Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

А. Е. Кононюк

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ МАТЕМАТИКА

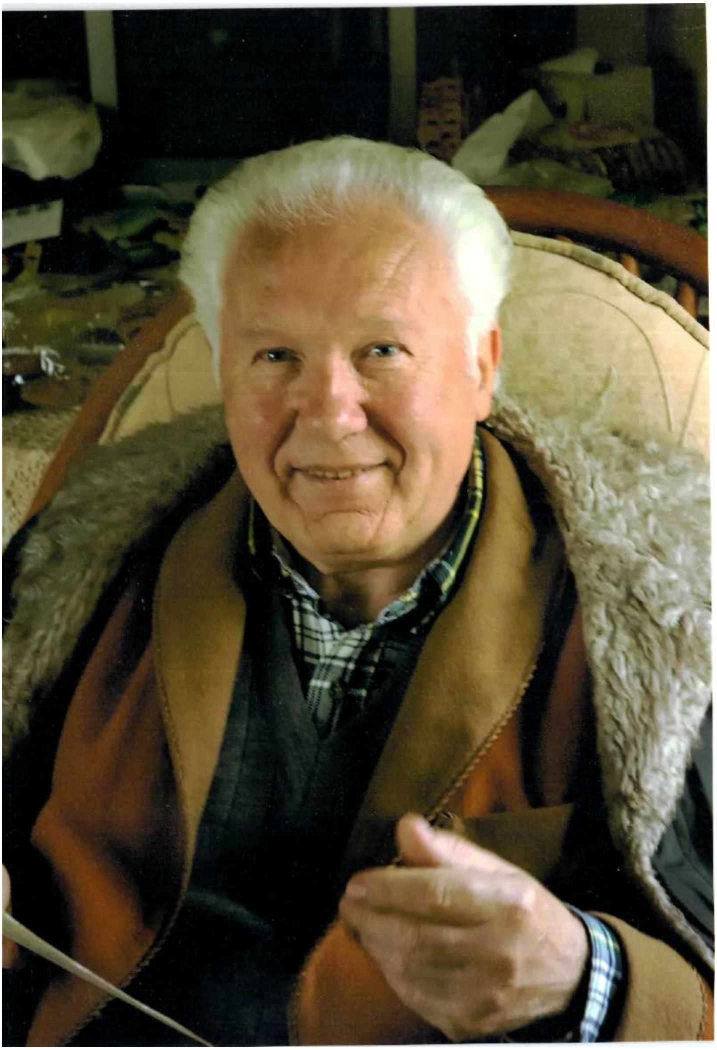
Книга 4

Алгебры и дифференциалы

Часть 5

Меры

Киев
«Освіта України»
2015



Кононюк Анатолий Ефимович

Из переписки с А.П Алпатовым – ученым в области ракетостроения.

Уважаемый Анатолий Ефимович!
Я пересылаю Ваши работы своим коллегам.
Если можно, удовлетворите мое любопытство.
Вы используете энциклопедический подход к изложению материала, но в своем собственном формате, я имею ввиду, что материал изложен, с одной стороны, как образовательный, с другой - как монографический.
Вот вопросы.
Какую цель Вы преследуете?
Сколько лет Вы выполняете эту циклопическую работу?
Есть ли у Вас команда, которая Вам помогает ?
Вопросы не обязательны для ответа.

С огромным уважением к Вам и Вашему труду, А.Алпатов
16.02.2015

Уважаемый Анатолий Петрович!

Чтобы дать содержательные ответы на Ваши вопросы, мне необходимо ознакомить Вас с некоторыми «вехами» моего длительного жизненного пути (я родился в 1936г. в г.Киеве).

Свою интеллектуальную трудовую деятельность я начинал с работы конструктором (1960 г.). На этом поприще я проработал 15 лет (из них 10 лет – в должности начальника конструкторского отдела). Работая конструктором, я начал приобщаться к «техническому эпистолярному жанру», наибольшим достижением которого является «Справочник конструктора оборудования пищевых производств», опубликованный в 1981г. издательством «Техніка», г. Киев.

В 1975 г. я перешел на преподавательскую работу в Киевский Политехнический институт (который я и заканчивал, приобретя проффесию инженера-механика) на кафедру технической кибернетики. На преподавательской работе я проработал 10 лет, а, затем, 5 лет занимался “чистой” научной деятельностью на этой же кафедре. Мои научные интересы были тесно связаны с конструкторской работой, а именно: в науке я занимался вопросами анализа и синтеза систем автоматизированного проектирования в машиностроении. Результатами этой деятельности стали: написание кандидатской и докторской диссертаций, а также написание двух книг – «Справочник по САПР» (1988 г.) и «Автоматизация проектирования ГПС (на базе промышленных роботов)» (1990 г.).

В 1990 г. я перешел на работу в НПО «Файл» (зам. директора по науке), где продолжал заниматься разработкой САПР для различных отраслей машинно- и приборостроения. Но, как говорят – «недолго музыка играла», и, в связи с отсутствием заказов, НПО «Файл» приказало долго жить, а я досрочно вынужден был уйти на пенсию. Это был 1995 г. С тех пор я нигде официально не работал.

Пока я был сравнительно физически крепок (до 70 лет), то активно занимался различными видами физической деятельности, но так как после 70 лет активный физический труд стал мне «не по мышцам», то я решил возвратиться к умственному труду, который был для меня более привлекательным (умственный потенциал у меня не только сохранился, но и, как показала дальнейшая работа на этом направлении, окреп, помогая мне получать определенные результаты в области совершенствования высшего образования и развития науки).

Возвратившись в образовательно-научную деятельность (2006 г.) я долго думал с чего начать. В среде ученых исповедуется постулат: «Если хочешь досконально (глубоко) усвоить (освоить) определенную научную дисциплину, то начни писать по этой дисциплине монографический труд». У меня уже был опыт написания монографий и я решил им воспользоваться. На ум пришло исповедуемое некоторым сообществом ученых выражение: « в науке столько науки, сколько в ней математики», и я решил проверить себя в написании учебного пособия по Высшей математике. С 2006 г. по 2008 г. работал над двухтомным учебным пособием под названием «Вища математика», которому Министерство образования и науки Украины выдало «гриф» учебного пособия. В 2009 году мой труд был напечатан издательством КНТ (г.Киев).

После этого я решил не писать «чистые» методические учебные пособия и стал работать над созданием учебно-научного методолгического обеспечения науки и высшего образования , что привело, как Вы правильно заметили, к созданию «...с одной стороны, как образовательных, с другой - как монографических» работ. Дело в том, что я заметил, что учебные пособия читают в основном студенты, а ученые их не читают (мол, чему может научить учебное пособие состоявшегося ученого), а научные монографии читают в основном ученые, и, то, как правило хорошо подготовленные ученые, а студенты научные монографии не читают из-за их сложности. Вот я и взял на себя смелость и огромный труд создать такой формат изложения, который (я назвал его: «научно-учебное методическое обеспечение» студентов (аспирантов, докторантов) и состоявшихся ученых) привлекал бы и начинающих ученых (прежде всего будущих магистров) и маститых ученых, особенно тех, которые руководят аспирантами, докторантами и другими группами ученых. Такова предыстория формата изложения материала, в ней же раскрыта и цель изложения материала в предлагаемом Вам (и другим читателям) виде.

Если говорить о цели моей столь бурной умственной деятельности под конец жизни, то я отвечу словами героя одного фильма (несколько их перефразируя): «Мне стало за Державу обидно с таким высшим образованием и наукой».

Первое, за что я серьезно взялся по указанным проблемам, так это за разработку «Концепции совершенствования высшего образования» (2008 г.). Данная концепция была окончательно сформирована в 2010 г. и издана издательством «Освіта України» в 2011 г. Она полностью согласуется с взглядами специалистов Всемирного банка, занимающихся вопросами совершенствования высшего образования на основании создания университетов мирового класса, а так же, с программой Всемирного банка «Построение общества знания в области третичного образования» (вопросами третичного образования Всемирный банк занимается с 1963 г.). Результатом реализации моей Концепции была разработка и создание Международного Университета подготовки Магистров (МУМ) - университета мирового класса. Мне удалось разработать идеологическое, методологическое и организационное обеспечения указанного университета. Были подготовлены все необходимые документы для регистрации такого университета (2012 г.), но преодолеть бюрократическую машину по регистрации и открытии Международного Университета Магистров мне не удалось.

Но я не опустил руки и начал работать над новой концепцией – «Концепция парадигмы развития науки», разработку которой я окончательно закончил в 2014.

Основой данной концепции является «Открытая развивающаяся панмедийная систем наук». Разработана структурная схем данной системы и я осуществляю ее наполнение научно-учебными методическими работами.

