$$K\times V\to V,\ \ \forall\lambda\in K,\forall x\in V:\ (\lambda,x)\to\lambda\cdot x\in V\ .$$

Множество V вместе с этими двумя алгебраическими операциями называют векторным пространством над полем К, если эти алгебраические операции подчиняются следующим законам (аксиомы векторного пространства).

1. Закон ассоциативности сложения:

$$\forall x,y,z\in V:\ (x+y)+z=x+(y+z)\ .$$

2. Существование нулевого вектора:

$$\exists 0\in V:\ \forall x\in V\ \ x+0=0+x=x\ .$$

3. Существование противоположного вектора:

$$\forall x\in V,\exists(-x)\in V:\ x+(-x)=(-x)+x=0\ .$$

4. Закон коммутативности сложения:

$\forall x, y \in V: \ x + y = y + x$.

5. Закон ассоциативности умножения вектора на скаляр:

$\forall \alpha, \beta \in K, \ \forall x \in V: \ (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

6. Закон дистрибутивности умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов:

$\forall \lambda \in K, \ \forall x, y \in V: \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

7. Закон дистрибутивности умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров:

$\forall \lambda, \mu \in K, \ \forall x \in V: \ (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

8. $\forall x \in V: \ 1 \cdot x = x$, где 1 - это единица поля K.

Определение. Векторное пространство V над полем вещественных чисел R называется вещественным векторным пространством.

Теорема. (Простейшие свойства векторных пространств.)

1. В векторном пространстве существует единственный нулевой вектор.

2. В векторном пространстве любой вектор имеет единственный противоположный ему.

3. $\forall \lambda \in K, \ \forall x \in V: \ \lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ или x = 0.

4. $\forall x \in V: \ (-1) \cdot x = -x$.

Доказательство. Векторное пространство относительно сложения образует абелевую группу (аксиомы 1 – 4) откуда и следуют сразу же первые два утверждения теоремы.

3) а) Сначала мы докажем, что произведение нулевого скаляра на любой вектор равен нулевому вектору. Пусть $\lambda = 0$. Тогда, применяя аксиомы векторного пространства, получаем:

$$0 \cdot x + x = 0 \cdot x + 1 \cdot x = (0+1) \cdot x = 1 \cdot x = x = 0 + x.$$

Применяя закон сокращения, получаем $0 \cdot x = 0$.

б) Теперь докажем утверждение 4):

Пусть $x \in V$ – произвольный вектор. Тогда

$$x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0 \cdot x = 0.$$

Отсюда сразу же следует, что вектор $(-1)x$ является противоположным вектору *x*.

в) Пусть теперь $x = 0$. Тогда, применяя аксиомы векторного пространства, $\forall y \in V$ получаем:

$$\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (y + (-y)) = \lambda \cdot y + \lambda \cdot (-y) = \lambda y + \lambda(-1)y =$$

$$= (\lambda + (-\lambda))y = 0 \cdot y = 0.$$

г) Пусть $\lambda x = 0$ и допустим, что $\lambda \neq 0$. Так как $\lambda \in K$, где К – поле, то существует $\lambda^{-1} \in K$. Умножим равенство $\lambda x = 0$ слева на λ^{-1}: $\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} \cdot 0 = 0$, откуда следует $(\lambda^{-1}\lambda)x = 0$, $1 \cdot x = 0$ и окончательно $x = 0$. Теорема доказана.

Пример. Обозначим через V множество всех векторов как направленных отрезков. Мы уже знаем (см. выше примеры групп), что относительно сложения векторов множество V является абелевой группой. Из школьного курса геометрии нам известна еще одна операция с векторами – умножение вектора на число, в результате которой получается тоже вектор. Значит эта операция является внешней бинарной алгебраической операцией на множестве V над полем действительных чисел: $\mathbb{R}\times V \to V$. Осталось проверить все аксиомы векторного пространства, причем первые 4 нами уже проверены. Столь же легко проверяются и остальные аксиомы. Таким образом, множество всех векторов как направленных отрезков образует вещественное векторное пространство.

3.4. Подпространства

Определение . Пусть *E*—векторное пространство над К. Всякое множество *FczE,* являющееся векторным пространством над К относительно индуцированных из *E* операций сложения и умножения на скаляры, называют *векторным подпространством* или просто *подпространством* векторного пространства *E.* Для обозначения того, что *F* есть подпространство векторного пространства *E,* мы будем пользоваться записью $F \subset\subset E$.

Подпространство.

Пусть V — векторное пространство над полем F и U $\subset$ V. Множество U называется замкнутым в V , если оно замкнуто относительно главных операций операций сложения и умножения на скаляры, т. е. для любых ***a, b*** из *U* и любого λ из F $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in$ U и $\lambda\boldsymbol{a} \in U$..

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подпространством векторного пространства V называется любая подалгебра пространства V рассматриваемого как алгебра.

Пусть V =<V,+,{ω_λ|λ $\in$ F}>— векторное пространство над F . Пусть U— подалгебра пространства V и U — его основное множество. Тогда U — непустое подмножество множества V, замкнутое в V. Пусть $\oplus$ и ω_λ— ограничения главных операций <<+>> и ω'_λ пространства V множеством U, т. е.

$$a \oplus b = a + b \text{ для любых } a,\ b \text{ из } U,$$
$$\omega'_\lambda a = \omega_\lambda a = \lambda a \text{ для любого } a \text{ из } U;$$

тогда

$$(1)\ \mathcal{U} = \langle U,\ \oplus,\ \{\omega'_\lambda \mid \lambda \in F\}\rangle.$$

Однако вместо записи (1) обычно пишут

$$\mathcal{U} = \langle U,\ +,\ \{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\}\rangle.$$

Отметим следующие свойства подпространств.

СВОЙСТВО 1. Если V —векторное пространство над полем F , то любое его подпространство является векторным пространством над F.

СВОЙСТВО 2. Если W — подпространство векторного пространства U иU подпространство векторного пространства V, то W является подпространством пространства V.

Пересечением подпространств $U_1, .., U_m$ векторного пространства V называется подпространство V с основным множеством $U_1 \cap U_2 \cap_{,...,} \cap U_m$. Аналогично определится пересечение бесконечного множества подпространств пространства V.

СВОЙСТВО 3. Пересечение любого множества подпространств векторного пространства V является подпространством пространства V.

Пример. Совокупность всех бесконечно дифференцируемых комплексных функций на интервале $I \subset \mathbf{R}$, которые вместе с каждой своей производной стремятся к нулю при стремлении аргумента к (возможно, бесконечно удаленным) концам этого интервала, есть подпространство пространства $C^\infty(I)$.
А. К числу подпространств векторного пространства *E,* очевидно, относятся само *E* и *{0}*. *E* называется *несобственным* подпространством, а {0}—*нулевым.* Подпространства, отличные от *E,* называются *собственными.*
Б. Очевидно, *для того чтобы* $F \subset \ \subset E$, (необходимо и) *достаточно, чтобы F было подгруппой аддитивной группы E, инвариантной*

относительно гомотетий, т. е. такой, что $\lambda F=F$ *для всех скаляров* $\lambda\neq 0$.

В. *Для того чтобы* $F \subset \subset E$, (необходимо и) *достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

1° $F\neq \varnothing$,

2° *если* $x, y \in F$, *то* $x+y \in F$,

3° *если* $x \in F$, *то* $\lambda x \in F$ *для всех скаляров* λ.

Действительно, для доказательства нужно лишь повторить сказанное при рассмотрении примера 4 п° 1.

В'. Из В следует, что $F\subset \subset E$ *тогда и только тогда, когда F вместе со всяким семейством своих векторов* $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *содержат любую его линейную комбинацию*

$$\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha x_\alpha.$$

Г. *Если* $E_1, E_2\subset \subset E$, *то* и $E_1+E_2\subset \subset E$. В самом деле, E_1+E_2 — подгруппа аддитивной группы E;

при этом $\lambda(E_1+E_2)=\lambda E_1+\lambda E_2=E_1+E_2$ для любого скаляра $\lambda\neq 0$, и остается применить Б.

Д. *Пересечение любого семейства подпространств векторного пространства E также является подпространством пространства E.* Действительно, оно не пусто, поскольку во всяком случае содержит нулевой вектор; так же легко проверяется выполнение и остальных двух условий из В.

Е. Пусть *A*— произвольное множество в векторном пространстве *E. A* содержится по крайней мере в одном подпространстве: самом *E*, Пересечение $\mathscr{E}_A$ всех подпространств, содержащих *A* (являющееся, по Д, подпространством), называется *подпространством, порожденным множеством A.* Это — *наименьшее* подпространство в *E,* содержащее *A*.

Так как $\varnothing$ содержится во всех подпространствах, то

$$\mathscr{E}_\varnothing=\{0\}.$$

Ж. *Подпространством, порожденным семейством векторов*

$$\mathcal{A}=(x_\alpha)_{\alpha\in A}$$

векторного пространства *E* над К, называется подпространство, порожденное множеством *A* векторов этого семейства. Его можно охарактеризовать как *совокупность* $\mathscr{E}_{\mathcal{A}}$ *всевозможных линейных комбинаций* $\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha x_\alpha$, *векторов семейства* $\mathcal{A}$.

Действительно, очевидно, $\mathscr{E}_{\mathcal{A}}$ удовлетворяет условиям В и тем самым является подпространством; далее, $A\subset\mathscr{E}_{\mathcal{A}}$, ибо каждый вектор $x_\beta\in A$

представим в виде линейной комбинации $\sum_{\alpha\in A} \delta_{\alpha\beta} x_\alpha$; наконец, в силу В' каждое $F \subset\subset E$, содержащее *А,* содержит и всё $\mathscr{E}_A$.
Так как каждое $A \subset E$ является множеством векторов семейства $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, где $x_a = a$, то $\mathscr{E}_A$ *есть совокупность всевозможных линейных комбинаций* $\sum_{\alpha\in A} \lambda_a a$. Вместе с тем, поскольку каждая линейная комбинация векторов семейства есть линейная комбинация векторов его конечного подсемейства и обратно, то заключаем также, что $\mathscr{E}_A$ *есть совокупность всевозможных линейных комбинаций конечных семейств векторов из А.*
Ж'. В частности, *подпространство* $\mathscr{E}_a = \mathscr{E}_{\{a\}}$,*порожденное вектором* $a \in E$, *есть совокупность точек* λa, *где* λ *пробегает* К. Очевидно, *если* $a \neq 0$, *то* $\mathscr{E}_a \sim K^1$, и, обратно, *каждое векторное пространство над* К, *изоморфное* $К^1$, *порождается любым своим ненулевым вектором а.*
3. *Множество всех подпространств векторного пространства Е, упорядоченное по возрастанию, образует полную решетку*, т. е. всякое непустое семейство $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ подпространств пространства *Е* обладает в этом множестве нижней и верхней гранями. А именно, очевидно

$$\inf_{\alpha\in A} F_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$$

и

$$\sup_{\alpha\in A} F_\alpha = \mathscr{E}_{\bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha}.$$

Определение. Подпространство *F* векторного пространства *Е,* не содержащееся ни в каком отличном от *F* собственном подпространстве, будет называться *гиперподпространством.*
И. Очевидно, *векторное пространство Е является своим гиперподпространством.*
К. Пусть *Е* — произвольное векторное пространство над К, образованное функциями, определенными на некотором множестве *М* и принимающими значения из К. Пусть, далее, t_0 — произвольная фиксированная точка из *М.* Совокупность *Н* всех $x \in E$, для которых $x(t_0) = 0$, удовлетворяет условиям В и тем самым является в *Е* подпространством. Покажем, что *Н—гиперподпространство.* В самом деле, пусть $H \subset G \subset\subset E$. Если $x_0 \in G \setminus H$, так что $x_0(t_0) \neq 0$, то для произвольного $x \in E$ имеем

$$x - \frac{x(t_0)}{x_0(t_0)} x_0 \in H,$$

откуда

$$x \in H + \frac{x(t_0)}{x_0(t_0)} x_0 \subset G$$

и, следовательно, $G = E$. H будет собственным гиперпод-пространством, если в E действительно имеется функция $x_o(t)$, для которой $x_0(t_0) \neq 0$.

Линейная оболочка множества векторов.

Пусть $\{\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_n}\}$— конечное множество векторов векторного пространства V.

Вектор $\lambda_1\boldsymbol{a_1}+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{a_n}$ назьюается линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_n}$ с коэффициентами из F.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $\{ \lambda_1\boldsymbol{a_1}+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{a_n} \mid \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in F\}$всех линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_n}$ с коэффициентами из F называется линейной оболочкой векторов $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_n}$ и обозначается через $L(\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_n})$

Легко видеть, что линейная оболочка векторов замкнута в V т. е. замкнута относительно всех главных операций пространства V (сложения и умножений на скаляры).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подпространство векторного пространства V с основным множеством $L(\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_n})$ обозначается через $L(\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_n})$

и называется подпространством, натянутым на векторы $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_n}$ или подпространством, порожденным векторами $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_n}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейной оболочкой множества М, $M \subset V$, называется совокупность L(M) всех линейных комбинаций векторов из М с коэффициентами из F. Линейной оболочкой пустого множества называется множество $\{\mathbf{0}\}$.

Линейная оболочка множества М замкнута в V.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подпространство пространства V с основным множеством L(M) обозначается через L(M) и называется подпространством, натянутым на множество М, или подпространством, порожденным множеством М.

Сумма подпространств.

Пусть $U_1,..,U_m$— подпространства векторного пространства V и $U_1,..,U_m$— их основные множества. Множество

$$\{a_1+\ldots+a_m \mid a_1 \in U_1, \ \ldots, \ a_m \in U_m\}$$

обозначается через $U_1+..+U_m$. Легко проверить, что это множество замкнуто в пространстве V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подпространство пространства V с основным множеством $U_1+..+U_m$ называется суммой подпространств $U_1,..,U_m$ и обозначается через $U_1+..+U_m$.

Отметим следующие свойства суммы подпространств, легко вытекающие из ее определения.

СВОЙСТВО 4. Если L и U— подпространства векторного пространства V , то U+ L = L + U.

СВОЙСТВО 5. Если L , U , W— подпространства векторного пространства V , то L + (U +W)=(L + U) +W.

СВОЙСТВО 6. Если L — подпространство пространства U, то L + U= U.

Пусть $L_{1,\ldots,}L_m$— подпространства векторного пространства V.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сумма $L_1+_{\ldots}+L_m$ называется прямой суммой подпространств $L_{1,\ldots,}L_m$ и обозначается через $L_1 \oplus_{\ldots} \oplus L_m$ если любой вектор ***a*** из $L_1+_{\ldots}+L_m$ можно единственным образом представить в виде

$$a = a_1 + \ldots + a_m, \ \text{где} \ a_1 \in L_1, \ \ldots, \ a_m \in L_m.$$

Другими словами, сумма $L_1 + \ldots + L_m$ называется прямой, если для любых $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}$ из $L_1, \ldots$ $\boldsymbol{a_m}, \boldsymbol{b_m}$ из L_m равенство $\boldsymbol{a_1} + \ldots + \boldsymbol{a_m} = \boldsymbol{b_1} + \ldots + \boldsymbol{b_m}$ влечет равенства $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{b_1}, \ldots$ $\boldsymbol{a_m} = \boldsymbol{b_m}$

ТЕОРЕМА 1. Сумма подпространств L и U векторного пространства является прямой тогда и только тогда, когда $L \cap U = \{0\}$

Доказательство. Предположим, что $L + U = L \oplus U$. Тогда для любого элемента c из $L \cap U$ верно равенство $c+0=0+c$ из которого следует равенство $c=0$, так как сумма $L + U$ прямая. Следовательно, $L \cap U = \{\mathbf{0}\}$.

Предположим теперь, что $L \cap U = \{\mathbf{0}\}$. Для любых векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}$ из L и $\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b_2}$ из U равенство $\boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{b_2}$ влечет соотношения равенство $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2} \in L \cap U = \{\mathbf{0}\}$, поэтому $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{b_1}$ и $\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{b_2}$. Следовательно, сумма $L + U$ является прямой.

ТЕОРЕМА 2. Сумма подпространств $L_1, \ldots, L_m$
векторного пространства является прямой суммой, если для любых векторов $\boldsymbol{a_1}$ из $L_1, \ldots$ $\boldsymbol{a_m}$ из L_m равенство

$$(1)\quad \boldsymbol{a_1} + \ldots + \boldsymbol{a_m} = \mathbf{0}$$

влечет равенства

$$(2)\quad \boldsymbol{a_1} = \mathbf{0},\ \ldots,\ \boldsymbol{a_m} = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Предположим, что сумма $L_1 + \ldots + L_m$ прямая. Тогда из равенства (1), которое можно записать в виде $\boldsymbol{a_1} + \ldots + \boldsymbol{a_m} = \boldsymbol{0} + \ldots + \boldsymbol{0}$, следуют равенства $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{a_m} = \boldsymbol{0}$.

Предположим теперь, что для любых векторов $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_m}$ соответственно из $L_1, \ldots, L_m$ равенство (1) влечет равенства (2). Каковы бы ни были векторы $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{c_1}$ из $L_1, \ldots, \boldsymbol{b_m}, \boldsymbol{c_m}$ из L_m равенство

$$(3)\quad \boldsymbol{b_1} + \ldots + \boldsymbol{b_m} = \boldsymbol{c_1} + \ldots + \boldsymbol{c_m}$$

влечет (b_1- c_1)+…+(b_m- c_m) из которого, по условию, следуют равенства

$$b_1 - c_1 = 0, \ \ldots, \ b_m - c_m = 0.$$

Таким образом, из (3) следуют равенства

$$b_1 = c_1, \ \ldots, \ b_m = c_m.$$

Следовательно, сумма $L_1 + \ldots + L_m$ является прямой.

Линейные многообразия.

Пусть L — подпространство векторного пространства V и L — его основное множество. На множестве V определим бинарное отношение ~, считая, что *a~b* тогда и только тогда, когда ***a-b*** $\in$ *L* Назовем это бинарное отношение отношением сравнения по L.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Отношение сравнения на множестве V по L является отношением эквивалентности на V.

Доказательство. Отношение сравнения по L, очевидно, рефлексивно. Отношение по L симметрично, так как из ***a-b*** $\in$ L следует ***b -a*** $\in$ L Отношение сравнения по L транзитивно, так как для любых
a, b, c $\in$ V из ***a-b*** $\in$ L и ***b -a*** $\in$ L следует, что ***a-c=(a-b)+(b-c)*** $\in$ L. Следовательно, отношение сравнения по L является отношением эквивалентности на множестве V.

Отношение эквивалентности ~ на V определяет разбиение множества V на классы эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть L — подпространство векторного пространства V . Любой класс эквивалентности отношения сравнения по L называется линейным многообразием пространства V с направлением L.

Пример. Множество всех решений совместной системы линейных уравнений с *n* переменными является линейным многообразием с направлением L *n*-мерного арифметического векторного пространства, где L — пространство решений соответствующей однородной системы уравнений.

Из приведенного выше определения вытекают свойства 7 и 8.

СВОЙСТВО 7. Два вектора векторного пространства V принадлежат одному и тому же линейному многообразию с направлением L тогда и только тогда, когда их разность принадлежит L.

СВОЙСТВО 8. Любые два линейных многообразия векторного пространства V с направлением L либо совпадают, либо не пересекаются.

Объединение всех линейных многообразий пространства V с направлением L равно множеству V.

Обозначим через $\boldsymbol{a}$+L($\boldsymbol{a} \in$ V) множество { $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in$ L }

СВОЙСТВО 9. Если H — линейное многообразие векторного пространства V с направлением L и $\boldsymbol{a} \in$ H, то H= $\boldsymbol{a}$+L.

Доказательство. Так как любой элемент множества $\boldsymbol{a}$+L сравним с $\boldsymbol{a}$ по L , то $\boldsymbol{a}$+L $\subset$ H. Кроме того, любой элемент $\boldsymbol{c}$ из H сравним с $\boldsymbol{a}$ по L, т. е. $\boldsymbol{c}$-$\boldsymbol{a} \in$ L и $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{a}$+L Поэтому H $\subset$ $\boldsymbol{a}$+L . Следовательно, H = $\boldsymbol{a}$+L

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — элементы одного и того же линейного многообразия пространства V с направлением L, то $\boldsymbol{a}$+L= $\boldsymbol{b}$+L

СЛЕДСТВИЕ 5. Если L р V и $\boldsymbol{c}$ — любой элемент пространства V, то $\boldsymbol{c}$+L является линейным многообразием пространства V с направлением L .

СВОЙСТВО 10. Пусть L и U — подпространства векторного пространства V и $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in$ V. Включение $\boldsymbol{a}$+L $\subset$ $\boldsymbol{b}$+U имеет место тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}$-$\boldsymbol{b} \in$ U и L $\subset$ U.

Доказательство. Предположим, что $\boldsymbol{a}+\mathrm{L} \subset \boldsymbol{b}+\mathrm{U}$.Тогда $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{b}+\mathrm{U}$, $\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b} \in \mathrm{U}$ и $\boldsymbol{a}+\mathrm{U}=\boldsymbol{b}+\mathrm{U}$, поэтому $\boldsymbol{a}+\mathrm{L} \subset \boldsymbol{a}+\mathrm{U}$ и $\mathrm{L} \subset \mathrm{U}$.

Предположим теперь, что выполнены условия $\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b} \in \mathrm{U}$ и $\mathrm{L} \subset \mathrm{U}$. Тогда $\boldsymbol{a}+\mathrm{U}=\boldsymbol{b}+\mathrm{U}$; следовательно, $\boldsymbol{a}+\mathrm{L} \subset \boldsymbol{b}+\mathrm{U}$.

СВОЙСТВО 11. Пересечение линейных многообразий $\boldsymbol{a}+\mathrm{L}$ и $\boldsymbol{b}+\mathrm{U}$ векторного пространства не пусто тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b} \in \mathrm{L}+\mathrm{U}$.

Доказательство. Предположим, что пересечение $\boldsymbol{a}+\mathrm{L} \cap \boldsymbol{b}+\mathrm{U}$ не пусто и $\boldsymbol{c}$ — элемент пересечения. Тогда $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{l}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{u}$ и, где $\boldsymbol{l} \in \mathrm{L}$ и $\boldsymbol{u} \in \mathrm{U}$, поэтому $\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{l}+\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b} \in L+U$.

Предположим теперь, что $\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b} \in L+U$. Тогда $\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u} \in \mathrm{L}$, $\boldsymbol{u} \in \mathrm{U}$ и $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{u}$. Следовательно, многообразия $\boldsymbol{a}+L$, $\boldsymbol{b}+\mathrm{U}$ имеют общий элемент $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{u}$.

СВОЙСТВО 12. Если пересечение линейного многообразия с направлением L и линейного многообразия с направлением U не пусто, то оно является линейным многообразием с направлением $\mathrm{L} \cap \mathrm{U}$.

Доказательство. Предположим, что пересечение многообразий $\boldsymbol{a}+L$, $\boldsymbol{b}+\mathrm{U}$ не пусто и $\boldsymbol{c}$ — их общий элемент; тогда $\boldsymbol{a}+\mathrm{L}=\boldsymbol{c}+\mathrm{L}$, $\boldsymbol{b}+\mathrm{U}=\boldsymbol{c}+\mathrm{U}$, $\boldsymbol{a}+\mathrm{L}\cap \boldsymbol{b}+\mathrm{U}=\boldsymbol{c}+\mathrm{L}\cap \boldsymbol{c}+\mathrm{U}$. Легко проверить, что $\boldsymbol{c}+\mathrm{L}\cap \boldsymbol{c}+\mathrm{U}=\boldsymbol{c}+(\mathrm{L}\cap\mathrm{U})$. Следовательно, $\boldsymbol{a}+\mathrm{L}\cap \boldsymbol{b}+\mathrm{U}=\boldsymbol{c}(\mathrm{L}\cap\mathrm{U})$ т. е. пересечение двух рассматриваемых многообразий есть линейное многообразие с направлением $\mathrm{L} \cap \mathrm{U}$.

СВОЙСТВО 2.13. Если векторное пространство V есть прямая сумма подпространств $\mathrm{L} \cap \mathrm{U}$, то пересечение линейного многообразия с направлением L и линейного многообразия с направлением U содержит только один элемент.

Доказательство. Пусть $\mathrm{V} = \mathrm{L} \oplus \mathrm{U}$, тогда $\mathrm{V}=\mathrm{L}+\mathrm{U}$, $\mathrm{L}\cap\mathrm{U}=\{\mathbf{0}\}$. Пусть $\boldsymbol{a}+\mathrm{L}$ и $\boldsymbol{b}+\mathrm{U}$— линейные многообразия с направлениями L и U соответственно. По свойству 11, их пересечение не пусто, так как

a-b $\in V = L + U$. Пусть ***c*** — общий элемент пересечения. По свойству 12, отсюда следует, что ***a***+L∩***b***+U=***c***+(L∩U) =***c+{0}=c.***

3.5. Функционалы и операторы

До сих пор мы изучали вопросы, связанные с алгебраической и геометрической структурой линейных пространств, но совсем не касались объектов, являющихся ключевыми в математическом анализе, а именно понятия функциональной зависимости и понятия предельного перехода.

Понятие функциональной зависимости вводится следующим образом. Пусть X и Y — два множества вещественных чисел; если каждому числу $x \in X$ по некоторому закону (правилу) ставится в соответствие единственное число $y \in Y$, то говорят, что на множестве X определена однозначная функция $y=f(x)$, область значений которой расположена в множестве Y. Множество X при этом называется областью определения функции.

Легко видеть, что для введения функциональной зависимости нет необходимости требовать, чтобы X и Y были множествами вещественных чисел. Понимая под X и Y множества элементов различного характера, можно прийти к понятию общей функциональной зависимости, примеры которой встречаются в различных разделах математического анализа. Приведем примеры.

Пример 1. Пусть $y=f(x_1,\dots,x_n)$ — вещественная функция n переменных. Тогда X есть множество наборов из n вещественных чисел, Y — множество вещественных чисел

Пример 2. В теории интегральных уравнений рассматриваются выражения вида

$$y(t) = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds.$$

Предполагается, что функция $K(t, s)$, называемая ядром интегрального уравнения, определена и непрерывна в квадрате $a \leqslant t,\ s \leqslant b$.

Тогда написанное равенство можно рассматривать как некоторый закон, согласно которому каждой функции $x(t)$, непрерывной на $[a, b]$, ставится в соответствие другая функция, непрерывная на том же отрезке.

Дадим теперь общее определение функциональной зависимости.

Определение. Пусть даны два произвольных множества X и Y и дан закон (правило), согласно которому каждому элементу $x \in X$ ставится единственный, вполне определенный элемент $y \in Y$. Будем говорить

тогда, что задан оператор $y=f(x)$, определенный на множестве X, с областью значений, расположенной в множестве Y. В том частном случае, когда значения оператора являются вещественными числами, оператор называется функционалом.
Относительно свойств операторов, определенных таким весьма общим образом, почти ничего сказать нельзя, поэтому при изучении операторов всегда имеются дополнительные предположения.
Сейчас мы введем понятие линейного оператора, объекта, изучение свойств которого составляет значительную часть функционального анализа.
Определение. Линейным оператором A, действующим из одного векторного пространства R_1 в другое векторное пространство R_2 называется соответствие, относящее каждому вектору x из R_1 вектор y из R_2 так, что а) $A(x_1+x_2)=A(x_1)+A(x_2)$; б) $A(\lambda x)=\lambda A(x)$ для любых x, x_1 и x_2 из R_1 и любого числа λ. Если R_2 являеюя множеством вещественных чисел, то линейный оператор $A: R_1\to R_2$ называется линейным функционалом, определенным на векторном пространстве R_1. Если $R_1=R_2$, то оператор A иногда называют линейным преобразованием.
Приведем несколько примерев линейных преобразований.
Пример 1. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство R и в нем преобразование, состоящее в повороте R вокруг какой-нибудь оси, проходящей через нуль. Каждому вектору x ставится в соответствие вектор $A(x)$, полученный из него данным поворотом. Выполнимость условий а), б) легко проверяется. Проверим, например, условие а). Выражение $A\{x_1+x_2)$ означает, что векторы x_1 и x_2 сначала складываются, а затеи полученный вектор поворачивается.
Выражение $A(x_1)+A(x_2)$ означает, что векторы x_1 и x_2 сперва поворачиваются, а затем складываются. Ясно, что в обоих случаях результат один и тот же.
Пример 2. Пусть R — евклидово пространство, а R_1— некоторое его подпространство. Тогда оператор A:R→R, действующий из R в R и ставящий в соответствие каждому вектору $x\in R$ его ортогональную проекцию на подпространство R_1 (которая существует и единственна), называется оператором ортогональною проектирования. Легко видеть, что этот оператор является линейным, условие а), например, означает, что проекция суммы равна сумме проекций.
Пример3. В пространстве непрерывных функций, заданных на отрезке [0,1], определим оператор A по формуле

$$Af(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau.$$

Из свойств интеграла легко следует, что A — линейный оператор. Среди линейных преобразований обычно выделяют следующие простые преобразования.

Пример 4. Единичный оператор E, ставящий в соответствие каждому вектору этот же самый вектор, т. е. $E(x)=x$.

Пример 5. Нулевой оператор O, ставящий в соответствие каждому вектору x нулевой вектор, т. е. $O(x)=0$.

Понятие пространства операторов.

Пусть A и B — два линейных оператора, действующих из одного линейного пространства R_1 в другое линейное пространство R_2. Определим оператор $\alpha A+\beta B$ по формуле $(\alpha A+\beta B)(x)=\alpha A(x)+\beta B(x)$. Очевидно, что оператор $\alpha A+\beta B$ является также линейным оператором, действующим из пространства R_1 в пространство R_2. Таким образом, во множестве всех линейных операторов можно ввести операции сложения и умножения на числа, которые, как легко видеть, удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства. Это линейное пространство будем называть пространством линейных операторов. Элементами этого пространства являются линейные операторы.

Понятие обратимого оператора.

Может случиться, что линейный оператор A, действующий из векторного пространства R_1 в векторное пространство R_2, обладает следующими свойствами:

1. Если $x_1 \neq x_2$, то $A(x_1) \neq A(x_2)$.
2. Для каждого вектора $y \in R_2$ существует (по крайней мере один) вектор x $\in R_1$, такой, что $A(x)=y$.

В этом случае мы будем говорить, что оператор A обратим. Если A обратим, то можно определить оператор, называемый обратным к A и обозначаемый A^{-1}, следующим образом. Для любого вектора $y_0 \in R_2$ можно найти (по свойству 2) x_0, такое, что $A(x_0)=y_0$. Более того, по свойству 1 x_0 определено однозначно. Тогда положим $A^{-1}(y_0)=x_0$. Этим соотношением оператор A^{-1} и определяется.

Наиболее простым примером обратимого оператора является единичный оператор. При этом $E^{-1}=E$.

Нулевой оператор не является обратимым, поскольку в этом случае нарушается как условие 1), так и условие 2).

В случае, когда линейный оператор A действует в конечномерном пространстве R, условия существования обратного оператора значительно упрощаются. А именно справедлива следующая теорема.

Теорема. Линейный оператор A, действующий в конечномерном векторном пространстве R, обратим тогда и только тогда, когда из условия $A(x)=0$ следует, что $x = 0$.

Доказательство. Если оператор А обратим, то из того, что $A(x)=0$, с очевидностью следует, что $x=0$. Докажем обратное, что из этого условия следует обратимость оператора. Пусть $x\neq y$. Тогда $x-y\neq 0$ и, следовательно, А $(x-y)\neq 0$. Отсюда, используя линейность оператора A, получаем $A(x)\neq A(y)$, т. е. условие 1) выполнено.
Для доказательства свойства 2) выберем в пространстве R базис $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Покажем, что $\{Ax_1, \ldots, Ax_n\}$ также базис пространства R. Достаточно показать линейную независимость этих векторов. Соотношение $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A x_i = 0$ означает, что

$A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = 0,$ а в силу предположения это влечет равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0.$$

Поскольку вектора x_i линейно независимые, то все $\alpha_i=0$, что доказывает линейную независимость векторов Ax_i. Следовательно, каждый вектор $y\in £ R$ может быть записан в виде

$$y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i A x_i = A\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right),$$

т. е. условие (2) обратимости также выполнено. Теорема доказана.
Пусть в линейном пространстве R введено скалярное произведение. Пусть x_0 — некоторый фиксированный вектор в R. Тогда из свойств скалярного произведения следует, что отображение, ставящее каждому вектору x из R число (x, x_0), является линейным функционалом. Справедливо и обратное утверждение.
Теорема (об общем виде линейного функционала в евклидовом пространстве). Пусть $f(x)$ — линейный функционал, определенный на конечномерном векторном пространстве R. Тогда существует элемент $x_0\in R$, такой, что $f(x) = (x, x_0)$.
Доказательство. Пусть N — множество таких $x \in R$, что $f(x)=0$. В силу линейности функционала $f(x)$ N есть подпространство пространства R. Если $N = R$, то функционал $f(x)$ тождественно равен нулю, и в этом случае $x_0=0$. Допустим $N\neq R$. Известно, что в N^1 счществует ненулевой вектор y_n. Положим $x_0 =$
$= f(y_0)\ \|y_0\|^{-2} y_0.$

Покажем, что x_0 обладает нужным свойством. Во-первых, если $x \in N$, то $f(x)=0=(x, x_0)$, поскольку x_0 так же, как и y_0, ортогонален N. Далее, если $x=\alpha y_0$, то

$$f(x)=f(\alpha y_0)=\alpha f(y_0)=$$
$$(\alpha y_0, \ f(y_0) \ \| \ y_0 \ \|^{-2} y_0)=(x, \ x_0).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что любой вектор $x \in R$ представим в виде суммы векторов, один из которых принадлежит N, а другой имеет вид αy_0. Но каждый вектор $x \in R$ можно записать в виде

$$x=\left(x-\frac{f(x)}{f(y_0)} \ y_0\right)+\frac{f(x)}{f(y_0)} y_0,$$

который, очевидно, обладает указанным выше свойством. Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет ввести понятие, играющее важную роль в теории операторов, — понятие сопряженного оператора.

Пусть A — линейный оператор, определенный в конечномерном евклидовом пространстве R. Тогда при каждом фиксированном y выражение (Ax, y) определяет некоторый линейный функционал на R. По предыдущей теореме существует единственный вектор $y' \in R$, такой, что $(Ax, y)= (x, y')$. Определим оператор A^*, который ставит в соответствие вектору y вектор y', т. е. $A^*y=y'$. Оператор A^* будем называть оператором, сопряженным с оператором A. Таким образом, сопряженный оператор определяется соотношением $(Ax, y)=(x, A^*y)$ для любых x и y из R.

Определение. Оператор A называется самосопряженным, если $A =A^*$.

Самосопряженные операторы являются важным классом линейных операторов, поскольку оказывается, что многие реальные физические процессы описываются посредством операторов такого вида. Именно это обстоятельство служит объяснением того факта, что в настоящий момент теория самосопряженных линейных операторов является наиболее изученной областью функционального анализа.

Введем в пространстве линейных операторов еще одну операцию: операцию умножения операторов.

Пусть A — линейный оператор, действующий из линейного пространства R_1, в линейное пространство R_2, а B — линейный оператор, действующий из пространства R_2 в линейное пространство R_1. Определим линейный оператор BA, действующий из пространства R_1 в пространство R_2 по формуле $B A (x)=B (A (x))$.

Определим еще два важных понятия, связанных с произвольным линейным оператором A, действующим из одного линейного пространства R_1 в другое R_2.

Определение. Ядром оператора $A : R_1 \to R_2$ называется совокупность векторов $x \in R_1$ таких, что $A (x)=0$. Это множество обычно обозначается символом Ker A.

Определение. Образом оператора $A : R_1 \to R_2$ называется совокупность векторов $y \in R_2$, таких, что существует x $\in$ R_1, переходящий в y при отображении A. Это множество обычно обозначается символом JmA.
Из линейности оператора A, очевидно, следует, что Ker A и JmA являются линейными многообразиями соответственно в пространствах R_1, и R_2.
Наличие скалярного произведения в пространстве использовано для введения понятия сопряженного оператора. Сейчас перейдем к определению и изучению свойств предельного перехода в пространстве со скалярным произведением.
Дадим следующие определения.
Определение. Последовательность векторов x_n сильно или по норме сходится к вектору x, если $\| x_n - x \| \to 0$ при $n\to\infty$.
Напомним, что $\| x \| = \sqrt{(x, x)}$ — норма или длина вектора x.
Определение. Последовательность векторов x_n слабо сходится к вектору x, если для любого фиксированного элемента y, $(x_n - x,\ y) \to 0$ при $n\to\infty$..
С помощью неравенства Коши — Буняковского заключаем, что если последовательность x_n сильно сходится к x, то она сходится и слабо к x. Оказывается, что в конечномерном евклидовом пространстве верно и обратное, т. е. в этом случае понятия сильной и слабой сходимости совпадают. В самом деле. Пусть $e_1, ..., e_N$ — ортонормированный базис в R. Если x_n слабо сходится к вектору x, то $(x_n - x,\ e_i) \to 0$ при $n\to\infty$, $i=1,2, ..., N$. Пусть y—произвольный вектор из R.
Поскольку $\{e_i\}$ базис, y представим в виде $y = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i$.
Умножая обе части этого равенства скалярно на e_j и используя то, что $\{e_i\}$— ортонормированный базис, получичим $\alpha_j =(y, e_j)$. Применяя теорему Пифагора, получаем, что $\| y \|^2 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{N} |(y, e_i)|^2$.
Если применить это равенство к вектору $x_n—x$, то получим, что $\| x_n - x \|^2 = \sum_{i=1}^{N} |(x_n - x, e_i)|^2$, откуда и следует доказываемое утверждение.
В евклидовом пространстве, используя скалярное произведение, введено понятие нормы вектора $\| x \|$, причём, как нетрудно убедиться, справедливы следующие свойства:
1. $\| x \| \geqslant 0$, причем тогда $\| x \| = 0$ и только тогда, когда x=0;

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
3. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Свойство 3 - неравенство треугольника, свойства 1 и 2 являются очевидными следствиями свойств скалярного произведения.
Заметим, что определение сильной сходимости формулируется в терминах нормы, а не скалярного произведения.
Таким образом, хотя норма вектора в евклидовом пространстве была введена с помощью скалярного произведения, имеются все предпосылки ввести норму элемента некоторого линейного пространства аксиоматически с помощью свойств 1—3. В связи с этим дадим следующее определение.
Определение. Линейное пространство R называется нормированным, если в нем каждому вектору x поставлено в соответствие число, называемое нормой x и обозначаемое $\|x\|$, причем это соответствие обладает свойствами 1—3.
Из сказанного видно, что определение сильной сходимости последовательности векторов в евклидовом пространстве дословно переносится на нормированные пространства.
Евклидово пространство является, как мы знаем, нормированным. Интересен обратный вопрос, когда нормированное пространство является евклидовым, т. е. когда в нормированном пространстве можно так ввести скалярное произведение, что норма, порожденная этим скалярным произведением, совпадает с исходной. Оказывается, характеристическим свойством евклидовых пространств является правило параллелограмма. А именно справедлив следующий факт: если в произвольном нормированном пространстве для любых векторов x и y выполнено соотношение

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, то

функция $(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения, причем это скалярное произведение порождает исходную норму.
Пример. Рассмотрим нормированное пространство l_p, $p > 1$, где векторами по-прежнему являются наборы из n чисел $(x_1, ..., x_n)$, а норма вводится по формуле $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$. Покажем, что это пространство при $p \neq 2$ не является евклидовым. В самом деле, пусть $x = (1, 0, \ldots, 0)$, $y = (0, 0, \ldots, 1)$. Тогда имеем $\|x\|^2 = 1$, Поскольку

$$\|y\|^2 = 1, \qquad \|x+y\|^2 = (2)^{2/p}, \qquad \|x-y\|^2 = (2)^{2/p}.$$

при $p\neq 2$ $4\neq 2\cdot(2)^{2/p}$, то в этом случае правило параллелограмма и не выполняется и, следовательно, данное пространство не является евклидовым.

Как мы видим, совокупность линейных операторов, действующих из векторного пространства R_1 в векторное пространство R_2, образует новое линейное пространство. Наличие норм в пространствах R_1, R_2 позволяет ввести норму в пространстве линейных операторов.

Определение. Линейный оператор *А,* действующий из одного нормированного пространства R_1 в другое нормированное пространство R_2, называется ограниченным, если существует постоянная А, такая, что $\| A x \|_{R2} \leq K\| x \|_{R1}$, для любого вектора $x \in R_1$. Наименьшее из чисел *К,* обладающих этим свойством, называется нормой оператора *А* и обозначается $\| A\|$.

Определение. Если *А* и *В* — ограниченные операторы, то $\alpha A + \beta B$ также ограничен, т. е. совокупность ограниченных операторов образует векторное пространство.

Определение. Если операторы $A : R_1\to R_2$ и $B : R_2\to R_3$ ограничены, то оператор $BA : R_1\to R_3$ также ограничен, причем

$$\| BA \| \leqslant \| B \| \| A \|.$$

В конечноиерном евклидовом пространстве условие ограниченности линейного оператора не является существенным, поскольку справедлива следующая теорема.

Теорема. Каждый линейный оператор *А,* действуюий в конечномерном евклидовом пространстве *R,* ограничен.

Доказательство. Выберем в *R* ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Положим $K_0 = \max \{ \| Ae_1 \|, \ldots, \| Ae_n \| \}$. Так как произвольный вектор *х* может быть записан в виде

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i,$$

то, применяя неравенства треугольника и Коши — Буняковского и учитывая, что $\| e_i \| = 1$, получим

$$\| Ax \| = \left\| A \left(\sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)| \, \|Ae_i\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \| x \| \|e_i\| \| Ae_i \| \leqslant K_0 \sum_{i=1}^{n} \| x \| = nK_0 \| x \|,$$

т. е. nK_0 есть граница для оператора *А,* что и доказывает теорему. Отметим, что конечномерность пространства *R* существенна для доказательства этой теоремы. В бесконечномерном пространстве эта теорема не верна.

Понятие сходимости, введенное в произвольном нормированном пространстве, позволяет определить понятие непрерывности, играющее важную роль в классическом анализе.

Определение. Оператор (не обязательно линейный) *А* действующий из одного нормированного пространства R_1 в другое нормированное пространство R_2, называется непрерывным в точке x_0, если из того, что в пространстве R_1 последовательность векторов x_n сходится к вектору x_0, следует, что в пространстве R_2 последовательность Ax_n сходится к вектору Ax_0. Если оператор *А* непрерывен на всей области определения, то он называется просто непрерывным.

Для операторов, действующих из нормированного пространства R_1 в другое нормированное пространство R_2, можно дать другое определение непрерывности в точке x_0, эквивалентность которого выше приведенному определению мы предоставляем доказать читателю.

Определение. Оператор *А*, действующий из одного нормированного пространства R_1, в другое нормированное пространство R_2, называется непрерывным в точке x_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что при $\| x-x_0 \|_{R_1} < \delta$ имеем $\| Ax-Ax_0 \|_{R_2} < \varepsilon$.

Дадим следующее определение.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ элементов нормированного пространства *R* называется ограниченной, если существует такая константа *М,* что для всех *n* $\| x_n \| \leq M$

Утверждение. Пусть $\{x_n\}$ последовательность элементов нормированною пространства *R* сходится к некоторому элементу $x \in R$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Доказательство. Пусть $\varepsilon =1$. Поскольку $x_n \to x$, то существует число N_n, такое, что при $n>N_0$ $\|x_n - x \| \leq 1$. Согласно неравенству треугольника имеем при $n>N_0$ $\| x_n \| \leq \| x \| + 1$. Пусть $M = \max \{ \| x \| + 1, \ \| x_1 \|, \ \ldots, \ \| x_{N_0} \| \}$. Тогда для любого *n* имеем $\| x_n \| \leq M$, что у, требовалось доказать.

Непосредственным следствием неравенства Коши — Буняковского и доказанного нами утверждения является факт, играющий существенную роль в теории евклидовых пространств, что скалярное произведение является непрерывной функцией своих аргументов. В самом деле, пусть в евклидовом пространстве *R* последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся соответственно к векторам *х* и *у*. Надлежит доказать, что в этом случае последовательность вещественных чисел (x_n, y_n) сходится к числу (x, y). Имеем

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| \leqslant$$
$$\leqslant |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \leqslant \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\| \leqslant \mathrm{Const}\,\{\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\} \to 0 \text{ при }$$
$$n \to \infty$$

В случае линейных операторов, действующих из одного нормированного пространства R_1 в другое R_2, понятия непрерывности и ограниченности тесно связаны, а именно эти два понятия эквивалентны. Докажем, например, что из ограниченности оператора следует его непрерывность. В самом деле, непосредственно из определения нормы оператора следует, что для любого вектора x линейного пространства R_1 справедливо неравенство $\|Ax\|_{R_2} \leqslant \leqslant \|A\| \, \|x\|_{R_1}$. Тогда имеем

$$\|Ax_n - Ax\|_{R_2} = \|A(x_n - x)\|_{R_2} \leqslant \|A\| \, \|x_n - x\|,$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

Принимая во внимание доказанную теорему, получаем следующий результат: в конечномерном евклидовом пространстве любой линейный оператор является непрерывным. Мы уже несколько раз использовали понятие нормы оператора, хотя до сих пор ничего не говорилось об обоснованности такого названия. Непосредственно из определения легко видеть (проверку мы предоставляем читателю), что так введенное понятие удовлетворяет всем свойствам нормы из определения нормированного пространства . Таким образом, векторное пространство ограниченных (следовательно, непрерывных) операторов, действующих из одного нормированного пространства R_1 в другое нормированное пространство R_2 с введенным выше понятием нормы оператора, становится также нормированным пространством, которое называется пространством линейных пепрерывных операторов п которое будем обозначать символом $(R_1 \to R_2)$.

В соответствии с общим определением сходимости в нормированном пространстве сходимость в пространстве линейных операторов определяется следующим образом.

Определение. Последовательность линейных ограниченных операторов A_n сходится по норме к линейному ограниченному оператору A, если $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$. Эту сходимость операторов иногда называют равномерной.

В пространстве операторов можно также ввести понятие поточечной сходимости (аналог поточечной сходимости последовательности обычных функций).

Определение. Последовательность операторов A_n сходится поточечно к оператору A, если для любого вектора x последовательность векторов $A_n(x)$ сходится к вектору $A(x)$.

Используя неравенство $\| A_n(x) - A(x) \| \leqslant \| A_n -$

$- A \| \, \| x \|$, нетрудно заключить, что из равномерной сходимости операторов вытекает сходимость поточечная. Можно показать (мы не будем сейчас на этом останавливаться), что в конечномерном случае эти два понятия сходимости совпадают.

3.6. АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО

АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО *n* измерений — совокупность точек и векторов, удовлетворяющих следующей системе аксиом:

1. Существует по меньшей мере одна точка.

2. Каждой упорядоченной паре точек A, B поставлен в соответствие один и только один вектор (обозначаемый $\overrightarrow{AB}$).

3. Для каждой точки A и каждого вектора $\vec{x}$ существует одна и только одна точка B такая, что

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x}$$

(Точка A называется началом, а точка B — концом вектора $\overrightarrow{AB}$.)

4. Аксиома параллелограмма. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

5. Для каждого вектора $\vec{x}$ и каждого числа α определен вектор $\alpha\vec{x}$ (называемый произведением вектора $\vec{x}$ на число α),

6. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$.

7. $\alpha\left(\vec{x} + \vec{y}\right) = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$.

8. $\alpha\left(\beta\vec{x}\right)=(\alpha\beta)\vec{x}$.

9. $1\vec{x}=\vec{x}$

(в аксиомах 6—9 α, β — произвольные числа, $\vec{x}, \vec{y}$ — произвольные векторы).

10. Существует n линейно независимых векторов, но любые $n+1$ векторов линейно зависимы (см. Линейная зависимость). Аффинное пространство является обобщением обычного трехмерного пространства, в котором векторы понимаются как направленные отрезки, соединяющие пару точек, а равенство векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ означает, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Можно рассматривать аффинное пространство, в определении которых (аксиомы 5—10) «числа» α, β берутся из произвольного поля или кольца. В этих случаях говорят об аффинном пространстве над соответствующим полем или кольцом.

Следующий пример аффинного пространства является универсальным в том смысле, что всякое аффинное пространство n измерений ему аффинно изоморфно (см. Аффинное преобразование) Назовем точками аффинного пространства упорядоченные наборы чисел $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, а векторами аффинного пространства — упорядоченные пары точек. Аксиомы 1—10 выполняются для так определенных точек и векторов, если умножение вектора на число ввести естественным способом; пусть точки A и B заданы в виде $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $(y_1; y_2; \ldots; y_n)$ соответственно, и α — произвольное число. Положим $\alpha\overrightarrow{AB}$ равным вектору, определенному парой точек: $(\alpha x_1; \alpha x_2; \ldots; \alpha x_n)$ и $(\alpha y_1; \alpha y_2; \ldots; \alpha y_n)$

АФФИННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — взаимно однозначное отображение L одного аффинного пространства A в другое аффинное пространство B (в частности, возможно $A = B$), удовлетворяющее следующим свойствам:

1. Пусть A_1, A_2 — произвольные точки из A и

$$LA_1 = B_1, \; LA_2 = B_2$$

(B_1, B_2 — точки из B), тогда $L\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_2}$.

2. Для любого вектора $\vec{x}$ из A и любого числа α справедливо

$$L\left(\alpha\vec{x}\right) = \alpha L\vec{x}.$$

3. Для любых двух векторов $\vec{x}, \vec{y} \in A$ справедливо

$$L\left(\vec{x} + \vec{y}\right) = L\vec{x} + L\vec{y}.$$

Аффинное пространство иначе называется аффинным изоморфизмом аффинных пространств A и B (в случае, когда $A = B$ — аффинным автоморфизмом).

Отметим, что в современной терминологии термин «преобразование» означает взаимно однозначное отображение множества на себя (см. Преобразование множества).

Каждое аффинное пространство двух аффинных пространств A и B можно получить следующим образом. Выберем в A и B по аффинному реперу (начальные точки реперов обозначим через O_1 и

O_2). Каждой точке A_1 из A поставим в соответствие точку B_1 из B, выбрав ее так, чтобы координаты вектора $\overrightarrow{O_1A_1}$ в первом репере (см. Аффинная координатная система) равнялись соответственно координатам вектора $\overrightarrow{O_2B_1}$ во втором репере.

Суперпозиция двух аффинных пространств L и M является аффинное пространство (обозначается LM). Каждое аффинное пространство имеет обратное преобразование, являющееся аффинным пространством (обозначается L^{-1}).

Пример. Аффинное пространство трехмерного пространства в себя является всякое преобразование L, задаваемое формулами:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2,$$
$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3;$$

здесь $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3')$, числа a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, b_1, b_2, b_3 произвольны, за исключением условия $\det\|a_{ij}\| \neq 0$ (см. Детерминант).

АФФИННЫЙ РЕПЕР — совокупность, состоящая из точки O аффинного пространства n измерений и n линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ этого же пространства, взятых в фиксированном порядке. Каждый аффинный репер, задает аффинную систему координат в аффинном пространстве, т. е. а) сопоставляет каждому вектору $\vec{x}$ упорядоченный набор чисел $x^1, x^2, \dots, x^n$ — коэффициентов разложения вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$:

$$\vec{x} = x^1\overrightarrow{e_1} + x^2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x^n\overrightarrow{e_n};$$

б) сопоставляет каждой точке A упорядоченный набор чисел $a^1, a^2, \ldots, a^n$ — коэффициентов разложения вектора $\overrightarrow{OA}$ по векторам $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$.

Обратно, всякая аффинная координатная система определяется с помощью некоторого аффиннго репера указанным выше способом.

АФФИННОЕ СВОЙСТВО — свойство линий, поверхностей и т. п. в аффинном пространстве, не изменяющееся под действием аффинных преобразований. Например, свойство двух прямых быть параллельными, свойство точек быть серединой отрезка являются аффиннымсвойством.

АФФИНОР — закон, ставящий в соответствие каждому вектору $\vec{x}$ п-мерного аффинного пространства L другой вектор $\vec{y}$ того же пространства, удовлетворяющий следующим двум свойствам:

1. Если векторам $\overrightarrow{x_1}$ и $\overrightarrow{x_2}$. А. сопоставляет векторы $\overrightarrow{y_1}$ и $\overrightarrow{y_2}$ соответственно, то вектору $\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$. А. сопоставляет вектор $\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{y_2}$.

2. Если вектору $\vec{x}$ А. сопоставляет вектор $\vec{y}$, то для любого числа α вектору $\alpha\vec{x}$ аффинор ставит в соответствие вектор $\alpha\vec{y}$.

Аффинор является двухвалентным тензором, один раз ковариантным и один раз контравариантным (см. Ковариантность и контравариантность). Если задана аффинная система координат, то аффинор задается с помощью n^2 чисел следующим образом. Пусть $O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ — система координат, где O — точка, а $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$

— векторы, образующие (вместе с O) аффинный репер. Пусть далее $\overrightarrow{Ae_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, обозначает вектор, соответствующий вектору $\overrightarrow{e_i}$ по закону рассматриваемого аффинора. Тогда коэффициенты разложений a_{ij} в формулах

$$\overrightarrow{Ae_i} = a_{i1}\overrightarrow{e_1} + a_{i2}\overrightarrow{e_2} + \ldots + a_{in}\overrightarrow{e_n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

задают аффинор в рассматриваемой системе и называются координатами аффинора, в этой системе. При аффинном преобразовании системы координат координаты аффинора меняются по тензорному закону. Последнее утверждение является перефразировкой того факта, что аффинор есть тензор.

АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ — та часть геометрии, которая изучает аффинные свойства, т. е. свойства, не меняющиеся при аффинных преобразованиях и отображениях.

АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ ПРОСТРАНСТВО. Пусть A_n — *n*-мерное дифференцируемое многообразие, P_0 — точка в A_n, U — окрестность P_0 и отображение $f : U \to E^n$ — где E^n — n-мерный параллелепипед аффинного пространства задает локальную систему криволинейных координат

$$\left(x^1; x^2; \ldots; x^n\right) \text{ в } U.$$

В каждой точке $P \in U$ определено касательное к A_n пространство (см. Касательное пространство), векторы которого являются векторами аффинного пространства $L(P)_n$, начала которых совпадают с точкой $f(P)$. Во многих задачах дифференциальной геометрии необходимо сравнивать касательные векторы, принадлежащие двум касательным пространствам к различным точкам P_0, P.

Для этой цели точки P_0 и P соединяют гладкой кривой $\gamma(t), \gamma(0) = P_0$ и в касательном пространстве $L(t)$ для каждой точки $\gamma(t)$ выбирают n линейно независимых векторов $\vec{a}_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, координаты которых в заданной аффинной координатной системе, обозначенные через $a_k^i(t)$ являются дифференцируемыми функциями. Такая конструкция определяет параллельное перенесение векторов из одного касательного пространства (к точке P_0) в другое касательное пространство (к точке P) вдоль кривой $\gamma(t)$: вектор $\vec{\xi}$ считается параллельно перенесенным вектором $\vec{\xi_0}$, если координаты этих векторов в базисах $\vec{a}_k(0)$ и $\vec{a}_k(1)$ одинаковы.

Особое значение имеет параллельное перенесение векторов из точки $P_0\left(x^1; x^2; \ldots; x^n\right)$ в бесконечно близкую точку $P'\left(x^{1'} + dx^{1'}; x^{2'} + dx^{2'}; \ldots; x^{n'} + dx^{n'}\right)$.

Удобное задание такого параллельного переноса позволяет ввести параллельный перенос вдоль любой кривой $\gamma(t)$. Естественное требование к такой конструкции заключается в следующем.

Пусть $\vec{\xi}\left(x^1; x^2; \ldots; x^n\right)$ — произвольное гладкое векторное поле в U. Рассмотрим разность

$$\vec{\xi}\left(x^1 + dx^1; x^2 + dx^2; \ldots; x^n + dx^n\right) - \vec{\xi}\left(x^1; x^2; \ldots; x^n\right), \qquad (*)$$

где $\bar{\xi}$ — вектор поля, перенесенный из точки $\left(x^1+\Delta x^1; x^2+\Delta x^2; \ldots; x^n+\Delta x^n\right)$ в точку $\left(x^1; x^2; \ldots; x^n\right)$. Естественно потребовать, чтобы при рассматриваемом параллельном переносе разность (*) была линейной относительно $\Delta x^1, \Delta x^2, \ldots, \Delta x^n$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка малости, т. е.

$$\left[\bar{\xi}\left(x^1+\Delta x^1; x^2+\Delta x^2; \ldots; x^n+\Delta x^n\right)-\vec{\xi}\left(x^1; x^2; \ldots; x^n\right)\right]^i \approx$$

$$\approx \sum_{kj} \Gamma^i_{jk} \xi^k \left(x^1; x^2; \ldots; x^n\right) dx^j,$$

где

$$\left[\bar{\xi}\left(x^1+\Delta x^1; x^2+\Delta x^2; \ldots; x^n+\Delta x^n\right)-\vec{\xi}\left(x^1; x^2; \ldots; x^n\right)\right]^i$$

обозначает i-ю координату вектора (*) в исходном базисе касательного пространства точки $\left(x^1; x^2; \ldots; x^n\right)$.

При этом коэффициенты Γ^i_{jk} зависящие только от координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$, называются символами Кристоффеля (см. Кристоффеля символы).

Говорят, что Γ^i_{jk} задают объект аффинной связности в A_n

Пространство A_n вместе с объектом связности называется аффинной связности пространства.

Параллельное перенесение вектора $\vec{\xi}\left(x^1; x^2; \ldots; x^n\right)$ вдоль кривой $\gamma(t)$ следующим образом описывается в терминах аффинной связности пространства:

$$\frac{d\xi^i(t)}{dt} = -\sum_{kj} \Gamma^i_{jk} \xi^k(t) \frac{dx^j(t)}{dt}; \quad \xi^i_0 = \xi^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{**}$$

Таким образом, для вычисления $\xi^i(t)$ следует проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (**) с указанными начальными условиями.

В аффинной связности пространства определена операция абсолютного дифференцирования.(См. Кривизна, Кривизны тензор.)

Аффинная связность является геометрическим понятием, обобщающим параллельное перенесение векторов в аффинном и евклидовом пространствах.

Аффинная связность может быть определена аксиоматически как операция построения по заданным двум векторным полям $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ третьего векторного поля — $\vec{\zeta}$, описывающего параллельное пересечение векторов поля $\vec{\xi}$ по направлению векторов поля $\vec{\eta}$.

Термин аффинная связность пространства введен немецким математиком Г. Вейлем.

3.7. Аффинные многообразия

Определение . Пусть *E*—векторное пространство и $F \subset \subset E$. Множества *F+a,* получающиеся из *F* с помощью переносов на всевозможные векторы $a \in E$, называются *аффинными*

многообразиями, параллельными F (и друг другу). Аффинные многообразия, содержащие нулевой вектор, называются *однородными.*
А. Очевидно, *каждое подпространство векторного пространства E является вместе с тем аффинным многообразием.* Мы будем называть *E несобственным* аффинным многообразием, а аффинные многообразия, отличные от *E,— собственными.*
Б. По определению , *аффинные многообразия векторного пространства E — это смежные классы E по его подпространствам, рассматриваемым как подгруппы аддитивной группы E* . Отсюда вытекают, в частности, следующие свойства аффинных многообразий:
1° *Аффинное многообразие однородно тогда и только тогда, когда оно является подпространством.*
2° *Если L—аффинное многообразие, параллельное подпространству F, то F=L— x, где x— любой вектор из L, и потому также F=L—L.*
3° *Через каждую точку* $x_0 \in E$ *проходит однозначно определенное аффинное многообразие, параллельное заданному подпространству F, а именно, представимое в виде* $F + x_0$.
В. *Пересечение семейства аффинных многообразий* $(L_\alpha)_{\alpha \in A}$ *либо пусто, либо есть аффинное многообразие, параллельное подпространству* $F = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$, *где* F_α *— подпространство* L_α *—* L_α, *параллельное* L_α. Действительно, если $a \in \bigcap_{\alpha \in A} L_\alpha$, то, по Б 2°, $L_\alpha - a = F_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$ и, значит,

$$\bigcap_{\alpha \in A} L_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (F_\alpha + a) = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha + a.$$

Г. Непустое подмножество *A* векторного пространства *E* содержится по крайней мере в одном аффинном многообразии: самом *E.* Пересечение $\mathscr{L}_A$ всех аффинных многообразий, содержащих *A* (являющееся, по В, аффинным многообразием), называется *аффинным многообразием, порожденным множеством A.* Это — *наименьшее* аффинное многообразие, содержащее *A.*
Г'. *Аффинное многообразие* $\mathscr{L}_A$, *порожденное множеством A, можно определить как совокупность всевозможных линейных комбинаций* $\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$, *где* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ *и* $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$; при этом один из векторов $a_0, a_1, \ldots, a_n$, скажем, a_0, можно считать фиксированным. Действительно, в силу Б

$$\mathscr{L}_A = \mathfrak{C}_{A-a_0} + a_0, \quad (1)$$

а так как в силу 2.Ж $\mathscr{E}_{A-a_0}$—совокупность всевозможных линейных комбинаций вида $\lambda_1(a_1-a_0)+\ldots+\lambda_n(a_n-a_0)$, где $a_1,\ldots,a_n\in A$, то $\mathscr{L}_A$— совокупность всевозможных линейных комбинаций вида $\lambda_0a_0+\lambda_1a_1+\ldots+\lambda_na_n$, где $\lambda_0=1-\lambda_1-\ldots-\lambda_n$ и, значит, $\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1$.
Отсюда легко следует, что *аффинные многообразия в Е можно охарактеризовать как непустые множества L а Е, которые вместе с каждым конечным семейством своих векторов* $(a_k)_{0\le k\le n}$ *содержат любую линейную комбинацию* $\lambda_0a_0+\ldots+\lambda_na_n$, *в которой*

$\lambda_0+\ldots+\lambda_n=1$.
Д. *Аффинным многообразием* $\mathscr{L}_{\mathcal{A}}$, *порожденным непустым семейством векторов* $\mathcal{A}=(a_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$, называется аффинное многоообразие, порожденное множеством *А* векторов этого семейства. Из Г' следует, что $\mathscr{L}_{\mathcal{A}}$ *можно охарактеризовать как совокупность всевозможных линейных комбинаций* $\sum\limits_{\alpha\in\mathrm{A}}\lambda_\alpha a_\alpha$, *удовлетворяющих условию*

$$\sum_{\alpha\in\mathrm{A}}\lambda_\alpha=1.$$

Е. *Сумма* L_1+L_2 *аффинных многообразий* L_1, L_2 *векторного пространства Е также есть аффинное многообразие.*
Действительно, $L_1=F_1+a_1$, $L_2=F_2+a_2$, где F_1, $F_2\subset\subset E$ и a_1, $a_2\in E$. Поэтому $L_1+L_2=(F_1+F_2)+$ $+(a_1+a_2)$, и остается принять во внимание 2.Г.

Определение. Аффинное многообразие *L* векторного пространства *Е,* не содержащееся ни в каком отличном от *L* собственном аффинном многообразии, будет называться *гиперплоскостью.*
Ж. Очевидно, *векторное пространство Е является своей гиперплоскостью.*
3. *Гиперплоскости можно определить как аффинные многообразия, параллельные гиперподпространствам.* Действительно, пусть *L* — аффинное многообразие, параллельное подпространству *F,* так что $L=F+a$, где $a\in L$, и пусть L' и F'—аффинное многообразие и подпространство, содержащие соответственно *L* и *F* как собственное подмножество. По Б 2°, $L'-a$ — подпространство; оно содержит *F* как собственное подмножество; поэтому, если *F* — гипер-подпространство, то $L'-a=E$, откуда $L'=E+a=E$ и, значит, *L* — гиперплоскость. Обратно, $F'+a$ есть аффинное многообразие, содержащее *L* как собственное подмножество, так что если *L*—

гиперплоскость, то $L' + a = E$, откуда $F' = E$ и, следовательно, F — гиперподпространство.

3'. Из 3 и Б1° следует, что *гиперплоскость однородна тогда и только тогда, когда она является гиперподпространством.*

Определение. *Прямою* в векторном пространстве называется всякое аффинное многообразие, параллельное подпространству $\mathscr{E}_t$, порожденному каким-либо ненулевым вектором t (называемым *направляющим вектором* прямой). В частности (см. Б1°), *однородные прямые* — это сами подпространства $\mathscr{E}_t$.

И. Пусть E—векторное пространство над К. Из Б3° следует, что *через каждую точку* $x_0 \in E$ *проходит однозначно определенная прямая* l *с заданным направляющим вектором* t, а именно, $l = \mathscr{E}_t + x_0$, так что точки прямой l —это точки, представимые в виде

$$x = x_0 + \lambda t, \quad (2)$$

где λ пробегает К. Отсюда следует также, что *через каждые две различные точки* $x_0, x_1 \in E$ *проходит однозначно определенная прямая*, а именно, представимая уравнением

$$x = (1 - \lambda)\, x_0 + \lambda x_1, \quad (3)$$

где λ пробегает К. Действительно, совокупность l всех точек $x \in E$, удовлетворяющих уравнению (3), т. е. уравнению $x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0)$, есть, по доказанному, прямая, проходящая через x_0; подставляя λ= 1, видим, что она проходит также через x_1. Обратно, если l — прямая, проходящая через x_0 и x_1, то, по доказанному, она представима уравнением вида $x = x_0 + \mu t$; в частности, $x_1 = x_0 + \mu_1 t$ (где $\mu_1 \neq 0$), откуда $t = \mu_1^{-1}(x_1 - x_0)$ и, значит, l представима уравнением $x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0)$ или (3), где $\lambda = \mu\mu_1^{-1}$ вместе с μ пробегает K.

Уравнения (2) и (3) называются *параметрическими уравнениями прямой* (определяемой точкой и направляющим вектором или сооответственно двумя точками), а λ — *параметром* точки на прямой.

К. Из Г' следует, что *прямая* (3), *проходящая через точки* x_0 *и* $x_1 \neq x_0$ *аффинного многообразия* L, *целиком содержится в* L *и является наименьшим аффинным многообразием, содержащим точки* x_0 *и* x_1. Можно показать, что *подмножество векторного пространства есть аффинное многообразие тогда и только тогда, когда оно не пусто и вместе с любыми двумя своими различными точками содержит всю проходящую через них прямую.*

3.8. Факторпространства.

А. *Пусть $F \subset\ \subset E$. Факторгруппа E/F аддитивной группы E по ее подгруппе F является векторным пространством, если умножение на скаляры определено в E/F формулой*

$$\lambda \cdot (F + a) = F + \lambda a. \tag{1}$$

Действительно, если $F + a = F + a'$, т. е. $a' - a \in F$, то

$$\lambda \cdot (F + a') = F + \lambda a' = F + \lambda (a' - a) + \lambda a = \\ = F + \lambda a = \lambda \cdot (F + a),$$

так что определение умножения на скаляры в E/F формулой (1) однозначно. При этом

а) $(\lambda\mu) \cdot (F + a) = F + (\lambda\mu)\, a = F + \lambda(\mu a) = \lambda \cdot (F + \mu a) = \lambda \cdot [\mu \cdot (F + a)]$;

б) $1 \cdot (F + a) = F + 1a = F + a$;

в) $\lambda \cdot [(F + a) + (F + b)] = \lambda \cdot [F + (a + b)] = F + \lambda(a + b) = (F + \lambda a) + (F + \lambda b) = \lambda \cdot (F + a) + \lambda \cdot (F + b)$;

г) $(\lambda + \mu) \cdot (F + a) = F + (\lambda + \mu)\, a = (F + \lambda a) + (F + \mu a) = \lambda \cdot (F + a) + \mu \cdot (F + a)$.

Тем самым выполнены все условия определения 1.

Замечание. Легко проверить, что $\lambda \cdot (F + a) = \lambda (F + a)$ для всех $\lambda \neq 0$; но $0 \cdot (F + a) = F$, а $0(F + a) = \{0\}$, так что $0 \cdot (F + a) \neq 0\,(F + a)$, если $F \neq \{\mathbf{0}\}$.

Определение. Пусть $F \subset\ \subset E$. Векторное пространство, получающееся, если факторгруппу аддитивной группы E *по* ее подгруппе F наделить умножением на скаляры по формуле (1), называют *факторпространством E по F* и обозначают по-прежнему E/F.

Б. *Для того чтобы собственное подпространство H векторного пространства E над* K *было гиперподпространством, необходимо и достаточно, чтобы E/H было изоморфно* K^1, *т. е. совпадало со своим подпространством, порожденным каким-нибудь классом $A = H+a$, где $a \notin H$.* Действительно, в силу 2.Г $H + \mathfrak{E}_a$ есть подпространство в E, очевидно, содержащее H как собственное подмножество. Следовательно, если H—гиперподпространство, то $H + \mathfrak{E}_a = E$ и потому $E/H = \{H + \lambda a\colon\ \lambda \in \mathrm{K}\} = \{\lambda \cdot (H + a)\colon\ \lambda \in \mathrm{K}\} = \mathfrak{E}_A$, где $A = \{H+a\}$. Обратно, если $E/H = \mathfrak{E}_A$, то для каждого $x \in E$ существует $\lambda_x \in$ K такое, что $H + x = H + \lambda_x a$, откуда $x = h_x + \lambda_x a$, где $h_x \in H$.

Пусть G — подпространство в E, содержащее H как собственное подмножество, и $x_0 = h_{x_0} + \lambda_{x_0} a$ —фиксированный вектор из $G \backslash H$. Тогда для любого $x \in$ E имеем

$$x = \frac{\lambda_x}{\lambda_{x_0}}\, x_0 + \left(h_x - \frac{\lambda_x}{\lambda_{x_0}}\, h_{x_0}\right) \in G,$$

так что G = E и, значит, H—гиперподпространство.

Определение. Говорят, что векторное пространство E есть *прямая сумма подпространств* $E_1,\dots,E_n$,
и пишут

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n,$$

если аддитивная группа E есть прямая сумма своих подгрупп $E_1,\dots,E_n$. Если $E = E_1 \oplus E_2$, то каждое из подпространств E_1, E_2 называют *дополнительным* к другому.

В. Согласно 2.4.А, *для того чтобы E было прямой суммой своих подпространств E_1, E_2, необходимо и достаточно, чтобы,* $E = E_1 + E_2$ *и* $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Г. *Если* $E = E_1 \oplus E_2$, *то* $E/E_2 \sim E_2$ (и также $E/E_2 \sim E_1$). *Изоморфизм* E_2 *на* E/E_1 *осуществляется отображением* φ, *относящим каждому вектору* $x_2 \in E_2$ *класс* $E_1 + x_2 \in E/E_1$. Действительно, в силу 2.4.Б φ есть изоморфизм подгруппы E_2 на факторгруппу $E\backslash E_1$; с другой стороны,

$$\varphi(\lambda x_2) = E_1 + \lambda x_2 = \lambda \cdot (E_1 + x_2) = \lambda\varphi(x_2).$$

φ называется *каноническим изоморфизмом* E_2 на E/E_1.

Д. *Если* H— *собственное гиперподпространство векторного пространства E, то* $E = H \oplus \mathscr{E}_a$, *где a — произвольный фиксированный вектор из* E \ H. Действительно, мы уже видели в Б, что $E = H + \mathscr{E}_a$; с другой стороны, очевидно, $H \cap \mathscr{E}_a = \{0\}$, и остается применить В. При этом *всякое подпространство F, дополнительное к собственному гиперподпространству* H, *имеет вид* $\mathscr{E}_a$, *где* $a \notin H$. В самом деле, по Г, $F \sim E/H$. Но согласно Б $E/H \sim K^1$. Следовательно (1.Д), $F \sim K^1$, и остаётся применить 2.Ж'.

Е. Обратно, *если* $E = H \oplus \mathscr{E}_a$, *где* $a \neq 0$, *то H—собственное гиперподпространство.* Действительно, согласно Г $E/H \sim \mathscr{E}_a$, и остается применить Б,

Теорема 1. *Всякое подпространство F векторного пространства E, имеющее нулевое пересечение с заданным подпространством* E_v *содержится в некотором подпространстве* E_2, *дополнительном к* E_1.

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}$ —множество всех подпространств пространства E, содержащих F и имеющих нулевое пересечение с E_1. Упорядоченное по возрастанию, $\mathscr{F}$ индуктивно, а именно, верхней гранью в $\mathscr{F}$ всякой цепи $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ служит объединение G всех образующих ее подпространств. Действительно, очевидно, $G \cap E_1 = \{0\}$ и нужно лишь показать, что G — подпространство. Но это следует из 2.В. В самом деле, если $x, y \in$ G, то $x \in F_1, y \in F_2$, где $F_1, F_2 \in \mathscr{C}$. Так как $\mathscr{C}$ —цепь, то, скажем, $F_1 \subset F_2$. Но тогда

$x+y \in F_2$ и, следовательно, $x+y \in G$. Совершенно так же $\lambda x \in G$ для любого скаляра λ. Из индуктивности множества $\mathcal{F}$, в силу принципа максимального элемента, следует, что в E существует подпространство E_2, удовлетворяющее условию $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ и не содержащееся ни в каком другом таком подпространстве. Для завершения доказательства остается показать, что $E = E_1+E_2$ (см. В). Пусть

$E \neq E_1 + E_2$, $x_0 \in E \setminus (E_1 + E_2)$ и $z \in E_1 \cap (E_2 + \mathfrak{E}_{x_0})$, так что $z = x = y + \lambda x_0$, где $x \in E_1$, и $y \in E_2$. Если $\lambda \neq 0$,

то $x_0 = \dfrac{x-y}{\lambda} \in E_1 + E_2$, что противоречит условию. Следовательно, $\lambda = 0$, так что $z = x = y \in E_1 \cap E_2$, откуда $z = 0$.

Таким образом, $E_1 \cap (E_2 + \mathfrak{E}_{x_0}) = \{0\}$. Однако, поскольку $x_0 \notin E_2$, это противоречит максимальности E_2, и теорема доказана.

Следствие 1. *Всякое подпространство E_1, векторного пространства E обладает дополнительным подпространством.*

Доказательство. Достаточно взять в теореме 1 $F=\{\mathbf{0}\}$.

Следствие 2. *Каждое подпространство F пространства E. не содержащее заданного ненулевого вектора $x_0 \in E$, содержится в гиперподпространстве, обладающем тем же свойством (и, значит, каждое аффинное многообразие, не содержащее заданного вектора z_0, содержится в гиперплоскости, не содержащей z_0).*

Доказательство. В силу предположения, $F \cap \mathfrak{E}_{x_0} = \{0\}$. Следовательно, по теореме 1, существует подпространство $H \supset F$, дополнительное к $\mathfrak{E}_{x_0}$. Согласно Е H — гиперподпространство, и, очевидно, $x_0 \notin H$.

Следствие 3. *Для каждого ненулевого вектора $x_o \in E$ существует не содержащее его собственное гиперподпространство.*

Доказательство. Достаточно взять в следствии 2 $F=\{\mathbf{0}\}$.

Следствие 4. *Всякое подпространство пространства E является пересечением гиперподпространств* (*и*, *значит, каждое аффинное многообразие — пересечением гиперплоскостей). В частности, нулевое подпространство есть пересечение множества всех гиперподпространств.*

Доказательство непосредственно вытекает из следствия 2.

Ж. Из следствия 2 теоремы 1 вытекает, что *каждое собственное подпространство векторного пространства содержится в собственном гиперподпространстве.*

Определение . Пусть $(E_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ —семейство векторных пространств над одним и тем же полем К. Прямое произведение (прямая сумма) аддитивных групп E_α, очевидно, превращается в векторное пространство, если умножение на скаляры $\lambda \in K$ определено формулой

$$\lambda (x_\alpha)_{\alpha \in A} = (\lambda x_\alpha)_{\alpha \in A},$$

т. е. выполняется покоординатно. Это векторное пространство называется *произведением (суммой) семейства векторных пространств* $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ и обозначается по-прежнему

$$\prod_{\alpha \in A} E_\alpha \quad \left(\sum_{\alpha \in A} E_\alpha\right).$$

Если все E_α совпадают с одним и тем же векторным пространством E, то вместо

$$\prod_{\alpha \in A} E_\alpha \text{ и } \sum_{\alpha \in A} E_\alpha$$

пишут соответственно E^A и $E^{(A)}$; а поскольку пространства E^A и $E^{A'}$, равно как $E^{(A)}$ и $E^{(A')}$, с равномощными множествами индексов A и A', очевидно, изоморфны, обозначения E^A и $E^{(A)}$ заменяют ногда на E^α и $E^{(\alpha)}$, где α — мощность $\bar{\bar{A}}$ множества A. Так, пространство K^n есть не что иное, как произведение n экземпляров пространства K^1.

3. Очевидно, $\sum_{\alpha \in A} E_\alpha \subset \subset \prod_{\alpha \in A} E_\alpha$.

Отображение, относящее каждому элементу $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \sum_{\alpha \in A} E_\alpha$

этот же элемент в $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha$, будет называться *каноническим вложением* $\sum_{\alpha \in A} E_\alpha$ в $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha$.

3.9.Пересечение и сумма подпространств

Пересечение и сумма

Пусть U и W — подпространства векторного пространства V над полем F.

Предложение 1. Пересечение $U \cap W$ подпространств U и W является векторным пространством.

Замечание 1. Объединение $U \cup W$ пространств U и W не обязано быть векторным пространством, как показано в следующем примере.

Пример 1. Пусть $V = F^2$, то есть множество векторов вида (α_1, α_2), где $\alpha_1, \alpha_2 \in F$. Базисом этого пространства служат вектора $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. Положим $U_1 = \langle e_1 \rangle_F$ и $U_2 = \langle e_2 \rangle_F$ — линейные оболочки векторов e_1 и e_2, соответственно. Сумма векторов $e_1 + e_2$ не содержится в $U_1 \cup U_2$.

Определение 1. **Суммой**[1)] подпространств U и W называется наименьшее подпространство в V, содержащее U и W, то есть

$$U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}.$$

Вообще говоря, можно определить сумму любого конечного числа подпространств:

Определение 1'. Сумма подпространств $U_1, U_2, \ldots, U_n$ в V — это наименьшее подпространство, содержащее все U_i, то есть

$$U_1 + \ldots + U_n = \{u_1 + \ldots + u_n | u_i \in U_i\}.$$

Предложение 2. Пусть U и W — подпространства конечномерного векторного пространства V. Тогда

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Внутренняя прямая сумма

Определение 2. Пространство V называется **прямой суммой**[2)] своих векторных подпространств $U_1, U_2, \ldots, U_n$, если каждый вектор

$v \in V$ может быть представлен одним и только одним способом в виде суммы

$v = u_1 + \ldots + u_n$, где $u_i \in U_i$.

Прямая сумма векторных пространств обозначается через $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$.

Замечание 2. Определенная таким образом прямая сумма называется **внутренней**.

Пример 2. Пусть $V = F^2$ и подпространства U_1 и U_2 определены также, как в примере 1. Тогда сумма $U_1 + U_2$ является прямой, то есть $V = U_1 \oplus U_2$.

Предложение 3. Сумма $V = U_1 + \ldots + U_n$ является прямой тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих двух условий:

1. $U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_n) = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$,
2. $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 + \ldots + \dim U_n$.

Следствие 1. Если $n = 2$, то сумма $V = U_1 + U_2$ является прямой тогда и только тогда, когда $U_1 \cap U_2 = 0$.

Предложение 4. Для любого m-мерного подпространства U векторного пространства V размерности n найдется такое $n - m$-мерное подпространство W, что $V = U \oplus W$.

Определение 3. Для подпространства U векторного пространства V подпространство W из *предложения 4*, то есть такое, что $V = U \oplus W$, называется **дополнительным подпространством**[3)] к U.

Внешняя прямая сумма

Пусть U и W — векторные пространства над полем F.

Определение 4. **Прямой суммой** векторных пространств U и W называется декартово произведение $V = U \times W$ с операциями сложения векторов и умножения их на скаляр, определенными следующей формулой:

$$\alpha(u, w) + \beta(u', w') = (\alpha u + \beta u', \alpha w + \beta w').$$

Замечание 3. Определенная таким образом прямая сумма называется **внешней**. Непосредственной проверкой можно убедиться, что внешняя прямая сумма векторных пространств является векторным пространством.

Предложение 5. Внешняя прямая сумма $U \oplus W$ пространств U и W обладает следующим свойством: если $\varphi\colon U \to U \oplus W$ и $\psi\colon W \to U \oplus W$ — линейные отображения, определенные условиями $\varphi(u) = (u, 0)$, $\psi(v) = (0, v)$, то $U \oplus W$ является внутренней прямой суммой подпространств $\varphi(U) = \mathrm{im}\ \varphi$ и $\psi(W) = \mathrm{im}\ \psi$. Таким образом, $U \oplus W \cong \varphi(U) \oplus \psi(W)$.

3.10.Корневое подпространство

Определения собственного числа, собственного и корневого вектора линейного оператора

Пусть L — линейное пространство над полем K, $A\colon L \to L$ — линейное преобразование.

Собственным вектором линейного преобразования A называется такой ненулевой вектор $x \in L$, что для некоторого $\lambda \in K$

$Ax = \lambda x$

Собственным значением линейного преобразования A называется такое число $\lambda \in K$, для которого существует собственный вектор, то есть уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение $x \in L$.

Собственным подпространством линейного преобразования A для данного собственного числа $\lambda \in K$ называется множество всех собственных векторов $x \in L$, соответствующих данному собственному числу (дополненное нулевым вектором). Обозначим его E_λ. По определению,

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda \cdot E)$$

где E — единичный оператор.

Корневым вектором линейного преобразования A для данного собственного значения $\lambda \in K$ называется такой ненулевой вектор $x \in L$, что для некоторого натурального числа m

$$(A - \lambda \cdot E)^m x = 0$$

Если m является наименьшим из таких натуральных чисел (то есть $(A - \lambda \cdot E)^{m-1} x \neq 0$), то m называется *высотой* корневого вектора x.

Корневым подпространством линейного преобразования A для данного собственного числа $\lambda \in K$ называется множество всех корневых векторов $x \in L$, соответствующих данному собственному числу (дополненное нулевым вектором). Обозначим его V_λ. По определению,

$$V_\lambda = \bigcup_{m=1}^{\infty} \ker(A - \lambda \cdot E)^m = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_{m,\lambda},$$

где $V_{m,\lambda} = \ker(A - \lambda \cdot E)^m$

Свойства собственных значений, собственных и корневых векторов и пространств

Общий случай

Подпространство $V \subset L$ называется *инвариантным подпространством* линейного преобразования A (*A-инвариантным подпространством*), если

$$AV \subseteq V.$$

- Собственные подпространства E_λ, корневые подпространства V_λ и подпространства $V_{m,\lambda}$ линейного оператора A являются A-инвариантными.

- Собственные векторы являются корневыми (высоты 1): $E_\lambda \subseteq V_\lambda$;

- Корневые векторы могут не быть собственными: например, для преобразования двумерного пространства, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(A - 1)^2 = 0$, и все векторы являются корневыми, соответствующими собственному числу 1, но A имеет единственный собственный вектор (с точностью до умножения на число).

- Для разных собственных значений корневые (и, следовательно, собственные) подпространства имеют тривиальное (нулевое) пересечение:

$V_\lambda \bigcap V_\mu = \{0\}$ если $\lambda \neq \mu$.

Конечномерные линейные пространства

Выбрав базис в n-мерном линейном пространстве L, можно сопоставить линейному преобразованию $A\colon L \to L$ квадратную $n \times n$ матрицу и определить для неё характеристический многочлен

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k .$$

- Характеристический многочлен не зависит от базиса в L. Его коэффициенты являются инвариантами оператора A. В частности, $a_0 = \det A$, $a_{n-1} = \operatorname{tr} A$ не зависят от выбора базиса.
- Собственные значения, и только они, являются корнями характеристического многочлена матрицы.
- Количество различных собственных значений не может превышать размер матрицы.

Пусть числовое поле алгебраически замкнуто (например, является полем комплексных чисел). Тогда характеристический многочлен разлагается в произведение n линейных множителей

$$P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$

где $\lambda_i \ (i = 1, \ldots, n)$ — собственные значения; некоторые из λ_i могут быть равны. *Кратность собственного значения* λ_i — это число множителей равных $\lambda - \lambda_i$ в разложении характеристического многочлена на линейные множители (называется также *алгебраическая кратность собственного значения*).

- Размерность корневого пространства V_{λ_i} равна кратности собственного значения.
- Векторное пространство L разлагается в прямую сумму корневых подпространств (по теореме о жордановой форме):

$$L = \bigoplus_{\lambda_i} V_{\lambda_i}$$

где суммирование производится по всем λ_i — собственным числам A.

- *Геометрическая кратность собственного значения* λ_i — это размерность соответствующего собственного подпространства E_{λ_i}; геометрическая кратность собственного значения не превосходит его кратности, поскольку $E_{\lambda_i} \subseteq V_{\lambda_i}$

Гильбертовы пространства над полем комплексных чисел и нормальные операторы

Наличие скалярного произведения позволяет выделить важные классы операторов, собственные значения и собственные векторы которых обладают рядом дополнительных полезных свойств.

Нормальным оператором называется оператор A, коммутирующий со своим сопряжённым A^*:

$$AA^* = A^*A.$$

Частными классами нормальных операторов являются *самосопряжённые* (*эрмитовы*) операторы ($A = A^*$), *антиэрмитовы* операторы ($A = -A^*$) и унитарные операторы ($A^{-1} = A^*$), а также их вещественные варианты: симметричные операторы, антисимметричные операторы и ортогональные преобразования.

- Все корневые векторы нормального оператора являются собственными.

- Собственные векторы нормального оператора A, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

То есть если $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ и $\lambda \neq \mu$, то $(x,y) = 0$. (Для произвольного оператора это неверно.)

- Все собственные значения самосопряжённого оператора являются вещественными.

- Все собственные значения антиэрмитового оператора являются мнимыми.

- Все собственные значения унитарного оператора лежат на единичной окружности $|\lambda| = 1$.

- В *конечномерном случае*, сумма размерностей собственных подпространств нормального оператора $A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, соответствующих всем собственным значениям, равна размерности матрицы, а векторное пространство разлагается в ортогональную сумму собственных подпространств:

$$L = \bigoplus_{\lambda_i} E_{\lambda_i},$$

где суммирование производится по всем λ_i — собственным числам A, а E_{λ_i} взаимно ортогональны для различных λ_i.

- Последнее свойство для нормального оператора над $\mathbb{C}$ является характеристическим: оператор нормален тогда и только тогда, когда его матрица имеет диагональный вид в каком-нибудь ортонормированном базисе (в конечномерном случае).

Положительные матрицы

Квадратная вещественная $n \times n$ матрица $A = (a_{ij})$ называется положительной, если все её элементы положительны: $a_{ij} > 0$.

Теорема Перрона (частный случай теоремы Перрона-Фробениуса): Положительная квадратная матрица A имеет положительное собственное значение r, которое имеет алгебраическую кратность 1 и строго превосходит абсолютную величину любого другого собственного значения этой матрицы. Собственному значению r

соответствует собственный вектор e_r, все координаты которого строго положительны. Вектор e_r — единственный собственный вектор A (с точностью до умножения на число), имеющий неотрицательные координаты.

Собственный вектор e_r может быть вычислен посредством *прямых итераций*: выберем произвольный начальный вектор v_0 с положительными координатами. Положим:

$$v_{k+1} = \frac{Av_k}{\|Av_k\|}$$

Последовательность v_k сходится к нормированному собственному вектору $e_r/\|e_r\|$.

Другая область применения метода прямых итераций — поиск собственных векторов положительно определённых симметричных операторов.

Фактор - пространства нормированных пространств

Пусть E - нормированное пространство, $E_\diamond$ - замкнутое подпространство. Рассмотрим фактор-пространство $E/E_\diamond$. В силу замкнутости $E_\diamond$ класс $\xi = x + E_\diamond$ - замкнутое множество в E.

Если для $\xi \in E/E_\diamond$ положить

$\|\xi\| = \inf\limits_{x \in \xi} \|x\|$, (3.7) то E/E_0 превратится в нормированное пространство. Проверим справедливость аксиом нормированного пространства.

Если $\underline{\xi} = 0$, то в качестве $x \in \underline{\xi}$ можно взять нулевой элемент пространства E и поэтому $\|\underline{\xi}\| = 0$. Обратно, если $\|\underline{\xi}\| = 0$, то согласно (3.7) и по свойству нижней грани существует последовательность $\{x_n\} \in \underline{\xi}$, такая что $x_n \to 0$. И поскольку класс $\underline{\xi}$ - замкнут, то содержит предельную точку: $0 \in \underline{\xi}$ и тем самым $\underline{\xi}$ является нулевым элементом фактор-пространства E/E_0.

Проверим однородность нормы, рассматривая случай $\lambda \neq 0$. Имеем

$$|\lambda|\|x\| = |\lambda| \inf_{x \in \underline{\xi}} \|x\| = \inf_{x \in \underline{\xi}} \|\lambda x\|.$$

Когда x пробегает класс $\underline{\xi}$, элемент λx пробегает класс $\lambda\underline{\xi}$, откуда следует, что

$$\inf_{x \in \underline{\xi}} \|\lambda x\| = \inf_{z \in \underline{\xi}} \|z\| = \|\lambda \underline{\xi}\|.$$

Теперь докажем неравенство треугольника. Для произвольных $x \in \underline{\xi}$, $y \in \mu\left(\underline{\xi}, \mu \in E/E_0\right)$ имеем $x + y \in \underline{\xi} + \mu$, поэтому

$$\|\underline{\xi} + \mu\| \le \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

Переходя в правой части к точным нижним граням, получим неравенство треугольника.

Далее докажем, что если E-полное пространство, то и фактор-пространство E/E_0 - полно. Вначале заметим, что согласно (3.7) для каждого $\xi \in E/E_0$ найдется такой элемент $x \in \xi$, что

$$\|\xi\| \geq \frac{1}{2}\|x\|. \quad (3.8)$$

А теперь возьмем фундаментальную последовательность $\{\xi_n\}$ в пространстве E/E_0. Переходя, если нужно к подпоследовательности, можно считать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\|\xi_{n+1} - \xi_n\|$$

сходится. Способ построения указанной подпоследовательности приведен в теореме 2. К последовательности $\{\xi_n\}$ добавим еще ξ_0 - нулевой элемент пространства E/E_0. Выберем $x_n \in \xi_{n+1} - \xi_n$ ($n = 0,1,2,\dots$) так, что

$$\|\xi_{n+1} - \xi_n\| \geq \frac{1}{2}\|x\|.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\|x_n\|$ сходится и по теореме 2 в силу полноты пространства E сходится такжеряд $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. Положим $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ и обозначим через ξ, содержащий x. Поскольку при каждом n справедливо включение $\sum_{k=0}^{n-1} x_k \in \xi_n$, то

$$\left\|\xi - \xi_n\right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right\| \to 0$$, при $n \to +\infty$,

т.е. $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n$. Таким образом доказана теорема.

Теорема 5. Фактор – пространство банахова пространства по любому его подпространству есть банахово пространство.

3.11. Линейная зависимость и независимость

Определение 12. Пусть E— векторное пространство, $a \in E$ и $A \subset E$. Смотря по тому, будет ли $a \in \mathfrak{E}_A$ или $a \notin \mathfrak{E}_A$,

мы будем говорить, что *а зависит* или соответственно *не зависит линейно от А* (или *от векторов множества А*). *Линейной зависимостью* между векторами множества A будет называться всякое соотношение вида

$$\sum_{a \in A} \lambda_a a = 0, \quad \textbf{(1)}$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов $\lambda_a \neq 0$. A будет называться *линейно зависимым,* если между его векторами имеется линейная зависимость, и *линейно независимым,* или *репером,* — в противном случае.

А. *Пустое множество является репером.* Действительно, в силу самого определения линейно зависимое множество не пусто.

Б. Из ранее приведенного определения непосредственно следует, что *непустое множество А является репером тогда и только тогда, когда равенство* $\sum_{a \in A} \lambda_a a = 0$ *имеет место лишь*

при условии, что все коэффициенты $\lambda_a = 0$.

В. *Множество* $A = \{a\}$ *является репером тогда и только тогда, когда* $a \neq 0$. В самом деле, $\lambda_a = 0$ влечет $\lambda = 0$, лишь если $a \neq 0$.

Г. *Всякое подмножество* A' *репера А является репером.*

Действительно, для $A' = \varnothing$ это уже установлено в А. А если бы между векторами непустого множества $A' \subset A$ имелась линейная зависимость

$$\sum_{a\in A'}\lambda_a a=0,$$

то, положив $\lambda_a = 0$ для всех $a\in A\setminus A'$, мы получилибы линейную зависимость (1) между векторами репера *A,* что невозможно.
Д. Из Г и В следует, что *все векторы репера отличны от нуля.*
Е. *Для того чтобы множество A $\subset$ E было репером, необходимо и достаточно, чтобы всякое его конечное подмножество было репером* (т. е. *линейная независимость множества есть свойство конечного характера).* Действительно, необходимость следует из Г, а достаточность— из того, что всякая линейная зависимость между векторами множества является линейной зависимостью между векторами некоторого его конечного подмножества.
Ж. *Нулевой вектор зависит линейно от любого множества A $\subset$ E.* В самом деле, $0\in\mathcal{E}_A$.
3. *Множество A $\subset$ E линейно зависимо тогда и только тогда, когда некоторый вектор $a_0\in A$ зависит линейно от $A\setminus\{a_0\}$.* Действительно, если $A=\{a_0\}$, то это следует из В, Ж и того, что $\mathcal{E}_\varnothing=\{0\}$. Пусть *A* не одноточечно. Если его векторы связаны линейной зависимостью (1), где, скажем, $\lambda_{a_0}\neq 0$, то

$$a_0=-\sum_{a\in A\setminus\{a_0\}}\lambda_{a_0}^{-1}\lambda_a a\in\mathcal{E}_{A\setminus\{a_0\}},$$

т. е. a_0 зависит линейноот $A\setminus\{a_0\}$. Обратно, если некоторый вектор $a_0\in A$ зависит линейно от $A\setminus\{a_0\}$, так что

$$a_0=\sum_{a\in A\setminus\{a_0\}}\lambda_a a,$$

то, положив $\lambda_{a_0}=-1$, получим соотношение (1), в котором $\lambda_{a_0}\neq 0$, т. е. линейную зависимость между векторами множества *A*.
И. *Вектор a репера A не зависит линейно ни от какого не содержащего его множества B $\subset$A.* В самом деле, в противном случае множество $A'=B\cup\{a\}\ (\subset A)$ было бы, в силу 3, линейно зависимым, что противоречит Г,
К. *Если $A=A_1\cup A_2$—разбиение репера A на непересекающиеся множества A_1, A_2, то* $\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_{A_1}\oplus\mathcal{E}_{A_2}$. Действительно, при $A_1=\varnothing$ или $A_2=\varnothing$ это очевидно. Пусть $A_1\neq\varnothing$ и $A_2\neq\varnothing$. Если $x\in\mathcal{E}_A$, то (2.Ж) $x=\sum_{a\in A}\lambda_a a=$

$$=\sum_{a_1\in A_1}\lambda_{a_1}a_1+\sum_{a_2\in A_2}\lambda_{a_2}a_2\in\mathcal{E}_{A_1}+\mathcal{E}_{A_2}$$

Тем самым $\mathscr{E}_A = \mathscr{E}_{A_1} + \mathscr{E}_{A_2}$. С другой стороны, если $x \in \mathscr{E}_{A_1} \cap \mathscr{E}_{A_2}$, так что $x = \sum\limits_{a_1 \in A_1} \lambda_{a_1} a_1 =$

$$= \sum_{a_2 \in A_2} (-\lambda_{a_2})\, a_2,$$

то

$$\sum_{a \in A} \lambda_a a = 0,$$

откуда в силу Б все $\lambda_a = 0$, т. е. $x = 0$. Тем самым

$$\mathscr{E}_{A_1} \cap \mathscr{E}_{A_2} = \{0\},$$

и остается применить 4.В.

Л. *Если* A_1 *и* A_2*—реперы и* $\mathscr{E}_{A_1} \cap \mathscr{E}_{A_2} = \{0\}$, *то* $A = A_1 \cup A_2$*—репер.* Действительно, при $A_1 = \varnothing$ или $A_2 = \varnothing$ это очевидно. Пусть $A_1 \neq \varnothing$ и $A_2 \neq \varnothing$ и $\sum\limits_{a \in A} \lambda_a a = \sum\limits_{a_1 \in A_1} \lambda_{a_1} a_1 +$

$+ \sum\limits_{a_2 \in A_2} \lambda_{a_2} a_2 = 0$, так что $\sum\limits_{a_1 \in A_1} \lambda_{a_1} a_1 = \sum\limits_{a_2 \in A_2} (-\lambda_{a_2} a_2)$. Так как $\sum\limits_{a_1 \in A_1} \lambda_{a_1} a_1 \in \mathscr{E}_{A_1}$, $\sum\limits_{a_2 \in A_2} (-\lambda_{a_2})\, a_2 \in \mathscr{E}_{A_2}$, а $\mathscr{E}_{A_1} \cap \mathscr{E}_{A_2} = \{0\}$, то

$$\sum_{a_1 \in A_1} \lambda_{a_1} a_1 = \sum_{a_2 \in A_2} \lambda_{a_2} a_2 = 0.$$

Но поскольку A_1 и A_2 — непустые реперы, в силу Б $\lambda_a = 0$ для всех $a \in A$. Значит, снова в силу Б, A — репер.

М. *Если* A_1*—репер и* a_0 *не зависит линейно от* A_1, *то* $A = A_1 \cup \{a_0\}$ — *репер.* Действительно, в силу Ж и В, $A_2=\{a_0\}$—репер. Так как, с другой стороны, очевидно

$$\mathscr{E}_{A_1} \cap \mathscr{E}_{a_0} = \{0\},$$

то остается применить Л.

Н. *Если* A*—репер в* E *и* φ — *изоморфизм* E *на* F, *то* $B = \varphi(A)$*—репер в* F. В самом деле, если $A = \varnothing$, то также $B = \varnothing$ и B — репер в силу А. Пусть $A \neq \varnothing$ (так что и $B \neq \varnothing$), и пусть

$$\sum_{b \in B} \mu_b b = 0. \quad \textbf{(2)}$$

Положим $\lambda_a = \mu_b$, где $b = \varphi\, a$). Так как φ^{-1}—изоморфизм F на E (1.Д), то из (2) в силу 1.В, Г следует, что

$$\sum_{a \in A} \lambda_a a = \sum_{b \in B} \mu_b \varphi^{-1}(b) = \varphi^{-1}\Big(\sum_{b \in B} \mu_b b\Big) = 0.$$

Но тогда, по Б, λ_a=0 для всех $a \in A$, т. е. $\mu_b = 0$ для всех $b \in B$. Тем самым B—репер.

О. Понятия, введенные для подмножеств векторного пространства E, естественно переносятся на семейства векторов пространства. В частности, *линейной зависимостью,* связывающей семейство векторов $\mathcal{A} = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$, называют всякое соотношение вида

$$\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \lambda_\alpha a_\alpha = 0, \quad (1')$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов $\lambda_\alpha \neq 0$; если такое соотношение существует, то $\mathcal{A}$ называется *линейно зависимым,* в противном случае — *линейно независимым.* В переводе на эту терминологию линейная зависимость (независимость) множества $A \subset E$ означает не что иное, как линейную зависимость (независимость) семейства $\mathcal{A} = (a_\alpha)_{\alpha \in A}$, в котором $a_a = a$. Более общим образом, *множество $A \subset E$ линейно зависимо (независимо) тогда и только тогда, когда линейно зависимо (независимо) произвольное представление его в виде семейства $\mathcal{A} = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$,*

где

$$\alpha \to a_\alpha \quad (3)$$

—взаимно однозначное *отображение множества индексов* А *на множество векторов А.* Действительно, всякая линейная зависимость между векторами множества *А,* вследствие взаимной однозначности отображения (3), влечет линейную зависимость с теми же коэффициентами, связывающую семейство $\mathcal{A}$, и обратно. С другой стороны, *если отображение* (3) *множества индексов* А *на множество векторов А семейства $\mathcal{A} = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ не взаимно однозначно,*

то семейство $\mathcal{A}$ линейно зависимо. В самом деле, если двум различным индексам α', α'' отвечает один и тот же вектор $a_{\alpha'} = a_{\alpha''}$, то $\mathcal{A}$ связано линейной зависимостью (1'), в которой $\lambda_{\alpha'}=1$, $\lambda_{\alpha''}= -1$ и $\lambda_\alpha=0$ для всех других индексов α.

Из сказанного следует, что *семейство $\mathcal{A} = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ линейно независимо тогда и только тогда, когда отображение* (3) *взаимно однозначно, а множество векторов семейства является репером.* Основываясь на этом, мы будем, там, где это окажется удобным, отождествлять линейно независимое семейство векторов с репером, образованным векторами семейства, или, напротив, рассматривать репер как линейно независимое семейство векторов.

П. Непустое семейство векторов $\mathcal{A} = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ называется *аффинно независимым,* если соотношения

$$\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha a_\alpha = 0 \quad и \quad \sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha = 0$$

выполняются одновременно лишь когда все λ_α=0, и *аффинно зависимым* — в противном случае. Согласно 3.Д аффинное многообразие $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, порожденное семейством $\mathcal{A}$, есть совокупность всевозможных векторов, представимых в виде

$$x = \sum_{\alpha\in A}\xi_\alpha a_\alpha, \quad где \quad \sum_{\alpha\in A}\xi_\alpha = 1. \tag{4}$$

Для аффинной независимости семейства $\mathcal{A}$ *необходимо, чтобы, каждый вектор из* $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, *и достаточно, чтобы хотя бы один вектор* $x\in\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, *обладал единственным представлением вида* (4).
Действительно, пусть $x = \sum_{\alpha\in A}\xi_\alpha a_\alpha = \sum_{\alpha\in A}\eta_\alpha a_\alpha$, Где $\sum_{\alpha\in A}\xi_\alpha = \sum_{\alpha\in A}\eta_\alpha = 1.$
Положим $\lambda_\alpha = \xi_\alpha - \eta_\alpha$. Тогда

$$\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha a_\alpha = 0 \quad и \quad \sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha = 0,$$

так что, если $\mathcal{A}$ аффинно независимо, все λ_α=0, т. е. $\xi_\alpha = \eta_\alpha$.
Обратно, пусть

$$\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha a_\alpha = 0 \quad и \quad \sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha = 0.$$

Тогда каждый вектор $x\in\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ наряду с представлением (4} допускает также представление $x = \sum_{\alpha\in A}(\xi_\alpha + \lambda_\alpha)\, a_\alpha$, где $\sum_{\alpha\in A}(\xi_\alpha + \lambda_\alpha) = 1$, так что если хотя бы для одного вектора $x\in\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ представление (4) единственно, то $\xi_\alpha + \lambda_\alpha = \xi_\alpha$,
т. е. λ_α=0, для всех $\alpha \in A$ и, значит, $\mathcal{A}$ аффинно независимо.
Если семейство $\mathcal{A}$ аффинно независимо, то (4) называют *барицентрическим разложением* вектора $x\in\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ по *аффинному базису* $\mathcal{A}$ аффинного многообразия $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, а коэффициенты ξ_α этого разложения — *барицентрическими координатами* вектора *x*.
Для аффинной независимости семейства $\mathcal{A}$ *необходимо, чтобы каждое семейство*

$$(a_\alpha - a_{\alpha_0})_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_0\}} \quad (\alpha_0\in A),$$

и достаточно, чтобы хотя бы одно из этих семейств, было линейно независимо. Действительно, пусть семейство $(a_\alpha - a_{\alpha_0})_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_0\}}$

линейно зависимо, так что существует соотношение $\sum_{\alpha\neq\alpha_0}' \lambda_\alpha (a_\alpha - a_{\alpha_0}) = 0$, в котором не все $\lambda_\alpha=0$. Положив $\lambda_{\alpha_0} = -\sum_{\alpha\neq\alpha_0} \lambda_\alpha$, получим

$$\sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha a_\alpha = 0 \text{ и } \sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha = 0,$$

так что $\mathcal{A}$ будет аффинно зависимым,

Обратно, пусть $\mathcal{A}$ аффинно зависимо, так что, по ранее доказанному, существует вектор $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, допускающий представления

$$x = \sum_{\alpha\in A} \xi_\alpha a_\alpha = \sum_{\alpha\in A} \eta_\alpha a_\alpha,$$

где

$$\sum_{\alpha\in A}' \xi_\alpha = \sum_{\alpha\in A}' \eta_\alpha = 1 \text{ и } \xi_{\alpha_1} \neq \eta_{\alpha_1}$$

для некоторого $\alpha_1 \in A$, откуда преждевсего следует, что $A \neq \{\alpha_1\}$.

Взяв произвольный индекс $\alpha_0 \in A \setminus \{\alpha_1\}$, получим

$$x - a_{\alpha_0} = \sum_{\alpha\neq\alpha_0}' \xi_\alpha (a_\alpha - a_{\alpha_0}) =$$
$$= \sum_{\alpha\neq\alpha_0} \eta_\alpha (a_\alpha - a_{\alpha_0}),$$

откуда

$$\sum_{\alpha\neq\alpha_0} \lambda_\alpha (a_\alpha - a_{\alpha_0}) = 0,$$

где $\lambda_\alpha = \xi_\alpha - \eta_\alpha$.

Так как $\lambda_{\alpha_1} \neq 0$, это будет означать, что семейство

$$(a_\alpha - a_{\alpha_0})_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_0\}}$$

линейно зависимо.

Нетрудно проверить, что *семейство $\mathcal{A}$ аффинно независимо тогда и только тогда, когда ни один из его векторов a_{α_0} не принадлежит аффинному многообразию, порожденному семей' ством* $(a_\alpha)_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_0\}}$.

3.12. Базис

3.12.1. Понятие базиса

деле, очевидно, $\mathbf{P}_n = \mathscr{E}_A$. С другой стороны, обращение полинома степени < n в нуль уже в n различных точках влечет обращение всех его коэффициентов в нуль; тем самым A — репер.

А. Очевидно, *каждый репер является базисом порожденного им подпространства.*

Б. В частности, *пустое множество служит базисом нулевого векторного пространства (и только его).*

В. Пусть E—ненулевое векторное пространство. Согласно приведенному ранее определению, базис пространства E—это репер $A \subset E$, обладающий тем свойством, что каждый вектор $x \in E$ представим в виде линейной комбинации

$$x = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha a_\alpha, \quad (2)$$

где А — какое-нибудь фиксированное множество индексов, находящееся с A во взаимно однозначном соответствии $\alpha \to a_\alpha$. x_α называется *α-й координатой вектора x относительно базиса A* (при данной индексации последнего), а формула (2) — *разложением вектора x по базису A.*

Каждый вектор $x \in E$ обладает только одним разложением по базису A (и тем самым *координаты вектора относительно базиса однозначно определены).* Действительно, если

$$x = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha a_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} x'_\alpha a_\alpha,$$

то $\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} (x_\alpha - x'_\alpha) a_\alpha = 0$ и, значит, в силу 5.Б $x'_\alpha = x_\alpha$ для всех $\alpha \in$ А.

Г. *Если A—базис векторного пространства E и φ— изоморфизм E на F, то B = φ (A) — базис пространства F.* В самом деле, согласно 5.Н, B— репер. Если E — ненулевое, то для каждого $y \in F$ имеем $\varphi^{-1}(y) = x = \sum_{a \in A} x_a a,$

откуда в силу 1 .Г $y = \varphi(x) = \sum_{a \in A} x_a \varphi(a) = \sum_{b \in B} y_b b,$ где $y_{\varphi(a)} = x_a$. Тем самым B — базис для F. Если же E — нулевое, то также F — нулевое, и справедливость утверждения следует из Б.

Д. *Пусть E и F — векторные пространства над одним и тем же полем* К *и E имеет базис A. E изоморфно F тогда и только тогда, когда F обладает базисом B, равномощным A.* Действительно, в случае, когда E—нулевое, справедливость утверждения очевидна. Пусть E — ненулевое. Если F обладает базисом B, равномошным A, то, отнеся каждому вектору $x = \sum_{a \in A} x_a a$ вектор $y = \sum_{a \in A} x_a \varphi(a),$

где φ— взаимно однозначное отображение A на B, получим, очевидно, изоморфизм E на F. Обратно, если φ — изоморфизм E на F, то, согласно Г, В = φ(A)— базис пространства F, и так как φ взаимно однозначно, то B равномощно A.
Е. *Каждый базис А является максимальным репером.* В самом деле, никакое множество $A \cup \{в\}$, где $a \in E\setminus A$, уже не является репером, поскольку $a \in \mathcal{E}_A$. Обратно, *каждый максимальный репер R является базисом.* Действительно, если бы какой-нибудь вектор $a \in E$ не зависел линейно от R (так что, в частности, $a \notin R$), то в силу 5.М $R \cup \{a\}$ было бы репером, в противоречие с максимальностью репера R.
Тем самым *понятия базиса и максимального репера равносильны.*
В заключение докажем следующее предложение.
Лемма о замене. *Если R —репер, R' — его правильная часть и вектор s_0 не зависит линейно от R', то существует вектор $r_0 \in R \setminus R'$ такой, что множество S, получающееся из R путем замены r_0 на s_0, также является репером.*
Доказательство. Из условий леммы видно, что $R \neq \varnothing$ и (в силу 5.Ж) $s_0 \neq 0$. Возможны два случая:
1) s_0 зависит линейно от R, т. е.

$$s_0 = \sum_{r \in R} \sigma_r r. \quad \textbf{(3)}$$

Так как, по предположению, s_0 не зависит линейно от R', то существует вектор $r_0 \in R \setminus R'$ такой, что $\sigma_{r_0} \neq 0$. Но тогда s_0 не зависит линейно от $R\setminus\{r_0\}$, поскольку в противном случае существовало бы равенство вида $s_0 = \sum_{r \in R \setminus \{r_0\}} \sigma'_r r$ и, положив $\sigma'_{r_0} = 0$, мы получили бы для вектора s_0 пространства $\mathcal{E}_R$ разложение $s_0 = \sum_{r \in R} \sigma'_r r$, отличное от (3), что противоречит В.
Применяя 5,Г, М, заключаем, что $S = (R \setminus \{r_0\}) \cup \{s_0\}$— репер.

2) s_0 не зависит линейно от R. В силу 5.М тогда $R \cup (s_0)$—репер и, значит, согласно 5.Г также S — репер.

В случае, когда базис бесконечен, понятие «линейная комбинация» требует уточнения. Это ведёт к двум основным разновидностям определения:

•

Наиболее часто базис выбирают ортогональным и нормированным одновременно, тогда он называется ортонормированным.

В любом векторном пространстве базис можно выбрать различным образом (поменяв направления его векторов или их длины, например).

Обозначения

Обозначение векторов базиса может быть в принципе произвольным. Часто используют какую-нибудь букву с индексом (числовым или совпадающим с названием координатной оси), например:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2$$

или

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y$$

— типичные обозначения базиса двумерного пространства (плоскости),

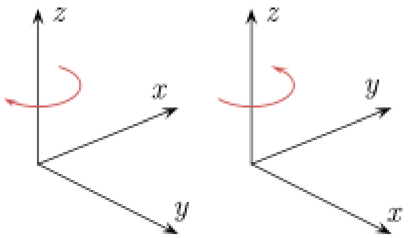
$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$$

или

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y \vec{e}_z$$

— трёхмерного пространства. Для трёхмерного пространства часто по традиции используется и обозначение

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$$



Декартовы координаты в трёхмерном пространстве (*левая* (на рисунке слева) и *правая* (справа) декартовы системы координат (левый и правый базисы). Базисом, соответствующим такой системе координат, является тройка векторов, каждый из которых направлен вдоль какой-то из осей (три базисных вектора изображаются исходящими из общего начала).

Представление какого-то конкретного (любого) вектора $\vec{a}$ пространства в виде линейной комбинации векторов базиса (суммы базисных векторов числовыми коэффициентами), например

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

или

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

называется разложением этого вектора по этому базису.

Числовые коэффициенты (a_x, a_y, a_z) называются коэффициентами разложения, а их набор в целом — представлением (или представителем) вектора в базисе $\vec{e}_x, \vec{e}_y \vec{e}_z$. (Разложение вектора по конкретному базису единственно; разложение одного и того же вектора по разным базисам — разное, то есть получается разный набор конкретных чисел, однако в результате при суммировании — как показано выше — дают один и тот же вектор).

Базис Гамеля

Любые два базиса в линейном пространстве равномощны, так что мощность базиса — величина, независящая от выбора базисных векторов. Она называется *размерностью пространства* (обозначается dimV). Если линейное пространство имеет конечный базис, его размерность конечна и оно называется *конечномерным*, в противном случае его размерность бесконечна, и пространство называется бесконечномерным.

Выбранный базис линейного пространства позволяет ввести координатное представление векторов, чем подготавливается использование аналитических методов.

Линейное отображение из одного линейного пространства в другое однозначно определено, если задано на векторах какого-нибудь базиса. Комбинация этого факта с возможностью координатного представления векторов предопределяет применение матриц для изучения линейных отображений векторных пространств (в первую очередь — конечномерных). При этом многие факты из теории матриц получают наглядное представление и приобретают весьма содержательный смысл, когда они выражены на языке линейных пространств. И выбор базиса при этом служит хоть и вспомогательным, но в то же время ключевым средством.

Примеры

- Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ пространства $\mathbf{R}^n$ образуют базис тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из координатных столбцов этих векторов, не равен 0: $\det\{e_1, e_2, ..., e_n\} \neq 0$.
- В пространстве всех многочленов над полем один из базисов составляют степенные функции:$1, x, x^2, ..., x_n$.
- Понятие базиса используется в бесконечномерном случае, например вещественные числа образуют линейное пространство над рациональными числами и оно имеет континуальный базис Гамеля и, соответственно, континуальную размерность.

Базис Гамеля и разрывная линейная функция

Базис Гамеля может быть использован для построения разрывной вещественной функции, удовлетворяющей условию $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Пусть $\{r_\alpha\}$ — базис Гамеля множества действительных чисел **R** над полем рациональных чисел **Q** . Тогда для каждого $x=k_{\alpha_1}r_{\alpha_1}+\ldots+k_{\alpha_n}r_{\alpha_n}$ (k_i**Q**) положим $f(x)=k_{\alpha_1}+\ldots+k_{\alpha_n}$. Функция $f(x)$ *линейна* по построению, однако не может быть непрерывной, так как принимает только рациональные значения.

Базис Шаудера

Система векторов $\{e_n\}$ топологического векторного пространства L называется **базисом Шаудера** (в честь Шаудера (*англ.*)), если каждый элемент $f\in L$ *разлагается* в *единственный*, сходящийся к f ряд по $\{e_n\}$:

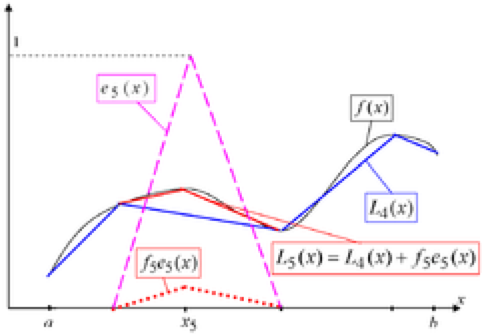
$$f=\sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i,$$

где f_i — числа, называемые коэффициентами разложения вектора f *по* базису $\{e_n\}$.

Чтобы подчеркнуть отличие определения базиса Гамеля для общих линейных пространств (допускаются только конечные суммы) от базиса Шаудера для топологических векторных пространств (допускается разложение в сходящийся ряд), для первого часто используют термин *линейный базис*, оставляя термин *базис* для разложений в ряды. Мощность линейного базиса называют также *линейной размерностью*. В конечномерных пространствах эти определения совпадают из-за конечности базиса. В бесконечномерных пространствах эти определения существенно различаются и линейная размерность может быть строго больше мощности базиса Шаудера.

Например, никакое бесконечномерное Гильбертово пространство не имеет счетного линейного базиса, хотя может иметь счетные базисы Шаудера с разложением в ряд, в том числе, ортонормированные базисы. Все ортонормированные базисы Гильбертовых пространств являются базисами Шаудера, например, множество функций

$\{1,\}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2\pi nx), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2\pi nx) \mid n = 1, 2...\}$ является базисом Шаудера в пространстве $L^2[0,1]$. В более общих банаховых пространствах понятие ортонормированного базиса неприменимо, но часто удаётся построить базисы Шаудера, не использующие ортогональности.



Разложение непрерывной функции по базису Шаудера. Показано построение $L_5(x)$. Красным цветом на графике выделен участок, на котором L_5 отличается от L_4(синяя ломаная).

Проблема базиса

Базисы Шаудера построены для большинства известных примеров банаховых пространств, однако проблема Банаха — Шаудера о существовании базиса Шаудера в каждом сепарабельном банаховом пространстве не поддавалась решению более 50 лет и лишь в 1972 году была решена отрицательно: существуют сепарабельные банаховы пространства без базиса Шаудера (контрпримеры Энфло, Шанковского, Дэви и Фигеля).

Применение в кристаллографии

В векторной алгебре с помощью векторного произведения и смешанного произведения определяется понятие *взаимного базиса* к базису в трёхмерном евклидовом пространстве и используется для доказательства некоторых утверждений, связанных со смешанным произведением и углами между векторами. В кристаллографии взаимный базис называется *кристаллографическим определением базиса*, на основе которого определяется обратная решётка.

4. Мерные векторные пространства

4.1. Конечномерные векторные пространства

А. *В векторном пространстве E, обладающем конечным базисом A, состоящим из n векторов, никакой репер не может содержать более n векторов.* Действительно, пусть $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Так как каждая часть репера есть репер, то достаточно показать, что в E не существует репера, состоящего из $n + 1$ вектора. Допустим, что такой репер R существует. Так как $\{a_1\} \subset A$— репер и, значит, a_1 не зависит от $\varnothing$, то по лемме о замене (при $R' = \varnothing$) существует вектор $r_1 \in R$ такой, что $(R \setminus \{r_1\}) \cup \{a_1\}$— репер.
Далее, $\{a_1, a_2\} \subset A$ —репер и, значит, a_2 не зависит линейно от $\{a_1\}$, поэтому по лемме о замене (при $R' = \{a_1\}$) существует вектор $r_2 \in R$ такой, что $(R \setminus \{r_1, r_2\}) \cup \{a_1, a_2\}$— репер. Продолжая это рассуждение, на n-м шаге получим, что множество $\{r_{n+1}\} \cup \{a_1, ..., a_n\}$, где r_{n+1} — некоторый вектор из R, является репером. Но это невозможно, поскольку r_{n+1} зависит линейно от базиса A.
Б. *В векторном пространстве E, обладающем конечным базисом, все базисы состоят из одинакового числа векторов.* Действительно, пусть A и B — базисы пространства E, причем A конечен и n — число его векторов. Применяя А к базису A и реперу B, заключаем, что B конечен и число его векторов $m \leq n$. Применяя затем А к базису Б и реперу A, получаем, что $n \leq m$. Следовательно, $m = n$.
Определение. Векторное пространство E, обладающее конечным базисом, называют *конечномерным;* число векторов базиса (по доказанному, одинаковое для всех базисов пространства E) называют *размерностью* этого пространства и обозначают $\dim E$. Конечномерные векторные пространства размерности n называют *n-мерными.* Векторные пространства, не обладающие конечным базисом, называют *бесконечномерными.* Если E/F конечномерно, то размерность E/F называют *факторразмерностью* подпространства F и обозначают $\operatorname{codim} F$, а F называют *подпространством конечной факторразмерности.*

Примеры. 1. Нулевое векторное пространство 0-мерно (и обратно, 0-мерное векторное пространство—нулевое). Пространство K^n n-мерно. $\mathbf{C}^n$, рассматриваемое как векторное пространство над $\mathbf{R}$, имеет размерность $2n$, ибо обладает базисом $\{e_1, \ldots, e_n,$

$\sqrt{-1}\, e_1, \ldots, \sqrt{-1}\, e_n\}$.

2. Как устанавливается в теории дифференциальных уравнений, совокупность всех решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = 0,$$

где $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ —непрерывные функции на интервале $I \subset \mathbf{R}$, является n-мерным векторным пространством.

В. *Если* $\mathcal{F} = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ —*конечное семейство элементов векторного пространства, то* $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ *конечномерно, причем его размерность равна числу m элементов максимального линейно независимого подсемейства* $\mathcal{F}'$ *семейства* $\mathcal{F}$. Действительно, без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{F}' = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$. В силу 5.М каждый из векторов $x_{m+1}, \ldots, x_n$ (если $m < n$) является линейной комбинацией векторов семейства $\mathcal{F}'$; поэтому $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{F}'}$, откуда $\mathcal{E}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{F}'}$ и, следовательно, $\mathcal{E}_{\mathcal{F}} = \mathcal{E}_{\mathcal{F}'}$. Но согласно 6.А $\{x_1, \ldots, x_m)$—базис пространства $\mathcal{E}_{\mathcal{F}'}$.

m называется *рангом* семейства $\mathcal{F}$ и обозначается rang $\mathcal{F}$. Таким образом, $\dim \mathcal{E}_{\mathcal{F}} = \operatorname{rang} \mathcal{F}$.

Г. В силу 6.Д *всякое векторное пространство, изоморфное n-мерному, n-мерно, и все n-мерные пространства над одним и тем же полем* К *изоморфны.* В частности, *все n-мерные векторные пространства над* К *изоморфны* K^n (см. пример 1).

Д. В силу А *всякое векторное пространство, содержащее репер, образованный бесконечным множеством векторов, бесконечномерно.* В частности, пространства $K^{(A)}$ с бесконечными множествами индексов А бесконечномерны. Из сказанного при рассмотрении примера 3 п° 6 следует, что ножество $\{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\}$ является репером в любом содержащем его векторном пространстве вещественных или комплексных функций, определенных на бесконечном множестве точек числовой прямой. Поэтому все такие пространства, и в частности пространства $C^n(I)$ $(n \geqslant 0)$ и $C^я\{I)$, бесконечномерны. То же верно и для пространств $C_0^\infty(I)$; действительно, $C_0^\infty(\mathbf{R})$ содержит репер

$\left(e^{-t^2} t^n\right)_{n \geqslant 0}$.

$C_0^\infty(I)$ с конечным интервалом *I*, имеющим начало *a* и конец *b,* — репер

$$\left(e^{-\left(\frac{1}{(t-a)^2}+\frac{1}{(b-t)^2}\right)}t^n\right)_{n\geqslant 0},$$

наконец, $C_0^\infty(I)$ с полубесконечным интервалом, имеюшим конец или начало *a,*—репер

$$\left(e^{-\left(\frac{1}{(t-a)^2}+t^2\right)}t^n\right)_{n\geqslant 0}.$$

Предоставляем читателю установить бесконечномерность пространств l^p и L^p (I).

Е. *Однородные прямые можно охарактеризовать как одномерные подпространства*. Поэтому можно сформулировать следующее : *для того чтобы подпространство H векторного пространства E было собственным гиперподпространством, необходимо и доетаточно, чтобы E/H было одномерно; это* означают, что *E/H одномерно тогда и только тогда, когда H обладает в E одномерным дополнением.* Последнее предложение обобщается следующим образом:

Ж. *E/F n-мерно тогда и только тогда, когда F обладает в E n-мерным дополнением; при этом, всякое подпространство, дополнительное к F, n-мерно.* Действительно, если $E = F \oplus G$, где G *n*-мерно, то *E/F,* будучи изоморфно *G*, также *n*-мерно; и по той же причине тогда всякое подпространство, дополнительное к *F, n*-мерно. Обратно, если *E/F n*-мерно, то существование дополнительного к *F* (тоже *n*-мерного) подпространства можно установить, не опираясь на общие рассмотрения, проведенные ранее. В самом деле, пусть $\{X_1, \ldots, X_n\}$, где $X_k = F + x_k$ $(k=1.....n)$, —базис пространства *E/F.* Так как *{F}* — нуль этого пространства, то из равенства

$$\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n = F + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \quad \textbf{(1)}$$

следует, что если $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in F$ (в частности, если $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$), то $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Таким образом, $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — репер и $F \cap \mathscr{E}_A = \{0\}$. С другой стороны, так как любой класс $F + x \in E/F$ представим в виде (1), то всякий вектор $x \in E$ содержится в $F + \mathscr{E}_A$, т. е. $E = F + \mathscr{E}_A$. Тем самым $E = F \oplus \mathscr{E}_A$, где $\mathscr{E}_A$ *n*-мерно.

3. *В n-мерном векторном пространстве всякий репер, состоящий из n-векторсв, является базисом.* Действительно, в силу А он максимален, и остается применить 6.Е.

И. Из А следует, что в конечномерном векторном пространстве Е всякое множество $\mathfrak{R}$ реперов, упорядоченное по возрастанию, содержит максимальный репер R_{max}, причем число его векторов $\overline{\overline{R}}_{max} \leqslant \dim E$ ($\overline{\overline{R}}$ означает мощность множества R.). В самом деле, этим свойством обладает всякий репер из $\mathfrak{R}$, состоящий из наибольшего возможного в $\mathfrak{R}$ числа векторов. Отметим некоторые следствия этого замечания.

1° *Всякое подпространство F конечномерного векторного пространства E конечномерно, причем* $\dim F \leqslant \dim E$.
Действительно, нужно лишь принять за $\mathfrak{R}$ множество всех содержащихся в *F* реперов; тогда R_{max}, будет служить для *F* базисом, причем $\dim F = \overline{\overline{R}}_{max} \leqslant \dim E$.
Из 3 следует, что *если* dim *F* = dim *E, то F = E.*
2° *Всякий репер R в конечномерном векторном пространстве E содержится в некотором базисе.* Действительно, нужно лишь принять за $\mathfrak{R}$ множество всех реперов в *E,* содержащих *R;* тогда R_{max} будет, очевидно, максимальным репером в *E* и тем самым базисом. В частности
3° *Всякий базис подпространства F конечномерного векторного пространства E содержится в базисе всего пространства.*
К. Следствие 1 теоремы 1 в случае конечномерного *E* допускает следуюшее доказательство (не опирающееся на принцип максимального элемента). Пусть A_1—базис подпространства E_1 и *A* — содержащий его базис пространства *E* . Так как $A_2 = A \setminus A_1$, — репер , то в силу 5.К $E = E_1 \oplus E_2$, где $E_2 = \mathfrak{E}_{A_2}$.
Л. *Если* E_1 *и* E_2 *— взаимно дополнительные подпространства конечномерного векторного пространства E, то*

$$\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E. \quad \textbf{(2)}$$

Действительно, пусть A_1, A_2 — базисы подпространств E_1, E_2 и $A = A_1 \cup A_2$. Покажем, что *A*—базис пространства *E;* так как $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то отсюда будет следовать (2). Но согласно 5.Л *A* — репер. С другой стороны, $E = E_1 + E_2 = \mathfrak{E}_{A_1} + \mathfrak{E}_{A_2} \subset \mathfrak{E}_A$ и потому $E = \mathfrak{E}_A$. Тем самым утверждение доказано.
М. Следствие 4 теоремы 1 в случае конечномерного *E* допускает следующее усиление (притом доказываемое без применения принципа максимального элемента): *всякое подпространство F n-мерного векторного пространства E, имеющее размерность m < n, является пересечением n — m собственных гиперподпространств (*и, значит,

всякое параллельное ему аффинное многообразие — пересечением n — m собственных гиперплоскостей). Действительно, пусть B— базис подпространства F и $A = B \cup \{a_{m+1}, \ldots, a_n\}$—содержащий его базис пространства E. Положим $A_k = A \setminus \{a_k\}$ и $H_k = \mathcal{E}_{A_k}$ $(k = m+1, \ldots, n)$. Так как,

$$E = H_k \oplus \mathcal{E}_{a_k}$$

то H_k — собственные гиперподпространства. При этом

$$F = \bigcap_{k=m+1}^{n} H_k,$$

ибо векторы подпространства F—это те и толькоте векторы из E, в разложении которых по базису A коэффициенты при векторах $a_{m+1}, \ldots, a_n$ равны нулю.

Н. Из К, Ж и Л следует, что *факторпространство E/F конечномерного векторного пространства E конечномерно, причем*

$$\dim F + \dim (E/F) = \dim F + \operatorname{codim} F = \dim E. \quad \textbf{(3)}$$

В соединении с Е это показывает, в частности, что *собственные гиперподпространства n-мерного векторного пространства можно охарактеризовать как его (n—* 1)*-мерные подпространства.*

4.2. Бесконечномерные векторные пространства

4.2.1. Специфика бесконечномерной теории

Выше были рассмотрены основные понятия и факты теории конечномерных пространств и функций, заданных на этих пространствах. Это позволит нам наиболее просто перейти уже непосредственно к изучению бесконечномерных пространств и функций, заданных на них. Однако прежде всего мы перечислим те факты, доказательство которых не зависит от размерности и которые, следовательно, справедливы и в бесконечномерном случае.

Кроме того, уже в начале нам бы хотелось обратить внимание читателя на специфику бесконечномерного случая, на особенности, отличающие бесконечномерную теорию от конечномерной.

Доказательство неравенства Коши — Буняковского использовало только аксиомы скалярного произведения и, следовательно, переносится без изменений на бесконечномерный случай.

Справедливость неравенства Коши — Буняковского позволила в определить понятия нормы вектора и угла между векторами. Исходя нз вышесказанного, мы заключаем, что эта геометрические понятия естественным образом переносятся и на случай бесконечномерных пространств.

Непрерывность скалярного произведения является также следствием неравенства Коши— Б\няковского, и, следовательно, этот факг справедлив в теории бесконечномерных евклидовых пространств.

Наличие скалярного произведения позволяет ввести понятие сходимости в произвольном евклидовом пространстве.

Мы отмечали, что любое конечномерное евклидово пространство является полным метрическим пространством, и этот факт является существенным обстоятельством в конечномерном случае. В бесконечномерном случае оказывается возможным, что последовательность векторов $\{x_n\}$ такова, что $\| x_n - x_m \| \to 0$ при $n, m \to\infty$, и тем не менее нет такого вектора x, для которого $\| x_n - x \|\to 0$. Для того чтобы исключить эту возможность, в бесконечномерном линейном евклидовом пространстве приходится требовать условие полноты. Различными становятся в бесконечномерном случае понятия поточечной и равномерной сходимостей последовательности операторов. Однако в полном евклидовом пространстве между этими понятиями по-прежнему существует тесная связь, существо которой раскрывает один из основных принципов функционального анализа (принцип равномерной ограниченности) .

Легко ввести понятие бесконечной линейно независимой системы векторов.

Определение. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ векторов линейного пространства называется линейно независимой, если линейно независима любая ее конечная подсистема векторов.

В дальнейшем для простоты изложения в бесконечномерном случае потребуем, чтобы линейное евклидово пространство было сепарабельным, т. е. чтобы в нем имелась счетная система векторов, обладающая тем свойством, что любой вектор нашего пространства может быть сколь угодно точно аппроксимирован по норме векторами этой системы.

Поскольку введено общее понятие сходимости в нормированном пространстве, то имеет смысл говорить о бесконечном базисе евклидова пространства.

Определение. Линейно независимая система векторов $e_1, e_2, \ldots$ называется базисом евклидова пространства R, если любой вектор $x \in R$ однозначно представим в виде $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$, где ряд справа понимается как предел последовательности частичных сумм

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i$$

при $N\to\infty$ в смысле сходимости, определеной в данном пространстве.
Теорема о независимости числа элементов базиса от выбора базиса в бесконечномерном случае может бьпь переформулирована следующим образом.
Теорема. Любой базис сепарабельного бесконечномерного евклидова пространства состоит из счетного числа элементов.
Специфика бесконечномерного случая начинает появляться при рассмотрении подпространств, функционалов и операторов.
Как мы знаем, в конечномерном евклидовом пространстве любое линейное многообразие замкнуто (в смысле определения замкнутого множества в евклидовом пространстве). В бесконечномерном случае этот факт, вообще говоря, несправедлив (соответствующий пример будет дан ниже). Естественные обобщения утверждений, сделанных в конечномерном случае, получаются, если потребовать условие замкнутости. В связи с этим дадим следующее определение.
Определение. Подпространством R_1 бесконечномерного евклидова пространства R называется линейное многообразие (т. е. если $x, y\in R_1$, то для любых α и β $\alpha x+\beta y \in R_1$), которое является замкнутым, если его рассматривать как подмножество евклидова пространства R.
При таком определении подпространства останется справедливой теорема об ортогональном разложении полного пространства R на два пространства —R_1 и $R^{\perp}{}_1$. Напомним, что ортогональным дополнением к произвольному множеству $M \in R$ называется множество
$M^{\perp} = \{x \in R : (x, y) = 0$ для любого вектора $y \in M\}$. Отметим, что операция построения ортогонального дополнения дает способ получения подпространств в евклидовом пространстве R. В самом деле, пусть M — произвольное подмножество R. Из свойств скалярного произведения следует, что $M^{\perp}$ —линейное многообразие, поскольку если x_1 и $x_2 \in M^{\perp}$, то для любого y из M имеем
$(\alpha x_1+\beta x_2, y)=\alpha (x_1, y)+\beta(x_2, y)=0$, т. е. $\alpha x_1+\beta x_2 \in M^{\perp}$.
Но из непрерывности скалярного произведения следует, что $M^{\perp}$ замкнуто. В самом деле, пусть последовательпость $\{x_n\}$ векторов из $M^{\perp}$ сходится по норме к некоторому вектору x из R. Для доказательства замкнутости $M^{\perp}$ достаточно показать, что $x \in M^{\perp}$. Так как для любого вектора y из M имеем

$$(x, y) = (\lim_{n\to\infty} x_n, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y)=0,$$

то это и доказывает утверждение замкнутости $M^{\perp}$.
В конечномерном случае было доказано, что каждый линейный оператор является непрерывным. Как уже отмечалось, это утверждение становится, вообще говоря, неверным в пространствах бесконечной размерности. Для того чтобы сохранить справедливыми формулировки основных результатов конечномерной теории для операторов, необходимо потребовать условие ограниченности линейного оператора (функционала) (в бесконечномерном евклидовом пространстве понятия непрерывного и ограниченного операторов так же, как и в конечномерном, эквивалентны, поскольку доказательство соответствующего факта не зависит от размерности). При этом ограничении остается в силе утверждение об общем виде линейного функционала в евклидовом пространстве, которое утверждает, что в евклидовом пространстве любой непрерывный линейный функционал единственным образом представим в виде (x, x_0).

Утверждение. Норма функционала $f_{x_0}(y)=(y, x_0)$ равна норме вектора x_0.

Используя теорему об общем виде линейного функционала в полном евклидовом пространстве для любого ограниченного линейного оператора A вводится понятие сопряженного оператора A^*.

Утверждение. Для любого ограниченного оператора A $\|A\| = \|A^*\|$.

Со значительными трудностями приходится сталкиваться при изучении в бесконечномерном евклидовом пространстве понятия обратимости линейного оператора. Становится неверным утверждение о том, что линейный оператор A обратим тогда и только тогда, когда из условия $A(x)=0$ следует, что $x=0$. Более того, даже если мы знаем, что обратный оператор существует, нетривиальным становится вопрос о его непрерывности (этот вопрос не возникает в конечномерном случае, поскольку там каждый линейный оператор непрерывен).

Утверждение. Если операторы A и A^* обратимы, причем A^{-1} и $(A^*)^{-1}$ ограничены, то $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Наконец, важным моментом при изучении линейных операторов и функционалов в бесконечномерном случае является вопрос о том, можно ли определенный не на всем пространстве оператор или функционал продолжить на все пространство с сохранением его нормы Оказывается, что линейный ограниченный функционал, определенный на любом линейном многообразии (даже одномерном), можно, и при том сохранив его норму, продолжить на все пространство, т. е. определить его на каждом векторе бесконечномерного пространства.

4.2.2. Гильбертово пространство

Ниже мы познакомимся с понятием гильбертова пространства, которое, как мы уже отмечали, является обобщением понятия конечномерного евклидового пространства. Отметим, что многие факты, уже доказанные ранее (теорема Пифагора, правило параллелограмма, теорема косинусов и т. д.), связанные со свойствами скалярного произведения, остаются справедливыми и в ситуациях более общих, чем конечномерные евклидовы пространства.

Сейчас мы изучим некоторые дополнительные факты, присущие бесконечномерным пространствам. Прежде чем перейти к точным математическим формулировкам, отметим, что возникновение понятия гильбертова пространства связано не только с логикой внутреннего развития математической теории (обобщение конечномерного случая). Как и большинство глубоких математических теорий, введение этого понятия диктовала практика, а именно теория интегральных уравнений, описывающих разнообразные реальные процессы. Более того, теория гильбертовых пространств и операторов в них оказалась столь замечательной, точно отражающей реально существующие связи природы математической моделью, что явилась источником возникновения новых открытий в физике. Создание этой теории было названо «одним из самых замечательных предвидений в истории математической физики». Работы Гильберта, основателя этой теории, появились до работ Гейзенберга, Шредингера и других авторов, посвященных квантовой механике — разделу науки, в котором теория операторов в гильбертовом пространстве играет исключительную роль.

Перейдем теперь к точным математическим формулировкам.

Определение. Гильбертовым пространством называется бесконечномерное евклидово пространство, полное относительно нормы, порожденной введенным в этом пространстве скалярным произведением.

Определение. Систему векторов гильбертова пространства H назовем полной в H, если она порождает все пространство, т. е. если произвольный элемент H может быть сколь угодно точно приближен по норме элементами этой системы или их линейными комбинациями

В дальнейшем для простоты изложения будут рассматриваться только сепарабельные гильбертовы пространства, хотя это ограничение часто не является существенным, и почти все основные факты теории гильбертовых пространств могут быть перенесены и на случай несепарабельных гильбертовых пространств.

Применяя процесс ортогонализации к произвольной полной системе векторов, мы получим полную ортонормированную систему.
Легко показать, что если данная ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ полна, то в H не существует ни одного вектора, не равного нулю, ортогонального всем векторам системы.
Действительно, допустим, что для некоторого вектора $g \neq 0$ выполнены равенства $(g, g_k) = 0$, $k=1, 2, \ldots$ В силу свойств скалярного произведения и непрерывности этой операции мы заключаем, что ортогональное дополнение к вектору g содержит все векторы φ_k, все линейные комбинации этих векторов и все векторы, которые могут быть сколь угодно точно приближены по норме линейными комбинациями этих векторов, т. е. все пространство H. В частности, $(g, g)=0$, откуда $g=0$, что противоречит допущению.
Оказывается, что справедливо и противоположное утверждение, на доказательстве которого мы останавливаться не будем и которое заключается в том, что если ортонормированная система не полна, то существует ненулевой вектор h, ортогональный всем векторам этой системы.
В качестве примера гильбертова пространства рассмотрим пространство l_2, векторами которого являются последовательности чисел $(x_1, x_2, \ldots)$, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, где операции сложения и умножения на числа определяются покомпонентно, а скалярное произведение векторов $x=(x_1, x_2, \ldots)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots)$ — по формуле $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$
Можно показать, что в этом случае имеют место все свойства скалярного произведения.
Пространство l_2 является сепарабельным гильбертовым пространством. В качестве счетного всюду плотного множества в l_2 можно взять, например, совокупность всех последовательностей с конечным числом отличных от нуля рациональных членов.
Проиллюстрируем на примере l_2 специфические особенности бесконечномерных пространств.
Рассмотрим в пространстве l_2 совокупность всех векторов, у которых, начиная с некоторого номера, все компоненты равны нулю. Совокупность таких векторов образует, очевидно, линейное многообразие, не совпадающее со всем пространством l_2. С другой стороны, это многообразие не является замкнутым, поскольку, очевидно, любой элемент пространства l_2 может быть сколь угодно точно приближен по норме элементами данного линейного многообразия.

Рассмотрим в пространстве l_2 оператор, который переводит произвольный вектор $x=(x_1, x_2, ...)$ в вектор $y=(0, x_1, x_2, ...)$. Очевидно, что это линейный ограниченный оператор. Легко видеть, что ядро этого оператора есть нулевое подпространство, но в отличие от конечномерного случая этот оператор тем не менее не является обратимым, поскольку при этом отображении не существует, например, никакого вектора x, переходящего в вектор (1,0,0, ...), т. е. образ этого оператора не совпадает со всем пространством l_2.

Определим в пространстве l_2 оператор A по формуле
$A\,[(x_1, x_2, \ldots)] = (x_1, 2x_2, \ldots, nx_n, \ldots)$. Оператор A действует из l_2 в l_2 и определен не на всем пространстве, а только на линейном многообразии векторов x, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nx_n)^2 < \infty.$$

Оператор A линеен, но не непрерывен. Например, последовательность $e_1=(1, 0, \ldots)$,
$e_2=\left(0, \frac{1}{2}, 0, \ldots\right), \ldots, e_n=\left(0, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ сходится к нулю в метрике l_2, а последовательность $Ae_1=(1, 0, \ldots), \ldots, Ae_n =$
$=(0, \ldots 1, \ldots)$ к нулю не сходится.

Рассмотрим теперь несколько подробнее понятие базиса в гильбертовом пространстве.

Очень важным вопросом при изучении полных систем $\{e_i\}$ является вопрос о том, образует ли данная система базис пространства, т. е. можно ли любой элемент x из пространства представить в виде

$$x=\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$$

и притом однозначно (здесь ξ_i числа). Если пространство имеет базис, то оно, очевидно, сепарабельно. (В качестве счетного всюду плотного множества можно выбрать, например. совокупность всех векторов с конечным числом отличных от нуля рациональных координат.)

Оказывается, что в гильбертовом пространстве верно и обратное утверждение, что во всяком сепарабельном гильбертовом пространстве существует базис. Более того, в этом случае базисом является любая полная ортонорлгированная система. Коэффициенты ξ_h при этом легко определяются, поскольку $\{e_i\}$ — ортонормированная система. В самом деле,

$$x=\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i .$$ Тогда

$$(x, e_k) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \xi_i, e_i\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, e_k\right) = \xi_k$$

Кроме того, для коэффициентов ξ_i оказывается справедливо равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 ,$$

которое является обобщением теоремы Пифагора на случай бесконечной ортонормированной системы векторов и которое носит название равенства Парсеваля.

Одним из факторов физической реальности является свойство устойчивости, заключающееся в том, что многие характеристики, присущие некоторому данному объекту, оказываются справедливыми и для объектов, в каком-то смысле несильно отличающихся от исходного. Поскольку большинство математических моделей являются идеализацией реально существующих процессов, то свойство устойчивости присуще и многим математическим объектам. По этой причине в математике широкое распространение получили разнообразные методы теории возмущений, суть которых заключается в том, что изучается некоторая более простая для исследования модельная задача, затем определяется класс в каком-то смысле близких (возмущенных) задач и по характеристикам модельной задачи делаются выводы о характеристиках возмущенных задач. Кстати, этот прием позволяет изучать реальные физические процессы, которые можно рассматривать как некоторые «возмущения» идеальных моделей. Сейчас мы докажем теорему, являющуюся иллюстрацией сказанных нами слов. При доказательстве этой теоремы широко используются также методы теории гильбертовых пространств, развитые выше.

Определение. Системы $f_1, f_2, \ldots$ и $g_1, g_2, \ldots$ называются квадратично близкими, если $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - g_n\|^2 < 1$

Теорема. Если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве *H*, а $f_1, f_2, \ldots$ — ортонормированная система векторов, квадратично близкая к базису $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, то $f_1, f_2 \ldots$ также ортонормированный базис пространства *H*.

Доказательство. Предположим, что система $f_1, f_2, \ldots$ не базис, следовательно, она не полна. Тогда существует ненулевой вектор *h,* ортогональный всем f_i. Разложим вектор *h* по базису $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Поскольку $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — базис, то справедливо равенство Парсеваля:

$$\|h\|^2 = \sum_{n=1} (h, \varphi_n)^2$$

В силу ортогональности вектора *h* всем f_i, неравенства Коши — Буняковского и условия квадратичной близости систем $f_1, f_2, \ldots$ и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ имеем $\|h\|^2 = \sum_{n=1} (h, \varphi_n)^2 = \sum_{n=1} (h, \varphi_n - f_n)^2 \leqslant$

$$\leqslant \|h\|^2 \sum_{n=1} \|\varphi_n - f_n\|^2 < \|h\|^2.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

В произвольном нормированном пространстве можно определить расстояние между его элементами по формуле $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Непосредственно из определения нормированного пространства следует, что так введенная функция ρ *(x, y)* сохраняет свойства обычного расстояния в трехмерном пространстве, о которых говорилось выше. Понятно, что определения открытых, замкнутых множеств, базиса, полноты системы векторов, сепарабельности, фундаментальности последовательности элементов, данные применительно к евклидовым пространствам, имеют смысл и в нормированном пространстве. В случае бесконечномерного нормированного пространства для получения наиболее глубоких результатов также приходится требовать условия полноты.

Определение. Бесконечномерное нормированное пространство, полное в смысле метрики, порожденной нормой этого пространства, называется банаховым пространством. (Пространство названо в честь польского математика С. Банаха, впервые начавшего систематически изучать такие пространства.)

В качестве примера бесконечномерного банахова пространства рассмотрим пространство *C [a,, b]* непрерывных на отрезке *[a, b]* функций с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число, где расстояние между двумя элементами определяется по формуле

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|,$$

а норма, следовательно, по формуле

$$\|x(t)\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

Пространство *C[a,, b]* не является гильбертовым пространством, поскольку, как легко видеть, в нем не выполняется правило параллелограмма, например, для функций sin *t* и cos *t*. (Проверьте это!) Как уже говорилось определения базиса, полноты системы, данные применительно к гильбертовым пространствам, имеют смысл и в банаховом пространстве. В случае банахова пространства значительно усложняется вопрос о существовании базиса. Хотя для всех основных сепарабельных банаховых пространств базисы построены, вопрос о том, существует ли базис в произвольном сепарабельном банаховом пространстве, оказался сложным и был решен отрицательно.

4.2.3. Свойства полных пространств

Ниже мы обсудим некоторые свойства, присущие гильбертовым и банаховым пространствам и связанные с полнотой этих пространств. Отметим прежде всего так называемый принцип вложенных шаров — утверждение, обобщающее известную лемму из анализа о вложенных отрезках.

Теорема (принцип вложенных шаров). Всякая последовательность замкнутых, вложеннньгх друг в друга шаров в банаховом (гильбертовом) пространстве, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.

Мы не будем останавливаться на подробном доказательстве этого утверждения, отметим только, что основным этапом при доказательстве этой теоремы является проверка фундаментальности последовательности x_n — центров вложенных шаров. Тогда в силу полноты пространства последовательность x_n сходится к некоторому элементу x. Отсюда, используя замкнутость шаров, уже нетрудно заключить, что именно этот элемент x принадлежит всем шарам, фигурирующим в условии теоремы.

Значительное место при математических исследованиях занимают различного рода теоремы существования. При изучении различных физических процессов часто существование того или иного изучаемого процесса является очевидным фактом. При изучении же математических моделей различных процессов следует учитывать, что математическая модель является только приближенной копией реально существующего объекта. При этом строгое математическое доказательство теоремы существования является лишним доказательством, что данной математической модели можно «доверять», что данная математическая идеализация является правильной. Мощным методом доказательства теорем существования являются различные теоремы о неподвижных точках некоторых отображений. С одной из простейших теорем такого рода мы сейчас познакомимся.

Определение. Отображение *g (x)* банахова (гильбертова) пространства *R* в себя называется сжимающим, если существует такое число 0 <α< 1, что $\rho(g(x), g(x)) \leqslant \alpha\rho(x, y)$ для любых *x* и *y* из *R*.

Теорема (принцип сжимающих отображений). Всякое сжимающее отображение банахова (гильбертова) пространства *R* в себя имеет, и притом только одну, неподвижную точку, т. е. такую точку $x \in R$, что $g(x) = x$

Доказательство. Пусть x_0 — некоторая точка из *R*. Определим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по правилу $x_1 = g(x_0), \quad x_2 = g(x_1), \ldots$.
Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в *R*. Действительно, если *m>n,* то

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(g(x_{n-1}), g(x_{m-1})) \leqslant \alpha\rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \leqslant \ldots$$
$$\leqslant \alpha^n \rho(x_0, x_{n-m}) \leqslant \alpha^n \{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots +$$
$$+ \rho(x_{n-m-1}, x_{n-m}) \leqslant \alpha^n \rho(x_0, x_1)\{1 + \alpha + \ldots + \alpha^{n-m-1}\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\alpha^n \rho(x_0, x_1)}{1-\alpha},$$

где 0 < α < 1. Таким образом, $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при *n, m*→∞. В силу полноты *R* существует $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Поскольку отображение *g* сжимающее, то оно непрерывно. Следовательно, имеем

$$g(x) = g(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Таким образом, неподвижная точка существует. Докажем ее единственность. Если g *(x)=x* и g *(y)=y,* то $\rho(x, y) \leqslant \alpha\rho(x, y)$, т. е ρ *(x, y*)=0, знечит, *x=y.*

Отметим, что доказанный принцип сжимающих отображений приводит не только к существованию неподвижной точки, но и дает конкретный метод приближенного нахождения этой точки. Это обстоятельство часто применяется на практике, и процедура нахождения неподвижной точки, использующая принцип сжимающих отображений, носит название метода последовательных приближений. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 1. Нахождение корней уравнений.

Пусть $\varphi(t)$, $-\infty < t < +\infty$ — действительная функция, удовлетворяющая условию Липшица $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant$ $\leqslant \theta\, |t_1 - t_2|$, $0 < \theta < 1$ и отображающая вещественную прямую *R* в себя. Определив для любых *x* и *y* из *R* расстояние по формуле

$$\rho(x, y) = |x - y|,$$

получим полное (в силу критерия Коши) нормированное пространство и сжимающее отображение в нем. Значит, числовая последовательность $t_0,\ t_1=\varphi(t_0),\ \ldots$ сходится к единственному корню уравнения $t=\varphi(t)$, где t_0 — любое число из R.

Пример 2. Существование и единственность решения интегрального уравнения.

Пусть задано интегральное уравнение

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi))\,d\xi,$$

где функция $f(t, y)$ непрерывна на множестве $a\le t\le b$, $-\infty<y<+\infty$ и удовлетворяет условию Липшица по y, т. е.

$|f(t, y')-f(t, y'')|\leqslant K|y'-y''|$, а точка t_0 — внутренняя точка отрезка $[a,b]$. Введем банахово пространство С $[a, b]$ и определим отображение в нем по правилу

$g(y(t))=y_0+\int_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi))\,d\xi$. Тогда легко видеть

что нахождение решения интегрального уравнения сводится к нахождению неподвижной точки этого отображения. Поскольку из условия Липшица следует, что

$$|f(t, y_1)-f(t, y_2)|\leqslant K|y_1-y_2|\leqslant K\rho(y_1, y_2),$$

где $\rho(y_1, y_2)$ — метрика в $C[a, b]$, то отображение сжимающее, если отрезок $[a, b]$ достаточно мал, так что $K(b-a)=$ $=\Theta<1$.

4.3. Базисы и размерность произвольных векторных пространств

Мы покажем теперь, что основные результаты приведенные ранее распространяются на произвольные векторные пространства.

Теорема. *Всякое векторное пространство E обладает базисом, причем каждый репер содержится в каком-нибудь базисе.*

Доказательство. Так как линейная независимость множества есть свойство конечного характера, то по теореме Тьюки — Тайхмюллера каждый репер из E содержится в некотором максимальном репере или, что то же — базисе. Поскольку E во всяком случае содержит репер $\varnothing$, теорема тем самым полностью доказана.

Следствие. *Всякий базис подпространства F векторного пространства E содержится в базисе всего пространства.*

Доказательство. Всякий базис подпространства F является репером в E.

Теорема . *Мощность репера R в векторном пространстве E не может быть больше мощности базиса A этого пространства.*

Доказательство. При $R = \varnothing$ справедливость утверждения теоремы очевидна. Пусть $R \neq \varnothing$. Назовем замещением всякое взаимно однозначное отображение φ некоторой части R_φ репера R в A, обладающее тем свойством, что множество S_φ, получающееся из R путем замены R_φ на $A_\varphi = \varphi(R_\varphi)$, является репером. Пусть Φ — множество всех замещений; в силу леммы о замене, примененной к случаю $R' = \varnothing$, оно не пусто. Множество Φ, упорядоченное отношением продолжения отображений (т. е. отношением $\varphi \leq \psi$, означающим по определению, что $R_\varphi \subset R_\psi$ и ψсовпадает с ψ на R_φ), индуктивно. А именно, верхней гранью цепи Ψ в Φ служит наименьшее общее продолжение ψ всех $\varphi \in W$, т. е. отображение множества

$$R_\psi = \bigcup_{\varphi \in \Psi} R_\varphi$$

в A, совпадающее на каждом R_φ $(\varphi \in \Psi)$ с φ. В самом деле, так как Ψ— цепь, то ψ этим однозначно определено, и $S_\psi = (R \setminus R_\psi) \cup A_\psi$ есть репер, как объединение цепи реперов $(R \setminus R_\psi) \cup A_\varphi (\subset (R \setminus R_\varphi) \cup A_\varphi$. В силу принципа максимального элемента в Φ содержится хотя бы одно максимальное замещение ω. Покажем, что $R_\omega = R$. Предположим, что $R_\omega \leq R$. Тогда и $A_\omega \leq A$, ибо иначе $S_\omega = (R \setminus R_\omega) \cup A_\omega$, было бы репером, содержащим A как правильную часть, что невозможно, поскольку A — базис. Пусть $a \in A \setminus A_\omega$. Так как a не зависит линейно от A_ω, то, в силу леммы о замене, существует вектор $r \in R \setminus R_\omega$ такой, что $(S_\omega \setminus \{r\}) \cup \{a\}$ является репером. Но тогда отображение ω' множества $R_{\omega'} = R_\omega \cup \{r\}$ в A, совпадающее на R_ω с ω и переводящее r в a, есть замещение, поскольку $S_{\omega'} = (S_\omega \setminus \{r\}) \cup \{a\}$. Однако это противоречит максимальности замещения ω. Итак, $R_\omega = R$ и тем самым ω — взаимно однозначное отображение R в A, откуда $\overline{\overline{R}} \leqslant \overline{\overline{A}}$.

Теорема. *Все базисы векторного пространства E равномощны.*

Доказательство. Пусть A к B — базисы пространства E. Применяя предыдущую теорему к реперу A и базису B, а затем к реперу B и, базису A, заключаем, что $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ и $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$. Но тогда $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

Определение . Мощность базисов векторного пространства E называют *размерностью* этого пространства и обозначают $\dim E$. Размерность факторпространства E/F называют также *факторразмерностью* подпространства F и обозначают $\operatorname{codim} F$.

Размерностью (факторразмерностыо) аффинного многообразия называют размерность (факторразмерность) параллельного ему подпространства.
Так, $\dim K^{(\alpha)} = \alpha$. Прямые — это одномерные аффинные многообразия, а собственные гиперплоскости—аффинные многообразия факторразмерности 1.
А. Предыдущие два определения согласуются; а именно, для конечномерных векторных пространств и для подпространств, факторпространство по которым конечномерно, размерности (факторразмерности), введенные этими определениями, совпадают, бесконечномерные же векторные пространства — это векторные пространства бесконечной размерности.
Б. Из предыдущих теорем следует, что можно сформулировать утверждение следующим образом: *векторные пространства над одним и тем же полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.* В частности, *всякое векторное пространство E над* К *изоморфно* $K^{(\dim E)}$.
В. *Если* E_1 *и* E_2 *— взаимно дополнительные подпространства векторного пространства E, то*

$$\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E.$$

Действительно, доказательство этой формулы, данное ранее, годится и для бесконечномерного случая.
Г. Точно так же и формула

$$\dim F + \operatorname{codim} F = \dim E.$$

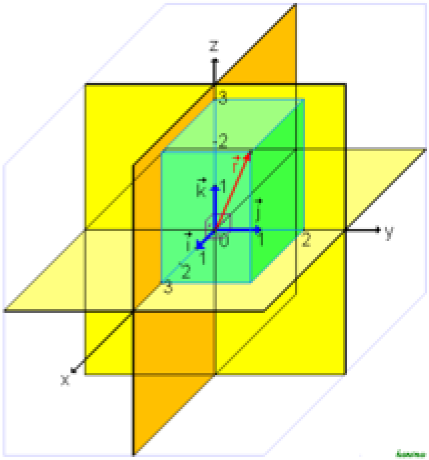
сохраняет силу для произвольных векторных пространств.

4.4. Ортогональный (ортонормированный) базис

Ортогональный (ортонормированный) базис — ортогональная (ортонормированная) система элементов линейного пространства со скалярным произведением, обладающая свойством полноты.

Конечномерный случай

Ортогональный базис — базис, составленный из попарно ортогональных векторов.



Ортонормированный базис в 3-мерном евклидовом пространстве

Ортонормированный базис удовлетворяет еще и условию единичности нормы всех его элементов. То есть это ортогональный базис с нормированными элементами.

Последнее удобно записывается при помощи символа Кронекера:

$$(e_i, e_j)=\delta_{ij}$$

то есть скалярное произведение каждой пары базисных векторов равно нулю, когда они не совпадают ($i\neq j$), и равно единице при совпадающем индексе, то есть когда берется скалярное произведение любого базисного вектора с самим собой.

Очень многое записывается в ортогональном базисе гораздо проще, чем в произвольном, поэтому очень часто стараются использовать именно такие базисы, если только это возможно или использование какого-то специального неортогонального базиса не дает особых специальных удобств. Или если не отказываются от него в пользу базиса общего вида из соображений общности.

Ортонормированный базис является самодуальным (дуальный ему базис совпадает с ним самим). Поэтому в нём можно не делать различия между верхними и нижними индексами, и пользоваться, скажем, только нижними (как обычно и принято, если конечно при этом используются только ортонормированные базисы).

Линейная независимость следует из ортогональности, то есть достигается для ортогональной системы векторов автоматически.

Коэффициенты в разложении вектора по ортогональному базису:

$$\mathbf{a}=a_1\, \mathbf{e_1}+a_2\, \mathbf{e_2}+\ldots+a_n \mathbf{e}_{\boldsymbol{n}}$$

можно найти так:

$$a_i=(\mathbf{a}_1, \mathbf{e_i})/(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_i})$$

Полнота ортонормированной системы векторов эквивалентна равенству Парсеваля: для любого вектора **a** квадрат нормы вектора равен сумме квадратов коэффициентов его разложения по базису:

$$(\mathbf{a},\mathbf{a})=\sum_i (\mathbf{a},\mathbf{e_i})^2$$

Аналогичные соотношения имеют место и для бесконечномерного случая (см. ниже).

Бесконечномерный случай

Ортогональный базис — система попарно ортогональных элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ гильбертова пространства *X такая*, что любой элемент $x \in X$ *однозначно* представим в виде сходящегося по норме ряда

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

называемого рядом Фурье элемента *x по* системе $\{e_n\}$.

Часто базис $\{e_n\}$выбирается так, что $| e_n |=1$, и тогда он называется **ортонормированным базисом**. В этом случае числа a_n, называются коэффициентами Фурье элемента *x по* ортонормированному базису $\{e_n\}$, имеют вид

$$a_n=(x, e_n)$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы ортонормированная система $\{e_n\}$ была базисом, является равенство Парсеваля.

Гильбертово пространство, имеющее ортонормированный базис, является сепарабельным, и обратно, во всяком сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис.

Если задана произвольная система чисел $\{a_n\}$такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 <\infty$, то в случае гильбертова пространства с ортонормированным базисом $\{e_n\}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ — сходится по норме к некоторому элементу $x \in X$.

Этим устанавливается изоморфизм любого сепарабельного гильбертова пространства пространству l_2 (теорема Рисса — Фишера).

5. Линейное отображение

5.1. Общие положения

Линейным отображением линейного векторного пространства $\mathbb{V}$ с операцией сложения векторов, обозначаемой $+$, в линейное векторное пространство $\mathbb{W}$ с операцией сложения векторов, обозначаемой $\boxplus$, называется функция (соответствие)

$$\mathcal{A} : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{W}$$

(т.е. определенная на $\mathbb{V}$, имеющая значения в $\mathbb{W}$), обладающая **свойством линейности**, которое описывается одним из двух эквивалентных представлений:

$$\mathcal{A}(X_1 + X_2) = \mathcal{A}(X_1) \boxplus \mathcal{A}(X_2), \quad \mathcal{A}(\alpha_1 X_1) = \alpha_1 \mathcal{A}(X_1),$$

или

$$\mathcal{A}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 \mathcal{A}(X_1) \boxplus \alpha_2 \mathcal{A}(X_2)$$

указанные свойства должны быть выполнены для любых векторов X_1, X_2 пространства $\mathbb{V}$ и любых скаляров α_1, α_2 (вещественных если оба пространства вещественны, и комплексных если хотя бы одно из пространств комплексное). Если $Y = \mathcal{A}(X)$, то говорят, что Y — **образ вектора** X, а X — **прообраз вектора** Y при отображении $\mathcal{A}$. Пространство $\mathbb{V}$ называется **областью определения** отображения $\mathcal{A}$.

Образно говоря, свойство линейности отображения заключается в том, что при этом отображении образ суммы любых двух векторов совпадает с суммой образов этих векторов, а произвольное растяжение прообраза влечет за собой сообразное же растяжение образа.

Примеры линейных отображений

Пример 1. Рассмотрим линейное пространство полиномов степени не выше n: $\mathbb{P}_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p(x) \le n\}$; в это же множество включаем и тождественно нулевой полином (для которого степень не определяется). Операция нахождения частного и операция нахождения остатка от деления полинома $p(x)$ на заданный фиксированный полином $g(x) \in \mathbb{R}[x], g(x) \not\equiv 0$ являются линейными отображениями пространства $\mathbb{P}_n$: если

$$p_1(x) \equiv q_1(x)g(x) + r_1(x), \ p_2(x) \equiv q_2(x)g(x) + r_2(x)$$

при $\deg r_j(x) < \deg g(x)$ то

$$(\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x)) \equiv$$
$$\equiv (\alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x))g(x) + (\alpha_1 r_1(x) + \alpha_2 r_2(x)) .$$

Фактически, операция деления на $g(x)$ (с остатком) порождает два разных линейных отображения. Если $\deg g(x) = m$ при $0 < m \leq n$, то операция нахождения остатка — это отображение $\mathbb{P}_n \mapsto \mathbb{P}_{m-1}$, а операция нахождения частного — это отображение $\mathbb{P}_n \mapsto \mathbb{P}_{n-m}$.

Пример 2. В том же линейном пространстве $\mathbb{P}_n$ операция дифференцирования

$$\frac{d}{dx} : p(x) \longmapsto p'(x)$$

является отображением $\mathbb{P}_n$ в $\mathbb{P}_{n-1}$ линейным поскольку

$$\frac{d}{dx}(\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x)) = \alpha_1 \frac{d}{dx} p_1(x) + \alpha_2 \frac{d}{dx} p_2(x) .$$

Прообраз любого элемента $\mathbb{P}_{n-1}$ неединствен: $\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x^2 + \ const) = x$.

Пример 3. Операцию нахождения первообразной:

$$\int_0^x : \begin{array}{ccc} p(x) & \longmapsto & \int_0^x p(t)dt \\ a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n & \longmapsto & \dfrac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \dfrac{a_1}{n} x^n + \cdots + a_n x \end{array}$$

тоже можно рассматривать как линейное отображение $\mathbb{P}_n \longmapsto \mathbb{P}_{n+1}$. При этом прообраз каждого полинома из $\mathbb{P}_{n+1}$ (если существует) будет единствен.

Пример 4. Линейная форма от переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n, \quad \{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$$

является примером линейного отображения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Здесь тоже прообразов у одного и того же элемента из $\mathbb{W}$ может быть несколько:

$\mathcal{A}(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$ отображает вектора $X_1 = [0, 0]$ и $X_2 = [1, 2]$ в 0.

Пример 5. Обобщением предыдущего примера является отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$, задаваемое

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

при произвольной вещественной матрице. Оно является линейным — в отличие от похожего на него отображения

$$\tilde{\mathcal{A}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + b_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

при хотя бы одном из чисел $b_1, \dots, b_m$ отличном от нуля. В самом деле, если записать последнее в матричном виде:

$\tilde{\mathcal{A}}(X) = A \cdot X + \mathcal{B},$ то

$$\tilde{\mathcal{A}}(\alpha X) = A \cdot (\alpha X) + \mathcal{B} \neq \alpha \tilde{\mathcal{A}}(X) = \alpha \left(A \cdot X + \mathcal{B} \right).$$

Для этого отображения свойство линейности не выполняется.

Пример 6. Предыдущим примерам можно дать и геометрическую интерпретацию. Так, линейное отображение $\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

задает ортогональную проекцию вектора $X = (x, y, z)$ на плоскость $z = 0$. Можно рассматривать его и как отображение $\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$. Проектирование же на произвольное подпространство может быть задано с помощью матрицы. Так, например, отображение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

задает ортогональную проекцию вектора X на многообразие $x+y+z=0$.

Общее выражение для отображения ортогонального проектирования на линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$ ☞ЗДЕСЬ.

Пример 7. В линейном пространстве $m \times n$ -матриц с вещественными элементами определим два отображения:

$$X \mapsto A \cdot X \quad u \quad X \mapsto X \cdot B$$

умножения слева на фиксированную матрицу $A_{\ell \times m}$ и умножения справа на также фиксированную матрицу $B_{n \times k}$. Оба отображения являются линейными. Линейным также будет и отображение

$$X \mapsto A \cdot X \cdot B\,.$$

При дополнительных условиях $m=n, \ell=k$ линейным будет и отображение

$$X \mapsto A \cdot X + X \cdot B\,.$$

Оно отображает множество квадратных матриц порядка n во множество квадратных матриц порядка k.

Пример 8. В пространстве полиномов с вещественными коэффициентами от m переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ степени не выше n рассмотрим отображение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto \operatorname{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) .$$

Здесь вектор $\operatorname{grad}(f)$ называется градиентом функции f. Это отображение будет линейным. Для его записи используют следующий формализм. Вводят в рассмотрение специальный вектор, называемый **набла**

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right) .$$

Умножение этого вектора на функцию f имеет результатом именно градиент:

$$\nabla \cdot f = \operatorname{grad}(f) .$$

Умножение же этого вектора по правилу скалярного произведения на вектор $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, состоящий из m полиномов, порождает отображение этого вектора в полином:

$$\operatorname{div}(F) = (\nabla, F) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_m} ;$$

он называется **дивергенцией вектора** F. Это отображение

$$F \mapsto \operatorname{div}(F)$$

также будет линейным.

В частном случае линейных форм:

$$f_j = a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_m \quad npu \quad j \in \{1, \ldots, m\}$$

получим связь $\operatorname{div}(F)$ с одним объектом матричного анализа. Каким именно?

Является ли линейным отображение

$$X \longmapsto \operatorname{Sp}(X) \ ,$$

определенное в пространстве квадратных матриц порядка n ? Здесь $\operatorname{Sp}(X)$ — след матрицы X .

Про линейное отображение $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^3$ в пространство $\mathbb{P}_3$ известно, что

$$\mathcal{A}(1,0,1) = 1 + 3\,x + x^3,\ \mathcal{A}(1,-1,0) = -1 + x - x^2 \ .$$

Найти $\mathcal{A}(-1,2,1)$.

5.2. Свойства линейных отображений

В настоящем пункте $\mathbb{O}$ означает нулевой вектор пространства $\mathbb{V}$, а $\mathbb{O}'$ — нулевой вектор пространства $\mathbb{W}$.

Два линейных отображения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{W}$ называются **равными** если $\mathcal{A}(X) = \mathcal{B}(X)$ для любого $X \in \mathbb{V}$. **Нулевое отображение** определяется условием

$$\mathcal{O}(X) = \mathbb{O}' \quad npu \quad \forall\, X \in \mathbb{V} \ .$$

Теорема 1. *Для любого линейного отображения* $\mathcal{A}(X)$:

а) $\mathcal{A}(\mathbb{O}) = \mathbb{O}'$;

б) *если система* $\{X_1, \ldots, X_k\}$ *линейно зависима, то и система* $\{\mathcal{A}(X_1), \ldots, \mathcal{A}(X_k)\}$ *линейно зависима*;

в) *если система* $\{\mathcal{A}(X_1), \ldots, \mathcal{A}(X_k)\}$ *линейно независима, то и система* $\{X_1, \ldots, X_k\}$ *линейно независима*.

Теорема 2. *Линейное отображение отображает произвольное линейное многообразие пространства* $\mathbb{V}$ *в линейное же многообразие пространства* $\mathbb{W}$.

Доказательство. Если

$$\mathbb{M} = X_0 + \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_k)$$
$$= \{X_0 + \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k\},$$

то свойство линейности отображения $\mathcal{A}$ дает:

$$\mathcal{A}(\mathbb{M}) = \{\mathcal{A}(X_0) \boxplus \alpha_1 \mathcal{A}(X_1) \boxplus \cdots \boxplus \alpha_k \mathcal{A}(X_k) \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k\} =$$
$$= \mathcal{A}(X_0) \boxplus \mathcal{L}(\mathcal{A}(X_1), \ldots, \mathcal{A}(X_k)) \ .$$

Заметим, что в соответствии с теоремой 1, можно утверждать, что линейное отображение *не увеличивает размерности* отображаемого многообразия: $\dim \mathcal{A}(\mathbb{M}) \leq \dim \mathbb{M}$.

Линейное отображение отображает произвольную прямую пространства $\mathbb{V}$ в прямую или точку пространства $\mathbb{W}$.

Доказать, что линейное отображение отображает параллельные многообразия пространства $\mathbb{V}$ в параллельные же многообразия пространства $\mathbb{W}$.

Теорема 3. *Пусть* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *— произвольный базис* $\mathbb{V}$, *а* $Y_1, \ldots, Y_n$ *— произвольные векторы из* $\mathbb{W}$. *Существует единственное линейное отображение* $\mathcal{A} : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{W}$ *такое, что*

$$\mathcal{A}(X_1) = Y_1, \ldots, \mathcal{A}(X_n) = Y_n \ .$$

Иными словами: любое линейное отображение пространства $\mathbb{V}$ в другое пространство однозначно определяется его заданием на базисных векторах пространства $\mathbb{V}$.

Доказательство. Поскольку векторы $X_1, \ldots, X_n$ — базисные, то существует и единственно разложение любого $X \in \mathbb{V}$: $X = x_1 X_1 + \cdots + x_n X_n$. Зададим отображение $\mathcal{A} : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{W}$ формулой

$$\mathcal{A}(X) = x_1 Y_1 \boxplus \cdots \boxplus x_n Y_n \ .$$

Легко проверить свойство его линейности. Кроме того:

$$\mathcal{A}(X_j) = \mathcal{A}(0 \cdot X_1 + \cdots + 1 \cdot X_j + \cdots + 0 \cdot X_n) =$$
$$= 0 \cdot Y_1 \boxplus \cdots \boxplus 1 \cdot Y_j \boxplus \cdots \boxplus 0 \cdot Y_n = Y_j,$$

т.е. оно удовлетворяет условиям теоремы.

Предположим теперь, что существует еще одно отображение $\mathcal{B}(X)$, удовлетворяющее этим условиям: $\mathcal{B}(X_j) = Y_j$. Тогда

$$\mathcal{A}(X) = x_1 Y_1 \boxplus \cdots \boxplus x_n Y_n =$$
$$= x_1 \mathcal{B}(X_1) \boxplus \cdots \boxplus x_n \mathcal{B}(X_n) = \mathcal{B}(X),$$

и, на основании определения, $\mathcal{A}(X) = \mathcal{B}(X)$. ♦

Отображение $\mathcal{S} : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{W}$ называется **суммой** линейных отображений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ если $\mathcal{S}(X) = \mathcal{A}(X) \boxplus \mathcal{B}(X)$ для $\forall X \in \mathbb{V}$.
Отображение $\mathcal{F} : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{W}$ называется **произведением линейного отображения** $\mathcal{A}$ **на число** (скаляр) $\lambda \in \mathbb{R}$ если $\mathcal{F}(X) = \lambda \cdot \mathcal{A}(X)$ для $\forall X \in \mathbb{V}$.

Теорема 4. *Отображения* $\mathcal{S}$ *и* $\mathcal{F}$ *— линейные.*

Пример. В пространстве полиномов $\mathbb{P}_n$ операцию нахождения второй производной

$$\frac{d^2}{d\,x^2} : p(x) \longmapsto p''(x)$$

тоже можно рассматривать как линейное отображение $\mathbb{P}_n \longmapsto \mathbb{P}_{n-1}$.
Линейным также будет и отображение

$$\frac{d^2}{d\,x^2} \times \square + 2\frac{d}{d\,x} \times \square : \; p(x) \; \longmapsto \; p''(x) + 2p'(x) \,.$$

Т

Теорема 5. *Множество* $\mathcal{H}om(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ *всех линейных отображений из* $\mathbb{V}$ *в* $\mathbb{W}$ *образует линейное пространство и*

$$\dim \mathcal{H}om(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = \dim \mathbb{V} \cdot \dim \mathbb{W} \,.$$

5.3. Ядро и образ линейного отображения

Для линейного отображения $\mathcal{A}$ его **ядром** называется множество векторов из $\mathbb{V}$, отображающихся в $\mathbb{O}' \in \mathbb{W}$:

$$\mathcal{K}er(\mathcal{A}) = \left\{X \in \mathbb{V} \middle| \mathcal{A}(X) = \mathbb{O}'\right\} \ ;$$

а его **образом** называется множество всех векторов из $\mathbb{W}$, для каждого из которых существует прообраз из $\mathbb{V}$:

$$\mathcal{I}m(\mathcal{A}) = \{Y \in \mathbb{W} \mid \exists X \in \mathbb{V},\ \mathcal{A}(X) = Y\} \ .$$

Фактически $\mathcal{I}m(\mathcal{A})$ можно назвать *областью значений* линейного отображения $\mathcal{A}$.

Теорема 1. $\mathcal{K}er(\mathcal{A})$ *и* $\mathcal{I}m(\mathcal{A})$ *являются линейными подпространствами соответствующих пространств.*

Для линейного отображения $\mathcal{A}$ его **дефектом** называется размерность ядра, а его **рангом** — размерность образа:

$$\operatorname{dfc}(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{K}er(\mathcal{A})),\ \operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{I}m(\mathcal{A})) \ .$$

Отображение называется **невырожденным** если $\operatorname{dfc}(\mathcal{A}) = 0$.

Теорема 2. *Линейное отображение* $\mathcal{A}$ *невырождено тогда и только тогда, когда у каждого образа существует единственный прообраз.*

Доказательство. Необходимость. Если $\mathcal{A}$ невырождено, то $\mathcal{K}er(\mathcal{A}) = \{\mathbb{O}\}$, т.е. единственным вектором из $\mathbb{V}$, отображающимся в $\mathbb{O}' \in \mathbb{W}$ должен быть $\mathbb{O}$. Если предположить

неединственность прообраза для какого-то $Y \in \mathbb{W}$:
$Y = \mathcal{A}(X_1) = \mathcal{A}(X_2)$ при $X_1 \neq X_2$, то

$$\mathbb{O}' = \mathcal{A}(X_1) - \mathcal{A}(X_2) = \mathcal{A}(X_1 - X_2)$$

и получаем противоречие с единственностью прообраза у $\mathbb{O}'$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{A}(X_1) \neq \mathcal{A}(X_2)$ для любых $X_1 \neq X_2$. Если бы $\mathcal{K}er(\mathcal{A})$ имело ненулевую размерность, то существовал бы $X \neq \mathbb{O}$ такой, что $\mathcal{A}(X) = \mathbb{O}'$, что противоречило бы предыдущей фразе: $\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(\mathbb{O})$. ♦

Теорема 3. *Если* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *— произвольный базис* $\mathbb{V}$, *то* $\mathcal{I}m(\mathcal{A})$ *совпадает с линейной оболочкой образов этих векторов*

$$\mathcal{I}m(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\left(\mathcal{A}(X_1), \ldots, \mathcal{A}(X_n)\right) .$$

Доказательство. Действительно, любой вектор $Y \in \mathcal{I}m(\mathcal{A})$ является образом какого-то вектора $X = x_1X_1 + \cdots + x_nX_n$, тогда на основании линейности отображения:

$$Y = \mathcal{A}(X) = x_1\mathcal{A}(X_1) \boxplus \cdots \boxplus x_n\mathcal{A}(X_n) \in \mathcal{L}\left(\mathcal{A}(X_1), \ldots, \mathcal{A}(X_n)\right) .$$

Таким образом

$$\mathcal{I}m(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}\left(\mathcal{A}(X_1), \ldots, \mathcal{A}(X_n)\right) .$$

Обратно, поскольку векторы $\mathcal{A}(X_1),\dots,\mathcal{A}(X_n)$ принадлежат $\mathcal{I}m(\mathcal{A})$, то по теореме 1 и любая линейная комбинация этих векторов должна принадлежать $\mathcal{I}m(\mathcal{A})$:

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{A}(X_1),\dots,\mathcal{A}(X_n)\right)\subset\mathcal{I}m(\mathcal{A})\ .$$

Из двух взаимных включений множеств следует их равенство.

Пример. Найти ядро и образ отображения $\mathbb{R}^3\longmapsto\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3\\0\\x_1+x_2+x_3\\x_1+x_2-x_3\end{pmatrix}\ .$$

Решение. Для определения $\mathcal{K}er(\mathcal{A})$ найдем фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl}x_3&=&0\\0&=&0\\x_1+x_2+x_3&=&0\\x_1+x_2-x_3&=&0\end{array}\right.\quad\Longrightarrow X_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Имеем $\operatorname{dfc}(\mathcal{A})=1$ и $\mathcal{K}er(\mathcal{A})=\mathcal{L}(X_1)$.

Теперь для нахождения $\mathcal{I}m(\mathcal{A})$ воспользуемся теоремой 3: базис следует искать среди векторов

$$Y_1 = \mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ Y_2 = \mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$Y_3 = \mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Имеем: $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = 2$ и $\mathcal{I}m(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(Y_1, Y_3)$.

Пример. Найти ядро и образ отображения пространства полиномов $\mathbb{P}_3$ в $\mathbb{P}_2$, задаваемого формулой:

$$\mathcal{A}\left(p(x)\right) = x^2 p''(x) + p'(x) - 6p(x)\ .$$

Решение. Для начала проверим, что это отображение именно $\mathbb{P}_3 \mapsto \mathbb{P}_2$, т.е. при таком отображении происходит понижение степени полинома, по крайней мере на 1. И действительно, если $p(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$, то

$$x^2 p''(x) + p'(x) - 6p(x) \equiv$$
$$\equiv (-4\,a_1 + 3\,a_0)x^2 + (2\,a_1 - 6\,a_2)x + (a_2 - 6\,a_3)\ .$$

Теперь понятно, что $\mathcal{I}m(\mathcal{A}) \subset \mathbb{P}_2$, а, на самом деле, это включение может быть заменено на равенство. Действительно, в соответствии с теоремой 2, имеем:

$$\mathcal{I}m(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\left(\mathcal{A}(1), \mathcal{A}(x), \mathcal{A}(x^2), \mathcal{A}(x^3)\right) =$$

$$= \mathcal{L}\left(-6,\ -6\,x+1,\ -4\,x^2+2\,x,\ 3\,x^2\right) = \mathbb{P}_2$$

поскольку три из четырех получившихся полиномов линейно независимы.

Теперь найдем $\mathcal{K}er(\mathcal{A})$, или, в альтернативной формулировке, подмножество решений дифференциального уравнения

$$x^2p''(x) + p'(x) - 6p(x) = 0$$

во множестве $\mathbb{P}_3$ (полиномов степени не выше третьей). Воспользуемся уже выведенной выше формулой для образа произвольного полинома $p(x) \in \mathbb{P}_3$. Этот образ будет тождественно равным нулю полиномом при выполнении условий

$$-4\,a_1 + 3\,a_0 = 0,\ 2\,a_1 - 6\,a_2 = 0,\ a_2 - 6\,a_3 = 0\ .$$

Решаем эту систему:

$$a_0 = \frac{4}{3}a_1,\ a_2 = \frac{1}{3}a_1,\ a_3 = \frac{1}{18}a_1\ .$$

Таким образом,

$$\mathcal{K}er(\mathcal{A}) = \left\{\lambda(24\,x^3 + 18\,x^2 + 6\,x + 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}\ .$$

Теорема 4. *Пусть* $\{X_1, \dots, X_{\mathfrak{r}}\}$ *— относительный базис* $\mathbb{V}$ *над* $\mathcal{K}er(\mathcal{A})$*. Тогда система* $\{\mathcal{A}(X_1), \dots, \mathcal{A}(X_{\mathfrak{r}})\}$ *образует базис* $\mathcal{I}m(\mathcal{A})$.

Доказательство. Любой вектор $\boldsymbol{X} \in \mathbb{V}$

$$\mathcal{K}er(\mathcal{A}) = \mathbb{V}_1, \quad \mathcal{I}m(\mathcal{A}) = \mathbb{W}_1 .$$

Определенные в настоящем пункте множества $\mathcal{K}er(\mathcal{A})$ и $\mathcal{I}m(\mathcal{A})$ позволяют полностью решить и следующую задачу:

Задача. Установить множество всех прообразов вектора $Y \neq \mathbb{O}'$ при линейном отображении $\mathcal{A}$.

Теорема 7. *Если* $Y \notin \mathcal{I}m(\mathcal{A})$ *, то у вектора* $Y \in \mathbb{W}$ *не существует прообраза в* $\mathbb{V}$ *. Если* $X_0 \in \mathbb{V}$ *— какой-то из прообразов вектора* Y *, то все множество прообразов этого вектора является линейным многообразием в* $\mathbb{V}$

$$X_0 + \mathcal{K}er(\mathcal{A}) .$$

5.4. Матрица линейного отображения

Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{W}$, и пусть $\{X_1, \dots, X_n\}$ — базис $\mathbb{V}$, а $\{Y_1, \dots, Y_m\}$ — базис $\mathbb{W}$. Найдем координаты векторов $\mathcal{A}(X_1), \dots, \mathcal{A}(X_n)$ в базисе $\{Y_1, \dots, Y_m\}$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{A}(X_1) & = & \alpha_{11} Y_1 \boxplus \alpha_{21} Y_2 \boxplus \cdots \boxplus \alpha_{m1} Y_m, \\ \dots & & \dots, \\ \mathcal{A}(X_n) & = & \alpha_{1n} Y_1 \boxplus \alpha_{2n} Y_2 \boxplus \cdots \boxplus \alpha_{mn} Y_m. \end{array} \right.$$

Матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n},$$

по столбцам которой стоят координаты образов базисных векторов, называется **матрицей линейного отображения** $\mathcal{A}$ в выбранных базисах.

Теорема 1. *Координаты произвольного вектора* $X = x_1X_1 + \dots + x_nX_n$ *и его образа* $\mathcal{A}(X) = y_1Y_1 \boxplus \dots \boxplus y_mY_m$ *связаны формулой*:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. С помощью приведенных выше формул для $\mathcal{A}(X_1), \dots, \mathcal{A}(X_n)$ получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(X) &= \mathcal{A}(x_1X_1 + \dots + x_nX_n) = x_1\mathcal{A}(X_1) \boxplus \dots \boxplus x_n\mathcal{A}(X_n) = \\ &= x_1(\alpha_{11}Y_1 \boxplus \dots \boxplus \alpha_{m1}Y_m) \boxplus \dots \boxplus x_n(\alpha_{1n}Y_1 \boxplus \dots \boxplus \alpha_{mn}Y_m) = \\ &= \underbrace{(x_1\alpha_{11} + \dots + x_n\alpha_{1n})}_{y_1}Y_1 \boxplus \dots \boxplus \underbrace{(x_1\alpha_{m1} + \dots + x_n\alpha_{mn})}_{y_m}Y_m, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Пример. Найти матрицу линейного отображения

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

в стандартных базисах пространств

$$\overbrace{\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\mathfrak{e}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\mathfrak{e}_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\mathfrak{e}_3} \right\}}^{\mathbb{R}^3} \quad u \quad \overbrace{\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\mathfrak{E}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\mathfrak{E}_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\mathfrak{E}_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\mathfrak{E}_4} \right\}}^{\mathbb{R}^4}$$

Решение.

$$\mathcal{A}(\mathfrak{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \mathfrak{E}_1 + 0 \cdot \mathfrak{E}_2 + 1 \cdot \mathfrak{E}_3 + 1 \cdot \mathfrak{E}_4; \quad \mathcal{A}(\mathfrak{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \mathfrak{E}_1 + 0 \cdot \mathfrak{E}_2 + 1 \cdot \mathfrak{E}_3 + 1 \cdot \mathfrak{E}_4;$$

$$\mathcal{A}(\mathfrak{e}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \mathfrak{E}_1 + 0 \cdot \mathfrak{E}_2 + 1 \cdot \mathfrak{E}_3 - 1 \cdot \mathfrak{E}_4 .$$

Матрица отображения $\mathcal{A}$ в выбранных базисах:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

совпадает с матрицей коэффициентов при переменных x_1, x_2, x_3 в выражениях координат вектора $\mathcal{A}(X)$.

Пример. Найти матрицу линейного отображения пространства полиномов $\mathbb{P}_3$ в $\mathbb{P}_2$, задаваемого формулой:

$$\mathcal{A}\left(p(x)\right) = x^2 p''(x) + p'(x) - 6p(x) \ .$$

Базисом пространства $\mathbb{P}_3$ выбран $\{1, x, x^2, x^3\}$, а базис пространства $\mathbb{P}_2$ состоит из полиномов Лежандра

$$\{P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3\,x^2 - 1)\} \ .$$

Решение. В предыдущем ПУНКТЕ уже были получены выражения:

$$\mathcal{A}(1) = -6,\ \mathcal{A}(x) = -6\,x + 1,\ \mathcal{A}(x^2) = -4\,x^2 + 2\,x,\ \mathcal{A}(x^3) = 3\,x^2 \ .$$

Если бы базис пространства $\mathbb{P}_2$ составляли полиномы, входящие в базис исходного пространства, т.е. $\{1, x, x^2\}$, то матрица линейного отображения построилась бы достаточно просто:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Однако базис пространства $\mathbb{P}_2$ отличается от $\{1, x, x^2\}$ в последнем полиноме: $P_2(x) \not\equiv x^2$. Координаты $\mathcal{A}(1)$ и $\mathcal{A}(x)$ остаются прежними, а вот $\mathcal{A}(x^2)$ и $\mathcal{A}(x^3)$ приходится переписывать под базис из полиномов Лежандра:

$$-4\,x^2 + 2\,x \equiv a_{13} \cdot 1 + a_{23} \cdot x + a_{33} \cdot \left(\frac{1}{2}(3\,x^2 - 1)\right) \; .$$

Откуда получаем: $a_{13} = -4/3,\; a_{23} = 2,\; a_{33} = -8/3$.
Аналогично

$$3\,x^2 \equiv P_0(x) + 2\,P_2(x)$$

и, следовательно, матрица линейного отображения:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{rrrr} -6 & 1 & -4/3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 & 2 \end{array}\right) \; .$$

Теорема 2. *Существует изоморфизм между линейным пространством* $\mathcal{H}om(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ (*линейных отображений из* $\mathbb{V}$ *в* $\mathbb{W}$) *и линейным пространством* $m \times n$ -матриц над $\mathbb{R}$.

Фактически теоремы 1 и 2 сводят рассмотрение произвольного линейного отображения $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{V}$ в пространство $\mathbb{W}$ к рассмотрению отображения арифметического пространства n -компонентных столбцов в арифметическое пространство m -компонентных столбцов

$$Y = \mathbf{A}X \quad \text{при } X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m;$$

это отображение задается $m \times n$ -матрицей $\mathbf{A}$. Получается, что для полного задания исходного линейного отображения достаточно знать только результат его действия на базисные векторы пространства $\mathbb{V}$. После фиксирования базисов обоих пространств и установления матрицы линейного отображения, можно «забыть» о природе этих пространств и исследовать свойства отображения в «переводе на язык» умножения матрицы на столбец. В частности, «почти даром» получаем следующий результат:

Теорема 3. *Если* A *— матрица линейного отображения* $\mathcal{A}$ *в каких-то выбранных базисах пространств* $\mathbb{V}$ *и* $\mathbb{W}$, *то*

$$\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \operatorname{rank}(A), \ \operatorname{dfc}(\mathcal{A}) = n - \operatorname{rank}(A) .$$

Ядро линейного отображения

$$Y = AX \quad \text{при } X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m \quad \text{и } m \times n \text{-матрице } A$$

часто называется **ядром матрицы** A или **нуль-пространством матрицы** A и также обозначается $\mathcal{K}er(A)$. Наряду с определением ядра матрицы через свойства отображения AX, можно дать ему и другую интерпретацию:

Теорема 4. *Если в пространстве* $\mathbb{R}^n$, *рассматриваемом как пространство* n *-строк, ввести скалярное произведение формулой*

$$(X,Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \quad \textit{при} \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_n],\ Y = [y_1, y_2, \dots, y_n],$$

то $\mathcal{K}er(A)$ *образует ортогональное дополнение линейной оболочки строк этой матрицы в пространстве* $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{K}er(A) \perp \mathcal{L}(A^{[1]}, A^{[2]}, \dots, A^{[m]}),\ \mathcal{K}er(A) \oplus \mathcal{L}(A^{[1]}, A^{[2]}, \dots, A^{[m]}) = \mathbb{R}^n .$$

Дефектом матрицы A будем называть размерность ядра этой матрицы, или, что то же, число элементов фундаментальной системы решений системы линейных однородных уравнений $AX = \mathbb{O}$. В соответствии с результатами, приведенными ☞ЗДЕСЬ:

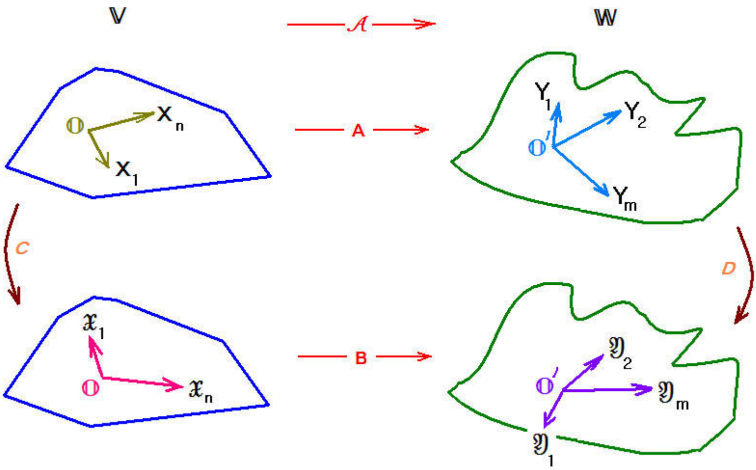
$$\operatorname{dfc}(A) = n - \mathfrak{r} \ \textit{при} \ \mathfrak{r} = \operatorname{rank}(A).$$

Вернемся теперь к общему случаю линейного пространства.

Задача. Как изменяется матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ при изменении базисов?