Что касается команды, то она была во времена работы в КПИ и в НПО «Файл». Причем команда очень профессиональная и результативная. Мы работали над создание мощной общемашиностроительной САПР. Больших результатов мы достигли в создании базовых обеспечений САПР: методического, информационного, математического, лингвистического, программного. Особенно сильная группа была в области разработки системы трехмерной графики. Наши результаты в области трехмерной графики (особенно в анализе невидимых линий, выполнении достоверных разрезов и сечений и др.) были конкурентоспособны на мировом уровне (в некоторых вопросах мы были «впереди планеты (научной) всей». Но развал СССР угробил все, в том числе, и науку. НПП «Файл» лопнуло, а я вынужден был уйти на пенсию. Многие ведущие специалисты моей команды выехали заграницу (США, Канада) и я остался, в научном плане, одинок. Но это, как Вы видите, меня не остановило в моем увлечении наукой, и я с еще большим «остервененинем» в нее окунулся. Но работать без команды очень сложно и тяжело. Даже обсудить посещающие мысли не с кем, кроме, как с самим «любимым». Как Вы, наверное, заметили, что рецензентом моих работ является проф. Печурин Н.К. Он очень потенциально сильная научная личность, но, кроме как на рецензирование, он не соглашается принимать участие в предложенной мной «научной гонке». Поэтому я готов войти в состав научной команды, которая исповедует взаимоприемлемые подходы развития науки.

Вот такие мои обширные ответы на Ваши вопросы.

Мои интересы в науке, как Вы видите из части моих работ, полностью совпадают с Вашими. Так почему бы нам не соединить наши научные усилия и построить азы будущего в науке. Ведь, по моему (и не только моему) убеждению, современная наука пребывает, в лучшем случае, в состоянии застоя. Вы только обратите внимание, за какие научные работы последнего десятилетия присуждают Нобелевские премии. Так, например, по экономике, с интервалом в несколько лет, присудили Нобелевские премии, в переводе на общедоступный язык, за использование математического аппарата теории игр в экономике. Но, ведь, согласно теории игр, если вы принимаете участие в игре и не ошиблись или вас не «надули», то вы не в состоянии ни выиграть, ни проиграть. Тогда в чем смысл использовать такую науку в экономике? Поэтому я предлагаю стать Данками (как Вы помните, есть такой персонаж в рассказах Горького «Сказки старухи Изергиль) в науке и обсудить начальные пути движения в науку будущего (ее структуру я постарался заложить в книге «Концепция парадигмы развития науки»).

С уважением, А Кононюк.

22.02.2015

kononyuka36@mail.ru

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К213

Рецензенты:
В. В. Довгай — к-т физ.-мат. наук, доц. (Национальный технический университет «КПІ»);
В. В. Гавриленко — д-р физ.-мат. наук, проф.,
О. П. Будя — к-т техн. наук, доц. (Киевский университет экономики, туризма и права);
Н. К. Печурин — д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

Кононюк А. Е.
К213 Дискретно-непрерывная математика. (Алгебры и дифференциалы. К.4,Ч.5 (в 8 частях)). — в 15-и кн. Кн 4.— К.: Освіта України. 2015. 595 с.

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-5 (книга 4)

Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, иссползуемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории вероятностей и массового обслуживания, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единную методолгически взамосвязанную математическую систему «Дискретно-непрерывная математика».

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов и просто ученых и специалистов всех специальностей.

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-5 (книга 4)

Оглавление

1. Вводная глава

1.1. Основные понятия и определения

Для понимания материала изложенного в этой книге требуется только знакомство с элементарной алгеброй и началами математического анализа. В частности, читателю должны быть известны следующие понятия и факты.

1) Математическая индукция; переместительный и сочетательный законы алгебраических действий; линейные комбинации; соотношение эквивалентности и разбиение на классы.

2) Счетные множества; счетность соединения счетного числа счетных множеств.

3) Действительные числа; простейшие метрические и топологические свойства числовой прямой (например, множество рациональных чисел всюду плотно; всякое открытое множество представляет собой соединение конечного или счетного числа непересекающихся открытых интервалов); теорема Гейне — Бореля.

4) Общее понятие функции (в частности, понятие последовательности, т. е. функции, заданной на множестве целых положительных чисел); сложение и умножение функций; абсолютная величина функции.

5) Верхняя и нижняя грани числовых множеств и действительных функций; предел, верхний и нижний пределы последовательности действительных чисел или функций.

Числовую прямую, пополненную символами +∞ и —∞, условимся называть *расширенной числовой прямой.*

Если x и y — действительные числа, то

$$x \cup y = \max\{x,\ y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|),$$

$$x \cap y = \min\{x,\ y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Точно так же, если f и g— действительные функции, то функции $f \cup g$ и $f \cap g$ определяются равенствами

$$(f \cup g)(x) = f(x) \cup g(x), \qquad (f \cap g)(x) = f(x) \cap g(x).$$

Верхняя и нижняя грани последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ обозначаются соответственно

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{и} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} x_n.$$

В этих обозначениях

$$\lim_n \sup x_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} x_m$$

и

$$\lim_n \inf x_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} x_m.$$

В работе используются понятия метрического пространства, полного и сепарабельного метрического пространства, а также понятие равномерной непрерывности функции, заданной в метрическом пространстве. Встречаются и такие понятия анализа как односторонняя непрерывность.

В последнем параграфе используется теорема Тихонова о компактности произведений пространств (для счетного числа множителей, каждый из которых есть отрезок).

В работе систематически используются многие понятия и результаты, относящиеся к теоретико-множественной топологии и теории топологических групп. Мы приводим здесь перечень соответствующих определений и теорем. В качестве учебника топологии этот перечень служить не может; цель его: а) сообщить специалисту, какие именно формулировки основных понятий и результатов здесь понадобятся, б) точно указать начинающему, с чем следует ему ознакомиться, прежде чем приступить к чтению последних трех глав, в) напомнить некоторые не общеупотребительные термины и г) дать возможность читателю быстро получить нужную ему справку.

Топологические пространства. *Топологическим пространством* называется множество X с выделенным в нем классом подмножеств, называемых *открытыми множествами* в X. Класс открытых множеств должен содержать пустое множество 0 и все X; кроме того, пересечение любого конечного числа и соединение произвольного (а не только конечного или счетного) класса открытых множеств должны быть открытыми множествами. Подмножество E в X называется *множеством типа* G_δ, если существует последовательность открытых множеств $\{U_n\}$, такая, что

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Класс всех множеств типа G_δ замкнут относительно образованияконечных соединений и счетных пересечений.

Топологическое пространство X называется *дискретным*, если в нем все множества — открытые или, что эквивалентно, всякое его одноточечное подмножество принадлежит классу открытых множеств. Множество E называется *замкнутым*, если $X—E$ открытое множество. Класс замкнутых множеств содержит 0 и X и замкнут относительно образования конечных соединений и произвольных пересечений. *Открытым ядром* E^0 множества E в X называется наибольшее открытое множество, содержащееся в E. *Замыкание* $\overline{E}$ множества E есть наименьшее замкнутое множество, содержащее E. Если E — открытое множество, то $E^0 = E$; если E замкнуто, то $\overline{E} = E$. Замыкание множества E состоит из всех точек x, обладающих следующим свойством: всякое открытое множество, содержащее x, имеет непустое пересечение с E. Множество E называется *плотным* в X, если $\overline{E} = X$. Подмножество Y топологического пространства X само оказывается топологическим пространством *(подпространством* пространства X), если в качестве открытых множеств в Y взять пересечения Y с открытыми множествами в X; возникающая таким образом в Y топология называется *относительной топологией.* Окрестностью точки x в X (множества E в X) называется любое открытое множество, содержащее точку x (соотв. множество E). *Базисом* называется класс **B** открытых множеств, обладающий таким свойством: для любой точки x из X и любой ее окрестности U существует множество B из **B**, такое, что $x \in B \subset U$. *Топология числовой прямой* определяется требованием, чтобы класс всех открытых интервалов представлял собой базис. *Подбазис* определяется как класс открытых множеств, всевозможные конечные пересечения которых образуют базис. Пространство X называется *сепарабелъным,* если оно обладает счетным базисом. Всякое подпространство сепарабельного пространства сепарабельно.

Открытым покрытием подмножества E топологического пространства X называется любой класс **K** открытых множеств, такой, что $E \subset \bigcup \mathbf{K}$. Если пространство X сепарабельно, то, каково бы ни было открытое покрытие **K** множества E в X, в **K** существует счетный подкласс $\{K_1, K_2, \ldots\}$, также являющийся открытым покрытием E. Множество E в X называется *компактным,* если всякое его открытое покрытие **K** содержит конечный подкласс $\{K_1, \ldots, K_n\}$, также являющийся открытым покрытием множества E. Пространство X компактно тогда и только тогда, когда всякий класс замкнутых множеств, обладающий тем свойством, что любой его конечный подкласс имеет непустое пересечение, сам обладает непустым пересечением. Множество E в пространстве X называется σ-*компактным,* если существует последовательность компактных множеств $\{C_n\}$, такая, что

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Пространство X называется *локально компактным,* если всякая его точка обладает окрестностью, замыкание которой компактно. Подмножество E локально компактного пространства называется *ограниченным,* если существует компактное множество C, такое, что $E \subset C$. Класс всевозможных ограниченных открытых множеств в локально компактном пространстве представляет собой базис. Замкнутое подмножество ограниченного множества компактно. Подмножество E локально компактного пространства называется *σ-ограниченным,* если существует последовательность компактных множеств $\{C_n\}$,такая, что $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$ Для всякого локально компактного, но не компактного, пространства X существует компактное пространство X^*, содержащее X и в точности одну дополнительную точку x^*; говорят, что пространство X *компактифицируется* добавлением точки x^*. Открытыми множествами в X^* служат открытые множества в X, а также дополнения (в X^*) замкнутых компактных подмножеств X.

Пусть $\{Xi{:}i \in I\}$—какой-нибудь класс топологических пространств; их *тихоновским произведением* называется множество $X = \times\{X_i : i \in I\}$ всевозможных функций x:, заданных на I таким образом, что $x(i) \in X_i$ при любом $i/$ из I. Фиксировав какое-нибудь i_0 из I, обозначим через E_{i0} любое открытое множество в X_{i0}, а для $i \neq i_0$ положим $E_i = X_i$; определим теперь в X открытые множества, потребовав, чтобы класс множеств вида $\times\{E_i : i \in I\}$ служил подбазисом. Функция ξ_i, заданная на X посредством равенства $\xi_i\ (x) = x(i)$, непрерывна. Тихоновское произведение любого класса компактных пространств компактно.

Топологическое пространство называется *хаусдорфовым пространством,* если любые две его точки имеют непересекающиеся окрестности. Любые два непересекающихся компактных подмножества хаусдорфова пространства также обладают непересекающимися окрестностями. Компактное множество в хаусдорфовом пространстве непременно замкнуто. Если локально компактное пространство X хаусдорфово или сепарабельно, то компактификация его посредством присоединения точки x^* приводит соответственно к хаусдорфову или сепарабельному пространству X^*. Непрерывная действительная функция на компактном множестве ограничена.

Если X—топологическое пространство, то $\mathfrak{F}(X)$(или $\mathfrak{F}$) будет обозначать класс всех действительных непрерывных функций f на X, удовлетворяющих неравенству $0 \leq f(x) \leq 1$ при любом x из X. Хаусдорфово пространство называется *вполне регулярным*, если для любой его точки y и для любого замкнутого множества F, не содержащего y, существует функция f из $\mathfrak{F}$, такая, что $f(y) = 0$ и $f(x)=1$ для всех x из F.

Всякое локально компактное хаусдорфово пространство вполне регулярно.

Метрическим пространством называется множество X с определенной на $X \times X$ действительной функцией d, называемой *расстоянием,* обладающей следующими свойствами: $d(x, y) \geqslant 0$, $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x=y$, и $d(x, y) \leqslant d(z, x) + d(z, y)$.

Если E и F—непустые подмножества метрического пространства, то $d(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E, y \in F\}$ называется расстоянием между множествами E и F. Если $F = \{x_0\}$—множество, состоящее из единственной точки x_0, то вместо $d(E, \{x_0\})$ мы пишем просто $d(E, x_0)$. *Сферой радиуса r_0 с центром x_0* называется множество $E = \{x : d(x_0, x) < r_0\}$. *Топология метрического пространства* определяется требованием, чтобы класс всевозможных сфер служил базисом. Метрическое пространство вполне регулярно. Замкнутые множества в метрическом пространстве являются множествами типа G_δ. Метрическое пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда оно содержит счетное всюду плотное подмножество. Каково бы ни было подмножество E метрического пространства, функция f, определяемая равенством $f(x)=d(E, x)$, непрерывна и $\bar{E} = \{x : f(x) = 0\}$. Числовая прямая и тихоновское произведение конечного числа числовых прямых представляют собой локально компактные сепарабельные хаусдорфовы пространства; это даже — метрические пространства, если расстояние $d(x,y)$ между точками $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ определить как $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$.

Замкнутый интервал действительной прямой является компактным множеством.

Отображение T топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *непрерывным,* если прообраз любого открытого множества в Y есть открытое множество в X, или, что то же самое, если прообраз любого замкнутого множества в Y есть замкнутое множество в X. Преобразование T называется *открытым,* если образ любого открытого множества в X есть открытое множество в Y. Если **В** — подбазис в пространстве Y, то преобразование Г непрерывно тогда и только тогда, когда $T^{-1}(B)$ — открытое множество, каково бы ни было B из **В**. Если непрерывное преобразование T отображает X на Y и при этом X компактно, то Y также компактно. *Гомеоморфизмом* называется взаимно-однозначное непрерывное отображение пространства X на пространство Y, для которого обратное отображение также непрерывно.

Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных действительных функций непрерывна. Если f и g—непрерывные действительные функции, то функции $f \cup g$ и $f \cap g$ также непрерывны.

Топологические группы. Непустое множество X называется *группой,* если в нем определена операция умножения, подчиняющаяся сочетательному закону и условию, что при любых двух элементах a и b из X разрешимы уравнения $ax = b$ и $xa = b$. Во всякой группе существует единственный *единичный элемент* e, характеризуемый тем свойством, что $ex = xe = x$ для любого x из X. Для всякого элемента x в X существует *обратный* элемент x^{-1}, характеризуемый тем свойством, что $xx^{-1} = x^{-1}x = e$. Непустое подмножество Y в X называется *подгруппой,* если $x^{-1}y \in Y$, коль скоро x и y принадлежат Y. Если E— какое-нибудь подмножество группы X, то множество элементов вида x^{-1}, где $x \in E$, условимся обозначать E^{-1}; если E и F какие-нибудь подмножества группы X, то EF означает множество элементов вида xy, где $x \in E$, $y \in F$. Непустое подмножество Y группы X будет подруппой в том и только в том случае, если $Y^{-1}Y \subset Y$. Если $x \in X$, то вместо $\{x\}E$ и $E\{x\}$ принято писать просто xE и Ex; об этих множествах говорят, что они получены из E посредством *левого* и, соответственно, *правого переноса.* Если Y—подгруппа группы X, то множества xY и Yx называются соответственно левыми и правыми *смежными подмножествами* по подгруппе Y.

Подгруппа Y называется *инвариантной,* если $xY = Yx$ при любом x из X; инвариантная подгруппа иначе называется *нормальным делителем* группы. Если в классе $\hat{X}$ смежных подмножеств по нормальному делителю Y определить умножение, положив, что произведение Y_1 и Y_2 из $\hat{X}$ есть множество Y_1Y_2, то $\hat{X}$ оказывается группой; ее называют *фактор-группой* группы X по Y и обозначают X/Y. Единичным элементом $\hat{e}$ группы $\hat{X}$ служит Y. Если Y—нормальный делитель группы X, то отображение π группы X на факторгруппу $\hat{X}$, ставящее в соответствие всякому элементу x из X то смежное подмножество, которому этот элемент принадлежит, называется *проекцией* группы X на $\hat{X}$. Отображение T группы X в группу Y называется *гомоморфизмом,* если $T(xy) = T(x)\,T(y)$ для любых элементов x и y из X. Проекция группы X на фактор-группу $\hat{X}$ представляет собой гомоморфизм.

Топологической группой называется группа X, представляющая собой одновременно хаусдорфово пространство, если при этом отображение (пространства $X \times X$ на X), переводящее (x, y) в $x^{-1}y$, непрерывно. Класс **N** открытых множеств в топологической группе, содержащих единичный элемент e, называется *базисом в точке е,* если: а) каков бы ни был элемент x, отличный от e, в **N** найдется множество U, не содержащее x; б) для любых двух множеств U и V из **N** существует W, принадлежащее **N**, такое, что $W \subset U \cap V$; в) для любого U из **N** существует V, принадлежащее **N**, такое, что $V^{-1}V \cup U$; г) для любого U из **N** и любого x из X существует V, принадлежащее **N**, такое, что $V \subset xUx^{-1}$; д) для любого U из **N** и любого x из X существует V, принадлежащее **N**, такое, что $Vx \subset U$. Класс всех окрестностей точки e образует базис в e; обратно, если в какой-нибудь группе X выделен класс **N** подмножеств, удовлетворяющий только что перечисленным условиям, и в качестве базиса взять класс множеств, получающихся в результате всевозможных переносов множеств из **N**, то группа X, таким образом топологизированная, станет топологической группой. Окрестность V единичного элемента называется *симметричной,* если $V^{-1} = V$; класс всех симметричных окрестностей точки e образует базис в e. Если **N** — базис в e, а F — произвольное замкнутое множество в X, то $F = \bigcap \{UF : U \in \mathbf{N}\}$.

Замыкание подгруппы (нормального делителя) топологической группы X представляет собой подгруппу (соотв. нормальный делитель). Если Y — замкнутый нормальный делитель топологической группы X,
то, объявив в группе $\hat{X} = X/Y$ открытыми те множества, прообразы которых при отображении π открыты в X, мы превратим $\hat{X}$ в топологическую группу. Сама проекция π при этом окажется открытым непрерывным отображением.