Теорема 5. *Пусть* $\{\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n\}$ *— новый базис пространства* $\mathbb{V}$, $\{\mathfrak{Y}_1, \dots, \mathfrak{Y}_m\}$ *— новый базис* $\mathbb{W}$, *и в этих базисах линейное отображение* $\mathcal{A}$ *имеет матрицу* $\mathbf{B}$. *Если* C *— матрица перехода от старого базиса к новому в пространстве* $\mathbb{V}$, *а* D *— матрица перехода от старого базиса к новому в пространстве* $\mathbb{W}$, *то*

$$\mathbf{B} = D^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot C\,.$$



Доказательство. Действительно, координаты произвольного вектора

$$X = x_1X_1 + \cdots + x_nX_n = \mathfrak{x}_1\mathfrak{X}_1 + \cdots + \mathfrak{x}_n\mathfrak{X}_n \ ,$$

и его образа

$$Y = \mathcal{A}(X) = y_1Y_1 \boxplus \cdots \boxplus y_mY_m = \mathfrak{y}_1\mathfrak{Y}_1 \boxplus \cdots \boxplus \mathfrak{y}_m\mathfrak{Y}_m$$

связаны следующими соотношениями: с одной стороны, на основании теоремы 1,

$$\left(\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{array}\right) = \mathbf{A} \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{c} \mathfrak{y}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{y}_m \end{array}\right) = \mathbf{B} \left(\begin{array}{c} \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{x}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_n \end{array}\right) .$$

с другой стороны, на основании результатов пункта ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ ПРИ ЗАМЕНЕ БАЗИСА,

$$\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) = C \left(\begin{array}{c} \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{x}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_n \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{array}\right) = D \left(\begin{array}{c} \mathfrak{y}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{y}_m \end{array}\right) .$$

Получаем цепочку равенств:

$$\mathbf{B} \left(\begin{array}{c} \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{x}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \mathfrak{y}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{y}_m \end{array}\right) = D^{-1} \left(\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{array}\right) = D^{-1}\mathbf{A} \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) = D^{-1}\mathbf{A}C \left(\begin{array}{c} \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{x}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_n \end{array}\right) .$$

Поскольку равенство справедливо для любого столбца координат, то оно справедливо и для столбцов

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

Объединяя полученные n равенств в одно матричное, получаем $\mathbf{B}E=D^{-1}\mathbf{A}CE$, где E — единичная матрица порядка n. Отсюда и следует утверждение теоремы.

5.5. Канонический вид матрицы линейного отображения

Задача. Подобрать базисы пространств $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$ так, чтобы матрица заданного линейного отображения $\mathcal{A}$ имела наиболее простой вид.

Найдем относительный базис $\mathbb{V}$ над $\mathcal{K}er(\mathcal{A})$, т.е. базис $\mathcal{K}er(\mathcal{A})$ дополним до базиса $\mathbb{V}$:

$\{X_1,\ldots,X_{\mathfrak{r}}\}\leftarrow$ относительный базис $\mathbb{V}$ над $\mathcal{K}er(\mathcal{A})$
$\{X_{\mathfrak{r}+1},\ldots,X_n\}\leftarrow$ базис $\mathcal{K}er(\mathcal{A})$

Было доказано (см. теорему 4), что $\{\mathcal{A}(X_1),\ldots,\mathcal{A}(X_{\mathfrak{r}})\}\subset\mathbb{W}$ является базисом $\mathcal{I}m(\mathcal{A})$. Составим базис $\mathbb{W}$ ее дополнением:

$\{\mathcal{A}(X_1),\ldots,\mathcal{A}(X_{\mathfrak{r}})\}\leftarrow$ базис $\mathcal{I}m(\mathcal{A})$
$\{Y_{\mathfrak{r}+1},\ldots,Y_m\}\leftarrow$ относительный базис $\mathbb{W}$ над $\mathcal{I}m(\mathcal{A})$
Т

Теорема. *В выбранных базисах матрица линейного отображения* $\mathcal{A}$ *имеет следующий* **канонический вид**:

$$\mathbf{B} = \left.\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \mathbb{O} \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & \mathbb{O} & & & \mathbb{O} \end{pmatrix}\right\}\mathfrak{r} = \begin{pmatrix} E_{\mathfrak{r}\times\mathfrak{r}} & \mathbb{O}_{\mathfrak{r}\times(n-\mathfrak{r})} \\ \mathbb{O}_{(m-\mathfrak{r})\times\mathfrak{r}} & \mathbb{O}_{(m-\mathfrak{r})\times(n-\mathfrak{r})} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathfrak{r} = \operatorname{rank}(\mathcal{A})$.

Линейный оператор

Линейное отображение векторного пространства $\mathbb{V}$ в себя

$$\mathcal{A} : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{V}$$

называется **линейным преобразованием** $\mathbb{V}$ или **линейным оператором** на $\mathbb{V}$. Подробнее ☞ЗДЕСЬ.

5.6. Аффинное отображение

Линейные отображения пространства $\mathbb{V}$ в пространство $\mathbb{W}$ составляют подмножество более широкого класса отображений.

Рассмотрим пример 5 ☞ЗДЕСЬ. Отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$, задаваемое соотношением

$$\tilde{\mathcal{A}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + b_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

будет линейным отображением при условии, что $b_1 = 0, \dots, b_m = 0$ и не будет линейным отображением при хотя бы одном из чисел $b_1, \dots, b_m$ отличном от нуля. Тем не менее, по своему внешнему виду отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, задаваемое в матричном виде как $A\,X + \mathcal{B}$ напоминает линейную *функцию* $a\,x + b$, действующую в $\mathbb{R}$. Кажется очень несправедливым лишать подобные отображения эпитета *линейный*, однако же именно это и произошло в линейной алгебре и геометрии.

Аффинным отображением линейного векторного пространства $\mathbb{V}$ с операцией сложения векторов, обозначаемой $+$, в линейное векторное пространство $\mathbb{W}$ с операцией сложения векторов, обозначаемой $\boxplus$, называется функция вида

$$\mathcal{A}(X) \boxplus \mathcal{B} \ \textit{при}\ X \in \mathbb{V}\ .$$

Здесь $\mathcal{A}$ — линейное отображение $\mathbb{V}$ в $\mathbb{W}$, а $\mathcal{B}$ — некоторый вектор пространства $\mathbb{W}$.

Образно говоря, аффинное отображение может быть получено *сдвигом* некоторого линейного отображения. Фактически же определение содержит в себе объяснение той причины, по которой аффинные отображения изучаются менее подробно, чем линейные: первые сводятся ко вторым.

Основное геометрическое свойство аффинного отображения проявилось в ☞ПУНКТЕ для отображения линейного.

Теорема. *Аффинное отображение отображает произвольное линейное многообразие пространства* $\mathbb{V}$ *в линейное же многообразие пространства* $\mathbb{W}$. *Аффинное отображение отображает параллельные многообразия пространства* $\mathbb{V}$ *в параллельные же многообразия пространства* $\mathbb{W}$.

Аффинное отображение отображает произвольную прямую пространства $\mathbb{V}$ в прямую или точку пространства $\mathbb{W}$.

5.7. Почему рассматриваются только линейные отображения?

Почему во всех вузовских курсах алгебры не рассматриваются более сложные отображения, задаваемые, например, нелинейными полиномами:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^4 - \sqrt{2}x_1^2x_3 + 17\,x_2^5 + 2\,x_1 - 3\,x_3 - 14 \\ x_2^{18} - x_2^7 + x_1x_2^4x_3^6 - x_1 - 5\,x_2 + 2 \\ x_2x_3^3 + x_3 - 6 \\ x_1 - 2\,x_2 + 6\,x_3 - 33 \end{pmatrix} ?$$

— Да потому что про них мало что понятно. Попытки обобщения на нелинейный случай практически любого понятия, введенного для линейного отображения, приводят к нерешенной задаче. Так, для обобщения понятия ядра придется решить не решенную на настоящий момент 16-ю проблему Гильберта; еще одна нерешенная проблема — проблема якобиана — связана с существованием обратного к полиномиальному отображению.

В одном частном случае нелинейные отображения сравнительно хорошо изучены — это отображения $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, заданные условиями:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \quad при \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ ;$$

(функции u и v — не обязательно полиномы). Последние два условия называются **условиями Коши-Римана** (**Даламбера-Эйлера**); из них следует, что каждая из функций u и v является **гармонической функцией**, т.е. удовлетворяет тождествам:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \equiv 0 \ .$$

Подобные отображения рассматриваются в разделе математики, известном как КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ или **теория функций комплексной переменной** (**ТФКП**).

Как же исследовать нелинейные отображения в общем случае? — Следует попытаться свести их исследование к линейному случаю. Рассмотрим пример отображения из начала пункта

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^4 - \sqrt{2}x_1^2x_3 + 17\,x_2^5 + 2\,x_1 - 3\,x_3 - 14 \\ x_2^{18} - x_2^7 + x_1x_2^4x_3^6 - x_1 - 5\,x_2 + 2 \\ x_2x_3^3 + x_3 - 6 \\ x_1 - 2\,x_2 + 6\,x_3 - 33 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 \\ 2 \\ -6 \\ -33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\,x_1 - 3\,x_3 \\ -x_1 - 5\,x_2 \\ x_3 \\ x_1 - 2\,x_2 + 6\,x_3 \end{pmatrix} + \ldots$$

В разложении каждого элемента вектора отбросим все члены степени выше первой. В результате мы получили отображение, которое можно представить в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} -14 \\ 2 \\ -6 \\ -33 \end{pmatrix}}_{=\mathcal{B}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

Это новое отображение является аффинным отображением пространства $\mathbb{R}^3$ в пространство $\mathbb{R}^4$. Таким образом, исходное, существенно нелинейное, отображение $\mathcal{F}(X)$ фактически заменили аффинным $\tilde{\mathcal{A}}(X) = AX + \mathcal{B}$. Насколько такая замена оправдана? — По крайней мере, в одной точке эти отображения совпадают: $\mathcal{F}(\mathbb{O}) = \tilde{\mathcal{A}}(\mathbb{O})$. Трудно ожидать, что они будут совпадать еще где-нибудь. Однако же, в малой окрестности точки $\mathbb{O}$ значения этих двух функций оказываются близкими!

$$\mathcal{F}\begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ 0.07 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14.19000994 \\ 2.090000000 \\ -5.930006860 \\ -32.53000000 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{F}\begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.12 \\ -0.14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13.47907577 \\ 1.349999642 \\ -6.140329280 \\ -34.03000000 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{F}\begin{pmatrix} -0.30 \\ 0.25 \\ -0.24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13.82475143 \\ 1.049938741 \\ -6.243456000 \\ -35.24000000 \end{pmatrix};\dots$$

$$\tilde{\mathcal{A}}\begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ 0.07 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14.19000000 \\ 2.090000000 \\ -5.930000000 \\ -32.53000000 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathcal{A}}\begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.12 \\ -0.14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13.48000000 \\ 1.350000000 \\ -6.140000000 \\ -34.03000000 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathcal{A}}\begin{pmatrix} -0.30 \\ 0.25 \\ -0.24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13.88000000 \\ 1.050000000 \\ -6.240000000 \\ -35.24000000 \end{pmatrix};\dots$$

Иными словами, в некоторой достаточно малой окрестности точки $X_0 = \mathbb{O}$ нелинейное отображение аппроксимируется аффинным. А чем аппроксимировать за пределами этой окрестности, скажем, в окрестности вектора $X_0 = [1, -1, 1]^{\top}$? — Для этого придется привлекать аппарат разложения нелинейных функций нескольких переменных в ряды Тейлора. К счастью, функции нашего примера являются полиномиальными, поэтому этот ряд не будет содержать бесконечного числа членов. Воспользовавшись материалом пункта ☞ ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА, получим:

$$\mathcal{F}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31-\sqrt{2} \\ 9 \\ -6 \\ -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (6-2\sqrt{2})(x_1-1) & +85\,(x_2+1) & +(-\sqrt{2}-3)(x_3-1) \\ & -34\,(x_2+1) & +6\,(x_3-1) \\ & (x_2+1) & -2\,(x_3-1) \\ (x_1-1) & -2\,(x_2+1) & +6\,(x_3-1) \end{pmatrix} + \ldots$$

Перепишем второе слагаемое в матричном виде:

$$= \begin{pmatrix} -31-\sqrt{2} \\ 9 \\ -6 \\ -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6-2\sqrt{2} & 85 & -\sqrt{2}-3 \\ 0 & -34 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2+1 \\ x_3-1 \end{pmatrix} + \ldots$$

В общем же случае, если

$$\mathcal{F}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix},$$

то, в окрестности вектора $X_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})^\top$ его можно аппроксимировать аффинным отображением

$$\tilde{\mathcal{A}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x_{01},\ldots,x_{0n}) \\ \vdots \\ f_m(x_{01},\ldots,x_{0n}) \end{pmatrix}}_{=\mathcal{F}(X_0)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \ldots & \partial f_1/\partial x_n \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \ldots & \partial f_2/\partial x_n \\ \ldots & & & \ldots \\ \partial f_m/\partial x_1 & \partial f_m/\partial x_2 & \ldots & \partial f_m/\partial x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

которое рассматривается в окрестности $Y_0 = \mathbb{O}$. Здесь все частные производные в матрице $\mathbf{J}$ вычисляются в точке X_0. Матрица

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right]_{\substack{j=1,\ldots,m,\\ k=1,\ldots,n}}$$

называется матрицей Якоби системы из m функций $\{f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)\}$ по переменным $x_1,\ldots,x_n$.

Подводя итог, можно сказать, что линейные (аффинные) отображения служат основой анализа отображений нелинейных — но этот анализ носит локальный характер: линеаризация адекватно приближает исходное нелинейное отображение лишь в малых областях значений аргументов.

5.8. Разложения линейных отображений

А. Пусть $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$. Очевидно, $x \to \varphi(x)$, рассматриваемое как отображение *E на* R_φ, также линейно. Оно называется *приведением* отображения φ и будет обозначаться $\varphi\hat{}$.

Очевидно,

$$\varphi = \pi_\varphi \circ \varphi\hat{}, \qquad (1)$$

где π_φ — каноническое вложение *R* в *F*, так что *каждое линейное отображение есть суперпозиция наложения и вложения.* В частности, $\varphi\hat{}$ = φ тогда и только тогда, когда φ — наложение.

Б. Пусть $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$. Очевидно, $\varphi\hat{}$ — *изоморфизм тогда и только тогда, когда* φ—*вложение,* В силу 3.5.Н отсюда следует, что *вложение не нарушает линейной зависимости или независимости векторов.*

Теорема 1 *Пусть* $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ *и* $\psi \in \mathscr{L}(E, G)$. *Если* $K_\varphi \supset K_\psi$, *то существует однозначно определенное* $\chi \in \mathscr{L}(R_\psi, F)$ *такое, что*

$$\varphi = \chi \circ \psi\hat{}. \qquad \mathbf{(2)}$$

При этом χ—*вложение тогда и только тогда, когда* $K_\varphi = K_\psi$, *и* χ — *наложение тогда и только тогда, когда* φ— *наложение.*

Доказательство. Если $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, то $\psi(x_1 - x_2) =$

$= \psi(x_1) - \psi(x_2) = 0$, т. е. $x_1 - x_2 \in K_\psi$; так как $K_\psi \subset K_\varphi$, то отсюда следует, что $x_1 - x_2 \in K_\varphi$, т. е. $\varphi(x_1) - \varphi(x_2) =$ $= \varphi(x_1 - x_2) = 0$, откуда $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Таким образом, равенство $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ влечет равенство $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$; иными словами, значение $\varphi(x)$ вполне определяется заданием значения $\psi(x)$. Следовательно,

$$\varphi(x) = \chi(\psi^{\hat{}}(x)),$$

где χ—однозначно определенное отображение R_ψ в F. При этом для любых $\psi(x)$, $\psi(y) \in R_\psi$ и любого скаляра λ имеем

$$\chi(\psi(x) + \psi(y)) = \chi(\psi(x+y)) = \varphi(x+y) =$$
$$= \varphi(x) + \varphi(y) = \chi(\psi(x)) + \chi(\psi(y))$$

и

$$\chi(\lambda\psi(x)) = \chi(\psi(\lambda x)) = \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = \lambda\chi(\psi(x)),$$

т. е. χ линейно. χ есть вложение, т. е. $\chi(\psi(x)) =$ $= \varphi(x) = 0$ влечет $\psi(x)=0$, тогда и только тогда, когда $K_\varphi \subset K_\psi$, а в соединении с условием $K_\varphi \supset K_\psi$ это означает, что $K_\varphi = K_\psi$. Последнее же утверждение теоремы очевидно.

В. Пусть $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ и ω_φ — каноническое наложение E на E/K_φ. Так как $K_{\varphi^{\hat{}}} = K_{\omega_\varphi} (= K_\varphi)$ и $\varphi^{\hat{}}$ —наложение, то *существует однозначно определенный изоморфизм* $\dot{\varphi}$ *пространства* $R_{\omega_\varphi} = E/K_\varphi$ *на* R_φ, *такой, что*

$$\varphi^{\hat{}} = \dot{\varphi} \circ \omega_\varphi. \tag{3}$$

Очевидно, $\dot{\varphi}$ есть отображение, относящее каждому классу $K_\varphi + x \in E/K_\varphi$ точку $\varphi(x) \in R_\varphi$. Мы будем называть $\dot{\varphi}$ отображением E/K_φ на R_φ *ассоциированным* с φ.

В силу 3.8.(1), изоморфизма пространств E/K_φ и R_φ и 3.8.Б имеем

$$\dim K_\varphi + \dim R_\varphi = \dim E.$$

Г. Пусть $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$, где E и F — конечномерные векторные пространства одинаковой размерности. В силу установленного в В изоморфизма пространств E/K_φ и R_φ каждое из условий $K_\varphi = \{0\}$ и $R_\varphi = F$ является следствием другого и означает, что φ есть изоморфизм E на F.

Д. В силу (1) и (3) *каждоепредставимо*

$$\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$$

в виде

$$\varphi = \pi_\varphi \circ \dot{\varphi} \circ \omega_\varphi, \tag{4}$$

где ω_φ *—каноническое наложение E на* E/K_φ, $\dot{\varphi}$ *—отображение* E/K_φ *на* R_φ *, ассоциированное с* φ, *и* π_φ*— каноническое вложение* R_φ *в F.* Мы будем называть (4) *каноническим разложением* линейного отображения φ.

Е. Пусть выполнены предположения теоремы 1. Пусть, далее, $\omega_{\varphi,\psi}$— каноническое наложение E/K_ψ на E/K_φ . Так как, согласно формуле 2.3.(4),

$$\omega_\varphi = \omega_{\varphi,\psi} \circ \omega_\psi,$$

а, с другой стороны, согласно (3),

$$\psi^\wedge = \dot{\psi} \circ \omega_\psi,$$

то, принимая во внимание, что $\dot{\psi}$— изоморфизм, имеем

$$\omega_\varphi = \omega_{\varphi,\psi} \circ \dot{\psi}^{-1} \circ \psi^\wedge .$$

Подставляя в (4), получаем

$$\varphi = \pi_\varphi \circ \dot{\varphi} \circ \omega_{\varphi,\psi} \circ \dot{\psi}^{-1} \circ \psi^\wedge .$$

Сравнение с (2) показывает, что в теореме 1

$$\chi = \pi_\varphi \circ \dot{\varphi} \circ \omega_{\varphi,\psi} \circ \dot{\psi}^{-1}.$$

5.9. Действия над линейными отображениями

А. *Если* $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(E, F)$, *то,* как показывает непосредственная проверка, χ*: E→ F, относящее каждому вектору x* $\in$ *E вектор*

$$\chi(x) = \varphi(x) + \psi(x), \tag{1}$$

линейно, χ называют *суммой* φ *и* ψ и обозначают $\varphi + \psi$.

Б. *Если E и F — векторные пространства над полем* К, $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ *и* $\gamma \in$ К, *то* ω: $E \to F$, *относящее каждому вектору x* $\in$ *E вектор*

$$\omega(x) = \gamma\varphi(x), \tag{2}$$

линейно. Действительно, аддитивность ω очевидна, и для каждого $\lambda \in$ К в силу коммутативности К имеем

$$\omega(\lambda x) = \gamma\varphi(\lambda x) = \gamma\lambda\varphi(x) = \lambda\gamma\varphi(x) = \lambda\omega(x).$$

ω называют *произведением* φ *на скаляр* γ и обозначают $\gamma\varphi$.

В. Сложение линейных отображений и умножение их на скаляры сводятся формулами (1) и (2) к таким же действиям над векторами. Поэтому из А и Б следует, что *если E и F — векторные пространства над одним и тем же полем* К, *то множество*

$\mathscr{L}(E, F)$ *всех линейных отображений E в F* при указанном определении сложения и умножения на скаляры *также является векторным пространством над* К. Нулевым вектором в $\mathscr{L}(E, F)$ служит, очевидно, нулевое отображение *E* в *F*.

Г. *Если* $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ *и* $\psi \in \mathscr{L}(F, G)$, *то* $\chi = \psi \circ \varphi \in \mathscr{L}(E, G)$ (т. е. *суперпозиция линейных отображений есть линейное отображение).* Действительно, согласно 2.1.К χ есть гомоморфизм аддитивной группы *E* в аддитивную группу *G*. При этом

$$\chi(\lambda x) = \psi(\varphi(\lambda x)) = \psi(\lambda\varphi(x)) = \lambda\psi(\varphi(x)) = \lambda\chi(x)$$

для любого $x \in E$ и любого скаляра λ.

Д. В силу Г в пространстве $\mathscr{L}(E, E)$ всех линейных отображений векторного пространства *E в себя* определено еще одно действие: *компонироваиие* (перемножение) его элементов. Оно обладает следующими свойствами:

1° $\varphi \circ (\psi \circ \chi) = (\varphi \circ \psi) \circ \chi$ (*ассоциативность*);

2° $\varphi \circ (\psi + \chi) = \varphi \circ \psi + \varphi \circ \chi$ и $(\psi + \chi) \circ \varphi = \psi \circ \varphi + \chi \circ \varphi$ (*дистрибутивность*);

3° $\lambda(\varphi \circ \psi) = (\lambda\varphi) \circ \psi = \varphi \circ (\lambda\psi)$ *(перестановочность с умножением на скаляры).*

Векторное пространство, в котором определено умножение элементов друг на друга, обладающее такими свойствами, называют *алгеброй.* Таким образом, $\mathscr{L}(E, E)$ есть алгебра относительно компонирования отображений. В этой алгебре существует *единица,* а именно, тождественное отображение пространства *E* на себя:

4° $\varphi \circ \iota = \iota \circ \varphi = \varphi$.

Линейные отображения λ_t (т. е. гомотетии и нулевое отображение) мы будем называть *скалярными* и обозначать просто λ. Тогда $\lambda\varphi = \lambda \circ \varphi$ и свойство 3° сводится к

3°′ $\lambda \circ \varphi = \varphi \circ \lambda$ (перестановочность со скалярными отображениями).

Вместо $\varphi \circ \psi$ мы будем писать также φψ, вместо $\varphi \circ \varphi$ — также φ^2 и т. п.

5.10. Проекторы

Определение. Пусть $F \subset\subset E$. *Проектором E на F* называется линейное отображение *E* в себя, переводящее *E* в *F* и оставляющее все векторы из *F* на месте.

А. Очевидно, *если* φ—*проектор E на F, то F есть множество тех* $x \in E$, *для которых* $\varphi(x)=x$.

Б. *Для того чтобы* $\varphi \in \mathscr{L}(E, E)$ *было проектором, необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi^2=\varphi$, В самом деле, пусть $\varphi(E)=F$. Согласно l.В $F\subset \subset E$. Условие же $\varphi^2=\varphi$ равносильно требованию, чтобы φ оставляло все векторы из F на месте. *В* самом деле, если $\varphi^2 = \varphi$ и $y \in F$, так что $y = \varphi(x)$, где $x \in E$, то $\varphi(y) = \varphi^2(x) = \varphi(x) = y$. Обратно, если $\varphi(y)=y$ для всех $y \in F$, то, каково бы ни было $x \in E$, $\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$, т. е. $\varphi^2 = \varphi$.

В. *Если* φ — *проектор, то* $\iota - \varphi$ — *также проектор, причем* $R_{\iota-\varphi} = K_\varphi$. Действительно, в силу Б и З.Д, $\varphi \circ (\iota - \varphi) = \varphi - \varphi^2 = 0$, а потому $(\iota-\varphi)^2 = \iota - \varphi - \varphi\circ(\iota-\varphi) = \iota - \varphi$ и, значит, $\iota - \varphi$ (в силу Б)—проектор. Так как при этом условие $x \in R_{\iota-\varphi}$ (в силу А) равносильно условию $(\iota - \varphi)(x) = x$, т, е. $\varphi(x) = 0$, то $R_{\iota-\varphi} = K_\varphi$.

По симметрии заключаем, что $R_\varphi = K_{\iota-\varphi}$.

Теорема 2. *Если* $E = E_1 \oplus E_2$, *то отображение* π *пространства E в себя, относящее каждому вектору* $x \in E$ *его (однозначно определенную) составляющую* x_1 *в разложении*

$$x = x_1 + x_2 \qquad (x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2), \tag{1}$$

является проектором E на E_1 *с ядром* $K_\pi = E_2$. *Обратно, если* φ— *заданный на E проектор, то* $E = R_\varphi \oplus K_\varphi$ *и* φ *относит каждому вектору* $x \in E$ *его составляющую в* R_φ *, определяемую этим разложением.*

Доказательство. Пусть $x, y \in E$, так что $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, где $x_1, y_1 \in E_1$, $x_2, y_2 \in E_2$. Тогда $x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$, где $x_1 + y_1 \in E_1$, $x_2 + y_2 \in E_2$, и потому $\pi(x + y) = x_1 + y_1 = \pi(x) + \pi(y)$. Аналогично, $\lambda x = \lambda x_1 + \lambda x_2$, где $\lambda x_1 \in E_1$, $\lambda x_2 \in E_2$, и потому $\pi(\lambda x) = \lambda x_1 = \lambda\pi(x)$. Таким образом, $\pi \in \mathscr{L}(E, E)$. Далее, так как разложением (1) для каждого $x_1 \in E_1$ служит $x_1 = x_1+0$, то $\pi(x_1) = x_1$ для всех $x \in E_1$ и $R_\pi = E_1$. Наконец, так как $\pi(x)=0$ равносильно тому, что в разложении (1) $x = 0+ x_2 \in E_2$, то $K_\pi = E_{2.г}$

Обратно, так как каждый вектор $x \in E$ можно представить в виде

$$x = \varphi(x) + (\iota - \varphi)(x), \tag{2}$$

то $E = R_\varphi + R_{\iota-\varphi}$ и, значит, в силу В, $E= R_\varphi + K_\varphi$. Далее, так как $x \in R_v$ означает, что $x = \varphi(x)$ (А), а $x \in K_\varphi$ означает, что $\varphi(x) = 0$, то $R_\varphi \cap K_\varphi = \{0\}$. Следовательно , $E = R_\varphi \oplus K_\varphi$, а тогда (2) показывает, в силу В, что $\varphi(x)$ есть составляющая x в R_φ.

Замечание. Так как каждое подпространство векторного пространства обладает дополнительным подпространством, то первой частью теоремы 2 устанавливается *существование проектора пространства E на любое его подпространство* E_1. Но даже в том случае, когда E_1 — (собственное) гиперподпространство, дополнительное к нему подпространство E_2 определено не однозначно. Так как проекторы π с различными ядрами $K_\pi = E_2$ различны, то мы видим вместе с тем, что одной своей противообластью проектор еще не определяется. Однако вторая часть теоремы 2 показывает, что *проектор однозначно определяется своими противообластью и ядром.* Мы будем называть проектор π теоремы 2 *проектором E на E_1 параллельно E_2.* Теорема 2 обобщается на разложения векторного пространства в прямую сумму любого числа его подпространств.

Теорема 3. *Пусть* $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ *—разложение векторного пространства E в прямую сумму его подпространств $E_1, \ldots, E_n$, т. е. каждый вектор $x \in E$ однозначно представим в виде*

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad где \quad x_k \in E_k \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Положим

$$\pi_k(x) = x_k \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Тогда π_k *— проекторы E на E_k, причем*

$$\pi_k \circ \pi_l = 0, \quad если \quad k \neq l,$$

и, очевидно,

$$\sum_{k=1}^{n} \pi_k = \iota. \tag{5}$$

Обратно, всякое разбиение (5) *тождественного отображения* ι *на сумму проекторов, удовлетворяющих условию* (4), *порождает разложение E в прямую сумму*

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n,$$

где $E_k = R_{\pi k}$, причем $\pi_k(x)$ есть составляющая x_k вектора $x \in E$ в E_k, определяемая этим разложением.

Доказательство. 1. Пусть $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$. Положим

$$\tilde{E}_k = \sum_{l \neq k} E_l.$$

Очевидно, $E = E_k \oplus \tilde{E}_k$ и, значит, π_k, по теореме 2, — проектор E на E_k. Так как при этом

$\pi_l(x) = x_l = \sum_{m=1}^{n} \delta_{lm} x_m$, то $\pi_k(\pi_l(x)) = \delta_{lk} x_k$, а потому $\pi_k \circ \pi_l = 0$, если $k \neq l$.

2. Пусть (5) — разбиение t на сумму проекторов, удовлетворяющих условию (4). Из (5) следует, что каждый вектор $x \in E$ представим в виде $x = \sum_{k=1}^{n} \pi_k(x)$, где ^(лОб $\pi_k(x) \in R_{\pi_k} = E_k$. Обратно, если дано какое-либо разложение (3) вектора x, то в силу А, Б и (4)

$$x_k = \pi_k(x_k) = \pi_k^2(x_k) = \pi_k\left(\sum_{l=1}^{n} \pi_l(x_l)\right) = \pi_k\left(\sum_{l=1}^{n} x_l\right) = \pi_k(x).$$

Таким образом, разложение (3) единственно, т. е. $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$; и при этом $\pi_k(x) = x_k$.

6. Линейный оператор

Линейное отображение линейного (векторного) пространства $\mathbb{V}$ в себя

$$\mathcal{A} : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{V}$$

называется линейным преобразованием $\mathbb{V}$ или линейным оператором1) на $\mathbb{V}$.

В дальнейшем под выражением оператор понимается исключительно линейный оператор (и линейное пространство $\mathbb{V}$ предполагается конечномерным!).

Напомню свойство линейности:

$$\mathcal{A}(X_1 + X_2) = \mathcal{A}(X_1) + \mathcal{A}(X_2), \quad \mathcal{A}(\alpha_1 X_1) = \alpha_1 \mathcal{A}(X_1),$$

или, в эквивалентном виде:

$$\mathcal{A}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 \mathcal{A}(X_1) + \alpha_2 \mathcal{A}(X_2)$$

для $\forall\ \{X_1, X_2\} \subset \mathbb{V},\ \forall\ \{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (здесь α_1, α_2 — константы из $\mathbb{R}$ если $\mathbb{V}$ вещественное пространство, и из $\mathbb{C}$, если оно комплексное).

Примеры линейных операторов

Бóльшую часть примеров пункта ☞ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ представляют именно линейные операторы. Укажу еще несколько, к которым буду часто обращаться.

П

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим следующие действия над вектором2) (x, y, z): поворот вокруг прямой $x = y = 2\,z$ на угол $\pi/3$; зеркальное отражение относительно плоскости $3\,x - y + z = 0$; растяжение в 3.14 раза. Все это — примеры линейных операторов. Но вот отображение сдвига $(x, y, z) \mapsto (x + 1, y, z + 2)$ оператором не является поскольку $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \mapsto (\alpha x + 1, \alpha y, \alpha z + 2) \neq \alpha(x + 1, y, z + 2)$.

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^3$ отображение ортогонального проектирования на плоскость $x + y - 7\,z = 0$ будет линейным оператором (а вот на плоскость $x + y - 7\,z = 1$ — не будет!). Вообще, в произвольном пространстве $\mathbb{V}$ разбитом в прямую сумму нетривиальных подпространств $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$ отображение, сопоставляющее вектору X его проекцию на подпространство $\mathbb{V}_1$ параллельно подпространству $\mathbb{V}_2$, будет оператором.

Пример. В пространстве $\mathbb{P}_3$ полиномов с вещественными коэффициентами степеней ≤ 3 отображение $\mathcal{A}$ действует по правилу $\mathcal{A}(f(x)) = f(x)(x^2 - 2) \pmod{x^4 - x^3 - x^2 + x}$, т.е. полином $f(x)$ отображается в остаток от деления произведения $f(x)(x^2-2)$ на $x^4-x^3-x^2+x$. Это отображение будет оператором в $\mathbb{P}_3$. Действительно, если

$$f_1(x)(x^2-2)\equiv q_1(x)(x^4-x^3-x^2+x)+r_1(x)\,,$$
$$f_2(x)(x^2-2)\equiv q_2(x)(x^4-x^3-x^2+x)+r_2(x),$$

при $\{q_1(x),q_2(x),r_1(x),r_2(x)\}\subset\mathbb{R}[x], \deg r_1(x)\le 3, \deg r_2(x)\le 3$, то

$$(\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x))(x^2-2)\equiv(\alpha_1 q_1(x)+\alpha_2 q_2(x))(x^4-x^3-x^2+x)+(\alpha_1 r_1(x)+\alpha_2 r_2(x));$$

очевидно, что $\deg(\alpha_1 r_1(x)+\alpha_2 r_2(x))\le 3$.

Пример. Задачу интерполяции можно интерпретировать как построение некоторого отображения. В интерполяционной таблице

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline y & y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{array} \qquad \textit{при} \qquad \{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\}\subset\mathbb{C}$$

будем считать узлы $\{x_j\}_{j=1}^n$ фиксированными, а значения $\{y_j\}_{j=1}^n$ — переменными. Эта таблица однозначно определяет интерполяционный полином $f(x)=A_0+A_1x+\dots+A_{n-1}x^{n-1}$ со свойством $f(x_j)=y_j$ при $j\in\{1,\dots,n\}$. При этом $\{A_j\}_{j=0}^{n-1}\subset\mathbb{C}$. Будет ли получившееся отображение

$$(y_1,\dots,y_n)\mapsto(A_0,A_1,\dots,A_{n-1})$$

оператором на $\mathbb{C}^n$? Покажем, что отображение

$$\mathcal{A}(y_1,\dots,y_n)=f(x)\in\mathbb{C}[x]$$

является линейным отображением. Действительно, решением задачи интерполяции для таблицы

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	αy_1	αy_2	$\dots$	αy_n

при $\forall\alpha\in\mathbb{C}$

является полином $\alpha f(x)$. Если же, вдобавок, решением задачи интерполяции для таблицы

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	z_1	z_2	$\dots$	z_n

при $\{z_1,\dots,z_n\}\subset\mathbb{C}$

является полином $g(x)\in\mathbb{C}[x], \deg g(x)\le n-1$, то решением задачи интерполяции для таблицы

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1+z_1	y_2+z_2	$\dots$	y_n+z_n

будет полином $f(x)+g(x)$ и этот полином будет единственным решением среди полиномов степеней $\le n-1$. Таким образом, линейность отображения $\mathcal{A}$ установлена. Далее, множество $\mathbb{P}_{n-1}$ полиномов из $\mathbb{C}[x]$ степеней $\le n-1$ изоморфно пространству $\mathbb{C}^n$. Таким образом, «сложное» отображение

$$(y_1,\dots,y_n)\mapsto f(x)=A_0+A_1x+\dots+A_{n-1}x^{n-1}\mapsto(A_0,A_1,\dots,A_{n-1})$$

является линейным отображением из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$, т.е. оператором на $\mathbb{C}^n$.

По аналогии с задачей алгебраической интерполяции, можно поставить и задачу тригонометрической интерполяции. Имеем здесь «точку входа» в теорию дискретного преобразования Фурье.

Этот пример можно «развернуть»: НИЖЕ будет показано, что произвольный оператор, действующий в пространстве размерности n полностью определяется своими значениями в n точках пространства. Важное отличие от традиционной, числовой интерполяции: условие различности этих точек не является достаточным для однозначного определения оператора !

В пространстве $\mathbb{P}_2$ оператор действует следующим образом:
$\mathcal{A}(x^2+x+1)=2\,x+1,\ \mathcal{A}(x^2-x-1)=2\,x^2-1,\ \mathcal{A}(x+1)=-x^2+x+1$.

Вычислить $\mathcal{A}(x^2)$ и $\mathcal{A}(x^2+1)$.

Пример. В линейном пространстве квадратных матриц порядка n с вещественными элементами рассмотрим коммутирующее отображение

$$\mathcal{K}(X)=AX-XA\ ,$$

а также отображение Ляпунова

$$\mathcal{V}(X)=A^{\top}X+XA$$

при произвольной фиксированной квадратной матрице A и $^{\top}$ означающем транспонирование. Легко проверить, что оба отображения $\mathcal{K}$ и $\mathcal{V}$ являются операторами. ♦

6.1.Основные определения

Все введенные для линейного отображения понятия переносятся на этот частный случай. Например, ядром оператора называется множество векторов, отображаемых оператором в нулевой вектор:

$$\mathcal{K}er(\mathcal{A})=\left\{X\in\mathbb{V}\middle|\mathcal{A}(X)=\mathbb{O}\right\}\ ;$$

а образом оператора называется множество всех векторов из $\mathbb{V}$, для каждого из которых существует прообраз в том же пространстве:

$$\mathcal{I}m(\mathcal{A}) = \{Y \in \mathbb{V} \mid \exists X \in \mathbb{V},\ \mathcal{A}(X) = Y\} .$$

Теорема 1. Множества $\mathcal{K}er(\mathcal{A})$ и $\mathcal{I}m(\mathcal{A})$ являются *подпространствами* пространства $\mathbb{V}$.

Доказать, что для оператора в $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеет место равенство $\mathcal{K}er(\mathcal{A}) = \mathcal{I}m(\mathcal{A})$.

Для оператора $\mathcal{A}$ его дефектом его называется размерность ядра, а его рангом — размерность образа:

$$\mathrm{dfc}(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{K}er(\mathcal{A})),\ \ \mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{I}m(\mathcal{A})) .$$

Оператор называется невырожденным если $\mathrm{dfc}(\mathcal{A}) = 0$.

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^3$ оператор проектирования на плоскость:

$$\mathcal{A}\,(x, y, z) \longmapsto (x, y, 0)$$

является вырожденным поскольку его ядро нетривиально:

$\mathcal{K}er(\mathcal{A}) = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$. ♦

Следующий результат является следствием теоремы 4 из ☞ПУНКТА.

Теорема 2. Имеет место равенство:

$$\dim \mathbb{V} = \dim(\mathcal{K}er(\mathcal{A})) + \dim(\mathcal{I}m(\mathcal{A})) = \mathrm{dfc}(\mathcal{A}) + \mathrm{rank}(\mathcal{A}) .$$

В чем смысл свойства вырожденности оператора? — В том, что такой оператор «схлопывает» пространство, в котором действует: $\dim(\mathcal{I}m(\mathcal{A})) < \dim \mathbb{V}$. Происходит уменьшение размерности подобное тому, что описано в предыдущем примере: трехмерное пространство прообразов оператором проектирования отображается в двухмерное пространство всевозможных образов.

Отображение $\mathcal{P}: \ \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{V}$ называется произведением оператора $\mathcal{A}$ на оператор $\mathcal{B}$ если $\mathcal{P}(X) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(X))$ для любого $X \in \mathbb{V}$. Записывать этот факт будем в виде $\mathcal{P} = \mathcal{A}\,\mathcal{B}$.

Фактически, произведение операторов — частный случай понятия сложной функции.

Теорема 3. Произведение операторов является оператором на $\mathbb{V}$. Операция произведения ассоциативна.

Доказательство. Имеем на основании свойства линейности

$$\mathcal{P}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)) = \mathcal{A}(\alpha_1 \mathcal{B}(X_1) + \alpha_2 \mathcal{B}(X_2)) =$$
$$= \alpha_1 \mathcal{A}(\mathcal{B}(X_1)) + \alpha_2 \mathcal{A}(\mathcal{B}(X_2)) = \alpha_1 \mathcal{P}(X_1) + \alpha_2 \mathcal{P}(X_2).$$

Далее, для любого вектора X:

$$\mathcal{A}_1(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3(X)) = \mathcal{A}_1(\mathcal{A}_2(\mathcal{A}_3(X))) = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2(\mathcal{A}_3(X)) ,$$

откуда и следует ассоциативность.

Говорят, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ коммутируют если $\mathcal{A}\,\mathcal{B} = \mathcal{B}\,\mathcal{A}$.

Пример. В пространстве полиномов $\mathbb{P}_n$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$\mathcal{A} = x\frac{d}{dx} \times \square - 1 \times \square \ : \ \mathcal{A}(p(x)) = xp'(x) - p(x) \ .$$

Этот оператор не коммутирует с обычным оператором дифференцирования $\mathcal{B} = \dfrac{d}{dx}$:

$$\mathcal{A}(x^2) = x^2, \quad \mathcal{B}(\mathcal{A}(x^2)) = 2x, \quad \mathcal{B}(x^2) = 2x, \quad \mathcal{A}(\mathcal{B}(x^2)) = 0 \ .$$

Оператор $\mathcal{E}$, отображающий произвольный вектор $X \in \mathbb{V}$ в себя : $\mathcal{E}(X) = X$, называется тождественным на $\mathbb{V}$. Оператор $\mathcal{B}$ называется (левым) обратным оператору $\mathcal{A}$, если $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{E}$. В этом случае оператор $\mathcal{A}$ называют обратимым и записывают: $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$.

Не всякий оператор обратим.

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^3$ для оператора проектирования на плоскость:

$$\mathcal{A}\,(x, y, z) \longmapsto (x, y, 0)$$

обратного не существует, т.к. $\mathcal{A}(0,0,1) = (0,0,0)$ и ни при каком выборе оператора $\mathcal{B}$ нельзя добиться выполнения равенства $\mathcal{B}(0,0,0) = (0,0,1)$. ♦

Показать, что обратным для оператора

$$\frac{1}{x}\int_0^x \ : p(x) \longmapsto \frac{1}{x}\int_0^x p(t)dt \ ,$$

на $\mathbb{P}_n$ является оператор

$$\frac{d}{d\,x}\,(x\times\square)\quad : p(x)\longmapsto (xp(x))'\ .$$

Т

Теорема 4. Оператор $\mathcal{A}$ обратим тогда и только тогда, когда когда он невырожден: $\operatorname{dfc}(\mathcal{A})=0$. В этом случае $\mathcal{A}^{-1}$ единствен и коммутирует с $\mathcal{A}$.

Из теоремы следует, что левый обратный оператор к оператору $\mathcal{A}$ — если он существует — совпадает с правым обратным оператором. Это утверждение не будет справедливым для бесконечномерных пространств.

При $K\in\mathbb{N}$ и $K>1$, K-я степень оператора $\mathcal{A}$ определяется рекурсивной формулой

$$\mathcal{A}^{K}=\mathcal{A}(\mathcal{A}^{K-1})\ .$$

Если, вдобавок, $\mathcal{A}$ невырожден, то отрицательная степень оператора определяется формулой

$$\mathcal{A}^{-K}=\left(\mathcal{A}^{-1}\right)^{K}\ .$$

Полагают также $\mathcal{A}^{0}=\mathcal{E}$ для любого $\mathcal{A}\neq\mathcal{O}$.

Теорема 5. Степени оператора $\mathcal{A}$ коммутируют:

$$\mathcal{A}^{K}\mathcal{A}^{L}=\mathcal{A}^{L}\mathcal{A}^{K}=\mathcal{A}^{K+L}\ .$$

Пример. K-й степенью оператора дифференцирования в пространстве полиномов $\mathbb{P}_n$ будет оператор нахождения K-й производной:

$$\left(\frac{d}{d\,x}\right)^{K}=\frac{d^K}{d\,x^K}\ .$$

Заметим, что при $K>n$ этот оператор будет нулевым.

Пример. В произвольном пространстве $\mathbb{V}$ разбитом в прямую сумму нетривиальных подпространств $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$ оператор проектирования $\mathcal{P}$ на подпространство $\mathbb{V}_1$ параллельно подпространству $\mathbb{V}_2$ обладает свойством $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ (проектирование проекции оставляет ее на месте).

Оператор $\mathcal{A}$, обладающий свойством $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, называется идемпотентным3).

Пример. В пространстве $\mathbb{P}_3$ полиномов с вещественными коэффициентами степени ≤ 3 отображение $\mathcal{A}$ действует по правилу
$$\mathcal{A}(f(x)) = f(x)(x^2-2) \pmod{x^4 - x^3 - x^2 + x} ,$$

т.е. полином $f(x)$ отображается в остаток от деления произведения $f(x)(x^2-2)$ на $x^4 - x^3 - x^2 + x$. Для этого оператора K -й его степенью является оператор

$$\mathcal{B}(f(x)) = f(x)(x^2-2)^K \pmod{x^4 - x^3 - x^2 + x} .$$

Действительно, если

$$f(x)(x^2-2) \equiv q(x)(x^4 - x^3 - x^2 + x) + r(x) \quad npu \quad \{q(x), r(x)\} \subset \mathbb{R}[x] \quad u \quad \deg r(x) \le 3,$$

то

$$f(x)(x^2-2)^2 \equiv q(x)(x^4 - x^3 - x^2 + x)(x^2-2) + r(x)(x^2-2) .$$

Но тогда

$$\mathcal{A}^2(f(x)) = \mathcal{A}(r(x)) = r(x)(x^2-2) \pmod{x^4 - x^3 - x^2 + x} \equiv$$
$$\equiv f(x)(x^2-2)^2 \pmod{x^4 - x^3 - x^2 + x} .$$

Завершает доказательство *святая индукция* по степени K …

Пусть задан произвольный полином
$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$ из $\mathbb{R}[x]$ или $\mathbb{C}[x]$.
Выражение

$$g(\mathcal{A}) = b_0\mathcal{A}^m + b_1\mathcal{A}^{m-1} + \cdots + b_m\mathcal{E}$$

будем называть операторным полиномом.

Доказать, что операторные полиномы коммутируют:
$g_1(\mathcal{A})g_2(\mathcal{A}) = g_2(\mathcal{A})g_1(\mathcal{A})$.
Доказать, что для любого $\mathcal{A} \in \mathcal{H}om(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ всегда найдется полином $g(x)$, $\deg g \leq n^2 + 1$ такой, что $g(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.

Сформулируем еще один результат, являющийся частным случаем приведенного в пункте ☞СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ.

Теорема 6. Пусть $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ — произвольный базис $\mathbb{V}$, а $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — произвольные векторы того же пространства. Существует единственный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{V}$ такой, что
$\mathcal{A}(X_1) = Y_1, \mathcal{A}(X_2) = Y_2, \ldots, \mathcal{A}(X_n) = Y_n$.

Доказательство. Искомый оператор строится следующим образом. Если $X = x_1X_1 + x_2X_2 + \cdots + x_nX_n$ — разложение произвольного вектора $X \in \mathbb{V}$ по базису, то

$$\mathcal{A}(X) = x_1Y_1 + x_2Y_2 + \cdots + x_nY_n .$$

Единственность этого оператора доказывается от противного. Любой другой оператор $\mathcal{B}$, удовлетворяющий условиям $\{\mathcal{B}(X_j) = Y_j\}_{j=1}^n$, будет действовать на тот же вектор X с тем же результатом:

$$\mathcal{B}(X) = x_1\mathcal{B}(X_1) + x_2\mathcal{B}(X_2) + \cdots + x_n\mathcal{B}(X_n) = x_1Y_1 + x_2Y_2 + \cdots + x_nY_n = \mathcal{A}(X) .$$

Таким образом, оператор — как функция, действующая в n -мерном линейном пространстве, однозначно определяется заданием на n линейно независимых векторах. В доказательстве теоремы дается и конструктивный способ представления оператора по этим значениям (т.е. строится его "интерполяционная формула").

6.2. Матрица оператора

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}$ на $\mathbb{V}$ и пусть $\{X_1, \dots, X_n\}$ — базис $\mathbb{V}$. Являясь частным случаем линейного отображения, оператор должен обладать и соответствующей матрицей. Существенной особенностью, отличающей наш случай от рассмотренного в пункте ☞ МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ, является невозможность произвола при выборе базиса для $\mathcal{I}m(\mathcal{A})$. Поскольку $\mathcal{I}m(\mathcal{A})$ является подпространством $\mathbb{V}$, то было бы слишком большой роскошью иметь два разных базиса для одного и того же пространства.

Найдем координаты образов базисных векторов $\mathcal{A}(X_1), \dots, \mathcal{A}(X_n)$ в том же базисе $\{X_1, \dots, X_n\}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{A}(X_1) & = & \alpha_{11}X_1 + \alpha_{21}X_2 + \cdots + \alpha_{n1}X_n, \\ \mathcal{A}(X_2) & = & \alpha_{12}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \cdots + \alpha_{n2}X_n, \\ \dots & & \dots, \\ \mathcal{A}(X_n) & = & \alpha_{1n}X_1 + \alpha_{2n}X_2 + \cdots + \alpha_{nn}X_n. \end{array}\right.$$

Матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n},$$

в столбцах которой стоят координаты образов базисных векторов, называется матрицей оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{X_1, \dots, X_n\}$.

Пример. Известны образы базисных векторов $\mathbb{R}^3$ под действием оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix},\ \mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\0\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в исходном базисе.

Решение. Элементы матрицы $\mathbf{A}$ ищутся по формулам из определения, которые можно переписать в матричном виде:

$$[X_1, \dots, X_n]\,\mathbf{A} = [\mathcal{A}(X_1), \dots, \mathcal{A}(X_n)]\ .$$

Откуда

$$\mathbf{A} = [X_1, \dots, X_n]^{-1}\,[\mathcal{A}(X_1), \dots, \mathcal{A}(X_n)]\ ,$$

и для нашего примера эта формула дает

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 3 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2 & -1 & -2\\ 1 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -7 \\ -3 & 11 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 7 \\ 6 & 13 & -10 \\ 17 & 36 & -27 \end{pmatrix}.$$

В пространстве $\mathbb{P}_3$ полиномов с вещественными коэффициентами степени ≤ 3 оператор $\mathcal{A}$ действует по правилу

$$\mathcal{A}(f(x)) = f(x)(x^3 + 2\,x^2 + 1) \pmod{x^4 + 4},$$

т.е. полином $f(x)$ отображается в остаток от деления произведения $f(x)(x^3 + 2\,x^2 + 1)$ на $x^4 + 4$. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Координаты произвольного вектора $X = x_1 X_1 + \cdots + x_n X_n$ и его образа $Y = \mathcal{A}(X) = y_1 X_1 + \cdots + y_n X_n$ связаны формулой

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Как изменяется матрица оператора при переходе к новому базису?

Теорема 2. Если C — *матрица перехода от старого базиса к новому*, то матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ оператора в старом и новом базисах связаны формулой:

$$\mathbf{B} = C^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot C\,.$$

Доказательство ☞ЗДЕСЬ.

Пример. Оператор $\mathcal{A}$ в базисе пространства $\mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}}_{X_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix}}_{X_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}}_{X_3}$$

имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{X}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{X}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{X}_3}.$$

Решение. Матрица C перехода от старого базиса к новому находится по ☞формуле

$$C = [X_1|X_2|X_3]^{-1} \cdot [\mathfrak{X}_1|\mathfrak{X}_2|\mathfrak{X}_3] =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 21/5 & -7/5 & -6 \\ 29/5 & -8/5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

По теореме:

$$\mathbf{B} = C^{-1}\mathbf{A}C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -13 & 7 \\ 6 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, связанные соотношением $\mathbf{B} = C^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot C$ при какой-то неособенной матрице C, называются подобными, этот факт будем записывать: $\mathbf{A} \doteq \mathbf{B}$.

Доказать, что отношение подобия есть отношение эквивалентности, и если $\mathbf{A} \doteq \mathbf{B}$ то $g(\mathbf{A}) \doteq g(\mathbf{B})$ при любом полиноме $g(x)$.
Т

Теорема 3. Для оператора $\mathcal{A}$ ранг его матрицы является инвариантом, т.е. не зависит от выбора базиса пространства. Этот ранг совпадает с рангом оператора $\mathcal{A}$.

Доказательство. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — матрицы оператора в двух разных базисах, то они являются подобными: $\mathbf{B} = C^{-1}\mathbf{A}C$. По свойству ранга матрицы имеем: $\operatorname{rank}(\mathbf{B}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A})$.

=>

Дефект оператора $\mathcal{A}$ совпадает с дефектом его матрицы в произвольном базисе пространства.

Теорема 4. Для оператора $\mathcal{A}$ определитель и след его матрицы являются инвариантами, т.е. не зависят от выбора базиса пространства.

Доказательство. Действительно, для подобных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, на основании теоремы Бине-Коши имеем:

$$\det(\mathbf{B}) = \det(C^{-1}\mathbf{A}C) = \det(C^{-1}) \cdot \det(\mathbf{A}) \cdot \det(C) = \det(\mathbf{A}).$$

Далее, по свойству следа матрицы:

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{B}) = \mathrm{Sp}(C^{-1}\mathbf{A}C) = \mathrm{Sp}(\mathbf{A} \cdot C \cdot C^{-1}) = \mathrm{Sp}(\mathbf{A}) .$$

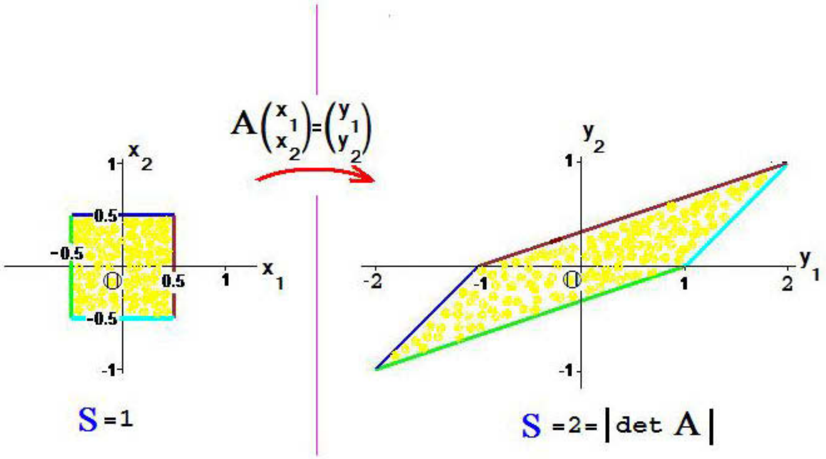
Этот результат позволяет ввести понятие определителя и следа оператора $\mathcal{A}$ — посредством матрицы этого оператора в произвольном базисе пространства. Такое определение оказывается корректным поскольку оба значения не зависят от выбора базиса.

Каков "физический" смысл определителя оператора?

— Для ответа на этот вопрос рассмотрим оператор в $\mathbb{R}^2$, заданный формулой:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Свойство линейности оператора как отображения плоскости проявляется в том, что параллельные отрезки он отображает в параллельные же отрезки (см. упражнение к теореме 2 из ☞ПУНКТА), и, следовательно, любой параллелограмм отображается им в параллелограмм. Площади соответствующих параллелограммов оказываются связанными через определитель матрицы — более точно, через модуль этого определителя. В частном случае настоящего примера это проверяется непосредственно; что касается обобщения на произвольное евклидово пространство, в котором понятие объема вводится аксиоматически то сошлюсь на упражнение 3 ☞ЗДЕСЬ.



Иными словами: «физический» смысл определителя оператора заключается в том, что модуль его значения представляет коэффициент расширения4)объема (в настоящем примере — площади) тела (соответственно, плоской фигуры) под воздействием этого оператора.

А вот объяснить «физический» смысл следа оператора посложнее. Теорема 5. Оператор обратим тогда и только тогда, когда когда его определитель отличен от нуля.

Теорема 6. Линейное пространство $\mathcal{H}om(\mathbb{V},\mathbb{V})$ операторов на $\mathbb{V}, \dim \mathbb{V} = n$ изоморфно линейному пространству квадратных матриц порядка n (с элементами из $\mathbb{R}$ или из $\mathbb{C}$).

Это утверждение является простым следствием теоремы 2, приведенной в пункте ☞МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ. Однако в случае операторов установленный изоморфизм сохранит не только результат операции сложения, но и результат операции умножения:

если $\mathcal{A}_1 \leftrightarrow \mathbb{A}_1$, $\mathcal{A}_2 \leftrightarrow \mathbb{A}_2$, то
$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \leftrightarrow \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2$, $\lambda\mathcal{A}_1 \leftrightarrow \lambda\mathbb{A}_1$, $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \leftrightarrow \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2$.

Сформулируем этот «усиленный вариант» изоморфизма в виде набора свойств, которыми будем пользоваться по мере возникновения потребности.

Теорема 7. В любом базисе пространства

а) матрица нулевого оператора $\mathcal{O}$ является нулевой матрицей $\mathbb{O}$, а матрица тождественного оператора $\mathcal{E}$ является единичной матрицей E ; обратно: если матрица оператора в этом базисе — нулевая (единичная), то оператор является нулевым (соответственно, тождественным);

б) матрица произведения операторов совпадает с произведением матриц этих операторов5);

в) коммутирующим операторам соответствуют коммутирующие матрицы;

г) если $\mathbf{A}$ — матрица оператора, то $\mathbf{A}^{-1}$ — матрица обратного оператора;

д) если $\mathbf{A}$ — матрица оператора $\mathcal{A}$, то матрицей операторного полинома $g(\mathcal{A})$ является матрица $g(\mathbf{A})$.

6.3. Матрица оператора и матрица перехода от базиса к базису

Эти матрицы как-то взаимодействовали между собой в предыдущем пункте, хотя вторая была определена совершенно в другом разделе. Обе матрицы квадратные, обе имеют в определении «завязку» на базис пространства $\mathbb{V}$. У начинающих изучать теорию часто возникает путаница при различении этих определений.

«Физический» смысл этих понятий различен. Образно говоря, если рассматривать оператор как процесс (точнее: установленную связь между входными и выходными значениями процесса), то выбор базиса можно интерпретировать как выбор точки зрения на этот процесс (можно трактовать эти слова как формализацию выражения «рассмотрим этот процесс под другим углом»).

Тем не менее, с чисто формальной точки зрения, матрица C перехода от базиса $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ пространства $\mathbb{V}$ к какому-то другому базису $\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n\}$ того же пространства может считаться матрицей некоторого оператора, действующего в этом пространстве. В самом деле, на основании теоремы, приведенной в конце ☞ПУНКТА, существует единственный оператор $\mathcal{C}$, переводящий старые базисные векторы в новые, взятые в той же последовательности:

$$\mathcal{C}(X_1) = \mathfrak{X}_1, \mathcal{C}(X_2) = \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathcal{C}(X_n) = \mathfrak{X}_n \ .$$

Но тогда, по определению, матрица оператора $\mathcal{C}$ в базисе $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ совпадает с матрицей C перехода от базиса $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ к базису $\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n\}$.

Я буду записывать матрицы операторов и матрицы переходов от базиса к базису в разных стилях: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots$ и, соответственно, $C, P, T, \ldots$ — с целью быстрого распознавания их «физической» сущности.

Матрица оператора проектирования

Настоящий пункт может быть пропущен при первоначальном чтении.
Теорема. Рассмотрим линейную оболочку линейно независимой системы столбцов $\{Y_1, \ldots, Y_k\} \subset \mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{M} = \left\{ \lambda_1 Y_1 + \cdots + \lambda_k Y_k \mid \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \subset \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}(Y_1, \ldots, Y_k) \, .$$

Пусть *скалярное произведение* векторов X и Y задается стандартным способом, т.е. $(X, Y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

Ближайшей к точке $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ точкой многообразия (или ортогональной проекцией точки X_0 на многообразие) $\mathbb{M}$ является

$$X_* = \mathbf{L}(\mathbf{L}^\top \mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}^\top X_0 \, .$$

Здесь $\mathbf{L} = [Y_1 | \dots | Y_k]_{n\times k}$.

Матрица $\mathbf{L}^\top \mathbf{L}$ невырождена, поскольку является матрицей Грама

$$\mathbf{L}^\top \mathbf{L} = \begin{pmatrix} Y_1^\top Y_1 & Y_1^\top Y_2 & \dots & Y_1^\top Y_k \\ Y_2^\top Y_1 & Y_2^\top Y_2 & \dots & Y_2^\top Y_k \\ \dots & & & \dots \\ Y_k^\top Y_1 & Y_k^\top Y_2 & \dots & Y_k^\top Y_k \end{pmatrix}$$

системы линейно независимых столбцов $\{Y_1, \dots, Y_k\}$.

Доказательство. Пусть $X_0 = X_0^{\|} + X_0^{\perp}$, где $X_0^{\|}$ — ортогональная проекция точки X_0 на $\mathbb{M}$, а $X_0^{\perp}$ — ортогональная составляющая. Тогда

$$\mathbf{L}^\top X_0^{\perp} = \mathbb{O}$$

поскольку $Y_1^\top X_0^{\perp} = 0, \dots, Y_k^\top X_0^{\perp} = 0$. Далее, $X_0^{\|}$ можно разложить по базису $\{Y_1, \dots, Y_k\}$:

$$X_0^{\|} = \alpha_1 Y_1 + \dots + \alpha_k Y_k \quad npu \quad \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \mathbb{R} \, .$$

Следовательно,

$$\mathbf{L}^\top X_0 = \mathbf{L}^\top (X_0^{\|} + X_0^{\perp}) = \mathbf{L}^\top X_0^{\|} = \mathbf{L}^\top (\alpha_1 Y_1 + \dots + \alpha_k Y_k) =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 Y_1^\top Y_1 + \dots + \alpha_k Y_1^\top Y_k \\ \alpha_1 Y_2^\top Y_1 + \dots + \alpha_k Y_2^\top Y_k \\ \dots \\ \alpha_1 Y_k^\top Y_1 + \dots + \alpha_k Y_k^\top Y_k \end{pmatrix} = \mathbf{L}^\top \mathbf{L} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} .$$

Тогда

$$\mathbf{L}(\mathbf{L}^\top \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^\top X_0 = \mathbf{L} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \alpha_1 Y_1 + \dots + \alpha_k Y_k = X_0^{\|} .$$

На основании теорем 1 и 2, приведенных ☞ЗДЕСЬ, точка $X_0^{\|}$ является ближайшей точкой многообразия $\mathbb{M}$ к точке X_0 . ♦

Матрица $P = \mathbf{L}(\mathbf{L}^\top \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^\top$ является матрицей оператора ортогонального проектирования на многообразие $\mathbb{M}$ в стандартном базисе

$$\left\{ \mathfrak{e}_j = [\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{j}, 0, \dots, 0]^\top \right\}_{j=1}^{n} .$$

Она симметрична и идемпотентна, т.е. обладает свойством $P^2 = P$.

П

Пример. В $\mathbb{R}^3$ найти матрицу проектирования на плоскость $x+y+z=0$.

Решение. Параметрическое задание плоскости:

$$\mathbb{M}=\{\lambda_1\underbrace{[1,-1,0]^\top}_{Y_1}+\lambda_2\underbrace{[0,1,-1]^\top}_{Y_2}\,|\{\lambda_1,\lambda_2\}\subset\mathbb{R}\}\,.$$

Имеем:

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\0&-1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{L}^\top\mathbf{L}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ (\mathbf{L}^\top\mathbf{L})^{-1}=\begin{pmatrix}2/3&1/3\\1/3&2/3\end{pmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{L}(\mathbf{L}^\top\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}^\top=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}.$$

В общем случае отображение точки X_0 на ближайшую к ней точку произвольного многобразия

$$\mathbb{M}=\left\{Y_0+\lambda_1Y_1+\dots+\lambda_kY_k\ \middle|\ \{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}\subset\mathbb{R}\right\}$$

при Y_0 линейно независимом от $\{Y_1,\dots,Y_k\}$ не является линейным оператором, а относится к типу аффинных отображений. Выражение для этого отображения см. в разделе ☞ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ.

6.4. Инвариантное подпространство

Задача. Подобрать базис пространства $\mathbb{V}$ так, чтобы матрица заданного оператора $\mathcal{A}$ имела наиболее простой вид.

Исследуем действие оператора $\mathcal{A}$ на произвольное подпространство $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}$:

$$\mathcal{A}(\mathbb{V}_1) = \{Y \in \mathbb{V} \mid Y = \mathcal{A}(X),\ X \in \mathbb{V}_1\} \ .$$

Вообще говоря, множества $\mathbb{V}_1$ и $\mathcal{A}(\mathbb{V}_1)$ будут различными, т.е. $\exists X_1 \in \mathbb{V}_1$ такой, что $\mathcal{A}(X_1) \notin \mathbb{V}_1$.

Подпространство $\mathbb{V}_1$ называется инвариантным подпространством оператора $\mathcal{A}$, если оно отображается этим оператором в себя:

$$\mathcal{A}(\mathbb{V}_1) \subset \mathbb{V}_1 \ .$$

$\mathbb{V}_1 = \{\mathbb{O}\}$ и $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}$ — тривиальные инвариантные подпространства произвольного оператора $\mathcal{A}$.

Нас будут интересовать нетривиальные инвариантные подпространства.

Пример. Оператор

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

задает в пространстве поворот вокруг оси $\mathbb{O}z$ на угол $+\pi/4$. Нетривиальными инвариантными подпространствами будут

а) ось вращения $\mathbb{V}_1 = \{(0,0,z)^\top \mid z \in \mathbb{R}\}$, $\dim \mathbb{V}_1 = 1$ и

б) плоскость, перпендикулярная оси вращения
$\mathbb{V}_2 = \{(x, y, 0)^\top \mid \{x, y\} \subset \mathbb{R}\}$, $\dim \mathbb{V}_2 = 2$.

Пример. Оператор

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix}$$

задает на плоскости «растяжение»: x -компонента увеличивается в λ_1 раз, а y -компонента — в λ_2 раз. При любой комбинации коэффициентов растяжения координатные оси будут инвариантными подпространствами. Однако в частном случае $\lambda_1 = \lambda_2$ инвариантной будет также любая прямая, проходящая через начало координат.

Пример. Оператор в $\mathbb{R}^n$ задан блочной матрицей

$$X \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & * \\ \mathbb{O} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} X$$

где $\mathbf{A}_1$ — $n_1 \times n_1$ -матрица, $\mathbf{A}_2$ — $(n - n_1) \times (n - n_1)$ -матрица. Множество столбцов

$$\mathbb{V}_1 = \left\{ X = [x_1, \ldots, x_{n_1}, 0, \ldots, 0]^\top \middle| \{x_1, \ldots, x_{n_1}\} \subset \mathbb{R} \right\}$$

образует инвариантное подпространство, $\dim \mathbb{V}_1 = n_1$. Если же, вдобавок, матрица, обозначенная $*$ — нулевая, то вторым инвариантным подпространством будет

$$\mathbb{V}_2 = \left\{ X = [0, \ldots, 0, x_{n_1+1}, \ldots, x_n]^\top \middle| \{x_{n_1+1}, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R} \right\}.$$

Теорема. $\mathcal{K}er(\mathcal{A})$ и $\mathcal{I}m(\mathcal{A})$ — инвариантные подпространства оператора $\mathcal{A}$.

Теорема. Если пространство $\mathbb{V}$ раскладывается в *прямую сумму подпространств*, инвариантных относительно оператора $\mathcal{A}$, то существует базис пространства, в котором матрица оператора будет блочно-диагональной.

Теорема обобщается очевидным образом на произвольное число слагаемых подпространств: $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{V}_k$. Если при этом $\dim \mathbb{V}_1 = \dots = \dim \mathbb{V}_k = 1$, то матрица оператора в базисе, полученном объединением базисных векторов слагаемых подпространств, становится диагональной — это и является решением задачи, поставленной в начале пункта.

6.5. Собственное число и собственный вектор

Задача. Найти одномерные инвариантные подпространства оператора.

Вектор $X \in \mathbb{V}$ называется собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, если

$\mathbf{a})X \neq \mathbb{O}, \quad u \quad \mathbf{b})\ \exists\ \lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $\mathcal{A}(X) = \lambda X$.

В этом случае число λ называется собственным или характеристическим числом оператора, соответствующим (или принадлежащим) данному собственному вектору; обратно, говорят, что вектор X принадлежит собственному числу λ.

Вопрос существования хотя бы одного собственного числа для произвольного оператора $\mathcal{A}$ остается пока открытым. Однако, свойство линейности оператора гарантирует, что если это число существует, то ему соответствует бесконечное множество собственных векторов:

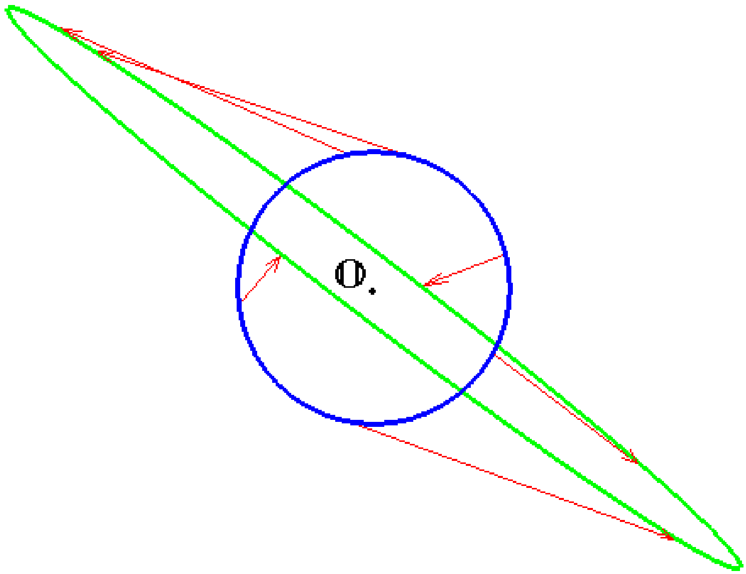
$$\mathcal{A}(X) = \lambda X \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(t\,X) = t\mathcal{A}(X) = t\lambda\,X\ ,$$

т.е. если вектор $X \in \mathbb{V}$ является собственным, то и вектор $t\,X$ будет собственным при любом скаляре $t \neq 0$. Заметим, что собственное число разыскивается во множестве комплексных чисел: вопрос о существовании вещественного собственного числа — даже в случае вещественного пространства $\mathbb{V}$ — остается открытым. Геометрический смысл вещественных собственных чисел и векторов проясняет следующий пример.

Пример. Оператор

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -5/2 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

задает отображение плоскости $\mathbb{R}^2$. На рисунке показан результат действия этого отображения на единичную окружность. Все точки плоскости, за исключением начала координат $\mathbb{O}$, изменят свое положение — ни одна не останется на месте.



Если рассмотреть эти точки как концы векторов, имеющих начало в $\mathbb{O}$, то смещения точек под действием оператора можно представить в виде двух составляющих: растяжения (т.е. увеличения расстояния до начала координат) и поворота вокруг начала координат на некоторый угол. И только по двум направлениям плоскости поворота не происходит. Точки окружности с координатами

$$\pm(0.823, -0.568)^{\top} \quad \text{и} \quad \pm(0.960, 0.278)^{\top}$$

будут смещаться без поворота. Эти точки и задают координаты конца собственного вектора. А соответствующие им собственные числа 2.725 и 0.275 определяют коэффициенты сдвига. Если вообразить оператор как деформацию физической среды, заполняющей плоскость, то можно сказать, что собственный вектор задает направление, на котором действие оператора сводится к растяжению, при этом коэффициент растяжения и будет собственным числом.

Анимация процесса ☞ЗДЕСЬ (1500 Kb, gif).

Пример другого оператора

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

показывает, что существование вещественных собственных чисел вовсе не гарантировано даже в случае оператора в вещественном пространстве: в этом примере все точки плоскости повернутся вокруг начала координат.

Доказать, что $\operatorname{dfc}(\mathcal{A}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{A}$ имеет собственное число, равное нулю.
Теорема. Любой собственный вектор оператора порождает его одномерное инвариантное подпространство, и обратно: любой ненулевой вектор одномерного инвариантного подпространства оператора является собственным вектором.

Пример. В пространстве $\mathbb{P}_3$ полиномов с вещественными коэффициентами степени ≤ 3 оператор $\mathcal{A}$ действует по правилу

$$\mathcal{A}(f(x)) = f(x)(x^2-2) \pmod{x^4-x^3-x^2+x},$$

т.е. полином $f(x)$ отображается в остаток от деления произведения $f(x)(x^2-2)$ на $x^4-x^3-x^2+x$. Найти собственные векторы этого оператора.

Решение. В пространстве $\mathbb{P}_3$ векторами являются полиномы, а условие того, что полином $f(x)$ является собственным, принадлежащим числу λ, записывается в виде:

$$f(x)(x^2-2) \equiv \lambda f(x) \pmod{x^4-x^3-x^2+x} \iff$$
$$\iff f(x)(x^2-2-\lambda) \equiv 0 \pmod{x^4-x^3-x^2+x}.$$

Поскольку $\deg f \le 3$, то последнее может выполняться тогда и только тогда, когда полином $x^2-2-\lambda$ имеет общие корни с $x^4-x^3-x^2+x \equiv x(x+1)(x-1)^2$. Из этого условия вытекает, что число λ может принимать только два значения: $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = -1$. Если $\lambda_1 = -2$ является собственным числом, то ему соответствующий собственный вектор — полином степени ≤ 3 — должен определяться из условия делимости $f(x)x^2$ на $x(x+1)(x-1)^2$. Такой полином имеет вид $t(x+1)(x-1)^2$ при произвольной константе t. Следовательно множество

$$\{t(x^3-x^2-x+1) = t(x+1)(x-1)^2 \mid t \ne 0\}$$

является множеством собственных векторов, принадлежащих $\lambda_1 = -2$.

С числом $\lambda_2 = -1$ поступаем аналогично. Условие делимости полинома $f(x)(x^2-1)$ на $x(x+1)(x-1)^2$ дает также бесконечное множество:

$$\{(t_1x+t_2)x(x-1) \mid \{t_1,t_2\}\subset\mathbb{R}\}.$$

Однако в этом случае бесконечность множества качественно иная, чем в предыдущем случае; она — «двумерная».

Задача. Для произвольного оператора выяснить условия существования его собственного числа и разработать конструктивный метод его нахождения.

Теорема. В комплексном линейном пространстве любой оператор имеет по крайней мере один собственный вектор.

Доказательство. Пусть $\{X_1,\dots,X_n\}$ — произвольный базис пространства $\mathbb{V}$ и $\mathbf{A}$ — матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда для того чтобы вектор $X = x_1X_1+\dots+x_nX_n \neq \mathbb{O}$ был собственным, принадлежащим собственному числу λ, необходимо и достаточно чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \quad\iff\quad \begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & & & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \mathbb{O}_{n\times 1}$$

Покажем, что существуют комплексные числа λ и не все нулевые $\underline{x_1,\dots,x_n}$, удовлетворяющие этой системе. Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения у однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей является равенство нулю определителя этой матрицы:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda E)=\begin{vmatrix}\alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & & & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0\,.$$

Этот определитель является полиномом степени n по λ. По основной теореме высшей алгебры этот полином имеет по крайней мере один комплексный корень $\lambda=\lambda_*$. Подставив его в систему, получаем однородную систему уравнений с нулевым определителем. Находим нетривиальное решение этой системы:

$$x_1=x_1^*,\dots,x_n=x_n^*,\quad \exists x_j^*\neq 0;$$

но тогда вектор $\mathfrak{X}_*=x_1^*X_1+\dots+x_n^*X_n$ будет собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, принадлежащим λ_*.

Уравнение $\det(\mathbf{A}-\lambda E)=0$ называется характеристическим или вековым уравнением, а полином в левой его части — характеристическим полиномом матрицы $\mathbf{A}$. Любой корень характеристического полинома матрицы называется собственным числом этой матрицы. Набор всех собственных чисел матрицы (корней характеристического полинома с учетом кратностей) называется спектром матрицы. Ненулевой вектор $X\in\mathbb{C}^n$, удовлетворяющий условию $\mathbf{A}X=\lambda X$, где λ — собственное число матрицы, называется собственным вектором матрицы, соответствующим (или принадлежащим) данному собственному числу.

Пример. Применим полученный результат для получения альтернативного решения предыдущего примера.

Решение. Базисом в пространстве $\mathbb{P}_3$ выберем $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$. Образы базисных векторов под действием оператора $\mathcal{A}(f(x)) = f(x)(x^2-2) \pmod{x^4 - x^3 - x^2 + x}$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(1) = & -2 & & +x^2 & , \\ \mathcal{A}(x) = & & -2\,x & & +x^3, \\ \mathcal{A}(x^2) = & & -x & -x^2 & +x^3, \\ \mathcal{A}(x^2) = & & -x & & , \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином матрицы $\mathbf{A}$:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \equiv (\lambda+2)(\lambda^3 + 3\,\lambda^2 + 3\,\lambda + 1) \equiv (\lambda+2)(\lambda+1)^3 .$$

Собственные числа $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = -1$, спектр матрицы $\{-1, -1, -1, -2\}$. Подставляем каждое из собственных чисел в матрицу $\mathbf{A} - \lambda E$ и решаем получившиеся системы однородных уравнений. Поскольку каждая из них должна иметь бесконечное множество решений, то мы строим фундаментальные системы решений (ФСР)

$$(\mathbf{A} - \lambda E)X = \mathbb{O}$$

$$\swarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \searrow$$

$$\lambda_1 = -2 \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_2 = -1$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbb{O} \qquad\qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbb{O}\,.$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -1, x_4 = 1 \qquad\qquad \begin{Bmatrix} x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 0 \\ x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1 \end{Bmatrix}$$

Таким образом, собственному числу $\lambda_1 = -2$ соответствует собственнный вектор — полином $1 - x - x^2 + x^3$, и он полностью совпадает с полученным при решении предыдущего примера. В то же время собственному числу $\lambda_2 = -1$ соответствует два линейно независимых собственнных вектора — полиномы $-x + x^2$ и $-x + x^3$. Любой (не тождественно нулевой) полином множества

$$\{\tau_1(-x + x^2) + \tau_2(-x + x^3) \mid \{\tau_1, \tau_2\} \subset \mathbb{R}\}$$

будет также являться собственным, принадлежащим $\lambda_2 = -1$. Это множество также совпадает с полученным при решении предыдущего примера.

Итак, два формально различных подхода к решению одного и того же примера не привели к противоречию. Хотелось бы, однако, гарантировать глобальную непротиворечивость определения собственных чисел и векторов — т.е. независимость (инвариантность) этих объектов относительно способов их нахождения, и, в частности, от выбора базиса пространства $\mathbb{V}$.

Теорема. Характеристические полиномы подобных матриц одинаковы.

Доказательство. $\mathbf{A} \doteq \mathbf{B} \iff \exists$ неособенная матрица C, такая что $\mathbf{B} = C^{-1}\mathbf{A}C$. Имеем:

$$\det(\mathbf{B} - \lambda E) = \det(C^{-1}\mathbf{A}C - \lambda E) =$$

$$= \det(C^{-1}\mathbf{A}C - \lambda C^{-1}EC) = \det\left[C^{-1}(\mathbf{A} - \lambda E)C\right] = \det(\mathbf{A} - \lambda E)\,.$$

Иначе говоря, для оператора $\mathcal{A}$ характеристический полином его матрицы не зависит от выбора базиса пространства. Поэтому можно говорить о характеристическом полиноме оператора $\mathcal{A}$.

Характеристический полином матрицы подробнее исследуется ☞ ЗДЕСЬ. В частности, в указанном разделе приведен результат, на основании которого (а также на основании пунктов а) и д) теоремы 7, приведенной в пункте ☞МАТРИЦА ОПЕРАТОРА) выводится следующее нетривиальное утверждение:

Теорема [Гамильтон, Кэли]. Результатом подстановки оператора в собственный характеристический полином будет нулевой оператор.
Пример. Для рассмотренного в предыдущих примерах оператора

$$\mathcal{A}(f(x)) = f(x)(x^2-2) \pmod{x^4-x^3-x^2+x},$$

действующего в $\mathbb{P}_3$, характеристический полином равен $\lambda^4+5\lambda^3+9\lambda^2+7\lambda+2$. Проверим утверждение теоремы Гамильтона-Кэли — должно быть выполнено условие

$$\mathcal{A}^4+5\mathcal{A}^3+9\mathcal{A}^2+7\mathcal{A}+2\mathcal{E}=\mathcal{O}.$$

Степени данного оператора $\mathcal{A}$ обсуждались в примере ☞ПУНКТА. Переписанное в терминах остатков, последнее условие превращается в

$$(x^2-2)^4f(x)+5(x^2-2)^3f(x)+9(x^2-2)^2f(x)+7(x^2-2)f(x)+2f(x)\equiv 0 \pmod{x^4-x^3-x^2+x},$$

т.е. полином, стоящий в левой части сравнения, должен делиться нацело на $x^4-x^3-x^2+x$ при любом выборе полинома $f(x)$. Проверяем:

$$(x^2-2)^4+5(x^2-2)^3+9(x^2-2)^2+7(x^2-2)+2\equiv x^8-3x^6+3x^4-x^2\equiv$$
$$\equiv(x^4+x^3-x^2-x)(x^4-x^3-x^2+x),$$

т.е. утверждение оказывается справедливым.

6.6. Диагонализуемость матрицы оператора

Теорема 1. Собственные векторы оператора, принадлежащие различным собственным числам, линейно независимы.

Теорема 2. Если оператор имеет $n = \dim \mathbb{V}$ линейно независимых собственных векторов, то в базисе ими образуемом матрица оператора диагональна. Обратно: если матрица оператора в некотором базисе диагональна, то каждый вектор этого базиса является собственным для оператора.

Базис линейного пространства, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, называется каноническим.

[Матричная версия теоремы]. Пусть A — квадратная матрица. Неособенная матрица C, удовлетворяющая равенству $C^{-1}AC = A_{diag}$ при матрице A_{diag} - диагональной

существует тогда и только тогда, когда существует базис пространства $\mathbb{C}^n$, состоящий из собственных векторов матрицы A. Тогда матрица C является матрицей перехода от стандартного базиса

$$\left\{ \mathfrak{e}_j = [\underbrace{0,\dots,0,1}_{j},0,\dots,0]^\top \right\}_{j=1}^{n}$$

к каноническому, а на диагонали A_{diag} стоят собственные числа матрицы A:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Проведем формальное доказательство данного конкретного частного случая. Рассмотрим матричное равенство

$$AC = CA_{diag}$$

при некоторой диагональной матрице A_{diag}. Легко видеть, что оно эквивалентно системе равенств относительно столбцов матрицы C:

$$AC_{[1]} = d_1 C_{[1]}, \ldots, AC_{[n]} = d_n C_{[n]} .$$

Если все столбцы $\{C_{[j]}\}_{j=1}^{n}$ ненулевые, то тогда они являются собственными векторами для матрицы A, а числа $\{d_{[j]}\}_{j=1}^{n}$ — собственными числами, соответствующими этим собственным векторам. Если матрица C невырождена, то все ее столбцы линейно независимы. Но тогда они образуют базис пространства $\mathbb{C}^n$, состоящий из собственных векторов. Обратное тоже верно.

При выполнении условия предыдущего следствия говорят, что матрица A диагонализуема или приводится к диагональной форме.

Теорема позволяет сформулировать достаточное условие диагонализуемости.

Теорема 3. Если характеристический полином оператора не имеет *кратных корней*, то матрица оператора диагонализуема.
Для проверки условия теоремы не требуется явного вычисления корней: оно проверяется по коэффициентам характеристического полинома «чисто алгебраически» (т.е. за конечное число элементарных алгебраических операций). Оно эквивалентно отличию от нуля дискриминанта характеристического полинома.

Это условие не является необходимым, как показывает пример тождественного оператора.

Случай существования кратного корня у характеристического полинома является «пограничным»: существуют примеры как диагонализуемых, так и недиагонализуемых матриц. Так, для матриц

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

при попытке подобрать матрицу C, удовлетворяющую равенству

$$AC = C \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \qquad npu\ \forall \{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{C}$$

получим: $\det C = 0$.

В случае наличия у характеристического полинома оператора кратного корня, анализ оператора на возможность диагонализуемости его матрицы усложняется.

Теорема 4. Множество собственных векторов оператора, принадлежащих его собственному числу λ_*, дополненное нулевым вектором, образует линейное подпространство пространства $\mathbb{V}$.

Это подпространство

$$\mathbb{V}_* = \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda_* \mathcal{E})$$

пространства $\mathbb{V}$ называется собственным подпространством оператора, соответствующим λ_*. Величина

$$\dim(\mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda_* \mathcal{E}))$$

называется геометрической кратностью собственного числа λ_*. Можно доказать, что геометрическая кратность собственного числа не превосходит кратности собственного числа в характеристическом полиноме. Для усиления различий в определениях двух кратностей, кратность собственного числа в характеристическом полиноме называют еще алгебраической кратностью собственного числа.

Если оператор (в некотором базисе пространства) задан своей матрицей $\mathbf{A}$, то базисные векторы собственного подпространства $\mathbb{V}_*$ вычисляются посредством нахождения фундаментальной системы решений (ФСР) системы линейных уравнений

$$(\mathbf{A}-\lambda_* E)X=\mathbb{O}\ .$$

Теорема 5. Матрица оператора диагонализуема тогда и только тогда, когда для каждого ее собственного числа алгебраическая кратность равна геометрической кратности:

$\operatorname{dfc}(\mathbf{A}-\lambda_*\, E)=$ кратность λ_*.

?

Диагонализуема ли матрица оператора

$$\mathcal{A}(f(x))=f(x)(x^2-2) \pmod{x^4-x^3-x^2+x}\ ,$$

рассмотренного в примерах предыдущего пункта?

Пример. Найти все вещественные значения параметра α, при которых матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\,\alpha & \alpha-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

диагонализуема.

Решение. Характеристический полином $f(\lambda)=-\lambda^3+3\,\lambda-2\,(3\,\alpha-1)$ имеет кратные корни только тогда когда его дискриминант $\mathcal{D}(f)=-324\,\alpha(3\,\alpha-2)$ обращается в нуль. При $\alpha=0$ корень $\lambda=-1$ имеет алгебраическую кратность 2. Найдем дефект матрицы $A+E$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rank}(A+E)=2 \Longrightarrow \operatorname{dfc}(A+E)=1.$$

Таким образом, геометрическая кратность собственного числа $\lambda = -1$ равна 1 и условие теоремы 5 не выполнено. Оно не будет выполнено и при $\alpha = 2/3$ (здесь корень $\lambda = 1$ имеет кратность 2).

Ответ. Матрица диагонализуема при всех значениях параметра, за исключением $\alpha = 0$ и $\alpha = 2/3$.

6.7. Диагонализуемость матрицы оператора над полем вещественных чисел

В предыдущем пункте мы рассматривали операторы не всегда акцентируя внимание на поле, над которым они рассматриваются — над $\mathbb{R}$ или над $\mathbb{C}$. Сама теорема существования собственного числа гарантирует нам только наличие этих чисел в поле $\mathbb{C}$. Как следствие, если даже рассматриваются операторы над полем $\mathbb{R}$ (что чаще всего и случается на практике), то существование для них вещественного канонического базиса вовсе не гарантировано.

Задача. Найти условия диагонализуемости матрицы оператора $\mathcal{A}$ над полем вещественных чисел.

Необходимое условие следует из теоремы 2 предыдущего пункта: все собственные числа матрицы должны быть вещественными.

Теорема 3 позволяет сформулировать и достаточный критерий диагонализуемости матрицы оператора $\mathcal{A}$ над $\mathbb{R}$.

Теорема. Если характеристический полином оператора имеет только простые вещественные корни, то матрица оператора диагонализуема над $\mathbb{R}$.

Условие различности и вещественности корней произвольного полинома $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{R}[x]$ можно проверить по коэффициентам этого полинома «чисто алгебраически», т.е. за конечное число элементарных алгебраических операций над этими коэффициентами. Воспользуемся, например, теоремой Якоби из раздела ☞ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА. По коэффициентам $a_1, \ldots, a_n$ можно определить сумму Ньютона полинома $f(\lambda)$, т.е. величину

$$s_k = \sum_{1 \le j \le n} \lambda_j^k .$$

Далее, после нахождения всех этих сумм для значений $k \in \{0, \ldots, 2n-2\}$, из них составляется ганкелева матрица

$$S = [s_{j+k}]_{j,k=0}^{n-1}$$

и вычисляются ее главные миноры $S_1, \ldots, S_n$. Для различности всех корней полинома необходимо и достаточно выполнение условия $S_n \neq 0$ (этот минор совпадает с дискриминантом $\mathcal{D}(f)$ полинома $f(\lambda)$); для различности и вещественности всех корней необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$S_1 \ge 0, \ldots, S_{n-1} \ge 0, S_n > 0 .$$

Пример. Найти все вещественные значения параметра α, при которых матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & \alpha - 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

диагонализуема над $\mathbb{R}$.

Решение. На основании теоремы нам нужно установить условия вещественности корней характеристического полинома

$f(\lambda) = -\lambda^3 + 3\,\lambda - 2\,(3\,\alpha - 1)$. Вычисляем суммы Ньютона: $s_0 = 3,\ s_1 = 0,\ s_2 = 6,\ s_3 = 18\,\alpha - 6,\ s_4 = 18$, составляем матрицу:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 18\,\alpha - 6 \\ 6 & 18\,\alpha - 6 & 18 \end{pmatrix}$$

и вычисляем ее главные миноры:

$$S_1 = 3,\ S_2 = 18,\ S_3 = -324\,\alpha\,(3\,\alpha - 2) = \mathcal{D}(f)\ .$$

При $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 2/3$ все собственные числа различны, условие теоремы выполняется при $\alpha \in]0,\ 2/3[$. Граничные точки последнего интервала следовало бы исследовать отдельно: хотя этим значениям параметра и соответствует случай кратных вещественных корней характеристического полинома, но матрица A может оказаться диагонализуемой на основании теоремы 5 предыдущего пункта. Но при решении примера в предыдущем пункте мы уже установили, что это условие не выполняется.

Ответ. Матрица диагонализуема над $\mathbb{R}$ при $\alpha \in]0,\ 2/3[$.

Примером гарантировано диагонализуемых над $\mathbb{R}$ матриц являются вещественные симметричные матрицы. См. ☞ЗДЕСЬ.

Жорданова нормальная форма

Если матрица оператора оказывается недиагонализуемой над $\mathbb{C}$, то к какому простейшему виду ее можно привести ? — Этим видом является, например, ☞ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА.

7. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

7.1. Понятие линейной функции

Определение 1. Пусть *E*— векторное пространство над К. *Линейной функцией* на *E* называют линейное отображение *E* в $К^1$, т. е. функцию *f* на *E* со значениями в К, удовлетворяющую условиям

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \text{и} \quad f(\lambda x)=\lambda f(x)$$

для всех $x, y \in E$ и $\lambda \in К$.

Примеры. 1. Пусть *E* — произвольное векторное пространство числовых функций *x(t),* определенных на некотором множестве *M,* и $t_0 \in M$. Тогда

$$\delta_{t_0}(x)=x(t_0),$$

очевидно, является линейной функцией на *E*. δ_{t0} называют *дельта-функцией,* сосредоточенной в точке t_0.

2. Значение производной порядка $\leq n$ в произвольной фиксированной точке интервала *I* есть линейная функция на $C^n(1)$.

3.

$$I(x)=\int_a^b x(t)\,dt$$

есть линейная функция на *C ([a, b]).*

4. Пусть $p>1$, $q>1$ таковы, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, и (η_k) — фиксированный вектор пространства l^q. Положив для любого вектора $x=(\xi_k)\in l^p$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k, \quad \textbf{(1)}$$

получим линейную функцию на l^p. Действительно, в доказательстве нуждается лишь сходимость ряда (1) для всех $(\xi_k)\in l^p$. Рассмотрим для этого функцию $s=t^p$ $(t\geqslant 0)$. Так как $p>1$, то ее график обращен выпуклостью вниз. Поэтому центр тяжести (t_s, s_c) любой конечной системы его точек (t_k, t_k^p), наделенных какими-то массами

$$\rho_k>0 \qquad (k=1, \ldots, n),$$

лежит выше этого графика (или, в крайнем случае, на нем, если все точки совпадают). Это означает, что $t_c^p\leqslant s_c$, т. е.

$$\left(\frac{\rho_1 t_1 + \ldots + \rho_n t_n}{\rho_1 + \ldots + \rho_n}\right)^p \leqslant \frac{\rho_1 t_1^p + \ldots \rho_n t_n^p}{\rho_1 + \ldots + \rho_n}. \quad (2)$$

Взяв здесь $t_k = a_k b_k^{-q/p}$, $\rho_k = b_k^q$ $(a_k \geqslant 0, \ b_k > 0)$, получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q} \quad (3)$$

(очевидно, справедливое и при обращении некоторых b_k в 0). Пусть теперь (ξ_k) и (η_k) —числовые последовательности.

Положив в (3) $a_k = |\xi_k|$, $b_k = |\eta_k|$ и устремив n к бесконечности, получим в пределе

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{1/q}.$$

Это показывает, что *если* $(\xi_k) \in l^p$ *и* $(\eta_k) \in l^q$ (так что правая часть полученного неравенства конечна), *то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$$

абсолютно сходится и

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{1/q}. \quad (4)$$

Тем самым $f(x)$ действительно существует для всех $x \in l^p$. Неравенство (4) называют *неравенством Гёльдера.* При $p = q = 2$ оно обращается в *неравенство Коши:*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2. \quad (5)$$

5. Формула (1), где (η_k)—фиксированный вектор пространства l^∞ (l^1), а $x = (\xi_k)$ — переменный вектор пространства l^1 (l^∞), очевидно, определяет линейную функцию f на l^1 (l^∞). То же справедливо и при замене l^1 и l^∞ на l^1_R и l^∞_R.

А. *Совокупность* $\mathscr{L}(E, \mathrm{K}^1)$ *всех линейных функций на E образует векторное пространство над* К, в котором сложение линейных функций и умножение их на скаляры определены формулами

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \quad (6)$$

Определение 2. Векторное пространство $\mathscr{L}(E, \mathrm{K}^1)$ всех линейных функций на E будет называться *векторным сопряженным* к E и обозначаться E^*.

Б. Пусть E—векторное пространство над К с базисом $A=(a_\alpha)_{\alpha\in A}$). *Отображение* φ: $E^*\to K^A$, *относящее каждой линейной функции* $f\in E^*$ *семейство скаляров* $(f^\alpha)_{\alpha\in A}$, *где* $f^\alpha=f(a_\alpha)$, *есть изоморфизм* E^* *на* K^A. Действительно, из формул (6) непосредственно .следует, что $(f+g)^\alpha=f^\alpha+g^\alpha$ и $(\lambda f)^\alpha=\lambda f^\alpha$, так что φ линейно. Далее, для каждого $x\in E$ имеем

$$f(x)=f\Big(\sum_{\alpha\in A}x_\alpha a_\alpha\Big)=\sum_{\alpha\in A}x_\alpha f^\alpha=\sum_{\alpha\in A}f^\alpha x_\alpha, \quad \textbf{(7)}$$

где x_α — координаты вектора x относительно базиса A, так что f однозначно определяется своим образом $(f^\alpha)_{\alpha\in A}$, т. е.
φ — вложение. Наконец,

$$g(x)=\sum_{\alpha\in A}\lambda^\alpha x_\alpha$$

есть, очевидно, линейная функция от x для каждого семейства скаляров $(\lambda^\alpha)_{\alpha\in A}$, так что φ — наложение.
В. Очевидно, *каждая координата* x_α *вектора* $x\in E$ *относительно базиса*

$$A=(a_\alpha)_{\alpha\in A}$$

является линейной функцией от x. Мы будемназывать ее α-й *координатной линейной функцией* и обозначать $a^\alpha(x)$; таким образом,

$$x_\alpha=a^\alpha(x),$$

так что формула (7) может быть записана в виде

$$f(x)=\sum_{\alpha\in A}f^\alpha a^\alpha(x)=\sum_{\alpha\in A}f(a_\alpha)\,a^\alpha(x). \qquad (8)$$

Г. *Координатные линейные функции* a^α $(\alpha\in A)$ *образуют в* E^* *репер.* Действительно, очевидно

$$a^\alpha(a_\beta)=\delta_{\alpha\beta}, \qquad (9)$$

и потому и;з $\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha a^\alpha=0$ следует, что

$$\lambda_\beta=\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha a^\alpha(a_\beta)=0$$

для всех $\beta\in A$.
Д. Пусть E— векторное пространство над К, L — аффинное многообразие в E и $f\in E^*$. $f(L)$ есть аффинное многообразие в K^1. Но единственными аффинными многообразиями в K^1 являются одноточечные множества и всё K^1. Следовательно, *на аффинном многообразии (на подпространстве) линейная функция либо постоянна (равна нулю), либо принимает все значения из* К. В частности, *если* $f\neq 0$, *то* $R_f=K^1$.