Если C — компактное, а U—открытое множества в топологической группе и $C \subset U$, то существует такая окрестность V единичного элемента e, что $VCV \subset U$. Если C и D — два непересекающихся компактных множества, то существует окрестность U точки e, такая, что

UCU и *UDU* не пересекаются. Если *C* и *D* — компактные множества, то множества C^{-1} и *CD* также компактны.

Подмножество *E* топологической группы *X* называется *ограниченным,* если для всякой окрестности *U* единичного элемента *e* существует конечное множество $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (при $E \neq 0$ его можно считать заключенным в *E*), обладающее тем свойством, что

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i U.$$

В том случае, когда *X* локально компактно, это определение согласуется с общим определением ограниченного множества в локально компактном топологическом пространстве (см. выше). Если непрерывная действительная функция *f*, заданная на *X*, такова, что множество $N(f) = \{x : f(x) \neq 0\}$ ограничено, то *f равномерно непрерывна* в том смысле, что для всякого положительного числа ε существует такая окрестность *U* элемента *e,* что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$ коль скоро $x_1 x_2^{-1} \in U.$

Топологическая группа называется *локально ограниченной,* если ее единичный элемент *e* обладает ограниченной окрестностью. Для всякой локально ограниченной топологической группы *X* существует локально компактная группа *X**, содержащая *X* в качестве плотной подгруппы; эта группа единственна с точностью до изоморфизма и называется *пополнением* группы *X*. Любая замкнутая подгруппа и любой нормальный делитель локально компактной группы представляют собой локально компактные группы.

1.2. Пространства с мерой

Первоначальные представления о площади и объеме можно описать следующими аксиомами:

1. Каждому ограниченному множеству $A \subset \mathbb{R}^n$ сопоставлено неотрицательное число *V(A),* называемое (n-мерным) объемом этого множества.
2. Объем аддитивен: если $A \cap B = \emptyset$, то $V(A \cup B) = V(A) + V(B)$.
3. Если множества *A* и *B* конгруэнтны (совмещаются движением), то их объемы равны.
4. Объем единичного куба равен 1.

У этих аксиом есть фатальный недостаток: они внутренне противоречивы. Противоречие было предъявлено в 1914 году

Хаусдорфом. Позднее (в 1926 году) Банах и Тарский оформили его в виде следующей теоремы.

Теорема (парадокс Банаха—Тарского). *Можно разбить стандартный шар $B \subset \mathbb{R}^3$ на 5 непересекающихся множеств A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и построить такие множества B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, что*

1. Каждое множество B_i конгруэнтно соответствующему множеству A_i.

2. B_1 и B_2 не пересекаются и их объединение равно B.

3. B_3, B_4 и B_5 попарно не пересекаются и их объединение равно B.

Чтобы обойти проблемы, связанные с парадоксом Банаха—Тарского, нужно отказаться от предположения, что *все* множества имеют объем. Множества, для которых определен объем, называются *измеримыми.* Кроме того, для многих приложений необходимо, чтобы объем был *счетно-аддитивным,* то есть складывался при объединении счетного числа частей.

Определение. *Пространство с мерой* — это множество X, в котором выделена некоторая система $\mathfrak{A} \subset 2^X$ его подмножеств (называемых *измеримыми)* и задана функция: $\mu : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$, называемая *мерой.* При этом должны выполняться следующие условия. Класс $\mathfrak{A}$ измеримых множеств является σ-алгеброй, то есть:

1. $X \in \mathfrak{A}$ (все пространство является измеримым множеством).

2. Объединение, пересечение и разность любых двух множеств из $\mathfrak{A}$ тоже принадлежит $\mathfrak{A}$.

3. Объединение любого счетного набора множеств из $\mathfrak{A}$ снова принадлежит $\mathfrak{A}$. Функция μ аддитивна и счетно-аддитивна, то есть:

4. Если $A, B \in \mathfrak{A}$ и $A \cap B = \emptyset$, то $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Кроме того, $\mu(\emptyset) = 0$.

5. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетный набор множеств. Тогда, если все A_i измеримы и попарно не пересекаются, то $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$.

Замечания. 1. В свойстве 5 в правой части стоит сумма ряда. Поскольку все слагаемые неотрицательны, сумма не зависит от порядка слагаемых.

2. Требование $\mu(\emptyset)$ добавлено для того, чтобы исключить единственный пример, в котором мера любого множества равна $+\infty$.

3. Поскольку дополнение измеримого множества измеримо, из свойства 3 следует, что пересечение счетного набора измеримых множеств тоже измеримо. Аналогично, в свойстве 2 достаточно ограничиться только одной из операций объединения и пересечения.

Примеры. В этих примерах можно считать, что все множества измеримы.

1. *Считающая мера.* Мера множества равна количеству его элементов.
2. *δ-мера Дирака.* Зафиксируем точку $x_0 \in X$ и положим $\mu(A) = 1$, если $x_0 \in A$ и $\mu(A) = 0$, если $x_0 \notin A$. Эта мера μ обозначается через δ_{x0}.
3. Положим меру любого счетного множества равной 0, а любого несчетного — равной $+\infty$.
4. Измеримое подмножество пространства с мерой само является пространством с мерой.

Простейшие свойства. Любая мера μ обладает следующими свойствами:

1. Монотонность: если множества A и B измеримы и $A \subset B$, то $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. Субаддитивность: $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ для любых измеримых множеств A и B.
3. Счетная субаддитивность: $\mu(\bigcup A_i) \leq \sum \mu(A_i)$ для любого счетного набора $\{A_i\}$ измеримых множеств.
4. Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ — возрастающая последовательность измеримых множеств, $A \bigcup A_i$. Тогда $\mu(A) = \lim \mu(A_i)$.
5. Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ — убывающая последовательность измеримых множеств, $A \cap A_i$. Предположим, что $\mu(A_1) < +\infty$. Тогда $\mu(A) = \lim \mu(A_i)$. Замечание: условие $\mu(A_1) < +\infty$ существенно.

Задача. Пусть $\{A_i\}$ — последовательность измеримых множеств в пространстве X, причем $\mu(X) < +\infty$. Пусть A — *верхний предел* этой последовательности, то есть множество всех точек, принадлежащих бесконечно многим из множеств A_i. Докажите, что A измеримо и $\mu(A) \geq \overline{\lim}\, \mu(A_i)$.

1.3 Борелевские множества

Далее основное множество X будет всегда предполагаться метрическим пространством. В приложениях можно считать, что $X = \mathbb{R}^n$. Напоминание: множество $A \subset X$ называется *открытым,* если оно вместе с каждой точкой содержит некоторую ее окрестность, где под окрестностью понимается шар с центром в этой точке. Множество $A \subset X$ называется *замкнутым,* если его дополнение $X \setminus A$ открыто (это эквивалентно тому, что A содержит все свои предельные точки).

Определение. *Борелевская σ-алгебра* пространства X — это минимальная по включению σ-алгебра в X, содержащая все открытые множества. Множество $A \subset X$ называется *борелевским,* если оно

принадлежит борелевской σ-алгебре. *Борелевская мера* на X — мера, определенная на борелевской σ-алгебре.
Чтобы доказать, что борелевская σ-алгебра существует, рассмотрим пересечение всех σ-алгебр, содержащих все открытые множества. Аналогично определяется σ-алгебра, порожденная произвольным множеством $\mathcal{P} \subset 2^X$.
Для построения борелевской σ-алгебры не обязательно начинать с множества всех открытых (или всех замкнутых) множеств. Например, борелевская σ-алгебра на прямой порождается лучами вида $[a, +\infty)$.

1.4. Кратные интегралы и меры

Пусть в трехмерном пространстве, в котором определена прямоугольная система координат *(x, y, z),* задана непрерывная поверхность

$$z = f(Q) = f(x, y) \qquad (Q = (x, y) \in \Omega),$$

где Ω есть ограниченное (двумерное) множество, для которого возможно определить понятие его площади (двумерной меры, см. § 3.11). В качестве Ω может быть взят круг, прямоугольник, эллипс и т. д. Будем считать, что функция *f (x, y)* положительная, и поставим задачу: требуется определить объем тела, ограниченного сверху нашей поверхностью, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков цилиндрической поверхностью, проходящей через границу γ плоского множества Ω, с образующей, параллельной оси z.
Искомый объем естественно определить следующим образом. Разделим Ω на конечное число частей

$$\Omega_1, \ \ldots, \ \Omega_N, \tag{1}$$

перекрывающихся между собой разве что по своим границам. Однако эти части должны быть такими, чтобы можно было определить их площади (двумерные меры), которые мы обозначим соответственно через $m\,\Omega_1, \ldots, m\,\Omega_N$.
Введем понятие *диаметра* множества *A*—это есть точная верхняя грань $d(A) = \sup\limits_{P', P'' \in A} |P' - P''|$.
В каждой части Ω_j выберем по произвольной точке $Q_j = (\xi_j, \eta_j)$ $(j = 1, \ldots, N)$ и составим сумму

$$V_N = \sum_{j=1}^{N} f(Q_j)\, m\Omega_j, \tag{2}$$

которую естественно считать приближенным выражением искомого объема *V,* Надо думать, что приближение $V \approx V_N$ будет тем более точным, чем меньшими будут диаметры $d\,(\Omega_j)$ частей Ω_j. Поэтому естественно *объем* нашего тела определить как предел суммы (2)

$$V = \lim_{\max d(\Omega_j) \to 0} \sum_{j=1}^{N} f(Q_j)\, m\Omega_j, \qquad (3)$$

когда максимальный диаметр частичных множеств разбиения (1) стремится к нулю, если, конечно, этот предел существует и равен одному и тому же числу независимо от способа последовательного разбиения Ω.

Можно отвлечься от задачи о нахождении объема тела и смотреть на выражение (3) как на некоторую операцию, которая производится над функцией *f*, определенной на Ω. Эта операция называется *операцией двойного интегрирования по Риману функции f на множестве* Ω, а ее результат— *определенным двойным интегралом (Римана) от f на* Ω, обозначаемым так:

$$V = \lim_{\max d(\Omega_j) \to 0} \sum_{j=1}^{N} f(Q_j)\, m\Omega_j = \iint_{\Omega} f(x,\ y)\, dx\, dy =$$
$$= \int_{\Omega} f(Q)\, dQ = \int_{\Omega} f\, d\Omega.$$

Пусть теперь в трехмерном пространстве, где определена прямоугольная система координат *x, y, z,* задано тело Ω (множество) с неравномерно распределенной в нем массой с плотностью распределения $\mu(x,\ y,\ z) = \mu(Q)$ $(Q = (x,\ y,\ z) \in \Omega.)$ Требуется определить общую массу тела Ω. Чтобы решить эту задачу, естественно произвести разбиение Ω на части $\Omega_1,\ \ldots,\ \Omega_N$, объемы (трехмерные меры) которых (в предположении, что они существуют) пусть будут $m\Omega_1,\ \ldots,\ m\Omega_N$, выбрать произвольным образом в каждой части по точке $(Q_j = (x_j,\ y_j,\ z_j) \in \Omega_j)$ и считать, что искомая масса равна

$$M = \lim_{\max d(\Omega_j) \to 0} \sum_{j=1}^{N} \mu(Q_j)\, m\Omega_j. \qquad (4)$$

Снова навыражение (4) можно смотреть как на определенную операцию над функцией μ, заданной теперь на трехмерном множестве Ω. Эта операция на этот раз называется *операцией тройного интегрирования (по Риману),* а результат ее—*определенным тройным интегралом (Римана),* обозначаемым так:

$$M = \lim_{\max d(\Omega_j) \to 0} \sum_{j=1}^{N} \mu(Q_j)\, m\Omega_j = \int_{\Omega} \mu(Q)\, dQ =$$
$$= \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

В этом же духе определяется понятие *n-кратного интеграла Римана.*

Мы увидим, что часть теории кратного интегрирования, содержащая теоремы существования и теоремы об аддитивных свойствах интеграла, может быть изложена совершенно аналогично как в одномерном, так и в *n-мерном случае.* Однако в теории кратных интегралов возникают трудности, которых не было при изложении теории однократных интегралов.

Дело в том, что однократный интеграл Римана мы определили для очень простого множества—отрезка [*a, b],* который дробился снова на отрезки. Никаких трудностей и определении длины *(одномерной меры)* отрезков не возникало. Между тем в случае двойных и вообще *n*-кратных интегралов область интегрирования Ω приходится делить на части с криволинейными границами, и возникает вопрос об общем определении понятия площади или вообще *n*-мерной меры этих частей.

В двумерном случае мы будем иметь дело с ограниченными областями, имеющими *гладкую границу* (рис. 1) или *кусочно-гладкую границу* (рис. 2), т. е. состоящую из конечного числа гладких кусков (линий).

Рис. 1.

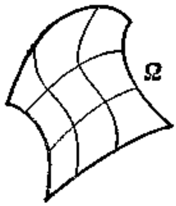


Рис. 2.

Эти области в свою очередь приходится делить на части, имеющие *кусочно-гладкую границу.*

Каждой такой области ω и некоторым другим множествам можно привести в соответствие положительное число *m*ω, называемое *площадью или двумерной мерой Жордана* (общее определение двумерной меры Жордана дано в § 3.11).

При этом выполняются свойства:

1) Если Δ—прямоугольник с основанием a и высотой b, то $m\Delta = |\Delta| = ab.$

2) Если $\omega_1 \subset \omega_2$ и ω_1, ω_2 имеют меры $m\omega_1$, $m\omega_2$, то $m\omega_1 \le m\omega_2$.

3) Если область ω разрезана при помощи кусочно-гладкой кривой надве части ω_1 и ω_2 $(\omega = \omega_1 + \omega_2)$, то

$$m\omega = m\omega_1 + m\omega_2.$$

Существуют множества двумерной меры нуль такие, как точка, отрезок, гладкая или кусочно-гладкая кривая.

В трехмерном случае нас будут интересовать области, имеющие в качестве своей границы кусочно-гладкие поверхности. Про такие области будем говорить, что они имеют кусочно-гладкую границу. Шар, эллипсоид, куб могут служить примерами таких областей. Поверхность называется *гладкой,* если в любой ее точке к ней можно провести касательную плоскость, непрерывно изменяющуюся вместе с этой точкой. Поверхность называется *кусочно-гладкой,* если ее можно разрезать на конечное число гладких кусков. По линиям разрезов касательные плоскости к поверхности могут и не существовать.

Для трехмерных ограниченных областей ω с кусочно-гладкими границами можно определить их объем (трехмерную меру), т. е. положительное число тсо, удовлетворяющее свойствам:

1) Если Δ — прямоугольный параллелепипед с ребрами $a, b, c,$ то $m\Delta = |\Delta| = abc.$

2) Если $\omega_1 \subset \omega_2$ и ω_1, ω_2

имеют меры $m\omega_1$, $m\omega_2$, то $m\omega_1 \le m\omega_2$.

3) Если область ω разрезана при помощи кусочно-гладкой поверхности на части ω_1 и ω_2 $(\omega = \omega_1 + \omega_2)$, то $m\omega = m\omega_1 + m\omega_2.$

Есть множества трехмерной меры нуль. Такими являются точка, отрезок, прямоугольник (плоский), гладкая или кусочно-гладкая поверхность.

По аналогии можно рассматривать *л*-морные области ω $(\omega \subset R_n)$ с кусочно-гладкой границей и для них определить n-мерную меру — $m\omega > 0$, обладающую снойстшши, подобными свойствам 1), 2), 3). *Прямоугольник* Δ в R_n определяется как множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$a_j \le x_j \le b_j \qquad (j = 1, \ldots, n; \quad a_j < b_j).$$

Мера (n-мерная) Δ определяется как произведение:

$$m\Delta = |\Delta| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n).$$

Гладкая поверхность $S \subset R_n$ определяется как множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих уравнению

$$x_j = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n), \quad (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in g,$$

где j может иметь одно из значений $j = 1, 2, \ldots, n$. При этом f есть непрерывно дифференцируемая функция на замыкании некоторой $(n - 1)$-мерной ограниченной области g точек $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$.

Кусочно-гладкая поверхность в R_n по определению состоит из конечного числа гладких кусков (поверхностей), пересекающихся между собой разве что по их краям.

Повторим определение кратного интеграла, не прибегая к задачам геометрического или физического содержания.

Пусть в n-мериом пространстве R_n задана ограниченная область Ω с кусочно-гладкой границей Γ $(\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma)$ и на Ω (или $\bar{\Omega}$) задана функция

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Разрежем $\bar{\Omega}$ на части Ω_j, пересекающиеся разве что по своим границам, которые будем считать кусочно-гладкими. Для краткости будем говорить, что мы произвели разбиение ρ множества Ω.

Выберем в каждой части Ω_j по произвольной точке $\xi^j = (\xi_1^j, \ldots, \xi_n^j)$ $(\xi^j \in \Omega_j)$ и составим сумму

$$S_\rho(f) = \sum_{j=1}^{N} f(\xi^j)\, m\Omega_j,$$

которую будем называть *интегральной суммой Римана* функции f, отвечающей разбиению ρ.

Предел суммы

$$\lim_{\max d(\Omega_j) \to 0} S_\rho(f) = \lim_{\max d(\Omega_j) \to 0} \sum_{j=1}^{N} f(\xi^j)\, m\Omega_j = \int_\Omega f(x)\, dx = \int \underset{\Omega}{\ldots} \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \quad \textbf{(5)}$$

когда максимальный диаметр частичных множеств Ω_j стремится к нулю, называется *кратным интегралом от функции f на* Ω (или по $\bar{\Omega}$).

Подчеркнем, что предел (5) называется кратным интегралом функции f, если он не зависит от выбора точек ξ^j в Ω_j и не зависит от способов разбиения ρ области *n.*

Сделаем несколько замечаний.