E. Пусть E — комплексное векторное пространство и $E_{\mathbf{R}}$ — ассоциированное с ним вещественное векторное пространство. Если $f \in E^*$ и $f \neq 0$, то R_f=$\mathbf{C}^1$; точно так же, если $g \in E_{\mathbf{R}}^*$ и $g \neq 0$, то R_g.= $\mathbf{R}^1$. В соответствии с этим мы будем называть функции $g \in E_{\mathbf{R}}^*$ *вещественными,* а функции $f \in E^*$, в отличие от них, —*комплексными* линейными функциями на *E*.

Очевидно, если $f \in E^*$, то $g = \Re f \in E_{\mathbf{R}}^*$. При этом *f однозначно определяется своей вещественной частью g.* Действительно, пусть $h = \Im f$, так что для каждого $x \in E$ имеем

$$f(x) = g(x) + ih(x). \quad (10)$$

Умножая на —*I* и заменяя *x* на *ix,* получаем

$$f(x) = h(ix) - ig(ix). \quad \textbf{(11)}$$

Сравнивая (10) и (11), видим, что $h(x) = -g(ix)$ и, следовательно,

$$f(x) = g(x) - ig(ix). \quad (12)$$

Вместе с тем мы установили, что

$$\Im f(x) = -\Re f(ix), \quad \text{т. е.} \quad \Im f = -\Re(f \circ i). \quad \textbf{(12')}$$

Функция f, определяемая формулой (12), *является комплексной линейной функцией, какова бы ни была вещественная линейная функция g.* Действительно, очевидно, что *f* аддитивна и $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ для каждого $\alpha \in$ R. Атак как, кроме того,

$$f(ix) = g(ix) - ig(-x) = if(x),$$

то $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для всех $\lambda \in \mathbf{C}$. Тем самым *каждая вещественная линейная функция на E есть вещественная часть однозначно определенной комплексной линейной функции.*

Так как, кроме того, $\Re(f_1 + f_2) = \Re f_1 + \Re f_2$ и $\Re(\alpha f) = \alpha \Re f$ для всех $\alpha \in$ R, то заключаем, что $f \to \Re f$ *есть изоморфизм* $E^*_{\mathbf{R}}$ *на* $E_{\mathbf{R}}^*$.

E'. Из E, в частности, следует, что *если* $f \in E^*$ *и* $\Re f = 0$, *то и f/* = 0.

7.2. Векторное сопряженное к конечномерному векторному пространству

A. *Векторное сопряженное E* к n-мерному векторному пространству E n-мерно.*

Замечание. Если E— бесконечномерное векторное пространство над К, то $\dim E^* = \varkappa^{\dim E}$, где $\varkappa = \overline{\overline{K}}$. Поскольку $\varkappa \geqslant 2$, заключаем, что *если E бесконечномерно, то* $\dim E^* > \dim E$.

Б. Из сказанного ранее следует также, что формула

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f^k x_k,$$

где $x_1, ..., x_n$ — координаты вектора x относительно какого-нибудь фиксированного базиса, а $f^1, \ldots, f^n$ —произвольные скаляры, дает *общий вид линейной функции на n-мерном векторном пространстве E над* К, причем $f \to (f^1, \ldots, f^n)$ есть изоморфизм E^* на К^n,

В. *Если E — n-мерное векторное пространство с базисом* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, *то координатные линейные функции* $a^1, \ldots, a^n$ *образуют в E* базис.* Действительно, $A^* = \{a^1, \ldots, a^n\}$ —репер. С другой стороны, (8) означает в рассматриваемом случае, что любая линейная функция $f \in E^*$ представима в виде

$$f = \sum_{k=1}^{n} f^k a^k.$$

Базис A^* пространства E^* будет называться *дуальным к A.*

Если E бесконечномерно, то координатные линейные функции a^α уже не образуют базиса в E^*, поскольку в формуле (8) может отличаться от нуля бесконечное множество коэффициентов f^α.

7.3. Линейные функции и гиперподпространства

Между гиперподпространствами векторного пространства E над К и линейными функциями $f \in E^*$ имеется тесная связь.

А. *Ядро K_f всякой линейной функции f есть гиперподпространство.*

Действительно, если $f = 0$, то $K_f = E$, т. е. K_f — несобственное гиперподпространство. Пусть $f \neq 0$. E/K_f изоморфно R_f. Но $R_f = K^1$. Следовательно, K_f — (собственное) гиперподпространство.

Приведем другое доказательство. Если $f \neq 0$, то существует вектор $a \in E$ такой, что $f(a) \neq 0$. Поэтому для любого $x \in E$ имеем

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(a)} a\right) = 0,$$

т. е.

$$x - \frac{f(x)}{f(a)} a \in K_f.$$

Это показывает, что $E = K_f + \mathfrak{E}_a$. Так как, с другой стороны, $K_f \cap \mathfrak{E}_a = \{0\}$, то $E = K_f \oplus \mathfrak{E}_a$ и, значит, K_f—(собственное) гиперподпространство.

А′. Из А следует, что *поверхности уровня ненулевой линейной функции f*, т. е. совокупности всех решений уравнений вида $f(x)=\lambda$, *— это гиперплоскости, параллельные* K_f. В самом деле, $f^{-1}(\lambda)=K_f+x_0$, где x_0 — произвольное фиксированное решение уравнения $f(x)=\lambda$.

$f(x)=\lambda$ называют *уравнением гиперплоскости* $X=f^{1}(\lambda)$.

Б. Обратно, *каждое гиперподпространство есть ядро* (и, значит, *каждая гиперплоскость—поверхность уровня) некоторой линейной функции.* Действительно, *E* есть ядро нулевой линейной функции. Пусть *H* — собственное гиперподпространство пространства *E*, φ — каноническое наложение *E* на *E/H* и ψ — изоморфизм *E/H* на K^1 . Тогда

$$f=\psi\circ\varphi \tag{1}$$

есть линейное отображение *E* на K^1 , т. е. линейная функция, причем $K_f=\varphi^{-1}(\psi^{-1}(0))=\varphi^{-1}(\{H\})=H.$

Приведем другое доказательство. $E=H\oplus\mathfrak{E}_a$, где *a* —произвольный фиксированный вектор из $E\backslash H$. Поэтому каждый вектор $x\in E$ однозначно представим в виде

$$x=f(x)a+h(x),\quad \text{где}\quad f(x)\in K\quad \text{и}\quad h(x)\in H. \tag{2}$$

Так как $f(x)a=\pi(x)$, где π — проектор *E* на $\mathfrak{E}_a$ параллельно *H*, а всякий проектор, по определению, линеен, то $f\in E^*$. При этом $x\in H$ тогда и только тогда, когда $f(x)=0$, т. е. $H=K_f$.

В. *Всякая ненулевая линейная функция с ядром Н представила в виде* (1).

Г. Очевидно, $K_f=K_{\lambda f}$ Для любого ненулевого $\lambda\in K$. Но этим и исчерпывается произвол в выборе линейной функции с заданным ядром. Несколько более общим образом: *каждая линейная функция g, аннулирующаяся на данном гиперподпространстве Н, имеет вид* $g=\lambda f$, *где* $\lambda\in K$, *а f — фиксированная линейная функция с ядром* $K_f=H$.

Действительно, при $g=0$ нужно лишь взять $\lambda=0$. Пусть $g\neq 0$, так что *H*—собственное и $K_g=H$. Согласно В $f=\psi\circ\varphi$, $g=\chi\circ\varphi$, где φ — каноническое наложение *E* на *E/H*, а ψ и χ—изоморфизмы $E\backslash H$ на K^1. Так как тогда $\chi\circ\psi^{-1}$ есть линейное отображение K^1 на себя и, значит, имеет вид $k\,I$, где I—тождественное отображение, то $\chi=\lambda\psi$ и, значит, $g=\lambda f$.

Приведем другое доказательство. В силу (2) $g(x)=g(f(x)a+h(x))=f(x)g(a)=g(a)f(x)$, поскольку $g(h(x))=0$.

Г'. В силу А предложение, доказанное в Г, можно сформулировать следующим образом: *если* $f,g\in E^*$ *и* $f(x)=0$ *всегда влечет* $g(x)=0$, *то* $g=\lambda f$, *где* $\lambda\in K$.

Д. Из Б следует, что *каждая гиперплоскость* $X\subset E$ *может быть задана уравнением вида* $f(x)=\xi$, *где* $f\in E^*$. При этом Г показывает, что *уравнения* $f(x)=\xi$ *и* $g(x)=\eta$ *одной и той же гиперплоскости X пропорциональны,* т. е. существует скаляр λ такой, что $g=\lambda f$ и $\eta=\lambda\xi$. Действительно, тяк как $K_f = K_g$, то в силу Г $g=\lambda f$, а тогда, беря произвольный вектор $x_0 \in X$, получаем, что и

$$\eta=g(x_0)=\lambda f(x_0)=\lambda\xi.$$

Е. Из Б и Г следует также, что *для каждого собственного гиперподпространства H, вектора* $x_0 \in E \backslash H$ *и скаляра* $\lambda_0 \neq 0$ *существует однозначно определенная линейная функция* $f \in E^*$ *такая, что* $K_f = H$ *и* $f(x_0)=\lambda_0$.

7.4. Системы лииейиых уравнений

Определение 3. Пусть *E* — векторное пространство над K. *Системой линейных уравнений* на *E* называется всякое конечное семейство уравнений относительно $x \in E$

$$f_k(x)=\gamma_k \qquad (k=1,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

где $f_1, \ldots, f_n \in E^*$, а $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in$ K. Если $\gamma_1 = \ldots = \gamma_n = 0$, то систему (1) называют *однородной.* В противном случае ее называют *неоднородной,* а систему

$$f_k(x)=0 \qquad (k=1,\ \ldots,\ n) \tag{2}$$

—*соответствующей ей однородной системой.* Систему (1) называют *совместной,* если она обладает хотя бы одним *решением x* (т. е. удовлетворяется хотя бы одним вектором $x \in E$), и *несовместной* — в противном случае. Если всякое решение совместной системы (1) удовлетворяет линейному уравнению

$$f(x)=\gamma, \tag{3}$$

то это уравнение называют *следствием системы* (1).

А. Пусть $f_1, \ldots, f_n \in E^*$. Рассмотрим отображение

$$x \to \varphi(x)=(f_1(x),\ \ldots,\ f_n(x)) \tag{4}$$

пространства *E* в K^n. Очевидно, *система* (1) *равносильна уравнению*

$$\varphi(x)=c, \quad \text{где} \quad c=(\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_n). \tag{5}$$

Так как $f_1, \ldots, f_n$ — линейные функции, то φ — *линейное отображение E* в K^n. *Его ядро K есть множество всех решений однородной системы (2), противообласть* $R_\varphi=\varphi(E)$*— множество всех «правых частей»* $c=(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, *для которых система* (1) *совместна, а* $\varphi^{-1}(c)$ — *множество всех решений системы* (1).

Б. *Каждая однородная система линейных уравнений* (2) *совместна,* ибо во всяком случае удовлетворяется нулевым вектором. В силу А *множество всех ее решений является подпространством пространства E.* Мы будем называть его *пространством решений системы* (2).

В. *Если система линейных уравнений* (1) *совместна и x_0— какое-нибудь ее решение, то множество всех ее решений является аффинным многообразием, получающимся путем переноса пространства решений соответствующей однородной системы* (2) *на x_0.* Действительно, заменяя систему (1) равносильным уравнением (5), имеем $\varphi(x_0) = c$, откуда, $\varphi^{-1}(c) = K_\varphi + x_0$, и остается применить А.

Г. Из В и 1.Д следует, что *если система* (1) *совместна, то либо уравнение* (3) *при некотором однозначно определенном γ является следствием этой системы, либо система*

$$f_1(x) = \gamma_1, \ldots, f_n(x) = \gamma_n, \ f(x) = \gamma \quad \textbf{(6)}$$

совместна при любом γ.

Лемма. *Пусть F — конечномерное векторное пространство. Для всякого его собственного подпространства G и вектора $c \in F \backslash G$ существует линейная функция $f \in E^*$, аннулирующаяся на всем G и отличная от нуля в c.*

Доказательство. Пусть $B = \{a_1, \ldots, a_m\}$—базис подпространства G . Так как c не зависит линейно от B, то $A' = \{a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}\}$, где $a_{m+1} = c$,— репер. Дополним его до базиса $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ пространства F . Требуемым свойством будет обладать $(m+1)$-я координатная линейная функция $f = a^{m+1}$. Действительно, согласно 1.(9), $f(c) = 1 \neq 0$, для всякого же

$$x = \sum_{k=1}^{m} x_k a_k \in G \text{ имеем } f(x) = \sum_{k=1}^{m} x_k f(a_k) = 0.$$

Теорема1. *Для того чтобы система линейных уравнений* (1) *была совместной, необходимо и достаточно, чтобы каждое соотношение*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$$

влекло соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \gamma_k = 0. \quad (8)$$

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна. Для доказательства его достаточности предположим, что система (1) несовместна, т. е., в обозначениях, введенных в А, $c \notin R_\varphi$. Так как $R_\varphi \subset\subset K^n$, то, в силу леммы , на K^n существует линейная функция $g(z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k$, аннулирующаяся на всем R_φ и отличная от нуля в *c*. Иными словами, существуют скаляры $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ такие, что $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x) = g(\varphi(x)) = 0$ для всех $x \in E$, т. е. имеет место соотношение (7), но $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \gamma_k = g(c) \neq 0$, т. е. соотношение (8) не выполняется. Следовательно, если (7) всегда влечет (8), то система (1) совместна.

Теорема 2. *Для того чтобы семейство линейных функций* $\mathcal{F} = (f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ *на E было линейно независимым, необходимо и достаточно, чтобы система (*1*) была совместна при любой правой части* $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, *т. е. чтобы отображение* φ *пространства E в* K^n, *определяемое этим семейством по формуле* (4), *было наложением.*

Доказательство. Если $\mathcal{F}$ линейно независимо, то (7) влечет (8) при любых значениях $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, поскольку $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$; следовательно, по теореме 1, система (1) совместна при любой правой час$c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Обратно, если система (1) совместна при любой правой части $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, то, по теореме 1, соотношение (7) влечет соотношение (8) при произвольных значениях $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, что возможно лишь если $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$; следовательно, $\mathcal{F}$ линейно независимо.

Теорема 3. *Пространство решений однородной системы линейных уравнений* (2) *имеет конечную фактор-размерность, равную рангу семейства* $\mathcal{F} = (f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, *т. е. числу m элементов его максимального линейно независимого подсемейства* $\mathcal{F}'$.

Доказательство. Согласно А пространство решений системы (2) есть не что иное, как ядро K_φ отображения φ, определяемого по формуле (4) семейством $\mathcal{F}$. Так как $E/K_\varphi \sim R_\varphi$, то *K* имеет конечную факторразмериость, равную $\dim R_\varphi \ (\leqslant n)$. Если $m = 0$, т. е. $f_1 = \ldots \ldots = f_n = 0$, то $R_\varphi = \{0\}$ и, значит,

$$\operatorname{codim} K_\varphi = 0 = m.$$

Пусть $m \neq 0$. Без ограничения общностиможно считать, что $\mathcal{F}' = (f_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$. Тогда

$$x \to \varphi'(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \quad \textbf{(9)}$$

в силу теоремы 2 есть отображение E на все $К^m$. С другой стороны, так как (при $m < n$) каждая из функций $f_{m+1}, \ldots, f_n$ есть линейная комбинация функций $f_1, \ldots, f_m$, то

$$(f_1(x), \ldots, f_m(x)) \to (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \quad (10)$$

есть однозначно определенное вложение $К^m$ в $К^n$. Но φ есть суперпозиция отображений (9) и (10). Так как приведение вложения есть изоморфизм, то заключаем, что

$$\operatorname{codim} K_\varphi = \dim R_\varphi = \dim R_{\varphi'} = m,$$

что и требовалось.

Замечание. Мы доказали попутно, что

$$\dim R_\varphi = \operatorname{rang} \mathcal{F}.$$

В конечномерном случае это равенство есть по существу не что иное, как теорема о совпадении максимального числа линейно независимых столбцов матрицы с максимальным числом линейно независимых строк, а теорема 1 — теорема Кронекера — Капелли.

Теорема 4. *Для того чтобы линейное уравнение* (3) *было следствием системы линейных уравнений* (1), *необходимо и достаточно, чтобы оно было линейной комбинацией уравнений этой системы, т. е. чтобы существовали такие скаляры* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathrm{K}$, *что* $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ *и* $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \gamma_k$.

Доказательство. Достаточность сформулированного условия очевидна. Пусть $\mathcal{F}'$ —максимальное линейно независимое подсемейство семейства $\mathcal{F} = (f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{F}' = (f_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$. Для доказательства необходимости предположим, что уравнение (3) есть следствие системы (1), так что, в частности, сама эта система совместна. Но тогда, при $m < n$, и каждая система

$$f_1(x) = \gamma_1, \ \ldots, \quad f_m(x) = \gamma_m, \quad f_{m+i}(x) = \gamma_{m+i}$$

совместна. Так как при этом $f_{m+i} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik} f_k$, то, по теореме 1, также $\gamma_{m+i} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik} \gamma_k$, т. е. уравнения $f_{m+i}(x) = \gamma_{m+i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-m)$ являются линейными комбинациями уравнений системы

$$f_1(x) = \gamma_1, \ \ldots, \ f_m(x) = \gamma_m, \quad \textbf{(11)}$$

а тем самым и следствиями этой системы. Но в таком случае уравнение (3) есть следствие системы (11), поэтому система

$$f_1(x)=\gamma_1,\ \ldots,\ f_m(x)=\gamma_m,\qquad f(x)=\gamma'$$

при $\gamma'\neq\gamma$ уже несовместна, и, значит, по теореме 2, функции $f_1, \ldots, f_m, f$ линейно зависимы. Так как, с другой стороны, $f_1, \ldots, f_m$ линейно независимы, то это означает, что f линейно зависит от $\mathcal{F}'$, а значит, и от $\mathcal{F}$: $f=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k$. А поскольку система (6) совместна, отсюда следует, что и

$$\gamma=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\gamma_k,$$

т. е. уравнение (3) есть линейная комбинацияуравнений системы (1). Отметим наиболее важный частный случай теоремы 4.

Теорема 4'. *Для того чтобы однородное линейное уравнение*

$$f(x)=0 \tag{12}$$

было следствием однородной системы линейных уравнений (2), *необходимо и достаточно, чтобы оно было линейной комбинацией уравнений этой системы.*

Приведем доказательство необходимости условия теоремы 4', не опирающееся на другие результаты этого раздела. При $n = 1$ справедливость доказываемого утверждения уже установлена ранее. Докажем, что его справедливость для n— 1 влечет справедливость для n. Так как на пространстве F решений системы $f_k(x)=0\ (k=1,\ \ldots,\ n-1)$ уравнение (12), в силу предположения, есть следствие уравнения $f_n(x)=0$, то, по уже доказанному (в применении к пространству F), существует $\lambda_n\in K$ такое, что $f(x)=\lambda_n f_n(x)$ для всех $x\in F$. Но это означает, что уравнение $(f-\lambda_n f_n)(x)=0$ есть следствие системы $f_k(x)=0\ (k=1,\ \ldots,\ n-1)$; а тогда, по предположению индукции, $f-\lambda_n f_n=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k f_k$ и, значит, $f=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k$.

7.5. Сублинейные функции

Определение 1. Пусть E — векторное пространство над **R** или **C**. *Сублинейной функцией* на E называется функция $p(x)$ на E со значениями из $(-\infty, +\infty]$, обладающая следующими свойствами:

I. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ *для всех* $x \in E$ *и* $\lambda > 0$.
II. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(x)$ *для всех* $x, y \in E$.

А. Таким образом, *функционалы Минковского — это не что иное, как конечные неотрицательные сублинейные функции* , а *преднормы — конечные сублинейные функции*. С другой стороны, очевидно, *каждая вещественная линейная функция на Е сублинейна.* Таким образом, существуют сублинейные функции, принимающие также отрицательные значения.
Б. Отметим некоторые простейшие свойства сублинейной функции *р (х)*.
1° Полагая в I $x = 0$, получаем, что *если р конечна, то*

$$p(0) = 0. \quad \textbf{(1)}$$

Если *р* не всюду конечна, то возможно еще, что $p(0) = +\infty$. Но тогда, как легко видеть, можно, не нарушая сублинейности, заменить значение $+\infty$ в точке 0 значением 0, что всегда и делают.
2° В силу **(1)** и II

$$0 = p(x + (-x)) \leqslant p(x) + p(-x) \quad \textbf{(2)}$$

для любого $x \in E$.
Это неравенство показывает, между прочим, что *если* $p(x) < 0$, *то необходимо* $p(-x) > 0$. Таким образом, в то время как ненулевые сублинейные функции, принимающие только значения >0, существуют (функционалы Минковского), единственной сублинейной функцией, принимающей только значения < 0, является тождественный нуль.
3° $\lambda p(x) \leqslant p(\lambda x)$ *для всех* $x \in E$ *и* $\lambda \in \mathbf{R}$. Действительно, при $\lambda>0$ это вытекает из свойства I, при $\lambda=0$ — из (1), если же $\lambda<0$, то, подставляя в (2) λx вместо x, получаем

$$0 \leqslant p(\lambda x) + p(|\lambda| x) = p(\lambda x) + |\lambda| p(x),$$

откуда $\lambda p(x) = -|\lambda| p(x) \leqslant p(\lambda x)$.
В. *Если* $p(x)$ *и* $q(x)$ *— сублинейные функции и* $\rho > 0$, *то,* очевидно, $\rho p(x)$ *и* $p(x) + q(x)$ *— также сублинейные функции.* Далее, *если* $\{p_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$*—семейство сублинейных функций, то и*

$$p(x) = \sup_{\alpha \in A} p_\alpha(x)$$

— сублинейная функция. Действительно, если $\lambda > 0$, то $p(\lambda x) = \sup_{\alpha \in A} p_\alpha(\lambda x) = \sup_{\alpha \in A} \lambda p_\alpha(x) = \lambda p(x)$; далее, для любого $\alpha \in A$ имеем $p_\alpha(x+y) \leqslant p_\alpha(x) + p_\alpha(y) \leqslant p(x) + p(y)$, откуда и $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$. .
Г. Из А и В следует, что *верхняя грань*

$$p(x) = \sup_{f \in K} f(x) \quad \textbf{(3)}$$

любого непустого множества К вещественных линейных функций на Е есть сублинейная функция. Мы будем называть *р(х) опорной функцией* множества *К* .

Пример. Известно, что на l^P, где $p > 1$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p}$$

является функционалом Минковского некоторого поглощающего выпуклого множества и, значит, сублинейной функцией. Покажем, что сублннейность функции $\|x\|_p$ можно установить также, основываясь на Г. Действительно, как было показано ранее, ряд

$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$, сходится для каждого $y = (\eta_k) \in l^q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

и представляет линейную функцию от *х*. Так как при этом, в силу неравенства Гёльдера , $\Re(x, y) \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$, то, беря $K = \{y \in l^q\colon \|y\|_q \leqslant 1\}$, имеем $\sup_{y \in K} \Re(x, y) \leqslant \|x\|_p$. Но, с другой

стороны, $\|x\|_p = (x, y)$ при $y = (\eta_k)$, где $\eta_k = \frac{|\xi_k|^{p-1} \operatorname{sgn} \bar{\xi}_k}{\|x\|_p^{p-1}}$

($\operatorname{sgn} \xi = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi = 0, \\ \frac{\xi}{|\xi|}, & \text{если } \xi \neq 0 \end{cases}$) причем $y \in K$- Таким образом,

$$\|x\|_p = \sup_{y \in K} \Re(x, y),$$

и следовательно, в силу Г, $\| x \|_p$ — сублинейная функция.

В следующем разделе мы увидим, что всякая конечная сублинейная функция на *Е* является опорной функцией некоторого множества $K \subset E^*$, т. е. может быть представлена в виде (3) (см. следствие 2 теоремы **1).**

7.6. Теоремы продолжения линейной функции (алгебраическое изложение)

Определение 2. Пусть *Е*—векторное пространство, *F* и *G*—его подпространства и $F \subset G$, Линейную функцию $g \in G^*$ мы будем называть *продолжением линейной функции* $f \in F^*$ *на G,* если *f* есть сужение *g* на *F*.

Определение 3. Пусть E— векторное пространство над **R**. Мы будем говорить, что линейная функция $g\in E^*$ *мажорируется* сублинейной функцией $p(x)$ на E, если $f(x)\le p(x)$ для всех $x\in E$.

Теорема 1 (Банах)). *Пусть E — векторное пространство над* **R**, *$F\subset\subset E$ и $p(x)$—конечная сублинейная функция на E. Всякая линейная функция f_F на F, мажорируемая функцией p на F, обладает продолжением $f\in E^*$, мажорируемым функцией p на всем E.*

Доказательство. 1°. Покажем сначала, что *если G — собственное подпространство пространства E и g — линейная функция на* G, *мажорируемая функцией p, то для каждого $x_0\in E\backslash G$ существует продолжение g на $G+\mathfrak{E}_{x_0}$, также мажорируемое функцией p.*

Действительно, так как всякий вектор $z\in G+\mathfrak{E}_{x_0}$ однозначно представим в виде $z=x+\lambda x_0$, где $x\in G$ и $\lambda\in$ R, то всякая линейная функция f на $G+\mathfrak{E}_{x_0}$, служащая продолжением для g, имеет вид

$$f(z)=f(x+\lambda x_0)=g(x)+\lambda f(x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

и, значит, определяется выбором значения $c=f(x_0)$. Для того чтобы f мажорировалась функцией p, необходимо и достаточно, чтобы

$$g(x)+\lambda c\leqslant p(x+\lambda x_0) \quad \text{для всех} \quad x\in G \text{ и } \lambda\in\mathbf{R}, \qquad \textbf{(2)}$$

т. е., поскольку при $\lambda=0$ это условие выполнено по предположению, — чтобы

$$c\leqslant\frac{p(x+\sigma x_0)-g(x)}{\sigma} \quad \text{для всех} \quad x\in G \text{ и } \sigma>0 \qquad (3)$$

и

$$c\geqslant\frac{g(y)-p(y-\rho x_0)}{\rho} \quad \text{для всех} \quad y\in G \text{ и } \rho>0. \qquad (4)$$

Но

$$\frac{g(y)-p(y-\rho x_0)}{\rho}\leqslant\frac{p(x+\sigma x_0)-g(x)}{\sigma} \qquad (5)$$

$$\text{для всех } x,\ y\in G \quad \text{и} \quad \rho,\ \sigma>0.$$

Действительно, это неравенство равносильно неравенству

$$\rho g(x)+\sigma g(y)\leqslant\rho p(x+\sigma x_0)+\sigma p(y-\rho x_0),$$

последнее же справедливо, поскольку $\rho x+\sigma y\in G$, откуда

$$\rho g(x)+\sigma g(y)=g(\rho x+\sigma y)\leqslant p(\rho x+\sigma y)$$
$$\text{для всех } x,\ y\in G \text{ и } \rho,\ \sigma>0$$

и в свою очередь

$$p(\rho x+\sigma y)=p((\rho x+\rho\sigma x_0)+(\sigma y-\sigma\rho x_0))\leqslant$$
$$\leqslant\rho p(x+\sigma x_0)+\sigma p(y-\rho x_0).$$

А из (5), в силу конечности функции p, следует, что $\alpha=$

$$=\sup_{\substack{y\in G\\ \rho>0}}\frac{g(y)-p(y-\rho x_0)}{\rho}$$

и

$$\beta=\inf_{\substack{x\in G\\ \sigma>0}}\frac{p(x+\sigma x_0)-g(x)}{\sigma},$$

конечны и $\alpha\leq\beta$. Но тогда условиям (3) и (4), а значит условию (2), удовлетворяет любое $c\in[\alpha,\beta]$, так что требуемое продолжение (1) функции g существует.

2° Рассмотрим теперь совокупность всех продолжений f_G функции f_F, мажорируемых функцией p. Эта совокупность, упорядоченная отношением $f_G\leq f_H$, означающим, что $G\subset H$ и f_H —продолжение f_G на H, очевидно, индуктивна. Поэтому f_F обладает максимальным продолжением f_M, мажорируемым функцией p. Но тогда в силу 1° $M=E$, и теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть E — векторное пространство над* **R** *и $p(x)$ — конечная сублинейная функция на E. Для каждого $x_0\in E$ существует линейная функция $f\in E^*$, мажорируемая функцией p и удовлетворяющая условию*

$$f(x_0)=p(x_0).\qquad \textbf{(6)}$$

Доказательство. Пусть $F=\mathfrak{E}_{x_0}=\{x\in E:\ x=\lambda x_0$ $(\lambda\in\mathbf{R})\}$. Положим $f_F(x)=f_F(\lambda x_0)=\lambda p(x_0)$. Очевидно, $f_F\in F^*$.

$$f_F(x)=\lambda p(x_0)\leqslant p(\lambda x_0)=p(x).$$

Таким образом, f_F удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, обладает продолжением f на E, мажорируемым функцией p; так как при этом

$$f_F(x_0)=p(x_0),$$

то f удовлетворяет и условию (6).

Следствие 2. *Пусть E — векторное пространство над K, где* K = **R** *или* **C**, *$p(x)$ — конечная сублинейная функция на E и $P^*=\{f\in E^*: \Re f(x)\leqslant p(x)$* для всех $x\in E)$.
Тогда

$$p(x)=\sup_{f\in P^*}\Re f(x).\qquad (7)$$

Доказательство. При K =**R** P^* — совокупность всех $f\in E^*$, мажорируемых функцией p, и формула (7), принимающая вид $p(x)=\sup\limits_{f\in P^*} f(x)$, непосредственно вытекает из следствия 1. При К=**C** надо вместо E рассмотреть $E_{\mathbf{R}}$.

Теорема 2 (Хан). *Пусть E—векторное пространство над* К, где К =**R** *или* **C**, $F\subset \subset E$ *и p(x) — преднорма на E. Всякая линейная функция* $f_F\in F^*$, *удовлетворяющая неравенству*

$$|f_F(x)|\leqslant p(x) \text{ для всех } x\in F, \quad \textbf{(8)}$$

обладает продолжением $f\in E^*$, *удовлетворяющим неравенству*

$$|f(x)|\leqslant p(x) \text{ для всех } x\in E. \quad \textbf{(9)}$$

Доказательство. 1°. Пусть К = **R**. Из (8) вытекает, что f_F мажорируется функцией p, и следовательно, по теореме 1, обладает продолжением $f\in E^*$, удовлетворяющим неравенству

$$f(x)\leqslant p(x) \text{ для всех } x\in E. \quad \textbf{(10)}$$

Заменяя в (10) x на $-x$, получаем

$$-f(x)=f(-x)\leqslant p(-x)=p(x) \text{ для всех } x\in E,$$

что в соединении с (10) дает (9).

2° Пусть К = **C**. Из (8) вытекает, что вещественная линейная функция $\Re f_F$ на F мажорируется функцией p, и следовательно, в силу теоремы 1, существует вещественная линейная функция g на E, мажорируемая функцией p и служащая продолжением $\Re f_F$ на E. Но

$$g(x)=\Re f(x),$$

где f — комплексная линейная функция на E, определяемая формулой $f(x)=g(x)-ig(ix)$. Таким образом,

$$\Re f(x)\leqslant p(x) \text{ для всех } x\in E, \quad (11)$$

и так как для $x\in F$ также $f_F(x)=\Re f_F(x)-i\Re f_F(ix)=$ $=g(x)-ig(ix)$, то f является продолжением f_F на E. Пусть теперь x — произвольный вектор из E и $f(x)=\rho e^{i\varphi}$. В силу (11) имеем тогда

$$|f(x)|=\rho=f(e^{-i\varphi}x)=\Re f(e^{-i\varphi}x)\leqslant p(e^{-i\varphi}x)=p(x),$$

т. е. f удовлетворяет неравенству (9).

Замечание. Попутно мы установили, что *неравенства* (9) *и* (11) (превращающееся при К = **R** в (10)) *равносильны.*

Следствие. *Пусть E—векторное пространство над* **R** *или* **C** *и p(x) — преднорма на E. Для каждого* $x_0\in E$ *существует линейная функция* $f\in E^*$, *удовлетворяющая неравенству* (9) *и условию* (6).

Доказательство. Как и в доказательстве следствия 1 теоремы 1, берем $F=\mathfrak{C}x_0$ и $f_F(\lambda x_0)=\lambda p(x_0)$. Тогда $|f_F(x)|\leqslant p(x)$ и остается применить теорему *2*.

7.7. Теоремы продолжения линейной функции (геометрическое изложение)

Лемма. *Если ненулевое вещественное векторное пространство E неодномерно, то для всякого алгебраически открытого конуса $C \subset E$, отличного от E, существует не пересекающее его одномерное подпространство.*

Доказательство. Пусть $c \in C$, так что, в силу 7.5.3 и 7.4. А5°, $c \neq 0$. Так как, в силу условия леммы, $E \neq \mathscr{E}_c$, то существует вектор $t \in E$, не зависящий линейно от c.

Далее, поскольку $C = \mathring{C}$, существует ε>0 такое, что $d = c + \varepsilon t \in C$. Таким образом, C содержит пару линейно независимых векторов c, d. Рассмотрим прямую l проходящую через c и $—d$. Выберем на ней в качестве положительного направление возрастания параметра α при задании ее параметрическим уравнением $x = c + \alpha(c + d)$. Луч (c, →) этой прямой, образованный точками $c + \rho(c + d) = (1 + \rho)c + \rho d$, где ρ > 0, содержится в C. С другой стороны— $d \notin C$. Поэтому $C \cap l$ есть полупрямая с началом $e \in [-d, c]$, идущая в положительном направлении. Но тогда $e \notin C$, ибо $e + \varepsilon(-d - c)$ не принадлежит C ни при каком ε>0, а C алгебраически открыто. Точно так же $—e \notin C$, т. е. $e \notin$ — С, ибо $e + \varepsilon(c + d)$ для всех ε> 0 принадлежит C и, значит, не принадлежит — C. Наконец, $e \neq 0$, поскольку l, вследствие линейной независимости векторов c и d, не проходит через 0. Но в таком случае $\mathscr{E}_e$ есть одномерное подпространство, не пересекающееся с C. В самом деле, из $\lambda e \in C$ при λ > 0 следовало бы, что $e \in C$, а при λ < 0, что $—e \in$ С, нулевой же вектор не содержится в С.

Теорема 3. *Если C — конус в вещественном векторном пространстве E, обладающий окруженной точкой, то всякое подпространство F пространства E, не содержащее окруженных точек конуса C, содержится в гиперподпространстве H, обладающем тем же свойством.*

Доказательство. Множество всех подпространств пространства E, содержащих F и не пересекающихся с С, упорядоченное по возрастанию, очевидно, индуктивно. Следовательно, по принципу максимального элемента, в E существует максимальное подпространство $H \supset F$, не пересекающееся с $\mathring{C}$. Так как $\mathring{C} \neq \phi$, то $H \neq E$. Пусть φ—каноническое наложение E на $E \backslash H$. В силу 7.4.АГ, 4°и 7.5.3, К, Б', $\varphi(\mathring{C})$— алгебраически открытый конус. При этом, так как $H \cap \mathring{C} = \phi$, то $0 \notin \varphi(\mathring{C})$ и поэтому конус $\varphi(\mathring{C})$, в силу 7.4.А5°,—

строгий. Если бы теперь $E\backslash И$ было неодномерно, то в силу леммы в E/H существовал бы ненулевой элемент $w = \varphi(u)$, для которого $\mathcal{E}_w = \varphi(\mathcal{E}_u)$ не пересекалось бы с $\varphi(\mathring{C})$. Но так как $\varphi(H + \mathcal{E}_u) = \mathcal{E}_w$, то тогда $H + \mathcal{E}_u$ не пересекалось бы с $\mathring{C}$, что, однако, противоречило бы максимальности H, поскольку $u \notin H$. Таким образом, E/H одномерно и, следовательно , H — собственное гиперподпространство.

Теорема 4. *Если A— выпуклое множество в вещественном векторном пространстве E, обладающее окруженной точкой a_0, то всякое аффинное многообразие L, не содержащее окруженных точек множества A, содержится в гиперплоскости X, обладающей тем же свойством.*

Доказательство. Пусть F— подпространство, параллельное L. *Тогда*, $F = L—x_0$, где x_0—произвольная фиксированная точка из L. Положим $B = \mathring{A} - x_0$. Так как $x_0 \notin \mathring{A}$, то $0 \notin B$ и B— алгебраически открытое выпуклое множество. Поэтому $C =$
$= \bigcup\limits_{\rho > 0} \rho B$ есть строгий алгебраически открытый конус. При этом $F \cap C = \varnothing$. В самом деле, если $x \in F \cap C$, то $x = \rho(a - x_0)$, где $a \in \mathring{A}$ и $\rho > 0$, а тогда $a = \rho^{-1}x +$
$+ x_0 \in F + x_0 = L$, т. е. $a \in L \cap \mathring{A}$, что противоречит условию теоремы. Тем самым C и F удовлетворяют условиям теоремы 3 и, значит, существует гиперподпространство H, содержащее F и не пересекающееся с C. Но в таком случае гиперплоскость $X = H + x_0$ содержит $L = F + x_0$ и не пересекается с $C+x_0$, а тем самым и с $\mathring{A}$ (содержащимся в $C + x_0$**)**.

Замечание. *A лежит по одну сторону от X.*

А. *Теорема* 1 *есть следствие теоремы* 3. Действительно, пусть E— векторное пространство над $\mathbf{R}$, $p(x)$ — конечная сублинейная функция на E, $F \subset \subset E$ и f_F — линейная функция на F, удовлетворяющая условию

$$f_F(x) \leqslant p(x) \text{ для всех } x \in F. \tag{1}$$

Положим

$$C = \{(x, \alpha) \in E \times \mathbf{R}^1 : p(x) < \alpha\}.$$

Так как $p(0) = 0 < 1$, то

$$(0, 1) \in C. \tag{2}$$

так что $C\neq\varnothing$. Пусть $(x, \alpha) \in C$. Так как $p(x) < \alpha$, то для всякого $t\in E$ существует $\varepsilon>0$ такое, что $p(x+\delta t) \leqslant$ $\leqslant p(x)+\delta p(t) < \alpha$ для всех $\delta \in [0, \varepsilon]$, т. е. $[x, x+\varepsilon t] \subset C$. Тем самым $C = \overset{\circ}{C}$. При этом $p(-x) \geqslant$ $\geqslant - p(x) > -\alpha$, так что $-(x, \alpha) = (-x, -\alpha) \notin C$. Далее, если $\rho > 0$, то $p(\rho x) = \rho p(x) < \rho\alpha$ и, значит, $\rho\cdot(x, \alpha) =$ $= (\rho x, \rho\alpha) \in C$. Наконец, если и $(y, \beta) \in C$, то $p(x+y) \leqslant$ $\leqslant p(x) + p(y) < \alpha+\beta$ и, значит, $(x, \alpha) + (y, \beta) =$ $= (x+y, \alpha+\beta) \in C$. Таким образом, C — непустой строгий алгебраически открытый конус в $E\times\mathbf{R}^1$. Положим, далее,

$$\varphi(x, \alpha) = f_F(x) - \alpha \quad \text{для всех} \quad (x, \alpha) \in F\times\mathbf{R}^1. \qquad \textbf{(3)}$$

Очевидно, φ — линейная функция на $E\times\mathbf{R}^1$. Пусть $G = K_\varphi$, т. е.

$$G = \{(x, \alpha) \in F\times\mathbf{R}^1\colon\ f_F(x) = \alpha\}.$$

Так как $F\times\mathbf{R}^1 \subset\subset E\times\mathbf{R}^1$, то и $<G \subset\subset E\times\mathbf{R}^1$. При этом $G\cap C = \varnothing$, ибо, в силу (1), для всех $(x, \alpha) \in G$ имеем $p(x) \geqslant f_F(x) = \alpha$. Таким образом, C и G удовлетворяют условиям теоремы 3 и, значит, в $E\times\mathbf{R}^1$существует гиперподпространство H, содержащее G и не пересекающееся с C. Так как тогда в силу (2) $(0, 1) \notin H$. то на $E\times\mathbf{R}^1$ существует линейная функция ψ, имеющая своим ядром H и удовлетворяющая условию $\psi(0, 1) = -1$. Так как в силу (3) и $\varphi(0, 1) = -1$, а $K_\varphi = G \subset H = K_\psi$, то ψ есть продолжение φ с $E\times\mathbf{R}^1$ на всё $E\times\mathbf{R}^1$. Следовательно, линейная функция $f(x) = \psi(x, 0)$ есть продолжение линейной функции $f_F(x) = \varphi(x, 0)$ с F на всё E. Далее, так как $H\cap C = \varnothing$, то для всех $(x, \alpha) \in H$ имеем $\alpha\leq p(x)$. Но

$$H = K_\psi = \{(x, \alpha) \in E\times\mathbf{R}^1\colon\ f(x) = \alpha\}.$$

Следовательно,.

$$f(x) \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x\in E,$$

и теорема 1 доказана.

Б. *Теорема* 4 *есть следствие теоремы* 1. Действительно, пусть A— выпуклое множество в векторном пространстве E над $\mathbf{R}$, $a_0 \in \overset{\circ}{A}$ и L—аффинное многообразие в E, не пересекающееся с $\overset{\circ}{A}$. Положим $B = \overset{\circ}{A} - a_0$, $M=L-a_0$ и пусть x_0— произвольная фиксированная точка из M, G — подпространство, параллельное $\dot{M}$, $F = G + \mathfrak{E}_{x_0}$ и f_F — линейная функция на F, определяемая условиями $K_f=G$ и $f_F(x_0)=1$. Так как a_0—окруженная точка множества $\mathring{A}$, то 0—окруженная точка множества B . B —алгебраически открытое выпуклое множество. Пусть p_B— его функционал Минковского. Тогда

$$B = \{x \in E: \ p_B(x) < 1\}. \qquad (4)$$

Покажем, что

$$f_F(x) \leqslant p_B(x) \ \text{для всех} \ x \in F. \qquad (5)$$

В самом деле, пусть $x \in F,$ так что $x = g + \alpha x_0$, где $g \in G$ и $\alpha \in \mathbf{R}$, и значит, $f_F(x) = \alpha$. Если $\alpha \leq 0$, то $f_F(x) \leqslant p_B(x)$, поскольку $p_B(x) \geqslant \alpha$. Пусть $\alpha > 0$. $\alpha^{-1}g + x_0 \in G + x_0 = M$. Но так как $L \cap \mathring{A} = \phi$, то $M \cap B = \varnothing$. Поэтому в силу (4) $p_B(\alpha^{-1}g + x_0) \geqslant 1$. А тогда

$$f_F(x) = \alpha \leqslant \alpha p_B(\alpha^{-1}g + x_0) = p_B(g + \alpha x_0) = p_B(x)$$

. Так как $p_B(x)$ — конечная сублинейная функция, то, по теореме 1, из (5) следует, что f_F обладает продолжением $f \in$ E*, -удовлетворяющим условию

$$f(x) \leqslant p_B(x) \ \text{для всех} \ x \in E. \qquad \textbf{(6)}$$

Пусть Y—гиперплоскость, определяемая уравнением $f(x)=1$. Так как $M = G + x_0$, то для всех $x \in M$ имеем $f(x) = f_F(x) = f_F(x_0) = 1$ и, значит, $Y \supset M$. С другой стороны, в силу (6) для всех $x \in Y$ имеем $p_B(x) \geqslant 1 = f(x)$ и потому $Y \cap B = \varnothing$. Но тогда $X=Y+a_0$ есть гиперплоскость, содержащая $L=M+a_0$ и не пересекающаяся с

$$\mathring{A} = B + a_0;$$

теорема 4 доказана.

В. Так как теорема 3 является очевидным следствием теоремы 4 , то заключаем из А и Б, что *теоремы* 1, 3 к 4 *равносильны.*

Теорема 5. *Если A — выпуклое множество в вещественном векторном пространстве E, обладающее окруженной точкой, то для каждой точки $x_0 \in E \setminus \mathring{A}$ существует ненулевая линейная функция $f \in$* E* *такая, что*

$$\sup_{x \in A} f(x) \leqslant f(x_0). \qquad (7)$$

Доказательство. Так как A и $L = \{x_0\}$ удовлетворяют условиям теоремы 4, то существует гиперплоскость X, содержащая точку x_0 и не пересекающаяся с $\mathring{A}$. В силу 7.5.М, тогда A лежит по одну сторону от X, т. е. уравнение $f(x) = \xi$, гиперплоскости X можно выбрать так, что все точки $x \in A$ будут удовлетворять неравенству $f(x) \leq \xi$. Но $\xi = f(x_0)$, поскольку $x_0 \in X$.

Замечание. *Пусть* $a \notin \mathring{A}$. *Если* x_0 *не совпадает с концом* x, *интервала, по которому* $[a, x_0]$ *пересекает* A, *то* f *можно выбрать так, чтобы в* (7) *имело место строгое неравенство.* Действительно, так как $x_1 \notin \mathring{A}$, то, по теореме 5, существует $f \in E^*$ такое, что

$$\sup_{x \in A} f(x) \leqslant f(x_1),$$

причем $f(a) < f(x_1)$, поскольку гиперплоскость $f(x) = f(x_1)$ не содержит a. Но так как $x_1 \in (a, x_0)$, то $x_1 = (1-\rho) a + \rho x_0$, где $0 < \rho < 1$. А тогда $f(x_1) = (1-\rho) f(a) + \rho f(x_0) <$
$< (1-\rho) f(x_1) + \rho f(x_0)$, откуда $f(x_1) < f(x_0)$.

Следствие. *Всякое выпуклое множество* A *в вещественном векторном пространстве* E, *обладающее окруженной точкой и не совпадающее с* E, *содержится в полупространстве.*

Г. Как легко видеть, последнее утверждение сохраняет Силу и при ослабленном предположении, что A обладает относительно окруженной точкой. Принимая во внимание сказанное в 7.5.Д. заключаем отсюда, что *в конечномерном вещественном векторном пространстве каждое выпуклое собственное подмножество содержится в полупространстве.* Напротив, *во всяком бесконечномерном векторном пространстве E над* R *существует выпуклое множество, отличное от E, не содержащееся ни в каком полупространстве.* Действительно, пусть A — базис пространства E. Из теоремы Цермело, в силу бесконечности множества A, легко следует, что в A имеется отношение порядка, при котором A является совершено упорядоченным множеством без последнего элемента. Требуемым свойством обладает тогда множество тех векторов, у которых последняя (при указанном упорядочении) ненулевая координата положительна, в чем легко убедиться, воспользовавшись общим видом линейных функций на векторном пространстве с заданным базисом.

Д. Пусть C—конус в вещественном векторном пространстве E. Линейная функция $f \in E^*$ называется *положительной* относительно C, если $f(x) \geq 0$ для всех $x \in C$. *Если* f *— ненулевая положительная линейная функции относительно конуса C, то* $f(x_0) > 0$ *для всякой его окруженной точки* x_0. Действительно, так как $f \neq 0$, то существует вектор $t \in E$, для которого $f(t) < 0$. Но, поскольку $x_0 \in \mathring{C}$, $x_0 + \varepsilon t \in C$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. А тогда $f(x_0 + \varepsilon t) \geqslant 0$, откуда $f(x_0) \geqslant -\varepsilon f(t) > 0$.

Теорема 6 (М. Крейн). *Пусть С — конус в вещественном векторном пространстве Е и G—подпространство, содержащее окруженную точку x_0 этого конуса. Тогда всякая линейная функция $f_G \in G^*$, положительная относительно конуса $C_G = C \cap G$, обладает продолжением* $f \in E^*$, б *положительным относительно С.*

Доказательство. При $f_G = 0$ утверждение очевидно.

Пусть $f_G \neq 0$ и $F = K_{fG}$, В силу Д $F \cap \mathring{C}_G = \phi$, и так как, очевидно, $\mathring{C} \cap G = \mathring{C}_G$, то, тем более. Следова $F \cap \mathring{C} = \phi$, тельно, по теореме 3, в E существует гиперподпространство H, содержащее F и не пересекающееся с $\mathring{C}$. Так как $x_0 \in \mathring{C}_G$ и, значит, по Д, $f_G(x_0)>0$, но тогда в силу 5.3.Е существует $f \in E^*$ такая, что $K_f = H$ и $f(x_0) = f_G(x_0)$. Но в таком случае, снова по 5.3.Е, $f(x) = f_G(x)$ для всех $x \in G$, т. е. f—продолжение f_G. С другой стороны, так как $f(x_0)>0$, то, в силу 7.5.М, $f(x) \geq 0$ для всех $x \in C$, т. е. f положительна относительно C.

Следствие. *Для всякого конуса С в вещественном векторном пространстве Е, обладающего окруженной точкой x_0 и не совпадающего с Е, существуют линейные функции, положительные относительно С.*

Доказательство. Достаточно взять в теореме $G = \mathscr{E}_{x_0}$ и $f_G(\alpha x_0) = \alpha$.

7.8. ДУАЛЬНЫЕ ПАРЫ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

7.8.1. Понятие дуальной пары

Определение 1. Пусть E и F— векторные пространства над одним и тем же полем К. Функцию $u(x, y)$ со значениями в К, определенную на произведении $E \times F$, называют *билинейной,* если

$$u_{\cdot y_0}(x) = u(x, y_0)$$

является линейной функцией на E при каждом фиксированном $y_0 \in F$ и

$$u_{x_0 \cdot}(y) = u(x_0, y)$$

— линейной функцией на F при каждом фиксированном $x_0 \in E$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} u(x_1 + x_2, y) &= u(x_1, y) + u(x_2, y), \\ u(x, y_1 + y_2) &= u(x, y_1) + u(x, y_2) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и

$$u(\lambda x, y) = u(x, \lambda y) = \lambda u(x, y) \tag{2}$$

при любых $x, x_1, x_2 \in E, y, y_1, y_2 \in F$ и $\lambda \in K$.

Если *и* — билинейная функция на $E \times F$, то функция u' на $F \times E$, определяемая условием

$$u'(y, x) = u(x, y) \text{ для всех } (y, x) \in F \times E$$

и, очевидно, также билинейная, называется *транспонированной* по отношению к *и.*

Для обозначения линейных функций $u_{\cdot y}$ и $u_{x\cdot}$ мы будем иногда пользоваться также символами $u(\cdot, y)$ и $u(x, \cdot)$.

Векторы $x \in E$ и $y \in F$, для которых $u(x, y) = 0$, будут называться *ортогональными.*

А. Так, $u(x, f)=f(x)$ с переменными $x \in E$ и $f \in E^*$, по самому определению пространства E^*, есть билинейная функция на $E \times E^*$. Мы будем обозначать ее

$$\langle x, f \rangle$$

и называть *канонической билинейной функцией* на $E \times E^*$.

Очевидно, для произвольной билинейной функции *и* на $E \times F$ имеем

$$u(x, y) = \langle x, u_{\cdot y} \rangle = \langle y, u_{x\cdot} \rangle.$$

Б. *Если и — билинейная функция на* $E \times F$, *то* $y \to u_{\cdot y}$ *есть линейное отображение* F *в* E^* *и* $x \to u_{x\cdot}$ *— линейное отображение* E *в* F^*. Действительно, это непосредственно следует из формул (1) и (2). В частности, $x \to \langle x, \cdot \rangle$ есть линейное отображение E в E^{**}.

Б'. Положим

$$u_{\cdot F} = \{u_{\cdot y}: y \in F\} \quad \text{и} \quad u_{E\cdot} = \{u_{x\cdot}: x \in E\}.$$

В силу Б и 4.1.В $u_{\cdot F} \subset\subset E^*$ и $u_{E\cdot} \subset\subset F^*$.

Определение 2. Пусть E и F — векторные пространства над одним и тем же полем К. Если на $E \times F$ фиксирована билинейная функция $u(x, y)$, то мы будем говорить, что E и F образуют *дуальную пару* относительно *и,* притом *отделимую по F,* если выполнено условие

I. $u_{\cdot y_0} \neq 0$ *для каждого ненулевого вектора* y_0 *из F, отделимую по E,* если выполнено условие

II. $u_{x_0\cdot} \neq 0$ *для каждого ненулевого вектора* x_0 *из E,*

и просто *отделимую,* если выполнены одновременно оба условия.

Дуальная пара, образуемая векторными пространствами E и F относительно билинейной функции *и,* будет обозначаться $(E, F; u)$.

Если $F \subset\subset E^*$, то под *и* будет всегда пониматься сужение канонической билинейной функции $\langle x, f \rangle$ на $E \times F$ и вместо $(E, F; u)$ мы будем писать просто (E, F).

Примеры. 1. Рассмотрение примера 4 п° 1 § 5 показывает, что пространства l^p и l^q, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, образуют отделимую дуальную пару относительно билинейной функции

$$u(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k \qquad (3)$$

векторов $x=(\xi_k)\in l^p,\ y=(\eta_k)\in l^q$. То же, очевидно, верно и для пространств $l^p_{\mathbf{R}}$ и $l^q_{\mathbf{R}}$.

2. Точно так же пространства l^1 и l^∞ $\left(l^1_{\mathbf{R}}\right.$ и $\left.l^\infty_{\mathbf{R}}\right)$ образуют отделимую дуальную пару относительно билинейной функции (3) векторов $x=(\xi_k)\in l^1\left(l^1_{\mathbf{R}}\right),\ y=(\eta_k)\in l^\infty\left(l^\infty_{\mathbf{R}}\right)$.

В. В силу 4.1.Е условие I (II) определения 2 в соединении с Б означает, что *дуальная пара (E, F; u) отделима по F (E) тогда и только тогда, когда* $y\to u_{\cdot y}$ $(x\to u_{x\cdot})$ *есть вложение F в E* (E в F*).*

В'. Очевидно, *дуальная пара, образованная векторными пространствами E и F относительно билинейной функции u, отделима по E или F одновременно с дуальной парой, которую образуют F и E относительно транспонированной билинейной функции u'.*

Г. *Всякая дуальная пара (E, E'), где* $E'\subset\subset E^*$, *отделима по E'.* В самом деле, пусть *u* — сужение канонической билинейной функции $\langle x, f\rangle$ на $E\times E'$; условие I определения 2 выполнено здесь просто потому, что

$u_{\cdot f_0}=f_0$.

Дуальная пара (E, E) отделима.* Действительно, пусть $A=(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ — базис пространства *E* и x_0—ненулевой вектор из *E*. Тогда по крайней мере одна координата $x_{0\alpha}$ этого вектора относительно базиса *A* отлична от нуля и потому для соответствующей координатной линейной функции a^α имеем $u_{x_0\cdot}(a^\alpha)=\langle x_0,\ a^\alpha\rangle=x_{0\alpha}\neq 0$. Тем самым выполнено и условие II.

Д. *Если дуальная пара (E, F; u) отделима по F, то для каждой линейной функции g на F и каждого конечного набора векторов* $y_1,\ \ldots,\ y_n\in F$ *существует вектор* $x\in E$, *удовлетворяющий уравнениям*

$$u_{\cdot y_k}(x)=\langle y_k,\ g\rangle \qquad (k=1,\ \ldots,\ n). \qquad (4)$$

Действительно, если $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_{\cdot y_k}(x)=u\left(x,\ \sum_{k=0}^{n}\lambda_k y_k\right)=0$ для всех $x \in E$, то, в силу условия I определения 2, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k = 0$,

откуда $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (y_k,\ g) = 0$. Таким образом, система линейных

уравнений (4) удовлетворяет условию теоремы 1 § 5 и тем самым разрешима.

Д'. В силу Г заключаем из Д, что *если* $E' \subset\subset E^*$, *то для каждой линейной функции x^* на E' и каждого конечного набора линейных функций* $f_1, \ldots, f_n \in E'$ *существует, вектор $x \in E$, удовлетворяющий уравнениям*

$$(x,\ f_k) = (f_k,\ x^*) \qquad (k = 1,\ \ldots,\ n).$$

Впрочем, в силу В Д' есть лишь перефразировка Д.

Е. *n-мерное векторное пространство E над* К *образует отделимую дуальную пару с векторным пространством F над* К *относительно какой-нибудь билинейной функции и тогда и только тогда, когда F n-мерно; при этом* $y \to u_{\cdot y}$ *есть изоморфизм F на E^*.* В самом деле, так как $y \to u_{\cdot y}$, согласно В, есть вложение F в E^*, а E^* n-мерно (5.2.А), то в силу 3.7. Г, И F конечномерно и его размерность $m \leq n$. Но тогда и F^* m-мерно, а так как $x \to u_{x\cdot}$, по В, есть вложение E в F^*, то $n \leq m$. Следовательно, $m = n$, т. е. F n-мерно, а в таком случае образом F при вложении $y \to u_{\cdot y}$ служит всё E^* (см. 3.7. И 1°). Обратно, пусть F — произвольное n-мерное векторное пространство над К. Положим

$$u(x,\ y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k,$$

где ξ_k и η_k $(k = 1,\ \ldots,\ n)$—координаты векторов $x \in E$ и $y \in F$ относительно каких-нибудь фиксированных базисов. Очевидно, u — билинейная функция. Покажем, что дуальная пара *(E, F; u)* отделима. Действительно, если $y^{(0)} \neq 0$, так что, скажем, $\eta_{k_0}^{(0)} \neq 0$, то для $x^{(0)} = (\delta_{k_0 1},\ \ldots,\ \delta_{k_0 n})$ имеем $u_{\cdot y^{(0)}}(x^{(0)}) \neq 0$. Тем самым выполнено условие .1 определения 2; совершенно так же устанавливается выполнение условия II.

Е'. Из Е, в частности, следует, что *конечномерное векторное пространство не может образовывать отделимой дуальной пары ни с одним собственным подпространством своего векторного сопряженного.*

Ж. Напротив, *бесконечномерное векторное пространство E образует отделимую дуальную пару с бесконечным множеством различных подпространств пространства E^*.* Действительно, пусть

$A=(a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ — какой-нибудь базис пространства *E* и $E^\sharp$ — подпространство в *E*,* порожденное множеством *А** всех координатных линейных функций a^α . $E^\sharp$ не содержит ни одной линейной функции

$$f(x)=\sum_{\alpha\in\Lambda} f^\alpha a^\alpha(x),$$

у которой бесконечное множество коэффициентов f^α отлично от нуля, и потому содержится в бесконечном множестве различных подпространств пространства *Е**. В то же время, так же как в Е, можно убедиться в том, что *Е* образует отделимую дуальную пару как с $E^\sharp$, так, следовательно, и с любым из этих подпространств.

Определение 3. *Достаточным пространством линейных функций* на *Е* будет называться всякое $E' \subset\subset E^*$, образующее с *Е* отделимую дуальную пару, т. е. такое, что для любого ненулевого вектора $x_o \in E$ существует линейная функция $f_0 \in E'$, отличная в x_0 от нуля.

Пример. В примере 1 к определению 2 l^q, отождествленное со своим образом при вложении $y \to u_{\cdot y}$ в $(l^p)^*$, является достаточным пространством линейных функций на l^P. Аналогичный результат верен и для пространств l^1 и l^∞ (см. пример 2 к определению 2).

3. Из В следует, что *если Е' — достаточное пространство линейных функций на Е, то* $x \to \langle x,\ f\rangle$,... где *правая часть рассматривается как функция от f на Е', есть вложение Е в Е'**. Рассматривая дуальные пары *(Е, Е')* с достаточным *Е'*, обычно отождествляют *Е* с его образом в *Е'** при этом *каноническом вложении.* В частном случае конечномерного *Е* это будет отождествлением *Е* с $E'^* = E^{**}$.

И. *Если Е' — достаточное пространство линейных функций на Е, то каждая линейная функция* f_F*, заданная на конечномерном подпространстве F пространства Е, обладает продолжением на всё Е, принадлежащим Е', т. е. существует линейная функция* $f\in E'$ *такая, что* $\langle x,\ f\rangle = f_F(x)$ *для всех* $x\in F$. Действительно, пусть векторы $a_1, \ldots, a_n$ образуют базис подпространства *F.* Так как они линейно независимы, а *Е* можно рассматривать, согласно 3, как пространство линейных функций на *Е',* то, по теореме 2 § 5, система линейных уравнений на *Е'*

$$\langle a_k,\ f\rangle = f_F(a_k)$$

разрешима. Ее решение $f\in E'$ и обладает утверждаемым свойством, ибо для любого вектора $x=\sum_{k=1}^{n} x_k a_k \in F$ имеем

$$\langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle a_k, f\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k f_F(a_k) = f_F(x).$$

К. В силу 3 имеет место также предложение, «дуальное» к Д': *если E'— достаточное пространство линейных функций на E, то для каждой линейной функции f* на E и каждого конечного набора векторов* $x_1, \ldots, x_n \in E$ *существует линейная функция* $f \in E'$ *такая, что*

$$\langle x_k, f\rangle = \langle x_k, f^*\rangle \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

7.8.2. Аннуляторы

Определение 4. Пусть *(E, F; u)* — заданная дуальная пара векторных пространств (см. определение 2). *Аннулятором* множества $A \subset E$ в F (относительно *u)* называется совокупность всех векторов $y \in F$, ортогональных к каждому вектору $x \in A$, т. е. множество

$$A^{\perp} = \{y \in F:\ u(x, y) = 0 \text{ для всех } x \in A\}.$$

Аналогично, аннулятором множества $B \subset F$ в E (относительно *u)* называется множество

$$B^{\perp} = \{x \in E:\ u(x, y) = 0 \text{ для всех } y \in B\}.$$

Под $C^{\perp\perp}$ и $C^{\perp\perp\perp}$, где $C \subset E$ или F, понимается соответственно $(C^{\perp})^{\perp}$ и $(C^{\perp\perp})^{\perp}$. $C^{\perp\perp}$ называется *бианнулятором* множества C.

А. Очевидно, $F^{\perp}$ $(E^{\perp})$ *есть ядро отображения* $x \to u_x$. $(y \to u_{\cdot y})$. Таким образом, 1.В можно выразить следующим образом: *дуальная пара (E, F; u) отделима по E (F) тогда и только тогда, когда* $F^{\perp} = \{0\}$ $(E^{\perp} = \{0\})$.

Б. Из определения 4 непосредственно следует:

1° $C \subset D$ *влечет* $D^{\perp} \subset C^{\perp}$.

2° $C \subset C^{\perp\perp}$.

3° $\left(\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha\right)^{\perp} = \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha^{\perp}$.

Повторно применяя 1°, получаем:

4° *C⊂D влечет* $C^{\perp\perp} \subset D^{\perp\perp}$.

В. $C^{\perp\perp\perp} = C^{\perp}$, *каково бы ни было C.* Действительно, с одной стороны, $C^{\perp\perp\perp} = (C^{\perp})^{\perp\perp} \supset C^{\perp}$ ^(Б 2°). С другой стороны, так как $C \subset C^{\perp\perp}$, то $C^{\perp} \supset (C^{\perp\perp})^{\perp} = C^{\perp\perp\perp}$ (Б1°).

Г. Пусть $C \subset E$ (F). $C^{\perp\perp}$ — *наибольшее из множеств*

$M \subset E$ (F), для которых $M^{\perp} = C^{\perp}$. Действительно, с одной стороны, по В, $(C^{\perp\perp})^{\perp} = C^{\perp}$. С другой стороны, если $M^{\perp} = C^{\perp}$, то согласно Б 2° $M \subset M^{\perp\perp} = C^{\perp\perp}$ (Совершенно так же $C^{\perp\perp}$ — наибольшее из множеств *M,* для которых $M^{\perp} \supset C^{\perp}$.).

Д. *Если $C \subset E$ (F), то* $C^{\perp} \subset\subset F$ (E). В самом деле, пусть, скажем, $C \subset E$. Если $y_1,\ y_2 \in C^{\perp}$, то $u(x,\ y_1 + y_2) = u(x,\ y_1) + u(x,\ y_2) = 0$ для всех $x \in C$, т. е. $y_1 + y_2 \in C^{\perp}$; далее, $u(x,\ \lambda y_1) = \lambda u(x,\ y_1) = 0$ для всех $x \in C$ и скаляров λ, т. е. $\lambda y_1 \in C^{\perp}$, и остается применить 3.2.В.

Е. Из Д следует, что *если $C \subset E$ (F), то* $C^{\perp\perp} \subset\subset E$ (F). Тогда $C \subset \mathscr{E}_C \subset C^{\perp\perp}$ (Б 2°), откуда $C^{\perp} \supset \mathscr{E}_C^{\perp} \supset C^{\perp\perp\perp}$ (Б 1°). На основании В заключаем, что

$$\mathscr{E}_C^{\perp} = C^{\perp}. \tag{1}$$

Справедливость этого легко проверить и непосредственно.

Ж. Если $0 \in C \cap D$, то $(C + D)^{\perp} = C^{\perp} \cap D^{\perp}$. Действительно, это непосредственно следует из Б 3° и (1), поскольку, вследствие сделанного предположения, $\mathscr{E}_{C+D} = \mathscr{E}_{C \cup D}$.

3. *Пусть (E, F; u) — заданная дуальнаяпара векторных пространств. Если $K \subset\subset E$ конечномерно, то*

$$\operatorname{codim} K^{\perp} \leqslant \dim K, \tag{2}$$

причем если (E, F; u) отделима по E, то

$$\operatorname{codim} K^{\perp} = \dim K. \tag{3}$$

В самом деле, пусть $A = \{a_1,\ \dots,\ a_n\}$—базис подпространства *K.* В силу (1) и Б3°

$$K^{\perp} = \mathscr{E}_A^{\perp} = A^{\perp} = \left(\bigcup_{k=1}^{n} \{a_k\} \right)^{\perp} = \bigcap_{k=1}^{n} \{a_k\}^{\perp}.$$

Так как $\{a_k\}^{\perp} = K_{u_{a_k}\cdot}$, то заключаем, что $K^{\perp}$ *есть пространство решений однородной системы линейных уравнений на F*

$$u_{a_k}\cdot(y) = 0 \qquad (k = 1,\ \dots,\ n). \tag{4}$$

В силу теоремы 3 § 5, отсюда вытекает, что $\operatorname{codim} K^{\perp} \leqslant n = \dim K$, причем равенство имеет место, когда функции $u_{a_1}\cdot,\ \dots,\ u_{a_n}\cdot$ линейно независимы. Но если *(E, F; u)* отделима по *E,* то $x \to u_x\cdot$, согласно 1.В, — вложение *E* в *F*,* и линейная независимость функций $u_{a_1}, \ldots, u_{a_n}$. вытекает, по 4.2.Б, из линейной независимости векторов $a_1, \ldots a_n$ базиса *A,*

И. Пусть *(E, F; u)* — заданная дуальная пара векторных пространств. Будем называть *M*⊂ ⊂*E(F) замкнутым по Макки* или просто *замкнутым,* если оно совпадает со своим бианнулятором $M^{\perp\perp}$. *Для того чтобы множество М было замкнутым подпространством пространства Е (F), необходимо и достаточно, чтобы оно было аннулятором какого-нибудь множества N⊂F (E).* Действительно, если *M* — замкнутое подпространство, так что $M = M^{\perp\perp}$, то в качестве *N* можно взять $M^{\perp}$. Обратно, если *N*⊂*F (E),* то, согласно Д, $M = N^{\perp}$—подпространство, и при этом, в силу В, $M^{\perp\perp} = N^{\perp\perp\perp} = N^{\perp} = M$.

К. Из И следует, в частности, что, *каково бы ни было множество* $M \subset E\ (F)$, $M^{\perp\perp}$ *есть замкнутое подпространство в Е (F).* При этом $M^{\perp\perp}$ *есть наименьшее замкнутое подпространство, содержащее М.* Действительно, если *N*—замкнутое подпространство, содержащее М, то в силу Б 4° $M^{\perp\perp} \subset N^{\perp\perp}$, т. е. $M^{\perp\perp} \subset N$.

Л. Пусть *M* ⊂ ⊂*E (F).* Основываясь на К, мы будем называть $M^{\perp\perp}$ *замыканием М* и обозначать также $\overline{M}$. Согласно Б 2°, 4° и К, *операция замыкания* $M \to \overline{M}$ *обладает следующими свойствами:* 1) $M \subset \overline{M}$, 2) $M \subset N$ *влечет* $\overline{M} \subset \overline{N}$, 3) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

М. *Дуальная пара (E, F; u) отделима по E тогда и только тогда, когда нулевое подпространство N пространства E замкнуто.* В самом деле, так как $N^{\perp} = F$, то $N^{\perp\perp} = F^{\perp}$, и остается применить А.

Н. Пусть *(E, F; u)*—заданная дуальная пара векторных пространств. *Пересечение любого семейства* $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ *замкнутых подпространств пространства E (F) есть замкнутое подпространство.* Действительно, $\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha^{\perp\perp} =$

$= \left(\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha^{\perp}\right)^{\perp}$ (Б 3°), и остается применить И.

О. *Если дуальная пара (E, F; u) отделима по F и G — замкнутое подпространство пространства E, имеющее конечную факторразмерность, то* $G^{\perp}$*конечномерно и*

$$\dim G^{\perp} = \operatorname{codim} G. \qquad (5)$$

В самом деле, в силу 3.7.Ж $E = G \oplus K$, где K конечномерно. При этом в силу Ж и А $G^{\perp} \cap K^{\perp} = (G + K)^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$. Отсюда следует, что каноническое наложение φ пространства F на $F/K^{\perp}$ взаимно однозначно на $G^{\perp}$, так что $G^{\perp} \sim \varphi(G^{\perp})$. Но согласно (2) $K^{\perp}$ имеет конечную фактор-размерность. Принимая во внимание 3.7.Г, И 1°, заключаем, что $G^{\perp}$ конечномерно. А тогда, в силу 3 (с заменой E на F, F на E и K на $G^{\perp}$), имеем $\operatorname{codim} G = \operatorname{codim} G^{\perp\perp} = \dim G^{\perp}$.

П. Пусть *(E, F; u)* — заданная дуальная пара векторных пространств. *Если* $M \subset\subset E$, $K \subset\subset E$ *и* K *конечномерно, то* $\overline{M + K} = \overline{M} + K$.

Действительно, в силу Ж, $\overline{M + K} =$
$= (M + K)^{\perp\perp} = (M^{\perp} \cap K^{\perp})^{\perp}$. Но $x \in (M^{\perp} \cap K^{\perp})^{\perp}$ означает, что $u_{x}.(y) = 0$ для всех $y \in M^{\perp} \cap K^{\perp}$, т. е., по 3, —для всех $y \in M^{\perp}$, удовлетворяющих системе (4); иными словами, при $x \in (M^{\perp} \cap K^{\perp})^{\perp}$ уравнение $u_{x}.(y) = 0$ является на $M^{\perp}$ следствием системы (4). В силу теоремы- 4' § 5, отсюда вытекает существование таких скаляров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что

$$u\left(x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k, \ y\right) = u_{x}.(y) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{a_k}.(y) = 0 \quad \text{для всех}$$

$y \in M^{\perp}$. Но это означает, что $x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \in M^{\perp\perp} = \overline{M}$, т. е.

$x \in \overline{M} + K$. Таким образом, $\overline{M + K} = (M^{\perp} \cap K^{\perp})^{\perp} \subset \overline{M} + K$.

С другой стороны, так как M и K содержатся в $M + K$, то, на основании Б 4°, $\overline{M} + K \subset \overline{M + K}$. Следовательно,

$\overline{M + K} = \overline{M} + K$.

П′. Из П, в частности, вытекает, что *сумма замкнутого подпространства с любым конечномерным подпространством замкнута.*

Р. Беря в П $M = \{0\}$ и принимая во внимание М, получаем, что *если дуальная пара (E, F; u) отделима по E, то всякое конечномерное подпространство пространства E замкнуто.*

7.8.3. Биортогональные системы

Определение 5. Пусть *(E, F; u)* — заданная дуальная пара векторных пространств. Мы будем говорить, что векторы $x_\alpha \in E$ и $y_\alpha \in F$, где α пробегает некоторое множество A, образуют *биортогональную систему* относительно *u,* если

$$u(x_\alpha, y_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \text{ для всех } \alpha, \beta \in \mathrm{A}. \quad (1)$$

А. Так, 5.1.(9) показывает, что *векторы a_α базиса $(a_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{A}}$ векторного пространства E вместе с определяемыми этим базисом координатными линейными функциями a^α образуют биортогональную систему относительно канонической билинейной функции $\langle x, f\rangle$ на* $E \times E^*$. Легко видеть, что $(a^\alpha)_{\alpha\in \mathrm{A}}$ *есть единственное семейство в E*, элементы которого образуют вместе с векторами a_α биортогональную систему относительно* $\langle x, f\rangle$. Действительно, если $(\overline{a^\alpha})_{\alpha\in \mathrm{A}}$ —такое семейство, то, каково бы ни было

$$\langle a_\alpha, \overline{a}^\beta - a^\beta\rangle = \langle a_\alpha, \overline{a}^\beta\rangle - \langle a_\alpha, a^\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} = 0$$

для всех α ∈ А, так что для любого вектора $x = \sum\limits_{\alpha\in \mathrm{A}} x_\alpha a_\alpha \in E$ имеем

$$\langle x, \overline{a}^\beta - a^\beta\rangle = \sum_{\alpha\in \mathrm{A}} x_\alpha \langle a_\alpha, \overline{a}^\beta - a^\beta\rangle = 0.$$

Но это означает, что $\overline{a}^\beta - a^\beta = 0$, т. е. $\overline{a}^\beta = a^\beta$ для всех $\beta \in$ А.

Б. *Семейства $(x_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{A}}$ и $(y_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{A}}$, векторы которых образуют биортогональную систему относительно* и, *линейно независимы.* В самом деле, из $\sum\limits_{\alpha\in \mathrm{A}} \lambda_\alpha x_\alpha = 0$ в силу (1) следует, что

$$\lambda_\beta = \sum_{\alpha\in \mathrm{A}} \lambda_\alpha u(x_\alpha, y_\beta) = u\left(\sum_{\alpha\in \mathrm{A}} \lambda_\alpha x_\alpha, y_\beta\right) = 0$$

для всех β ∈ А, так что семейство $(x_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{A}}$ линейно независимо ; аналогично доказывается и линейная независимость семейства $(y_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{A}}$.

Определение 5'. Пусть *(E, F; u)* — заданная дуальная пара векторных пространств. Реперы $A\subset E$ и $B\subset F$, векторы которых образуют биортогональную систему относительно *u,* мы будем называть *дуальными* друг другу.

В. *Если дуальная пара (E, F; u) отделима по F, то для каждого конечного репера $Y = \{y_1, \ldots, y_n\} \subset F$ существует по крайней мере один дуальный ему репер $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$.* Действительно, так как векторы $y_1, \ldots, y_n$ линейно независимы, то, в силу 1.В и 4.2.Б, и соответствующие им линейные функции $u_{\cdot y_1}, \ldots, u_{\cdot y_n}$ линейно независимы. Поэтому в силу теоремы 2 § 5 каждая из *n* систем линейных уравнений

$$u_{\cdot y_1}(x) = u(x, y_1) = \delta_{k1}, \ldots, u_{\cdot y_n}(x) = u(x, y_n) = \delta_{kn}$$

(k = 1.....*n)* совместна. Пусть

x_k $(k = 1, \ldots, n)$ —решения этих систем. Так как тогда

$$u(x_k, y_l) = \delta_{kl} \qquad (k, l = 1, \ldots, n),$$

то векторы $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ образуют относительно *и* биортогональную систему, т. е. $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — репер в *E,* дуальный реперу *Y.*

Г. Из В, в частности, следует, что *если E' — какое-либо векторное пространство линейных функций на E, то для каждого конечного числа линейнонезависимых линейных функций* $f_1, \ldots, f_n$ *из E' существуют такие векторы* $x_1, \ldots, x_n \in E$, *что*

$$\langle x_k, f_l \rangle = \delta_{kl} \qquad (k, l = 1, \ldots, n); \quad \textbf{(2)}$$

а если *E'* достаточно, то справедливо и «дуальное» предложение: *для каждого конечного числа линейно независимых векторов* $x_1, \ldots, x_n$ *из E существуют линейные функции* $f_1, \ldots, f_n \in E'$, *удовлетворяющие соотношениям* (2).

Д. Для бесконечных реперов предложение, аналогичное В, вообще говоря, уже неверно. Так, *если E' — достаточное пространство линейных функций на E, отличное от E** (так что *E,* по 1.E', бесконечномерно), *то в E существует репер, не обладающий дуальным репером в E'.* Действительно, пусть $a^* \in E^* \setminus E'$ и *H*—ядро линейной функции a^*. Так как $a^* \neq 0$, то $H \neq E$. Для всякого $a \in E \backslash H$ имеем $\langle a, a^* \rangle \neq 0$, и потому можно выбрать вектор $a \in E \backslash H$ так, чтобы

$$\langle a, a^* \rangle = 1. \qquad (3)$$

Пусть *B* — базис подпространства *H* (теорема 2 § 3), так что

$$\langle b, a^* \rangle = 0 \text{ для всех } b \in B. \qquad (4)$$

В силу 5.3.А, 3.5.М и 3.4.Д тогда $A = B \cup \{a\}$ —базис пространства *E.* Покажем, что *A* не обладает дуальным репером в *E'.* В самом деле, такой репер был бы также дуальным *A* репером в *E**. Но, будучи базисом пространства *E, A* обладает, согласно А, единственным дуальным репером в *E*,* а именно образованным координатными линейными функциями. Однако одной из них, в силу (3) и (4), является $a^* \notin E'$.

Предложение, аналогичное В, вообще говоря, неверно для бесконечных реперов и в дуальной паре *(E, E*)* (с бесконечномерным *E).* Так, хотя каждый репер в *E* может быть дополнен до базиса и потому обладает дуальным репером в E*, обратное уже неверно. А именно, никакой базис *B* простоанства *E** не обладает дуальным репером в *E.* Действительно, $\overline{\overline{B}} > \dim E$ (см. замечание к 5.2.А), а Е не может содержать репера большей мощности, чем dim *E* (теорема 3 § 3).

Е. Однако *всякая дуальная пара (E, F; и) бесконечномерных векторных пространств, отделимая по E или F, содержит счетную биортогональную систему.* Более точно: *пусть,* скажем, *пара (E, F; и) отделима по F и* (y'_n)*— произвольная линейно независимая последовательность векторов из F; положим*

$$F_0 = \{0\} \text{ и } F_n = \mathscr{E}_{\{y'_1, \ldots, y'_n\}}$$

(n=1, 2, ...); *тогда существует последовательность векторов* $y_n \in F_n \setminus F_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *такая, что образуемый ею репер обладает дуальным репером в E.* Действительно, положим $y_1 = y'_1$ Так как $y \neq 0$ (3.5.Д), то существует вектор $x_1 \in E$ такой, что $u(x_1, y1) = 1$. Пусть уже построены векторы $x_к \in E$ и

$$y_k \in F_k \setminus F_{k-1} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

образующие относительно *и* биортогональную систему. В силу теоремы 3 § 5 система линейных уравнений

$$u(x_k, y) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

на *(n* + 1)-мерном пространстве F_{n+1} меет ненулевое решение y_{n+1}.

Однако, если вектор $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_n \in F_n$ удовлетворяет системе (5), то $\lambda_k = u(x_k, y) = 0$ для всех *k* от 1 до *n,* т. е. y=0. Поэтому $y_{n+1} \in F_{n+1} \setminus F_n$. Так как тогда векторы $y_1, \ldots, y_{n+1}$, а значит, и порождаемые ими линейные функции

$$u \cdot y_1, \ \ldots, \ u \cdot y_{n+1}$$

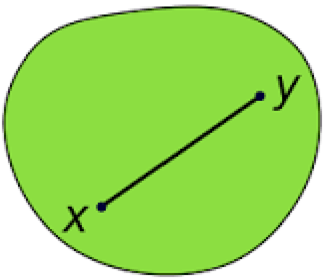
на *E* линейно независимы (см. 1.Г и 4.2. Б), то, по теореме 2 § 5, существует вектор $x_{n+1} \in E$, для которого $u(x_{n+1}, y_k) = \delta_{n+1, k}$ $(k = 1, \ldots, n+1)$. Таким образом, последовательности (x_n) и (y_n) допускают индуктивное построение, и предложение доказано.

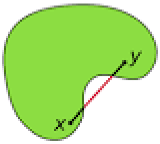
8. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

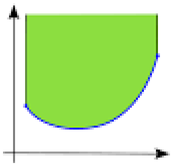
В этом и следующем параграфах рассматриваются только векторные пространства над **R** или **C**. Под *вещественной прямой* в таком пространстве *E* понимается всякая прямая в *E,* если *E*—вещественное, и в $E_{\mathbf{R}}$, если E — комплексное. Аналогичный смысл имеет термин *вещественная линейная функция*.

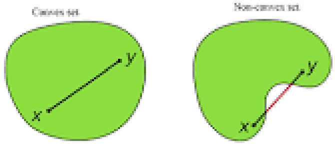
8.1. Понятие выпуклого множества

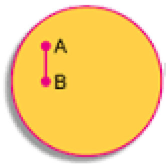
Выпуклое множество в аффинном или векторном пространстве — **множество**, в котором все точки отрезка, образуемого любыми двумя точками данного **множества**, также принадлежат данному **множеству**.
Похожие картинки

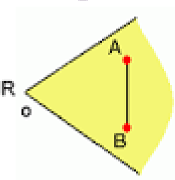


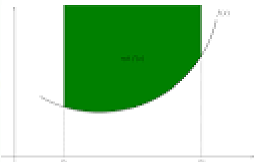


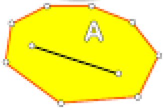


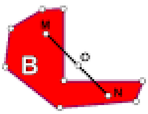












Выпуклое множество - подмножество евклидова пространства содержащей отрезок, соединяющий любые какие две точки этой множества.

Другими словами, множество $X \in \mathbb{R}^n$ называется выпуклой, если:

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in X, \quad \forall x_1, x_2 \in X,\, \alpha \in [0,1].$$

То есть, если множество *X* вместе с любыми двумя точками, которые принадлежат этому множеству, содержит отрезок, их соединяющий:

$$[x_1, x_2] = \{x:\ x = x_2 + \alpha(x_1 - x_2),\, \alpha \in [0,1]\}$$

.

В пространстве $\mathbb{R}^1$ выпуклыми множествами будут прямая, полупрямой, отрезок, интервал, одноточечный множество.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ выпуклым будет само пространство, любое его линейный подпространство, шар, отрезок, одноточечный множество. Также, выпуклыми будут такие множества:

- прямая l_{x0h}, проходящая через точку *x* 0 в направлении вектора *h* :

$$l_{\mathbf{x}_0 h} = \{x \in \mathbb{R}^n:\ x = x_0 + \alpha h, \alpha \in \mathbb{R}^n\};$$

- луч $l_{x_0 h}+$, выходящий из точки *x* 0 в направлении вектора *h;*

- гиперплоскости H p? с нормалью *p* :

$$\mathrm{H}_{p\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n:\ (p, x) = \beta\};$$

- полупространства на которые гиперплоскости разделяет пространство:

$$\mathrm{H}^{+}_{p\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n : (p,x) \geq \beta\},$$
$$\mathrm{H}^{-}_{p\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n : (p,x) \leq \beta\}.$$

Все перечисленные множества (кроме пули) является частным случаем выпуклой множества полиэдры.

Свойства выпуклых множеств

- Пересечение выпуклых множеств является выпуклым.
- Линейная комбинация точек выпуклой множества выпуклая.
- Выпуклая множество содержит любую выпуклую комбинацию своих точек.
- Любую точку *n* -мерного евклидова пространства с выпуклой оболочки множества можно представить как выпуклую комбинацию не более *n* +1 точек этого множества.

Выпуклое множества в евклидовом или другом векторном пространстве - множество, которое вместе с любыми двумя точками содержит все точки соединяющего их отрезка. Пересечение любой совокупности выпуклого множества есть выпуклое множество.

Наименьшая размерность плоскости, содержащей данное выпуклое множество, называется размерностью этого выпуклого множества. Замыкание выпуклого множества (т. е. результат присоединения к выпуклому множеству всех его предельных точек) дает выпуклое множество той же размерности. Центральное место в теории выпуклого множества занимает изучение выпуклых тел - конечных (т. е. ограниченных) замкнутых выпуклых множеств размерности *n*.

При отказе от ограниченности говорят о бесконечных выпуклых телах, а при отказе от n-мерности - о вырожденных выпуклых телах или выпуклых телах более низких размерностей.

Выпуклое тело гомеоморфно замкнутому шару. Бесконечное выпуклое тело, не содержащее прямых, гомеоморфно полупространству, а содержащее прямую является цилиндром с выпуклым (возможно бесконечным) поперечным сечением.

Через каждую точку границы выпуклого множества проходит хотя бы одна гиперплоскость, оставляющая это выпуклое множество в одном замкнутом полупространстве. Такие гиперплоскости и полупространство нал. опорными для данного выпуклого множества в данной точке границы. Замкнутое выпуклое множество есть пересечение его опорных полупространств. Пересеченно конечного числа замкнутых полупространств есть выпуклый многогранник. Гранями выпуклых тел называют его пересечения с опорными гиперплоскостями. Это - выпуклые тела более низких размерностей. Само выпуклое тело считают его n-мерной гранью. Грань грани, в отличие от случая многогранника, может но быть гранью исходного выпуклого тела. С каждой граничной точкой x выпуклого тела связывают: открытый касательный конус, заполненный лучами, идущими *из x* через внутренние точки выпуклого тела; замкнутый касательный конус - его замыкание; касательный конус поверхности - его границу. Первые два конуса выпуклые. Точки границы выпуклого тела классифицируют по минимальной размерности граней, которым они принадлежат, а также по размерности множества опорных гиперплоскостей в точке. Точки нульмерных граней называют выступающими. Крайними называются точки выпуклого тела не внутренние ни для одного отрезка, лежащего в этом выпуклом теле. Изучается вопрос о возможном обилии точек и множества направлений граней разного типа. Например, точки с неединственной опорной гиперплоскостью занимают на границе нулевую (n-1) - мерную площадь; направления лежащих на границе отрезков имеют нулевую меру среди всех направлений в пространстве.

Точка, не принадлежащая выпуклому телу, строго отделена от него гиперплоскостью, оставляющей эту точку и выпуклое тело в разных открытых полупространствах. Два непересекающихся выпуклых телах отделены гиперплоскостью, оставляющей их в разных замкнутых полупространствах. Последнее свойство отделимости сохраняется для выпуклых тел в бесконечномерных векторных пространствах. С выпуклым телом F связана его опорная функция H:

$E^n \to E^1$, определяемая равенством

$H\ (u) = \sup \{ux : x \in F\},$

где *ux* - скалярное произведение. Функция $H(u)$- положительно однородная 1-й степени: $H(\alpha u)=\alpha H u$ при $\alpha \geqslant 0$, и выпуклая:

$$H(u+v) \leqslant H(u)+H(v).$$

Любая функция с этими двумя свойствами есть опорная функция для некоторого (причем единственного) выпуклого тела. Задание опорной функции - один из основных способов задания выпуклого тела.

При размещении начала координат внутри выпуклого тела вводят функцию расстояния $D:\ E^n \rightarrow E^1$, определяемую при $u \neq 0$ равенством

$$D(u)=\sup\left\{\alpha : u / \alpha \in F\right\},$$

и полагают $D(0)=0$. Это - тоже положительно однородная 1-й степени выпуклая функция, определяющая *F*. Два выпуклые тела называются полярными (или двойственными) друг другу, если опорная функция одного из них есть функция расстояния для другого. Существование двойственных в. т. связано с самосопряженностью E^n.

Если выпуклое тел Р симметрично относительно начала координат, то функция $\rho(u,\ v)=D(u-v)$является метрикой. Это - метрика пространства Минковского (конечномерного банахова пространства), причем F играет роль единичного шара. Аналогично в бесконечномерном банаховом пространстве единичный шар есть выпуклоемножество. Свойства пространства связаны с геометрией этого шара, в частности с наличием на его границе точек разного типа .

Выпуклое тело т. можно задавать как *выпуклую оболочку* точек его границы или части этих точек.

Существует ряд достаточных признаков, позволяющих делать заключение о выпуклости множества (или каждого из множеств нек-рого семейства). Например, если C^2 -гладкая замкнутая поверхность в

E^3 имеет в каждой точке неотрицательную гауссову кривизну, то эта поверхность - граница выпуклого тела; если пересечение компактного множества F в E^3 с каждой плоскостью, оставляющей F в одном полупространство, связно, то F выпукло.

На множестве выпуклых тел (в том числе вырожденных, но не пустых) метрику можно ввести многими способами. Наиболее употребительна метрика Хаусдорфа (см. *Выпуклых множеств пространство* метрическое). В этой метрике каждое выпуклое тело можно приближать выпуклыми многогранниками, а также такими выпуклыми телами, которые допускают задание $P(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0,$ где *P* - многочлен, и которые имеют во всех точках границы положительные главные кривизны.

Выпуклые тела всегда имеют конечный объем (по Жордану), совпадающий с его n-мерной мерой Лебега. Граница выпуклого тела имеет конечную (*n*-1)-мерную площадь, причем различные способы введения площади в этом случае эквивалентны. Объем и площадь границы непрерывно (по метрике Хаусдорфа) зависят от выпуклого тела.

С изучением зависимости объема линейной комбинации $\Sigma \lambda_i F_i$ выпуклого тела F_i от коэффициентов λ_i связана теория *смешанных объемов.* Среди смешанных объемов находятся, кроме объема и площади границы, многие другие функционалы, связанные с выпуклыми телами; напр, k-мерные объемы проекций на fc-мерные плоскости разных направлений и их средние значения. Главным достижением этой теории являются разнообразные неравенства между смешанными объемами; среди них - *изопериметрическое неравенство классическое.*

С выпуклыми телами связывают ряд простых фигур, например, для каждого выпуклого тела единствен наибольший (по объему) вписанный и наименьший описанный эллипсоиды. Развиты признаки, выделяющие среди всех выпуклых тел шары, эллипсоиды, центрально-симметричные тела. Особое место в теории выпуклых множеств занимают теоремы о семействах выпуклых множеств.

Значение теории выпуклых множеств - в наглядности методов и результатов, их общности и независимости от аналитич. требований гладкости (решениями экстремальных задач часто служат негладкие выпуклые тела).

8.2. Выпуклые множества и многогранники

Перейдем теперь к более строгому изложению основ теории выпуклых множеств, хотя будут изложены лишь наиболее простые результаты.

Рассмотрим *n* - мерное евклидово пространство R^n и пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – точка в этом пространстве.

Рассмотрим две точки $\vec{x}_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ и $\vec{x}_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$, принадлежащие R^n. Множество точек $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые могут быть представлены в виде

$$\vec{x} = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2, \quad 0 \le \lambda \le 1$$

(в координатах это записывается так:

$$x_i = \lambda x_i^{(1)} + (1-\lambda)x_i^{(2)}, \quad i = \overline{1,n}, \quad 0 \le \lambda \le 1 \ ),$$

называется **выпуклой комбинацией** точек $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$, или

отрезком, соединяющим точки $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$. Сами точки $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ называются **концами отрезка**. В случаях *n* =2 и *n* =3 это – отрезок в обычном понимании этого слова на плоскости или в пространстве (см. рис. 1). Заметим, что при λ =0 $\vec{x} = \vec{x}_2$, а при λ =1 $\vec{x} = \vec{x}_1$, т.е. при λ =0 и λ =1 получаются концы отрезка.

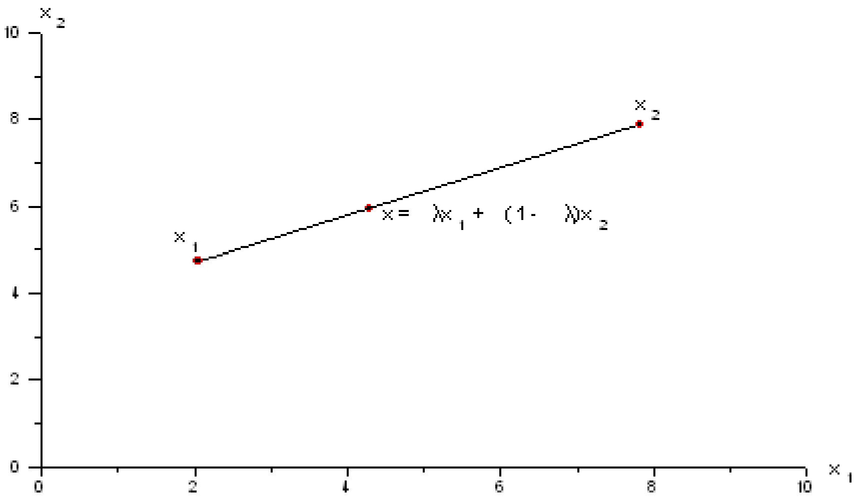


Рис.1

Пусть в R^n заданы k точек $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$. Точка

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i,$$

где все $\alpha_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ называется **выпуклой комбинацией** точек $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$.

Пусть $G \subset R^n$ есть некоторая область в пространстве R^n (другими словами, G). есть некоторое множество точек из R^n

Определение. Множество (область) $G \subset R^n$ называется **выпуклым**, если из того, что $\vec{x}_1 \in G$ и $\vec{x}_2 \in G$ следует, что $\vec{x} = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2 \in G$ для $\lambda \in [0,1]$. Другими словами, G – выпуклое множество, если оно, вместе с любыми двумя своими точками, содержит в себе отрезок, соединяющий эти точки.

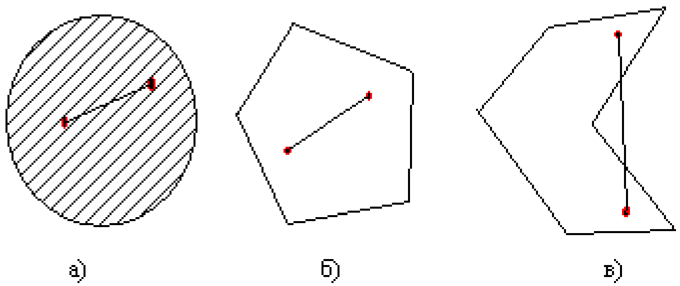


Рис. 2

На этих рисунках "а" и "б" - выпуклые множества, а "в" не является выпуклым множеством, так как в нём есть такая пара точек, что соединяющий их отрезок не весь принадлежит этому множеству.

Теорема 1. Пусть G – выпуклое множество. Тогда любая выпуклая комбинация точек, принадлежащих этому множеству, также принадлежит этому множеству.

Доказательство

Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ – точки, принадлежащие множеству G.

Докажем теорему методом математической индукции. При k =2 теорема верна, так как она просто переходит в определение выпуклого множества.

Пусть теорема верна для некоторого k. Возьмём точку $\vec{x}_{k+1} \in G$ и рассмотрим выпуклую комбинацию

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k + \alpha_{k+1}\vec{x}_{k+1},$$

где все $\alpha_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1$.