Замечание 1. Будем ли мы вычислять предел (5) для облаети Ω или для ее замыкания $\bar{\Omega}$, не имеет значения. Это связано с тем, что

$\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$, где Г—граница Ω, предположенная кусочно-гладкой. А кусочно-гладкая граница имеет *n*-мерную меру нуль *(m* Г = 0, см. §3.11),

Замечание 2. Если предел (5), т. е. кратный интеграл $\int\limits_{\Omega} f d\Omega$ существует, то функция *f (x)* ограничена на $\overline{\Omega}$ (| *f (x)* | ≤ *M).* Это доказывается так же, как в случае одномерного определенного интеграла.

Замечание 3. Если $\max d(\Omega_j) \to 0$, то сумма мер тех частиц Ω_j, которые непосредственно прилегают к кусочно-гладкой границе Г, тоже стремится к нулю

$$\sum\nolimits'' m\Omega_j \to 0.$$

Здесь двойной штрих при ∑ обозначает, что сумма распространена на те части Ω_j, которые прилегают к Г.

Например, если область Ω разрезать на части при помощи квадратной сетки, как на рис. 3, то соответствующее разбиение можно записать в виде

$$\Omega = \sum\nolimits' \Omega_j + \sum\nolimits'' \Omega_j,$$

где сумма ∑' распространенана полные квадратики (попавшие в Ω_j), а сумма ∑"—на неполные квадратики.

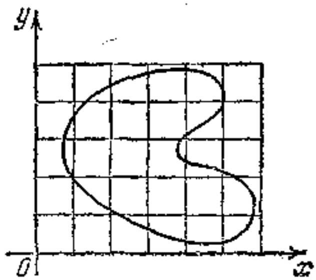


Рис. 3

Важно, что мера второй суммы стремится к нулю при неограниченном стремлении диаметра диагонали квадратиков еетки к нулю:

$$\sum\nolimits'' m\Omega_j \xrightarrow[\max d(\Omega_j) \to 0]{} 0.$$

Замечание 4. Из предыдущих замечаний следует, что

$$\left|\sum'' f(\xi^j)\, m\Omega_j\right| \leqslant \sum'' M\cdot m\Omega_j = M\sum'' m\Omega_j \xrightarrow[\max d(\Omega_j)\to 0]{} 0.$$

Это показывает, что интеграл (5) можно определить так же, как предел суммы

$$\lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum' f(\xi^j)\, m\Omega_j = \int_{\Omega} f(x)\, dx,$$

распространенной только на такие части Ω_j разбиения, которые не прилегают к Г.

Замечания 1, 2, 3, 4 мы формально не обосновываем. Они вытекают из приводимого § 11.3.

2. МНОЖЕСТВА И КЛАССЫ

2.1. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ

Всюду в этой книге слово *множество* будет означать подмножество некоторого заданного множества; последнее, за исключением некоторых особых случаев, будет обозначаться буквой X. Элементы множества X будут называться *точками,* само X—*пространством* (иногда мы будем говорить об X как о *всем* пространстве или пространстве *целиком).* Этот раздел носит вводный характер; цель его— ввести основные понятия теории множеств и установить некоторые факты, которыми мы будем постоянно пользоваться в дальнейшем.

Если x — точка пространства X, а E—подмножество в X, то запись

$$x \in E$$

означает, что x принадлежит E (т. е. x есть одна из точек множества E). Противоположное утверждение, состоящее в том, что x не принадлежит E, записывается символом

$$x \notin E$$

Так, например, для любой точки x из X имеем

$$x \in X,$$

тогда как соотношение

$$x \notin X$$

не имеет места ни для одной из этих точек. Если E и F— подмножества X, то запись

$E \subset F$ или $F \supset E$

означает, что *E* представляет собой подмножество множества *F*, т. е. всякая точка множества *E* принадлежит *F*. В частности,

$E \subset E$,

каково бы ни было множество *E*. Два множества *E* и *F* называются *равными* в том и только том случае, когда они содержат одни и те же точки, т. е. когда

$$E \subset F \text{ и } F \subset E.$$

Из этого, на первый взгляд безобидного, определения вытекает важный принцип, состоящий в том, что для доказательства равенства двух множеств необходимо обнаружить, в два этапа, что каждое из этих множеств является подмножеством другого.

Громадное упрощение формулировок и записи достигается присоединением к классу подмножеств *X* множества, не содержащего никаких элементов; такое множество называется *пустым* и обозначается символом 0. Для любого множества *E* имеем

$0 \subset E \subset X$;

вместе с тем, каков бы ни был *x*,

$$x \notin 0.$$

Помимо множеств точек нам часто придется рассматривать множества множеств. Например, если *X*—числовая прямая, то совокупность всех интервалов есть множество некоторых подмножеств *X*. Условимся множество множеств всегда называть *классом.* На классы множеств распространяются все предыдущие определения. Так, например, если *E*— множество, а **E** — некоторый класс множеств, то

$$E \in \mathbf{E}$$

означает, что *E* принадлежит классу **E** (иначе, входит в **E**, является элементом класса **E**). Если **E** и **F** суть классы, то

$\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$

означает, что всякое множество, принадлежащее **E**, входит в **F**; будем при этом говорить, что **E** есть подкласс класса **F**.

В тех редких случаях, когда нам придется иметь дело с множеством классов, мы будем употреблять слово *система.* Так, например, если *X*—эвклидова плоскость, а $\mathbf{E}_y$ — множество интервалов на горизонтальной оси, лежащих на расстоянии *y* от начала координат, то всякое $\mathbf{E}_y$ образует класс, а множество всех таких классов — систему.

1. Отношение с рефлективно и транзитивно; оно симметрично в том и только том случае, когда X — пустое множество.
2. Пусть **X** — класс всех подмножеств пространства X; к **X** принадлежат, конечно, пустое множество $\varnothing$ и все X. Пусть x — точка пространства X, E — подмножество из X, т. е. элемент класса **X**, и **E** — какой-нибудь класс подмножеств из X, т. е. подкласс класса **X**. Тогда, если вместо u и v подставлять произвольно и независимо символы x, E, X, **E**, **X**, то в числе пятидесяти соотношений вида

$$u \in v \quad \text{и} \quad u \subset v$$

будут соотношения всегда верные, могущие быть верными или неверными, всегда неверные и, наконец, лишенные смысла. Например, $u \in v$ имеет смысл тогда, когда слева стоит x, а справа — E или X, или же слева — E или X, а справа — **E** или **X**.

2.2. СОЕДИНЕНИЯ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Пусть **E** — какой-нибудь класс подмножеств пространства X; множество всех тех точек из X, каждая из которых принадлежит хотя бы одному из множеств класса **E**, называется *соединением* множеств класса **E** и обозначается

$$\bigcup \mathbf{E} \quad \text{или} \quad \bigcup \{E : E \in \mathbf{E}\}.$$

Если класс **E** конечный или счетный, то $\bigcup \mathbf{E}$ будем иногда называть конечным или, соответственно, счетным соединением.
Примененным здесь способом записи мы постоянно будем пользоваться в дальнейшем. Если нам задано какое-нибудь множество, x — его произвольный элемент и $\pi(x)$ — некоторое предложение, относящееся к x, то

$$\{x : \pi(x)\}$$

означает множество всех тех x, в применении к которым предложение $\pi(x)$ верно. Если $\{\pi_n(x)\}$—последовательность предложений, относящихся к x, то

$$\{x : \pi_1(x),\ \pi_2(x),\ \ldots\}$$

— множество всех тех x, для которых верно $\pi_n(x)$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. В общем случае, когда всякому элементу γ какого-либо „множества индексов" Γ поставлено в соответствие некоторое предложение $\pi_\gamma(x)$, относящееся к x, то множество всех тех x, для которых $\pi_\gamma(x)$ верно при всех γ из Γ, обозначается символом

$$\{x : \pi_\gamma(x),\ \gamma \in \Gamma\}.$$

Так, например,

$$\{x : x \in E\} = E$$

и

$$\{E : E \in \mathbf{E}\} = \mathbf{E}.$$

Для пояснения приведем еще такие примеры:

$$\{t : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

— замкнутый единичный интервал;

$$\{(x,\ y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

— единичная окружность в плоскости;

$$\{n^2 : n = 1,\ 2,\ \ldots\}$$

— множество квадратов всех целых положительных чисел. В соответствии с этим способом записи верхняя и нижняя грани числового множества E будут обозначаться

$$\sup\{x : x \in E\} \quad \text{и} \quad \inf\{x : x \in E\}.$$

Вообще, фигурные скобки $\{...\}$ будут нами употребляться в качестве символа, служащего для образования множеств. Например, если x и y — какие-нибудь две точки, то $\{x, y\}$ будет означать множество, элементами которого являются x и y. Необходимо строго различать точку x и множество $\{x\}$, состоящее из единственного элемента x, и точно так же множество E и класс $\{E\}$, образованный единственным множеством E. В самом деле, пустое множество $\varnothing$ не содержит никаких элементов, в то время как класс $\{\varnothing\}$ содержит одно множество, именно самоё пустое множество.