Представим $\vec{x}$ в виде

$$\vec{x} = \alpha_{k+1}\vec{x}_{k+1} + (1-\alpha_{k+1})\left[\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}}\vec{x}_1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}}x_2 + \ldots + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}}x_k\right]$$

Но коэффициенты $\alpha_i / (1-\alpha_{k+1}) \geq 0$ и

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}} = \frac{1-\alpha_{k+1}}{1-\alpha_{k+1}} = 1,$$

и, раз мы считаем, что для *k* теорема верна, точка

$$\vec{x}' = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}}\vec{x}_1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}}\vec{x}_2 + \ldots + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}}x_k \in G.$$

Но тогда $\vec{x} = \alpha_{k+1}\vec{x}_{k+1} + (1-\alpha_{k+1})\vec{x}'$ является выпуклой комбинацией точек $\vec{x}_{k+1}$ и $\vec{x}'$ и, по определению выпуклого множества, $\vec{x} \in G$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Допустимая область задачи линейного программирования является выпуклым множеством.

Доказательство.

1. **В стандартной форме** в матричных обозначениях допустимая область G определяется условием

$$\mathbf{A}\vec{x} \le \vec{b}$$
$$\vec{x} \ge 0.$$

Пусть $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ принадлежат G , т.е.

$$\mathbf{A}\vec{x}_1 \le \vec{b} \qquad\qquad \mathbf{A}\vec{x}_2 \le \vec{b}$$
$$\vec{x}_1 \ge 0 \qquad\qquad \vec{x}_2 \ge 0$$

Но тогда для
$\vec{x} = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2, \quad \lambda \in [0,1]$ имеем

$$\mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{A}(\lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2) = \lambda \cdot \mathbf{A}\vec{x}_1 + (1-\lambda)\cdot \mathbf{A}\vec{x}_2 \le$$

$$\le \lambda\vec{b} + (1-\lambda)\vec{b} = \vec{b},$$

$$\vec{x} \ge 0,$$

т.е. x принадлежит G и, следовательно, выпукло.

2. **В канонической форме** область G определена условиями

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$
$$\vec{x} \ge 0.$$

Пусть $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ принадлежат G, т.е.

$$\mathbf{A}\vec{x}_1 = \vec{b} \qquad \mathbf{A}\vec{x}_2 = \vec{b}$$
$$\vec{x}_1 \geq 0 \qquad \vec{x}_2 \geq 0 .$$

Но тогда для
$\vec{x} = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2, \quad \lambda \in [0,1]$ имеем

$$\mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{A}(\lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2) = \lambda \cdot \mathbf{A}\vec{x}_1 + (1-\lambda)\cdot \mathbf{A}\vec{x}_2 =$$

$$= \lambda\vec{b} + (1-\lambda)\vec{b} = \vec{b},$$

$$\vec{x} \geq 0,$$

т.е. и, следовательно, G выпукло. Теорема доказана.

Таким образом, допустимая область в задаче линейного программирования является выпуклым множеством. По аналогии с двумерным или трехмерным случаями, при любом *n* эту область называют **выпуклым многогранником** в *n* -мерном пространстве R^n

Теорема 3. Множество оптимальных планов задачи линейного программирования выпукло (если оно не пусто).

Доказательство

Если решение задачи линейного программирования единственно, то оно выпукло по определению – точка считается выпуклым множеством

Пусть теперь $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ два оптимальных плана задачи линейного программирования.

Тогда и

$\vec{x}_1 \in G,\ \vec{x}_2 \in G \quad (\vec{c},\vec{x}_1) = (\vec{c},\vec{x}_2) = L$

.

Рассмотрим
$\vec{x} = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2, \quad \lambda \in [0,1]$. В силу выпуклости области допустимых значений, $\vec{x} \in G$. Но для этого плана

$$(\vec{c},\vec{x}) = (\vec{c},\lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2) = \lambda(\vec{c},\vec{x}_1) + (1-\lambda)(\vec{c},\vec{x}_2) =$$

$$= \lambda L + (1-\lambda)L = L,$$

т.е. $\vec{x}$ есть также оптимальный план и, в силу этого, множество оптимальный планов выпукло. Теорема доказана.

Теорема 4. Для того, чтобы задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы целевая функция на допустимом множестве была ограничена сверху (при решении задачи на максимум) или снизу (при решении задачи на минимум).

Эту теорему мы даем без доказательства.

8.3. Вершины выпуклого многогранника

Что понимать под вершиной выпуклого многогранника при n>3, когда не существует геометрически наглядного образа ?

Легко заметить, что при n=2 и n=3 вершина выпуклого многогранника – это такая точка, которая не является внутренней точкой никакого отрезка, концы которого принадлежат этому многограннику (см. рис.3). Этим свойством обладают только вершины .

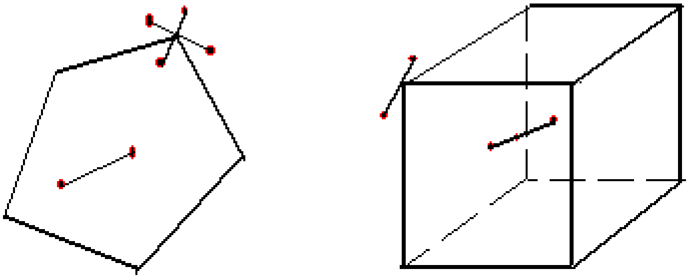


Рис.3

Определение. Вершиной или **крайней точкой** выпуклого многогранника называется любая его точка, которая не является внутренней точкой никакого отрезка, целиком принадлежащего этому многограннику.

Докажем теперь несколько важных теорем, касающихся вершин выпуклых многогранников.

Теорема 1. Любая точка выпуклого многогранника является выпуклой комбинацией его вершин.

Доказательство

Строгое доказательство этой теоремы – достаточно сложная задача. Поэтому мы приведем лишь идею доказательства.

Пусть n=2 и мы имеем выпуклый многогранник G (см. рис.4) с вершинами $M_1 \div M_5$.Возьмём любую его точку *A* и соединим отрезком с какой-то вершиной, скажем M_1. Продолжим эту прямую до пересечения с какой-то стороной многогранника и обозначим точку этого пересечения через B

и

(см.рис.4). *B*

.

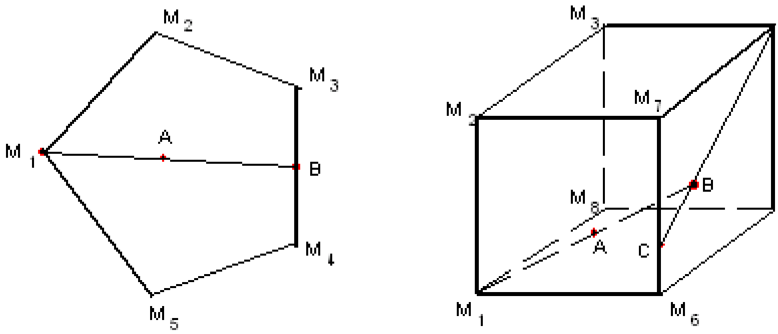


Рис. 4

Тогда *A* является выпуклой комбинацией точек M_1

Но *B* лежит на отрезке $M_3 M_4$ и поэтому *B*

является выпуклой комбинацией точек M_3 и M_4.

Поэтому *A* является

выпуклой комбинацией вершин M_1, M_3 и M_4

Аналогично обстоит дело и в случае n =3. Посмотрите на рисунок и попробуйте сами повторить те же рассуждения, что и выше. Выпуклой комбинацией каких вершин является точка *A* , изображенная на правой части рисунка 4?

В общем случае *n*-мерного выпуклого многогранника рассуждения выглядят примерно так.

Берем любую внутреннюю точку A этого многогранника и соединяем её отрезком прямой с какой-то из вершин. Продолжим эту прямую до пересечения с какой-то из граней выпуклого многогранника. Пусть точка этого пересечения будет B .Тогда точка A будет выпуклой комбинацией этой вершины и точки B .

Но что такое грань выпуклого многогранника? Это тоже выпуклый многогранник, но только размерности (n – 1). Поэтому весь процесс можно повторить для точки B , перейдя к многограннику размерности (n -2), затем (n -3) и т.д.

В конце концов мы попадем на многогранник размерности 2, то есть на обычный отрезок, и точка А окажется выпуклой комбинацией некоторых вершин исходного многогранника.

Теорема 2. Целевая функция задачи линейного программирования достигает своего экстремума (минимума или максимума) в вершине допустимой области. Если целевая функция достигает экстремального значения более, чем на одной вершине, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих вершин.

Доказательство

Обозначим вершины выпуклого многогранника через $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots, \vec{x}_p$.

Пусть для определенности мы ищем **минимум** $f(\vec{x}) = \vec{c}^T \vec{x}$. Пусть оптимальный план есть $\vec{x}_0$. Это означает, что $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$ для всех $\vec{x}$ из допустимой области.

Если $\vec{x}_0$ – вершина, то первую часть теоремы можно считать доказанной.

Пусть теперь $\vec{x}_0$ – не вершина. Тогда её можно представить как выпуклую комбинацию вершин

$$\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{x}_i, \quad \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1.$$

Поскольку $f(\vec{x})$ – линейный функционал, то

$$f(\vec{x}_0) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(\vec{x}_i).$$

Обозначим через m минимум из всех значений $f(\vec{x}_i)$, и пусть он достигается

в вершине $\vec{x}_k$, т.е.

$$m = \min\{f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2), \dots, f(\vec{x}_p)\} = f(\vec{x}_k).$$

Но тогда, так как $\alpha_i \geq 0$, то

$$f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(\vec{x}_i) \geq m \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = m = f(\vec{x}_k).$$

С другой стороны, по определению оптимального плана, должно быть $f(\vec{x}_k) \geq f(\vec{x}_0)$. Сравнивая, получим, что $f(\vec{x}_k) = f(\vec{x}_0) = m$, то есть существует такая вершина x_k, где целевая функция достигает того же минимального значения.

Для доказательства второй части теоремы допустим, что $f(\vec{x})$ принимает свое минимальное значение на нескольких вершинах сразу, например, на $\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}, \dots, \vec{x}_{i_s}$. Тогда $f(\vec{x}_{i_1}) = f(\vec{x}_{i_2}) = \dots = f(x_{i_s}) = m$ Если $\vec{x}$ – выпуклая комбинация этих вершин

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \vec{x}_{i_k}, \quad \alpha_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = 1,$$

то $\vec{x}$ принадлежит допустимой области и

$$f(\vec{x}) = f\left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_k \vec{x}_{i_k}\right) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k f(\vec{x}_{i_k}) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \cdot m = m,$$

что и доказывает теорему.

Эта теорема имеет важнейшее значение, так как она указывает путь решения задачи линейного программирования. Совсем не надо перебирать **все** точки допустимой области. Достаточно перебрать **вершины** допустимой области, а ведь их - конечное число. Кроме того, как это окажется далее, **не нужно** перебирать **все вершины**, можно этот перебор существенно сократить. Только вот как узнать, имеем ли мы дело с вершиной или нет?

Теорема 3. Если известно, что система векторов $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_k$ линейно независима и такова, что $x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + \ldots + x_k\vec{A}_k = \vec{b}$, где все $x_i \geq 0$, то точка $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots, 0)$ является вершиной допустимой области.

Замечание. Заметим, что в $\vec{x}$ отличны от нуля совсем не обязательно первые k компонент. Первыми мы написали их только для упрощения доказательства, а вообще речь идет о любых k компонентах из общего числа n компонент.

Доказательство

Предположим, что $\vec{x}$ –не вершина. Тогда найдутся два таких плана $\vec{x}_1$ и

$\vec{x}_2$,что $\vec{x}$ является их выпуклой комбинацией, то есть

$$\exists\lambda \in [0,1] \quad \vec{x} = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2.$$

Так как все компоненты векторов $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ неотрицательны и последние n–k компонент вектора $\vec{x}$ есть нули, то и соответствующие им компоненты векторов $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ тоже нули, то есть

$$\vec{x}_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_k^{(1)}, 0, 0, \dots, 0),$$

$$\vec{x}_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_k^{(2)}, 0, 0, \dots, 0).$$

Так как $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ планы, то

$$x_1^{(1)}\vec{A}_1 + x_2^{(1)}\vec{A}_2 + \dots + x_k^{(1)}\vec{A}_k = \vec{b},$$

$$x_1^{(2)}\vec{A}_1 + x_2^{(2)}\vec{A}_2 + \dots + x_k^{(2)}\vec{A}_k = \vec{b}.$$

Вычитая их друг из друга, получим

$$(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})\vec{A}_1 + (x_2^{(1)} - x_2^{(2)})\vec{A}_2 + \dots + (x_k^{(1)} - x_k^{(2)})\vec{A}_k = \vec{0}.$$

Но в силу линейной независимости векторов $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_k$ это может быть лишь тогда, когда

$$x_1^{(1)} = x_1^{(2)}; \quad x_2^{(1)} = x_2^{(2)}; \quad \dots; \quad x_k^{(1)} = x_k^{(2)},$$

то есть $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$. Следовательно, $\vec{x}$ нельзя представить как точку отрезка, соединяющего две разные точки допустимой области, и поэтому $\vec{x}$ - вершина. Теорема доказана.☺

Теорема 4. Если $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вершина, то вектора $\vec{A}_i$, соответствующие отличным от нуля компонентам x_i, образуют линейно независимую систему.

Доказательство

Пусть не равными нулю являются первые k компонент вектора **x** , так что

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \vec{A}_i = \vec{b}.$$

Докажем теорему методом от противного. Пусть система векторов $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_k$ линейно зависима . Тогда существуют такие числа $d_1, d_2, \ldots, d_k$, не все равные нулю, что

$$\sum_{i=1}^{k} d_1 \vec{A}_i = \vec{0}.$$

Зададимся некоторым $\alpha > 0$ и умножим на него обе части предыдущего равенства (2). Прибавляя и вычитая полученный результат из (1), получим

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i + \alpha d_i) \vec{A}_i = \vec{b},$$

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - \alpha d_i) \vec{A}_i = \vec{b}.$$

Выбирая α достаточно малым можно всегда добиться того, что $x_i \pm \alpha d_i$ будут больше нуля для всех $i = \overline{1,k}$ (для этого достаточно взять $\alpha < \min\limits_i \frac{x_i}{|d_i|}$, где минимум берется по всем тем i , для которых $d_i \neq 0$. Тогда мы получим два плана

$$\vec{x}_1 = (x_1 + \alpha d_1, x_2 + \alpha d_2, \dots, x_k + \alpha d_k, 0, 0, \dots, 0),$$

$$\vec{x}_2 = (x_1 - \alpha d_1, x_2 - \alpha d_2, \dots, x_k - \alpha d_k, 0, 0, \dots, 0).$$

Но тогда $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2$, что противоречит тому, что $\vec{x}$ - вершина. Теорема доказана.☺

Пусть число ограничений в задаче линейного программирования равно m .Так как каждая система из $m+1$ векторов в m-мерном пространстве линейно зависима, то среди компонент плана, соответствующего вершине, не более m отличных от нуля компонент.

Определение. План, соответствующий вершине допустимой области, называется **опорным планом.**

Если опорный план имеет **ровно** m отличных от нуля компонент, то он называется **невырожденным** опорным планом. Если число **ненулевых** компонент опорного плана **меньше** m, то он называется **вырожденным** опорным планом.

Проблема вырожденных опорных планов - сложная проблема. К счастью, в обычных ситуациях вырожденные опорные планы встречаются очень редко. Поэтому в этой главе мы всюду далее будем считать, что все опорные планы невырождены.

8.4. Переход от вершины к вершине

Раз экстремум целевой функции достигается на одной из вершин многогранника допустимой области, то нет необходимости исследовать все точки области. Надо лишь "пройтись" по вершинам многогранника. Но для этого нужно уметь переходить от одной вершины к другой.

Пусть нам известен какой-то опорный план (вершина), соответствующий m векторам из первоначальной системы n векторов. Будем считать, что этими векторами являются первые m векторов $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_m$

из системы векторов $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$. Опорный план имеет вид

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0),$$

где все $x_1 > 0$ Для него
.

$$x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + \dots + x_m\vec{A}_m = \vec{b}.$$

Так как векторы $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_m$ линейно независимы, то они образуют базис

в m -мерном пространстве и любой из векторов $\vec{A}_j$ может быть разложен

поэтому базису, то есть для любого $\vec{A}_j$ верно разложение

$$\vec{A}_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\vec{A}_i,$$

где x_{ij} – коэффициенты разложения по базису (координаты вектора $\vec{A}_j$ в базисе $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_m$.

Возьмем какой-то вектор, не входящий в наш базис, скажем, вектор $\vec{A}_{m+1}$. Для него

$$\vec{A}_{m+1} = x_{1,m+1}\vec{A}_1 + x_{2,m+1}\vec{A}_2 + \ldots + x_{m,m+1}\vec{A}_m .$$

Пусть хотя бы один из коэффициентов $x_{i,m+1}$ положителен. Возьмем некоторую величину $\theta > 0$, умножим на неё обе части равенства (5) и вычтем из (3). Тогда получим

$$(x_1 - \theta x_{1,m+1})\vec{A}_1 + (x_2 - \theta x_{2,m+1})\vec{A}_2 + \ldots + (x_m - \theta x_{m,m+1})\vec{A}_m + \\ + \theta \vec{A}_{m+1} = \vec{b}.$$

Вектор

$$\vec{x}' = (x_1 - \theta x_{1,m+1}, \vec{x}_2 - \theta x_{2,m+1}, \ldots, x_m - \theta x_{m,m+1}, \theta, 0, \ldots, 0)$$

в случае неотрицательности всех своих компонент является планом. Те компоненты, где $x_{i,m+1} < 0$, будут автоматически неотрицательны. Чтобы остальные компоненты были неотрицательны, надо, чтобы

$$x_i - \theta x_{i,m+1} \geq 0 \quad \text{если} \quad x_{i,m+1} > 0.$$

Отсюда имеем:

$$\frac{x_i}{x_{i,m+1}} \geq \theta \quad \text{если} \quad x_{i,m+1} > 0.$$

Возьмем

$$\theta_0 = \min \frac{x_i}{x_{i,m+1}},$$

где минимум берется по всем тем индексам i , для которых $x_{i,m+1} > 0$. Очевидно, что если $\theta < \theta_0$, то все компоненты плана $\vec{x}'$ будут неотрицательны.

Но давайте возьмем θ **в точности равным** θ_0. Пусть, например, $\min x_1 / x_{1,m+1}$ достигается при i =1, то есть $\theta_0 = x_1 / x_{1,m+1}$. Но тогда компонента x_1' обратится в ноль и мы получим план

$$\vec{x}' = (0, x'_2, x'_3, \ldots, x'_{m+1}, 0, \ldots, 0),$$

где

$$x'_i = x_i - \theta_0 x_{i,m+1}, \quad i = \overline{2,m},$$
$$x'_{m+1} = \theta_0,$$

который опять содержит ровно m отличных от нуля положительных компонент.

Докажем, что **это - новая вершина**, то есть **это – новый опорный план**. Действительно, этому новому плану соответствуют векторы $\vec{A}_2, \vec{A}_3, \ldots, \vec{A}_{m+1}$. Допустим, что они линейно зависимы, то есть существуют такие числа d_i, не все равные нулю, что векторы

$\vec{A}_2, \vec{A}_3, \ldots, \vec{A}_m$ $d_2\vec{A}_2 + d_3\vec{A}_3 + \ldots + d_m\vec{A}_m + d_{m+1}\vec{A}_{m+1} = \vec{0}$ уже были линейно независимы, поэтому $d_{m+1} \neq 0$. Но тогда

$\vec{A}_{m+1} = e_2\vec{A}_2 + e_3\vec{A}_3 + \ldots + e_m\vec{A}_m$,где $e_i = -d_i / d_{m+1}$. Но раньше у нас было (см. (5))

$$\vec{A}_{m+1} = x_{1,m+1}\vec{A}_1 + x_{2,m+1}\vec{A}_2 + \ldots + x_{m,m+1}\vec{A}_{m+1}.$$

Так как разложение по базису определяется однозначно, то должно быть $x_{i,m+1} = e_i$, в частности, должно быть $x_{1,m+1}$ =0. Это противоречит тому, что $x_{1,m+1}$ >0. Значит, система векторов $\vec{A}_2, \vec{A}_3, \ldots, \vec{A}_{m+1}$ линейно независима и мы перешли к новой вершине, то есть получили новый опорный план.

Отметим следующее. Если **все** $x_{i,m+1} \le 0$, то мы не в состоянии проделать эту процедуру. Зато, неограниченно увеличивая , мы можем получить план со сколь угодно большими компонентами. Значит, **в этом случае допустимая область неограничена.**

8.5. Переход к новому базису

В старом базисе $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_m$ мы имели следующие разложения векторов по этому базису

$$\vec{A}_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\vec{A}_i$$

Теперь мы перешли в новую вершину, которой соответствует базис $\vec{A}_2, \vec{A}_3, \ldots, \vec{A}_{m+1}$ и, чтобы иметь возможность двигаться дальше к следующей вершине, мы должны иметь разложения векторов $\vec{A}_j$ по этому новому базису, то есть

$$\vec{A}_j = \sum_{i=2}^{m+1} x'_{ij} \vec{A}_i$$
.

Выведем формулы для x'_{ij}. Мы должны вывести из базиса вектор $\vec{A}_1$ и ввести туда вектор $\vec{A}_{m+1}$. Поэтому возьмём выражение для вектора $\vec{A}_{m+1}$ (5)

$$\vec{A}_{m+1} = x_{1,m+1}\vec{A}_1 + x_{2,m+1}\vec{A}_2 + \ldots + x_{m,m+1}\vec{A}_m,$$

выразим из него вектор $\vec{A}_1$

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{x_{1,m+1}}\left[\vec{A}_{m+1} - x_{2,m+1}\vec{A}_2 - x_{3,m+1}\vec{A}_3 - \ldots - x_{m,m+1}\vec{A}_m\right]$$

и подставим это выражение в (8). Тогда мы получим

$$\vec{A}_j = \frac{x_{1j}}{x_{1,m+1}}\left[\vec{A}_{m+1} - x_{2,m+1}\vec{A}_2 - x_{3,m+1}\vec{A}_3 - \ldots - x_{m,m+1}\vec{A}_m\right] + $$
$$+ x_{2j}\vec{A}_2 + x_{3j}\vec{A}_3 + \ldots + x_{mj}\vec{A}_m.$$

Перегруппировывая слагаемые, получим:

$$\vec{A}_j = \left(x_{2j} - x_{2,m+1}\frac{x_{1j}}{x_{1,m+1}}\right)\vec{A}_2 + \ldots + \left(x_{mj} - x_{m,m+1}\frac{x_{1j}}{x_{1,m+1}}\right)\vec{A}_m + \frac{x_{1j}}{x_{1,m+1}}\vec{A}_{m+1}.$$

Таким образом, координаты вектора $\vec{A}_j$ в новом базисе имеют вид

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - x_{i,m+1}\dfrac{x_{1j}}{x_{1,m+1}}, \quad i=\overline{2,m}, \\ x'_{m+1,j} = \dfrac{x_{1j}}{x_{1,m+1}}, \end{cases}$$

что и дает разложение векторов по новому базису.

8.6. ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК

Выпуклый многогранник - *выпуклая оболочка* конечного числа точек в евклидовом пространстве E^n. Такой выпуклый многогранник есть ограниченное непустое пересечение конечного числа замкнутых полупространств. Бесконечным выпуклым многогранником называют пересечение конечного числа замкнутых полупространств, содержащее по крайней мере один луч, причем уславливаются пространство E^n также считать выпуклым многогранником. В этом смысле выпуклый многогранник есть замкнутая выпуклая оболочка конечного числа точек и лучей. Размерностью выпуклого многогранника называют минимальную размерность содержащего его пространства E^n

Выпуклый многогранник - частный вид *выпуклого множества.* Как пересечение полупространств выпуклый многогранник описывается системой линейных неравенств и может быть исследован алгебраическими средствами. Методы минимизации линейных форм на выпуклом многограннике составляют предмет *линейного программирования.*

Выпуклый многогранник имеет конечное число граней (пересечений выпуклого многогранника с опорными гиперплоскостями). Каждая грань выпуклого многогранника есть выпуклый многогранник меньшей размерности. Грани граней являются гранями исходного выпуклого многогранника. Одномерные грани называются ребрами, нульмерные - вершинами. Ограниченный выпуклый многогранник есть выпуклая оболочка своих вершин.

В теории *выпуклых поверхностей* выпуклый многогранник наз. также границу выпуклого многогранника, а иногда даже часть такой границы. В последнем случае говорят о выпуклом многограннике с краем. В элементарной геометрии принято первоначально определять многогранник как фигуру, специальным образом составленную из многоугольников , а затем выделять выпуклый многогранник как лежащий по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Ограниченный n-мерный выпуклый многогранник имеет не менее чем $n+1$ вершину. Наиболее просто устроен *симплекс,* имеющий $n+1$ вершину. Всякий ограниченный выпуклый многогранник разбивается на симплексы, прилегающие по целым граням.

В евклидовом пространстве E^3 есть пять правильных выпуклых многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. Об их свойствах и аналогах см. *Правильные многогранники, Полуправильные многогранники,* О выпуклых многогранниках с частными особенностями строения см. *Изогоны и изоэдры, Зоноэдры.* С правильными разбиениями пространства связаны специальные типы выпуклых многогранников: *стереоэдры, параллелоэдры, планигоны.*

Возможные типы строения сети граней выпуклых многогранников изучены не полностью. Пусть f_k - число k-мерных граней ограниченного *n*-мерного выпуклого многогранника. Справедливо соотношение Эйлера

$$f_0 - f_1 + \ldots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1},$$

имеющее топологический характер: оно верно для любого разбиения сферы S^{n-1} на простые ячейки. При $n=3$ для не образующей двуугольных и самокасающихся ячеек связной сети ребер на сфере S^2 найдется выпуклый многогранник в евклидовом пространстве E^3 с таким строением сети (теорема Штейница). При $n>3$ строение сети граней выпуклого многогранника менее произвольно, чем возможные разбиения сферы . В классе выпуклых многогранников могут ставиться специфические экстремальные задачи, в условия которых входят строение сети граней, число или суммарная длина ребер и т. п..

Приближение выпуклых тел посредством выпуклых многогранников является универсальным приемом исследования. Приближением выпуклых многогранников получены многие результаты теории *смешанных объемов,* теоремы существования, единственности, устойчивости выпуклых поверхностей с фиксированными данными, развиты геометрические методы решения *Монжа - Ампера уравнения.* Эффективность этого метода связана с тем, что выпуклые многогранники характеризуются конечным числом данных; для выпуклых многогранников общие теоремы имеют простую формулировку; к выпуклым многогранникам применимы синтетические приемы исследования.

В связи с теорией поверхностей сформировался большой раздел теории выпуклых многогранников. В евклидовом пространстве E^3 два ограниченных выпуклых многогранника, имеющие одинаковые и в одинаковом порядке прилегающие грани, совместимы движением (теорема Коши). В E^n для некоторых $n_i,\ S_i>0,$ удовлетворяющих соотношению

$$\sum_{i=1}^{N} n_i S_i = 0, \quad N \geqslant n+1,$$

существует и единствен с точностью до переноса выпуклого многогранника с единичными внешними нормалями n_i граней и площадями граней S_i (теорема Минковского). Развертка из плоских многоугольников, склеиваемая так, что результат гомеоморфен сфере S^2 и вокруг каждой вершины склеиваются углы с суммой $\leqslant 2\pi$, изометрична на выпуклом многограннике в E^3, и этот выпуклый многогранник единствен с точностью до движения (теорема А. Д. Александрова). Два выпуклых многогранника в E^n совместимы переносом, если ни для одного направления нормали n грань. Одного выпуклого многогранника нельзя переносом сделать строгой частью другого. Для выходящих из точки лучей l_i и чисел $\omega_i>0$ существует и единствен с точностью до гомотетии выпуклый многогранник с вершинами на лучах l_i и кривизнами ω_i в этих вершинах.

8.7. ВЫПУКЛАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Выпуклая поверхнось это: область (связное открытое множество) на границе *выпуклого тела* в евклидовом пространстве E^3. Вся граница выпуклого тела называется полной выпуклой поверхностью. Если тело конечно, то полная выпуклая поверхнось называется замкнутой. Если тело бесконечно, то полная выпуклая поверхнось называется бесконечной. Бесконечная выпуклая поверхнось гомеоморфна либо плоскости, либо круговому цилиндру. В последнем случае она сама является цилиндром. Простейшее выпуклое тело - выпуклый многогранник, т. е. пересечение конечного числа полупространств. Поверхность выпуклого многогранника составлена из выпуклых многоугольников и также называется *выпуклым многогранником.*

Современная теория выпуклых поверхностей построена главным образом А. Д. Александровым и его школой. Однако отдельные результаты теории выпуклых поверхностей были известны значительно раньше. Так, еще О. Коши (A. Cauchy) доказал неизгибаемость замкнутого выпуклого многогранника. Г. Либман (H. Liebmann) и В. Бляшке (W. Blaschke) доказали жесткость замкнутых выпуклых поверхностей. Г. Минковский (H. Minkow-ski) - существование замкнутой выпуклой поверхности с данной гауссовой кривизной. Г. Вейль (H. Weyl) наметил решение проблемы существования замкнутой выпуклой поверхности с данной метрикой. Это решение было завершено Г. Леви (H. Lewy). С. Кон-Фоссен (S. Cohn-Vossen) доказал однозначную определенность регулярных замкнутых выпуклых поверхностей.

С каждой точкой X выпуклой поверхности F естественным образом связан конус V(X) - предел поверхностей F_n при n стремящейся к бесконечности, получаемых преобразованием гомотетии из F относительно точки X с коэффициентом гомотетии n. Этот конус называется. касательным конусом. В зависимости от вида касательного конуса, точки выпуклой поверхности подразделяются на конические, ребристые и гладкие. Точка выпуклой поверхности называется конической, если касательный конус в этой точке не вырождается. Если же касательный конус вырождается в двугранный угол или плоскость, точка называется ребристой или, соответственно, гладкой. Негладкие точки на выпуклой поверхности представляют собой в нек-ром смысле исключение.

Именно, множество ребристых точек имеет меру нуль, а множество конических точек не более чем счетно.

Для последовательности выпуклой поверхности определяется понятие сходимости: последовательность выпуклой поверхности F_n сходится к выпуклой поверхности *F,* если любое открытое множество D одновременно пересекает или не пересекает F и все F_n при $n > N(D)$. Любую выпуклую поверхность можно представить как предел выпуклых многогранников. Бесконечные совокупности выпуклых поверхностей обладают важным свойством компактности, состоящим в том, что из любой последовательности полных выпуклых поверхностей, не удаляющихся в бесконечность, всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность с пределом в виде выпуклой поверхности, которая может быть вырожденной (в дважды покрытую плоскую область, прямую, полупрямую или отрезок).

Любые две точки выпуклой поверхности можно соединить спрямляемой кривой на поверхности. Точная нижняя грань длин кривых, соединяющих две данные точки на выпуклой поверхности, называется расстоянием между этими точками на поверхности. Кривая на выпуклой поверхности называется кратчайшей, если она имеет наименьшую длину среди всех кривых на поверхности, соединяющих ее концы. У каждой точки выпуклой поверхности есть окрестность, любые две точки которой можно соединить кратчайшей на поверхности. На полной выпуклой поверхности любые две точки соединяются кратчайшей. Кратчайшая на выпуклой поверхности имеет в каждой точке правую и левую полукасательные. Важнейшим свойством кратчайших на выпуклой поверхности является свойство неналегания. Оно состоит в том, что для взаимного расположения двух кратчайших могут быть только следующие возможности: кратчайшие не имеют общих точек; кратчайшие имеют одну общую точку; кратчайшие имеют две общие точки, являющиеся их концами; одна кратчайшая есть часть другой; кратчайшие совпадают на некотором отрезке, причем один конец этого отрезка является концом одной кратчайшей, а второй конец служит концом другой кратчайшей. Метрика выпуклой поверхности обладает свойством выпуклости (см. *Выпуклая метрика*). Углом между кратчайшими γ и γ' в точке О называется предел угла $\alpha(X, X')$ при $X, X' \to O$. Определяемый так угол существует для любых двух кратчайших, исходящих из общей точки. По свойству неналегания кратчайших, кратчайшие γ и γ', исходящие из точки *О,* разбивают окрестность этой точкт; и на два сектора. Пусть F - один из этих секторов, ограниченный кратчайшими γ и γ'. Проведем в этом секторе кратчайшие $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, занумеровав их в порядке следования от γ к γ'. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ - углы между соседними кратчайшими γ и γ_1, γ_1 и $\gamma_2, \ldots$.Углом сектора V называется точная верхняя грань суммы углов $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ по всем кратчайшим γ_i внутри сектора. Угол сектора равен углу между полукасательными к кратчайшим в точке О на развертке касательного конуса. Сумма углов взаимно дополняющих секторов с вершиной в точке О не зависит от взятых кратчайших и называется полным углом поверхности в точке *О.* Полный угол в любой точке выпуклой поверхности не превышает 2π

Для выпуклой поверхности вводится понятие внутренней и внешней кривизны. Внутренняя кривизна ω определяется сначала для основных множеств - точек, открытых кратчайших и треугольников. Треугбльником называется гомеоморфная кругу область, ограниченная тремя кратчайшими. Если *М* - точка и θ - полный угол вокруг нее на поверхности, то $\omega(M)=2\pi-\theta$ Если М- открытая кратчайшая, т. е. кратчайшая с исключенными концами, то $\omega(M)=0$. Если *М* - открытый треугольник, т. е. треугольник с исключенными сторонами и вершинами, то $\omega(M)=\alpha+\beta+\gamma-\pi$, где α, β, γ - углы треугольника. Далее кривизна определяется для элементарных множеств, представляемых в виде теоретико-множественной суммы попарно не пересекающихся основных: $M=\sum_{k=1}^{n} B_k$. Для таких множеств $\omega(M)=\Sigma\,\omega(B_k)$. Внутренняя кривизна любого замкнутого множества определяется как точная нижняя грань внутренней кривизны элементарных множеств, содержащих данное замкнутое множество. Наконец, для любого множества внутренняя кривизна определяется как верхняя грань внутренней кривизны содержащихся в нем замкнутых множеств. Определяемая таким образом внутренняя кривизна на выпуклой поверхности является вполне аддитивной функцией на кольце *борелевских множеств.* Внешняя кривизна множества на выпуклой поверхности определяется как площадь (мера Лебега) *сферического изображения* этого множества. Она определена для всех борелевских множеств на выпуклой поверхности и совпадает с внутренней кривизной.

Метрика ρ двумерного многообразия называется внутренней, если расстояние $\rho(X_1, X_2)$ между любыми двумя точками X_1 и X_2 многообразия равно точной нижней грани длин кривых в этом многообразии, соединяющих точки X_1 и X_2. При этом длина кривой $X(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$, соединяющей точки X_1 и X_2, определяется как точная верхняя грань сумм

$$\sum \rho(X(t_{k-1}), \quad X(t_k)), \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots \leqslant 1.$$

Пусть γ и γ' - две кривые, исходящие из точки O в многообразии с внутренней метрикой. Возьмем на них точки X и X' и построим плоский треугольник со сторонами $\rho(O, X), \ \rho(O, X'), \ \rho(X, X')$. Нижний предел угла $\alpha(X, X')$ этого треугольника, противолежащего стороне $\rho(X, X')$, называется углом между кривыми γ и γ' в точке *O*. Очевидно, этот угол всегда существует. Метрика многообразия называется выпуклой, если для любого треугольника, стороны которого являются кратчайшими, сумма его углов не меньше π. Метрика выпуклой поверхности - в этом смысле выпуклая. Одним из основных результатов теории выпуклых поверхностей является теорема о реализуемости внутренней выпуклой метрики на некоторой выпуклой поверхности. Именно, полное многообразие с внутренней выпуклой метрикой реализуется полной выпуклой поверхностью.

Для кривых на выпуклой поверхности вводится понятие правого и левого поворотов, обобщающее понятие интегральной *геодезической кривизны.* Пусть γ - произвольная кривая без самопересечений на выпуклой поверхности с концами *А и В.* Задается направление на кривой γ и строится последовательность простых геодезических ломаных с концами *А, В,* сходящихся к γ и расположенных в правой полуокрестности кривой. Пусть α_n - углы секторов, образуемые звеньями ломаной со стороны области, ограниченной ломаной γ_n и кривой γ; α и β- углы секторов, образуемых ломаной γ_n и кривой γ в концевых точках. Правым поворотом называется предел

$\alpha+\beta+\Sigma\,(\pi-\alpha_n)$ при $\gamma_n\to\gamma$. Этот предел всегда существует, если кривая γ имеет определенные направления на концах, т. е. полукасательные, и не зависит от взятой последовательности ломаных. Левый поворот определяется аналогично. Поворот замкнутой кривой определяется путем приближения к ней замкнутой ломаной с соответствующей стороны. Для выпуклой поверхности имеет место теорема, обобщающая *Гаусса - Бонне теорему* для регулярных поверхностей. Именно, если замкнутая кривая на выпуклой поверхности ограничивает гомеоморфную кругу область, то сумма кривизны области и поворота кривой, ограничивающей область со стороны этой области, равна 2π.

Изометрическим преобразованием называется такая деформация выпуклой поверхности, при которой поверхность остается выпуклой и ее метрика не меняется, т. е. не изменяются расстояния между точками на поверхности. Изометрическое преобразование называется тривиальным, если оно сводится к перемещению поверхности как целого или к перемещению и зеркальному отражению.

Поверхность, не допускающая нетривиальных изометрических преобразований, называется однозначно определенной. Замкнутые выпуклые поверхности и бесконечные выпуклые поверхности с полной кривизной 2π являются однозначно-определенными. Бесконечные выпуклые поверхности с полной кривизной, меньшей 2π, допускают нетривиальные изометричические преобразования и притом с большим произволом. Всякая выпуклая поверхность локально допускает нетривиальные изометрические преобразования, т. е. каждая точка выпуклой поверхности имеет окрестность, допускающую такие преобразования.

Важнейшим средством исследования изометрических преобразований выпуклой поверхности является теорема о склеивании. Согласно этой теореме, полное многообразие D, составленное из областей D_k, изометрнчных выпуклых поверхностей, само изометрично выпуклой поверхности, если выполняются следующие условия: границы областей D_k имеют повороты ограниченной вариации, отождествляемые участки границ одинаковой длины, сумма поворотов на любом отрезке отождествляемых границ неотрицательна, а сумма углов секторов в любой общей точке границ областей D_kне превышает 2π. Теоремы о возможности нетривиальных изометрических преобразований выпуклой поверхности обычно получают "подклеиванием" к данной выпуклой поверхности плоской области с соблюдением указанных выше условий.

Для общих выпуклых поверхностей вводится понятие площади для любого борелевского множества; сначала оно вводится для простейших множеств, ограниченных кратчайшими,- геодезических многоугольников. Многоугольник подвергается мелкой триангуляции T_nтак, чтобы стороны треугольников были меньше $1/n$. Для каждого треугольника этой триангуляции строится плоский треугольник со сторонами той же длины и берется сумма площадей S_n таких треугольников. Оказывается, независимо от выбора триангуляции многоугольника, сумма S_n при $n \rightarrow \infty$стремится к определенному пределу. Этот предел и принимается за площадь многоугольника. Затем обычными приемами теории меры определяются площади замкнутых, открытых и вообще борелевских множеств. Площадь выпуклой поверхности есть вполне аддитивная функция на кольце борелевских множеств.

Удельной кривизной выпуклой поверхности в области D называется отношение кривизны области к ее площади. Если удельная кривизна выпуклой поверхности во всех областях заключена в положительных пределах, то поверхность является гладкой и строго выпуклой. Гауссовой кривизной выпуклой поверхности в данной точке X называется предел удельной кривизны области D при стягивании ее к точке *X*. Гауссова кривизна, если она существует, является непрерывной функцией точки на поверхности. Если на выпуклой поверхности существует определенная гауссова кривизна, то на этой поверхности можно ввести полярные геодезические координаты и представить линейный элемент поверхности в виде

$$ds^2 = dr^2 + G(r, \theta)d\theta^2.$$

При этом гауссова кривизна с помощью коэффициента G определяется по формуле

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}},$$

Выпуклая поверхность называется регулярной, если в окрестности любой ее точки она допускает аналитическое задание $r = r(u, v)$, где $r(u, v)$ - регулярная (достаточное число раз дифференцируемая) вектор-функция, удовлетворяющая условию $r_u \times r_v \neq 0.$ Метрика выпуклой поверхности называется регулярной, если она допускает задание с помощью линейного элемента $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$ причем коэффициенты формы ds^2 - регулярные функции. Регулярная выпуклая поверхность имеет, очевидно, регулярную метрику, так как $E = r_u^2, \quad F = r_u r_v, \quad G = r_v^2.$ Обратное, вообще говоря, неверно. Например, двугранный угол имеет регулярную, даже аналитическую метрику, так как он изометричен плоскости, но не является регулярной поверхностью. Однако, если метрика выпуклой поверхности регулярна, а гауссова кривизна положительна, то поверхносгь регулярна. Именно, если коэффициенты линейного элемента дифференцируемы *n* раз $(n \geqslant 2)$, то поверхность дифференцируема по крайней мере *n*-1 раз.

Теория выпуклых поверхностей строится также и в пространствах постоянной кривизны. При этом, как и в евклидовом пространстве, выпуклой поверхностью называется область на границе выпуклого тела. Многие результаты теории выпуклых поверхностей в пространствах постоянной кривизны формулируются и доказываются так же, как и для выпуклых поверхностей евклидова пространства. Однако некоторые результаты существенно отличаются. Напримкр, в пространстве Лобачевского полная выпуклая поверхность может быть гомеоморфна любому связному открытому множеству на сфере.

8.8. Конус

1) Конус в евклидовом пространстве - множество К, составленное из полупрямых, исходящих из некоторой точки О - вершины конуса. Границу *∂К* множества К (составленную из полупрямых, называют образующими конуса) - часть *конической поверхности* - также иногда называют конусом. Наконец, часто конус называют пересечение К с полупространством, содержащим О и ограниченным плоскостью, не проходящей через *О.* В этой ситуации часть плоскости, лежащая внутри конической поверхности, называется основанием конуса, а часть конической поверхности, заключенная между вершиной и основанием,- боковой поверхностьюконуса.

Если основание конуса есть круг, то конус называют круговым. Круговой конус называется прямым, если ортогональная проекция его вершины на плоскость основания совпадает с центром основания. Прямая, проходящая через вершину конуса перпендикулярно основанию, называется осью конуса, а ее отрезок между вершиной и основанием - высотойконуса. Объем прямого кругового конуса равен $\pi R^2 h/3$, где h- высота, R- радиус основания; площадь боковой поверхности равна πRl, где l- длина отрезка образующей между вершиной и основанием. Подмножество конуса, заключенное между двумя параллельными плоскостями, называется усеченным конусом, или коническим слоем. Слой прямого кругового конуса между плоскостями, параллельными основанию, имеет объем $\pi(R^2+r^2+Rr)\ h/3$, где R, r- радиусы оснований, h- высота (расстояние между основаниями); площадь боковой поверхности $\pi(R+r)l$, где l- длина отрезка образующей.

2) Конусом над топология, пространством X (основанием конуса) - пространство *CX,* получающееся из произведения $X\times[0, 1]$ стягиванием подпространства XX {0} в одну точку W(вершину конуса):

$$CX=(X\times[0,\ 1])/(X\times\{0\}).$$

Другими словами, *CX*- цилиндр постоянного отображения $X \to W$ (см. *Цилиндрическая конструкция*) или конус тождественного отображения d : $X \to X$ (см. *Коническая конструкция*). Пространство X стягиваемо тогда и только тогда, когда оно является *ретрактом* всякого конуса над *X*.

Понятие конус над топологическим пространством обобщается в рамках теории категорий: множество морфизмов $\alpha_i : A \to A_i,\ \ i \in I,$ произвольной категории $\mathfrak{N}$ с общим началом в объекте A называется конусом морфизмов с вершиной A; двойственно, коконус морфизмов есть множество морфизмов b_i : $A_i \to A,\ i \in I$ с общим концом в объекте *A*.

3) Конус отображения - топологическое пространство, сопоставляемое непрерывному отображению $f : X \to Y$ топологических пространств *конической конструкцией.* Пусть C_1 - конус вложения $Y \subset C_f,\ C_2$ - конус вложения $C_f \subset C_1$ и т. д. Получающаяся последовательность

$$X \xrightarrow{f} Y \subset C_f \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots$$

называется последовательностью Пуппе; здесь $C_1 \sim SX,\ \ C_2 \sim SY$ и т. д., где *SX*(*SY*)- *надстройка* над X (над Y).

Аналогично определяется приведенный конус C_f отображения пунктированных пространств. При этом, как и в ситуации с корасслоением, для любого пунктированного пространства A последовательность гомотопичных классов, индуцированная последовательностью Пуппе,

$$[X,\ A] \longleftarrow [Y,\ A] \longleftarrow [C_1,\ A] \longleftarrow [C_2,\ A] \longleftarrow \ \ldots,$$

точна; в ней все члены, начиная с четвертого,- группы, а начиная с седьмого - абелевы группы.

4) Конус в действительном векторном пространстве Е - множество $K \subset E$ такое, что $\lambda K \subset K$ для любого l>0. Конус называется заостренным, если $0 \in K$, а заостренный конус - выступающим, если К не содержит никакого одномерного подпространства. Невыступающий конус иногда называют клином.

Конус, являющийся выпуклым множеством в *Е,* называется выпуклым. Таким образом, подмножество К в Еявляется выпуклым конусе тогда и только тогда, когда $\lambda K \subset K$ для всякого l>0 и $K + K \subset K$. В этом случае векторное подпространство в *Е,* порожденное выпуклым конусом *К,* совпадает с множеством К- *К.* Если конус заострен, то $K \cap (-K)$ - наибольшее векторное подпространство, содержащееся в *К.* Заостренный выпуклый конус будет выступающим тогда н только тогда, когда $K \cap (-K) = 0$.

Если Е- полуупорядоченное пространство, то положительный конус $P = \{x : x \in E, \quad x \geqslant 0\}$ является выступающим, заостренным, выпуклым конусом. Обратно, любой такой конус К в векторном пространстве Е порождает отношение порядка: $x_1 \geqslant x_2$, если $x_1 - x_2 \in K$.

Конус К называют воспроизводящим, если любой элемент $x \in E$ представим в виде разности элементов из *К.* Например, воспроизводящими являются конус неотрицательных непрерывных (или суммируемых) функций на отрезке [0, 1], множество положительных операторов в пространстве ограниченных самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Однако конус неотрицательных неубывающих непрерывных функций таковым не является.

Наличие топологии в Е наделяет понятие конус более богатым содержанием, позволяющим получать нетривиальные результаты. Например, пусть Е- отделимое локально выпуклое пространство и *К*- выступающий заостренный выпуклый конус в *Е,* имеющий непустую внутренность (такие конусы называют телесными). Тогда каждая линейная форма на *Е,* положительная на *К,* непрерывна; если М- векторное подпространство в *Е,* пересекающееся с внутренностью *К,* и *f* - линейная форма на *M,* положительная на $K \cap M$, то на E существует линейная форма $\tilde{f}$, продолжающая *f* и положительная на *K*.

Более других развита теория конусов в банаховых пространствах. Пусть *K* – конус в банаховом пространстве *E,* порождающий в E нек-рое отношение порядка $\geqslant$. Если конус замкнут, то для E имеет место принцип Архимеда: если $x \in E$, а числа l_n>0 и $\lambda_n \to \infty$, и при этом существует такое *у*, что $\lambda_n x \leqslant y$ при всех *n,* то $x \leqslant 0$. Для телесного конуса верно и обратное: из архимедовости E вытекает замкнутость *K*.

Пусть *K'*- сопряженный клин, т. е. совокупность всех положительных линейных непрерывных функционалов на E (*f* положителен, если $f(x) \geqslant 0$ для любого $x \in K$). *K'*- конус тогда и только тогда, когда K- пространственный, т. е. замыкание $\overline{K - K} = X$. Если K замкнут, то для любого x_0>0 (соответственно $x_0 \notin K$) существует такой $f \in K'$, что $f(x_0)>0$ ($f(x_0)<0$).

Конус K называют несплющенным, если для любого $x \in E$ существуют такие u, v О *K,* что

$$x = u - v, \text{ а } \|u\|, \ \|v\| \leqslant M \|x\|,$$

где *M*=const.

Если конус замкнутый и воспроизводящий, то он несплющен (теорема Крейна - Шмульяна).

Конус K называют нормальным, если

$$\inf\{\|x+y\| : x, \ y \in K, \ \|x\| = \|y\| = 1\} > 0.$$

Нормальность конуса равносильна полумонотонности нормы: $0 \leqslant y \leqslant x$ влечет $\|y\| \leqslant M\|x\|,$ где *M*=const. Для того чтобы клин *K'* был воспроизводящим в сопряженном пространстве, необходимо и достаточно, чтобы конус *К* был нормальным (теорема Крейна). Двойственно: если *К'*- нормальный конус, соответствующий замкнутому конусу *К,* то конусК воспроизводящий. Существует взаимно однозначное линейное и непрерывное отображение пространства Е с нормальным конусом К в подпространство пространства C(Q) непрерывных функций на некотором бикомпакте *Q,* при котором элементы из К и только они переходят в неотрицательные функции.

Конус К называют правильным (вполне правильным), если всякая последовательность элементов из *К,* возрастающая и ограниченная по порядку (по норме), сходится. Если К замкнут и правилен, то он нормален, а всякий вполне правильный конус нормален и правилен. Если же К правилен и телесен, то он вполне правилен. Правильность конуса связана со свойством монотонной непрерывности нормы: если $x_\alpha \downarrow 0,$ т. е. семейство $\{x_\alpha\}$ - убывающее направление, и $\inf x_\alpha = 0,$ то $\|x_\alpha\| \to 0.$ Правильность замкнутого конуса К равносильна тому, что пространство Е дедекиндово полно, а норма в Е монотонно непрерывна. Правильность телесного конуса К влечет монотонную непрерывность нормы в *Е.*

Конус К называют оштукатуриваемым, если существуют К. $K_1 \subset X$ и число d>0 такие, что для любого $x \in K$ шар $S(x; \;\; \delta\|x\|) \subset K_1.$ Оштукатуриваемость К равносильна существованию в Е эквивалентной нормы, аддитивной на конусе. Оштукатуриваемый конус вполне правилен.

Теория конусов развита и для произвольных нормированных пространств. Однако в этом общем случае некоторые из вышеприведенных результатов не сохраняются, например, перестает быть верной теорема Крейна - Шмульяна, а правильность замкнутого конуса не влечет его нормальность.

8.9. ОДНОРОДНЫЙ ВЫПУКЛЫЙ КОНУС

Однородный выпуклый конус - открытый строго выпуклый конус V в векторном пространстве R^n, однородный относительно группы линейных преобразований $\alpha \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ таких, что $\alpha V = V$ (автоморфизмов конуса V). Однородные выпуклые конусы V_1 и V_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм объемлющих векторных пространств, переводящий V_1 в V_2

Примеры.

1) Шаровой конус

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 > x_1^2 + \ldots + x_n^2\}.$$

Группа автоморфизмов конуса K_n есть прямое произведение подгруппы индекса 2 группы Лоренца $O_{n,\,1}(\mathbb{R})$ (изоморфной группе движений n-мерного пространства Лобачевского) и группы $\mathbb{R}+$ гомотетий с положительными коэффициентами.

2) Конус $P_n(\mathbb{R})$ положительно определенных симметрических действительных матриц порядка *n*. Группа автоморфизмов этого конуса состоит из преобразований вида

$$x \longrightarrow gxg^t, \quad g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

3) Конус $P_n(\mathbb{C})$ положительно определенных эрмитовых комплексных матриц порядка *n*.

4) Конус $P_n(\mathbb{H})$ положительно определенных эрмитовых кватернионных матриц порядка *n*.

Выпуклый конус *V*, сопряженный однородному выпуклому конусу V(т. е. конус в сопряженном пространстве, состоящий из всех линейных форм, положительных на V), также однороден. Однородный выпуклый конус V называется самосопряженным, если в объемлющем векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ существует такая евклидова метрика, что $V = V'$ при отождествлении пространства $\mathbb{R}^n$ со своим сопряженным с помощью этой метрики. Все приведенные выше однородные выпуклые конусы являются самосопряженными.

Классификация самосопряженных однородных выпуклых конусов основана на их связи с компактными *йордановыми алгебрами*. Действительная йорданова алгебра А называется компактной, если $\mathrm{Tr}\, T(a)^2 > 0$ для любого $a \in A$, $a \neq 0$, где $T(a)$ - оператор умножения на *a* в алгебре *A*. Комплексификация устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных компактных йордановых алгебр и классами изоморфных полупростых комплексных йордановых алгебр. Множество квадратов обратимых элементов компактной йордановой алгебры является самосопряженным однородным выпуклым конусом, и все самосопряженные однородные выпуклые конусы получаются таким способом. Отсюда выводится, что всякий самосопряженный однородный выпуклый конус изоморфен прямому произведению конусов описанных выше четырех типов и 27-мерных конусов, связанных с особой простой йордановой алгеброй.

Произвольные однородные выпуклые конусы могут быть представлены в виде конуса положительно определенных эрмитовых матриц в некоторых обобщенных матричных алгебрах. Простейшим примером несамосопряженного однородного выпуклого конуса является 5-мерный конус положительно определенных симметрических действительных матриц $x \doteq [x_{ij}]$ 3-го порядка, удовлетворяющих условию $x_{23} = x_{32} = 0$. Начиная с $n = 11$ в $\mathbb{R}^n$ имеется континуум неизоморфных

Во всяком однородном выпуклом конусе некоторым каноническим образом может быть определена полная риманова метрика, инвариантная относительно всех его автоморфизмов. Самосопряженные однородные выпуклые конусы характеризуются тем, что они являются *симметрическими пространствами* относительно этой метрики. Стационарная подгруппа любой точки однородного выпуклого конуса является максимальной компактной подгруппой в группе его автоморфизмов. Стационарная подгруппа единицы компактной йордановой алгебры А в группе автоморфизмов однородного выпуклого конуса, ассоциированного с *А,* совпадает с группой автоморфизмов алгебры *А.* Всякий однородный выпуклый конус допускает просто транзитивную группу автоморфизмов, приводящуюся в некотором базисе к треугольному виду.

Однородные выпуклые конусы представляют особый интерес для теории *однородных ограниченных областей* в связи с тем, что указанные области реализуются в виде *Зигеля областей,* а для однородности области Зигеля 1-го или 2-го рода необходимо, чтобы был однороден ассоциированный с ней выпуклый конус. Однородные выпуклые конусы и связанные с ними области Зигеля являются естественными носителями некоторых аналитических конструкций, в частности обобщения эйлеровых интегралов и гипергеометрических функций. С каждым однородным выпуклым конусом связывается многопараметрическая группа интегралов Римана - Лиувилля, включающая некоторые гиперболические дифференциальные операторы (например, в случае шарового конуса таким образом получается волновой оператор). Для этих операторов может иметь место усиленный принцип Гюйгенса .

Исследование дискретных групп автоморфизмов самосопряженных однородных выпуклых конусов важно для компактификации и разрешения особенностей локально симметрических пространств [4]. Многие результаты классической теории приведения, полученные для группы $SL_n(Z)$, действующей в конусе $P_n(R)$, могут быть обобщены на произвольные самосопряженные однородные выпуклые конусы .

8.10. КАСАТЕЛЬНЫЙ КОНУС

1) Касательный конус к выпуклой поверхности *S* в точке О- поверхность V(0)конуса, образованного полупрямыми, исходящими из О и пересекающими выпуклое тело, ограниченное S по крайней мере в одной еще точке, отличной от О (сам этот конус иногда называют телесным касательным конусом). Другими словами, V(O)- граница пересечения всех полупространств, содержащих S и определяемых опорными плоскостями к S в точке *O.* Если V(O) - плоскость, то О

называют гладкой точкой *S,* если V(O)- двугранный угол, то O называют ребристой точкой, наконец, если V(O)- невырожденный (выпуклый) конус, то O называют конической точкой поверхности *S.*

2). Касательный конус к алгебраическому многообразию X в точке x- множество предельных положений секущих прямых, проходящих через *x.* Точнее, если алгебраическре многообразие X вложено в аффинное пространство A^n и задается идеалом $\mathfrak{A}$ кольца к [$T_1,..., T_n$], а точка $x \in X$ имеет координаты (0, ...,0), то касательный конус C(*X, x*) к X в точке x задается идеалом начальных форм многочленов из 91 (если $F=F_k+F_{k+1}+...$-разложение F на однородные многочлены и $F_k \neq 0$, то F_k называют начальной формой *f*). Существует другое определение, пригодное для произвольных нётеровых схем: пусть $O_{X,x}$- локальное кольцо схемы X в точке *x, M* - его максимальный идеал, тогда спектр градуированного кольца

$$\bigoplus_{n \geqslant 0} (\mathfrak{M}^n / \mathfrak{M}^{n+1})$$

называется касательным конусом к X в точке *x.*

Многообразие X в окрестности точки x в некотором смысле устроено так же, как касательный конус. Например, если касательный конус приведенный, нормальный или регулярный, то таким же будет локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$. Размерность и кратность X в точке x совпадают с размерностью касательного конуса и кратностью его в вершине. Касательный конус совпадает с *Зариского касательным пространством* тогда и только тогда, когда x- неособая точка *X.* Морфизм многообразий индуцирует отображение касательного конуса.

8.11. ВЫПУКЛАЯ ПОДГРУППА

Выпуклая подгруппа - подгруппа H (частично) *упорядоченной группы, G,* являющаяся *выпуклым подмножеством G* относительно заданного отношения порядка. Инвариантные выпуклые подгруппы и только они являются ядрами гомоморфизмов частично упорядоченных групп, сохраняющих порядок. Подгруппа упорядочиваемой группы, выпуклая при всяком линейном упорядочении, называется абсолютно выпуклой подгруппой, а выпуклая при некотором ее линейном порядке - относительно выпуклой подгруппой. Пересечение всех неединичных относительно выпуклых подгрупп упорядочиваемой группы есть абсолютно выпуклая подгруппа, объединение всех собственных относительно выпуклых подгрупп также есть абсолютно выпуклая подгруппа. Абелевы группы без кручения не имеют нетривиальных абсолютно выпуклых подгрупп. Подгруппа H доупорядочиваемой группы G абсолютно выпукла тогда и только тогда, когда для любых элементов $g \notin H$, $a \in H$ пересечение $S(g) \cap S(ga)$ не пусто, где $S(x)$ - минимальная инвариантная подполугруппа *G,* содержащая *x.* Выпуклая l-подгруппа *H структурно упорядоченной группы* изолирована, т. е. для любого натурального *n* из $x^n \in H$ следует $x \in H$.

8.12. Окруженные точки

Определение 6. Пусть *E*— векторное пространство над **R** или **C**. *Окруженной (относительно окруженной) точкой* множества $A \subset E$ будет называться точка $a \in A$, обладающая тем свойством, что, каков бы ни был вектор $t \in E$ $(t \in \mathscr{L}_A - a)$, некоторый отрезок $[a, a + \varepsilon t]$, где $\varepsilon > 0$, содержится в *A*. Совокупность всех окруженных точек множества *A* будет обозначаться $\mathring{A}$. Если $\mathring{A} = A$, т. е. все точки множества *A* окруженные, то *A* будет называться *алгебраически открытым, множеством.*

А. *Множество* $A \subset E$, *обладающее окруженной точкой a, аффинно порождает E* . Действительно, какова бы ни была точка $x \in E \setminus \{a\}$, прямая $\mathscr{L}_{\{a, x\}}$, проходящая через *a* и *x* , содержит некоторую точку $a + \varepsilon(x - a) \in A$, отличную от *a,* и потому вся содержится в $\mathscr{L}_A$, откуда $x \in \mathscr{L}_A$.

Б. *Если f— аффинное отображение пространства E на F и a — окруженная тачка множества* $A \subset E$, *то f (a) — окруженная точка множества f (A).* Действительно, по условию, для всякого $s \in F$ существует $t \in E$ такое, что $f(t) = s$. Далее, так как $a \in \mathring{A}$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $[a, a + \varepsilon t] \subset A$. Но тогда в силу 1.В

$$[f(a), f(a) + \varepsilon s] =$$
$$= f([a, a + \varepsilon t]) \subset f(A).$$

Б'. Из Б следует, что *если A алгебраически открыто, то и f (A) алгебраически открыто.*

В. Из определения 6 непосредственно следует, что *окруженная точка выпуклого множества A — это его точка, содержащаяся внутри всех интервалов, по которым проходящие через нее вещественные прямые пересекают A.*

Г. *Если A выпукло, то для того, чтобы* $a \in \mathring{A}$, (необходимо и) *достаточно, чтобы для каждого* $t \in E$ *существовало* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $a + \varepsilon t \in A$. Действительно, беря, в частности, $t = 0$, видим, что $a \in A$, а тогда, каково бы ни было $t \in E$, вместе с $a+\varepsilon t$ весь отрезок $[a,\ a + \varepsilon t]$ содержится в A.

Д. *Всякий n-мерный симплекс S в вещественном векторном пространстве E обладает относительно окруженными точками;* это — те и только те его точки, все барицентрические координаты которых отличны от нуля. В самом деле, пусть $s_0, s_1, \ldots, s_n$ — вершины симплекса S и $L = \mathscr{L}_S = \mathscr{L}_{\{s_0, s_1, \ldots, s_n\}}$. Так как

$$F = L - s_0 = \mathscr{E}_{\{s_1 - s_0, \ldots, s_n - s_0\}}$$

, то каждый вектор $t \in F$ представим в виде

$$t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k s_k, \quad \text{где} \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 0. \qquad (1)$$

Пусть $s \in S$, так что

$$s = \sum_{k=0}^{n} \rho_k s_k,$$

где все

$$\rho_k \geqslant 0 \text{ и } \sum_{k=0}^{n} \rho_k = 1.$$

Если все $\rho_k > 0$, то для каждого вектора (1) существует $\varepsilon > 0$ такое, что все $\rho_k + \varepsilon\lambda_k \geqslant 0$; так как при этом

$$\sum_{k=0}^{n} (\rho_k + \varepsilon\lambda_k) = 1,$$

то заключаем, что $s + \varepsilon t \in S$, т. е. s — относительно окруженная точка. Если же некоторое $\rho_{k_0} = 0$, то $s + \varepsilon(s - s_{k_0})$ не принадлежит S ни при каком $\varepsilon > 0$, т. е. s не является относительно окруженной точкой. В самом деле, при $s + \varepsilon(s - s_{k_0}) \in S$ мы имели бы ,$s + \varepsilon(s - s_{k_0}) =$

$= \sum_{k=0}^{n} \sigma_k s_k$, где все $\sigma_k \geqslant 0$ и $\sum_{k=0}^{n} \sigma_k = 1$, Откуда для s получилось бы барицентрическое разложение $s = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma_k + \delta_{kk_0}\varepsilon}{1+\varepsilon} s_k$, отличное от $s = \sum_{k=0}^{n} \rho_k s_k$, поскольку $\rho_{k_0} = 0$, а $\frac{\sigma_{k_0} + \varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$; но в силу 3.5.П это невозможно.

Из сказанного следует, что *каждое выпуклое множество* $A \subset$ E, *порождающее n-мерное аффинное многообразие, обладает относительно окруженными точками.* Действительно, *A* должно содержать аффинно независимое семейство $(s_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, а вместе с ним и симплекс S с вершинами $s_0, s_1, \ldots, s_n$. В частности, в *конечномерном вещественном векторном пространстве каждое аффинно порождающее его выпуклое множество обладает окруженными точками.*

Е. Напротив, *во всяком бесконечномерном векторном пространстве E над* **R** *существует выпуклое множество, аффинно порождающее E, но не обладающее окруженными точками.* Таким, будет, например, множество *P* всех векторов $x \in E$, имеющих относительно некоторого фиксированного базиса

$\mathcal{A} = (a_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$

только координаты $x_\alpha > 0$. Действительно, так как A боесконечно, то у каждого $x \in P$ некоторая координата $x_{\alpha_0} = 0$, а тогда $x - \varepsilon a_{\alpha_0}$ не содержится в *P* ни при каком ε.

В пространстве $l^1_{\mathbf{R}}$ таким же свойством обладает множество *P* тех последовательностей $c = (\gamma_n) \in l^1_{\mathbf{R}}$, у которых все $\gamma_n > 0$. В самом деле, положим $\rho_n = \sum_{k=n}^{\infty} \gamma_k$ и $\delta_n = \sqrt{\rho_n} - \sqrt{\rho_{n+1}}$. Тогда $d = (\delta_n) \in P$, и так как

$$\frac{\delta_n}{\gamma_n} = \frac{1}{\sqrt{\rho_n} + \sqrt{\rho_{n+1}}} \to \infty,$$

то $c - \varepsilon d$ не содержится в *P* ни при каком $\varepsilon > 0$.

Ж. Пусть *E*—векторное пространство над K, где K = **R** или **C**. *Если* $A \subset E$ *выпукло, то и* $\mathring{A}$ *выпукло. Если A—закругленное, то и* $\mathring{A}$*— закругленное.* Действительно, лусть $x, y \in \mathring{A}$, так что для каждого $t \in E$ существуют $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что $x + \varepsilon t, y + \delta t \in A$, и пусть $z = (1-\rho)x + \rho y$, где $0<\rho<1$. Если *A* выпукло, то

$z + [(1-\rho)\varepsilon + \rho\delta] t =$

$= (1-\rho)(x+\varepsilon t)+\rho(y+\delta t)\in A$ и тем самым, $z\in\mathring{A}$, т. е. $\mathring{A}$ выпукло. Пусть, далее, A—закругленное и $\omega\in K$

таково, что $|\omega| = 1$. Если $x\in\mathring{A}$, то для каждого $t\in E$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $[x,\ x+\varepsilon\omega^{-1}t]\subset A$. Но тогда

$$[\omega x,\ \omega x+\varepsilon t]=\omega[x,\ x+\varepsilon\omega^{-1}t]\in\omega A=A$$

и, значит, $\omega x\in\mathring{A}$, т. е. $\mathring{A}$—закругленное.

Ж'. В силу 2.А из Ж следует, что *если A абсолютно выпукло, то и $\mathring{A}$ абсолютно выпукло.*

3. *Если C — конус, то и $\mathring{C}$ — конус, притом строгий, за исключением того случая, когда C совпадает со всем пространством E.*

Действительно, пусть $c\in\mathring{C}$, т. е. для каждого $t\in E$ существует $\varepsilon>0$ такое, что $[c,\ c+\varepsilon t]\subset C$. Тогда для каждого $\rho > 0$ имеем

$$[\rho c,\ \rho c+\rho\varepsilon t]=\rho[c,\ c+\varepsilon t]\subset\rho C\subset C,$$

так что $\rho c\in\mathring{C}$. Далее, пусть также $d\in\mathring{C}$ и $\delta>0$ таково, что $d+\delta t\in C$. Тогда $(c+d)+(\varepsilon+\delta)t=(c+\varepsilon t)+(d+\delta t)\in C$ и, значит, $c+d\in\mathring{C}$. Тем самым $\mathring{C}$ —конус. Если он не строгий, то, $0\in\mathring{C}$, так что для всякого $t\in E$ существует $\varepsilon>0$ такое, что $\varepsilon t\in C$; *но* тогда $t\in C$, так что $C = E$.

И. Пусть E — векторное пространство над **R** или **C**. *Если a_0 — окруженная точка выпуклого множества $A\subset E$, то и все внутренние точки интервалов, соединяющих ее с произвольными другими точками $a\in A$, — окруженные. При этом*

$$\mathring{A}=\bigcup_{a\in A\setminus\{a_0\}}[a_0,\ a).$$

Действительно, пусть $a_1\in(a_0, a)$, так что $a_1=(1-\rho)a_0+\rho a$, где $0<\rho<1$. Поскольку $a_0\in\mathring{A}$, для каждого $t\in E$ существует $\varepsilon> 0$ такое, что $a_0+\varepsilon t\in A$. Но тогда $a_1+(1-\rho)\varepsilon t=$

$=(1-\rho)(a_0+\varepsilon t)+\rho a\in A$ и, значит $a_1\in\mathring{A}$. При этом каждая точка $a_1\in\mathring{A}\setminus\{a_0\}$ принадлежит некоторому промежутку

(a_0, a), где $a\in A$. В самом деле, так как $a_1\in\mathring{A}$, то существует $\delta > 0$ такое, что $a=a_1+\delta(a_1-a_0)\in A$ и, значит, $a_1=\dfrac{a+\delta a_0}{1+\delta}\in(a_0,\ a)$.

К. *Если $A\subset E$ выпукло, то $\mathring{A}$ алгебраически открыто.* Действительно, если $a_0\in\mathring{A}$ и $t\in E$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$a = a_0 + \varepsilon t \in A$, а тогда $a_0 + \frac{\varepsilon}{2} t \in \mathring{A}$, так что, a_0 — окруженная точка в $\mathring{A}$.

Л. *Пусть А — выпуклое множество, не содержащее нулевой точки. Объединение С лучей с началом* 0, *проходящих через всевозможные окруженные точки множества А, есть строгий алгебраически открытый конус.* В самом деле, C — конус. При этом каждая точка $c \in C$, по построению, есть внутренняя точка интервала, соединяющего некоторые точки $a \in \mathring{A}$ и $c' \in C$. Но так как $\mathring{A} \subset C$, то тогда $a \in \mathring{C}$. Значит, $c \in \mathring{C}$, т. е. $C = \mathring{C}$.

Принимая во внимание К и 4. А 1°, заключаем, что C—алгебраически открытое множество. Наконец, так как, по построению, $0 \notin C$, то конус C — строгий.

М. *Пусть А — выпуклое множество в вещественном векторном пространстве Е, обладающее окруженной точкой а. Если гиперплоскость X пространства Е не содержит окруженных точек множества А, то А лежит по одну сторону от X.* Действительно, пусть $f(x) = l$—уравнение гиперплоскости X. В силу 1.И' $\mathring{A}$ лежит строго по одну сторону от X, так что для всех $x \in \mathring{A}$ имеем, скажем, $f(x)<\varepsilon$. Так как, $[a, x) \subset \mathring{A}$ для всякого $x \in A$, то тогда $(1-\rho) f(a) + \rho f(x) = f((1-\rho) a + \rho x) < \xi$ для всех $\rho \in [0, 1)$ и $x \in A$; беря $\rho \to 1$, получаем, что $f(x) \leq \xi$ для всех $x \in A$, т. е. A лежит по одну сторону от X.

8.13. Функционал Минковского

Определение 7. Множество A в векторном пространстве E над **R** или **C** называется *поглощающим,* если для каждого $x \in E$ существует $\alpha>0$ такое, что $x \in \rho A$ для всех $\rho \geq \alpha$.

А. *Для того чтобы множество $A \subset E$ было поглощающим, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало* 0 *в качестве окруженной точки.* Действительно, если A — поглощающее, то, прежде всего, $0 \in \alpha A$ для некоторого $\alpha > 0$, откуда $0 \in A$; далее, условие определения 7 означает, что $\alpha x \in A$ для всех $\sigma \in (0, \alpha^{-1}]$; таким образом, для каждого $x \subset E$ существует $\varepsilon>0$ (равное α^{-1}) такое, что $[0, \varepsilon x] \subset A$, так что $0 \in \mathring{A}$. Обратно, из $[0, \varepsilon x] \subset A$ следует, что $x \in \rho A$ для всех $\rho \geq \alpha = \varepsilon^{-1}$ и, значит, если $0 \in \mathring{A}$, то A — поглощающее.

Б. *Для того чтобы выпуклое множество* $A \subset E$ *было поглощающим,* (необходимо и) *достаточно, чтобы для каждого* $x \in E$ *существовало* $\alpha > 0$ *такое, что* $x \in \alpha A$. Действительно, как и в А, тогда $0 \in A$, поэтому при $\rho > \alpha > 0$ имеем $\alpha A \subset \alpha A + (\rho - \alpha) A = \rho A$ (1.К), так что $x \in \alpha A$ *влечет* $x \in \rho A$ *для всех* $\rho \geq \alpha$.

Определение 8. Пусть E — векторное пространство над К, где К = **R** или **C**. *Функционалом Минковского* поглощающего выпуклого множества $A \subset E$ называют функцию

$$p_A(x) = \inf\{\alpha \in \mathbf{R}: \quad \alpha > 0 \quad \text{и} \quad x \in \alpha A\}.$$

Примеры. 1. Очевидно, $p_E(x)=0$.

2. Пусть $A = \{x \in E: f(x) \leqslant 1\}$, где $f \in E^*$, если К = **R**, и $f \in E_{\mathbf{R}}^*$, если К = **C**. A выпукло. Пусть $\alpha > 0$; $x \in \alpha A$, или $\frac{x}{\alpha} \in A$, означает, что $f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leqslant 1$, т. е. $f(x) \leq \alpha$.

Так как для каждого $x \in E$ такое $\alpha > 0$ существует, то, согласно Б, A—поглощающее; при этом $p_A(x) = \max\{f(x), 0\}$.

3. Пусть $A = \{x \in E: |f(x)| \leqslant 1\}$, где $f \in E^*$. Так как

$$|f((1-\rho)x + \rho y)| \leqslant (1-\rho)|f(x)| + \rho|f(y)| \qquad (0 \leqslant \rho \leqslant 1),$$

то из $x, y \in A$ следует $[x, y] \subset A$, т. е. A выпукло. Пусть $\alpha > 0$; $x \in \alpha A$ означает, что $|f(x)| \leqslant \alpha$. Поэтому A, согласно Б, — поглощающее и $p_A(x) = |f(x)|$.

4. Пусть $E = l^\infty$ (или $l^\infty_{\mathbf{R}}$) и $B = \{x = (\xi_k) \in E: |\xi_k| \leqslant 1$ $(k = 1, 2, \ldots)\}$. Так как

$$|(1-\rho)\xi_k + \rho\eta_k| \leqslant (1-\rho)|\xi_k| + \rho|\eta_k| \qquad (0 \leqslant \rho \leqslant 1),$$

то B выпукло. $x \in \alpha B$, где $\alpha > 0$, означает, что $|\xi_k| \leqslant \alpha$ (k= 1, 2, .. .). Поэтому B —поглощающее и $p_B(x) = \sup\limits_k |\xi_k|$.

5. Пусть $E = l^1$ (или $l^1_{\mathbf{R}}$) и

$$B = \left\{x = (\xi_k) \in E: \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leqslant 1\right\}.$$

так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(1-\rho)\xi_k + \rho\eta_k| \leqslant (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \rho\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|$$
$$(0 \leqslant \rho \leqslant 1),$$

то B выпукло. $x \in \alpha B$, где $\alpha > 0$, означает, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leqslant \alpha$.

Поэтому B—поглощающее и $p_B(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$.

6. Пусть $E = l^p$ (или $l^p_{\mathbb{R}}$), где $1 < p < \infty$, и

$$B = \left\{ x = (\xi_k) \in E: \ \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \leqslant 1 \right\}.$$

Полагая в формуле 5.1.(2) $n = 2$, $\rho_1 = 1 - \rho$ $(0 < \rho < 1)$, $\rho_2 = \rho$, $t_1 = |\xi_k|$ и $t_2 = |\eta_k|$, получаем

$$|(1-\rho)\xi_k + \rho\eta_k|^p \leqslant [(1-\rho)|\xi_k| + \rho|\eta_k|]^p \leqslant$$
$$\leqslant (1-\rho)|\xi_k|^p + \rho|\eta_k|^p,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(1-\rho)\xi_k + \rho\eta_k|^p \leqslant (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p + \rho \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p.$$

Следовательно, B выпукло. $x \in \alpha$B, где $\alpha > 0$,, означает, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \leqslant \alpha^p$, т. е. $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \alpha$. Поэтому B — поглощающее и $p_B(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p}$.

В. $p_A(0) = 0$. *Если $x \neq 0$, то $p_A(x) = 0$ тогда и только тогда, когда весь луч $\overrightarrow{0x}$ содержится в A.* Действительно, $p_A(x) = 0$ означает, что $x \in \alpha A$ для всех $\alpha > 0$, т. е, $\rho x \in A$ для всех $\rho > 0$. При $x = 0$ это имеет место в силу А, а при $x \neq 0$ означает, что $\overrightarrow{0x} \subset A$.

Г. *Если $p_A(x) > 0$, то луч $\overrightarrow{0x}$ пересекает A по конечному интервалу $(0, x_A)$ или $(0, x_A]$, где $x_A \neq 0$ и $p_A(x) = x : x_A$, т. е. $x = p_A(x)\, x_A$.* Действительно, в силу 1Е, М $I = \overrightarrow{0x} \cap A$ —интервал; в силу А этот интервал не пуст и имеет началом 0; наконец, в силу В $I \neq \overrightarrow{0x}$. Таким образом, I — интервал вида $(0, x_A)$ или $(0, x_A]$, где $x_A \neq 0$. Но тогда $x \in \alpha A$ для тех и только тех $\alpha > 0$, для которых $x \in \overrightarrow{0x} \cap \alpha A = \alpha I = (0, \alpha x_A)$ или $(0, \alpha x_A]$, т. е. для которых $x : x_A < \alpha$ или $\leq \alpha$. Следовательно, $p_A(x) = x : x_A$.

Д. *Если $p_A(x) < \rho$, то $x \in \rho A$.* Действительно, в силу определения 8 существует $\alpha < \alpha$ такое, что $x \in \alpha A$; а отсюда в силу Б следует, что $x \in \rho A$.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $p(x)$ на E была функционалом Минковского некоторого поглощающего выпуклого множества $A \subset E$, необходимо и достаточно, чтобы она обладала свойствами:*

I. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ *для всех* $x \in E$ *и* $\lambda > 0$,
II. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ *для всех* x, $y \in E$,
III. $0 \leqslant p(x) < +\infty$ *для всех* $x \in E$,

Причем тогоа

$$\check{P} = \{x \in E:\ p(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E:\ p(x) \leqslant 1\} = \bar{P} \qquad (1)$$

и А может быть любым выпуклым множеством, удовлетворяющим этому условию.

Доказательство. 1) Пусть $p(x) = p_A(x)$, где A—поглощающее выпуклое множество. Так как при $\lambda > 0$ соотношения $x \in \alpha A$ и $\lambda x \in \lambda\alpha A$, а также $\alpha > 0$ и $\lambda\alpha > 0$ равносильны, то, полагая $\lambda\alpha = \beta$, имеем

$$\lambda p(x) = \lambda \inf\{\alpha \in \mathbf{R}:\ \alpha > 0 \text{ и } x \in \alpha A\} =$$
$$= \inf\{\beta \in \mathbf{R}:\ \beta > 0 \text{ и } \lambda x \in \beta A\} = p(\lambda x),$$

так что $p(x)$ обладает свойством I. Пусть, далее, x, y — произвольные фиксированные векторы из E. Положим $\alpha = p(x) + \varepsilon$, $\beta = p(y) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. В силу Д тогда $x \in \alpha A$, $y \in \beta A$, откуда в силу 1.К $x + y \in \alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A$ и, следовательно, $p(x+y) \leqslant \alpha + \beta = p(x) + p(y) + 2\varepsilon$; так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то заключаем отсюда, что $p(x)$ обладает свойством II. Из определения 8 непосредственно следует, что $p(x)$ обладает и свойством III, причем если $x \in A$, то $p(x) \leqslant 1$, так что $A \subset \bar{P}$. Наконец, согласно Д, $p(x) < 1$ влечет $x \in A$, так что $\check{P} \subset A$.

2) Обратно, пусть $p(x)$ — функция на E, обладающая свойствами I, II и III. В силу свойств II и I, для всех x, $y \in E$ и $\rho \in (0, 1)$ имеем

$$p((1-\rho)x + \rho y) \leqslant p((1-\rho)x) + p(\rho y) =$$
$$= (1-\rho)p(x) + \rho p(y);$$

отсюда следует, что если x, $y \in \check{P}$ (x, $y \in \bar{P}$), то и $[x, y] \subset \check{P}$ ($[x, y] \subset \bar{P}$), т. е. $\check{P}$ и $\bar{P}$ выпуклы. Далее, $p\left(\frac{x}{p(x)+1}\right) = \frac{p(x)}{p(x)+1} < 1$, откуда $\frac{1}{p(x)+1} x \in \check{P}$; следовательно, согласно Б, $\check{P}$ — поглощающее, а тогда и $\bar{P} \supset \check{P}$ — поглощающее. Наконец, пусть A — произвольное выпуклое множество, удовлетворяющее условию (1) (и потому, в силу первого включения, — поглощающее). Тогда для любых $x \in E$ и $\varepsilon > 0$, в силу свойства III, имеем, с одной стороны,

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in \check{P}$$

и, значит, $x \in [p(x)+\varepsilon]\check{P} \subset [p(x)+\varepsilon]A$,
откуда $p_A(x) \leqslant p(x)+\varepsilon$, а с другой, в силу Д,
$x \in [p_A(x)+\varepsilon]A \subset [p_A(x)+\varepsilon]\bar{P}$, откуда

$$p\left(\frac{x}{p_A(x)+\varepsilon}\right) \leqslant 1,$$

т. е. $p(x) \leqslant p_A(x)+\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то заключаем, что $p(x) = p_A(x)$. и теорема полностью доказана.
Для функционала Минковского, рассмотренного выше в примере 6, свойство II есть не что иное, как *неравенство Минковского*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right)^{1/p},$$

справедливое для всех $p > 1$ (и, очевидным образом, также для $p = 1$).
Е. *Если $p(x)$ — функционал Минковского множества А, то*
$\check{P} = \{x \in E:\ p(x) < 1\} = \mathring{A}$. Действительно, если $x \in \mathring{A}$, то существует $\varepsilon > 0$, для которого $(1+\varepsilon)x = x+\varepsilon x \in A$, откуда, в силу свойства I и (1), $(1+\varepsilon)p(x) =$
$= p((1+\varepsilon)x) \leqslant 1$, так что $x \in \check{P}$. Обратно, если $x \in \check{P}$, то в силу свойств I, II и III для каждого $t \in E$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $p(x+\varepsilon t) \leqslant p(x)+\varepsilon p(t) < 1$, откуда в силу (1)
$x+\varepsilon t \in A$, так что $x \in \mathring{A}$.
Ж. Отметим следующие свойства функционала Минковского, вытекающие из определения 8 или В и Г.

1° $p_{\rho A}(x) = \frac{1}{\rho}p_A(x)$ *для всех* $\rho > 0$.

2° *Если* $A \subset B$, *то* $p_A(x) \geqslant p_B(x)$.

3° *Если* $A = \bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha$ — *поглощающее множество, то*

$$p_A(x) = \sup_{\alpha \in A} p_{A_\alpha}(x).$$

8.14. Преднормы и нормы

Определение 9. Пусть E — векторное пространство над К, где К =**R** или **C**. *Преднормой* на E называется всякая вещественная функция $p(x)$ на E, обладающая свойствами:

I. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *для всех* $x \in E$ *и* $\lambda \in K$.

II. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ *для всех* $x,\ y \in E$.

Ядром преднормы $p(x)$ называется множество $K_p =$
$= \{x \in E:\ p(x) = 0\}$.

Так, функционалы Минковского, полученные в примерах 1 и 3 — 6 п° 6, — преднормы. В примере 1 $K_P = E$, в примере 3 $K_p = K_f$, в примерах 4 — 6 $K_p = \{0\}$.

А. Отметим некоторые простейшие свойства преднормы.

1° Беря в I $\lambda = 0$, получаем

$$p(0) = 0. \quad \textbf{(1)}$$

2° Из I следует также, что

$$p(\omega x) = p(x) \text{ для всех } \omega \in \mathrm{K} \text{ с } |\omega| = 1 \text{ и всех } x \in E; \quad \textbf{(2)}$$

в частности,

$$p(-x) = p(x) \text{ для всех } x \in E. \quad (3)$$

3° Беря в II $y = -x$ и принимая во внимание (1) и (3), получаем $0 \leq 2p(x)$, т. е.

$$p(x) \geqslant 0 \text{ для всех } x \in E. \quad \textbf{(4)}$$

Б. *Преднорму можно охарактеризовать как функционал Минковского поглощающего абсолютно выпуклого множества.* Действительно, пусть $p(x)$ — преднорма. Свойства I, II и (4) означают, что $p(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и, значит, является функционалом Минковского поглощающего выпуклого множества $A = \overline{P}\{x \in E:\ p(x) \leqslant 1\}$; а (2) показывает, что $\omega A = A$, если $|\omega|=1$, т. е. A—закругленное и, следовательно, в силу 2.А, абсолютно выпуклое. Обратно, если A — поглощающее абсолютно выпуклое множество, то $x \in \alpha A$ равносильно $\omega x \in \alpha A$, и потому $p_A(\omega x) = p_A(x)$, при любом $\omega \in$ К с $|\omega|=1$; но каждое $\lambda \in$ К представимо в виде $\lambda = |\lambda|\omega$, где $|\omega| = 1$ (а именно $\omega = \frac{\lambda}{|\lambda|}$, если $\lambda \neq 0$, и $\omega=1$, если $\lambda = 0$); пользуясь свойством I функции $p_A(x)$, установленным в теореме 1, получаем поэтому $p_A(\lambda x) = |\lambda| p_A(\omega x) = |\lambda| p_A(x)$, так что $p_A(x)$ обладает свойством I определения 9; следовательно (обладая по теореме 1 также свойством II), $p_A(x)$ — преднорма.

В. *Если* $p(x)$ *— преднорма, то*

$$|p(x) - p(y)| \leqslant p(x-y) \text{ для всех } x \in E. \quad (5)$$

Действительно, в силу свойства II $p(x) \leqslant p(x-y) + p(y)$, откуда

$$p(x) - p(y) \leqslant p(x-y). \quad \textbf{(5}_1\textbf{)}$$

Точно так же $p(y) \leqslant p(y-x) + p(x)$, откуда

$$p(y) - p(x) \leqslant p(y-x). \quad (5_2)$$

Но в силу (3) $p(y-x)=p(x-y)$. А тогда *(5_1)* и (5_2) в совокупности дают (5).

Г. *Ядро K_p преднормы p(x) совпадает с наибольшим подпространством, содержащимся в множестве* $\overline{P}=$ $=\{x\in E:\ p(x)\leqslant 1\}$ (функционалом Минковского которого, согласно сказанному в Б, служит *p(x)).* В самом деле, в силу (1) $K_p\neq \phi$. Далее, если, $x\in K_p$, то $p(\lambda x)=|\lambda|\,p(x)=0$, т. е. $\lambda x\in K_p$, для всех $\lambda\in$ K. Наконец, если $x,\ y\in K_p$, то $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)=0$, и так как $p(x+y)\geqslant 0$, то $p(x+y)=0$, т. е. $x+y\in K_p$. Таким образом, согласно 3.2.В, K_p — подпространство. С другой стороны, если $x\in F$, где F— подпространство, содержащееся в $\overline{P}$, то $\lambda x\in\overline{P}$, т. е. $|\lambda|\,p(x)=p(\lambda x)\leqslant 1$, для всех $\lambda\in$ K, откуда

$$p(x)\leqslant\frac{1}{\lambda}$$

для всех $\lambda>0$, и так как $p(x)\geq 0$, то $p(x)=0$, т. е. $x\in K_p$. Тем самым K_p — наибольшее подпространство, содержащееся в $\overline{P}$.

Определение 10. Пусть E— векторное пространство над К, где К = **R** или **C**. *Нормой* на E называют преднорму, имеющую своим ядром нулевое подпространство, т. е. норма — это функция $p(x)=\|x\|$ на E, удовлетворяющая следующим трем условиям:

1. $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ *для всех* $x\in E$ *и* $\lambda\in$ K.
2. $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ *для всех* $x,\ y\in E$.
3. $\|x\|=0$ *влечет* $x=0$.

Так, функционалы Минковского, полученные в примерах 4—6 п° 6, являются нормами.

Д. *Норму можно охарактеризовать как функционал Минковского поглощающего абсолютно выпуклого множества, пересекающего каждый луч* $\overrightarrow{0x}$ *по конечному интервалу.*

Е. *Преднорма p(x) постоянна на каждом смежном классе* $X\in E/K_p$ *и*

$$\dot{p}(X)=p(x), \tag{6}$$

где x—произвольный элемент из X, есть норма на E/K_p (что и оправдывает наименование *p (x)* преднормой). Действительно, если $x_1,\ x_2\in X$, то $x_1-x_2\in K_p$, т. е. $p(x_1-x_2)=0$, откуда в силу (5) следует, что $p(x_1)=p(x_2)$. Таким образом, $\dot{p}(X)$ определяется формулой (6) однозначно. Для любых $X,\ \ Y\in E/K_p$ и $\lambda\in$ K, выбирая произвольно $x\in X$ и $y\in$ К, имеем

$$\dot{p}(\lambda X)=p(\lambda x)=|\lambda|\,p(x)=|\lambda|\,\dot{p}(X)$$

и

$$\dot{p}(X+Y)=p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)=\dot{p}(X)+\dot{p}(Y).$$

Наконец, $\dot{p}(X)=0$ влечет $p(x)=0$, т. е. $x\in K_p$ и, значит, $X=K_P$. Тем самым $\dot{p}(X)$ —норма.

Мы будем называть $p(X)$ *факторнормой* преднормы $p(x)$ по ее ядру K_p-

9. *L*-ПРОСТРАНСТВА

9.1. Понятие *L*-пространства

Определение 1. Пусть E—векторное пространство над К и $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ — произвольное конечное семейство его гиперплоскостей с непустым пересечением $L=\bigcap_{k=1}^{n}X_k$. Совокупность всех гиперплоскостей пространства E, содержащих L, будет называться *пучком гиперплоскостей,* порожденным семейством $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, и обозначаться $[X_1, \ldots, X_n]$.

Определение 2. Пусть E — векторное пространство над К. *L-структурой* в E будет называться всякое непустое множество $\mathscr{L}$ его гиперподпространств, которое вместе с каждыми двумя входящими в него гиперподпространствами содержит весь порожденный ими пучок. Пространство E, наделенное L-структурой $\mathscr{L}$, будет называться *L-пространством* и обозначаться $E_{\mathscr{L}}$ или $(E, \mathscr{L})$. L-пространство $(E, \mathscr{L})$ и его структура $\mathscr{L}$ будут называться *отделимыми,* если для каждого $x_0 \in E\backslash\{0\}$ существует $H_0\in\mathscr{L}$ такое, что $x_0\notin H_0$, т. е. когда $\bigcap_{H\in\mathscr{L}}H=\{0\}$. Если $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$—L-структуры в E и $\mathscr{L}_1\subset\mathscr{L}_2$, то мы будем говорить, что $\mathscr{L}_2$ *мажорирует* $\mathscr{L}_1$. Если при этом $\mathscr{L}_1\neq\mathscr{L}_2$, то мы будем говорить, что $\mathscr{L}_2$ *сильнее* ,$\mathscr{L}_1$ или $\mathscr{L}_1$ *слабее* $\mathscr{L}_2$.

Примеры. 1. $\mathscr{L}_0=\{E\}$ есть *слабейшая* из всех L-структур в E. Если E — ненулевое, то $(E, \mathscr{L}_0)$ неотделимо.

2. Множество $\mathscr{L}_\omega$ всех гиперподпространств пространства E есть *сильнейшая* из всех L-структур в E. В силу следствия 3 (или 4) теоремы 1 § 3, $(E, \mathscr{L}_\omega)$ отделимо.

3. Так как единственное собственное гиперподпространство в K^1 — ненулевое, то в K^1 имеются только две различные L-структуры: $\mathscr{L}_0 = \{E\}$ и $\mathscr{L}_\omega = \{E, \{0\}\}$. Рассматривая K^1 как L-пространство, мы всегда будем считать его наделенным L-структурой $\mathscr{L}_\omega$ и тем самым — отделимым.

4. В нулевом векторном пространстве имеется только одна L-структура; $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_\omega$.

Теорема 1. _ *Пусть E — векторное пространство над* К, $\mathscr{L}$ — *L-структура в E и* $E' \subset\subset E^*$. *Тогда;*

1° *Совокупность* $E_{\mathscr{L}}'$ *всех линейных функций на E, ядра которых принадлежат* $\mathscr{L}$, *является векторным пространством.*

2° *Обратно, совокупность* $\mathscr{L}_{E'}$ *ядер всех* $f \in E'$ *является L-стрмктмрой в E.*

3° $E' = E_{\mathscr{L}_{E'}}'$.

4° $\mathscr{L}_{E_{\mathscr{L}}'} = \mathscr{L}$.

5° $\mathscr{L}$ *отделима тогда и только тогда, когда* $E_{\mathscr{L}}'$ *достаточно.*

Доказательство. 1°. По условию,

$$E_{\mathscr{L}}' = \{f \in E^*\colon K_f \in \mathscr{L}\}. \quad (1)$$

В силу 5,3.Б $E_{\mathscr{L}}' \neq \phi$. Далее, так как $K_{\lambda f} = K_f$ при $\lambda \neq 0$ и $K_{0f} = E \in \mathscr{L}$, то $f \in E_{\mathscr{L}}'$ влечет $\lambda f \in E_{\mathscr{L}}'$ для всех $\lambda \in$ К, Наконец, так как $K_{f_1+f_2} \supset K_{f_1} \cap K_{f_2}$, то при $K_{f_1}, K_{f_2} \in \mathscr{L}$ также $K_{f_1+f_2} \in \mathscr{L}$ и потому $f_1, f_2 \in E_{\mathscr{L}}'$ влечет $f_1 + f_2 \in E_{\mathscr{L}}'$. Следовательно, в силу 3.2.В $E_{\mathscr{L}}' \subset\subset E^*$.

2° По условию,

$$\mathscr{L}_{E'} = \{K_f\colon f \in E'\}. \quad \textbf{(2)}$$

Ядра K_f всех $f \in E'$ — гиперподпространства (5,3,А). Пусть $H_1, H_2 \in \mathscr{L}_{E'}$, так что $H_1 = K_{f_1}$, $H_2 = K_{f_2}$, где $f_1, f_2 \in E'$; пусть, далее, $H \in [H_1, H_2]$ и f—линейная функция на E с ядром $K_f = H$ (5.3,Б). Так как $K_f \supset K_{f_1} \cap K_{f_2}$, то в силу теоремы 4' § 5 $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in$ К. Поэтому $f \in E'$, $H = K_f \in \mathscr{L}_{E'}$ и, следовательно, $\mathscr{L}_{E'}$ — L-структура.

3° В силу (1) и (2) $E_{\mathscr{L}_{E'}}' = \{f \in E^*\colon K_f \in \mathscr{L}_{E'}\} = E'$.

4° В силу (2) и (1) $\mathscr{L}_{E_{\mathscr{L}}'} = \{K_f\colon f \in E_{\mathscr{L}}'\} = \mathscr{L}$.

5° Пусть $x_0 \in E\backslash\{0\}$. Если $\mathscr{L}$ отделима, то существует $H_0 \in \mathscr{L}$ такое, что $x_0 \notin H_0$. Но в силу 5.3.Б существует $f_0 \in E^*$, для которой $K_{f0} = H_0$; а тогда $f_0 \in E_{\mathscr{L}}'$ и $f_0(x_0) \neq 0$, т. е. $E_{\mathscr{L}}'$ достаточно. Обратно, если $E_{\mathscr{L}}'$ достаточно, то существует $f_0 \in E_{\mathscr{L}}'$ такое, что $f_0(x_0) \neq 0$. Но тогда $x_0 \notin K_{f_0}$, и так как $K_{f_0} \in \mathscr{L}$, то $\mathscr{L}$ отделима.

А. $E_{\mathscr{L}_1}' = E_{\mathscr{L}_2}'$ *тогда и только тогда, когда* $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$.
Действительно, первая часть утверждения очевидна. Если же $E_{\mathscr{L}_1}' = E_{\mathscr{L}_2}'$, то, по теореме 1, $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_{E_{\mathscr{L}_1}'} = \mathscr{L}_{E_{\mathscr{L}_2}'} = \mathscr{L}_2$.