Для соединений некоторых специальных классов множеств применяются особые обозначения. Так, например, если

$$\mathbf{E} = \{E_1,\ E_2\},$$

то вместо

$$\bigcup \mathbf{E} = \bigcup \{E_i : i = 1,\ 2\}$$

пишут

$$E_1 \cup E_2;$$

вообще, при

$$\mathbf{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$$

соединение

$$\bigcup \mathbf{E} = \bigcup \{E_i : i = 1, \ldots, n\}$$

обозначают

$$E_1 \cup \ldots \cup E_n \quad \text{или} \quad \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Подобным же образом, если имеется последовательность множеств $\{E_n\}$, то соединение множеств, ее образующих, обозначается

$$E_1 \cup \ldots \cup E_n \quad \text{или} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

В общем случае, если всякому элементу γ некоторого множества индексов Γ поставлено в соответствие множество E_γ, то соединение

$$\bigcup \{E_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

класса всех множеств E_γ обозначается

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma \quad \text{или} \quad \bigcup_{\gamma} E_\gamma.$$

Если Γ — множество индексов — пусто, то условимся считать, что

$$\bigcup_{\gamma} E_\gamma = \varnothing.$$

Участие пустого множества и всего пространства X в образовании соединений описывается тождествами

$$E \cup \varnothing = E \quad \text{и} \quad E \cup X = X.$$

Вообще, соотношение

$$E \subset F$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$E \cup F = F.$$

Если **E** — какой-нибудь класс подмножеств пространства X, то совокупность всех точек x, каждая из которых принадлежит всем множествам из **E**, называется *пересечением* множеств класса **E** и обозначается

$$\bigcap \mathbf{E} \quad \text{или} \quad \bigcap \{E : E \in \mathbf{E}\}.$$

Если класс **E** конечный или счетный, то ∩ **E** будем иногда называть конечным или, соответственно, счетным пересечением.

Для пересечения двух, конечного или счетного числа множеств, а также класса множеств, снабженных индексами, употребляются обозначения, сходные с теми, которые мы указали для соединений, но со знаком ∩ вместо ∪ . Если множество индексов Γ пусто, то мы положим, может быть несколько неожиданно для читателя,

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = X.$$

В пользу такого соглашения можно высказать несколько соображений эвристического характера. Одно из них состоит в следующем: если Γ_1 и Γ_2 — два каких-нибудь непустых множества индексов, причем $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, то, очевидно,

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_1} E_\gamma \supset \bigcap_{\gamma \in \Gamma_2} E_\gamma,$$

и поэтому самому узкому из возможных Γ должно отвечать самое широкое пересечение. Можно также исходить из следующего равенства:

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} E_\gamma = \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma_1} E_\gamma\right) \cap \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma_2} E_\gamma\right),$$

справедливого для непустых множеств Γ_1 и Γ_2. Если стремиться к тому, чтобы распространить это соотношение на произвольные Γ_1 и Γ_2, то придется допустить, что

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \cup \varnothing} E_\gamma = \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma\right) \cap \left(\bigcap_{\gamma \in \varnothing} E_\gamma\right);$$

положив $E_\gamma = X$ при любом γ из Γ, мы придем к равенству

$$\bigcap_{\gamma \in \varnothing} E_\gamma = X.$$

В образовании пересечений пустое множество $\varnothing$ и все пространство участвуют согласно следующим правилам:

$$E \cap \varnothing = \varnothing \quad \text{и} \quad E \cap X = E.$$

Вообще,

$$E \subset F$$

тогда и только тогда, когда

$$E \cap F = E.$$

Два множества E и F называются *непересекающимися,* если у них нет общих точек, т. е. если

$$E \cap F = \varnothing;$$

иногда говорят просто, что множества E и F *не пересекаются. Классом без пересечений* называется такой класс **E** множеств E, никакие два из которых не пересекаются.

В заключение этого параграфа мы введем полезное понятие характеристической функции. Пусть E — какое-нибудь множество в $X;$ функция χ_E, заданная на X равенствами

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in E, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin E, \end{cases}$$

называется *характеристической функцией* множества E. Соответствие между множествами и их характеристическими функциями взаимно-однозначно, и все свойства множеств и операций над множествами могут быть выражены в терминах характеристических функций. В качестве еще одного примера обозначения множества с помощью фигурных скобок отметим равенство

$$E = \{ x : \chi_E(x) = 1 \}.$$

1. Образование соединений множеств переместительно и сочетательно, т. е.

$$E \cup F = F \cup E \quad \text{и} \quad E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G;$$

образование пересечений обладает такими же свойствами.

2. Операции образования соединений и пересечений распределительны одна относительно другой, т. е.

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$$

и

$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G).$$

распределительные законы действуют и в более общей форме:

$$F \cap \left(\bigcup \{E : E \in \mathbf{E}\}\right) = \bigcup \{E \cap F : E \in \mathbf{E}\},$$

$$F \cup \left(\bigcap \{E : E \in \mathbf{E}\}\right) = \bigcap \{E \cup F : F \in \mathbf{E}\}.$$

3. Образует ли класс всех подмножеств X группу относительно операции $\cup$ или $\cap$.

4. Имеем тождества $\chi_0(x) \equiv 0,\ \chi_X(x) \equiv 1.$ Неравенство

$$\chi_E(x) \leqslant \chi_F(x)$$

имеет место для всех x из X тогда и только тогда, когда $E \subset F$. Если $E \cap F = A$ и $E \cup F = B$, то

$$\chi_A = \chi_E \chi_F = \chi_E \cap \chi_F$$

и

$$\chi_B = \chi_E + \chi_F - \chi_A = \chi_E \cup \chi_F.$$

5. Распространяются ли приведенные в упр. 4 выражения характеристических функций соединения и пересечения на любые конечные, счетные и произвольные соединения и пересечения?

2. 3. ПРЕДЕЛЫ, ДОПОЛНЕНИЯ И РАЗНОСТИ

Если $\{E_n\}$—последовательность множеств, то множество E^* всех тех точек x, каждая из которых принадлежит бесконечно многим E_n, называется *верхним пределом* последовательности и обозначается

$$E^* = \limsup_n E_n.$$

Множество E_* всех точек x, каждая из которых принадлежит всем E_n за исключением конечного числа, называется *нижним пределом* последовательности и обозначается

$$E_* = \liminf_n E_n.$$

Если $\{E_n\}$ такова, что ее верхний предел равен нижнему, то $E^* \ (= E_*)$ называют *пределом* этой последовательности и обозначают

$$\lim_{n} E_n.$$

Если при n= 1, 2, ...

$$E_n \subset E_{n+1},$$

то последовательность называется *возрастающей;* если при n= 1, 2,...

$$E_n \supset E_{n+1},$$

то последовательность называется *убывающей.* Возрастающие и убывающие последовательности носят общее название *монотонных* последовательностей.

Легко убедиться в том, что монотонная последовательность $\{E_n\}$ имеет предел, равный

$$\bigcup_n E_n \quad \text{или} \quad \bigcap_n E_n,$$

в зависимости от того, возрастающая эта последовательность или убывающая.

Дополнением множества E в X называется множество всех тех точек x, которые не принадлежат E. Дополнение множества E обозначается E'.

Операция взятия дополнения обладает следующими алгебраическими свойствами:

$$E \cap E' = \varnothing, \quad E \cup E' = X,$$

$$(E')' = E, \quad \varnothing' = X, \quad X' = \varnothing$$

и

$$E' \supset F', \quad \text{если} \quad E \subset F.$$

Образование дополнений позволяет установить интересную и очень важную связь между соединениями и пересечениями, выражаемую следующими тождествами:

$$\left(\bigcup\{E : E \in \mathbf{E}\}\right)' = \bigcap\{E' : E \in \mathbf{E}\},$$

$$\left(\bigcap\{E : E \in \mathbf{E}\}\right)' = \bigcup\{E' : E \in \mathbf{E}\}.$$

Словесно их можно выразить, сказав, что дополнение соединения множеств какого-либо класса равно пересечению их дополнений, а дополнение их пересечения есть соединение их дополнений. Отсюда и из только что указанных элементарных свойств дополнений вытекает важный *принцип двойственности:*

Если верно некоторое соотношение между множествами, имеющее вид равенства или включения и выраженное в терминах соединений, *пересечений и дополнений, то верно и соотношение такого же рода, которое получается из исходного, если в нем*

$\cup, \ \cap, \ \subset, \ \supset$

заменить соответственно символами

$\cap, \ \cup, \ \supset, \ \subset,$

равенства сохранить, а каждое множество заменить его дополнением.

Если E и F — подмножества X, то

$E - F$

означает множество всех тех точек из E, которые не принадлежат F; такое множество называется *разностью* множеств E и F. Так как

$X - F = F'$

и, вообще,

$$E - F = E \cap F',$$

то разность $E - F$ называют еще *относительным дополнением* множества F в множестве E. При замене множеств их относительными дополнениями, так же как и при взятии обычных дополнений, символы $\cup$ и $\subset$ следует заменить соответственно на $\cap$ и $\supset$, и обратно, например,

$$E - (F \cup G) = (E - F) \cap (E - G).$$

Разность $E—F$ называется *собственной* в том случае, когда $E \supset F$. Введем, наконец, еще одно теоретико-множественное понятие, очень важное во многих случаях, — понятие *симметрической разности* двух множеств E и F. Обозначается она символом

$E \Delta F$

и определяется равенством

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E) = (E \cap F') \cup (E' \cap F).$$

Обращение с пределами, дополнениями и разностями множеств требует известной практики. Мы рекомендуем поэтому читателю провести доказательства наиболее важных свойств этих операций, перечисленных в приведенных здесь упражнениях.