Б. Согласно определению 3 § 6, достаточность $E_{\mathscr{L}}'$ означает отделимость дуальной пары $(E,\ E_{\mathscr{L}}')$. Поэтому из теоремы 1 и 6.2.А вытекает, что *L-структура* $\mathscr{L}$ *в Е отделима тогда и только тогда, когда* $E_{\mathscr{L}}'^{\perp} = \{0\}$ (где $E_{\mathscr{L}}'^{\perp}$ — аннулятор $E_{\mathscr{L}}'$ в E).

В. *L-структура* $\mathscr{L}$ *в Е вместе с каждым конечным семейством* $(H_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ *своих гиперподпространств содержит весь порожденный им пучок.* В самом деле, пусть $H \in [H_1, \ldots, H_n]$ и f — линейная функция на E с ядром $K_f = H$. По условию $H_k \in \mathscr{L}$, так что $H_k = K_{f_k}$, где $f_k \in E_{\mathscr{L}}'$ $(k = 1, \ldots, n)$. Так как $K_f \supset \bigcap_{k=1}^{n} K_{f_k}$, то по теореме 4' § 5 $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathrm{K}$. Следовательно в силу теоремы 1 $f \in E_{\mathscr{L}}'$, т. е. $H = K_f \in \mathscr{L}$.

Г. *В конечномерном векторном пространстве Е имеется только одна отделимая L-структура—сильнейшая.* Действительно, если $\mathscr{L}$ — отделимая L-структура в *E,* то, по теореме 1, E и $E_{\mathscr{L}}'$ образуют отделимую дуальную пару.

Но тогда в силу 6.1.Е' $E_{\mathscr{L}}' = E^*$, и следовательно, в силу 5.3.Б $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\omega}$.

Г'. Из теоремы 1, А и 6.1.Ж следует, что *в бесконечномерном векторном пространстве имеется бесконечное множество различных отделимых L-структур.*

Д. Пусть Λ_E — множество всех L-структур в векторном пространстве *E,* упорядоченное отношением $\mathscr{L}_1 \leqslant \mathscr{L}_2$, означающим, что $\mathscr{L}_2$ мажорирует $\mathscr{L}_1$ (так что $\mathscr{L}_1 < \mathscr{L}_2$, или, что то же, $\mathscr{L}_2 > \mathscr{L}_1$,

означает, что $\mathscr{L}_1$ слабее $\mathscr{L}_2$, или, что то же, $\mathscr{L}_2$ сильнее $\mathscr{L}_1$).
Каждое непустое множество $\Lambda \subset \Lambda_E$ *обладает в* Λ_E *нижней и верхней гранями, а именно*

$$\inf \Lambda = \bigcap_{\mathscr{L} \in \Lambda} \mathscr{L},$$

а $\sup \Lambda = \inf \Lambda'$, *где* Λ' *—множество всех верхних границ множества* Λ. Действительно, очевидно, $E \in \bigcap_{\mathscr{L} \in \Lambda} \mathscr{L}$, и если

$H_1, H_2 \in \bigcap_{\mathscr{L} \in \Lambda} \mathscr{L}$, так что $H_1, H_2 \in \mathscr{L}$ для всех $\mathscr{L} \in \Lambda$, то также $[H_1, H_2] \subset \mathscr{L}$ для всех $\mathscr{L} \in \Lambda$, т. е.

$$[H_1, H_2] \subset \bigcap_{\mathscr{L} \in \Lambda} \mathscr{L}.$$

С другой стороны, $\mathscr{L}_\omega \in \Lambda'$, такчто $\Lambda' \neq \varnothing$, а тогда, очевидно, inf Λ' = sup Λ.
Е. В силу теоремы 1 и А $\mathscr{L} \to E_{\mathscr{L}}'$ *есть отображение подобия множества* Λ_E *всех L-структур в векторном пространстве E, упорядоченного отношением* $\leq$, *на множество всех подпространств векторного сопряженного E*, упорядоченное по возрастанию.*
Ж. Из Е, в частности, следует, что *для любого непустого множества* $\Lambda \subset \Lambda_E$

$$E_{\inf \Lambda}' = \bigcap_{\mathscr{L} \in \Lambda} E_{\mathscr{L}}' \tag{3}$$

и

$$E_{\sup \Lambda}' = \mathscr{E} \bigcup_{\mathscr{L} \in \Lambda} E_{\mathscr{L}}' \tag{4}$$

9.2. L-отображения

А. *Прообраз* $\varphi^{-1}(G)$ *всякого гиперподпространства G пространства F относительно отображения* $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ *есть гипер-подпространство пространства E, притом собственное, если* $R_\varphi \not\subset G$, *и несобственное — в противном случае.* Действительно, если $R_\varphi \subset G$, то $\varphi^{-1}(G) = E$. Пусть $R_\varphi \not\subset G$, так что существует $x_0 \in E$

такое, что $y_0 = \varphi(x_0) \notin G$. Так как тогда гиперподпространство G — собственное, то $F = G + \mathscr{E}_{y_0} = G + \varphi(\mathscr{E}_{x_0})$. Поэтому, в силу 2.2.И, $E = \varphi^{-1}(F) = \varphi^{-1}(G) + \mathscr{E}_{x_0}$, и так как $x_0 \notin \varphi^{-1}(G)$, то φ^{-1} (G) — собственное гиперподпространство пространства *E*.

Б. *Прообраз* $\varphi^{-1}(\mathscr{M})$ *всякой L-структуры* $\mathscr{M}$, *заданной в пространстве F, относительно отображения* $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ *есть L-структура в E, причем*

$$E_{\varphi^{-1}(\mathscr{M})}' = \{g \circ \varphi;\ g \in F_{\mathscr{M}}'\}. \qquad \textbf{(1)}$$

Действительно, $H \in \varphi^{-1}(\mathscr{M})$ означает, что $H = \varphi^{-1}(G)$, где $G \in \mathscr{M}$. Но последнее означает, что $G = K_g$, где $g \in F_{\mathscr{M}}'$ (см. теорему 1), и тем самым $H = \varphi^{-1}(K_g) = \varphi^{-1}(g^{-1}(0)) = K_f$, где $f = g \circ \varphi$). Таким образом, $\varphi^{-1}(\mathscr{M}) = \{K_{g\circ\varphi};\ g \in F_{\mathscr{M}}'\}$.

Но, по теореме 1, $F_{\mathscr{M}}'$ —векторное пространство. Следовательно, в силу 3.2.В и $E' = \{g \circ \varphi;\ g \in F_{\mathscr{M}}'\}$ —векторное пространство, ибо если $g_1, g_2 \in F_{\mathscr{M}}'$, то $g_1 + g_2 \in F_{\mathscr{M}}'$, так что $g_1 \circ \varphi + g_2 \circ \varphi = (g_1 + g_2) \circ \varphi \in E'$, и так же $\lambda \cdot (g \circ \varphi) = (\lambda g) \circ \varphi \in E'$ для всех скаляров λ. А тогда, согласно теореме 1, $\varphi^{-1}(\mathscr{M}) = \mathscr{L}_{E'}$ — L-структура в E и $E' = E_{\mathscr{L}_{E'}}' = E_{\varphi^{-1}(\mathscr{M})}'$.

В. *Если* $\mathscr{M}$*—отделимая L-структура в F и* φ*—вложение E в F, то L-структура* $\varphi^{-1}(\mathscr{M})$ *в E отделима.* Действительно, пусть $x_0 \in E \setminus \{0\}$. Так как φ — вложение, то $y_0 = \varphi(x_0) \neq 0$. В силу отделимости $\mathscr{M}$ тогда существует $G \in \mathscr{M}$ такое, что $y_0 \notin G$. Но в таком случае $x_0 \notin \varphi^{-1}(G)$, и следовательно, $\varphi^{-1}(\mathscr{M})$ отделима.

Определение 3. Пусть $E_{\mathscr{L}}$ и $F_{\mathscr{M}}$—L-пространства над одним и тем же полем K, а φ — отображение *E* в *F*. φ называется *L-отображением* $E_{\mathscr{L}}$ в $F_{\mathscr{M}}$, если $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ и $\varphi^{-1}(\mathscr{M}) \leqslant \mathscr{L}$, т. е. $\varphi^{-1}(G) \in \mathscr{L}$ для каждого $G \in \mathscr{M}$. Совокупность всех L-отображений $E_{\mathscr{L}}$ в $F_{\mathscr{M}}$ будет обозначаться $L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$.

Примеры. 1. Пусть *E* и *F*—векторные пространства над одним и тем же полем K. Так как прообразом всякого подпространства пространства *F* относительно нулевого отображения *E* в *F* служит *E,* то *нулевое отображение E в F является L-отображением при наделении E и F любыми L- структурами.*

2. Пусть $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2 \in \Lambda_E$. Очевидно, $\mathscr{L}_1 \leqslant \mathscr{L}_2$ *тогда и только тогоа, когда тождественное отображение E на себя есть L-отображение* $(E, \mathscr{L}_2)$ *в* $(E, \mathscr{L}_1)$.

В частности, *тождественное отображение любого L-пространства на себя есть L-отображение.*

Г. Согласно определению 3, *f есть L-отображение* $E_{\mathscr{L}}$ *в* К[1] *тогда и только тогда, когда* $f \in \mathscr{L}(E, K^1) = E^{*\prime}$ *и* $K_f = f^{-1}(0) \in \mathscr{L}$, *т. е. когда* $f \in E_{\mathscr{L}}'$ (см. пример 3 п° 1).

Определение 4. L-отображения $E_{\mathscr{L}}$ в К[1] будут называться *линейными функционалами* на $E_{\mathscr{L}}$, а образованное ими векторное пространство $E_{\mathscr{L}}'$ — *пространством, сопряженным к* $E_{\mathscr{L}}$. Вместо $E_{\mathscr{L}}'$ мы будем писать также $(E, \mathscr{L})'$, а вместо *f (x),* где $x \in E$, $f \in E_{\mathscr{L}}'$, —также $\langle x, f \rangle$.

Д. *Композиция L-отображений есть L-отображение.* Действительно, пусть $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$, $\psi \in L(F_{\mathscr{M}}, G_{\mathscr{N}})$ и $\omega = \psi \circ \varphi$. В силу 4.3.Г $\omega \in \mathscr{L}(E, G)$. С другой стороны, для любого $H \in \mathscr{N}$ мы имеем $\psi^{-1}(H) \in \mathscr{M}$ и потому $\omega^{-1}(H) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(H)) \in \mathscr{L}$. Следовательно, $\omega \in L(E_{\mathscr{L}}, G_{\mathscr{N}})$.

Д'. Из Д, в частности, следует, что *если* $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$ *и* $g \in F_{\mathscr{M}}'$, *то* $g \circ \varphi \in E_{\mathscr{L}}'$.

Е. *Пусть* $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$. *Для того чтобы* $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$g \circ \varphi \in E_{\mathscr{L}}' \text{ для всех } g \in F_{\mathscr{M}}'. \qquad \textbf{(2)}$$

Действительно, необходимость условия (2) установлена в Д'. Если же (2) выполнено, то для произвольного $G = K_g \in \mathscr{M}$ имеем $\varphi^{-1}(G) = \varphi^{-1}(g^{-1}(0)) = K_f$, где $f = g \circ \varphi \in E_{\mathscr{L}}'$, и следовательно, $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$.

Ж. $L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$ *есть векторное пространство.* Действительно, $L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$ не пусто, ибо во всяком случае содержит нулевое отображение *E* в *F* (пример 1). Далее, если $\varphi_1, \varphi_2 \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$ и $f_1 = g \circ \varphi_1$, $f_2 = g \circ \varphi_2$, где $g \in F_{\mathscr{M}}'$, то, по Д', $f_1, f_2 \in E_{\mathscr{L}}'$, значит, и $f_1 + f_2 = g \circ (\varphi_1 + \varphi_2) \in E_{\mathscr{L}}'$, и так как это верно для всех $g \in F_{\mathscr{M}}'$, то, по Е, $\varphi_1 + \varphi_2 \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$. Совершенно так же, $\lambda\varphi_1 \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$ для всех скаляров λ, и остается применить 3.2.В.

3. *Пусть* $E_{\mathscr{L}}$ *и* $F_{\mathscr{M}}$ *—L-пространства,* $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ *и* $\varphi\hat{}$ *—приведение* φ, *так что* $\varphi = \pi \circ \varphi\hat{}$, *где* π *— каноническое вложение* $G = R_\varphi$ *в F.* $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi\hat{} \in L(E_{\mathscr{L}}, G_{\mathscr{N}})$, *где* $\mathscr{N} = \pi^{-1}(\mathscr{M})$. В самом деле, если $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$, то $\varphi\hat{}^{-1}(\mathscr{N}) =$

$$= \varphi\hat{}^{-1}(\pi^{-1}(\mathscr{M})) = \varphi^{-1}(\mathscr{M}) \leqslant \mathscr{L}, \text{ так что } \varphi\hat{} \in L(E_{\mathscr{L}}, G_{\mathscr{N}}).$$

Обратно, если $\varphi^{\cdot} \in L(E_{\mathscr{L}}, G_{\mathscr{N}})$, то в силу Д $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$, поскольку $\pi \in L(G_{\mathscr{N}}, F_{\mathscr{M}})$.

9.3. Конечномерные *L*-отображения

А. *Любое линейное отображение* φ *отделимого конечномерного L-пространства* $E_{\mathscr{L}}$ *в произвольное L-пространство* $F_{\mathscr{M}}$ *является L-отображением.* Действительно, согласно 1.Г $\mathscr{L}$ —сильнейшая L-структура в *E* и потому

$\varphi^{-1}(\mathscr{M}) \leqslant \mathscr{L}$.

Б. Из А, в частности, следует, что *всякая линейная функция на отделимом конечномерном L-пространстве* $E_{\mathscr{L}}$ *является линейным функционалом,* так что $E_{\mathscr{L}}' = E^*$. Принимая во внимание 5.2.А, заключаем, что *сопряженное к отделимому n-мерному L-пространству n-мерно.*

Б'. Так как, по 1.Г, всякая L-структура в конечномерном векторном пространстве мажорируется отделимой, то из Б, 1.Е и 3.7.И Г следует, что *сопряженное к конечномерному L-пространству* $E_{\mathscr{L}}$ *конечномерно, причем*

$\dim E_{\mathscr{L}}' \leqslant \dim E.$

Теорема 2. *Пусть E и F — векторные пространства над одним и тем же полем* K, $\mathscr{L}$ *— L-структура в E,*

$f_1, \ldots, f_n \in E_{\mathscr{L}}'$ *и* $y_1, \ldots, y_n \in F$. *Тогда*

1°
$$x \to \varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, y_k \qquad (1)$$

есть (очевидно, конечномерное) L-отображение $E_{\mathscr{L}}$ *в пространство F, наделенное любой L-структурой* $\mathscr{M}$.

2° *Если* $f_1, \ldots, f_n$ *линейно независимы, то* $R_\varphi = \mathscr{E}_{\mathscr{Y}}$, *где* $\mathscr{Y} = (y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, *так что если и* $y_1, \ldots, y_n$ *линейно независимы, то* φ *n-мерно.*

3° *Если* $E_{\mathscr{L}}$ *отделимо, то для каждого конечного репера* $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$ *можно выбрать* $f_1, \ldots, f_n \in E_{\mathscr{L}}'$ *так, чтобы* φ *переводило векторы* $x_1, \ldots, x_n$ *соответственно в векторы* $y_1, \ldots, y_n$ *и* E *— в* $\mathscr{E}_{\mathscr{Y}}$.

Доказательство. 1° Очевидно, $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$. Пусть $G = K_g \in \mathscr{M}$. Тогда

$$\varphi^{-1}(G)=\{x\in E\colon \varphi(x)\in G\}=$$
$$=\left\{x\in E\colon \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,g(y_k)=g(\varphi(x))=0\right\}=K_f,$$

где $f=\sum_{k=1}^{n} g(y_k)\,f_k\in E_{\mathscr{L}}'$. Но в таком случае $\varphi^{-1}(G)\in\mathscr{L}$,

и следовательно, $\varphi\in L(E_{\mathscr{L}},\ F_{\mathscr{M}})$.

2° Если $f_1,\ \ldots,\ f_n$ линейно независимы, то, по теореме 2 § 5, система линейных уравнений

$$f_k(x)=\lambda_k\qquad(k=1,\ \ldots,\ n)\quad\textbf{(2)}$$

совместна при любых $\lambda_k\in\mathbb{K}$, и следовательно, $R_\varphi=\mathfrak{E}_{\mathscr{Y}}$.

3° Если $E_{\mathscr{L}}$ отделимо, то, по теореме 1, $E_{\mathscr{L}}'$ достаточно и, следовательно, в силу 6.3.Г существуют $f_1,\ \ldots,\ f_n\in E_{\mathscr{L}}'$ такие, что

$$f_k(x_l)=\delta_{kl}\qquad(k,\ l=1,\ \ldots,\ n).$$

Но тогда для φ, построенного по этим f_k, имеем $\varphi(x_l)=y_l$ $(l=1,\ \ldots,\ n)$, откуда $\varphi(\mathfrak{E}_X)=\mathfrak{E}_{\mathscr{Y}}$; так как $\varphi(\mathfrak{E}_X)\subset R_\varphi\subset\mathfrak{E}_{\mathscr{Y}}$, то заключаем, что $R_\varphi=\mathfrak{E}_{\mathscr{Y}}$.

Теорема 2'. *Если $F_{\mathscr{M}}$ отделимо, то каждое n-мерное L-отображение $E_{\mathscr{L}}$ в $F_{\mathscr{M}}$ представило в виде* (1), *где $f_1, \ldots, f_n$ — линейно независимые линейные функционалы на $E_{\mathscr{L}}$, а $y_1, \ldots, y_n$ — линейно независимые векторы из F.*

Доказательство. Пусть φ—*n*-мерное L-отображе-ние $E_{\mathscr{L}}$ в $F_{\mathscr{M}}$ и $Y=\{y_1,\ \ldots,\ y_n\}$ — базис его противообласти $G = R$. Тогда для каждого $x\in E$ имеем

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n} g_k(\varphi(x))\,y_k=\sum_{k=1}^{n} g_k(\varphi^{\hat{}}(x))\,y_k,$$

Где $g_1, \ldots, g_n$—координатные линейные функции на *G,* порожденные базисом *Y* (5.1.В), а $\varphi^{\hat{}}$—приведение φ (см. 4.2.А). Положим $f_k=g_k\circ\varphi^{\hat{}}$, так что $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,y_k$.

Очевидно, $f_k\in E^*$. Далее, так как $G=\mathfrak{E}_Y$, то система (2) совместна при любых правых частях и, значит, $f_1,\ \ldots,\ f_n$, по теореме 2 § 5, линейно независимы. Наконец, пусть $\mathscr{N}=\pi^{-1}(\mathscr{M})$, где π—каноническое вложение *G* в *F,* так что в силу 2.3 $\varphi^{\hat{}}\in L(E_{\mathscr{L}},\ G_{\mathscr{N}})$. Так как $F_{\mathscr{M}}$ отделимо, то и $G_{\mathscr{N}}$ отделимо (2.В), а значит, поскольку G конечномерно, $g_k\in G_{\mathscr{N}}'$ (см. Б). Но тогда в силу 2.Д' $f_k\in E_{\mathscr{L}}'$.

9.4. *L*-структуры, определяемые линейными отображениями

А. Пусть $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$. Из определения L-отображения непосредственно следует:

1° Если $\mathscr{L}_\omega$ — сильнейшая L-структура в *E,* то $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}_\omega}, F_{\mathscr{M}})$ *при наделении F любой L-структурой* $\mathscr{M}$. Если $\mathscr{M}_0$ — слабейшая L-структура в *F,* то $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}_0})$ *при наделении E любой L-структурой* $\mathscr{L}$.

2°*Если* $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$, *то* $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}_1}, F_{\mathscr{M}_1})$ *при любых* $\mathscr{L}_1 \geqslant \mathscr{L}$ *и* $\mathscr{M}_1 \leqslant \mathscr{M}$.

3° $\varphi^{-1}(\mathscr{M})$ *есть слабейшая из L-структур* $\mathscr{L}$ *в E, при которых* $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$.

Б. *Пусть E — векторное пространство над К,* — *семейство L-пространств над* К *и* φ_α —*линейное отображение E в* E^α *для каждого* $\alpha \in \mathrm{A}$. $\mathscr{L} = \sup\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} \varphi_\alpha^{-1}(\mathscr{L}_\alpha)$ *есть слабейшая из L-структур* $\mathscr{L}'$ *в E, при которых все* $\varphi_\alpha \in L\left(E_{\mathscr{L}'}, E^\alpha_{\mathscr{L}_\alpha}\right)$.

Действительно, в силу А1° множество Λ всех таких L-структур $\mathscr{L}'$ не пусто. Далее, если $\mathscr{L}' \in \Lambda$, так что $\varphi_\alpha^{-1}(\mathscr{L}_\alpha) \leqslant \mathscr{L}'$ для всех $\alpha \in$ А, то и $\mathscr{L} \leqslant \mathscr{L}'$.

Наконец, $\mathscr{L} \in \Lambda$, так как $\varphi_\alpha^{-1}(\mathscr{L}_\alpha) \leqslant \mathscr{L}$ для всех $\alpha \in$ А.

В. *Пусть E—векторное пространство над* К, $\left(E^\alpha_{\mathscr{L}_\alpha}\right)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — *семейство L-пространств над* К, $\varphi_\alpha \in \mathscr{L}\left(E; E^\alpha\right)$ *для каждого* $\alpha \in$ А *и* $\mathscr{L}$ —*слабейшая из L-структур* $\mathscr{L}'$ *в E, при которых все* $\varphi_\alpha \in L\left(E_{\mathscr{L}'}, E^\alpha_{\mathscr{L}_\alpha}\right)$. *Тогда* $E_{\mathscr{L}}'$ *образовано всевозможными суммами вида* $\sum\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha \circ \varphi_\alpha$, *где* $f_\alpha \in E^{\alpha\,\prime}_{\mathscr{L}_\alpha}$ *и лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.* Действительно, так как, по Б, $\mathscr{L} = \sup\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} \varphi_\alpha^{-1}(\mathscr{L}_\alpha)$, то в силу 1.(4)

$$E_{\mathscr{L}}' = \mathscr{E} \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} E_{\varphi_\alpha^{-1}(\mathscr{L}_\alpha)}'$$

, т. е. $E_{\mathscr{L}}'$ образовано суммами линейных функционалов $g_\alpha \in E_{\varphi_\alpha^{-1}(\mathscr{L}_\alpha)}'$ при любых конечных наборах индексов α. Но в силу 2.Б $E_{\varphi_\alpha^{-1}(\mathscr{L}_\alpha)}' = \left\{f_\alpha \circ \varphi_\alpha \colon f_\alpha \in E^{\alpha\,\prime}_{\mathscr{L}_\alpha}\right\}$.

Г. *Пусть* $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in A}$ — *семейство L-структур в F,* $\mathcal{M}=\sup\limits_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$ (1.Д) *и* $\varphi\in L(E_{\mathcal{L}}, E_{\mathcal{M}_\alpha})$ *для всех* $\alpha\in A$. *Тогда* $\varphi\in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}})$. Действительно, по 2.Д', $f_\alpha=g_\alpha\circ\varphi\in E_{\mathcal{L}}'$ для всех $g_\alpha\in F_{\mathcal{M}_\alpha}'$ и $\alpha\in A$. Но в силу 1.(4) $F_{\mathcal{M}}'=\mathscr{E}\bigcup\limits_{\alpha\in A}F_{\mathcal{M}_\alpha}'$,

т. е. $F_{\mathcal{M}}'$ есть совокупность всевозможных сумм вида $g=\sum\limits_{k=1}^{n}g_{\alpha_k}$, где $g_{\alpha_k}\in F_{\mathcal{M}_{\alpha_k}}'$. Поэтому $f=g\circ\varphi\in E_{\mathcal{L}}'$ для всех $g\in F_{\mathcal{M}}'$, а отсюда, по 2.Е, следует, что $\varphi\in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}})$. Поскольку, обратно, из $\varphi\in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}})$ в силу А 2° следует, что $\varphi\in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}_\alpha})$ для всех $\alpha\in A$, то заключаем, что

$$L\left(E_{\mathcal{L}}, F_{\sup\limits_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha}\right)=\bigcap_{\alpha\in A}L\left(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}_\alpha}\right).$$

Д. *Пусть E— векторное пространство над* К, $\left(E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}\right)_{\alpha\in A}$ — *семейство L-пространств над* К, $\varphi_\alpha\in\mathscr{L}(E, E^\alpha)$ *для каждого* $\alpha\in A$ *и* $\mathscr{L}$ —*слабейшая из L-структур* $\mathscr{L}'$ *в E, при которых все* $\varphi_\alpha\in L\left(E_{\mathcal{L}'}, E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}\right)$. $\varphi\in L(F_{\mathcal{M}}, E_{\mathcal{L}})$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi_\alpha\circ\varphi\in L\left(F_{\mathcal{M}}, E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}\right)$ *для всех* $\alpha\in A$.

Действительно, в силу Б и Г $\varphi\in L(F_{\mathcal{M}}, E_{\mathcal{L}})$ тогда и только тогда, когда $\varphi\in L\left(F_{\mathcal{M}}, E_{\varphi_\alpha^{-1}(\mathcal{L}_\alpha)}\right)$, т. е. $\varphi^{-1}\left(\varphi_\alpha^{-1}(\mathscr{L}_\alpha)\right)\leqslant\mathcal{M}$

или, что то же, $\varphi_\alpha\circ\varphi\in L\left(F_{\mathcal{M}}, E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}\right)$, для всех $\alpha\in A$.

Е. Пусть $\varphi\in\mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{L}$—L-структура в *E* и Λ—множество всех L-структур $\mathcal{N}$ в *F,* для которых $\varphi\in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{N}})$. В силу *A1°* $\Lambda\neq\varnothing$. Так как $\varphi\in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{N}})$ для всех $\mathcal{N}\in\Lambda$, то в силу Г $\varphi\in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\sup\Lambda})$. Тем самым *среди L-структур* $\mathcal{N}$ *в F, для которых* $\varphi\in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{N}})$, *имеется сильнейшая;* мы будем обозначать ее $\overline{\varphi}(\mathscr{L})$. Очевидно, *для L-структуры* $\mathcal{N}$ *в F соотношения* $\mathcal{N}\leqslant\overline{\varphi}(\mathscr{L})$ *и* $\varphi^{-1}(\mathcal{N})\leqslant\mathscr{L}$ *равносильны.*

Е'. $\overline{\varphi}(\mathscr{L})$ *совпадает с совокупностью* $\mathcal{M}$ *всех тех гиперподпространств G пространства F, для которых* $\varphi^{-1}(G)\in\mathscr{L}$. Действительно, если $G_1, G_2\in\mathcal{M}$ и $G\in[G_1, G_2]$, то $\varphi^{-1}(G)\supset\varphi^{-1}(G_1)\cap\varphi^{-1}(G_2)$, и так как $\varphi^{-1}(G_1), \varphi^{-1}(G_2)\in\mathscr{L}$, а $\varphi^{-1}(G)$, в силу 2.А, есть гиперподпространство, то $\varphi^{-1}(G)\in\mathscr{L}$, т. е. $G\in\mathcal{M}$. Тем самым $\mathcal{M}$ — *L*-структура. Так как $\varphi^{-1}(\mathcal{M})\leqslant\mathscr{L}$, то $\mathcal{M}\leqslant\overline{\varphi}(\mathscr{L})$. Но, с другой стороны,

$\varphi^{-1}(\bar{\varphi}(\mathscr{L})) \leqslant \mathscr{L}$ и потому $\bar{\varphi}(\mathscr{L}) \leqslant \mathscr{M}$. Следовательно, $\bar{\varphi}(\mathscr{L}) = \mathscr{M}$.

В силу 5.3.А,Б отсюда вытекает, что линейная функция g на F принадлежит $F_{\bar{\varphi}(\mathscr{L})}'$ тогда и только тогда, когда $(g \circ \varphi)^{-1}(0) = \varphi^{-1}(K_g) \in \mathscr{L}$, т. е. когда $g \circ \varphi \in E_{\mathscr{L}}'$. Тем самым

$$F_{\bar{\varphi}(\mathscr{L})}' = \{g \in F^*:\ g \circ \varphi \in E_{\mathscr{L}}'\}. \quad \textbf{(1)}$$

Ж. *Пусть E—векторное пространство над* К, $(E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha})_{\alpha \in A}$ — *семейство L-пространств над К и* φ_α — *линейное отображение* E^α *в E для каждого* $\alpha \in$ A. $\mathscr{L} = \inf\limits_{\alpha \in A} \bar{\varphi}_\alpha(\mathscr{L}_\alpha)$ *есть сильнейшая из L-структур* $\mathscr{L}'$ *в E, при которых все* $\varphi_\alpha \in L(E^\alpha_{\mathscr{L}_\alpha}, E_{\mathscr{L}'})$.

Действительно, в силу А1° множество Λ всех таких L-структур $\mathscr{L}'$ не пусто. Далее, если $\mathscr{L}' \in \Lambda$, так что $\varphi_\alpha^{-1}(\mathscr{L}') \leqslant \mathscr{L}_\alpha$, или, что согласно Е равносильно этому, $\mathscr{L}' \leqslant \bar{\varphi}_\alpha(\mathscr{L}_\alpha)$, для всех $\alpha \in$ A, то $\mathscr{L}' \leqslant \mathscr{L}$. Наконец, $\mathscr{L} \in \Lambda$, так как $\mathscr{L} \leqslant \bar{\varphi}_\alpha(\mathscr{L}_\alpha)$, или, что по Е равносильно этому, $\varphi_\alpha^{-1}(\mathscr{L}) \leqslant \mathscr{L}_\alpha$ для всех $\alpha \in$ A.

З. *Пусть E—векторное пространство над* К, $(E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha})_{\alpha \in A}$— *семейство L-пространств над* К, $\varphi_\alpha \in \mathscr{L}(E^\alpha, E)$ *для каждого* $\alpha \in$ A *и* $\mathscr{L}$ —*сильнейшая из L-структур* $\mathscr{L}'$ *в E, при которых все* $\varphi_\alpha \in L(E^\alpha_{\mathscr{L}_\alpha}, E_{\mathscr{L}'})$. *Тогда*

$$E_{\mathscr{L}}' = \{f \in E^*:\ f \circ \varphi_\alpha \in E^{\alpha\prime}_{\mathscr{L}_\alpha} \ \textit{для всех}\ \alpha \in A\}.$$

Действительно, это непосредственно следует из Ж, (1) и 1,(3).

И. *Пусть* $(\mathscr{L}_\alpha)_{\alpha \in A}$ —*семейство L-структур в E,* $\mathscr{L} = \inf\limits_{\alpha \in A} \mathscr{L}_\alpha$ *и* $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}_\alpha}, F_{\mathscr{M}})$ *для всех* $\alpha \in$ A. *Тогда* $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$. В самом деле, так как $\varphi^{-1}(\mathscr{M}) \leqslant \mathscr{L}_\alpha$ для всех $\alpha \in$ A, то $\varphi^{-1}(\mathscr{M}) \leqslant \inf\limits_{\alpha \in A} \mathscr{L}_\alpha = \mathscr{L}$.

Поскольку, обратно, из $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$ следует, что $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}_\alpha}, F_{\mathscr{M}})$ для всех $\alpha \in$ A, то заключаем, что

$$L\left(E_{\inf\limits_{\alpha \in A} \mathscr{L}_\alpha}, F_{\mathscr{M}}\right) = \bigcap_{\alpha \in A} L(E_{\mathscr{L}_\alpha}, F_{\mathscr{M}}).$$

Отсюда, в частности, снова следует формула 1.(3).

К. *Пусть E—векторное пространство над* К, $(E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha})_{\alpha \in A}$ — *семейство L-пространств над* К, $\varphi_\alpha \in \mathscr{L}(E^\alpha, E)$ *для каждого* $\alpha \in$ A *и* $\mathscr{L}$—*сильнейшая из L-структур* $\mathscr{L}'$ *в E, при которых все*

$\varphi_\alpha \in L(E^\alpha_{\mathscr{L}_\alpha}, E_{\mathscr{L}'})$. $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi \circ \varphi_\alpha \in L(E^\alpha_{\mathscr{L}_\alpha}, F_{\mathscr{M}})$ *для всех* $\alpha \in$ A.

Действительно, в силу Ж и И $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$ тогда и только тогда, когда для всех $\alpha \in$ A имеем $\varphi \in L(E_{\bar{\varphi}_\alpha(\mathscr{L}_\alpha)}, F_{\mathscr{M}})$, т. е.

$\varphi^{-1}(\mathscr{M}) \leqslant \bar{\varphi}_\alpha(\mathscr{L}_\alpha)$, или, что по Е равносильно этому, $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi^{-1}(\mathscr{M})) \leqslant \mathscr{L}_\alpha$, иными словами, когда

$\varphi \circ \varphi_\alpha \in L(E^\alpha_{\mathscr{L}_\alpha}, F_{\mathscr{M}})$

для всех $\alpha \in$ A.

9.5. Замкнутые подпространства *L*-пространства

Определение 5. *Подпространством (аффинным многообразием)* L-пространства $E_{\mathscr{L}}$ будет называться любое подпространство (аффинное многообразие) векторного пространства *E; замкнутым подпространством* — всякое подпространство, являющееся пересечением гиперподпространств из $\mathscr{L}$; *замкнутым аффинным многообразием* — всякое аффинное многообразие, параллельное замкнутому подпространству.

А. *Класс всех замкнутых подпространств L-пространства* $E_{\mathscr{L}}$ *совпадает с классом всех замкнутых по Макки подпространств пространства E, рассматриваемого в дуальной паре с* $E_{\mathscr{L}}'$.

Действительно, $M \subset\subset E_{\mathscr{L}}$ замкнуто, по определению 5, тогда и только тогда, когда $M = \bigcap_{f \in N} K_f$, где $N \subset E_{\mathscr{L}}'$, или, когда $M = \bigcap_{f \in N} \{f\}^{\perp} = \left(\bigcup_{f \in N} \{f\}\right)^{\perp} = N^{\perp}$; но, согласно 6.2.И, равенство $M = N^{\perp}$ означает не что иное, как утверждение, что *M* — замкнутое по Макки подпространство пространства *E* (рассматриваемого в дуальной паре с $E_{\mathscr{L}}'$).

Б. Из определения 5 непосредственно следует:

Г *Замкнутые гиперподпространства в* $E_{\mathscr{L}}$ *—это гиперподпространства из* $\mathscr{L}$ *и только они; замкнутые гиперплоскости в* $E_{\mathscr{L}}$ *— это гиперплоскости, параллельные гиперподпространствам из* $\mathscr{L}$, *и только они.*

2° *Пересечение любого семейства замкнутых подпространств есть замкнутое подпространство .*

Из определений 5 и 1 следует также

3° $E_{\mathscr{L}}$ *отделимо тогда и только тогда, когда его нулевое подпространство замкнуто .*

В. *Прообраз замкнутого подпространства относительно L-отображения есть замкнутое подпространство.* Действительно, это непосредственно следует из определений 3 и 5, поскольку прообраз пересечения множеств относительно любого отображения есть пересечение их прообразов. В частности , *ядро всякого L-отображения в отделимое L-пространство замкнуто.*

В'. Из В и 4.1.В' следует, что *непустой прообраз замкнутого аффинного многообразия относительно L-отображения есть замкнутое аффинное многообразие.*

Г. Из А и 6.2.П' вытекает, что *сумма F+K замкнутого подпространства F L-пространства* $E_{\mathscr{L}}$ *и конечномерного подпространства К замкнута.*

Д. Из Г и Б 3° вытекает, что *всякое конечномерное подпространство отделимого L-пространства замкнуто.*

Е. *Замкнутые аффинные многообразия в* $E_{\mathscr{L}}$ *можно охарактеризовать как непустые пересечения замкнутых гиперплоскостей.* Действительно, если L — замкнутое аффинное многообразие в $E_{\mathscr{L}}$, то, по определению 5, $L=F+x_0$, где F — пересечение семейства $(H_\alpha)_{\alpha\in A}$ гиперподпространств

$H_\alpha \in \mathscr{L}$; но тогда $L = \bigcap\limits_{\alpha\in A}(H_\alpha + x_0)$, т. е. L является пересечением семейства замкнутых гиперплоскостей. Обратно, если $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$—семейство замкнутых гиперплоскостей с непустым пересечением L, то L есть аффинное многообразие, параллельное. пересечению гиперподпространств $H_\alpha \in \mathscr{L}$, которым параллельны X_α; тем самым L — замкнутое аффинное многообразие.

Е'. Из Е, в частности, следует, что *всякое непустое пересечение замкнутых аффинных многообразий есть замкнутое аффинное многообразие.*

Ж. Всякое подпространство F L-пространства $E_{\mathscr{L}}$ содержится по крайней мере в одном замкнутом подпространстве: самом E. Пересечение всех замкнутых подпространств, содержащих F, являющееся, согласно Б 2°, замкнутым подпространством, будет называться *замыканием* F и обозначаться $\overline{\overline{F}}$. В силу Б 2° $\overline{\overline{F}}$ *есть пересечение всех гиперподпространств из* $\mathscr{L}$, *содержащих F.* Принимая во внимание теорему 1, видим, что *если* $F \subset\subset E_{\mathscr{L}}$, *то* $\overline{\overline{F}}$ *есть пересечение ядер всех линейных функционалов из* $E_{\mathscr{L}}'$, *аннулирующихся на F, т. е. бианнулятор F в E, рассмат-*

риваемом в дуальной паре с $E_{\mathscr{L}}'$, и, значит, *совпадает с замыканием F в смысле, определенном в* 6.2.Л.

Ж'. Точно так же *пересечение всех замкнутых аффинных многообразий, содержащих данное аффинное многообразие L, является замкнутым аффинным многообразием;* оно будет называться *замыканием L* и обозначаться $\bar{L}$. В силу Е — Е', $\bar{L}$ *есть пересечение всех замкнутых гиперплоскостей, содержащих L.*

З. Из сказанного в Ж и Ж', в частности, следует:

1° *Аффинное многообразие (и, в частности, подпространство) L L-пространства замкнуто тогда и только тогда, когда* $\bar{L}=L$.

2° *Если X —незамкнутая гиперплоскость L-пространства* $E_{\mathscr{L}}$, *то* $\bar{X}=E$.

3° $\overline{\{0\}}=\bigcap\limits_{f\in E_{\mathscr{L}}'} K_f$.

И. *Операция замыкания аффинного многообразия перестановочна с переносами,* т. е. $\overline{L+x}=\bar{L}+x$ для всякого аффинного многообразия *L* в $E_{\mathscr{L}}$ и всякого $x \in E$. Действительно, будучи замкнутым аффинным многообразием, $\bar{L}$, по определению 5, параллельно замкнутому подпространству; но тогда также $\bar{L}+x$ параллельно ему и, значит, является замкнутым аффинным многообразием. Так как $L+x\subset\bar{L}+x$, то заключаем, что $\overline{L+x}\subset\bar{L}+x$. Но тогда, на том же основании, и $\bar{L}=\overline{(L+x)-x}\subset\overline{L+x}-x$, откуда $\bar{L}+x\subset\overline{L+x}$.

Аналогично доказывается, что *операция замыкания аффинного многообразия перестановочна с гомотетиями.*

9.6. L-подпространства

Определение 6. *L-подпространством* L-пространства $E_{\mathscr{L}}$ будет называться подпространство, наделенное слабейшей из L-структур, при которых его каноническое вложение в $E_{\mathscr{L}}$ есть L-отображение. Для обозначения того, что L-пространство $G_{\mathscr{N}}$ есть L-подпространство L-пространства $E_{\mathscr{L}}$, мы будем пользоваться записью $G_{\mathscr{N}}\subset\subset E_{\mathscr{L}}$.

А. Пусть $G_{\mathscr{N}}\subset\subset E_{\mathscr{L}}$ и π — каноническое вложение G в *E*. В силу 4.А3[0] $\mathscr{N}=\pi^{-1}(\mathscr{L})$, т. е. $\mathscr{N}$ *есть след* $\mathscr{L}\cap G$ *L-структуры* $\mathscr{L}$ *на G,* иными словами, $\mathscr{N}$ *образовано пересечениями с G всевозможных гиперподпространств из* $\mathscr{L}$.

А'. Очевидно, *само* $E_{\mathscr{L}}$ *и его нулевое подпространство, наделенное своей единственной L-структурой, являются в* $E_{\mathscr{L}}$

L-подпространствами.
Б. Из А следует, что *замкнутые подпространства в* $G_{\mathcal{N}} \subset\subset E_{\mathcal{L}}$ *— это пересечения с G всевозможных замкнутых подпространств L-пространства* $E_{\mathcal{L}}$.
В. В силу А и 2.В *всякое L-подпространство отделимого L-пространства отделимо.*
Г. *Если* $\varphi \in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}})$, $G_{\mathcal{N}} \subset\subset E_{\mathcal{L}}$ *и* φ_0*—сужение* φ *на G, то* $\varphi_G \in L(G_{\mathcal{N}}, F_{\mathcal{M}})$. Действительно, $\varphi_G = \varphi \circ \pi$, где π — каноническое вложение G в *E,* и так как $\pi \in L(G_{\mathcal{N}}, E_{\mathcal{L}})$, то $\varphi_G \in L(G_{\mathcal{N}}, F_{\mathcal{M}})$ в силу 2.Д.
Д. *Сопряженное к L-подпространству* $G_{\mathcal{N}}$ *L-пространства* $E_{\mathcal{L}}$ *совпадает с совокупностью сужений всевозможных линейных функционалов* $f \in E_{\mathcal{L}}'$ *на G.* В самом деле, пусть π — каноническое вложение G *в E.* Так как, по А, $\mathcal{N}' = \pi^{-1}(\mathcal{L})$, то в силу 2. Б

$$G_{\mathcal{N}}' = \{f \circ \pi:\ f \in E_{\mathcal{L}}'\}.$$

Но $f \circ \pi$ — сужение *f* на G.
Д'. В Д установлено, в частности, что, *каково бы ни было* $G_{\mathcal{N}} \subset\subset E_{\mathcal{L}}$, *каждый линейный функционал* $g \in G_{\mathcal{N}}'$ *обладает продолжением до линейного функционала на всем* $E_{\mathcal{L}}$.

9.7. Гомоморфизмы *L.*-пространств

А. *Если* $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ *—наложение и H—гиперподпространство пространства E, то* φ *(H) — гиперподпространство пространства F, притом собственное тогда и только тогда, когда H—собственное, а* $K \subset H$. Действительно, $\varphi(H) \subset\subset F$ (4.1.В). Пусть $\varphi(H) \subset G$, где $G \subset\subset F$. Тогда $H \subset \varphi^{-1}(\varphi(H)) \subset \varphi^{-1}(G)$, и так как $\varphi^{-1}(G) \subset\subset E$ (4.1.В), то $\varphi^{-1}(G) = H$ или *E,* откуда $G = \varphi(\varphi^{-1}(G)) = \varphi(H)$ или *F.* Тем самым φ *(H)* — гиперподпространство. При этом, если $H \neq E$ и $K_\varphi \subset H$, то, по 2.3.Г, $H = \varphi^{-1}(\varphi(H))$ и потому $\varphi(H) \neq F$. Обратно, если $\varphi(H) \neq F$, то $\varphi^{-1}(\varphi(H)) \neq E$ (ибо иначе мы имели бы $\varphi(H) = \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(H))) = \varphi(E) = F$), и так как $\varphi^{-1}(\varphi(H)) \subset\subset E$ (4.1.В), а $H \subset \varphi^{-1}(\varphi(H))$, то $H = \varphi^{-1}(\varphi(H))$, так что $H \neq E$ и, согласно 2.3.Г, $K_\varphi \subset H$.
Б. *Если* $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ *—наложение, то образ* $\varphi(\mathcal{L})$ *всякой L-структуры* $\mathcal{L}$, *заданной в E, совпадает с* $\bar{\varphi}(\mathcal{L})$, *т. е. является сильнейшей из L-структур* $\mathcal{M}'$ *в F, при которых* $\varphi \in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}'})$ (см. 4.Е). Действительно, если $H \in \mathcal{L}$, то, в

силу А, φ *(Н)* есть гиперподпространство; при этом $\varphi^{-1}(\varphi(H))$, как подпространство, содержащее *Н,* есть либо *Е,* либо *Н* и, значит, принадлежит $\mathscr{L}$; но тогда в силу 4.Е $\varphi(H)\in\overline{\varphi}(\mathscr{L})$. Таким образом, $\varphi(\mathscr{L})\subset\overline{\varphi}(\mathscr{L})$.

С другой стороны, так как $\varphi\in L(E_{\mathscr{L}},\ F_{\overline{\varphi}(\mathscr{L})})$, то $(\varphi^{-1}(\overline{\varphi}(\mathscr{L}))\leqslant\mathscr{L}$, откуда $\overline{\varphi}(\mathscr{L})=\varphi(\varphi^{-1}(\overline{\varphi}(\mathscr{L})))\subset\varphi(\mathscr{L})$.

Следовательно, $\varphi(\mathscr{L})=\overline{\varphi}(\mathscr{L})$.

Определение 7. Пусть $E_{\mathscr{L}}$ и $F_{\mathscr{M}}$ — L-пространства над одним и тем же полем К. $\varphi\in\mathscr{L}(E,\ F)$ называется *гомоморфизмом* $E_{\mathscr{L}}$ *на* $F_{\mathscr{M}}$, если φ — наложение и $\varphi(\mathscr{L})=\mathscr{M}$. Взаимно однозначный гомоморфизм $E_{\mathscr{L}}$ на $F_{\mathscr{M}}$ называется *изоморфизмом* $E_{\mathscr{L}}$ *на* $F_{\mathscr{M}}$. Ф называется *гомоморфизмом (изоморфизмом)* $E_{\mathscr{L}}$ *в* $\dot{F}_{\mathscr{M}}$, если φ^{*} —гомоморфизм (изомррфизм) $E_{\mathscr{L}}$ на R_{φ}, наделенное L-структурой L-подпространства L-пространства $F_{\mathscr{M}}$.

Пример. Так как подпространства векторного пространства *Е* инвариантны относительно гомотетий, то всякая гомотетия в *Е* есть изоморфизм *Е,* наделенного любой L-структурой, на себя.

В. Из Б следует, что $\varphi\in\mathscr{L}(E,\ F)$ *есть гомоморфизм* $E_{\mathscr{L}}$ *на* $F_{\mathscr{M}}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathscr{M}$ *есть сильнейшая изL-структур* $\mathscr{M}'$ *в F, при которых* $\varphi\in L(E_{\mathscr{L}},\ F_{\mathscr{M}'})$.

В'. Принимая во внимание 4. (1), заключаем из В, что $\varphi\in\mathscr{L}(E,\ F)$ *есть гомоморфизм* $E_{\mathscr{L}}$ *на* $F_{\mathscr{M}}$ *тогда и только тогда, когда*

$$F_{\mathscr{M}}'=\{g\in F^{*}:\ g\circ\varphi\in E_{\mathscr{L}}'\}.$$

Г. В силу 6.А $\varphi\in\mathscr{L}(E,\ F)$ *есть гомоморфизм* $E_{\mathscr{L}}$ *в* $F_{\mathscr{M}}$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi(\mathscr{L})=\mathscr{M}\cap R_{\varphi}$.

Д. Согласно Б *гомоморфизм* $E_{\mathscr{L}}$ *на* $F_{\mathscr{M}}$ *есть L-отображение.*

Д'. Более общим образом, *всякий гомоморфизм* $E_{\mathscr{L}}$ *в* $F_{\mathscr{M}}$ *есть L-отображение.* Действительно, это непосредственно следует из Д в силу 2.3.

Е. Из определения 7 в силу 4.3.Г следует, что *композиция гомоморфизма* $E_{\mathscr{L}}$ *на* $F_{\mathscr{M}}$ *и гомоморфизма* $F_{\mathscr{M}}$ *на* $G_{\mathscr{N}}$ *есть гомоморфизм* $E_{\mathscr{L}}$ *на* $G_{\mathscr{N}}$; точно так же *композиция изоморфизмов есть изоморфизм.*

Ж. *Пусть* φ *— гомоморфизм* $E_{\mathscr{L}}$ *на* $F_{\mathscr{M}}$ *и* $\psi\in\mathscr{L}(F,\ G)$. *Для того чтобы* ψ *было гомоморфизмом* $F_{\mathscr{M}}$ *на* $G_{\mathscr{N}}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\psi\circ\varphi$ *было гомоморфизмом* $E_{\mathscr{L}}$ *на* $G_{\mathscr{N}}$.

Действительно, необходимость условия следует из *E*. Обратно, если $\psi\circ\varphi$ — гомоморфизм $E_{\mathcal{L}}$ на $G_{\mathcal{N}}$, то $\psi(\mathcal{M})=\psi(\varphi(\mathcal{L}))=\mathcal{N}$ и, значит, ψ—гомоморфизм $F_{\mathcal{M}}$ *на* $G_{\mathcal{N}}$.

Ж'. *Пусть* φ—*гомоморфизм* $E_{\mathcal{L}}$ *на* $F_{\mathcal{M}}$ *и* $\psi\in\mathcal{L}(F, G)$. *Для того чтобы* $\psi\in L(F_{\mathcal{M}}, G_{\mathcal{N}})$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\psi\circ\varphi\in L(E_{\mathcal{L}}, G_{\mathcal{N}})$. Действительно, необходимость условия следует из Д и 2.Д. Обратно, если $\psi\circ\varphi\in L(E_{\mathcal{L}}, G_{\mathcal{N}})$, то $\varphi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{N}))\leqslant\mathcal{L}$, откуда $\psi^{-1}(\mathcal{N})\leqslant\varphi(\mathcal{L})=\mathcal{M}$ и, значит, $\psi\in L(F_{\mathcal{M}}, G_{\mathcal{N}})$.

3. *Если* φ— *гомоморфизм* $E_{\mathcal{L}}$ *на* $F_{\mathcal{M}}$ *и G — замкнутое подпространство L-пространства* $E_{\mathcal{L}}$, *содержащее* K_φ, *то* φ(G) — *замкнутое подпространство L-пространства* $F_{\mathcal{M}}$.

Действительно, так как

$$G=\bigcap_{\substack{H\in\mathcal{L}\\ H\supset G}} H,$$

а $H\supset G$ влечет $H\supset K_\varphi$, то в силу 2.3.Г и принимаяво внимание, что φ—наложение, имеем:

$$\varphi(G)=\varphi\left(\bigcap_{\substack{H\in\mathcal{L}\\ H\supset G}} H\right)=\varphi\left(\bigcap_{\substack{H\in\mathcal{L}\\ H\supset G}}\varphi^{-1}(\varphi(H))\right)=$$
$$=\varphi\left(\varphi^{-1}\left(\bigcap_{\substack{H\in\mathcal{L}\\ H\supset G}}\varphi(H)\right)\right)=\bigcap_{\substack{H\in\mathcal{L}\\ H\supset G}}\varphi(H),$$

и так как все $\varphi(H)\in\mathcal{M}$, то φ(G) замкнуто в $F_{\mathcal{M}}$.

И. *Если* φ — *гомоморфизм* $E_{\mathcal{L}}$ *на* $F_{\mathcal{M}}$, $G_{\mathcal{N}}\subset\!\!\!\subset E_{\mathcal{L}}$ *и* $H\supset K_\varphi$, *то сужение* φ *на G есть гомоморфизм* $G_{\mathcal{N}}$ *в* $F_{\mathcal{M}}$. В самом деле, так как $\mathcal{N}=\mathcal{L}\cap G$ (6.А), то, согласно Г, нужно доказать, что $\varphi(\mathcal{L}\cap G)=\varphi(\mathcal{L})\cap\varphi(G)$, т.е. $\varphi(H\cap G)=$ $=\varphi(H)\cap\varphi(G)$ для каждого $H\in\mathcal{L}$. Но если $y\in\varphi(H)\cap\varphi(G)$, то существуют $h\in H$ и $g\in G$ такие, что $y=\varphi(h)=\varphi(g)$. Последнее равенство показывает, что $h-g\in K_\varphi$, откуда $h\in K_\varphi+g\subset G+g=G$ и, значит, $h\in H\cap G$, так что $y\in\varphi(H\cap G)$. Тем самым $\varphi(H)\cap\varphi(G)\subset\varphi(H\cap G)$; обратное же включение всегда справедливо.

К. *Для того чтобы* $\varphi\in\mathcal{L}(E, F)$ *было изоморфизмом* $E_{\mathcal{L}}$ *на* $F_{\mathcal{M}}$, *необходимо и достаточно, чтобы* φ *было изоморфизмом E на F,* $\varphi\in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}})$ *и* $\varphi^{-1}\in L(F_{\mathcal{M}}, E_{\mathcal{L}})$. Действительно, третье из этих условий (включающее первое) означает, что $\varphi(\mathscr{L}) \leqslant \mathscr{M}$, а второе — что $\varphi^{-1}(\mathscr{M}) \leqslant \mathscr{L}$, откуда $\mathscr{M} = \varphi(\varphi^{-1}(\mathscr{M})) \leqslant \varphi(\mathscr{L})$; но тогда $\varphi(\mathscr{L}) = \mathscr{M}$ и φ— изоморфизм $E_{\mathscr{L}}$ на $F_{\mathscr{M}}$. Обратно, пусть φ — изоморфизм $E_{\mathscr{L}}$ на $F_{\mathscr{M}}$. Так как $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$, φ(*E*)= *F* и φ взаимно однозначно, то φ—изоморфизм *E* на *F*. Далее, так как $\varphi(\mathscr{L}) = \mathscr{M}$, то $\varphi^{-1} \in L(F_{\mathscr{M}}, E_{\mathscr{L}})$. Наконец, так как *К* = {0}, то в силу 2.3.Г $\varphi^{-1}(\varphi(H)) = H$ для всех $H \in \mathscr{L}$, т. е. $\varphi^{-1}(\mathscr{M}) = \varphi^{-1}(\varphi(\mathscr{L})) = \mathscr{L}$, откуда $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$.

К'. В К попутно доказано, что *если φ—изоморфизм $E_{\mathscr{L}}$ на $F_{\mathscr{M}}$, то φ^{-1} — изоморфизм $F_{\mathscr{M}}$ на $E_{\mathscr{L}}$*, так что изоморфизм L-пространств обладает свойством симметричности. Легко проверить, что он обладает также свойствами рефлексивности и транзитивности (см. Е и 3.1.Д). L-пространства $E_{\mathscr{L}}$ и $F_{\mathscr{M}}$, для которых существует изоморфизм $E_{\mathscr{L}}$ на $F_{\mathscr{M}}$ (а значит, и изоморфизм $F_{\mathscr{M}}$ на $E_{\mathscr{L}}$), будут называться *изоморфными,* для обозначения чего мы будем пользоваться прежним символом ~.

Л. *Для того чтобы $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$ было изоморфизмом $E_{\mathscr{L}}$ на $F_{\mathscr{M}}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало $\psi \in L(F_{\mathscr{M}}, E_{\mathscr{L}})$ такое, что $\psi \circ \varphi = \iota_E$ и $\varphi \circ \psi = \iota_F$, где ι_E и ι_F — тождественные отображения соответственно E и F на себя.* Действительно, необходимость условия следует из К (при $\psi=\varphi^{-1}$). Обратно, пусть условие выполнено. Согласно 4.1.3 φ— изоморфизм *E* на *F,* а $\psi=\varphi^{-1}$ — изоморфизм *F* на *E.* При этом, так как $\psi^{-1}(\mathscr{L}) \leqslant \mathscr{M}$, то $\mathscr{L} = \psi(\psi^{-1}(\mathscr{L})) \leqslant \psi(\mathscr{M})$ и, следовательно, $\varphi(\mathscr{L}) \leqslant \varphi(\psi(\mathscr{M})) = \mathscr{M}$.

М. *Если $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ —сильнейшие L-структуры в E и F, то всякое наложение* φ *пространства E на F есть гомоморфизм $E_{\mathscr{L}}$ на $F_{\mathscr{M}}$,* и с частности, *всякий изоморфизм E на F есть изоморфизм $E_{\mathscr{L}}$ на $F_{\mathscr{M}}$.* В самом деле, так как $\varphi^{-1}(\mathscr{M}) \leqslant \mathscr{L}$, а φ— наложение, то $\mathscr{M} \leqslant \varphi(\mathscr{L})$ и, значит, $\varphi(\mathscr{L}) = \mathscr{M}$.

Н. *Всякое линейное отображение* φ *отделимого конечномерного L-пространства $E_{\mathscr{L}}$ в отделимое L-пространство $F_{\mathscr{M}}$ есть гомоморфизм $E_{\mathscr{L}}$ в $F_{\mathscr{M}}$.* Действительно, в силу 1 .Г $\mathscr{L}$ есть сильнейшая L-структура в *E.* С другой стороны, так как $\mathscr{M}$ отделимо, а *R* конечномерно, то в силу 6.В и 1.Г $\mathscr{M} \cap R_{\varphi}$ есть сильнейшая L-структура в *R* . Следовательно, по М, $\varphi(\mathscr{L}) = \mathscr{M} \cap R_{\varphi}$, и остается применить Г.

Н'. Из Н, в частности, следует, что *если $E_{\mathscr{L}}$ и $F_{\mathscr{M}}$— отделимые конечномерные L-пространства одинаковой размерности над одним и тем же полем* К, *то всякий изоморфизм E на F есть* *изоморфизм* $E_{\mathscr{L}}$ *на* $F_{\mathscr{M}}$. Так как E и F изоморфны (3.7.Г), то заключаем, что *все отделимые конечномерные L-пространства одинаковой размерности над одним и тем же полем* К *изоморфны.*

9.8. Факторпространства *L*-пространства

Определение 8. *Факторпространством* $E_{\mathscr{L}}/G$ *L-пространства* $E_{\mathscr{L}}$ по его подпространству G называется фактор-пространство *E/G,* наделенное сильнейшей L-структурой $\mathscr{M}=\mathscr{L}/G$, при которой каноническое наложение ω пространства $E_{\mathscr{L}}$ на *E/G* есть L-отображение.

А. Согласно 7.Б $\mathscr{L}/G=\omega(\mathscr{L})$, так что *каноническое наложение L-пространства на его факторпространство есть гомоморфизм.*

А'. В силу А и 7. А
$\mathscr{L}/G=\{\omega(H);\ G\subset H\in\mathscr{L}\}$.

Б. $\varphi\in\mathscr{L}(E,\ F)$ *есть гомоморфизм* $E_{\mathscr{L}}$ *на* $F_{\mathscr{M}}$ *тогда и только тогда, когда отображение* $\overset{\&}{\varphi}$, *ассоциированное с* φ, *есть изоморфизм* $E_{\mathscr{L}}/K_{\varphi}$ *на* $F_{\mathscr{M}}$. Действительно, это непосредственно следует из 7.Ж в силу А и 4.2.В.

В. В силу А из 7.Ж' следует, что *для того, чтобы* $\varphi\in L(E_{\mathscr{L}}/G,\ F_{\mathscr{M}})$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi^{-1}(\mathscr{M})\leqslant\mathscr{L}$, то $\mathscr{M}=\varphi(\varphi^{-1}(\mathscr{M}))\leqslant\varphi(\mathscr{L})$;
$\varphi\in\mathscr{L}(E/G,\ F)$ *и* $\varphi\circ\omega\in L(E_{\mathscr{L}},\ F_{\mathscr{M}})$, *где* ω*—каноническое наложение E на E/G.* В частности (при $F_{\mathscr{M}}=\mathrm{K}^1$),
$(E_{\mathscr{L}}/G)'=\{h\in(E/G)^*:\ \ h\circ\omega\in E_{\mathscr{L}}'\}$.

Г. *Для того чтобы* $E_{\mathscr{L}}/G$ *было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы G было замкнуто в* $E_{\mathscr{L}}$. Действительно, пусть ω— каноническое наложение *E* на *E/G.* Если $E_{\mathscr{L}}/G$ отделимо, то (5.Б 3^{e}) ω(G) замкнуто в нем, и так как $\omega\in L(E_{\mathscr{L}},\ E_{\mathscr{L}}/G)$ (А и 7.Д), то (2.3.Г и 5.В) $G=\omega^{-1}(\omega(G))$ замкнуто в $E_{\mathscr{L}}$. Обратно, если G замкнуто в $E_{\mathscr{L}}$, то в силу А и 7.3 ω(G) = {0} замкнуто в $E_{\mathscr{L}}/G$ и, значит, $E_{\mathscr{L}}/G$ отделимо.

Д. Пусть $\overline{\{0\}}$ —замыкание нулевого подпространства {0} L-пространства $E_{\mathscr{L}}$ (см. 5.Ж). Согласно Г $E_{\mathscr{L}}/\overline{\{0\}}$ отделимо; введя обозначения $E/\overline{\{0\}}=\dot{E}$ и $\mathscr{L}/\overline{\{0\}}=\dot{\mathscr{L}}$, мы будем называть $E_{\mathscr{L}}/\overline{\{0\}}=\dot{E}_{\dot{\mathscr{L}}}$

отделимым L-пространством, ассоциированным с $E_{\mathscr{L}}$. В силу 5.Б 3° $\overline{\{0\}} = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $E_{\mathscr{L}}$ отделимо; в этом случае $\dot{E}_{\dot{\mathscr{L}}}$ отождествимо с $E_{\mathscr{L}}$.

Е. *Если* φ *— гомоморфизм* $E_{\mathscr{L}}$ *на* $F_{\mathscr{M}}$ *и* G *— замкнутое подпространство L-пространства* $E_{\mathscr{L}}$, *содержащее* K_{φ}, *то отображение* $\overline{\varphi}$, *относящее каждому классу* $G + x \in E/G$ *класс* $\varphi(G) + \varphi(x) \in F/\varphi(G)$, *есть изоморфизм* $E_{\mathscr{L}}/G$ *на* $F_{\mathscr{M}}/\varphi(G)$. Действительно, согласно 4.1.И $\overline{\varphi}$ есть изоморфизм E/G на $F/\varphi(G)$. Пусть ω — каноническое наложение E на E/G и $\overline{\omega}$ —каноническое наложение F на $F/\varphi(G)$. Как легко видеть, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\omega} & E/G \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\overline{\varphi} \\ F & \xrightarrow{\overline{\omega}} & F/\varphi(G) \end{array}$$

коммутативна, т. е. $\overline{\omega}\circ\varphi = \overline{\varphi}\circ\omega$, и потому $\mathscr{M}/\varphi(G) = \overline{\omega}(\mathscr{M}) = \overline{\omega}(\varphi(\mathscr{L})) = \overline{\varphi}(\omega(\mathscr{L})) = \overline{\varphi}(\mathscr{L}/G)$. Следовательно, $\overline{\varphi}$ — изоморфизм $E_{\mathscr{L}}/G$ на $F_{\mathscr{M}}/\varphi(G)$.

Ж, *Отделимое L-пространство, ассоциированное с* $E_{\mathscr{L}}/G$, *изоморфно* $E_{\mathscr{L}}/\overline{G}$, *где* $\overline{G}$ *— замыкание* G *в* $E_{\mathscr{L}}$. Действительно, пусть φ — каноническое наложение E на E/G. Так как, согласно А, φ— гомоморфизм $E_{\mathscr{L}}$ на $E_{\mathscr{L}}/G$, то в силу Е $E_{\mathscr{L}}/\overline{G} \sim (E_{\mathscr{L}}/G)/\varphi(\overline{G})$. На основании Д остается показать, что $\varphi(\overline{G}) = \overline{\varphi(G)}$ (ибо $\varphi(G)$— нулевое подпространство пространства E/G), Но так как $\overline{G}$ — замкнутое подпространство L-пространства $E_{\mathscr{L}}$, содержащее $K_{\varphi} = G$, то в силу 7.3 $\varphi(\overline{G})$ замкнуто. С другой стороны, если F—замкнутое подпространство факторпространства $E_{\mathscr{L}}/\bar{G}$, то $\varphi^{-1}(F)$ замкнуто (5.В); так как $\varphi^{-1}(F) \supset G$, то заключаем отсюда, что $\varphi^{-1}(F) \supset \overline{G}$ и, значит, $F = \varphi(\varphi^{-1}(F)) \supset \varphi(\overline{G})$. Следовательно, $\varphi(\overline{G}) = \overline{\varphi(G)}$.

9.9. Произведения и суммы *L*-пространств

Определение 9. *Произведением* $\prod_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_{\alpha}}$ *семейства L-пространств* $\left(E^{\alpha}_{\mathscr{L}_{\alpha}}\right)_{\alpha\in A}$ называется произведение

$$E = \prod_{\alpha \in A} E^{\alpha}$$

векторных пространств E^{α}, наделенное слабейшей L-структурой $\mathscr{L}$, при которой его проектирования pr_{α} на все $E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$ (см. 4.1, пример 6) являются L-отображениями. Произведение семейства отделимых одномерных L-пространств называется *произведением прямых.*

А. В силу 4.Б *если*

$$E_{\mathscr{L}} = \prod_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}, \text{ то } \mathscr{L} = \sup_{\alpha \in A} \mathrm{pr}_{\alpha}^{-1}(\mathscr{L}_\alpha).$$

Б. В силу 4.Д $\varphi \in L\left(F_{\mathcal{M}}, \prod_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}\right)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{pr}_{\alpha} \circ \varphi \in L\left(F_{\mathcal{M}}, E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}\right)$ *для всех* $\alpha \in A$.

В. Если $E_{\mathscr{L}} = \prod_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$, то $E_{\mathscr{L}}'$, в силу 4.В, образовано всевозможными суммами вида

$$\sum_{\alpha \in A} f_{\alpha} \circ \mathrm{pr}_{\alpha},$$

где

$$f_{\alpha} \in E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'$$

и лишь конечное число слагаемых отлично от нуля. Таким образом, *линейные функционалы* $\bar{f} \in \left(\prod_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}\right)'$ *— это функционалы, представимые в виде*

$$\langle x, \bar{f} \rangle = \sum_{\alpha \in A} \langle x_{\alpha}, f_{\alpha} \rangle, \quad (1)$$

где $x_{\alpha} = \mathrm{pr}_{\alpha} x$, $f_{\alpha} \in E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'$ *и лишь конечное число* $f_{\alpha} \neq 0$.

В'. *Отображение* $f \to \varphi(f) = \bar{f}$ *суммы* $\sum_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'$ *в* $E_{\mathscr{L}}'$, *определяемое для каждого* $f = (f_{\alpha}) \in \sum_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'$ *формулой* (1), *т. е. задаваемое равенством* $\varphi(f) = \sum_{\alpha \in A} f_{\alpha} \circ \mathrm{pr}_{\alpha}$, *есть изоморфизм* $\sum_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'$ *на* $E_{\mathscr{L}}'$.

Действительно, очевидно, φ линейно и, значит, в силу В, есть наложение. С другой стороны, если $\bar{f} = \varphi(f) = 0$, то, относя каждому $x_{\alpha} \in E^{\alpha}$ вектор $x^{\alpha} \in E$ такой, что

$$\mathrm{pr}_\beta x^\alpha = \begin{cases} x_\alpha & \text{при} \quad \beta = \alpha, \\ 0 & \text{при} \quad \beta \neq \alpha, \end{cases}$$

имеем, на основании формулы (1),

$$\langle x_\alpha, f_\alpha \rangle = \langle x^\alpha, \bar{f} \rangle = 0,$$

откуда $f = (f_\alpha) = 0$ и, значит, φ — вложение.

Г, $E_\mathcal{L} = \prod_{\alpha \in A} E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}$ *отделимо тогда и только тогда, когда отделимы все* $E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}$. В самом деле, пусть $x = (x_\alpha) \in E \setminus \{0\}$, так что $x_{\alpha_0} \neq 0$ для некоторого $\alpha_0 \in A$. Если все $E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}$ отделимы, то, по теореме 1, существует $f^{\alpha_0} \in E^{\alpha_0\,\prime}_{\mathcal{L}_{\alpha_0}}$ такое, что

$\langle x_{\alpha_0}, f^{\alpha_0} \rangle \neq 0$., Положив

$$f_\alpha = \begin{cases} f^{\alpha_0} & \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \\ 0 & \text{при} \quad \alpha \neq \alpha_0, \end{cases}$$

мы для линейного функционала $\bar{f} \in E_\mathcal{L}'$, определяемого формулой (1), будем иметь $\langle x, \bar{f} \rangle = \langle x_{\alpha_0}, f^{\alpha_0} \rangle \neq 0$. Следовательно, $E_\mathcal{L}$ отделимо. Обратно, пусть $x^{\alpha_0} \in E^{\alpha_0} \setminus \{0\}$, где α_0—произвольный фиксированный индекс из A. Положим $x_0 = (x_\alpha)$, где

$$x_\alpha = \begin{cases} x^{\alpha_0} & \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \\ 0 & \text{при} \quad \alpha \neq \alpha_0, \end{cases}$$

так что $x_0 \in E \setminus \{0\}$. Если $E_\mathcal{L}$ отделимо, то существует $\bar{f} \in E_\mathcal{L}'$ такое, что $\langle x_0, \bar{f} \rangle \neq 0$. Положив в (1) $x = x_0$, получим тогда $\langle x^{\alpha_0}, f_{\alpha_0} \rangle = \langle x_0, f \rangle \neq 0$. Следовательно, $E^{\alpha_0}_{\mathcal{L}_{\alpha_0}}$ отделимо.

Д. *Проектирование* $\mathrm{pr}_{\alpha 0}$ *произведения* $E_\mathcal{L} = \prod_{\alpha \in A} E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}$ *на каждое* $E^{\alpha_0}_{\mathcal{L}_{\alpha_0}}$ *является гомоморфизмом.* Действительно, в силу 7. В' достаточно доказать, что

$$E^{\alpha_0\,\prime}_{\mathcal{L}_{\alpha_0}} = \{ f^{\alpha_0} \in E^{\alpha_0 *} : f^{\alpha_0} \circ \mathrm{pr}_{\alpha_0} \in E_\mathcal{L}' \}.$$

Но если $f^{\alpha_0} \in E^{\alpha_0\,\prime}_{\mathcal{L}_{\alpha_0}}$, то $f^{\alpha_0} \circ \mathrm{pr}_{\alpha_0} \in E_\mathcal{L}'$ (2.Д′). Обратно, если $f^{\alpha_0} \in E^{\alpha_0 *}$ и $\bar{f} = f^{\alpha_0} \circ \mathrm{pr}_{\alpha_0} \in E_\mathcal{L}'$, то для каждого $x \in E$, у которого $x_\alpha = 0$ при всех $\alpha \neq \alpha_0$, в силу (1) имеем

$$\langle x_{\alpha_0}, f^{\alpha_0} \rangle = \langle x, \bar{f} \rangle = \langle x_{\alpha_0}, f_{\alpha_0} \rangle,$$

А так как здесь x_{α_0} может быть любым вектором из E^{α_0}, то

$f^{\alpha_0} = f_{\alpha_0}$, т. е. $f^{\alpha_0} \in E^{\alpha_0}_{\mathcal{L}_{\alpha_0}}{}'$.

Определение 10. *Суммой* $\sum_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}$ *семейства L-пространств*

$(E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha})_{\alpha \in A}$

называется сумма $E = \sum_{\alpha \in E} E^{\alpha}$ векторных пространств E^{α}, наделенная сильнейшей L-структурой $\mathcal{L}$, при которой инъектирования

in_α всех $E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}$ в E (см. 4.1, пример 7) являются L-отображениями.

Е. В силу 4.Ж, *если* $E_{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}$, *то* $\mathcal{L} = \inf_{\alpha \in A} \overline{\mathrm{in}}_\alpha(\mathcal{L}_\alpha)$.

Ж. В силу 4.К $\varphi \in L\left(\sum_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}, F_{\mathcal{M}}\right)$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi \circ \mathrm{in}_\alpha \in L(E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}, F_{\mathcal{M}})$ *для всех* $\alpha \in A$.

З. Пусть $E_{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}$. Тогда, в силу Ж или 4.З,

$$E_{\mathcal{L}}{}' = \{\bar{f} \in E^*: \bar{f} \circ \mathrm{in}_\alpha \in E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}{}' \text{ для всех } \alpha \in A\}. \quad (2)$$

Но каждое $x = (x_\alpha) \in E$ представимо в виде $x = \sum_{\alpha \in A} \mathrm{in}_\alpha x_\alpha$.

Поэтому для любого $\bar{f} \in E_{\mathcal{L}}{}'$ имеем

$$\langle x, \bar{f}\rangle = \sum_{\alpha \in A} \langle \mathrm{in}_\alpha x_\alpha, \bar{f}\rangle = \sum_{\alpha \in A} \langle x_\alpha, \bar{f} \circ \mathrm{in}_\alpha\rangle = \sum_{\alpha \in A} \langle x_\alpha, f_\alpha\rangle,$$

где в силу (2) $f = (f_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}{}'$. Обратно, каково бы ни было $f = (f_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}{}'$, функция $\bar{f}$ на E, определенная формулой

$$\langle x, \bar{f}\rangle = \sum_{\alpha \in A} \langle x_\alpha, f_\alpha\rangle, \quad \textbf{(1')}$$

очевидно, линейна; и так как, беря в (1')

$x = \mathrm{in}_\alpha x^\alpha$,

где x^α—произвольный вектор из E^{α}, имеем

$$\langle x^\alpha, \bar{f} \circ \mathrm{in}_\alpha\rangle = \langle \mathrm{in}_\alpha x^\alpha, \bar{f}\rangle = \langle x^\alpha, f_\alpha\rangle, \quad \textbf{(3)}$$

то $\bar{f} \circ \mathrm{in}_\alpha = f_\alpha \in E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}{}'$ для всех $\alpha \in A$ и, значит, в силу (2), $\bar{f} \in E_{\mathcal{L}}{}'$. Таким образом, *линейные функционалы—*

$\bar{f} \in \left(\sum_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}\right)'$

это функционалы, представимые в виде (1'), где $f = (f_\alpha)$ — произвольные векторы из $\prod_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}{}'$.

3'. *Отображение* $\bar{f} \to \psi(\bar{f}) = f$ *пространства* $E_{\mathcal{L}}'$ *в* $\prod_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}{}'$, *определяемое для каждого* $\bar{f} \in E_{\mathcal{L}}'$ *формулой (1'),*

т. е. задаваемое равенством $\psi(\bar{f}) = (\bar{f} \circ \mathrm{in}_\alpha)_{\alpha \in A}$, *есть изоморфизм* $E_{\mathcal{L}}'$ *на* $\prod_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}{}'$. Действительно, очевидно, ψ линейно и, значит, в силу 3 есть наложение. С другой стороны, если $\psi(\bar{f}) = 0$, то $\langle x, \bar{f}\rangle = \sum_{\alpha \in A} \langle x_\alpha, \bar{f} \circ \mathrm{in}_\alpha\rangle = 0$ для всех $x \in E_{\mathcal{L}}'$, откуда $\bar{f} = 0$ и, следовательно, ψ—вложение.

И. $E_{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}$ *отделимо тогда и только тогда, когда отделимы, все* $E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}$. Для доказательства нужно лишь дословно повторить рассуждение, проведенное в Г.

К. *Каждое инъектирование* in_α *является изоморфизмом* $E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}$ *в* $E_{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}$. Действительно, пусть π_α —каноническое вложение пространства $\mathrm{in}_\alpha E^\alpha$ в E. Так как $\mathrm{in}_\alpha = \pi_\alpha \circ \mathrm{in}_\alpha^*$, то из (3) следует, что для любых $x^\alpha \in E^\alpha$ и имеет $\bar{f} \in E_{\mathcal{L}}'$ место равенство

$$\langle \mathrm{in}_\alpha^* x^\alpha, \bar{f} \circ \pi_\alpha\rangle = \langle x^\alpha, f_\alpha\rangle, \quad \textbf{(3')}$$

где f_α —линейный функционал на $E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}$, порождаемый по формуле (1') функционалом $\bar{f}$. Из (3') вытекает, что $K_{\bar{f} \circ \pi_\alpha} = \mathrm{in}_\alpha(K_{f_\alpha})$. Так как в силу сказанного в 3 f_α пробегает всё $E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}{}'$, когда $\bar{f}$ пробегает $E_{\mathcal{L}}'$, то имеем поэтому

$$\mathcal{L} \cap \mathrm{in}_\alpha E^\alpha = \{K_{\bar{f}} \cap \mathrm{in}_\alpha E^\alpha : \bar{f} \in E_{\mathcal{L}}'\} = \{K_{\bar{f} \circ \pi_\alpha} : \bar{f} \in E_{\mathcal{L}}'\} =$$
$$= \mathrm{in}_\alpha^* (\{K_{f_\alpha} : f_\alpha \in E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}{}'\}) = \mathrm{in}_\alpha(\mathcal{L}_\alpha).$$

Но в силу 7.Г это означает, что вложение in_α есть изоморфизм $E^{\alpha}_{\mathcal{L}_\alpha}$ в $E_{\mathcal{L}}$.

Л. *Пусть* $\left(E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}\right)_{\alpha\in A}$ *— семейство L-пространств. Каноническое вложение* ω *суммы* $\sum\limits_{\alpha\in A} E^{\alpha}$ *в произведение* $\prod\limits_{\alpha\in A} E^{\alpha}$ (см. 3.4.3) *есть L-отображение* $\sum\limits_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$ *в* $\prod\limits_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$. Действительно, пусть ι_α — тождественное отображение E^{α} на себя. Так как, очевидно,

$$\mathrm{pr}_\delta\circ\omega\circ\mathrm{in}_\gamma=\begin{cases}\iota_\gamma, & \text{если } \delta=\gamma,\\ 0, & \text{если } \delta\neq\gamma,\end{cases}$$

то $\mathrm{pr}_\delta\circ\omega\circ\mathrm{in}_\gamma\in L\left(E^{\gamma}_{\mathscr{L}_\gamma},\ E^{\delta}_{\mathscr{L}_\delta}\right)$ для всех $\gamma,\ \delta\in A$ (см. п° 2, примеры 1 и 2). В силу Б отсюда вытекает, что $\omega\circ\mathrm{in}_\gamma\in$ $\in L\left(E^{\gamma}_{\mathscr{L}_\gamma},\ \prod\limits_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}\right)$ для всех $\gamma\in A$, а тогда в силу Ж

$$\omega\in L\left(\sum_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha},\ \prod_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}\right).$$

Л'. *Если* A *конечно, так что* $\sum\limits_{\alpha\in A} E^{\alpha}=\prod\limits_{\alpha\in A} E^{\alpha}$, *то L-структуры пространств*

$$\sum_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha} \quad и \quad \prod_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$$

совпадают.

В самом деле, в этом случае ω есть тождественное отображение, и тем самым изоморфизм, $\sum\limits_{\alpha\in A} E^{\alpha}$ на $\prod\limits_{\alpha\in A} E^{\alpha}$. При этом , согласно Л,

$\omega\in L\left(\sum\limits_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha},\ \prod\limits_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}\right)$. В силу же конечности A

$$\omega^{-1}=\omega=\sum_{\alpha\in A}\mathrm{in}_\alpha\circ\mathrm{pr}_\alpha,$$

так что

$$\omega^{-1}\in L\left(\prod_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha},\ \sum_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}\right)$$

(см. 2.Д, Ж), и остается применить7.К.

М. *L-структура суммы прямых*

$$E_{\mathscr{L}}=\sum_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$$

совпадает с сильнейшей L-структурой $\mathscr{L}_\omega$ *в* E (см. п° 1, пример 2). Действительно, согласно определению 10, $\mathscr{L}$ есть сильнейшая из L -структур в E, при которых все инъектирования in_α являются L -отображениями. Но в силу 3.А они — L -отображения при наделении E любой L -структурой.

M'. Обратно, *всякое L-пространство, обладающее сильнейшей L-структурой, изоморфно сумме прямых.* Действительно, пусть $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ — базис векторного пространства E над К (теорема 2 § 3) и φ — отображение, относящее каждому вектору $x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha a_\alpha \in E$ вектор $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in K^{(A)}$. Согласно определению 11 § 3 $K^{(A)} = \sum_{\alpha \in A} E^\alpha$, где все $E^\alpha = K^1$. Пусть $\mathcal{L}_\alpha$ —единственная отделимая L -структура в E^* (1.Г) и

$$K^{(A)}_{\mathcal{M}} = \sum_{\alpha \in A} E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}.$$

Очевидно, φ — изоморфизм E на $K^{(A)}$.
Так как $\mathcal{M}$, всилу M, —сильнейшая L -структура в $K^{(A)}$, то из 7.M следует, что φ — изоморфизм $E_{\mathcal{L}_\omega}$ на сумму прямых $K^{(A)}_{\mathcal{M}}$.

9. 10. Разложение *L* -пространства в прямую сумму его *L* -подпространств

Определение 11. L-пространство $E_{\mathcal{L}}$ будет называться *прямой суммой* своих L-подпространств $E^k_{\mathcal{L}_k}$ $(k=1, \ldots, n)$, если отображение φ произведения $\prod_{k=1}^{n} E^k$ в E, определяемое для каждого

$x = (x_k) \in \prod_{k=1}^{n} E^k$ формулой

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k, \tag{1}$$

есть изоморфизм

$\prod_{k=1}^{n} E^k_{\mathcal{L}_k}$ на $E_{\mathcal{L}}$;

Для обозначения этого мы будем пользоваться записью

$$E_{\mathcal{L}} = E^1_{\mathcal{L}_1} \oplus \ldots \oplus E^n_{\mathcal{L}_n}.$$

Если $E_{\mathcal{L}} = F_{\mathcal{M}} \oplus G_{\mathcal{N}}$, то каждое из подпространств *F, G* будет называться *L-дополнением* другого.

Теорема 3. *Для того чтобы* $E_{\mathcal{L}} = E^1_{\mathcal{L}_1} \oplus \ldots \oplus E^n_{\mathcal{L}_n}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $E = E^1 \oplus \ldots \oplus E^n$ *и порождаемые этим разложением проекторы* π_k *пространства E на его подпространства* E^k *били L-отображениями* $E_{\mathscr{L}}$ *в себя.*

Доказательство. 1° Необходимость. Так как отображение φ, определяемое формулой (1), есть изоморфизм $\prod_{k=1}^{n} E^k$ на *E,* то каждое $x \in E$ однозначно представимо в виде $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$, где $x_k \in E^k$ $(k = 1, \ldots, n)$, т. е. $E = E^1 \oplus \ldots \oplus E^n$. Пусть φ_k— каноническое вложение E^k в *E*.

Так как φ — изоморфизм $\prod_{k=1}^{n} E^k_{\mathscr{L}_k}$ на $E_{\mathscr{L}}$, то $\varphi^{-1} \in L\left(E_{\mathscr{L}}, \prod_{k=1}^{n} E^k_{\mathscr{L}_k}\right)$ (7.К) и потому $\pi_k = \varphi_k \circ \mathrm{pr}_k \circ \varphi^{-1} \in L(E_{\mathscr{L}}, E_{\mathscr{L}})$ (2.Д).

2° Достаточность. Так как $E = E^1 \oplus \ldots \oplus E^n$, то φ — изоморфизм $\prod_{k=1}^{n} E^k$ на *E*. Далее, $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \circ \mathrm{pr}_k$, поэтому (2.Д, Ж) $\varphi \in L\left(\prod_{k=1}^{n} E^k_{\mathscr{L}_k}, E_{\mathscr{L}}\right)$. Наконец, так как $\pi_k \in L(E_{\mathscr{L}}, E_{\mathscr{L}})$, то $\hat{\pi}_k \in L\left(E_{\mathscr{L}}, E^k_{\mathscr{L}_k}\right)$ (2.3). Но

$$\hat{\pi}_k = \mathrm{pr}_k \circ \varphi^{-1} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Следовательно,

$$\varphi^{-1} \in L\left(E_{\mathscr{L}}, \prod_{k=1}^{n} E^k_{\mathscr{L}_k}\right)$$

(9.Б), и остается применить 7.К.

А. *Если*

$$E_{\mathscr{L}} = E^1_{\mathscr{L}_1} \oplus \ldots \oplus E^n_{\mathscr{L}_n},$$

то определяемые этим разложением проекторы π_k *пространства E на его подпространства* E^k *являются гомоморфизмами* $E_{\mathscr{L}}$ *в себя.*

Действительно, это непосредственно следует из (2) и 7.Е, поскольку φ^{-1}—изоморфизм (7.К'), а pr_k —гомоморфизмы (9.Д).

Б. *Если* $E_{\mathscr{L}} = E^1_{\mathscr{L}_1} \oplus \ldots \oplus E^n_{\mathscr{L}_n}$ *отделимо, то каждое «прямое слагаемое»* E^k *замкнуто.* В самом деле, пусть ι — тождественное отображение *E* на себя. В силу теоремы 3 $\iota - \pi_k \in L(E_{\mathscr{L}}, E_{\mathscr{L}})$. Но по теореме 3 § 4 и 4.4.В $E^k = R_{\pi_k} = K_{\iota - \pi_k}$. Следовательно, E^k замкнуто (5.В).

В. *n-мерное отделимое L-пространство* $E_{\mathcal{L}}$ *есть прямая сумма своих n одномерных L-подпространств.* Действительно, пусть $\{a_1, \ldots, a_n\}$ — базис пространства E и $E^k = \mathscr{E}_{a_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$, так что $E = E^1 \oplus \ldots \oplus E^n$. Так как $E_{\mathcal{L}}$ — отделимое конечномерное L-пространство, то порождаемые этим разложением проекторы π_k в силу 3.А являются L-отображениями, и остается применить теорему 3.

Г. *Для того чтобы* $E_{\mathcal{L}} = F_{\mathcal{M}} \oplus G_{\mathcal{N}}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $E = F \oplus G$ *и каноническое отображение* φ *подпространства G на факторпространство E/F, относящее каждому вектору* $z \in G$ *содержащий его класс F+z, было изоморфизмом* $G_{\mathcal{N}}$ *на* $E_{\mathcal{L}}/F$. В самом деле, пусть $E_{\mathcal{L}} = F_{\mathcal{M}} \oplus G_{\mathcal{N}}$, π_F—проектор E на F параллельно G , π_G — проектор E на G параллельно F и ω — каноническое наложение E на E/F. Так как

$$\omega(x) = F + x = F + \pi_F(x) + \pi_G(x) = F + \pi_G(x) = \\ = F + \hat{\pi_G}(x),$$

то $\hat{\pi_G} = \varphi^{-1} \circ \omega$. Но ω — гомоморфизм $E_{\mathcal{L}}$ на $E_{\mathcal{L}}/F$ (8. А), а $\hat{\pi_G}$, в силу А, — гомоморфизм $E_{\mathcal{L}}$ на $G_{\mathcal{N}}$. Принимая во внимание, что φ^{-1}— изоморфизм E/F на G, заключаем на основании 7.Ж, что φ^{-1}— изоморфизм $E_{\mathcal{L}}/F$ на $G_{\mathcal{N}}$ и, значит, по 7.К', φ— изоморфизм $G_{\mathcal{N}}$ на $E_{\mathcal{L}}/F$. Обратно, пусть $E = F \oplus G$ и φ—изоморфизм $G_{\mathcal{N}}$ на $E_{\mathcal{L}}/F$. Всилу 7. К$\varphi^{-1} \in L(E_{\mathcal{L}}/F, G_{\mathcal{N}})$, и так как $\hat{\pi_G} = \varphi^{-1} \circ \omega$, то $\pi_G \in L(E_{\mathcal{L}}, E_{\mathcal{L}})$ (2.Д, 3). Так как тогда и $\pi_F = \iota - \pi_G \in L(E_{\mathcal{L}}, E_{\mathcal{L}})$, то на основании теоремы 3 заключаем, что $E_{\mathcal{L}} = F_{\mathcal{M}} \oplus G_{\mathcal{N}}$.

Д. *Если F—замкнутое подпространство L-пространства* $E_{\mathcal{L}}$, *имеющее конечную факторразмерность, то каждое подпространство G, дополнительное к F, является его L-дополнением.* Действительно, пусть $\mathcal{M} = \mathcal{L} \cap F$ и $\mathcal{N} = \mathcal{L} \cap G$, так что $F_{\mathcal{M}} \subset\subset E_{\mathcal{L}}$ и $G_{\mathcal{N}} \subset\subset E_{\mathcal{L}}$ (см. 6. А). Так как $E = F \oplus G$, то $F \cap G = \{0\}$. Поскольку F замкнуто, это показывает, что нулевое подпространство в $G_{\mathcal{N}}$ замкнуто (6.Б) и, следовательно, $G_{\mathcal{N}}$ отделимо (5.Б 3°).

Замкнутость F влечет также отделимость $E_{\mathcal{L}}/F$ (8.Г). Принимая во внимание конечномерность *E/F,* заключаем на основании 7.Н', что канонический изоморфизм G на *E/F* есть также изоморфизм $G_{\mathcal{N}}$ на $E_{\mathcal{L}}/F$, а тогда $E_{\mathcal{L}} = F_{\mathcal{M}} \oplus G_{\mathcal{N}}$ в силу Г.

Легко видеть, что проектор E на G параллельно F задается формулой

$$\pi_G(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(\omega(x))\, x_k = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, x_k,$$

Где $\{x_1, \ldots, x_n\}$—базис подпространства G, ω— каноническое отображение E на E/F и $g_1, \ldots, g_n$—кооодинатные линейные функции на E/F, определяемые базисом $X_1 = F + x_1, \ldots, X_n = F + x_n$. Опираясь па это, можно получить другое доказательство предложения Д.

Е. *Каждое конечномерное подпространство G отделимого L-пространства* $E_{\mathscr{L}}$ *обладает в* $E_{\mathscr{L}}$ *L-дополнением.* Действительно, пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$— базис подпространства G. Так как $E_{\mathscr{L}}$ отделимо, то в силу теоремы 2 существуют линейные функционалы $f_1, \ldots, f_n \in E_{\mathscr{L}}'$ такие, что

$$x \to \pi_G(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, x_k$$

есть L-отображение $E_{\mathscr{L}}$ в $E_{\mathscr{L}}$ с противообластью G, оставляющее векторы x_k, а потому и все векторы $x \in$ G на месте. Но это означает, что π_G есть проектор E на G, а тогда, по 4.4.В, $\pi_F = \iota - \pi_G$ есть проектор E на $F = K_{\pi_G}$ и, по теореме 2 § 4, $E = F \oplus G$. Так как π_G и π_F — L-отображения, то на основании теоремы 3 заключаем, что F есть L-дополнение к G.

10. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

10.1. Сопряженное L-пространство

Определение 1. *L-пространством, сопряженным к* $E_{\mathscr{L}}$, мы будем называть пространство $E_{\mathscr{L}}'$, наделенное L-структурой

$$\mathscr{L}' = \{K_{(x,\,\cdot)_{\mathscr{L}}} : x \in E\},$$

где $(\cdot\,,\ \cdot)_{\mathscr{L}}$ — сужение на $E \times E_{\mathscr{L}}'$ канонической билинейной функции, определенной на $E \times E^*$. *Вторым сопряженным к* $E_{\mathscr{L}}$ мы будем называть пространство $E_{\mathscr{L}}'' = E_{\mathscr{L}}'{}_{\mathscr{L}'}'$, сопряженное к $E_{\mathscr{L}}'{}_{\mathscr{L}'}$, наделенное L-структурой

$\mathscr{L}'' = \{K_{\langle f, \cdot \rangle_{\mathscr{L}'}}: f \in E_{\mathscr{L}}'\}$,

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{L}'}$— сужение на $E_{\mathscr{L}}' \times E_{\mathscr{L}}''$ канонической били-

нейной функции, определенной на $E_{\mathscr{L}}' \times E_{\mathscr{L}}'^{*}$.

А. Так как $K_{\langle x, \cdot \rangle_{\mathscr{L}}} = \{f \in E_{\mathscr{L}}': \langle x, f \rangle = 0\}$, то

$$\bigcap_{x \in E} K_{\langle x, \cdot \rangle_{\mathscr{L}}} = \{f \in E_{\mathscr{L}}': f(x) \equiv 0\} = \{0\}.$$

Таким образом, каково бы ни было $E_{\mathscr{L}}$, *сопряженное L-пространство* $E'_{\mathscr{L}\mathscr{L}'}$ *отделимо.*

Б. *Отображение* α, *относящее каждому вектору* $x \in E$ *линейную функцию* $\langle x, \cdot \rangle_{\mathscr{L}}$ *на* $E_{\mathscr{L}}'$, *есть гомоморфизм* $E_{\mathscr{L}}$ *на* $E_{\mathscr{L}}''{}_{\mathscr{L}''}$.

Действительно, линейность α очевидна. Далее, в силу теоремы 1 § 9

$$E_{\mathscr{L}}'' = \{\langle x, \cdot \rangle_{\mathscr{L}}: x \in E\}, \tag{1}$$

так что $\alpha(E_{\mathscr{L}}) = E_{\mathscr{L}}''$. Наконец, в силу (1), принимая во внимание, что

$$\langle f, \langle x, \cdot \rangle \rangle = \langle x, f \rangle,$$

имеем

$$K_{\langle f, \cdot \rangle_{\mathscr{L}'}} = \{\langle x, \cdot \rangle_{\mathscr{L}}: x \in E \text{ и } \langle x, f \rangle = 0\} =$$
$$= \alpha(\{x \in E: \langle x, f \rangle = 0\}) = \alpha(K_f),$$

откуда $\mathscr{L}'' = \{\alpha(K_f): f \in E_{\mathscr{L}}'\} = \alpha(\mathscr{L})$.

Мы будем называть α *каноническим отображением* $E_{\mathscr{L}}$ *на* $E_{\mathscr{L}}''{}_{\mathscr{L}''}$.

В. *Если* $E_{\mathscr{L}}$ *отделимо, то его каноническое отображение α, на* $E_{\mathscr{L}}''{}_{\mathscr{L}''}$ *есть изоморфизм.* Это следует из Б, поскольку

$$K_\alpha = \{x \in E: \langle x, \cdot \rangle_{\mathscr{L}} = 0\} = \bigcap_{f \in E_{\mathscr{L}}'} K_f, \tag{2}$$

так что при отделимости $E_{\mathscr{L}}$ $K_\alpha = \{0\}$.

В'. В общем же случае из (2) следует, что $K_\alpha = \overline{\{0\}}$ (9.5.3 3°), так что из Б в силу 9.8.Б, Д вытекает, что *если α—каноническое отображение* $E_{\mathscr{L}}$ *на* $E_{\mathscr{L}}''{}_{\mathscr{L}''}$, *то ассоциированное с α отображение* $\dot{\alpha}$ *есть изоморфизм ассоциированного с* $E_{\mathscr{L}}$ *отделимого L-пространства* $\dot{E}_{\dot{\mathscr{L}}}$ *на* $E_{\mathscr{L}}''{}_{\mathscr{L}''}$.

Г. Из А и В следует, что

$$E_{\mathscr{L}}'''{}_{\mathscr{L}'''} (= E_{\mathscr{L}}''{}_{\mathscr{L}''}{}'{}_{\mathscr{L}'''}) \sim E_{\mathscr{L}}'{}_{\mathscr{L}'}.$$

10.2. Сопряженное *L*-отображение

Определение 2. *Отображением, сопряженным к L-отображению* $\varphi \in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}})$, называется отображение φ' Пространства $F_{\mathcal{M}}'$ в $E_{\mathcal{L}}'$, относящее каждому $g \in F_{\mathcal{M}}'$ композицию $g \circ \varphi$ (принадлежащую $E_{\mathcal{L}}'$ вследствие 9.2.Д'), так что

$$\langle \varphi(x), g\rangle = \langle x, \varphi'(g)\rangle \text{ для всех } x \in E \text{ и } g \in F_{\mathcal{M}}'. \quad \textbf{(1)}$$

Примеры. 1. Если φ — нулевое отображение $E_{\mathcal{L}}$ в $F_{\mathcal{M}}$, то в силу (1) $\varphi'(g) = 0$ для всех $g \in F_{\mathcal{M}}'$, т. е. φ' = 0.

Таким образом, *отображение, сопряженное к нулевому,— нулевое.*

2. Пусть ι — тождественное отображение $E_{\mathcal{L}}$ на себя. Имеем

$$\langle x, \iota'(f)\rangle = \langle \iota(x), f\rangle = \langle x, f\rangle \text{ для всех } x \in E \text{ и } f \in E_{\mathcal{L}}',$$

откуда $\iota'(f) = f$ для всех $f \in E_{\mathcal{L}}'$. Таким образом, *отображением, сопряженным к тождественному отображению* $E_{\mathcal{L}}$ *на себя, служит тождественное отображение* $E_{\mathcal{L}}'$ *на себя.*

3. Пусть φ — *n*-мерное L-отображение $E_{\mathcal{L}}$ в $F_{\mathcal{M}}$, причем $F_{\mathcal{M}}$ отделимо. По теореме 2' §. 9

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k\rangle y_k \text{ для всех } x \in E,$$

где $\{y_1, \ldots, y_n\}$—базис R_φ, а $\{f_1, \ldots, f_n\}$—репер в $E_{\mathcal{L}}'$, т. е. (в обозначениях определения 1)

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \langle \cdot, f_k\rangle_{\mathcal{L}} y_k.$$

Для любых $x \in E$ и $g \in F_{\mathcal{M}}'$ имеем

$$\langle \varphi(x), g\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k\rangle y_k, g \right\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k\rangle \langle y_k, g\rangle = \left\langle x, \sum_{k=1}^{n} \langle y_k, g\rangle f_k \right\rangle,$$

а потому в силу (1)

$$\varphi'(g) = \sum_{k=1}^{n} \langle y_k, g\rangle f_k \text{ для всех } g \in F_{\mathcal{M}}',$$

т. е.

$$\varphi' = \sum_{k=1}^{n} \langle y_k, \cdot\rangle_{\mathcal{M}} f_k.$$

Так как векторы y_k линейно независимы, а $F_{\mathcal{M}}$ отделимо, то в силу теоремы 1 § 9, 6.1 .В и 4.2.Б линейные функции $\langle y_k, \cdot\rangle_{\mathcal{M}}$ линейно независимы. Согласно 1.Б они являются линейными функционалами на $F_{\mathcal{M}'\mathcal{M}'}$. Принимая во внимание теорему 2 §9, заключаем, что *отображение, сопряженное к n-мерному L-отображению в отделимое L-пространство, n-мерно.*

4. Пусть $G_{\mathcal{N}} \subset\subset E_{\mathcal{L}}$ и π — каноническое вложение *G* в *E*. Согласно определению 6 § 9 $\pi \in L(G_{\mathcal{N}}, E_{\mathcal{L}})$. При этом, обозначая через f_G сужение линейного функционала $f \in E_{\mathcal{L}}'$ на G, для всех $x \in G$ и $f \in E_{\mathcal{L}}'$ имеем

$$\langle x, f_G\rangle = \langle \pi x, f\rangle = \langle x, \pi' f\rangle,$$

так что $\pi' f = f_G$ для всех $f \in E_{\mathcal{L}}'$. Таким образом, *отображением, сопряженным к каноническому вложению L-подпространства $G_{\mathcal{N}}$ L-пространства $E_{\mathcal{L}}$ в $E_{\mathcal{L}}$, служит операция сужения линейных функционалов $f \in E_{\mathcal{L}}'$ на G.*

5. Пусть $G \subset\subset E_{\mathcal{L}}$ и ω—каноническое наложение *E* на *E/G*. Каждый линейный функционал *h* на $E_{\mathcal{L}}/G$ порождает линейный функционал $\omega'(h) = h \circ \omega$ на $E_{\mathcal{L}}$ (см. 9.8.А, 9.7.Д и 9.2.Д'). Мы будем называть $h \circ \omega$ *перенесением h на* $E_{\mathcal{L}}$. Таким образом, *отображением, сопряженным к каноническому наложению $E_{\mathcal{L}}$ на $E_{\mathcal{L}}/G$, служит операция перенесения линейных функционалов с $E_{\mathcal{L}}/G$ на $E_{\mathcal{L}}$.*

А. *Если* $\varphi \in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}})$, *то* $\varphi' \in L(F_{\mathcal{M}'\mathcal{M}'}, E_{\mathcal{L}'\mathcal{L}'})$. Действительно, линейность φ' очевидна. При этом для каждого $K_{\langle x, \cdot\rangle_{\mathcal{L}}} \in \mathcal{L}'$ в силу (1) имеем

$$\varphi'^{-1}(K_{\langle x,\cdot\rangle_{\mathcal{L}}}) = \{g \in F_{\mathcal{M}}' : \varphi'(g) \in K_{\langle x,\cdot\rangle_{\mathcal{L}}}\} =$$
$$= \{g \in F_{\mathcal{M}}' : \langle x, \varphi'(g)\rangle = 0\} = \{g \in F_{\mathcal{M}}' : \langle \varphi(x), g\rangle = 0\} =$$
$$= K_{\langle \varphi(x), \cdot\rangle_{\mathcal{M}}} \in \mathcal{M}',$$

так что $\varphi'^{-1}(\mathcal{L}') \leqslant \mathcal{M}'$.

Б. *Если* $F_{\mathcal{M}}$ *отделимо, то для каждого* $\psi \in L(F_{\mathcal{M}'\mathcal{M}'}, E_{\mathcal{L}'\mathcal{L}'})$ *существует однозначно определенное* $\varphi \in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}})$ *такое, что* ψ = φ'. Действительно, согласно 1.Б, каково бы ни было $x \in E$, $\langle x, \cdot\rangle_{\mathcal{L}} \in E_{\mathcal{L}}''$ и потому $\langle x, \psi(\cdot)\rangle_{\mathcal{L}} = \langle x, \cdot\rangle_{\mathcal{L}} \circ \psi \in F_{\mathcal{M}}''$. Тогда, согласно 1.В, вследствие отделимости $F_{\mathcal{M}}$ существует однозначно определенный вектор $y = \varphi(x) \in F$ такой, что

$$\langle \varphi(x), \cdot\rangle_{\mathcal{M}} = \langle x, \psi(\cdot)\rangle_{\mathcal{L}} \text{ для каждого } x \in E, \tag{2}$$

т. е.

$$\langle \varphi(x), g\rangle_{\mathcal{M}} = \langle x, \psi(g)\rangle_{\mathcal{L}} \text{ для всех } x \in E \text{ и } g \in F_{\mathcal{M}}'. \tag{1'}$$

Из (2) следует, что, каковы бы ни были $x_1, x_2 \in E$,

$\langle \varphi(x_1 + x_2) - \varphi(x_1) - \varphi(x_2), \cdot \rangle_{\mathcal{M}} = 0,$

откуда в силу отделимости $F_{\mathcal{M}}$ $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$; аналогично проверяется и однородность φ. Таким образом, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Так как (1′) означает, что $g \circ \varphi = \psi(g) \in E_{\mathcal{L}}'$ для всех $g \in F_{\mathcal{M}}'$, то на основании 9.2.Е заключаем, что $\varphi \in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}})$. Но тогда сравнение (1) и (1') показывает, что ψ = φ'.

В. Из А и Б следует, что *если* $F_{\mathcal{M}}$ *отделимо, то* $\varphi \to \varphi'$ *есть изоморфизм* $L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}})$ *на* $L(F_{\mathcal{M}}'{}_{\mathcal{M}'}, E_{\mathcal{L}}'{}_{\mathcal{L}'})$.

Г. Из равенства (1) непосредственно вытекает, что *если* $\varphi, \psi \in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}})$, *то*

$$(\varphi + \psi)' = \varphi' + \psi' \quad \textit{и} \quad (\lambda\varphi)' = \lambda\varphi'$$

для любого скаляра λ.

Д. *Если* $\varphi \in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}})$ *и* $\psi \in L(F_{\mathcal{M}}, G_{\mathcal{N}})$, *то*

$$(\psi \circ \varphi)' = \varphi' \circ \psi'.$$

Действительно, для всех $x \in E$ и $h \in G_{\mathcal{N}}'$ имеем

$$\langle \psi(\varphi(x)), h \rangle = \langle \varphi(x), \psi'(h) \rangle = \langle x, \varphi'(\psi'(h)) \rangle.$$

Е. В силу А вместе с $\varphi \in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}})$ определено также отображение φ'' пространства $E_{\mathcal{L}}''$ в $F_{\mathcal{M}}''$, сопряженное к φ', причем $\varphi'' \in L(E_{\mathcal{L}}''{}_{\mathcal{L}''}, F_{\mathcal{M}}''{}_{\mathcal{M}''})$., Мы будем называть φ'' *вторым сопряженным к* φ. Пусть α—каноническое отображение Е на $E_{\mathcal{L}}''$ и β — каноническое отображение *F* на $F_{\mathcal{M}}''$ *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ E_{\mathcal{L}}'' & \xrightarrow[\varphi'']{} & F_{\mathcal{M}}'' \end{array} \qquad \textbf{(3)}$$

коммутативна, т. е.

$$\varphi'' \circ \alpha = \beta \circ \varphi. \qquad (4)$$

В самом деле, для всех $x \in E$ и $g \in F_{\mathcal{M}}'$ имеем

$$\langle \varphi(x), g \rangle_{\mathcal{M}} = \langle x, \varphi'(g) \rangle_{\mathcal{L}} = \langle \varphi'(g), \alpha(x) \rangle_{\mathcal{L}'} = \langle g, \varphi''(\alpha(x)) \rangle_{\mathcal{M}'},$$

так что $\beta(\varphi(x)) = \varphi''(\alpha(x))$ для каждого $x \in E$. Из коммутативности диаграммы (3) явствует, что *если* $E_{\mathcal{L}}$ *и* $F_{\mathcal{M}}$ *отделимы, то отождествление, по* 1.В, *E с* $E_{\mathcal{L}}''$ *и F с* $F_{\mathcal{M}}''$ *сопровождается отождествлением* φ *с* φ'', так что тогда можно считать

$$\varphi'' = \varphi.$$

Ж. *Если* φ*—изоморфизм* $E_{\mathcal{L}}$ *на* $F_{\mathcal{M}}$, *то* φ'*—изоморфизм* $F_{\mathcal{M}}'{}_{\mathcal{M}'}$ *на* $E_{\mathcal{L}}'{}_{\mathcal{L}'}$, так что *изоморфные L-пространства* *обладают изоморфными сопряженными L-пространствами.* Действительно, так как $\varphi^{-1}\circ\varphi=\iota_E$ и $\varphi\circ\varphi^{-1}=\iota_F$, где ι_E и ι_F —тождественные отображения E и F на себя, то, в силу Д,

$$\varphi'\circ(\varphi^{-1})'=\iota_E' \quad \text{и} \quad (\varphi^{-1})'\circ\varphi'=\iota_F'. \tag{5}$$

Но ι_E' и ι_F' —тождественные отображения $E_{\mathcal{L}}'$ и $F_{\mathcal{M}}'$ на себя (пример 2). Принимая во внимание А и 9.7.Л, заключаем из (5), что φ'— изоморфизм $F_{\mathcal{M}}'{}_{\mathcal{M}'}$ на $E_{\mathcal{L}}'{}_{\mathcal{L}'}$. Одновременно мы установили, что *если* φ— *изоморфизм* $E_{\mathcal{L}}$ *на* $F_{\mathcal{M}}$, *то*

$$(\varphi^{-1})'=\varphi'^{-1}.$$

Ж'. *Если* φ' — *изоморфизм* $F_{\mathcal{M}}'{}_{\mathcal{M}'}$ *на* $E_{\mathcal{L}}'{}_{\mathcal{L}'}$, *а* $E_{\mathcal{L}}$ *и* $E_{\mathcal{M}}$ *отделили, то* φ — *изоморфизм* $E_{\mathcal{L}}$ *на* $F_{\mathcal{M}}$. Действительно, тогда в (4) α, β и φ'', в силу 1.В и Ж, — изоморфизмы, следовательно, $\varphi=\beta^{-1}\circ\varphi''\circ\alpha$ — изоморфизм (см. 9.7.Е, К').

3. Так как, по 1.В', $\dot{E}_{\mathcal{L}}\sim E_{\mathcal{L}}''{}_{\mathcal{L}''}$, то в силу Ж

$$\dot{E}_{\mathcal{L}}'{}_{\mathcal{L}'}\sim E_{\mathcal{L}}'''{}_{\mathcal{L}'''}.$$

Принимая во внимание 1.Г, заключаем, что

$$\dot{E}_{\mathcal{L}}'{}_{\mathcal{L}'}\sim E_{\mathcal{L}}'{}_{\mathcal{L}'}.$$

И. Равенство (1) показывает, что φ'(g) = 0 тогда и только тогда, когда <φ(*x*), *g*> = 0 для всех $x\in E$. Тем самым (здесь и дальше аннуляторы берутся относительно дуальной пары $(F,\ F_{\mathcal{M}}')$ или соответственно $(E,\ E_{\mathcal{L}}')$.)

$$K_{\varphi'}=R_\varphi^{\perp}, \tag{6}$$

откуда, на основании 9.5.Ж,

$$\overline{R}_\varphi=K_{\varphi'}^{\perp}. \tag{6'}$$

Из (6'), в частности, следует, что $R_\varphi\subset K_{\varphi'}^{\perp}$. На языке уравнений это означает, что *уравнение* φ(*x*) = *y может иметь решение, лишь если его правая часть y ортогональна ко всем решениям «сопряженного» однородного уравнения* φ'(g) = 0 .

К. Если в (1) φ(*x*) = 0 , то $\langle x,\ \varphi'(g)\rangle=0$ для всех g $\in F_{\mathcal{M}}'$. Тем самым

$$K_\varphi\subset R_{\varphi'}^{\perp}. \tag{7}$$

При отделимости $F_{\mathcal{M}}$ справедливо и обратное включение. В самом деле, если $x\in R_{\varphi'}^{\perp}$, то вследствие (1) $\langle\varphi(x),\ g\rangle=0$ для всех $g\in F_{\mathcal{M}}'$, т. е. $\varphi(x)\in F_{\mathcal{M}}'^{\perp}$; но отделимость $F_{\mathcal{M}}$ означает, по 9.1.Б, что $F_{\mathcal{M}}'^{\perp}=\{0\}$. Таким образом, *если*

$F_{\mathscr{M}}$ *отделимо, то*

$$K_\varphi = R_{\varphi'}{}^{\perp} \tag{8}$$

и, значит,

$$\overline{R}_{\varphi'} = K_\varphi{}^{\perp}. \tag{8'}$$

Л. Отметим некоторые следствия формул, полученных в И и К.

1° *Если* φ— *наложение, то* φ'—*-вложение.* Действительно, в силу (6) тогда $K_{\varphi'} = F^{\perp} = \{0\}$.

2° *Если* φ' — *вложение, то* $\overline{R}_\varphi = F$. Это следует из (6'), поскольку тогда $K_{\varphi'} = \{0\}$.

3° *Если* φ' — *наложение, а* $E_{\mathscr{L}}$ *отделимо, то* φ—*вложение.* Действительно, в силу (7) и 9.1.Б тогда $K_\varphi \subset E_{\mathscr{L}}{}'^{\perp} = \{0\}$.

4° *Если* φ—*вложение, а* $F_{\mathscr{M}}$ *отделимо, то* $\overline{R}_{\varphi'} = E_{\mathscr{L}}{}'$. Это следует из (8'), поскольку тогда $K_\varphi = \{0\}$.

Теорема 1. $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$ *есть гомоморфизм* $E_{\mathscr{L}}$ *в* $F_{\mathscr{M}}$ *тогда и только тогда, когда* $R_{\varphi'} = K_\varphi{}^{\perp}$. *Таким образом, для того чтобы* φ *было гомоморфизмом* $E_{\mathscr{L}}$ *в* $F_{\mathscr{M}}$, *необходимо и при отделимости* $F_{\mathscr{M}}$ *достаточно, чтобы* $R_{\varphi'}$ *было замкнуто в* $E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'}$.

Доказательство. Из равенства (1) следует, что $\varphi(x) \in K_g$ тогда и только тогда, когда $x \in K_{\varphi'(g)}$. Тем самым

$$\varphi(K_{\varphi'(g)}) = K_g \cap R$$

и, значит,

$$\mathscr{M} \cap R_\varphi = \{K_g \cap R_\varphi:\ g \in F_{\mathscr{M}}{}'\} = \varphi(\mathscr{L}_{R_{\varphi'}}), \tag{9}$$

где

$$\mathscr{L}_{R_{\varphi'}} = \{K_f:\ f \in R_{\varphi'}\}.$$

С другой стороны, в силу 9.7.А $\varphi(K_f)(= \varphi^{\cdot}(K_f)) \neq R_\varphi$ тогда и только тогда, когда $K_f \supset K_{\varphi^{\cdot}} = K_\varphi$ и $f \neq 0$, т. е. когда $f \in K_\varphi{}^{\perp} \setminus \{0\}$; следовательно,

$$\varphi(\mathscr{L}) = \{\varphi(K_f):\ f \in E_{\mathscr{L}}{}'\} = \{\varphi(K_f):\ f \in K_\varphi{}^{\perp}\} = \varphi(\mathscr{L}_{K_\varphi{}^{\perp}}),$$

где

$$\mathscr{L}_{K_\varphi{}^{\perp}} = \{K_f:\ f \in K_\varphi{}^{\perp}\}.$$

Принимая во внимание . 9.7.Г и (9), заключаем, что φ есть гомоморфизм $E_{\mathscr{L}}$ в $F_{\mathscr{M}}$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi(\mathscr{L}_{K_\varphi{}^{\perp}}) = \varphi(\mathscr{L}_{R_{\varphi'}}). \tag{10}$$

Однако (10) имеет место, лишь если

$$K_\varphi{}^\perp = R_{\varphi'}. \tag{11}$$

Действительно, из (10) следует, что для каждого $f \in K_\varphi{}^\perp$ существует $f_1 \in R_{\varphi'}$ такое, что
$\varphi(K_f) = \varphi(K_{f_1});$

при этом в силу 9.7.А и 5.3.Б

$$\varphi(K_f)\,(=\varphi^*\,(K_f)) = K_{g'} \tag{12}$$

где $g \in R_\varphi^*$. Но из (12) следует, что $f(x) = 0$ влечет $g(\varphi\,(x)) = 0$, так что в силу 5.3.Г'

$$g \circ \varphi = \lambda f. \tag{13}$$

Так как и $\varphi(K_{f_1}) = K_{g'}$ то, совершенно так же,

$$g \circ \varphi = \lambda_1 f_1. \tag{13$_1$}$$

При этом, если *$f \neq 0$,* то в силу 9.7.А (поскольку $K_f \supset K_\varphi$) $\varphi(K_f)$— собственное гиперподпространство в R_φ и из (12) следует, *что $g \neq 0$,* так что в (13) *$\lambda \neq 0$.* Сравнение (13) и(13_1) показывает тогда, что $f = \frac{\lambda_1}{\lambda} f_1$ и, значит, $f \in R_{\varphi'}$. Тем самым (10) влечет $K_\varphi{}^\perp \subset R_{\varphi'}$; обратное же включение вытекает из (7) в силу 6.2.Б1°, 2°. Таким образом, φ есть гомоморфизм $E_{\mathcal{L}}$ в $F_{\mathcal{M}}$ тогда и только тогда, когда $R_{\varphi'} = K_\varphi{}^\perp$. Так как $K_\varphi{}^\perp$ замкнуто, то заключаем, что если φ— гомоморфизм $E'_{\mathcal{L}}$ в $F_{\mathcal{M}}$, то $R_{\varphi'}$ замкнуто. Обратно, если $R_{\varphi'}$ замкнуто, а $F_{\mathcal{M}}$ отделимо, то (8'), имеющее место при отделимости $F_{\mathcal{M}}$, совпадает с (11) и, следовательно, φ — гомоморфизм $E_{\mathcal{L}}$ в $F_{\mathcal{M}}$.

Следствие. *Для того чтобы* φ *было изоморфизмом* $E_{\mathcal{L}}$ *в* $F_{\mathcal{M}}$, *необходимо и при отделимости* $E'_{\mathcal{L}}$ *достаточно, чтобы* φ' *было наложением.*

Доказательство. Если φ — изоморфизм $E_{\mathcal{L}}$ в $F_{\mathcal{M}}$, то в силу теоремы 1 имеем: $R_{\varphi'} = K_\varphi{}^\perp = \{0\}^\perp = E_{\mathcal{L}}'$. Обратно, если φ' — наложение, а $E_{\mathcal{L}}$ отделимо, то по Л3° φ — вложение, а так как тогда $R_{\varphi'} = E_{\mathcal{L}}' = K_\varphi{}^\perp$, то в силу теоремы 1 φ—изоморфизм $E_{\mathcal{L}}$ в $F_{\mathcal{M}}$.

Замечание. Пусть $\varphi \in \bar{L}(E_{\mathcal{L}},\ F_{\mathcal{M}})$. Назовем φ' *нормально разрешимым,* если уравнение φ'*(g) = f* разрешимо в том и только в том случае, когда его правая часть *f* ортогональна ко всем решениям уравнения φ(*x*) = 0, т. е. если
$R_{\varphi'} = K_\varphi{}^\perp$.

Теорема 1 означает, что φ' *нормально разрешимотогда и только тогда, когда* φ — *гомоморфизм* $E_{\mathcal{L}}$ в $F_{\mathcal{M}}$.

Теорема 1'. *Пусть* $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$. *Для того чтобы* φ' *было гомоморфизмом* $F_{\mathscr{M}}{}'_{\mathscr{M}'}$ *в* $E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'}$, *достаточно и при отделимости* $F_{\mathscr{M}}$ *необходимо, чтобы* R_φ *было замкнуто в* $F_{\mathscr{M}}$.

Доказательство. Так как, по 1.А, $E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'}$ отделимо, то в силу теоремы 1 φ' есть гомоморфизм $F_{\mathscr{M}}{}'_{\mathscr{M}'}$ в $E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'}$ тогда и только тогда, когда $R_{\varphi''}$ замкнуто в $E_{\mathscr{M}\mathscr{M}''}$. Пусть α — канонический гомоморфизм $E_{\mathscr{L}}$ на $E_{\mathscr{L}}{}''_{\mathscr{L}''}$ и β — канонический гомоморфизм $F_{\mathscr{M}}$ на $F_{\mathscr{M}}{}''_{\mathscr{M}''}$. В силу 1.Б и (4)

$$R_{\varphi''} = \varphi''(E_{\mathscr{L}}'') = \varphi''(\alpha(E)) = \beta(\varphi(E)) = \beta(R_\varphi).$$

Принимая во внимание 9.7.3, заключаем, что если R_φ замкнуто в $F_{\mathscr{M}}$, то $R_{\varphi''}$ замкнуто в $F_{\mathscr{M}}{}''_{\mathscr{M}''}$, и значит, φ'—гомоморфизм $F_{\mathscr{M}}{}'_{\mathscr{M}'}$ в $E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'}$; обратно, если φ' — гомоморфизм $F_{\mathscr{M}}{}'_{\mathscr{M}'}$ в $E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'}$, так что $R_{\varphi''}$ замкнуто в $F_{\mathscr{M}}{}''_{\mathscr{M}''}$, и если $F_{\mathscr{M}}$ отделимо, то R_φ замкнуто в $F_{\mathscr{M}}$, поскольку в силу 1.В и 9.7.К' $R_\varphi = \beta^{-1}(R_{\varphi''})$, где β^{-1} — изоморфизм $F_{\mathscr{M}}{}''_{\mathscr{M}''}$ на $F_{\mathscr{M}}$

Следствие. *Для того чтобы* φ' *было изоморфизмом* $F_{\mathscr{M}}{}'_{\mathscr{M}'}$ *в* $E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'}$, *достаточно и при отделимости* $F_{\mathscr{M}}$ *необходимо, чтобы* φ *было наложением.*

Доказательство. Если φ — наложение, то R_φ (== *F)* замкнуто в $F_{\mathscr{M}}$ и, следовательно, φ' по теореме 1'— гомоморфизм $F_{\mathscr{M}}{}'_{\mathscr{M}'}$ в $E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'}$, а по Л1° — вложение. Обратно, если φ' — изоморфизм $F_{\mathscr{M}}{}'_{\mathscr{M}'}$ в $E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'}$, а $F_{\mathscr{M}}$ отделимо, то по теореме 1′ $R_\varphi = \overline{R}_\varphi$ и, значит, в силу Л2° $R_\varphi = F$.

Замечание. Назовем $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$ *нормально разрешимым,* если уравнение $\varphi(x) = y$ разрешимо в том и только в том случае, когда его правая часть y ортогональна ко всем решениям сопряженного однородного уравнения $\varphi'(g) = 0$, т. е. если $R_\varphi = K_{\varphi'}{}^{\perp}$ (ср. И). Теорема 1' означает при отделимости $F_{\mathscr{M}}$, что φ *нормально разрешимо тогда и только тогда, когда* φ' *есть гомоморфизм* $F_{\mathscr{M}}{}'_{\mathscr{M}'}$ *в* $E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'}$.

Теорема 2. *Для того чтобы* $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$ *было изоморфизмом* $E_{\mathscr{L}}$ *на замкнутое* *L-подпространство L-пространства* $F_{\mathscr{M}}$, *необходимо и при отделимости* $E_{\mathscr{L}}$ *и* $F_{\mathscr{M}}$ *достаточно, чтобы* φ' *было гомоморфизмом* $F_{\mathscr{M}}{}'_{\mathscr{M}'}$ *на* $E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'}$.

Доказательство. Если R_φ замкнуто и φ — изоморфизм $E_{\mathscr{L}}$ в $F_{\mathscr{M}}$, то φ' по теореме 1' — гомоморфизм $F_{\mathscr{M}}{}'_{\mathscr{M}'}$ в $E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'}$, а по следствию теоремы 1 — наложение. Обратно, если φ' — гомоморфизм

$F_{\mathcal{M}}{'}_{\mathcal{M}'}$ на $E_{\mathcal{L}}{'}_{\mathcal{L}'}$, а $F_{\mathcal{M}}$ и $E_{\mathcal{L}}$ отделимы, то R_{φ} по теореме 1' замкнуто, а φ по следствию теоремы 1 — изоморфизм $E_{\mathcal{L}}$ в $F_{\mathcal{M}}$.

Теорема 2'. *Для того чтобы* $\varphi \in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}})$ *было гомоморфизмом* $E_{\mathcal{L}}$ *на* $F_{\mathcal{M}}$, *необходимо и при отделимости* $F_{\mathcal{M}}$ *достаточно, чтобы* φ' *было изоморфизмом* $F_{\mathcal{M}}{'}_{\mathcal{M}'}$ *на* $R_{\varphi'} = K_{\varphi}{}^{\perp}$, *рассматриваемое как (замкнутое) L-подпространство L-пространства* $E_{\mathcal{L}}{'}_{\mathcal{L}'}$.

Доказательство. Если φ — гомоморфизм $E_{\mathcal{L}}$ на $F_{\mathcal{M}}$, то по теореме 1 $R_{\varphi'} = K_{\varphi}{}^{\perp}$, а по следствию теоремы 1' φ'— изоморфизм $F_{\mathcal{M}}{'}_{\mathcal{M}'}$ в $E_{\mathcal{L}}{'}_{\mathcal{L}'}$. Обратно, если $R_{\varphi'}$ замкнуто и φ' — изоморфизм $F_{\mathcal{M}}{'}_{\mathcal{M}'}$ в $E_{\mathcal{L}}{'}_{\mathcal{L}'}$, то при отделимости $F_{\mathcal{M}}$ φ по теореме 1—гомоморфизм $E_{\mathcal{L}}$ в $F_{\mathcal{M}}$, а по следствию теоремы 1' — наложение, причем в силу (8') $R_{\varphi'} = \overline{R}_{\varphi'} = K_{\varphi}{}^{\perp}$.

Следствие. *Если* φ—*гомоморфизм* $E_{\mathcal{L}}$ *в* $F_{\mathcal{M}}$, *то*

$$(R_{\varphi}, \mathcal{M} \cap R_{\varphi})'_{(\mathcal{M} \cap R_{\varphi})'} \sim (R_{\varphi'}, \mathcal{L}' \cap R_{\varphi'}).$$

Изоморфизм осуществляется отображением $g \to g \circ \varphi^{\hat{}}$, *сопряженным к* $\varphi^{\hat{}}$.

Доказательство. Условие, что φ— гомоморфизм $E_{\mathcal{L}}$ в $F_{\mathcal{M}}$, означает, по определению 7 § 9, что $\varphi^{\hat{}}$ есть гомоморфизм $E_{\mathcal{L}}$ на $(R_{\varphi}, \mathcal{M} \cap R_{\varphi})$. По теореме 2' отсюда следует, что $\varphi^{\hat{}\prime}$ есть изоморфизм $(R_{\varphi}, \mathcal{M} \cap R_{\varphi})'_{(\mathcal{M} \cap R_{\varphi})'}$ на $(K_{\varphi^{\hat{}}}{}^{\perp}, \mathcal{L}' \cap K_{\varphi^{\hat{}}}{}^{\perp})$. Но $K_{\varphi^{\hat{}}}{}^{\perp} = K_{\varphi}{}^{\perp}$, а по теореме 1 $K_{\varphi}{}^{\perp} = R_{\varphi'}$.

10.3. Сопряженные к *L*-подпространству, факторпространству *L*-пространства и прямой сумме *L*-подпространств

А. Пусть $G_{\mathcal{N}} \subset\subset E_{\mathcal{L}}$ и π — каноническое вложение *G* в *E*. Как мы видели в примере 4 п° 2, π' есть операция сужения линейных функционалов $f \in E_{\mathcal{L}}{'}$ на G. Но так как π —изоморфизм $G_{\mathcal{N}}$ в $E_{\mathcal{L}}$, то, по следствию теоремы 1. π' — наложение. Тем самым мы вновь получаем (см. 9.6.Д), что $G_{\mathcal{N}}{'}$ *совпадает с совокупностью сужений всевозможных линейных функционалов* $f \in E_{\mathcal{L}}{'}$ *на G*.

Если G замкнуто, то в силу теоремы 2 π ' — гомоморфизм $E_{\mathscr{L}}{'}_{\mathscr{L}'}$ на $G_{\mathscr{N}}{'}_{\mathscr{N}'}$. Таким образом, *если* $G_{\mathscr{N}}$ *—замкнутое L-подпространство L-пространства* $E_{\mathscr{L}}$, *то отображение* π ', *относящее каждому линейному функционалу* $f \in E_{\mathscr{L}}'$ *его сужение* f_G *на G, есть гомоморфизм* $E_{\mathscr{L}}{'}_{\mathscr{L}'}$ *на* $G_{\mathscr{N}}{'}_{\mathscr{N}'}$.

Теорема 3. *Если* $G_{\mathscr{N}}$*—замкнутое L-подпространство L-пространства* $E_{\mathscr{L}}$, *то*

$$G_{\mathscr{N}}{'}_{\mathscr{N}'} \sim E_{\mathscr{L}}{'}_{\mathscr{L}'}/G^{\perp}, \tag{1}$$

где $G^{\perp}$ *— аннулятор G в* $E_{\mathscr{L}}'$. *Изоморфизм осуществляется отнесением кажоому линейному функционалу* $g \in G_{\mathscr{N}}'$ *смежного класса* $E_{\mathscr{L}}'$ *по* $G^{\perp}$, *образованного всеми продолжениями g до линейного функционала на* $E_{\mathscr{L}}$.

Доказательство. Пусть π — каноническое вложение *G* в *E*. В силу А сопряженное отображение π' есть гомоморфизм $E_{\mathscr{L}}{'}_{\mathscr{L}'}$ на $G_{\mathscr{N}}{'}_{\mathscr{N}'}$. Вследствие 2.(6) его ядро $K_{\pi'} = R_{\pi}{}^{\perp} = G^{\perp}$. Поэтому в силу 9.8.Б отображение π', ассоциированнре π', есть изоморфизм $E_{\mathscr{L}}{'}_{\mathscr{L}'}/G^{\perp}$ на $G_{\mathscr{N}}{'}_{\mathscr{N}'}$ и, значит, $\dot{\pi}'^{-1}$—изоморфизм $G_{\mathscr{N}}{'}_{\mathscr{N}'}$ на $E_{\mathscr{L}}{'}_{\mathscr{L}'}/G^{\perp}$. При этом, так как π' относит каждому $f \in E_{\mathscr{L}}'$ его сужение на G, то $\dot{\pi}'^{-1}$ относит каждому $g \in G_{\mathscr{N}}'$ класс всех его продолжений до линейного функционала на $E_{\mathscr{L}}$ (являющийся классом *E* по $G^{\perp}$).

Мы будем называть $\dot{\pi}'^{-1}$ *каноническим изоморфизмом* $G_{\mathscr{N}}{'}_{\mathscr{N}'}$ *на* $E_{\mathscr{L}}{'}_{\mathscr{L}'}/G^{\perp}$.

Теорема 3'. *L-пространство, сопряженное к факторпространству* $E_{\mathscr{L}}/G$ *L-пространства* $E_{\mathscr{L}}$ *по его подпространству G, изоморфно аннулятору* $G^{\perp}$ *этого подпространства в* $E_{\mathscr{L}}'$, *рассматриваемому как L-подпространство сопряженного L-пространства* $E_{\mathscr{L}}{'}_{\mathscr{L}'}$, *т. е.*

$$(E_{\mathscr{L}}/G)'_{(\mathscr{L}/G)'} \sim G^{\perp}{}_{\mathscr{L}' \cap G^{\perp}}. \tag{2}$$

Изоморфизм осуществляется операцией перенесения линейных функционалов с $E_{\mathscr{L}}/G$ *на* $E_{\mathscr{L}}$

Доказательство. Пусть ω— каноническое наложение *E* на *E/G*. Согласно терминологии, введенной в примере 5 п°2, ω' — операция перенесения линейных функционалов с $E_{\mathscr{L}}/G$ на $E_{\mathscr{L}}$. А так как ω — гомоморфизм $E_{\mathscr{L}}$ на $E_{\mathscr{L}}/G$ (9.8.А), то в силу теоремы 2' ω' — изоморфизм $(E_{\mathscr{L}}/G)'_{(\mathscr{L}/G)'}$ на $K_{\omega}{}^{\perp}$, рассматриваемое как

L-подпространство L-пространства $E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'}$. Но $K_\omega = G$.
Мы будем называть ω' *каноническим изоморфизмом* $(E_{\mathscr{L}}/G)'_{(\mathscr{L}/G)'}$ *в* $E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'}$.

Замечание. Так как в силу 9.5.Ж и 6.2.В $\bar{G}^{\perp} = G^{\perp\perp\perp} = G^{\perp}$, то, заменяя в (2) G на $\bar{G}$, получаем

$$(E_{\mathscr{L}}/\bar{G})'_{(\mathscr{L}/\bar{G})'} \sim G^{\perp}{}_{\mathscr{L}'} \cap G^{\perp},$$

так что

$$(E_{\mathscr{L}}/\bar{G})'_{(\mathscr{L}/\bar{G})'} \sim (E_{\mathscr{L}}/G)'_{(\mathscr{L}/G)'}. \qquad (3)$$

В частности, при G = {0}, принимая во внимание 9.8.Д, имеем

$$E_{\hat{\mathscr{L}}}{}'_{\hat{\mathscr{L}}'} \sim E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'}.$$

Обратно, в силу 9.8.Ж из нее следует (3).

В. *Пусть* π — *проектор, определенный на векторном пространстве E. Если* $\pi \in L(E_{\mathscr{L}}, E_{\mathscr{L}})$, *то* π' — *проектор, причем*

$$R_{\pi'} = K_\pi{}^{\perp}. \qquad (4)$$

Действительно, так как, по 4.4.Б, $\pi \circ \pi = \pi$, то в силу 2.Д $\pi' \circ \pi' = \pi'$ и, значит, π', по 4.4.Б, — проектор. Далее, в силу 4.4.В $R_{\pi'} = K_{\iota'-\pi'} = K_{(\iota-\pi)'}$ (см. n° 2, пример 2, и 2.Г) и $R_{\iota-\pi} = K_\pi$. Но согласно формуле 2.(6) $K_{(\iota-\pi)'} = R_{\iota-\pi}{}^{\perp}$. Следовательно, $R_{\pi'} = K_\pi{}^{\perp}$.

Г. Из формулы (4) в силу теоремы 1 снова следует, что *если* π — *проектор, определенный на векторном пространстве E, и* $\pi \in L(E_{\mathscr{L}}, E_{\mathscr{L}})$, *то* π—*гомоморфизм* $E_{\mathscr{L}}$ *в* $E_{\mathscr{L}}$ (см. 9.10.А).

Теорема 4. *Если* $E_{\mathscr{L}} = E^1_{\mathscr{L}_1} \oplus \ldots \oplus E^n_{\mathscr{L}_n}$, *то, обозначая через* $\pi_1, \ldots, \pi_n$ *проекторы E на* $E^1, \ldots, E^n$, *порождаемые по теореме* 3§ 4 *разложением* $E = E^1 \oplus \ldots \oplus E^n$, *имеем*

$$E_{\mathscr{L}}{}'_{\mathscr{L}'} = (K_{\pi_1}{}^{\perp}, \mathscr{L}' \cap K_{\pi_1}{}^{\perp}) \oplus \ldots \oplus (K_{\pi_n}{}^{\perp}, \mathscr{L}' \cap K_{\pi_n}{}^{\perp}),$$

причем $f_k \to f_k \circ \pi_k$, *где* f_k *пробегает* $E^k_{\mathscr{L}_k}{}'$, *есть изоморфизм* $E^k_{\mathscr{L}_k}{}'_{\mathscr{L}_k'}$ *на* $(K_{\pi_k}{}^{\perp}, \mathscr{L}' \cap K_{\pi_k}{}^{\perp})$.

Доказательство. Пусть ι—тождественное отображение *E* на себя, Согласно теореме 3 § 4

$$\iota = \sum_{k=1}^{n} \pi_k, \text{ причем } \pi_k \circ \pi_l = 0, \text{ если } l \neq k.$$

В силу 2.Г, Д тогда

$$\iota' = \sum_{k=1}^{n} \pi'_k, \text{ причем } \pi'_l \circ \pi'_k = 0, \text{ если } l \neq k.$$

Так как ι' —тождественное отображение $E_{\mathscr{L}}'$ на себя (п°2, пример 2), то, принимая во внимание В, заключаем на основании теоремы 3 § 4, что

$$E_{\mathscr{L}}' = R_{\pi_1'} \oplus \ldots \oplus R_{\pi_n'} = K_{\pi_1}^{\perp} \oplus \ldots \oplus K_{\pi_n}^{\perp},$$

и значит, по теореме 3 § 9,

$$E_{\mathscr{L}}'_{\mathscr{L}'} = (K_{\pi_1}^{\perp}, \mathscr{L}' \cap K_{\pi_1}^{\perp}) \oplus \ldots \oplus (K_{\pi_n}^{\perp}, \mathscr{L}' \cap K_{\pi_n}^{\perp}).$$

Наконец, в силу Г и следствия теоремы 2',

$$E^k_{\mathscr{L}_k}{}'_{\mathscr{L}_k'} \sim (K_{\pi_k}^{\perp}, \mathscr{L}' \cap K_{\pi_k}^{\perp}).$$

Причем изоморфизм осуществляется отображением $f_k \to f_k \circ \pi_k\hat{}$ $(f_k \in E^k_{\mathscr{L}_k}{}')$.

10.4. Сопряженные к произведению и сумме семейства *L*-пространств

А. *Пусть* $E_{\mathscr{L}} = \prod\limits_{\alpha \in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$, *так что, по определению* 9 § 9, $\mathscr{L}$ *есть слабейшая L-структура в E, при которой его проектирования* pr_α *на все* $E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$ *являются L-отображениями. Тогда* $\mathscr{L}'$ *совпадает с сильнейшей L-структурой* $\bar{\mathscr{T}}$ *в* $E_{\mathscr{L}}'$, *при которой сопряженные отображения* pr_α' *всех* $E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'_{\mathscr{L}_\alpha'}$ *в* $E_{\mathscr{L}}'$ *являются L-отображениями.*

Действительно, согласно 9.4.3,

$$E_{\mathscr{L}}'_{\bar{\mathscr{T}}'} = \{g \in E_{\mathscr{L}}'^{*}: g \circ \mathrm{pr}_\alpha' \in E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'' \text{ для всех } \alpha \in A\}. \quad \textbf{(1)}$$

Но если $g \circ \mathrm{pr}_\alpha' \in E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}''$, то в силу 1.(1) существует вектор $x_\alpha \in E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$ такой,. что

$$\langle f_\alpha, g \circ \mathrm{pr}_\alpha' \rangle = \langle x_\alpha, f_\alpha \rangle \text{ для всех } f_\alpha \in E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'. \quad \textbf{(2)}$$

Пусть x—элемент из E, проекцией которого на каждое E^α служит вектор x_α, удовлетворяющий условию (2). Тогда для всех $\alpha \in A$ и $f_\alpha \in E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'$ будем иметь

$$\langle f_\alpha \circ \mathrm{pr}_\alpha, g \rangle = \langle f_\alpha, g \circ \mathrm{pr}_\alpha' \rangle = \langle \mathrm{pr}_\alpha x, f_\alpha \rangle = \langle x, f_\alpha \circ \mathrm{pr}_\alpha \rangle.$$

Так как, по 9.9.В, $E_{\mathscr{L}}'$ совпадает с совокупностью всевозможных сумм вида $\sum\limits_{\alpha \in A} f_\alpha \circ \mathrm{pr}_\alpha$, где лишь конечное число $f_\alpha \neq 0$, то втаком случае

$\langle \bar{f}, g\rangle = \langle x, \bar{f}\rangle$ для всех $\bar{f} \in E_{\mathcal{L}}'$.
т. е. $g = \langle x, \cdot\rangle_{\mathcal{L}} \in E_{\mathcal{L}}''$. Тем самым из (1) следует, что $E_{\mathcal{L}}'{}_{\bar{\mathcal{L}}'} \subset E_{\mathcal{L}}''$. С другой стороны, в силу 2.А все $\mathrm{pr}_\alpha' \in L(E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}{}'_{\mathcal{L}_\alpha'}, E_{\mathcal{L}}'{}_{\mathcal{L}'})$, значит, каково бы ни было $g \in E_{\mathcal{L}}''$, $g \circ \mathrm{pr}_\alpha' \in E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}{}''$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$ (9.2.Д') и тем самым, в силу (1), $E_{\mathcal{L}}'' \subset E_{\mathcal{L}}'{}_{\bar{\mathcal{L}}'}$. Следовательно, $E_{\mathcal{L}}'{}_{\mathcal{L}'}{}' = E_{\mathcal{L}}'' =$ $= E_{\mathcal{L}}'{}_{\bar{\mathcal{L}}'}$, откуда, по 9.1.А, $\mathcal{L}' = \bar{\mathcal{L}}$.

Теорема 5. *Если* $E_{\mathcal{L}} = \coprod_{\alpha\in\mathrm{A}} E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}$, *то* $\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}{}'_{\mathcal{L}_\alpha'} \sim E_{\mathcal{L}}'{}_{\mathcal{L}'}$, *причем изоморфизм осуществляется отображением* $f \to$ $\to \varphi(f) = \bar{f}$, *определяемым для каждого* $f = (f_\alpha) \in \sum_{\alpha\in\mathrm{A}} E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}{}'$ *формулой*

$$\langle x, \bar{f}\rangle = \sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \langle x_\alpha, f_\alpha\rangle,$$

т. е. задаваемым равенством

$$\varphi(f) = \sum_{\alpha\in\mathrm{A}} f_\alpha \circ \mathrm{pr}_\alpha. \qquad (3)$$

Доказательство. Согласно 9.9.В' φ есть изоморфизм $\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}{}'$ на $E_{\mathcal{L}}'$. Пусть in^α — каноническое вложение $E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}{}'$ в $\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}{}'$. Из (3) следует, что, каковы бы ни были $\alpha \in \mathrm{A}$ и $f_\alpha \in E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}{}'$, $\varphi(\mathrm{in}^\alpha(f_\alpha)) = f_\alpha \circ \mathrm{pr}_\alpha = \mathrm{pr}_\alpha'(f_\alpha)$. Таким образом, для всех $\alpha \in \mathrm{A}$ имеем

$$\varphi \circ \mathrm{in}^\alpha = \mathrm{pr}_\alpha' \qquad (4)$$

или, что то же,

$$\varphi^{-1} \circ \mathrm{pr}_\alpha' = \mathrm{in}^\alpha. \qquad \textbf{(4')}$$

Так как pr_α' для всех $\alpha \in \mathrm{A}$ — L-отображение, то из (4) в силу 9.9.Ж следует, что

$$\varphi \in L\Big(\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}{}'_{\mathcal{L}_\alpha'}, E_{\mathcal{L}}'{}_{\mathcal{L}'}\Big).$$

С другой стороны, так как все in^α — L-отображения, а $\mathcal{L}'$, по А, — сильнейшая L-структура в $E_{\mathcal{L}}'$, при которой все pr_α' являются L-отображениями, то из (4') в силу 9.4.К следует, что $\varphi^{-1} \in L\Big(E_{\mathcal{L}}'{}_{\mathcal{L}'}, \sum_{\alpha\in\mathrm{A}} E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}{}'_{\mathcal{L}_\alpha'}\Big)$. Тем самым, на основании 9.7.К, φ — изоморфизм $\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} E^\alpha_{\mathcal{L}_\alpha}{}'_{\mathcal{L}_\alpha'}$ на $E_{\mathcal{L}}'{}_{\mathcal{L}'}$.

Б. *Пусть*

$$E_{\mathscr{L}}=\sum_{\alpha\in A}E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha},$$

так что, по определению 10 § 9, $\mathscr{L}$ *есть сильнейшая L-структура в E, при которой инъектирования* in_α *всех* $E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$ *в E являются L-отображенаями. Тогда* $\mathscr{L}'$ *совпадает со слабейшей L-структурой* $\bar{\mathscr{L}}$ *в* $E_{\mathscr{L}}'$, *при которой его сопряженные отображения* $\mathrm{in}_{\alpha'}$ *во все* $E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'_{\mathscr{L}_\alpha'}$ *являются L-отображениями.*

Действительно, пусть $g\in E_{\mathscr{L}}''$, так что, по 1.Б, $g=\langle x,\ \cdot\rangle_{\mathscr{L}}$, где $x=(x_\alpha)\in E$. Пусть, далее, $g_\alpha=\langle x_\alpha,\ \cdot\rangle_{\mathscr{L}_\alpha}$, так что, по 1.Б, $g_\alpha\in E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}''$. Так как $x=\sum_{\alpha\in A}\mathrm{in}_\alpha x_\alpha$, то для всех $\bar f\in E_{\mathscr{L}}'$ имеем

$$\langle\bar f,\ g\rangle=\langle x,\ \bar f\rangle=\sum_{\alpha\in A}\langle\mathrm{in}_\alpha x_\alpha,\ \bar f\rangle=$$

$$=\sum_{\alpha\in A}\langle x_\alpha,\ \mathrm{in}_\alpha'(\bar f)\rangle=\sum_{\alpha\in A}\langle\mathrm{in}_\alpha'(\bar f),\ g_\alpha\rangle,$$

так что

$$g=\sum_{\alpha\in A}g_\alpha\circ\mathrm{in}_\alpha'. \tag{5}$$

Но согласно 9.4.В $E_{\mathscr{L}}'{}_{\bar{\mathscr{L}}'}$ совпадает с совокупностью всевозможных сумы вида (5). Тем самым $E_{\mathscr{L}}''\subset E_{\mathscr{L}}'{}_{\bar{\mathscr{L}}'}$. С другой стороны, так как, по 2. А, $\mathrm{in}_\alpha'\in L\left(E_{\mathscr{L}}'{}_{\mathscr{L}'},\ E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'_{\mathscr{L}_\alpha'}\right)$ и, значит, согласно 9.2.Д' $g_\alpha\circ\mathrm{in}_\alpha'\in E_{\mathscr{L}}''$, если $g_\alpha\in E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}''$, то все суммы вида (5) принадлежат $E_{\mathscr{L}}''$, так что $E_{\mathscr{L}}'{}_{\bar{\mathscr{L}}'}\subset E_{\mathscr{L}}''$. Следовательно, $E_{\mathscr{L}}'{}_{\mathscr{L}'}=E_{\mathscr{L}}''=E_{\mathscr{L}}'{}_{\bar{\mathscr{L}}'}$, откуда, по 9.1.А, $\mathscr{L}'=\bar{\mathscr{L}}$.

Теорема 5'. *Если* $E_{\mathscr{L}}=\sum_{\alpha\in A}E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$, *то* $E_{\mathscr{L}}'{}_{\mathscr{L}'}\sim\prod_{\alpha\in A}E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'_{\mathscr{L}_\alpha'}$, *причем изоморфизм осуществляется отображением* $\bar f\to\psi(\bar f)=f=(f_\alpha)$, *определяемым для каждого* $\bar f\in E_{\mathscr{L}}'$ *формулой*

$$\langle x,\ \bar f\rangle=\sum_{\alpha\in A}\langle x_\alpha,\ f_\alpha\rangle,$$

т. е. задаваемым равенством

$$\psi(\bar f)=(\bar f\circ\mathrm{in}_\alpha)_{\alpha\in A}. \tag{6}$$

Доказательство. Согласно 9.9.3', ψ есть изоморфизм $E_{\mathscr{L}}'$ на $\prod_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'$. Пусть pr^{α} — проекция $\prod_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'$ на $E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'$.
Из (6) следует, что, каковы бы ни были $\alpha\in A$ и $\bar f\in E_{\mathscr{L}}'$, $\mathrm{pr}^{\alpha}(\psi(\bar f))=\bar f\circ \mathrm{in}_\alpha=\mathrm{in}_\alpha'(\bar f)$. Таким образом, для всех $\alpha\in A$ имеем

$$\mathrm{pr}^{\alpha}\circ\psi=\mathrm{in}_\alpha' \qquad (7)$$

или, что то же,

$$\mathrm{in}_\alpha'\circ\psi^{-1}=\mathrm{pr}^{\alpha}. \qquad (7')$$

Так как in_α' для всех $\alpha\in A$— L-отображение, то из (7) в силу 9.9.Б следует, что $\psi\in L\left(E_{\mathscr{L}}'{}_{\mathscr{L}'},\ \prod_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'{}_{\mathscr{L}_\alpha'}\right)$. С другой стороны, так как все pr^{α} —L-отображения, а $\mathscr{L}'$, по Б,—слабейшая L-структура в $E_{\mathscr{L}}'$, при которой все in_α' являются L-отображениями, то из (7') в силу 9.4.Д следует, что $\psi^{-1}\in L\left(\prod_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'{}_{\mathscr{L}_\alpha'},\ E_{\mathscr{L}}'{}_{\mathscr{L}'}\right)$. Тем самым, на основа нии 9.7.К, ψ — изоморфизм $E_{\mathscr{L}}'{}_{\mathscr{L}'}$ на $\prod_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'{}_{\mathscr{L}_\alpha'}$.

В. *L-пространство, сопряженное к произведению прямых, изоморфно сумме прямых.* Действительно, пусть $E_{\mathscr{L}}$ — произведение прямых, т. е., согласно определению 9 § 9,—

$$E_{\mathscr{L}}=\prod_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}, \text{ где } E^{\alpha}_{\mathscr{L}},$$

отделимые одномерные *L*-пространства. В силу 1.А и 9.3.Б тогда $E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}{}'{}_{\mathscr{L}_\alpha'}$ —также отделимые одномерные *L*-пространства, и остается применить теорему 5.
В'. Совершенно так же (на основании теоремы 5') *L-пространство, сопряженное к сумме прямых, изоморфно произведению прямых.*
Г. *Произведение прямых обладает минимальной отделимой L-структуроа.* В самом деле, пусть

$$E_{\mathscr{L}}=\prod_{\alpha\in A} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$$

— произведение прямых и $\mathscr{L}_1<\mathscr{L}$. В силу 9.1.Е $E_{\mathscr{L}_1}'$ есть собственное подпространство пространства $E_{\mathscr{L}}'$. Поэтому, в силу следствия 2 теоремы 1 § 3, $E_{\mathscr{L}_1}'$ содержится в некотором собственном гиперподпространстве *H* пространства $E_{\mathscr{L}}'$. Но так как согласно В $E_{\mathscr{L}}'{}_{\mathscr{L}'}$ изоморфно сумме прямых, а сумма прямых, по 9.9.М, обладает сильнейшей *L*-структурой, то в силу 9.7.М и $E_{\mathscr{L}}'{}_{\mathscr{L}'}$ обладает

сильнейшей L-структурой. Отсюда следует, что $H \in \mathcal{L}'$, и, значит, $H = \{x\}^{\perp}$, где $x \in E \setminus \{0\}$.
Но в силу 6.2.Б Г, 2° тогда $x \in E_{\mathcal{L}_1}{}'^{\perp}$, и так как $x \neq 0$, то (9.1.Б) $\mathcal{L}_1$ не отделима.
Г'. Обратно, *всякое L-пространство $E_{\mathcal{L}}$, обладающее минимальной отделимой L-структурой, изоморфно произведению прямых.*
Действительно, пусть H — гиперподпространство сопряженного пространства $E_{\mathcal{L}}'$. Так как $\mathcal{L}_H = \{K_f;\ f \in H\} < \mathcal{L}$, а $\mathcal{L}$ — минимальная отделимая L-структура, то $\dot{\mathcal{L}}_H$ не отделима и, значит, по 9.1.Б, $H^{\perp} \neq \{0\}$. С другой стороны, так как $\mathcal{L}$ отделима, то, по 9.1.Б, $E_{\mathcal{L}}'^{\perp} = \{0\}$. Следовательно, в силу 6.2.В $H^{\perp\perp} \neq E_{\mathcal{L}}'$, так что, по 9.5.3 2°, H замкнуто в $E_{\mathcal{L}}'_{\mathcal{L}'}$. Вследствие произвольности H это означает, что $\mathcal{L}'$ — сильнейшая L-структура в $E_{\mathcal{L}}'$ и, следовательно, по 9.9.М', $E_{\mathcal{L}}'_{\mathcal{L}'}$ изоморфно сумме прямых. Но в таком случае, вследствие В' и 2.Ж, $E_{\mathcal{L}}''_{\mathcal{L}''}$ изоморфно произведению прямых. А так как $E_{\mathcal{L}}$ отделимо, то в силу 1.В и $E_{\mathcal{L}}$ изоморфно произведению прямых.

10.5. Связки гиперплоскостей

Определение 3. *Связкой гиперплоскостей* в L-пространстве будет называться всякая максимальная центрированная система замкнутых гиперплоскостей.
А. В силу 1.4. Г *всякая центрированная система замкнутых гиперплоскостей содержится в связке гиперплоскостей.*
Б. *Совокупность S_{x_0} всех замкнутых гиперплоскостей L-пространства $E_{\mathcal{L}}$, проходящих через фиксированную точку $x_0 \in E$, есть связка гиперплоскостей.* Действительно, центрированность S_{x_0} очевидна, максимальность же следует из того, что никакая замкнутая гиперплоскость X, не проходящая через x_0, не может входить в S_{x_0}, поскольку она не пересекается с параллельной ей (и потому замкнутой) гиперплоскостью, проходящей через x_0 и тем самым содержащейся в S_{x_0}. Обратно, *каждая связка гиперплоскостей S, имеющая непустое пересечение, есть связка указанного типа.* В самом деле, если

$$x_0 \in \bigcap_{X \in S} X, \text{ то } S \subset S_{x_0},$$

и так как S_{x_0} —центрированная система замкнутых гиперплоскостей, а S — максимальная такая система, то $S = S_{x_0}$.

В. *Пучок* $[X_1, \ldots, X_n]$, *порожденный замкнутыми гиперплоскостями* $X_1,\ldots,X_n$ *L-пространства* $E_{\mathscr{L}}$, *имеющими непустое пересечение*

$$L = \bigcap_{k=1}^{n} X_k,$$

состоит из замкнутых гиперплоскостей. Действительно, пусть $X \in [X_1, \ldots, X_n]$, $H, H_1,\ldots,H_n$—гиперподпространства, параллельные гиперплоскостям $X, X_1,\ldots,X_n$, и x_0 — фиксированный вектор из L. В силу 3.3.Б 2°

$$H = X - x_0 \supset L - x_0 = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k - x_0) = \bigcap_{k=1}^{n} H_k,$$

так что $H \in [H_1, \ldots, H_n]$. Но так как все X_k замкнуты, то все $H_k \in \mathscr{L}$. В силу 9.1.В тогда и $H \in \mathscr{L}$, и следовательно, X замкнуто.

В'. Из равенства $\bigcap_{k=1}^{n} H_k = L - x_0$ следует также, что если $H \in [H_1, \ldots, H_n]$, т. е. $H \supset \bigcap_{k=1}^{n} H_k$, то $X = H + x_0 \supset L$, т. е. $X \in [X_1, \ldots, X_n]$. Таким образом, мы установили попутно, что *если* $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$*—конечное семейство гиперплоскостей, имеющее непустое пересечение* $L = \bigcap_{k=1}^{n} X_k$, *то гиперподпространства, параллельные всевозможным гиперплоскостям из пучка* $[X_1, \ldots, X_n]$, *образуют пучок* $[H_1, \ldots, H_n]$, *где* H_k — *гиперподпространства, параллельные гиперплоскостям* X_k.

Г. *Связка гиперплоскостей S вместе с любым конечным семейством входящих в нее гиперплоскостей* $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ *содержит и весь порождаемый им пучок* $[X_1, \ldots, X_n]$. Действительно, так как S центрированна, то для каждого $X \in [X_1, \ldots, X_n]$ и каждого конечного семейства гиперплоскостей $(X_k)_{n+1 \leqslant k \leqslant n+m}$ из S имеем

$$X \cap \bigcap_{k=n+1}^{n+m} X_k \supset \bigcap_{k=1}^{n+m} X_k \neq \phi.$$

Но тогда $X \in S$, ибо иначе X (которое, по В, замкнуто) можно было бы присоединить к S без нарушения ее центрированности, в противоречие с максимальностью S.

Теорема 6. *Для того чтобы центрированная система замкнутых гиперплоскостей в $E_{\mathcal{L}}$ была максимальной (т. е. связкой гиперплоскостей), необходимо и достаточно, чтобы она содержала по одной гиперплоскости, параллельной каждому замкнутому гиперподпространству.*

Д о к а з а те ль с т в о. Достаточность условия очевидна; каждая замкнутая гиперплоскость, по самому своему определению, параллельна некоторому $H \in \mathcal{L}$, а двух разных гиперплоскостей, параллельных одному и тому же $H \in \mathcal{L}$ и потому не пересекающихся, центрированная система гиперплоскостей содержать не может. Пусть теперь S—связка гиперплоскостей в

$E_{\mathcal{L}}$ и $H \in \mathcal{L}$.

Возможны два случая:

а) H пересекается с пересечением любого конечного семейства гиперплоскостей из S. Тогда $H \in S$, ибо иначе H можно было бы присоединить к S без нарушения центрированности, в противоречие с максимальностью S.

б) H не пересекается с пересечением L некоторого конечного семейства гиперплоскостей $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ из S. Взяв произвольный вектор $x_o \in L$ (существующий в силу центрированности S), мы получим гиперплоскость $X=H+x_0$, параллельную H и содержащую L. В самом деле, так как, очевидно. $H \neq E$, то X—собственная гиперплоскость. При этом $X \subset H+L$, где $H+L$, по 3.3.Е, — аффинное многообразие. Но $H+L \neq E$, ибо иначе существовали бы $h \in H$ и $x \in L$ такие, что $h+x = 0$. откуда $x = -h \in H \cap L$, в противоречие с предположением. Следовательно, $X=H+L$ и, значит, $X \supset L$. Но тогда $X \in S$ в силу Г.

Теорема 7. *Пусть S — связка гиперплоскостей в $E_{\mathcal{L}}$. Отнесем каждому $f \in E_{\mathcal{L}}'$ гиперплоскость $X_f \in S$, параллельную K_f {существование и единственность которой гарантируются теоремой* 6). *Тогда*

$$s(f) = f(X_f) \tag{1}$$

(где $f(X_f)$ — постоянное значение, принимаемое f на X_f) есть линейная функция на $E_{\mathcal{L}}'$. Обратно, пусть s (f) — линейная функция на $E_{\mathcal{L}}'$. Отнесем каждому $f \in E_{\mathcal{L}}'$ аффинное многообразие

$$X_f = f^{-1}(s(f)). \qquad (2)$$

Тогда $S = \{X_f\colon\ f \in E_{\mathscr{L}}'\}$ *есть связка гиперплоскостей и s(f) определяется ею по формуле* (1).

Доказательство. 1° Пусть S — связка гиперплоскостей в $E_{\mathscr{L}}$ и *s*— функция на $E_{\mathscr{L}}'$, определяемая ею по формуле (1). Для любого $f \in E_{\mathscr{L}}'$ и любого скаляра λ имеем

$$s(\lambda f) = \lambda f(X_{\lambda f}) \quad \text{и} \quad \lambda s(f) = \lambda f(X_f).$$

Но

$$\lambda f(X_{\lambda f}) = \lambda f(X_f).$$

Действительно, при λ = 0 это очевидно, если же *λ≠0,* то $K_{\lambda f} = K_f$ и потому $X_{\lambda f} = X_f$. Следовательно,

$$s(\lambda f) = \lambda s(f).$$

Сдругой стороны, для любых $f_1,\ f_2 \in E_{\mathscr{L}}'$ имеем

$$\begin{aligned} s(f_1) + s(f_2) &= f_1(X_{f_1}) + f_2(X_{f_2}) = \\ &= f_1(X_{f_1+f_2} \cap X_{f_1} \cap X_{f_2}) + f_2(X_{f_1+f_2} \cap X_{f_1} \cap X_{f_2}) = \\ &= (f_1 + f_2)(X_{f_1+f_2} \cap X_{f_1} \cap X_{f_2}) = (f_1 + f_2)(X_{f_1+f_2}) = s(f_1 + f_2). \end{aligned}$$

Тем самым s линейна.

2° Пусть $s \in E_{\mathscr{L}}'^{*}$ и $S = \{X_f\colon\ f \in E_{\mathscr{L}}'\}$, где X_f для любого $f \in E_{\mathscr{L}}'$ определено формулой (2), т. е. представляет собой множество всех решений линейного уравнения

$$f(x) = s(f). \qquad (3)$$

Пусть $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ — любое конечное семейство линейных функционалов на $E_{\mathscr{L}}$. В силу только что сказанного $\bigcap_{k=1}^{n} X_{f_k}$ есть множество всех решений системы линейных уравнений

$$f_1(x) = s(f_1),\ \ldots,\ f_n(x) = s(f_n). \qquad (4)$$

Но так как s линейно, то всякое соотношение $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$ влечет соотношение $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k s(f_k) = s\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k\right) = 0$. Поэтому система (4), по теореме 1 § 5, совместна, т. е.

$$\bigcap_{k=1}^{n} X_{f_k} \neq \phi.$$

Тем самым S центрированно. Далее, так как, в частности, уравнение (3) совместно, то, согласно 5.4.В, $X_f = K_f + x_0$, где x_0—любое решение уравнения (3). Тем самым X_f — замкнутые гиперплоскости, и так как каждое $H \in \mathscr{L}$ представимо в виде K_f, где $f \in E_{\mathscr{L}}'$, то S содержит по одной (в силу центрированности) гиперплоскости, параллельной каждому $H \in \mathscr{L}$. На основании теоремы 6 заключаем, что S— связка гиперплоскостей, а из (2) следует, что $f(X_f) =$

$= f\left(f^{-1}(s(f))\right) = s(f)$.

Д. Теоремой 7 устанавливается естественное взаимно однозначное соответствие между множеством $E_{\mathscr{L}}'^{*}$ всех линейных функций, определенных на $E_{\mathscr{L}}'$, и множеством всех связок гиперплоскостей в $E_{\mathscr{L}}$. При этом *линейной функции* $\langle x_0, \cdot \rangle_{\mathscr{L}}$, *порождаемой вектором* $x_0 \in E$, *соответствует связка* S_{x_0} *всех замкнутых гиперплоскостей, проходящих через* x_0 (см. Б). Действительно, если S_0—связка, соответствующая функции $s_0 = \langle x_0, \cdot \rangle_{\mathscr{L}}$, то $x_0 \in X_f$ для всех $X_f = f^{-1}(s_0(f)) \in S_0$, ибо, очевидно, $x_0 \in f^{-1}(\langle x_0, f \rangle)$, каково бы ни было $f \in E_{\mathscr{L}}'$; но тогда $S_0 = S_{x_0}$ в силу Б.

11. L-ПРОСТРАНСТВА НАД R И C

Все L-пространства, рассматриваемые в этом разделе, предполагаются вещественными или комплексными.

11.1. Регулярно выпуклые множества

Определение 1. Пусть *(E, F; u)* — дуальная пара векторных пространств над **R** или **C**. *Опорной функцией* множества $A \subset E$ относительно *u* будет называться функция q_A на *F*, определяемая для всех $y \in F$ формулой

$$q_A(y) = \sup_{a \in A} \Re u(a, y),$$

а опорной функцией множества $B \subset F$—его опорная функция q_B на *E* относительно транспонированной билинейной функции *u'*, т. е. функция

$$q_B(x) = \sup_{b \in B} \Re u(x, b).$$

В соответствии с этим опорной функцией множества $A \subset E_{\mathscr{L}}$

мы будем (рассматривая, как обычно, $E_{\mathcal{L}}$ в дуальной паре с $E_{\mathcal{L}}'$) называть функцию q_A на $E_{\mathcal{L}}'$, определяемую формулой

$$q_A(f) = \sup_{a \in A} \Re \langle a, f \rangle. \tag{1}$$

А. Если $A \neq \varnothing$, то $-\infty < q_A(y) \leqslant +\infty$ и, по 8.1.Г, q_A — *сублинейная функция на F.* С другой стороны, согласно 1.2.В $q_\phi = -\infty$.

А'. Из определения 1 непосредственно следует, что *если* $A_1 \subset A_2$, *то* $q_{A_1} \leqslant q_{A_2}$.

Из (1) видно, что, каково бы ни было $A \subset E_{\mathcal{L}}$,

$$x \in A \text{ влечет } \Re \langle x, f \rangle \leqslant q_A(f) \text{ для всех } f \in E_{\mathcal{L}}'. \tag{2}$$

Определение 2. Множество $A \subset E_{\mathcal{L}}$ называется *регулярно выпуклым,* если, обратно,

$$\Re \langle x, f \rangle \leqslant q_A(f) \text{ для всех } f \in E_{\mathcal{L}}' \text{ влечет } x \in A. \tag{2'}$$

Б. Из (2') непосредственно следует, что *множество* $A \subset E_{\mathcal{L}}$ *регулярно выпукло тогда и только тогда, когда дли каждого* $x_0 \notin A$ *существует* $f_0 \in E_{\mathcal{L}}'$ *такое, что* $q_A(f_0) < \Re \langle x_0, f_0 \rangle$.

Б'. Из (2) и (2') видно также, что *регулярно выпуклые множества в* $E_{\mathcal{L}}$ — *это множества* $A \subset E_{\mathcal{L}}$, *удовлетворяющие условию*

$$A = \{x \in E: \Re \langle x, f \rangle \leqslant q_A(f) \text{ для всех } f \in E_{\mathcal{L}}'\}. \tag{3}$$

В. *ф и E регулярно выпуклы.* Действительно, *ф* удовлетворяет условию (3) в силу (1'), а *E*—поскольку

$$q_E(f) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } f \neq 0, \\ 0, & \text{если } f = 0 \end{cases} \tag{4}$$

(см. для комплексного случая 5.1.Е').

Г. *Всякое регулярно выпуклое множество* $A \subset E_{\mathcal{L}}$ *выпукло.* В самом деле, если $a_1, a_2 \in A$ и $a_0 = (1-\rho) a_1 + \rho a_2$, где $0 < \rho < 1$, то, каково бы ни было $f \in E_{\mathcal{L}}'$,

$$\Re \langle a_0, f \rangle = (1-\rho) \Re \langle a_1, f \rangle + \rho \Re \langle a_2, f \rangle \leqslant$$
$$\leqslant (1-\rho) q_A(f) + \rho q_A(f) = q_A(f),$$

так что, по (2'), $a_0 \in A$.

Д. *Пересечение любого семейства регулярно выпуклых множеств* $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *регулярно выпукло.* Действительно, пусть

$$A = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{A}} A_\alpha.$$

Если $x_0 \notin A$, то $x_0 \notin A_a$ для некоторого $a \in$ А, значит, по Б, существует $f_0 \in E_{\mathscr{L}}'$, для которого $q_{A_a}(f_0) < \Re\langle x_0, f_0\rangle$. Но тогда (см. А'), тем более, $q_A(f_0) < \Re\langle x_0, f_0\rangle$, и остается снова применить Б.

Определение 3. *Замкнутыми полупространствами* вещественного L-пространства $E_{\mathscr{L}}$ будут называться все его полупространства

$$E_{f,\xi} = \{x \in E: \Re\langle x, f\rangle \leqslant \xi, \text{ где } f \in E_{\mathscr{L}}' \setminus \{0\} \text{ и } \xi \in \mathbf{R}\}$$

(см. 7.1.И).

Замечание. Так как неравенства $\Re\langle x, f\rangle \geqslant \xi$ и $\Re\langle x, -f\rangle \leqslant -\xi$ равносильны, то также *все полупространства* $\{x \in E: \Re\langle x, f\rangle \geqslant \xi\}$, *где* $f \in E_{\mathscr{L}}' \setminus \{0\}$, *—замкнутые.*

Е. *Каждое замкнутое полупространство регулярно выпукло.* Действительно, $x_0 \notin E_{f_0,\xi_0}$ означает, что $\xi_0 < \Re\langle x_0, f_0\rangle$. Но так как $f_0 \neq 0$, то (в комплексном случае—на основании 5.1.Е') существует $x_1 \in E$, для которого $\Re\langle x_1, f_0\rangle = \xi_0$, и потому

$$\xi_0 = \sup_{x \in E_{f_0,\xi_0}} \Re\langle x, f_0\rangle = q_{E_{f_0,\xi_0}}(f_0).$$ Таким образом,

для каждого $x_0 \notin E_{f_0,\xi_0}$ имеем $q_{E_{f_0,\xi_0}}(f_0) < \Re\langle x_0, f_0\rangle$ и, значит, E_{f_0,ξ_0}, по Б, регулярно выпукло.

Ж. Из Д и Е вытекает, что *пересечение любого семейства замкнутых полупространств регулярно выпукло.* Обратно, из Б' и (4) следует, что *всякое непустое регулярно выпуклое множество $A \neq E$ есть пересечение семейства замкнутых полупространств,* а именно тех $E_{f,q_A(f)}$ $(f \in E_{\mathscr{L}}' \setminus \{0\})$, в которых $q_A(f) \neq +\infty$. Если же $E_{\mathscr{L}}'$ — не нулевое, то и ϕ есть пересечение замкнутых полупространств, например $E_{f,-1}$ и $E_{-f,-1}$, где $f \in E_{\mathscr{L}}' \setminus \{0\}$. Таким образом, *в L-пространстве, обладающем не нулевым сопряженным, класс регулярно выпуклых множеств совпадает с классом пересечений семейств замкнутых полупространств, дополненным всем пространством.*

З. *Прообраз замкнутого полупространства относительно L-отображения является замкнутым полупространством.* Действительно, если $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$, то, каковы бы ни были $g \in F_{\mathscr{M}}'$ и $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\varphi^{-1}(F_{g,\xi}) = \{x \in E: \Re\langle\varphi(x), g\rangle \leqslant \xi\} = \\ = \{x \in E: \Re\langle x, \varphi'(g)\rangle \leqslant \xi\} = E_{\varphi'(g),\xi}.$$

Принимая во внимание Ж, заключаем, что *прообраз регулярно* *выпуклого множества относительно L-отображения является регулярно выпуклым множеством.*

И. Пусть $A\subset E_{\mathscr{L}}$. *A* содержится по крайней мере в одном регулярно выпуклом множестве: самом *E.* Пересечение всех регулярно выпуклых множеств, содержащих *A,* являющееся, по Д, регулярно выпуклым множеством, будет называться *регулярно выпуклой оболочкой* множества *A* и обозначаться $\overline{\mathrm{co}}(A)$. Очевидно, $\overline{\mathrm{co}}(A)$— *наименьшее регулярно выпуклое множество, содержащее A, и A регулярно выпукло тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей регулярно выпуклой оболочкой* $\overline{\mathrm{co}}(A)$. Ясно также, что $\overline{\mathrm{co}}(\overline{\mathrm{co}}(A))=\overline{\mathrm{co}}(A)$ *и если* $A\subset B$, то $\overline{\mathrm{co}}(A)\subset\overline{\mathrm{co}}(B)$.

К. *Каково бы ни было* $A\subset E_{\mathscr{L}}$,

$$\overline{\mathrm{co}}(A)=\{x\in E: \Re\langle x, f\rangle\leqslant q_A(f) \text{ для всех } f\in E_{\mathscr{L}}'\}. \qquad \mathbf{(3')}$$

Действительно, пусть *A'*—множество, стоящее в правой части, т. е.

$$A'=\bigcap_{f\in E_{\mathscr{L}}'} E_{f,\, q_A(f)},$$

где

$$E_{f,\, q_A(f)}=\{x\in E: \Re\langle x, f\rangle\leqslant q_A(f)\}.$$

Так как $E_{f,\, q_A(f)}$ есть либо всё *E* (если $q_A(f)=+\infty$ или $f=0$), либо замкнутое полупространство, либо *ф* (если $q_A(f)=-\infty$, т. е. *A = ф),* то в силу В, Е и Д *A′* регулярно выпукло и, значит, $\overline{\mathrm{co}}(A)\subset A'$. С другой стороны, так как $A\subset\overline{\mathrm{co}}(A)$, то $q_A\leqslant q_{\overline{\mathrm{co}}(A)}$ и потому, принимая во внимание Б',

$$A'\subset\{x\in E: \Re\langle x, f\rangle\leqslant q_{\overline{\mathrm{co}}(A)}(f) \text{ для всех } f\in E_{\mathscr{L}}'\}=\overline{\mathrm{co}}(A).$$

Тем самым $\overline{\mathrm{co}}(A)=A'$.

К'. Из (3') непосредственно следует, что $q_{\overline{\mathrm{co}}(A)}\leqslant q_A$; так как, с другой стороны, $q_A\leqslant q_{\overline{\mathrm{co}}(A)}$, то заключаем, что, каково бы ни было $A\subset E_{\mathscr{L}}$,

$$q_{\overline{\mathrm{co}}(A)}(f)=q_A(f) \text{ для всех } f\in E_{\mathscr{L}}', \qquad (5)$$

т. е. *опорная функция множества совпадает с опорной функцией его регулярно выпуклой оболочки.*

Л. *Если* $q_A\leqslant q_B$, *то* $\overline{\mathrm{co}}(A)\subset\overline{\mathrm{co}}(B)$. Действительно, если бы существовало $x_0\in\overline{\mathrm{co}}(A)\setminus\overline{\mathrm{co}}(B)$, то по Б суще-

ствовало бы $f_0 \in E_{\mathscr{L}}'$, для которого $q_{\overrightarrow{\text{co}}(B)}(f_0) < \Re\langle x_0, f_0\rangle$,
а по (2) мы имели бы $\Re\langle x_0, f_0\rangle \leqslant q_{\overrightarrow{\text{co}}(A)}(f_0)$; но из этих двух неравенств, в силу (5), вытекало бы, что

$$q_B(f_0) < q_A(f_0),$$

в противоречие с предположением.

Л'. Из Л непосредственно следует, что *если $q_A = q_B$, то* $\overrightarrow{\text{co}}(A) = \overrightarrow{\text{co}}(B)$. Так как в силу (5) верно и обратное, то заключаем, что *множества в $E_{\mathscr{L}}$ имеют одинаковые опорные функции тогда и только тогда, когда регулярно выпуклые оболочки этих множеств совпадают,* и, в частности, *регулярно выпуклое множество однозначно определяется своей опорной функцией.*

М. *Каждая замкнутая гиперплоскость в $E_{\mathscr{L}}$ регулярно выпукла.* Действительно, собственная замкнутая гиперплоскость X в $E_{\mathscr{L}}$ задается уравнением вида $f(x)=\xi$, где $f \in E_{\mathscr{L}}' \setminus \{0\}$. Значит, в вещественном случае

$$X = E_{f,\,\xi} \cap E_{-f,\,-\xi},$$

а в комплексном (см. 5.1.(12'))

$$X = E_{\Re f,\,\Re\xi} \cap E_{-\Re f,\,-\Re\xi} \cap E_{-\Re(f\circ i),\,\Im\xi} \cap E_{\Re(f\circ i),\,-\Im\xi},$$

так что X регулярно выпукла в силу Е и Д. Регулярная же выпуклость E установлена в В.

Н. *Регулярно выпуклая оболочка аффинного многообразия совпадает с его замыканием.* В самом деле, пусть L — аффинное многообразие в $E_{\mathscr{L}}$, а $\overline{L}$ — пересечение всех содержащих его замкнутых гиперплоскостей. В силу М и Д $\overline{L}$ регулярно выпукло и потому $\overrightarrow{\text{co}}(L) \subset \overline{L}$. С другой стороны, если $x_0 \notin \overrightarrow{\text{co}}(L)$, то, по Б, существует $f_0 \in E_{\mathscr{L}}'$, для которого $q_{\overrightarrow{\text{co}}(L)}(f_0) < \Re\langle x_0, f_0\rangle$. Тем самым, прежде всего, $q_L(f_0) < +\infty$, откуда,в силу 5.1.Д, следует, что $\Re f_0$ постоянно на L, так что $L \subset K_{\Re f_0} + x_1$, где $x_1 \in L$, и $q_L(f_0) = \Re\langle x_1, f_0\rangle$. Так как тогда $\Re\langle x_1, f_0\rangle < \Re\langle x_0, f_0\rangle$, то $x_0 \notin K_{f_0} + x_1$. Но $K_{f_0} + x_1$ есть замкнутая гиперплоскость, содержащая L, а тем самым и $\overline{L}$. В самом деле, в вещественном случае это уже установлено; если же $E_{\mathscr{L}}$ —комплексное, то постоянство $\Re f_0$ на L влечет, в силу 5.1.(12'), постоянство $\Im f_0$ на — lL; но, полагая $F=L - x_1$ и принимая во внимание 3.3.Б 2° и 3.2.Б, имеем $-lL = -lF - lx_1 = F - lx_1$, так что $-lL$ есть аффинное многообразие, параллельное *L;* поэтому вместе с $\Re f_0$ также $\Im f_0$, а значит, и f_0 постоянно на *L,* и тем самым $L \subset K_{f_0} + x_1$. Таким образом, $x_0 \notin \overline{\mathrm{co}}(L)$ влечет $x_0 \notin \overline{L}$. В соединении с установленным выше включением $\overline{\mathrm{co}}(L) \subset \overline{L}$ это показывает, что $\overline{\mathrm{co}}(L) = \overline{L}$. Но согласно 9.5.Ж' $\overline{L}$ есть замыкание *L.*

Н'. Из Н вытекает, что *для аффинных многообразий понятия замкнутости и регулярной выпуклости равносильны.* В частности, *одноточечные множества в* $E_{\mathscr{L}}$ *регулярно выпуклы тогда и только тогда, когда* $E_{\mathscr{L}}$ *отделимо.*

О. *Если регулярно выпуклое множество* $A \subset E_{\mathscr{L}}$ *содержит аффинное многообразие L, то все параллельные* $\overline{L}$ *аффинные многообразия, проходящие через точки множества A, содержатся в A.*

Действительно, в силу 3.3.Б 2° и 3°, аффинное многообразие, параллельное *L,* проходящее через точку $x_0 \in A$, представимо в виде $L - x_1 + x_0$, где $x_1 \in L$. Пусть $f \in E_{\mathscr{L}}'$. Если $\Re f$ не постоянно на *L,* то в силу 5.1.Д $q_L(f) = +\infty$, и так как $L \subset A$, то также $q_A(f) = +\infty$.

Если же $\Re f$ постоянно на *L,* то оно постоянно на $L - x_1 + x_0$ и потому $q_{L-x_1+x_0}(f) = \Re\langle x_0, f\rangle \leqslant q_A(f)$. Таким образом, $q_{L-x_1+x_0}(f) \leqslant q_A(f)$ для всех $f \in E_{\mathscr{L}}'$. Принимая во внимание Н, Л и 9.5.И, заключаем, что $\overline{L} - x_1 + x_0 = \overline{L - x_1 + x_0} \subset A$, т. е. аффинное многообразие, параллельное *L,* проходящее через любую точку $x_0 \in A$, содержится в *A.*

П. Пусть *(E, F; u)* — дуальная пара векторных пространств над **R** или **C**. *Каковы бы ни были* $A \subset E$, *скаляр* λ *и* $z \in E$,

$$q_{\lambda A} = q_A \circ \lambda \tag{6}$$

и

$$q_{A+z} = q_A + \Re u\langle z, \cdot\rangle. \tag{7}$$

Действительно, для любого $y \in F$ имеем

$$\sup_{a \in \lambda A} \Re u(a, y) = \sup_{a \in A} \Re u(\lambda a, y) = \sup_{a \in A} \Re u(a, \lambda y)$$

и

$$\sup_{a \in A+z} \Re u(a, y) = \sup_{a \in A} \Re u(a+z, y) = \sup_{a \in A} [\Re u(a, y) + \Re u(z, y)] =$$
$$= \sup_{a \in A} \Re u(a, y) + \Re u(z, y).$$

П'. *Если* $A \subset E_{\mathscr{L}}$ *регулярно выпукло, то* λA *и* $A + z$

регулярно выпуклы при любых $\lambda \neq 0$ и $z \in E$. Действительно, если $x_0 \notin \lambda A$, где $\lambda \neq 0$, то $\lambda^{-1} x_0 \notin A$, значит, в силу Б существует $f_0 \in E_{\mathscr{L}}'$, для которого $q_A(\lambda f_0) < \Re \langle \lambda^{-1} x_0, \lambda f_0 \rangle$, т. е., принимая во внимание (6), — такое, что $q_{\lambda A}(f_0) < \Re \langle x_0, f_0 \rangle$. Точно так же, если $x_0 \notin A + z$, так что $x_0 - z \notin A$, то, по Б, существует $f_0 \in E_{\mathscr{L}}'$, для которого $q_A(f_0) < \Re \langle x_0 - z, f_0 \rangle$, т. е., принимая во внимание (7),—такое, что $q_{A+z}(f_0) < < \Re \langle x_0, f_0 \rangle$. Остается в обоих случаях снова применить Б.

Р. *Операция образования регулярно выпуклой оболочки перестановочна с гомотетиями,* т. е.

$$\overline{\text{co}}(\lambda A) = \lambda \, \overline{\text{co}}(A) \text{ для всех } A \subset E_{\mathscr{L}} \text{ и } \lambda \neq 0. \qquad \textbf{(6')}$$

В самом деле, в силу (3') и (6) имеем

$$\overline{\text{co}}(\lambda A) = \{x \in E: \Re \langle x, f \rangle \leqslant q_{\lambda A}(f) \text{ для всех } f \in E_{\mathscr{L}}'\} =$$
$$= \{x \in E: \Re \langle \lambda^{-1} x, \lambda f \rangle \leqslant q_A(\lambda f) \text{ для всех } f \in E_{\mathscr{L}}'\} =$$
$$= \lambda \{x \in E: \Re \langle x, f \rangle \leqslant q_A(f) \text{ для всех } f \in E_{\mathscr{L}}'\} = \lambda \, \overline{\text{co}}(A).$$

Аналогично доказывается, что *операция образования регулярно выпуклой оболочки перестановочна с переносами,* т. е.

$$\overline{\text{co}}(A + z) = \overline{\text{co}}(A) + z \text{ для всех } A \subset E_{\mathscr{L}} \text{ и } z \in E. \qquad \textbf{(7')}$$

С. *Каково бы ни было $A \subset E_{\mathscr{L}}$,*

$$\overrightarrow{\text{co}}(A) = \overrightarrow{\text{co}}(\text{co}(A))$$

(см. 7.3.А). Действительно, в силу И, Г и 7.3.А

$$\overrightarrow{\text{co}}(A) \subset \overrightarrow{\text{co}}(\text{co}(A)) \subset \overrightarrow{\text{co}}(\overrightarrow{\text{co}}(A)) = \overrightarrow{\text{co}}(A).$$

Т. *Регулярно выпуклая оболочка абсолютно выпуклого множества $A \subset E_{\mathscr{L}}$ абсолютно выпукла.* Действительно, если $|\omega| = 1$, то, по 7.2.А, $\omega A = A$ и потому в силу (6′), $\omega \, \overline{\text{co}}(A) = \overline{\text{co}}(\omega A) = \overline{\text{co}}(A)$. С другой стороны, по И и Г, $\overline{\text{co}}(A)$ выпукло. Следовательно, в силу 7.2. А $\overline{\text{co}}(A)$ абсолютно выпукло.

У. *Если (E, F; u)— дуальная пара векторных пространств над* **R** *или* **C** *и множество $A \subset E$ абсолютно выпукло, то*

$$q_A(y) = \sup_{a \in A} |u(a, y)|.$$

Действительно, так как $\Re u(x, y) \leqslant |u(x, y)|$, то $q_A(y) \leqslant \leqslant \sup_{a \in A} |u(a, y)|$.

С другой стороны, полагая $\theta = \arg u(a, y)$ и принимая во внимание, что, по 7.2.А, $a \in A$ влечет $e^{-i\theta} a \in A$, имеем при $a \in A$:

$$|u(a, y)| = u(e^{-i\theta}a, y) = \Re u(e^{-i\theta}a, y) \leqslant q_A(y),$$

откуда

$$\sup_{a \in A} |u(a, y)| \leqslant q_A(y).$$

11.2. Поляры

Определение 4. Пусть *(E, F; u)* — дуальная пара векторных пространств над **R** или **C**. *Полярой* множества $A \subset E$ в F относительно *u* будет называться множество

$$A^\circ = \{y \in F:\ \Re u(a, y) \leqslant 1 \ \text{для всех}\ a \in A\}, \quad \textbf{(1)}$$

а полярой множества $B \subset F$ — его поляра в E относительно транспонированной билинейной функции *u'*, т. е. множество

$$B^\circ = \{x \in E:\ \Re u(x, b) \leqslant 1 \ \text{для всех}\ b \in B\}.$$

Под $C^{\circ\circ}$ и $C^{\circ\circ\circ}$, где $C \subset E\ (F)$, будет пониматься соответственно $(C^\circ)^\circ$ и $(C^{\circ\circ})^\circ$. $C^{\circ\circ}$ будет называться *биполярой* множества C. В соответствии с этим полярой множества $A \subset E_{\mathscr{L}}$ мы будем называть (рассматривая, как обычно, $E_{\mathscr{L}}$ в дуальной паре с $E_{\mathscr{L}}'$) множество

$$A^\circ = \{f \in E_{\mathscr{L}}':\ \Re\langle a, f\rangle \leqslant 1 \ \text{для всех}\ a \in A\}, \quad (2)$$

а биполярой — множество

$$A^{\circ\circ} = \{x \in E:\ \Re\langle x, f\rangle \leqslant 1 \ \text{для всех}\ f \in A^\circ\}. \quad (3)$$

А. Очевидно, $0 \in C^\circ$ *для любого* $C \subset E\ (F)$.

Б. Из определения 4 непосредственно следует:

1° $C \subset D$ *влечет* $D^\circ \subset C^\circ$.

2° $C \subset C^{\circ\circ}$.

3° $\left(\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha\right)^\circ = \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha^\circ$.

Повторноприменяя 1°, получаем

4° $C \subset D$ *влечет* $C^{\circ\circ} \subset D^{\circ\circ}$.

В. $C^{\circ\circ\circ} = C^\circ$. Для доказательства нужно лишь заменить в 6.2.В аннуляторы полярами.

В'. *Для того чтобы множество $C \subset E$ (F) было полярой какого-нибудь множества из F (E), необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало со своей биполярой.* Действительно, достаточность условия очевидна; если же $C = D^\circ$, то в силу В $C^{\circ\circ} = D^{\circ\circ\circ} = D^\circ = C$.

Г. *Если $C \subset E$ (F), то $C^{\circ\circ}$ — наибольшее из множеств $M \subset E$ (F), для которых* $M^\circ = C^\circ$ (и, равным образом,— из тех *M,* для которых

$M^\circ \supset C^\circ$). Для доказательства нужно лишь заменить в 6.2.Г аннуляторы полярами.

Д. Пользуясь опорными функциями (см. определение 1), можно записать формулы (1) (соответственно (2)) и (3) в виде

$$A^\circ = \{y \in F:\ q_A(y) \leqslant 1\} \qquad (A^\circ = \{f \in E_{\mathscr{Y}}':\ q_A(f) \leqslant 1\}) \quad (4)$$

или

$$A^\circ = q_A^{-1}([-\infty,\ 1]), \quad (5)$$

и

$$A^{\circ\circ} = \{x \in E:\ q_{A^\circ}(x) \leqslant 1\}. \quad \textbf{(6)}$$

Е. *Если λ≠0; то* $(\lambda C)^\circ = \lambda^{-1}C^\circ$. Действительно, пусть, скажем, $C \subset E$. В силу (5) и 1.(6) имеем

$$(\lambda C)^\circ = q_{\lambda C}^{-1}([-\infty,\ 1]) = (q_C^{-1} \circ \lambda)([-\infty,\ 1]) = \\ = \lambda^{-1}q_C^{-1}([-\infty,\ 1]) = \lambda^{-1}C^\circ.$$

Ж. *Если $A \subset \lambda B$, где λ≠0, то* $B^\circ \subset \lambda A^\circ$. Действительно, в силу Е и Б1° $\lambda^{-1}B^\circ = (\lambda B)^\circ \subset A^\circ$.

З. *Поляра множества $C \subset E$ (F), инвариантного относительно всех гомотетий, совпадает с его аннулятором.* В самом деле, пусть $x \in C$, $y \in C^\circ$ и $\rho > 0$. Так как, по условию, $\pm \rho x \in C$, то $\Re u(\pm \rho x,\ y) \leqslant 1$, т. е. $-\dfrac{1}{\rho} \leqslant \Re u(x,\ y) \leqslant \dfrac{1}{\rho}$.

Ввиду произвольности ρ заключаем, что $\Re u(x,\ y) = 0$ для всех $x \in C$. Принимая во внимание, что в комплексном случае вместе с x также $-ix \in C$, получаем (см. 5.1.Е), что тогда и $\Im u(x,\ y) = \Re u(-ix,\ y) = 0$ для всех $x \in C$. Тем самым $y \in C^\perp$, т. е. $C^\circ \subset C^\perp$. Обратное же включение очевидно.

З'. В частности, *поляра подпространства совпадает с его аннулятором.*

И. *Поляра выпукла.* Действительно, если, скажем, $C \subset E$, то для любых $y_1,\ y_2 \in C^\circ$ и $\rho \in (0,\ 1)$ в силу 1.А и (4) имеем

$$q_C((1-\rho)x_1 + \rho x_2) \leqslant (1-\rho)q_C(x_1) + \rho q_C(x_2) \leqslant (1-\rho) + \rho = 1.$$

К. *Поляра абсолютно выпуклого множества A абсолютно выпукла.* В самом деле, если |ω| = 1, то, по 7.2.А, $\omega^{-1}A = A$ и потому в силу Е $\omega A^\circ = (\omega^{-1}A)^\circ = A^\circ$. С другой стороны, по И, A^0 выпукло. Следовательно, по 7.2.А, A° абсолютно выпукло.

Л. *Если множество $A \subset E$ абсолютно выпукло, то определение* (1) *или* (2) *его поляры может быть представлено в форме*

$$A^\circ = \{y \in F:\ |u(a,\ y)| \leqslant 1 \ \textit{для всех}\ a \in A\} \quad \textbf{(1')}$$

или соответственно

$$A^{\circ} = \{f \in E'_{\mathscr{L}}:\ |\langle a,\ f\rangle| \leqslant 1\ \text{для всех}\ a \in A\}. \qquad (2')$$

Действительно, это непосредственно следует из 1.У.

М. Пусть E и F—векторные пространства над одним и тем же полем К и u— билинейная функция на $E \times F$. В силу 6.1.Б' и теоремы 1 § 9 в E и F существуют однозначно определенные L-структуры $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ такие, что

$$E'_{\mathscr{L}} = \{u_{\cdot y}:\quad y \in F\} \quad \text{и} \quad F'_{\mathscr{M}} = \{u_{x\cdot}:\ x \in E\},$$

т. е.

$$\mathscr{L} = \{K_{u_{\cdot y}}:\ y \in F\} \quad \text{и} \quad \mathscr{M} = \{K_{u_{x\cdot}}:\ x \in E\}.$$

Мы будем говорить, что $E_{\mathscr{L}}$ и $F_{\mathscr{M}}$ образуют *дуальную пару L-пространств* относительно u, и обозначать ее $(E_{\mathscr{L}},\ F_{\mathscr{M}};\ u)$. Таким образом, *каждая дуальная пара векторных пространств (E, F; u) порождает однозначно определенную дуальную пару L-пространств* $(E_{\mathscr{L}},\ F_{\mathscr{M}};\ u)$.

M'. Из теоремы 1 § 9 и определения 1 § 10 непосредственно следует, что $E_{\mathscr{L}}$ *и* $E'_{\mathscr{L}\,\mathscr{L}'}$ *образуют дуальную пару L-пространств относительно билинейной функции*

$\langle x,\ f\rangle_{\mathscr{L}}$.

Теорема 1. *Пусть* $(E_{\mathscr{L}},\ F_{\mathscr{M}};\ u)$*—дуальная пара L-пространств. Для того чтобы множество B* $\subset$ *F (E) было полярой какого-нибудь множества A* $\subset$ *E (F), т. е. (по* В'*) совпадало со своей биполярой, необходимо и достаточно, чтобы B было регулярно выпукло в* $F_{\mathscr{M}}$ $(E_{\mathscr{L}})$ *и содержало нулевой вектор.*

Доказательство. 1° Пусть, скажем, $A \subset E$. Если $y_0 \notin A^{\circ}$, то, согласно (1), существует $x_o \in A$ такое, что $\Re u(x_0,\ y_0) > 1$. Но в силу Б 2° и (6) $q_{A^{\circ}}(x_0) \leqslant 1$. Принимая во внимание М, заключаем, что для каждого $y_0 \notin A^{\circ}$ существует $g_0 \in F'_{\mathscr{M}}$, а именно $g_0 = u_{x_0\cdot}$, для которого

$$q_{A^{\circ}}(g_0)(= q_{A^{\circ}}(x_0)) < \Re\langle y_0,\ g_0\rangle (= \Re u(x_0,\ y_0)).$$

Но это означает, по 1.Б, что A° регулярно выпукло в $F_{\mathscr{M}}$. При этом согласно А $0 \in A^{\circ}$.

2° Пусть B — регулярно выпуклое множество в $F_{\mathscr{M}}$, содержащее нулевой вектор, и $y_0 \notin B$. По М и 1.Б, существует $g_0 = u_{x_0\cdot} \in F'_{\mathscr{M}}$, для которого

$$q_B(x_0)(= q_B(g_0)) < \Re u(x_0,\ y_0)(= \Re\langle y_0,\ g_0\rangle).$$

Возьмем произвольное число ρ, удовлетворяющее неравенствам

$$q_B(x_0) < \rho < \Re u(x_0, y_0). \qquad (7)$$

Так как $0 \in B$, *то* $q_B(x_0) \geqslant 0$ и потому $\rho > 0$. Деля (7) на ρ, получаем

$$q_B\left(\frac{x_0}{\rho}\right) < 1 < \Re u\left(\frac{x_0}{\rho}, y_0\right).$$

Первое из этих неравенств показывает, что $\frac{x_0}{\rho} \in B^\circ$. Но тогда из второго следует, что $y_0 \notin B^{\circ\circ}$. Итак, мы показали, что $y_0 \notin B$ влечет $y_0 \notin B^{\circ\circ}$, т. е. что $B^{\circ\circ} \subset B$. Принимая во внимание Б 2°, заключаем, что $B = B^{\circ\circ}$ и тем самым B — поляра.

Из теоремы 1 в силу М' непосредственно следует

Теорема 1'. *Множество* $B \subset E_{\mathcal{L}}'$ (E) *является полярой некоторого множества* $A \subset E$ $(E_{\mathcal{L}}')$, *т. е. (по* В') *совпадает со своей биполярой, тогда и только тогда. когда оно регулярно выпукло в* $E_{\mathcal{L}}'{}_{\mathcal{L}'}$ $(E_{\mathcal{L}})$

и содержит нулевой вектор.

Н. Пусть $(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}}; u)$ — дуальная пара L-пространств. Для любого $A \subset E_{\mathcal{L}}$ $(F_{\mathcal{M}})$ имеет место равенство

$$A^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\}),$$

т. е. *биполяра множества в L-пространстве совпадает с регулярно выпуклой оболочкой объединения его с нулевым вектором.* В самом деле, будучи, в силу теоремы 1, регулярно выпуклым множеством в $E_{\mathcal{L}}$ $(F_{\mathcal{M}})$, содержащим нулевой вектор, $A^{\circ\circ} \supset \overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\})$. С другой стороны, так как $\overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\})$ — регулярно выпуклое множество, содержащее нулевой вектор, то в силу теоремы 1 и Б 2° $\overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\}) =$

$$= (\overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\}))^{\circ\circ} \supset A^{\circ\circ}.$$

О. Пусть $(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}}; u)$ —дуальная пара L-пространств. *Поляра в* $F_{\mathcal{M}}$ $(E_{\mathcal{L}})$ *пересечения семейства регулярно выпуклых множеств* $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *из содержащих* $E_{\mathcal{L}}$ $(F_{\mathcal{M}})$, *нулевой вектор, совпадает с регулярно выпуклой оболочкой объединения их поляр.* Действительно, в силу теоремы 1, Б3° и Н имеем

$$\left(\bigcap_{\alpha \in \mathrm{A}} A_\alpha\right)^\circ = \left(\bigcap_{\alpha \in \mathrm{A}} A_\alpha^{\circ\circ}\right)^\circ = \left(\bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} A_\alpha^\circ\right)^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} A_\alpha^\circ\right).$$

Определение 5. *Бочкой* в L-пространстве будет называться всякое его регулярно выпуклое поглощающее подмножество.

П. Пусть $(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}}; u)$—дуальная пара L-пространств.

Функционал Минковского всякой бочки $A \subset E_{\mathscr{L}}$ $(F_{\mathscr{M}})$ *совпадает с опорной функцией ее поляры в* $F_{\mathscr{M}}$ $(E_{\mathscr{L}})$. Действительно, в силу теоремы 1 и (6)

$$p_A(x) = \{\inf \rho:\ \rho > 0 \text{ и } x \in \rho A\} = \{\inf \rho:\ \rho > 0 \text{ и } \rho^{-1}x \in A^{\circ\circ}\} =$$
$$= \{\inf \rho:\ \rho > 0 \text{ и } q_{A^\circ}(\rho^{-1}x) \leqslant 1\}.$$

Но

$$\{\inf \rho:\ \rho > 0 \text{ и } q_{A^\circ}(\rho^{-1}x) \leqslant 1\} = q_{A^\circ}(x).$$

В самом деле, так как $0 \in A^\circ$, то $\rho_x = q_{A^\circ}(x) \geqslant 0$ для всех $x \in E$, и потому

$$q_{A^\circ}(\rho^{-1}x)\begin{cases} < 1, & \text{если } \rho > \rho_x, \\ > 1, & \text{если } 0 < \rho < \rho_x. \end{cases}$$

Тем самым

$$p_A(x) = q_{A^\circ}(x).$$

Р. Из (4) и 1.(5) следует, что

$$(\overline{\mathrm{co}}\,(A))^\circ = A^\circ.$$

С. *Пусть* $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}},\ F_{\mathscr{M}})$.

1° *Если* $A \subset$ Е, *то*

$$(\varphi(A))^\circ = \varphi'^{-1}(A^\circ). \tag{8}$$

В самом деле,

$$(\varphi(A))^\circ = \{g \in F_{\mathscr{M}}':\ \Re\langle a,\ \varphi'(g)\rangle =$$
$$= \Re\langle \varphi(a),\ g\rangle \leqslant 1 \text{ для всех } a \in A\} =$$
$$= \{g \in F_{\mathscr{M}}':\ \varphi'(g) \in A^\circ\}.$$

В силу следствия теоремы 1 § 10 из (8) вытекает, что *если* φ — *изоморфизм* $E_{\mathscr{L}}$ *в* $F_{\mathscr{M}}$, *то* $\varphi'((\varphi(A))^\circ) = A^\circ$.

2° *Если* $D \subset F_{\mathscr{M}}'$, *то*

$$(\varphi'(D))^\circ = \varphi^{-1}(D^\circ). \tag{8'}$$

Действительно,

$$(\varphi'(D))^\circ = \{x \in E:\ \Re\langle \varphi(x),\ g\rangle =$$
$$= \Re\langle x,\ \varphi'(g)\rangle \leqslant 1 \text{ для всех } g \in D\} =$$
$$= \{x \in E:\ \varphi(x) \in D^\circ\}.$$

Из (8') вытекает, что *если* φ — *наложение, то* $\varphi((\varphi'(D))^\circ) = D^\circ$.

3° *Если* $\varphi(A) \subset B$, *то* $\varphi'(B^\circ) \subset A^\circ$. Действительно, всилу Б 1° и Г $B^\circ \subset (\varphi(A))^\circ = \varphi'^{-1}(A^\circ)$, откуда $\varphi'(B^\circ) \subset$

$$\subset \varphi'(\varphi'^{-1}(A^\circ)) \subset A^\circ.$$

4° *Если* $\varphi'(D) \subset C$, *то* $\varphi(C^\circ) \subset D^\circ$. В самом деле, в силу Б1° и 2° ' $C^\circ \subset (\varphi'(D))^\circ = \varphi^{-1}(D^\circ)$, откуда $\varphi(C^\circ) \subset$
$\subset \varphi(\varphi^{-1}(D^\circ)) \subset D^\circ$.

5° *Если* $A \subset E_{\mathscr{L}}$, $B \subset F_{\mathscr{M}}$ *—регулярно выпуклое множество, содержащее нулевой вектор, и* $\varphi'(B^\circ) \subset A^\circ$, *то* $\varphi(A) \subset B$. Действительно, в силу Б 2° и 4°, $\varphi(A) \subset \varphi(A^{\circ\circ}) \subset B^{\circ\circ}$, а по теореме 1' $B^{\circ\circ} = B$.

11.3. *L*-ограниченные множества

Определение 6: Множество $A \subset E_{\mathscr{L}}$ будет называться *L-ограниченным,* если на нем ограничен каждый линейный функционал, т. е.

$$\tilde{q}_A(f) = \sup_{a \in A} |\langle a, f \rangle| < +\infty \text{ для всех } f \in E_{\mathscr{L}}'.$$

А. Очевидно, *каждое конечное множество в* $E_{\mathscr{L}}$ *L-ограничено.*

Б. Из определения 6 непосредственно следует:

1° *Всякое подмножество L-ограниченного множества L-ограниченно.*

2° *L-ограниченностъ сохраняется при гомотетиях и переносах.*

3° *Объединение конечного семейства L-ограниченных множеств L-ограниченно.*

1° *Сумма A+B L-ограниченных множеств A и B L-ограниченна.*

В. *Абсолютно выпуклая оболочка* Г (А) *L-ограниченного множества A L-ограниченна.* Действительно, согласно 7.3.3 всякое $a \in \Gamma(A)$ представимо в виде $a = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha a_\alpha$, где все $a_\alpha \in A$ и $\sum_{\alpha \in A} |\lambda_\alpha| \leqslant 1$. Но тогда

$$|\langle a, f \rangle| \leqslant \sum_{\alpha \in A} |\lambda_\alpha| \, |\langle a_\alpha, f \rangle| \leqslant \tilde{q}_A(f) \sum_{\alpha \in A} |\lambda_\alpha| \leqslant \tilde{q}_A(f)$$

и потому $\tilde{q}_{\Gamma(A)}(f) \leqslant \tilde{q}_A(f) < +\infty$ для всех $f \in E_{\mathscr{L}}'$, т. е. Г (*A*) *L*-ограниченно.

В'. Из В и Б 1° следует, что *выпуклая оболочка L-ограниченного множества L-ограниченна.*

Г. *Образ L-ограниченного множества при L-отображении L-ограничен.* Действительно, если *A* — *L*-ограниченное множество в $E_{\mathscr{L}}$ и $\varphi \in L(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}})$, то

$$\tilde{q}_{\varphi(A)}(g) = \sup_{a \in A} |\langle \varphi(a), g \rangle| = \sup_{a \in A} |\langle a, \varphi'(g) \rangle| = \\ = \tilde{q}_A(\varphi'(g)) < +\infty \text{ для всех } g \in F_{\mathcal{M}}'.$$

Г'. Из Г, в частности, следует, что *при каноническом наложении L-пространства на его факторпространство каждое L-ограниченное множество переходит в L-ограниченное множество.*

Д. *Если* $G_{\mathcal{N}} \subset\subset E_{\mathcal{L}}$, *то множество* $A \subset G_{\mathcal{N}}$ *L-ограниченно в* $G_{\mathcal{N}}$ *тогда и только тогда, когда оно L-ограниченно в* $E_{\mathcal{L}}$. В самом деле, если *A* *L*-ограниченно в $G_{\mathcal{N}}$, то оно *L*-ограниченно в $E_{\mathcal{L}}$ в силу Г, поскольку каноническое вложение $G_{\mathcal{N}}$ в $E_{\mathcal{L}}$, по определению 6 § 9, есть L-отображение. Обратно, если *A* *L*-ограниченно в $E_{\mathcal{L}}$, то оно L-ограниченно в $G_{\mathcal{N}}$, поскольку каждый линейный функционал $g \in G_{\mathcal{N}}'$, согласно 9.6.Д', является сужением на *G* некоторого линейного функционала $f \in E_{\mathcal{L}}'$ и потому ограничен на *A*.

Е. *Для того чтобы непустое множество* $A \subset E_{\mathcal{L}}$ *было L-ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы его опорная функция* $q_A(f)$ *была конечна для всех* $f \in E_{\mathcal{L}}'$. Действительно, необходимость условия следует из того, что $q_A \leqslant \tilde{q}_A$. С другой стороны, так как в вещественном случае

$$|\langle x, f \rangle| = \max\{\langle x, f \rangle, \langle x, -f \rangle\},$$

а в комплексном, в силу 5.1.(12'),

$$|\langle x, f \rangle| \leqslant |\Re\langle x, f \rangle| + |\Im\langle x, f \rangle| = \\ = |\Re\langle x, f \rangle| + |\Re\langle x, -f \circ i \rangle| = \\ = \max\{\Re\langle x, f \rangle, \Re\langle x, -f \rangle\} + \\ + \max\{\Re\langle x, -f \circ i \rangle, \Re\langle x, f \circ i \rangle\},$$

то в вещественном случае

$$\tilde{q}_A(f) \leqslant \max\{q_A(f), q_A(-f)\},$$

а в комплексном

$$\tilde{q}_A(f) \leqslant \max\{q_A(f), q_A(-f)\} + \max\{q_A(-f \circ i), q_A(f \circ i)\}.$$

Поэтому, если q_A всюду конечно, то в обоих случаях и $\tilde{q}_A$ всюду конечно, а значит, *A* *L*-ограниченно.

Ж. *Регулярно выпуклая оболочка L-ограниченного множества L-ограниченна.* Это непосредственно следует из Е в силу 1.К'. Принимая во внимание В, заключаем, что *если множество A L-ограниченно, то и его «регулярно абсолютно выпуклая оболочка»* $\overline{\mathrm{co}}(\Gamma(A))$ *L-ограниченна.*

Ж'. Так как $A \cup \{0\} \subset \Gamma(A)$, то из Ж, в силу 2.Н, вытекает, что *биполяра L-ограниченного множества L- ограниченна.*

3. *Пусть* $(E_{\mathscr{L}}, F_{\mathscr{M}}; u)$ — *дуальная пара L-пространств. Для того чтобы множество $A \subset E$ (F) было L-ограниченным в $E_{\mathscr{L}}$, необходимо и достаточно, чтобы его поляра A° в $F_{\mathscr{M}}$ была бочкой.* Действительно, когда y пробегает F, то, согласно 2.М, $f_y = u_{\cdot y}$ пробегает $E_{\mathscr{L}}'$. Поэтому L-ограниченность A означает конечность $q_A(y) = q_A(f_y)$ для всех $y \in F$. Но, как следует из 2.(4), каково бы ни было $y \in F$, тогда $y \in \rho A^\circ$ для всех $\rho > \max\{q_A(y), 0\}$, так что A°—поглощающее множество в F. Принимая во внимание теорему 1, заключаем, что A°— бочка в $F_{\mathscr{M}}$. Обратно, если A° — бочка в $F_{\mathscr{M}}$, то для каждого $y \in F$ существует $\rho > 0$ такое, что $y \in \rho A^\circ$, откуда следует, на основании 2,(4), что $q_A(f_y) = q_A(y) \leqslant \rho$; но в силу Е это означает, что A L-ограниченно в $E_{\mathscr{L}}$.

И. *L-ограниченность есть свойство счетного характера,* т. е. *множество $A \subset E_{\mathscr{L}}$ L-ограниченно тогда и только тогда, когда каждое его счетное подмножество L-ограниченно.* Действительно, «только тогда» следует из Б 1°; если же A не L-ограниченно, то существует линейный функционал $f \in E_{\mathscr{L}}'$, не ограниченный на A, и, значит, последовательность попарно различных элементов $x_n \in A$, для которой $\langle x_n, f\rangle \to \infty$, а тогда счетное подмножество $\{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset A$ не L-ограниченно.

К. *Пусть* $\left(E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}\right)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — *семейство вещественных (комплексных) L-пространств, E — вещественное (комплексное) векторное пространство,* $\varphi_\alpha \in \mathscr{L}(E, E^\alpha)$ *для каждого* $\alpha \in \mathrm{A}$ *и* $\mathscr{L}$ — *слабейшая из L-структур* $\mathscr{L}'$ *в E, при которых все* $\varphi_\alpha \in L\left(E_{\mathscr{L}'}, E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}\right)$. *Множество $A \subset E$ L-ограниченно в $E_{\mathscr{L}}$ тогда и только тогда, когда каждое $\varphi_\alpha(A)$ L-ограниченно в* $E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$.

Действительно, «тогда» следует из 9.4.В, а «только тогда»—из Г.

К'. Из К и определения 9 § 9 непосредственно вытекает, что *множество*

$$A \subset \prod_{\alpha \in \mathrm{A}} E^\alpha$$

L-ограниченно в $\prod\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$ *тогда и только тогда, когда каждая его проекция* $\mathrm{pr}_\alpha(A)$ *L-ограниченна в* $E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$.

Л. *Пусть* $E_{\mathscr{L}} = \sum\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$ *и* ω — *канонерское вложение*

$\sum_{\alpha\in A} E^{\alpha}$ в $\prod_{\alpha\in A} E^{\alpha}$.

Множество $A \subset E$ L-ограниченно в $E_{\mathscr{L}}$ тогда и при отделимости $E_{\mathscr{L}}$ только тогда, когда множества A_α тех $x^{\alpha} \in E^{\alpha}$, для которых существует $x \in E$ с $x_\alpha = x^\alpha$, L-ограниченны для каждого $\alpha \in$ A и притом множество A' тех $\alpha \in$ A, для которых $A_\alpha \setminus \{0\} \neq \phi$, конечно.

Действительно, пусть эти условия выполнены. В силу 9.9.3 тогда для всех $x \in A$ и $\bar{f} \in E_{\mathscr{L}}'$ имеем

$$\langle x, \bar{f}\rangle = \sum_{\alpha\in A'} \langle x_\alpha, \bar{f}\circ \mathrm{in}_\alpha\rangle,$$

откуда

$$\tilde{q}_A(\bar{f}) \leqslant \sum_{\alpha\in A'} \tilde{q}_{A_\alpha}(\bar{f}\circ \mathrm{in}_\alpha) < +\infty,$$

и значит, A L-ограниченно. Обратно, пусть A L-ограниченно, а $E_{\mathscr{L}}$ отделимо. Так как $A_\alpha = \mathrm{pr}_\alpha(\omega(A))$, то в силу Г и 9.9.Л каждое A_α L-ограниченно. Пусть, вопреки утверждению, A' бесконечно. Так как у каждого $x \in E$ лишь конечное число $x_\alpha \neq 0$, то тогда можно индуктивно построить бесконечную последовательность A'' попарно различных индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ такую, что для каждого n существует $x^n \in A$, у которого $x^n_{\alpha_n} \neq 0$, а $x^n_{\alpha_m}$ при всех $m > n$ равно 0. Далее, так как отделимость $E_{\mathscr{L}}$ влечет отделимость всех $E^{\alpha}_{\mathscr{L}_\alpha}$ (9.9.И), то с помощью индукции легко убедиться в том, что для каждого n существует $f_{\alpha_n} \in E^{\alpha_n\,\prime}_{\mathscr{L}_{\alpha_n}}$, удовлетворяющее неравенству

$$\left|\langle x^n_{\alpha_n}, f_{\alpha_n}\rangle\right| > \sum_{k=1}^{n-1} \left|\langle x^n_{\alpha_k}, f_{\alpha_k}\rangle\right| + n.$$

Взяв $f = (f^\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} E^{\alpha\,\prime}_{\mathscr{L}_\alpha}$, где

$$f^\alpha = \begin{cases} f_{\alpha_n} & \text{при } \alpha = \alpha_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{при } \alpha \notin A'', \end{cases}$$

мы для линейного функционала

$\bar{f} \in E_{\mathscr{L}}'$,

определяемого формулой

$$\langle x, \bar{f}\rangle = \sum_{\alpha\in A} \langle x_\alpha, f^\alpha\rangle$$

(см. 9.9.3). получим

$$|\langle x^n, \bar{f}\rangle| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\langle x^n_{\alpha_k}, f_{\alpha_k}\rangle\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\langle x^n_{\alpha_k}, f_{\alpha_k}\rangle\right| \geqslant$$
$$\geqslant \left|\langle x^n_{\alpha_n}, f_{\alpha_n}\rangle\right| - \sum_{k=1}^{n-1}\left|\langle x^n_{\alpha_k}, f_{\alpha_k}\rangle\right| > n,$$

так что $\bar{f}$ не ограничен на A. Так как это противоречит предположению, что A L-ограниченно, то заключаем, что A' конечно.

11.4. Совершенно выпуклые множества. Теорема Крейна — Мильмана

В этом разделе рассматриваются только вещественные L-пространства.

Определение 7. Множество A в вещественном L-пространстве $E_{\mathscr{L}}$ будет называться *совершенно выпуклым,* если для всякой линейной функции $s \in E_{\mathscr{L}}'^{*}$, мажорируемой опорной функцией множества $A,$ т. е. удовлетворяющей условию

$$\langle f, s\rangle \leqslant q_A(f) = \sup_{a \in A}\langle a, f\rangle \text{ для всех } f \in E_{\mathscr{L}}',$$

существует $x \in A$ такое, что $s = \langle x, \cdot\rangle_{\mathscr{L}}$, т. е.

$$\langle f, s\rangle = \langle x, f\rangle \text{ для всех } f \in E_{\mathscr{L}}'.$$

А. Сравнение определений 2 и 7 показывает, что *всякое совершенно выпуклое множество регулярно выпукло* (и *тем самым, по* 1.Г, *выпукло).*

А'. *В конечномерном L-пространстве $E_{\mathscr{L}}$ всякое регулярно выпуклое множество совершенно выпукло.* Действительно, так как $E_{\mathscr{L}}'_{\mathscr{L}'}$ отделимо (10.1.А) и конечномерно (9.3.Б'), то $E_{\mathscr{L}}'^{*} = E_{\mathscr{L}}''$ (9.3.Б) и потому всякое $s \in E_{\mathscr{L}}'^{*}$ представимо в виде $s = \langle x, \cdot\rangle_{\mathscr{L}}$, где $x \in E$ (10.1.Б).

Б. *Пересечение совершенно выпуклого множества A и з$E_{\mathscr{L}}$ с регулярно выпуклым множеством B совершенно выпукло.* Действительно, если $s \in E_{\mathscr{L}}'^{*}$ удовлетворяет условию

$$s \leqslant q_{A \cap B},$$

то в силу 1.A' $s \leqslant q_A$, откуда, вследствие совершенной выпуклости множества $A,$ $s = \langle x, \cdot\rangle_{\mathscr{L}}$, где $x \in A.$ Но тогда $\langle x, \cdot\rangle_{\mathscr{L}} \leqslant q_{A \cap B} \leqslant q_B$, и так как B регулярно выпукло, то $x \in B.$ Тем самым $s \leqslant q_{A \cap B}$ влечет $s = \langle x, \cdot\rangle_{\mathscr{L}}$, где $x \in A \cap B$, т. е. $A \cap B$ совершенно выпукло.

В частности, *всякое регулярно выпуклое подмножество совершенно выпуклого множества совершенно выпукло.*

В. *Если A — L-ограниченное совершенно выпуклое множество в $E_{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{L}_1 \leqslant \mathcal{L}$, то A — L-ограниченное совершенно выпуклое множество также в $E_{\mathcal{L}_1}$.* В самом деле, так как $E_{\mathcal{L}_1}' \subset\subset E_{\mathcal{L}}'$ (9.1.Е), то L-ограниченность A в $E_{\mathcal{L}_1}$ следует из 3.Е. Пусть s_1 — линейная функция на $E_{\mathcal{L}_1}'$, удовлетворяющая неравенству $\langle f_1, s_1\rangle \leqslant q_A(f_1)$ для всех $f_1 \in E_{\mathcal{L}_1}'$. Так как в силу L-ограниченности A в $E_{\mathcal{L}}$ q_A—конечная сублинейная функция на $E_{\mathcal{L}}'$ (см. 1.А), то, по теореме 1 § 8, s_1 обладает продолжением $s \in E_{\mathcal{L}}'^*$, мажорируемым функцией q_A на всем $E_{\mathcal{L}}'$. Но всилу совершенной выпуклости множества A в $E_{\mathcal{L}}$ тогда существует $a \in A$ такое, что $\langle f, s\rangle = \langle a, f\rangle$ для всех $f \in E_{\mathcal{L}}'$. Значит, в частности, $\langle f_1, s_1\rangle = \langle f_1, s\rangle = \langle a, f_1\rangle$ для всех $f_1 \in E_{\mathcal{L}_1}'$ и тем самым A совершенно выпукло в $E_{\mathcal{L}_1}$.

Г. Более общим образом, *если. A — L-ограниченное совершенно выпуклое множество в $E_{\mathcal{L}}$ и $\varphi \in L(E_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{M}})$, то $\varphi(A)$ — L-ограниченное совершенно выпуклое множество в $F_{\mathcal{M}}$.* Действительно, L-ограниченность $\varphi(A)$ установлена в 3.Г. Пусть t — линейная функция на $F_{\mathcal{M}}'$, мажорируемая опорной функцией множества $\varphi(A)$, т. е.

$$\langle g, t\rangle \leqslant \sup_{y \in \varphi(A)} \langle y, g\rangle = \sup_{x \in A} \langle \varphi(x), g\rangle = \sup_{x \in A} \langle x, \varphi'(g)\rangle \text{ для всех } g \in F_{\mathcal{M}}'. \quad (1)$$

Если $g \in K_{\varphi'}$, так что и $-g \in K_{\varphi'}$, то в силу (1) $(g, t) \leq$ и $(-g, t) \leq 0$, откуда $g \in K_t$. Поэтому в силу теоремы 1 § 4 $t = s \circ \varphi'^{\wedge}$, где s — линейная функция на $R_{\varphi'}$, так что (1) принимает вид

$$\langle \varphi'(g), s\rangle \leqslant \sup_{x \in A} \langle x, \varphi'(g)\rangle \quad \text{для всех } g \in F_{\mathcal{M}}',$$

т. е.

$$\langle h, s\rangle \leqslant \sup_{x \in A} \langle x, h\rangle \quad \text{для всех } h \in R_{\varphi'}. \quad (1')$$

Но так как $R_{\varphi'} \subset\subset E_{\mathcal{L}}'$, то $\mathcal{L}_{R_{\varphi'}} = \{K_h : h \in R_{\varphi'}\} \leqslant \mathcal{L}$, так что, согласно В, A — l-ограниченное совершенно выпуклое множество и в $(E, \mathcal{L}_{R_{\varphi'}})$. Поэтому из (1') следует существование $a \in A$ такого, что $(h, s) = (a, h)$ для всех $h \in R_{\varphi'}$. А тогда

$\langle g, t\rangle = \langle \varphi'(g), s\rangle = \langle a, \varphi'(g)\rangle = \langle \varphi(a), g\rangle$ для всех $g \in F_{\mathcal{M}}'$, чем и доказано, что $\varphi(A)$ совершенно выпукло в $F_{\mathcal{M}}$.

Д. *Если A — бочка в* $E_{\mathcal{L}}$, *обладающая тем свойством, что всякая линейная функция* $f \in E^*$, *для которой* $q_A(f)<+\infty$ *является линейным функционалом на* $E_{\mathcal{L}}$, *то* $A°$—*L-ограниченное совершенно выпуклое множество в* $E_{\mathcal{L}}{}'_{\mathcal{L}'}$ (теорема Алаоглу). Действительно, так как в силу теоремы *1'* $A = A^{\circ\circ}$, то L-ограниченность $A°$ следует из 3.3 (примененного к дуальной паре, образуемой L-пространствами $E'_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$ и $E_{\mathcal{L}}$). Пусть σ—линейная функция на $E_{\mathcal{L}}''$, удовлетворяющая условию

$$\langle g, \sigma\rangle \leqslant q_{A^\circ}(g) \text{ для всех } g \in E_{\mathcal{L}}''. \quad \textbf{(2)}$$

В силу 10.1.Б для каждого $g \in E_{\mathcal{L}}''$ существует $x \in E$ такое, что $g = \alpha(x)$, где α — канонический гомоморфизм $E_{\mathcal{L}}$ на $E''_{\mathcal{L}\mathcal{L}''}$.

Так как тогда

$$q_{A^\circ}(g) = \sup_{f \in A^\circ}\langle f, g\rangle = \sup_{f \in A^\circ}\langle x, f\rangle = q_{A^\circ}(x),$$

а, в силу 2.П, $q_{A^\circ}(x) = p_A(x)$, то (2) означает, что

$$\langle x, \sigma\circ\alpha\rangle (= \langle g, \sigma\rangle) \leqslant p_A(x) \text{ для всех } x \in E \quad (2')$$

Но $p_A(x) \leq 1$ для всех $x \in A$ (см. 7.6.(1)). Поэтому из (2') следует, что

$$q_A(\sigma\circ\alpha) \leqslant 1. \quad \textbf{(3)}$$

В силу предположения относительно A это, прежде всего, означает, что $\sigma\circ\alpha$—линейный функционал на $E_{\mathcal{L}}$. Так как тогда

$$\langle g, \sigma\rangle = \langle x, \sigma\circ\alpha\rangle = \langle \sigma\circ\alpha, g\rangle \text{ для всех } g \in E_{\mathcal{L}}'',$$

где, снова в силу (3), $\sigma\circ\alpha \in A^\circ$, то заключаем, что $A°$ — совершенно выпуклое множество в $E'_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$.

Теорема 2. *Всякое множество* $\mathfrak{S}$ *замкнутых гиперплоскостей в* $E_{\mathcal{L}}$, *образующее с L-ограниченным совершенно выпуклым множеством* $A \subset E_{\mathcal{L}}$ *центрированную систему, имеет с A непустое пересечение.*

Доказательство. В силу условия теоремы, каждое конечное семейство $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ гиперплоскостей из $\mathfrak{S}$ имеет непустое пересечение. Пусть $\mathfrak{S}_0$—объединение пучков $[X_1, \ldots, X_n]$, порожденных всевозможными такими семействами.

Если $Y_1, \ldots, Y_m \in \mathfrak{S}_0$, так что $Y_l \in [X_{l1}, \ldots, X_{ln_l}]$, где $X_{l1}, \ldots, X_{ln_l} \in \mathfrak{S}$ $(l = 1, \ldots, m)$, то

$$\bigcap_{l=1}^{m} Y_l \supset \bigcap_{l=1}^{m}\bigcap_{l=1}^{n_l} X_{ll} \neq \phi,$$

и значит,

$$[Y_1, \ldots, Y_m] \subset [X_{11}, \ldots, X_{1n_1}, \ldots, X_{m1}, \ldots, X_{mn_m}] \subset \mathfrak{S}_0.$$

Таким образом, $\mathfrak{S}_0$ центрированно и вместе с каждым конечным семейством своих гиперплоскостей содержит весь порожденный им пучок. В силу 10.5.В' тем же свойством обладает тогда множество $\mathscr{L}_0$ гиперподпространств, параллельных всевозможным гиперплоскостям из $\mathfrak{S}_0$, т. е. $\mathscr{L}_0$ —*L*-структура в *E*. Так как $\mathfrak{S}_0$ центрированно и содержит по гиперплоскости, параллельной каждому гиперподпространству из $\mathscr{L}_0$, то в силу теоремы 6 § 10 $\mathfrak{S}_0$ есть связка гиперплоскостей в $E_{\mathscr{L}_0}$. Пусть s_0 — линейная функция на $E_{\mathscr{L}_0}'$, порождаемая, по теореме 7 § 10, этой связкой, так что для всех $f_0 \in E_{\mathscr{L}_0}'$ имеем

$$\langle f_0, s_0 \rangle = f_0(X_{f_0}), \tag{4}$$

где X_{f_0} — гиперплоскость из $\mathfrak{S}_0$, параллельная K_{f_0}, а $f_0(X_{f_0})$— постоянное значение, принимаемое функцией f_0 на X_{f_0}. По построению, каждая гиперплоскость $X_{f_0} \in \mathfrak{S}_0$ принадлежит некоторому пучку $[X_1, \ldots, X_n]$, где $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{S}$, и потому

$X_{f_0} \cap A \supset \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k \cap A) \neq \phi$, т. е. X_{f_0} пересекает *A*. Тогда

$f_0(X_{f_0}) \leqslant q_A(f_0)$ и, значит, в силу (4)

$$\langle f_0, s_0 \rangle \leqslant q_A(f_0) \text{ для всех } f_0 \in E_{\mathscr{L}_0}'. \tag{5}$$

Но так как $\mathfrak{S}_0$ в силу 10.5.В состоит из замкнутых гиперплоскостей, то $\mathscr{L}_0 \leqslant \mathscr{L}$ и потому $E_{\mathscr{L}_0}' \subset\subset E_{\mathscr{L}}'$. С другой стороны, в силу 1.А и *L*-ограниченности множества *A*, q_A — конечная сублинейная функция на $E_{\mathscr{L}}'$. Поэтому на основании теоремы 1 § 8 из (5) следует, что s_0 обладает продолжением $s \in E_{\mathscr{L}}'^{*}$, удовлетворяющим условию

$$\langle f, s \rangle \leqslant q_A(f) \text{ для всех } f \in E_{\mathscr{L}}'.$$

В силу совершенной выпуклости множества *A* тогда существует $a \in A$ такое, что

$$\langle f, s \rangle = \langle a, f \rangle \text{ для всех } f \in E_{\mathscr{L}}',$$

и в частности

$$\langle f_0, s_0 \rangle = \langle a, f_0 \rangle \text{ для всех } f_0 \in E_{\mathscr{L}_0}'.$$

А в таком случае в силу (4) $\langle a, f_0 \rangle = f_0(X_{f_0})$, т. е. $a \in X_{f_0}$ для всех $X_{f_0} \in \mathfrak{S}_0$. Так как X_{f_0} пробегает всё $\mathfrak{S}_0$, когда f_0 пробегает всё $E_{\mathscr{L}_0}'$, то заключаем, что

$$a \in \bigcap_{X \in \mathfrak{S}_0} (X \cap A) \subset \bigcap_{X \in \mathfrak{S}} (X \cap A),$$

и теорема доказана.

Определение 8. *Опорной гиперплоскостью* множества $A \subset E_{\mathscr{L}}$ называется всякая гиперплоскость, которая может быть задана уравнением

$$\langle x,\ f_0 \rangle = q_A(f_0), \tag{6}$$

где $f_0 \in E_{\mathscr{L}}' \setminus \{0\}$.

Е. Из определения 8 непосредственно следует:

1° *Множество* $A \subset E_{\mathscr{L}}$, *обладающее опорной гиперплоскостью, непусто.*

2° *Всякая опорная гиперплоскость замкнута и собственная.*

3° *Опорная гиперплоскость множества А ограничивает минимальное замкнутое полупространство, содержащее А;* а именно, *А* содержится в полупространстве $E_{f_0,\, q_A(f_0)} = \{x \in E\colon \langle x,\ f_0 \rangle \leqslant q_A(f_0)\}$ и не содержится ни в каком меньшем полупространстве $E_{f_0,\, q_A(f_0)-\varepsilon}$.

4° *Если А L-ограниченно, то оно обладает опорной гиперплоскостью* (6) *для каждого* $f_0 \in E_{\mathscr{L}}' \setminus \{0\}$.

Ж. *Опорная гиперплоскость X L-ограниченного совершенно выпуклого множества А имеет с ним непустое пересечение.* Действительно, пусть (6) — уравнение гиперплоскости *X*. В силу Е1° и L-ограниченности множества *А* q_A есть конечная сублинейная функция на $E_{\mathscr{L}}'$. Поэтому согласно следствию 1 теоремы 1 § 8 существует линейная функция $s \in E_{\mathscr{L}}'^{*}$ такая, что

$$\langle f,\ s \rangle \leqslant q_A(f) \ \text{ для всех } f \in E_{\mathscr{L}}' \tag{7}$$

и

$$\langle f_0,\ s \rangle = q_A(f_0). \tag{8}$$

Поскольку *А* совершенно выпукло, из (7) вытекает существование такого $a \in A$, что

$$\langle f,\ s \rangle = \langle a,\ f \rangle \ \text{ для всех } f \in E_{\mathscr{L}}'.$$

Но из (8) следует тогда, что $\langle a,\ f_0 \rangle = q_A(f_0)$, т. е. *а* удовлетворяет уравнению (6) и, значит, $a \in X \cap A$.

Определение 9. *Гранью* выпуклого множества $A \subset E_{\mathscr{L}}$ мы будем называть всякое его непустое пересечение Г с каким-нибудь множеством замкнутых собственных гиперплоскостей, обладающее следующим свойством: если $a_0,\ a_1 \in A$ и

$(a_0, a_1) \cap \Gamma \neq \phi$, т. е. некоторая внутренняя точка отрезка $[a_0, a_1]$ принадлежит Г, то $a_0, a_1 \in \Gamma$.

3. В силу 7.1.Д, М *грань выпуклого множества выпукла.* В силу 1.Д, М *грань регулярно выпуклого множества регулярно выпукла.* В силу Б и 1.Д, М *грань совершенно выпуклого множества совершенно выпукла.*

И. *Если опорная гиперплоскость X выпуклого множества* $A \subset E_{\mathcal{L}}$ *имеет с A непустое пересечение* Г, *то* Г *есть грань множества A.* Действительно, пусть $a_0, a_1 \in A$, $a \in (a_0, a_1) \cap \Gamma$ и (6) — уравнение гиперплоскости *X*. Как внутренняя точка отрезка $[a_0, a_1]$, $a = \rho_0 a_0 + \rho_1 a_1$, где $\rho_0 > 0$, $\rho_1 > 0$ и $\rho_0 + \rho_1 = 1$. Поэтому

$$\rho_0 \langle a_0, f_0 \rangle + \rho_1 \langle a_1, f_0 \rangle = \langle a, f_0 \rangle = q_A(f_0).$$

Обозначая через *i* произвольное из чисел 0, 1, имеем тогда

$$q_A(f_0) \geqslant \langle a_i, f_0 \rangle = \frac{q_A(f_0) - \rho_{1-i} \langle a_{1-i}, f_0 \rangle}{\rho_i} \geqslant \frac{q_A(f_0) - \rho_{1-i} q_A(f_0)}{\rho_i} = q_A(f_0),$$

откуда $\langle a_i, f_0 \rangle = q_A(f_0)$, т. е. a_0 и a_1 удовлетворяют уравнению (6) и тем самым принадлежат $X \cap A = \Gamma$.

И'. Из Ж и И следует, что *опорная гиперплоскость L-ограниченного совершенно выпуклого множества пересекает это множество по его грани.* На основании Е 4° заключаем, что, *каково бы ни было замкнутое собственное гиперподпространство H, L-ограниченное совершенно выпуклое множество обладает гранью, лежащей в гиперплоскости, параллельной H.*

К. *Непустое пересечение* Г *семейства* $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$ *граней выпуклого множества A также является гранью множества A.* Действительно, так как каждое Γ_α есть пересечение *A* с некоторым множеством замкнутых собственных гиперплоскостей, то то же самое верно и для Г. При этом, если $a_0, a_1 \in A$ и $(a_0, a_1) \cap \Gamma \neq \phi$, то тем самым $(a_0, a_1) \cap \Gamma_\alpha \neq \phi$ для каждого α, следовательно, $a_0, a_1 \in \Gamma_\alpha$ для каждого α, и, значит, $a_0, a_1 \in \Gamma$.

Л. *Всякая грань* Γ_2 *грани* Γ_1 *выпуклого множества A сама есть грань множества A.* В самом деле, так как $\Gamma_1 = A \cap \bigcap_{X \in \mathfrak{G}_1} X$ и $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cap \bigcap_{X \in \mathfrak{G}_2} X$, где $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ — множества замкнутых собственных гиперплоскостей, то $\Gamma_2 = A \cap \bigcap_{X \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2} X$.

Пусть а) $a_0, a_1 \in A$ и б) $(a_0, a_1) \cap \Gamma_2 \neq \phi$. Из б) следует в) $(a_0, a_1) \cap \Gamma_1 \neq \phi$; а) и в) влекут г) $a_0, a_1 \in \Gamma_1$; а из г) и б) следует д) $a_0, a_1 \in \Gamma_2$.

Определение 10. *Экстремальной точкой* выпуклого множества *A* называется всякая его точка, не являющаяся внутренней точкой никакого отрезка, принадлежащего *A*.

М. Сравнение определений 9 и 10 показывает, что *всякая одноточечная грань выпуклого множества* $A \subset E_{\mathcal{L}}$ *образована его экстремальной точкой* и, обратно, *если* $E_{\mathcal{L}}$ *отделимо, то каждая экстремальная точка множества* (будучи единственной точкой пересечения всех проходящих через нее замкнутых собственных гиперплоскостей) *образует грань этого множества, притом,* очевидно, *минимальную.*

Н. *Веяная минимальная грань* Г *L-ограниченого совершенно выпуклого множества A в отделимом L-пространстве* $E_{\mathcal{L}}$ *одноточечна и, значит,* согласно М, *образована экстремальной точкой.*

Действительно, если $a_1, a_2 \in \Gamma$ и $a_1 \neq a_2$, то, в силу отделимости $E_{\mathcal{L}}$, существует $f_0 \in E_{\mathcal{L}}'$, для которого

$$\langle a_1, f_0\rangle \neq \langle a_2, f_0\rangle. \tag{9}$$

Пусть X_0—опорная гиперплоскость множества Г, определяемая уравнением $\langle x, f_0\rangle = q_\Gamma(f_0)$ (см. Е 4°). Так как Г, по 3, совершенно выпукло, то $X_0 \cap \Gamma$, по И', есть грань множества Г и, значит, согласно Л, также грань множества *A;* поскольку $X_0 \cap \Gamma \subset \Gamma$, а Г—минимальная грань множества *A,* заключаем, что $X_0 \supset \Gamma$. Но это невозможно, ибо в силу (9) хотя бы одна из точек $a_1, a_2 \in \Gamma$ не принадлежит X_0.

О. *Всякая опорная гиперплоскость* X_0 *L-ограниченного совершенно выпуклого множества A в отделимом L-пространстве* $E_{\mathcal{L}}$ *содержит экстремальную точку этого множества.* Действительно, согласно И', $\Gamma_0 = X_0 \cap A$ есть грань множества *A*. Пусть $\mathfrak{G}$ — максимальная центрированная система граней множества *A,* содержащая Γ_0 (1.4.Г), и $\mathfrak{S}$ — множество всех замкнутых гиперплоскостей, содержащих каждая некоторую грань из $\mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{G}$—центрированная, то $\mathfrak{S}$ образует с *A* центрированную систему и потому, согласно теореме 2, $\Gamma_\omega = \bigcap_{X \in \mathfrak{S}} (X \cap A) \neq \phi$. Но в силу определения 9 всякая грань множества *A* совпадает с пересечением пересечения всех содержащих ее замкнутых гиперплоскостей с *A*. Следовательно,

$$\Gamma_\omega = \bigcap_{X \in \mathfrak{S}} (X \cap A) = \bigcap_{\Gamma \in \mathfrak{G}} \ \bigcap_{\substack{X \supset \Gamma \\ X \in \mathfrak{S}}} (X \cap A) = \bigcap_{\Gamma \in \mathfrak{G}} \Gamma,$$

и, значит, в силу К, Γ_ω — грань множества *A*. А тогда, в силу максимальности системы $\mathfrak{G}$, Γ_ω — минимальная грань, так что согласно Н $\Gamma_\omega = \{a_\omega\}$, где a_ω—экстремальная точка множества A. Остается заметить, что так как $\Gamma_0 \in \mathfrak{G}$, то $a_\omega \in \Gamma_0$ и, значит, $a_\omega \in X_0$.

Теорема 3 (Крейн и Мильман). *Всякое L-ограниченное совершенно выпуклое множество A в отделимом L-пространстве* $E_{\mathfrak{L}}$ *совпадает с регулярно выпуклой оболочкой множества* A_ω *своих экстремальных точек.*

Доказательство. В силу Е4° и О, A_ω непусто. Пусть A'—его регулярно выпуклая оболочка. Так как A регулярно выпукло (А), то $A \subset A$ и потому $q_{A'} \leqslant q_A$ (1.A'). С другой стороны, из О вытекает, что для каждого $f \in E_{\mathfrak{L}}'$ существует $a_\omega \in A_\omega$ такое, что $\langle a_\omega, f \rangle = q_A(f)$; поэтому

$q_A \leqslant q_{A_\omega}$

и тем самым $q_A \leqslant q_{A'}$. Следовательно, $q_{A'} = q_A$, и, значит, в силу А и 1.Л' $A' = A$.

Приложение

Линейный оператор

1. Понятие отображения

Пусть $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ – множества элементов произвольной природы. Говорят, что задано ***Отображение*** $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ (читается: отображение f множества $\boldsymbol{X}$ во множество $\boldsymbol{Y}$**)**, если задан закон, по которому каждому элементу $x \in \boldsymbol{X}$ ставится в соответствие вполне определенный элемент $y = fx \in \boldsymbol{Y}$ (рис. 1).

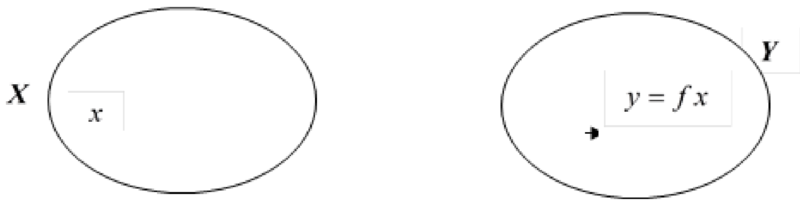


Рис. 1.

Если $y = f\,x$, то y называется ***Образом*** элемента x, x – ***Прообразом*** элемента y при отображении F.

Примерами отображений являются функции, которые изучаются в школе и в математическом анализе, например, функция $fx = x^2$ – это отображение $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}_+ \bigcup \{0\}$. Классный журнал является примером отображения множества учеников в классе во множество всех фамилий.

Отображение $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ называется ***Тождественным***, если оно любой элемент оставляет на месте. Тождественное отображение множества ***X*** на себя будем обозначать $e_{\mathbf{X}}$. Таким образом, $\forall x \in \mathbf{X} \quad e_{\mathbf{X}}(x) = x$.

Отображение $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ называется ***Взаимно однозначным*** (или биективным, или биекцией), если оно удовлетворяет двум условиям:

1. $\forall y \in \mathbf{Y} \quad \exists x \in \mathbf{X}$ такой, что $f x = y$.

2. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f x_1 \neq f x_2$,

Или одному, эквивалентному им, третьему условию:

3. $\forall y \in \mathbf{Y} \quad \exists$ единственный $x \in \mathbf{X}$ Такой, что $f x = y$.

Хороший пример взаимно однозначного отображения: в театре дают билет, каждому билету соответствует некоторое кресло, причем только одно.

Отображения $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ и $g : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ называются ***Равными***, если $\forall x \in \mathbf{X} \quad f x = g x$.

Пусть заданы отображения $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ и $g : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$. ***Произведением*** (или композицией) отображений *F* и *G* называется отображение $gf : \mathbf{X} \to \mathbf{Z}$, такое, что $\forall x \in \mathbf{X} \quad (gf)x = g(fx)$ (рис. 2)

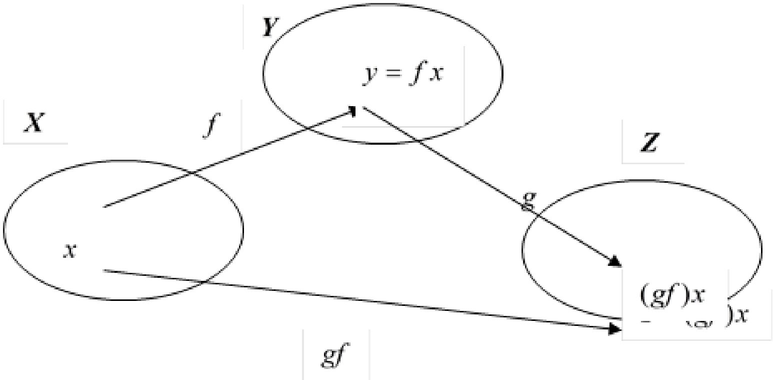


Рис. 2.

Замечание. В произведении отображений сначала действует внутреннее, а затем внешнее отображение.

Примером произведения отображений является сложная функция.

Лемма. Произведение отображений ассоциативно, т. е., если заданы отображения $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, $g : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ и $h : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{U}$, то

$h(gf) = (hg)f$.

UДля доказательства равенства отображений $u : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ и $v : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ нужно показать, что $\forall x \in \boldsymbol{X} \quad u(x) = v(x)$.

Итак, выберем произвольное $x \in \boldsymbol{X}$. Тогда

$(h(gf))x = h((gf)x) = h(g(fx))$; (1)

$((hg)f)x = (hg)(fx) = h(g(fx))$. (2)

Сравнивая (1) и (2), видим, что $\forall x \in \boldsymbol{X}\ (h(gf))x = ((hg)f)x$ и, поэтому, $h(gf) = (hg)f$ .t

Отображение $f^{-1}: \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ называется ***Обратным*** к отображению $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, если $f\,f^{-1} = e_Y$ и $f^{-1}f = e_X$ (рис. 3).

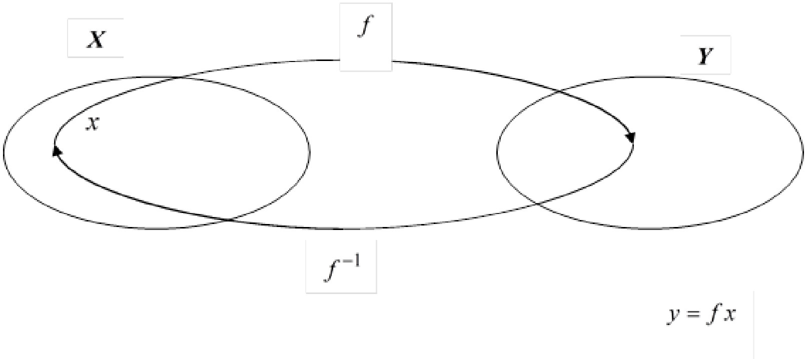


Рис. 3.

Упражнение. Докажите следующие утверждения:

1. Для того чтобы отображение *F* имело обратное необходимо и достаточно, чтобы *F* было взаимно однозначным.

2. Если отображение имеет обратное, то это обратное определяется однозначно.

2. Определение линейного оператора и его простейшие свойства

Определение. Пусть $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{V}'$ – линейные пространства над одним и тем же полем $\boldsymbol{P}$. Отображение $f: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ называется ***Линейным оператором***, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1*. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \boldsymbol{V} \quad f(\bar{x}+\bar{y}) = f\,\bar{x} + f\,\bar{y}.$

2*. $\forall \bar{x} \in \boldsymbol{V} \quad \forall \alpha \in \boldsymbol{P} \quad f(\alpha\bar{x}) = \alpha f\,\bar{x}.$

Следствие. При линейном операторе образ линейной комбинации векторов равен такой же линейной комбинации их образов, т. е. если $f: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ – линейный оператор, то

$\forall \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n \in \boldsymbol{V}; \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \boldsymbol{P}$

$$f(\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{x}_n) = \alpha_1 f\bar{x}_1 + \alpha_2 f\bar{x}_2 + \cdots + \alpha_n f\bar{x}_n. \tag{1}$$

Доказательство проведем методом математической индукции по количеству векторов.

А) N=1: $f(\alpha_1\bar{x}_1) =$ [2*] $= \alpha_1 f\,\bar{x}_1$ – истинно.

Б) Предполагая, что утверждение верно для (N-1)-го вектора, доказываем его для N векторов.

$f(\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{x}_n) = f(\alpha_1\bar{x}_1 + (\alpha_2\bar{x}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{x}_n))$ = [1*] =

$= f(\alpha_1\bar{x}_1) + f(\alpha_2\bar{x}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{x}_n) =$ [2* и предположение индукции] =

$= \alpha_1 f\bar{x}_1 + \alpha_2 f\bar{x}_2 + \cdots + \alpha_n f\bar{x}_n.$

Примеры линейных операторов

1. Нулевой оператор $O: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$: $\forall \bar{x} \in \boldsymbol{V} \quad O(\bar{x}) = \bar{0}$. Очевидно, этот оператор удовлетворяет условиям 1* и 2*, значит, является линейным.

2. Тождественный оператор $e_V : V \to V$ также, очевидно, является линейным.

3. Оператор дифференцирования $D : C^1(R) \to C(R)$, который каждой дифференцируемой функции ставит в соответствие ее производную, является линейным, т. к. производная суммы функций равна сумме их производных, а при умножении функции на число её производная умножается на это число.

4. Пусть $V = V_3$ – пространство свободных векторов, $\bar{a} \in V_3, \bar{a} \neq \bar{0}$.

Покажем, что оператор проектирования на ось $f\,\bar{x} = \overrightarrow{\mathrm{pr}}_{\bar{a}}\bar{x}$ также является линейным.

В аналитической геометрии доказывалось, что $\overrightarrow{\mathrm{pr}}_{\bar{a}}\bar{x} = \dfrac{\bar{x}\cdot\bar{a}}{\bar{a}^2}\,\bar{a}$. Тогда

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in V_3 \; f(\bar{x}+\bar{y}) = \frac{(\bar{x}+\bar{y})\cdot\bar{a}}{\bar{a}^2}\,\bar{a} = \frac{\bar{x}\cdot\bar{a}+\bar{y}\cdot\bar{a}}{\bar{a}^2}\,\bar{a} = \frac{\bar{x}\cdot\bar{a}}{\bar{a}^2}\,\bar{a} + \frac{\bar{y}\cdot\bar{a}}{\bar{a}^2}\,\bar{a} = f\,\bar{x} + f\,\bar{y};$$

$$\forall \bar{x} \in V_3 \; \forall \alpha \in P \;\; f(\alpha\bar{x}) = \frac{(\alpha\bar{x})\bar{a}}{\bar{a}^2}\,\bar{a} = \frac{\alpha(\bar{x}\cdot\bar{a})}{\bar{a}^2}\,\bar{a} = \alpha\Big(\frac{\bar{x}\cdot\bar{a}}{\bar{a}^2}\,\bar{a}\Big) = \alpha(f\,\bar{x}).$$

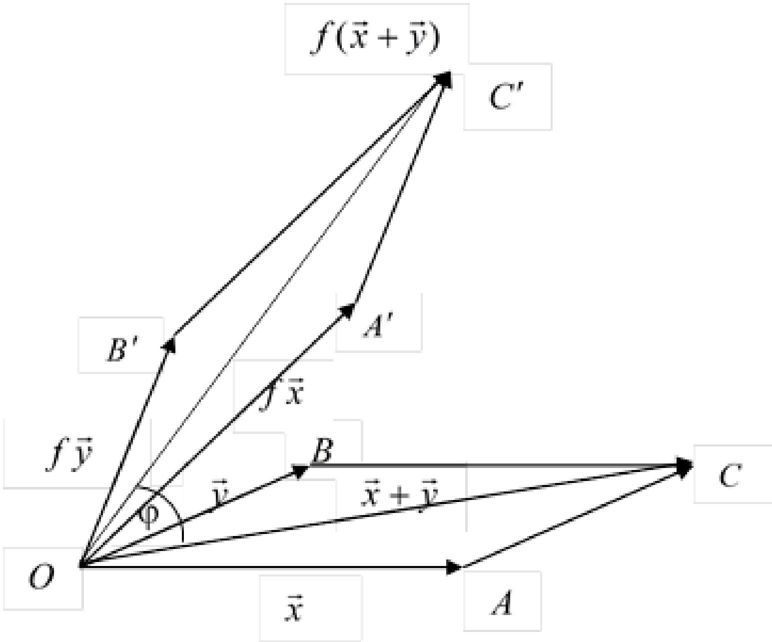


Рис.1.

Таким образом, условия 1* и 2* выполняются, а значит, оператор проектирования вектора на ось является линейным.

5. В пространстве V_2 Векторов плоскости, закрепленных в начале координат *O*, рассмотрим оператор f_φ поворота вектора на угол φ против часовой стрелки и докажем его линейность.

1*. Пусть $\vec{x} = \overline{OA},\ \vec{y} = \overline{OB};$ – произвольные векторы,

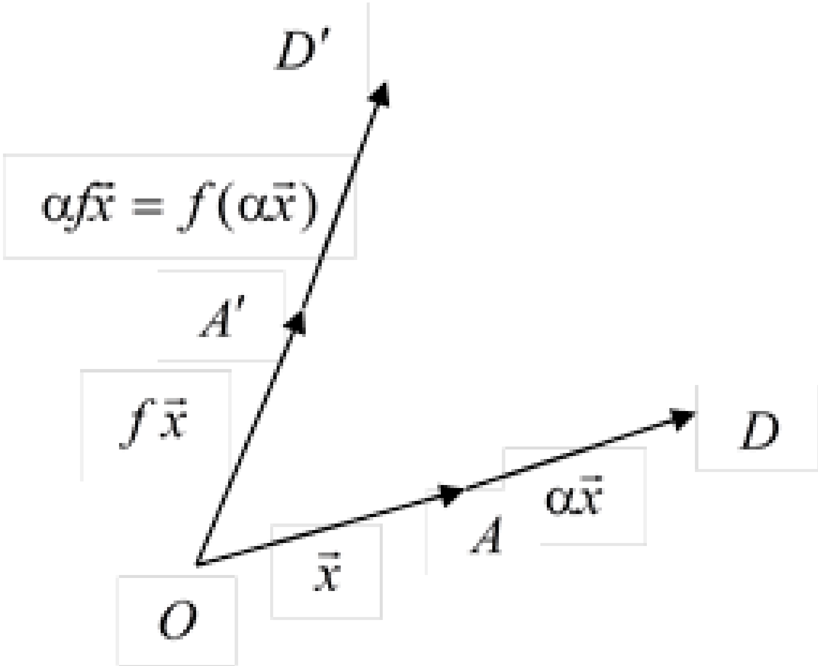


Рис.2

$\angle AOA' = \angle BOB' = \varphi$,

$f\,\vec{x} = \overline{OA'},\ f\,\vec{y} = \overline{OB'}$, (рис. 1). Построим $\vec{x} + \vec{y} = \overline{OC}$ и $f\,\vec{x} + f\,\vec{y} = \overline{OC'}$ по правилу параллелограмма. Так как плоскость поворачивается как жесткое целое, методами элементарной геометрии нетрудно показать, что при этом повороте диагональ $\overline{OC}$ переходит в диагональ $\overline{OC'}$. Значит, $f\,\bar{x} + f\,\bar{y} = f(\bar{x} + \bar{y})$.

2* . Пусть α>0, $\bar{x} = \overline{OA}$, $f\,\bar{x} = \overline{OA'}$, $\alpha\bar{x} = \overline{OD}$, $\alpha f\,\bar{x} = \overline{OD'}$ (рис.2).

Очевидно, вектор OD' получен из $\overline{OD}$ поворотом на угол φ, следовательно, $\overline{OD'} = f(\alpha\bar{x})$, а значит, $\alpha f\bar{x} = f(\alpha\bar{x})$. Аналогично это свойство проверяется

И при $\alpha < 0$, а при $\alpha = 0$ оно очевидно.

Теорема. Пусть V_n и V' – линейные пространства над одним и тем же полем ***P*** и пусть в пространстве V_n задан базис

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n), \qquad (2)$$

А в пространстве V' – произвольная система векторов

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n). \qquad (3)$$

Тогда существует единственный линейный оператор $f : V_n \to V'$, переводящий базис (2) в систему (3), то есть такой, что

$\forall k = \overline{1,n}\ f\,\bar{e}_k = \bar{a}_k$. (4)

Построение. Выберем произвольный вектор $\bar{x} \in \boldsymbol{V}_n$ и разложим его по базису (2): $\bar{x} = x^i \bar{e}_i$. Положим по определению

$$f(\bar{x}) = x^i \bar{a}_i \in \boldsymbol{V}'.$$

Линейность. Если $\bar{x}, \bar{y} \in \boldsymbol{V}_n$ - произвольные векторы, то $\bar{x} = x^i \bar{e}_i$, $\bar{y} = y^i \bar{e}_i$, $\bar{x} + \bar{y} = (x+y)^i \bar{e}_i$ $((x+y)^i = x^i + y^i)$. Тогда

$f(\bar{x} + \bar{y})$ = [определение *F*] = $(x+y)^i \bar{a}_i =$
$x^i \bar{a}_i + y^i \bar{a}_i = f\,\bar{x} + f\,\bar{y}$;

$$\forall \bar{x} \in \boldsymbol{V}_n \ \forall \alpha \in \boldsymbol{P}$$
$$\alpha \bar{x} = (\alpha x^i) \bar{e}_i \Rightarrow f(\alpha \bar{x}) = (\alpha x^i) \bar{a}_i = \alpha (x^i \bar{a}_i) = \alpha f\,\bar{x}.$$

Выполнение (4). Заметим, что все координаты вектора $\bar{e}_k$ В базисе (2) равны нулю, за исключением *K*-й, которая равна 1. Таким образом, *I*-я координата вектора $\bar{e}_k$ равна δ_k^i, то есть $\bar{e}_k = \delta_k^i \bar{e}_i$. Тогда

$$f(\bar{e}_k) = \delta_k^i \bar{a}_i = \bar{a}_k,$$

Значит, условие (4) выполнено.

Единственность. Предположим, что существует еще один линейный оператор $g : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}'$, $g \neq f$, переводящий (2) в (3), то есть такой, что $g(\bar{e}_k) = \bar{a}_k$. Тогда $\forall \bar{x} \in \boldsymbol{V}_n$
$g\,\bar{x} = g(x^i \bar{e}_i) = x^i g \bar{e}_i = x^i \bar{a}_i = f\,\bar{x}$ – противоречие.

3. Простейшие свойства линейного оператора

1º. Линейный оператор $f: V \to V'$ переводит нейтральный элемент пространства V в нейтральный элемент пространства V'.

Пусть $f: V \to V'$ – линейный оператор. Тогда $f(\bar{0}_V) = f(0\bar{0}_V) = = 0(f\bar{0}_V) = \bar{0}_{V'}$.

2º. При линейном операторе линейно зависимые векторы пространства V переходят в линейно зависимые векторы пространства V'.

Пусть $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n \in V$ - линейно зависимые векторы. Это значит, что существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in P$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{x}_n = \bar{0}. \quad (5)$$

Подействуем линейным оператором $f: V \to V'$ на обе части равенства (5). Тогда

$$(5) \Rightarrow \{f(\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{x}_n) = f(\bar{0}_V)\} \Rightarrow [(1) \text{ и } 1^\circ] \Rightarrow$$

$$\alpha_1 f\,\bar{x}_1 + \alpha_2 f\,\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_n f\,\bar{x}_n = \bar{0}_{V'}. \quad (6)$$

Так как среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ есть отличные от нуля, то система $\{f\,\bar{x}_1, f\,\bar{x}_2, \ldots, f\,\bar{x}_n\}$ линейно зависима.◄

Упражнение. Верно ли утверждение: при линейном операторе линейно независимые векторы переходят в линейно независимые?

4. Матрица линейного оператора

Определение матрицы линейного оператора

Пусть в линейном пространстве $\boldsymbol{V_n}$ над полем $\boldsymbol{P}$ задан базис

$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)$ (1)

И пусть $f: \boldsymbol{V_n} \to \boldsymbol{V_n}$ – линейный оператор (читается так: f $\boldsymbol{V_n}$ в себя). Построим систему векторов

($f\,\bar{e}_1, f\,\bar{e}_2, ..., f\,\bar{e}_n$). (2)

Каждый из векторов системы (2) можно разложить по базису (1):

$$\begin{cases} f\,\bar{e}_1 = a_1^1\bar{e}_1 + a_1^2\bar{e}_2 + ... + a_1^n\bar{e}_n, \\ f\,\bar{e}_2 = a_2^1\bar{e}_1 + a_2^2\bar{e}_2 + ... + a_2^n\bar{e}_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f\,\bar{e}_i = a_i^1\bar{e}_1 + a_i^2\bar{e}_2 + ... + a_i^n\bar{e}_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f\,\bar{e}_n = a_n^1\bar{e}_1 + a_n^2\bar{e}_2 + ... + a_n^n\bar{e}_n. \end{cases} \quad (3)$$

Сокращенно система (3) записывается одним равенством:

$$f\,\bar{e}_i = a_i^j\bar{e}_j. \quad (4)$$

Расположим числа a_i^j в матрицу *A* по нашей договоренности: верхний индекс обозначает номер строки, а нижний – номер столбца:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots a_n^n \end{bmatrix}.$$

Заметим, что столбцы полученной матрицы A являются координатными столбцами образов векторов базиса (1) в том же базисе. Обозначим

$[f\,\bar{e}] = [f\,\bar{e}_1 \;\; f\,\bar{e}_2 \;\dots\; f\,\bar{e}_n] = (f\,\bar{e}_i) = (f\,\bar{e}_{1i})$.

Равенство (4) можно переписать и так:

$f\,\bar{e}_i = f\,\bar{e}_{1i} = a_i^j \bar{e}_j = \bar{e}_{1j} a_i^j$, откуда, руководствуясь правилом цепочки, (4) записываем в матричном виде:

$$[f\,\bar{e}] = [\bar{e}]A \;. \quad (5)$$

Матрицей линейного оператора $f : V_n \to V_n$ в некотором базисе называется матрица A, столбцами которой являются координатные столбцы образов базисных векторов в том же базисе. Это матрица $A = (a_i^j)$, элементы которой удовлетворяют системе равенств (3) или (4), а сама матрица удовлетворяет матричному равенству (5).

Примеры

1. Матрицей нулевого оператора $\left(O\bar{x} = \bar{0} \quad \forall \bar{x} \in V_n\right)$ в любом базисе является нулевая матрица; матрицей тождественного оператора $\left(e\bar{x} = \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in V_n\right)$ также в любом базисе является матрица единичная.

2. Пусть $f=\overrightarrow{pr_{\vec{i}}}:V_3\to V_3;\quad \forall\vec{x}\quad f\vec{x}=\overrightarrow{pr_{\vec{i}}}\,\vec{x}$. Составим матрицу оператора проектирования на ось *OX* в базисе $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Для этого находим образы базисных векторов и разлагаем их по базису:

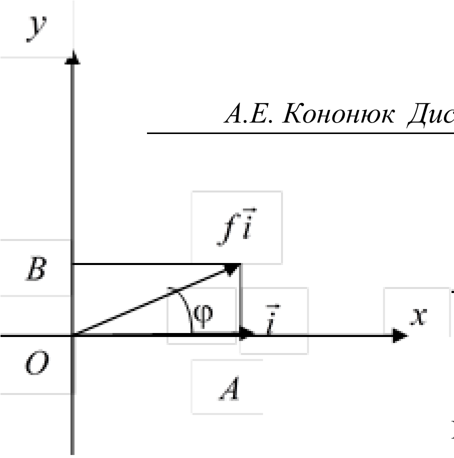
$$\left.\begin{aligned} f\,\vec{i} &= \overrightarrow{pr_{\vec{i}}}\,\vec{i}=\vec{i}=1\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}\\ f\,\vec{j} &= \overrightarrow{pr_{\vec{i}}}\,\vec{j}=\vec{0}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}\\ f\,\vec{k} &= \overrightarrow{pr_{\vec{i}}}\,\vec{k}=\vec{0}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}\end{aligned}\right\}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

3. Составим матрицу оператора $f_\varphi:V_2\to V_2$ поворота плоскости на угол φ (см.§2) в базисе $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$. Из рисунков 1 и 2 видно, что

$$\begin{aligned} f\,\vec{i} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(\cos\varphi)\vec{i}+(\sin\varphi)\vec{j};\\ f\,\vec{j} &= \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=(\cos\varphi)\vec{j}+(-\sin\varphi)\vec{i}.\end{aligned}$$

Тогда

$$A=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}.$$



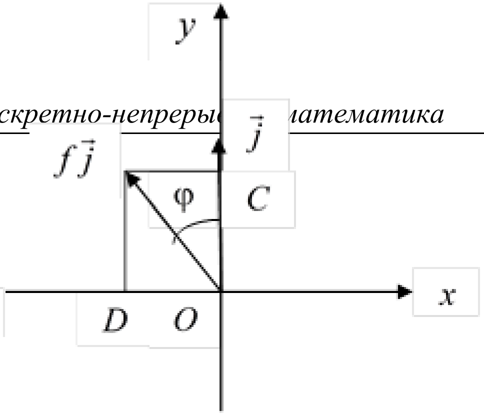


Рис. 1. Рис. 2.

Итак, если в пространстве V_n задан какой-либо базис, то каждому линейному оператору $f : V_n \to V_n$ можно поставить в соответствие его матрицу в этом базисе, то есть квадратную матрицу *A* *n*-Ого порядка, причем эта матрица определяется однозначно.

Пусть теперь задана квадратная матрица *A* с элементами из поля ***P*** .

Обозначим $\bar{a}_i,\ i = \overline{1,n},$ вектор, координатный столбец которого в базисе (1) совпадает с *I*-м столбцом матрицы *A*. Получим упорядоченную систему векторов

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n) \quad (6)$$

Согласно теореме § 2 существует единственный линейный оператор $f : V_n \to V_n$ такой, что $f\bar{e}_i = \bar{a}_i,\ i = \overline{1,n}$. По определению, матрица этого оператора в базисе (1) совпадает с *A*.

Обозначим $L(V_n, V_n)$ - множество всех линейных операторов линейного пространства V_n над полем ***P*** в себя. Из вышесказанного вытекает: если в V_n задан базис, то определяется отображение

$$I : L(V_n, V_n) \to M_{nxn}(P),$$

Которое ставит в соответствие каждому линейному оператору $f : V_n \to V_n$ его матрицу в этом базисе, причем это отображение взаимно однозначно. Это дает возможность в конечномерных линейных пространствах линейные операторы изучать с помощью их матриц.

Связь координат вектора с координатами его образа

Пусть в линейном пространстве V_n задан базис (1), и пусть $A = (a_i^j)$ –матрица линейного оператора $f : V_n \to V_n$ В этом базисе. Выберем произвольный вектор $\bar{x} \in V_n$ и положим $\bar{y} = f\,\bar{x}$.

Обозначим $X = (x^i) = (x^{i1})$ и $Y = (y^i) = (y^{i1})$ – координатные столбцы векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответственно в базисе (1). Тогда

$$\bar{y} = f\,\bar{x} = f(x^i \bar{e}_i) = _{[(1)\ \S\ 2]} = x^i f\,\bar{e}_i = _{[(4)]} = x^i a_i^j \bar{e}_j,$$

И, т. о.,

$$\bar{y} = x^i a_i^j \bar{e}_j. \quad (7)$$

Равенство (7) есть не что иное, как разложение вектора $\bar{y}$ по базису (1), а коэффициенты разложения – это координаты вектора $\bar{y}$ в этом базисе. В силу единственности координат вектора в данном базисе, получаем:

$$y^j = x^i a_i^j \quad (8)$$

Записав (8) по правилу цепочки ($y^{j1} = a_i^j x^{i1}$), получаем

$$Y = AX \quad (9)$$

Формула (8) и задает связь координат вектора и координат его образа при линейном операторе, а (9) – это её матричная запись.

Изменение матрицы линейного оператора при изменении базиса

Теорема. Пусть в линейном пространстве V_n заданы два базиса:

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n) \quad (10)$$

И

$$(\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, ..., \bar{e}_{n'}), \quad (11)$$

И пусть A=(a_i^j) и $A' = (a_{i'}^{j'})$ – матрицы линейного оператора $f: V_n \to V_n$ в базисах (10) и (11) соответственно. Тогда

$$A' = T^{-1}AT, \quad (12)$$

где T – матрица перехода от (10) к (11).

Для того чтобы найти матрицу A', следует образы векторов базиса (11) разложить опять же по этому базису. Имеем:

$f\,\bar{e}_{i'}$ = [определение матрицы перехода] = $f(t_{i'}^i \bar{e}_i)$ = [(1) § 2] = $t_{i'}^i f\,\bar{e}_i$ = =[(4)]= $t_{i'}^i a_i^j \bar{e}_j$ = [свойство 6° §9 гл. 3] = $t_{i'}^i a_i^j t_j^{j'} \bar{e}_{j'}$.

Итак,

$$f\,\bar{e}_{i'} = t^{i}_{i'} a^{j}_{i} t^{j'}_{j} \bar{e}_{j'} \,. \quad (13)$$

Равенство (13) есть не что иное, как разложение вектора $f\,\bar{e}_{i'}$ по базису (11). С другой стороны, по определению матрицы линейного оператора,

$$f\,\bar{e}_{i'} = a^{j'}_{i'} \bar{e}_{j'} \,. \quad (14)$$

В силу единственности координат вектора в данном базисе, из (13) и (14) получаем равенство

$$a^{j'}_{i'} = t^{i}_{i'} t^{j'}_{j} a^{j}_{i} \,, \quad (15)$$

Которое и дает нам связь элементов матриц линейного оператора в различных базисах. Запишем (15) по правилу цепочки:

$$a^{j'}_{i'} = t^{j'}_{j} a^{j}_{i} t^{i}_{i'} \,. \quad (16)$$

Так как $(t^{j'}_{j}) = T^{-1}$ (см. замечание в § 9 гл. 3), то из (16) получаем (12).

Определение. Квадратные матрицы A и B называются ***Подобными***, если существует невырожденная матрица T такая, что $B = T^{-1}AT$.

Таким образом, мы видим, что матрицы линейного оператора в различных базисах подобны.

Лемма. Подобные матрицы имеют одинаковые определители.

$$\det A' = \det T^{-1}AT = \det T^{-1} \det A \det T = \det T^{-1}T \det A = \det A \,.$$

Определение. Определителем линейного оператора $f: V_n \to V_n$ называется определитель его матрицы в некотором, а значит, и в любом базисе пространства V_n.

5. Геометрический смысл определителя матрицы линейного

Оператора

Пусть $f: V_3 \to V_3$ – линейный оператор, A - его матрица в некотором ортонормированном базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, и пусть $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ – некомпланарные векторы, а $\bar{y}_i = f\,\bar{x}_i, i = \overline{1,3}$ - их образы. Обозначим X_i и Y_i координатные столбцы в выбранном базисе векторов $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_i$ соответственно, $i = \overline{1,3}$, V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$, а V' – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$. Тогда, учитывая (9) §3, получаем:

$V' = |\det[Y_1\ Y_2\ Y_3]| =$ [(9) § 3] $= |\det[AX_1\ AX_2\ AX_3]| =$ [§ 5 главы 1] =

$= |\det A[X_1 X_2 X_3]| =$ [§ 6 главы 1]
$= |\det A||\det[X_1 X_2 X_3]| = |\det A| V$. (1)

Рассмотрим теперь пространство $\boldsymbol{R}^n$. Выберем в нем точку M_0 и n линейно независимых векторов $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$,

$\bar{x}_i = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n), i = \overline{1,n}$. ***Параллелепипедом*** в $\boldsymbol{R}^n$ (n-мерным параллелепипедом) будем называть множество точек в $\boldsymbol{R}^n$

$$\Pi = \{M = (M_0 + \lambda^i \bar{x}_i) \in \boldsymbol{R}^n \mid 0 \le \lambda^i \le 1,\ i = \overline{1,n}\}. \quad (2)$$

Обозначим $X_i = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n)^T$ координатный столбец вектора $\bar{x}_i$ в каноническом базисе. По аналогии с трехмерным пространством, ***Объемом*** n ***- мерного параллелепипеда*** (2) будем называть число

$$V = \left|\det[X_1\, X_2 \ldots X_n]\right|.$$

Можно доказать, что при переходе от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному это число не меняется, т. е. определение объема параллелепипеда является корректным.

Точно так же, как и для трехмерного пространства, для пространства $\boldsymbol{R}^n$ доказывается равенство (1).

Вывод: из формулы (1) на основании леммы §3 вытекает, что коэффициент изменения объема параллелепипеда при линейном операторе равен модулю определителя этого оператора.

6. Операции над линейными операторами

Определения. Пусть $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}'$ и $\boldsymbol{V}''$ - линейные пространства над одним и тем же полем $\boldsymbol{P}$.

Суммой линейных операторов $f:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}'$ и $g:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}'$ называется отображение $(f+g):\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}'$ такое, что $\forall\vec{x}\in\boldsymbol{V}$ $(f+g)\vec{x}=f\vec{x}+g\vec{x}$.

Произведением линейного оператора $f:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}'$ ***на число*** $\alpha\in\boldsymbol{P}$ называется отображение $\alpha f:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}'$, такое что $\forall\vec{x}\in\boldsymbol{V}$ $(\alpha f)\vec{x}=\alpha(f\vec{x})$.

Произведением линейных операторов $f:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}'$ и $g:\boldsymbol{V}'\to\boldsymbol{V}''$ называется отображение $gf:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}''$ такое, что $\forall\vec{x}\in\boldsymbol{V}$ $(gf)\vec{x}=g(f\vec{x})$ (т. е. произведение линейных операторов – это просто произведение или композиция отображений).

Теорема. Сумма линейных операторов, произведение линейного оператора на число, а также произведение линейных операторов также являются линейными операторами. При этом, если $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}'=\boldsymbol{V}''=\boldsymbol{V}_n$, A и B – матрицы линейных операторов F и G соответственно в некотором базисе пространства $\boldsymbol{V}_n$, то матрицы операторов $f+g$, αf и Gf в том же базисе совпадают соответственно с матрицами $A+B$, αA и BA.

Доказательство проведем для произведения линейных операторов.

Пусть $f:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}'$ и $g:\boldsymbol{V}'\to\boldsymbol{V}''$ - линейные операторы. Тогда

$\forall\vec{x},\vec{y}\in\boldsymbol{V}\quad (gf)(\vec{x}+\vec{y})=g(f(\vec{x}+\vec{y}))$ = [линейность F] = $g(f\vec{x}+f\vec{y})$ =

=[линейность G] = $g(f\vec{x})+g(f\vec{y})$ = $(gf)\vec{x}+(gf)\vec{y}$;

$\forall \bar{x} \in \boldsymbol{V} \quad \forall \alpha \in \boldsymbol{P} \quad (gf)(\alpha \bar{x}) = g(f(\alpha \bar{x})) = g(\alpha f \bar{x}) = \alpha g(f \bar{x}) = \alpha (gf) \bar{x}$

.

Таким образом, *Gf* – линейный оператор.

Пусть $A = (a_j^i);\ B = (b_j^i)$ - матрицы линейных операторов $f : \boldsymbol{V_n} \to \boldsymbol{V_n}$ и $g : \boldsymbol{V_n} \to \boldsymbol{V_n}$ соответственно в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ пространства $\boldsymbol{V_n}$, и пусть $C = (c_j^i)$ - матрица оператора *Gf* В том же базисе. Тогда, по определению матрицы линейного оператора

$$(gf)\bar{e}_i = c_i^j \bar{e}_j \ . \quad (1)$$

С другой стороны,

$$(gf)\bar{e}_i = g(f\bar{e}_i) = g(a_i^k \bar{e}_k) = \text{[линейность } G\text{]}$$

$$= a_i^k g\bar{e}_k = a_i^k b_k^j \bar{e}_j \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), на основании единственности координат вектора в данном базисе, делаем вывод: $c_i^j = b_k^j a_i^k$, откуда и получаем матричную запись: *C=BA*.

Упражнение. Докажите, что множество

$\boldsymbol{L(V,V')} = \{f : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'} | f$ - линейный$\}$

Всех линейных операторов пространства $\boldsymbol{V}$ в пространство $\boldsymbol{V'}$ есть линейное пространство над тем же полем, что и пространства $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{V'}$

Относительно введенных операций сложения линейных операторов и умножения их на число. Найдите размерность $L(V_n, V_n)$.

7. Невырожденные линейные операторы

Определение. Линейный оператор $f: V \to V'$ называется невырожденным, если он любой ненулевой вектор переводит в ненулевой

Теорема 1. Для того чтобы линейный оператор $f: V_n \to V_n$ был невырожденным необходимо и достаточно, чтобы его матрица в некотором, а значит, и в любом базисе пространства V_n была невырожденной

Пусть A – матрица линейного оператора $f: V_n \to V_n$ в некотором базисе, X, как обычно, координатный столбец вектора $\bar{x}$ в том же базисе. Тогда

{F – невырожденный} $\Leftrightarrow \{\forall \bar{x} \in V_n, \bar{x} \neq \bar{0} \Rightarrow f\bar{x} \neq \bar{0}\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{\forall X, X \neq O \Rightarrow AX \neq O\} \Leftrightarrow$ {однородная система линейных уравнений $AX = O$ имеет единственное тривиальное решение} $\Leftrightarrow$ {$\det A \neq 0$}.

Так как определители подобных матриц совпадают, то утверждение справедливо и для любого базиса.

Теорема 2. Для того чтобы линейный оператор $f: V_n \to V_n$ был невырожденным необходимо и достаточно, чтобы он был взаимно однозначным.

Пусть $f:V_n \to V_n$ - линейный оператор, *A*- его матрица в некотором базисе, *X* и *Y* – координатные столбцы в том же базисе векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ соответственно. Тогда

{f – невырожденный} $\Leftrightarrow$ $\{\det A \neq 0\}$ $\Leftrightarrow$ {$\forall Y$ Система $AX = Y$ имеет единственное решение} $\Leftrightarrow$ {$\forall Y$ $\exists$ единственный X, что $AX = Y$} $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ {$\forall \vec{y} \in V_n$ $\exists$ единственный $\vec{x} \in V_n$, что $f\vec{x} = \vec{y}$} $\Leftrightarrow$ {*F* – взаимно однозначный}.

Теорема 3. Произведение невырожденных линейных операторов – невырожденный линейный оператор.

Пусть $f:V \to V'$ и $g:V' \to V''$ - невырожденные линейные операторы. Тогда

{$\forall \vec{x} \neq \vec{0}_V$} $\Rightarrow$ {$f\vec{x} \neq \vec{0}_{V'}$} $\Rightarrow$ {$(gf)\vec{x} = g(f\vec{x}) \neq \vec{0}_{V''}$}.

Таким образом, *Gf* – невырожденный линейный оператор.

8. Обратный линейный оператор

Теорема. Для любого невырожденного линейного оператора $f:V_n \to V_n$ существует единственный обратный оператор $f^{-1}:V_n \to V_n$, который также является линейным. При этом, если *A* – матрица оператора f в некотором базисе, то матрица оператора f^{-1} в том же базисе совпадает с матрицей A^{-1}.

Единственность. Пусть некоторый оператор $f: V_n \to V_n$ имеет два разных обратных: f^{-1} и $\tilde{f}^{-1}$. Тогда

$$\tilde{f}^{-1} = \tilde{f}^{-1}e = \tilde{f}^{-1}(f f^{-1}) = (\tilde{f}^{-1} f) f^{-1} = e f^{-1} = f^{-1}$$

-

Противоречие.

Существование. Пусть A - матрица оператора $f: V_n \to V_n$ в некотором базисе. Тогда, по теореме 1 § 6, $\det A \neq 0$, значит, существует A^{-1}. Обозначим $g: V_n \to V_n$ - тот линейный оператор, матрица которого в выбранном базисе совпадает с A^{-1}.

Так как $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, и т. к. произведению матриц соответствует произведение операторов, то $gf = fg = e$, и, таким образом, $g = f^{-1}$.◄

Замечание. *М*Ожно доказать, что любой взаимно однозначный линейный оператор $f: V \to V'$ имеет единственный обратный, который тоже является линейным.

9. Изоморфизм линейных пространств

Определение. Изоморфизмом Линейных пространств называется взаимно однозначный линейный оператор. Если существует изоморфизм $f: V \to V'$, то линейные пространства V и V' называются изоморфными. Изоморфизм обозначается так: $V \cong V'$.

Так как изоморфизм – взаимно однозначное отображение, то изоморфные объекты содержат одинаковое количество элементов.

Кроме того, в силу линейности, действия, производимые над элементами пространства V, одновременно производятся и над элементами пространства V'. Поэтому в математике изоморфные объекты не различаются.

Свойства изоморфизма

1. $V \cong V$ - рефлективность (изоморфизм осуществляет тождественное отображение).

2. $\{V \cong V'\} \Rightarrow \{V' \cong V\}$ - симметричность (если первый изоморфизм осуществляет с помощью отображения *F*, то второй - с помощью f^{-1}).

3. $\{V \cong V', V' \cong V''\} \Rightarrow \{V \cong V''\}$ - транзитивность (если первый изоморфизм осуществляется с помощью отображения $f: V \to V'$, второй - $g: V' \to V''$, то третий изоморфизм осуществляется с помощью отображения $gf: V \to V''$).

Строгого доказательства этих свойств мы не приводим.

Теорема 1. Изоморфные линейные пространства имеют одинаковые размерности.

Пусть $V_n \cong V'$ и пусть $f: V_n \to V'$ - изоморфизм. Выберем в V_n какой-либо базис

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n) \quad (1)$$

И покажем, что система

$$(f\vec{e}_1, f\vec{e}_2, \ldots, f\vec{e}_n) \text{ - } (2)$$

Базис пространства $\boldsymbol{V}'$. Действительно, в силу взаимной однозначности *F*, $\forall\bar{y}\in\boldsymbol{V}'\ \exists$ единственный $\bar{x}\in\boldsymbol{V}_n$ такой, что $f\bar{x}=\bar{y}$. Тогда, если $\bar{x}=x^i\bar{e}_i$, то $\bar{y}=f\bar{x}=f(x^i\bar{e}_i)=x^i f\bar{e}_i$. Значит, (2) – система образующих в $\boldsymbol{V}'$.

Докажем теперь линейную независимость (2).

$\{\lambda_1 f\bar{e}_1+\lambda_2 f\bar{e}_2+\ldots+\lambda_n f\bar{e}_n=\bar{0}_{V'}\}\Rightarrow$ [линейность *F*] $\Rightarrow$

$\Rightarrow\{f(\lambda_1\bar{e}_1+\lambda_2\bar{e}_2+\ldots+\lambda_n\bar{e}_n)=f(\bar{0}_{V_n})\}\Rightarrow$ [взаимная однозначность *F*] $\Rightarrow\Rightarrow\{\lambda_1\bar{e}_1+\lambda_2\bar{e}_2+\ldots+\lambda_n\bar{e}_n=\bar{0}_{V_n}\}\Rightarrow$ [линейная независимость (1)] $\Rightarrow\{\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0\}\Rightarrow$ {(2) - линейно независима}.

Таким образом, (2) – базис в $\boldsymbol{V}'$, а значит, $\dim\boldsymbol{V}'=n$.

Теорема 2. Все *N* - мерные линейные пространства над полем ***P*** изоморфны между собой, т. е. существует единственное с точностью до изоморфизма *N*-Мерное линейное пространство над полем ***P.***

а) Докажем, что

$$\boldsymbol{V}_n\cong\boldsymbol{P}^n=\{\bar{x}=(x^1,x^2,\ldots,x^n)\,|\,x^i\in\boldsymbol{P},\ i=\overline{1,n}\}.$$

Выберем в $\boldsymbol{V}_n$ какой-либо базис $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n)$. Тогда $\forall\bar{x}\in\boldsymbol{V}_n$ $\bar{x}=x^i\bar{e}_i$. Обозначим $f\bar{x}=(x^1,x^2,\ldots,x^n)\in\boldsymbol{P}^n$. Очевидно, отображение $f:\boldsymbol{V}_n\to\boldsymbol{P}^n$ - взаимно однозначное. Кроме того, $\forall\bar{x}=x^i\bar{e}_i\in\boldsymbol{V}_n$, $\bar{y}=y^i\bar{e}_i\in\boldsymbol{V}_n$

$$f(\bar{x}+\bar{y})=(x^1+y^1,x^2+y^2,\dots,x^n+y^n)=(x^1,x^2,\dots,x^n)+(y^1,y^2,\dots,y^n)=f\bar{x}+f\bar{y};$$

$$\forall\alpha\in \boldsymbol{P}\ \forall\bar{x}=x^i\bar{e}_i\in \boldsymbol{V_n}$$

$$f(\alpha\bar{x})=(\alpha x^1,\alpha x^2,\dots,\alpha x^n)=\alpha(x^1,x^2,\dots,x^n)=\alpha f\bar{x}.$$

Поэтому F - линейный оператор, а значит, и изоморфизм. Итак,

$\boldsymbol{V_n} \cong \boldsymbol{P^n}$.

Б) Пусть теперь $\boldsymbol{V_n}$ и $\boldsymbol{V'_n}$ - N-Мерные линейные пространства над одним и тем же полем $\boldsymbol{P}$. Тогда

$\{\boldsymbol{V_n} \cong \boldsymbol{P^n}$ и $\boldsymbol{V'_n} \cong \boldsymbol{P^n}\} \Rightarrow$ [симметричность] $\Rightarrow \{\boldsymbol{V_n} \cong \boldsymbol{P^n}$ и $\boldsymbol{P^n} \cong \boldsymbol{V'_n}\} \Rightarrow \Rightarrow$ [транзитивность] $\Rightarrow \{\boldsymbol{V_n} \cong \boldsymbol{V'_n}\}$.

Таким образом, мы показали, что с точки зрения математики единственным N-Мерным линейным пространством над полем $\boldsymbol{P}$ является $\boldsymbol{P^n}$.

10. Образ и ядро линейного оператора

Определения. Образом Линейного оператора $f:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V'}$ называется подмножество $\operatorname{Im} f$ линейного пространства $\boldsymbol{V'}$

$$\operatorname{Im} f = f(\boldsymbol{V})=\{\vec{y}\in\boldsymbol{V'} \mid \exists\vec{x}\in\boldsymbol{V}, \vec{y}=f\vec{x}\}.$$

Ядром линейного оператора $f:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V'}$ называется подмножество $\ker f$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$

$$\ker f = \{\vec{x}\in\boldsymbol{V} \mid f\vec{x}=\bar{0}_{\boldsymbol{V'}}\}.$$

Теорема 1. Образ линейного оператора $f : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ является подпространством пространства $\boldsymbol{V}'$, а его ядро – подпространством пространства $\boldsymbol{V}$.

Упражнение. Докажите теорему 1.

Размерность подпространства $\operatorname{Im} f$ называется ***Рангом*** оператора f и обозначается $\operatorname{rang} f$, а размерность подпространства $\ker f$ называется ***Дефектом*** f и обозначается $\operatorname{def} f$.

Теорема 2. Если $\boldsymbol{V}$ - n- мерное линейное пространство, $f : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}'$ - линейный оператор, то

$$\operatorname{rang} f + \operatorname{def} f = n. \quad (1)$$

Обозначим $m = \operatorname{def} f$. Так как $\ker f$ - подпространство пространства $\boldsymbol{V}_n$, то $m \le n$. Рассмотрим сначала случай, когда $0 < m < n$. Выберем в $\ker f$ какой-либо базис

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_m). \quad (2)$$

По теореме 2 § 4 гл. 3 систему (1) можно дополнить до базиса

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_m, \bar{e}_{m+1}, \ldots, \bar{e}_n) \quad (3)$$

Пространства $\boldsymbol{V}_n$. Обозначим $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{L}(\bar{e}_{m+1}, \ldots, \bar{e}_n)$. Очевидно,

$$(\bar{e}_{m+1}, \ldots, \bar{e}_n) \text{ - } (4)$$

Базис пространства $\boldsymbol{W}$. Докажем, что $\boldsymbol{V_n} = \boldsymbol{W} \oplus \ker f$. Действительно,

$$\forall \vec{x} \in \boldsymbol{V_n} \quad \vec{x} = (x^1\vec{e}_1 + \dots + x^m\vec{e}_m) + (x^{m+1}\vec{e}_{m+1} + \dots + x^n\vec{e}_n) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2,$$

где $\vec{x}_1 = (x^1\vec{e}_1 + \dots + x^m\vec{e}_m) \in \ker f$, а $\vec{x}_2 = (x^{m+1}\vec{e}_{m+1} + \dots + x^n\vec{e}_n) \in \boldsymbol{W}$. Таким образом, $\boldsymbol{V_n} = \boldsymbol{W} + \ker f$. Покажем, что сумма прямая. Пусть $\vec{x} \in \boldsymbol{W} \cap \ker f$. Тогда $\vec{x}$ можно разложить как по базису (2), так и по базису (4): $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + \dots + x^m\vec{e}_m$ и $\vec{x} = x^{m+1}\vec{e}_{m+1} + \dots + x^n\vec{e}_n$. Получаем

$$\vec{0} = \quad \vec{x} - \vec{x} = (x^1\vec{e}_1 + \dots + x^m\vec{e}_m) - (x^{m+1}\vec{e}_{m+1} + \dots + x^n\vec{e}_n),$$

Откуда, в силу линейной независимости (3), вытекает, что $x^i = 0,\ i = \overline{1, n}$. Поэтому $\vec{x} = \vec{0}$, а значит, сумма действительно прямая.

Покажем теперь, что $\boldsymbol{W} \cong \operatorname{Im} f$. Построим отображение

$$g : \boldsymbol{W} \to \operatorname{Im} f : g\vec{x} = f\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \boldsymbol{W}.$$

Очевидно, g - линейный оператор. Кроме того, $\forall \vec{y} \in \operatorname{Im} f\ \exists\ \vec{x} \in \boldsymbol{V_n}$ такой, что $f\vec{x} = \vec{y}$. Так как $\boldsymbol{V_n} = \boldsymbol{W} \oplus \ker f$, то $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, где $\vec{x}_1 \in \boldsymbol{W}$, $\vec{x}_2 \in \ker f$.

Тогда. $\vec{y} = f\vec{x} = f\vec{x}_1 + f\vec{x}_2 = f\vec{x}_1 + \vec{0} = g\vec{x}_1$. Таким образом, $\forall \vec{y} \in \operatorname{Im} f \quad \exists\ \vec{x}_1 \in \boldsymbol{W}$ такой, что $g\vec{x}_1 = \vec{y}$. Предположим, что таких векторов два, т. е., что $\exists\, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \boldsymbol{W}, \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$, но $g\bar{x}_1 = g\bar{x}_2$. Имеем: $f(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = g(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = g\bar{x}_1 - g\bar{x}_2 = \bar{0}$. Отсюда вытекает, что $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \in \ker f$. Но $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \in \boldsymbol{W}$, следовательно, $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \in \boldsymbol{W} \cap \ker f$, и поэтому $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \bar{0}$. Итак, мы показали, что g - взаимно однозначное отображение, следовательно, и изоморфизм. Так как изоморфные линейные пространства имеют одинаковые размерности, то $\dim \operatorname{Im} f = \dim \boldsymbol{W} = n\text{-}m$, откуда и вытекает доказываемое утверждение.

Рассмотрим теперь тривиальные случаи. Пусть $\ker f = \boldsymbol{V}_n$, значит, $\operatorname{Im} f = \{\bar{0}_{\boldsymbol{V}'}\}$. Тогда $\operatorname{rang} f = 0$, $\operatorname{def} f = n$. Если же $\ker f = \{\bar{0}\}$, то $\boldsymbol{V}_n \cong \operatorname{Im} f$. В обоих случаях равенство (1), очевидно, выполняется.

Следствие. Если $f : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}'$ - линейный оператор, то $\operatorname{rang} f \leq n$ (т. е. $\dim f(\boldsymbol{V}_n) = \dim \operatorname{Im} f \leq \dim \boldsymbol{V}_n$). Если же оператор f - невырожденный, то $\ker f = \{\bar{0}\}$, следовательно, $\operatorname{rang} f = n$, (т. е. $\dim f(\boldsymbol{V}_n) = \dim \boldsymbol{V}_n$).

- КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ
- КАСАТЕЛЬНЫЙ ПОТОК

Литература

[1] Cantor G., "Math. Ann.", 1883, Bd 21, S. 51-8;

[2] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948;

[3] ХаусдорфФ., Теория множеств, пер. с нем., М.-Л., 1937;

[4] Бурбаки Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965;

[5] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер с англ., М., 1970. *Б. А. Ефимов, Т. С. Фофанова.*

[6] Вейль Г., "Успехи матем. наук", 1948, т. 3, в. 2, с. 159-90;

[7] Кон - Фоссен *С. Э.,*"Успехи матем. наук", 1936, в. 1, с. 33-76;

[8] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.-Л., 1948;

[9] Райков Д.А., Векторные пространства, М., 1962

[10] Функциональный анализ, 2 изд., М., 1972, гл. 8 (Справочная матем. библиотека);

[11] Эдвардс Р. Э., Функциональный анализ. Теория и приложения, пер. с англ., М., 1969;

[12] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971;

[13] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976;

[14] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971;

[15] Даленко М. Ш., Шульгсйфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974;

[16] Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962;

[17] Вулих Б. 3., Введение в теорию конусов в нормированных пространствах, Калинин, 1977;

[18] его же. Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах, Калинин, 1977;

[19] Крейн М. Г., Рутман М. А., "Успехи матем. наук", 1948, т. 3, в. 1, с. 3-95.

[20] Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Геометрия. Учебное пособие. - М.: Наука, 1990.

[21] Александров П. С. Введение в теорию групп. -М.: Наука, 1980.

[22] Дужин С. В. От орнаментов до дифференциальных уравнений: Популярное введение в теорию групп преобразований. - Минск: Вышейшая школа, 1988.

[23] Калужнин Л. В., Сущанский В. И. Преобразования и перестановки. - М.: Наука, 1985.

[24] Курош А. Г. Теория групп. - М.: Наука, 1967.

[25] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972.

[26] Александров А. Д., Выпуклые многогранники, М.-Л., 1950;