1. Еще одним доводом в пользу равенства

$$\bigcap_{\gamma \in 0} E_\gamma = X,$$

принятого нами в §2. 3, служит стремление распространить на пустое Г соотношение

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma = \Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} E'_\gamma\Big)',$$

справедливое при любом непустом множестве индексов Г.

2. Если $E_* = \liminf\limits_n E_n$ и $E^* = \limsup\limits_n E_n$, то

$$E_* = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m = E^*.$$

3. Верхний и нижний пределы последовательности множеств и предел такой последовательности (если он существует) не изменяются, если про извольным образом изменить конечное число членов последовательности,

4. Если $E_n = A$ при четных n и $E_n = B$ при нечетных n, то

$$\liminf_n E_n = A \cap B \ \text{и}\ \limsup_n E_n = A \cup B,$$

5. Если $\{E_n\}$ — последовательность непересекающихся множеств, то $\lim\limits_n E_n = 0.$

6. Если $E_* = \liminf\limits_n E_n$ и $E^* = \limsup\limits_n E_n$, то

$$(E_*)' = \limsup_n E'_n \ \text{и}\ (E^*)' = \liminf_n E'_n;$$

справедливы и более общие соотношения:

$$F - E_* = \limsup_n (F - E_n) \ \text{и}\ F - E^* = \liminf_n (F - E_n).$$

7.

$$E - F = E - (E \cap F) = (E \cup F) - F,$$
$$E \cap (F - G) = (E \cap F) - (E \cap G),$$
$$(E \cup F) - G = (E - G) \cup (F - G).$$

8.

$$(E - G) \cap (F - G) = (E \cap F) - G,$$
$$(E - F) - G = E - (F \cup G),$$
$$E - (F - G) = (E - F) \cup (E \cap G),$$
$$(E - F) \cap (G - H) = (E \cap G) - (F \cup H).$$

9.
$$E \Delta F = F \Delta E, \quad E \Delta (F \Delta G) = (E \Delta F) \Delta G,$$
$$E \cap (F \Delta G) = (E \cap F) \Delta (E \cap G),$$
$$E \Delta 0 = E, \quad E \Delta X = E',$$
$$E \Delta E = 0, \quad E \Delta E' = X,$$
$$E \Delta F = (E \cup F) - (E \cap F).$$

10. Образует ли класс всех подмножеств пространства X группу относительно операции Δ?

11. Если $E_* = \liminf_n E_n$ и $E^* = \limsup_n E_n$, ~ -- -

то

$$\chi_{E_*}(x) = \liminf_n \chi_{E_n}(x), \quad \chi_{E^*}(x) = \limsup_n \chi_{E_n}(x),$$

где выражения в правых частях равенств при всяком x представляют собой верхний и нижний пределы числовой последовательности.

12.
$$\chi_{E'} = 1 - \chi_E, \quad \chi_{E-F} = \chi_E(1 - \chi_F),$$
$$\chi_{E \Delta F} = |\chi_E - \chi_F| \equiv \chi_E + \chi_F \pmod 2.$$

13. (E. Bishop) Пусть $\{E_n\}$ — последовательность множеств; положим
$$D_1 = E_1, \ D_2 = D_1 \Delta E_2, \ D_3 = D_2 \Delta E_3, \ \ldots, \ D_{n+1} = D_n \Delta E_{n+1}, \ \ldots$$
Последовательность $\{D_n\}$ имеет предел тогда и только тогда, когда $\lim_n E_n = 0.$ Если (см. упр. 12) временно назвать операцию Δ „сложением", то этот результат словесно можно высказать так: ряд множеств сходится тогда и только тогда, когда его общий член стремится к нулю.

2. 4. КОЛЬЦА И АЛГЕБРЫ

Непустой класс **R** множеств называется *кольцом* (или *булевским кольцом)* в том случае, когда он обладает следующим свойством: если

$$E \in \mathbf{R} \quad \text{и} \quad F \in \mathbf{R},$$

то

$$E \cup F \in \mathbf{R} \quad \text{и} \quad E - F \in \mathbf{R}.$$

Другими словами, кольцо — это непустой класс множеств, замкнутый относительно образования соединений (двух множеств) и вычитания.

Всякое кольцо **R** содержит пустое множество, так как если

$$E \in \mathbf{R},$$

то

$$\varnothing = E - E \in \mathbf{R}.$$

Так как

$E - F = (E \cup F) - F,$

то любой непустой класс множеств, замкнутый относительно образования соединений и собственных разностей, представляет собой кольцо. Так как

$$E \,\Delta\, F = (E - F) \cup (F - E)$$

и

$$E \cap F = (E \cup F) - (E \,\Delta\, F),$$

то кольцо должно быть замкнуто относительно образования симметрических разностей и пересечений. Применение математической индукции и сочетательного закона для операций $\cup$ и $\cap$ показывает, что если **R** является кольцом и

$$E_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathbf{R} \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1}^{n} E_i \in \mathbf{R}.$$

Полезными примерами колец могут служить класс $\{\varnothing\}$, содержащий лишь пустое множество, и класс всевозможных подмножеств *X*. Это — своего рода „крайние случаи". Приведем несколько более поучительный пример. Пусть

$$X = \{x : -\infty < x < +\infty\}$$

— числовая прямая; класс **R** всевозможных конечных соединений ограниченных интервалов, замкнутых слева и открытых справа, т. е, множеств вида

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{x : -\infty < a_i \leqslant x < b_i < +\infty\},$$

представляет собой кольцо.

Соединения и пересечения выступают в определении кольца неравноправным образом. В то время как кольцо всегда замкнуто относительно взятия пересечений, класс множеств, замкнутый относительно образования пересечений и разностей, может не быть кольцом. Однако всякий непустой класс **E**, замкнутый относительно образования пересечений, собственных разностей и соединения непересекающихся множеств из **E**, представляет собой кольцо; это вытекает из равенства

$$E \cup F = [E - (E \cap F)] \cup [F - (E \cap F)] \cup (E \cap F).$$

Нетрудно дать определение кольца в форме, более симметричной относительно операций $\cup$ и $\cap$: назовем кольцом непустой класс множеств, замкнутый относительно образования пересечения (двух множеств) и симметрических разностей. В силу равенств

$$E \cup F = (E \Delta F) \Delta (E \cap F), \quad E - F = E \Delta (E \cap F)$$

мы получаем кольцо в смысле первоначального определения, но в такой формулировке „пересечения" можно заменить „соединениями": непустой класс множеств, замкнутый относительно образования соединений (двух множеств) и симметрических разностей, представляет собой кольцо.

Непустой класс **R** называется *алгеброй* (или *булевской алгеброй)* тогда, когда он обладает следующими свойствами:

а) если $E \in \mathbf{R}$ и $F \in \mathbf{R}$, то $E \cup F \in \mathbf{R}$;

б) если $E \in \mathbf{R}$, то $E' \in \mathbf{R}$.

Так как

$$E - F = E \cap F' = (E' \cup F)',$$

то любая алгебра является одновременно кольцом. Соотношение между общим понятием кольца и более узким понятием алгебры очень просто: алгебра есть кольцо, содержащее *X*. В самом деле, всякое такое кольцо представляет собой алгебру, потому что

$$E' = X - E;$$

обратно, если **R** — алгебра, то

$$X = E \cup E' \in \mathbf{R},$$

где *E* — произвольное множество, входящее в **R** (класс **R**, как мы помним, не пуст).

1. Следующие классы множеств служат примерами колец или алгебр:

а) *X*—*n*-мерное эвклидово пространство, класс **E** образован всевозможными конечными соединениями „полуоткрытых интервалов" вида

$$\{(x_1, \ldots, x_n) : -\infty < a_i \leqslant x_i < b_i < +\infty, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

б) *X*—какое-нибудь несчетное множество; **E** — класс всех конечных или счетных подмножеств множества *X*.

в) X — какое-нибудь несчетное множество; **E** — класс множеств, которые либо сами конечны или счетны, либо обладают конечным или счетным дополнением.

2. В каких топологических пространствах класс **E** всех его открытых множеств образует кольцо?

3. Пересечение любой системы колец (алгебр) представляет собой кольцо (соотв. алгебру).

4. Пусть **R**— кольцо множеств. Если обозначить

$$E \odot F = E \cap F, \qquad E \oplus F = E \Delta F,$$

то относительно таких операций „сложения" $(\oplus)$ и „умножения" $(\odot)$ множество **R** оказывается „кольцом" в алгебраическом смысле этого слова. Алгебраические кольца, такие как это, в которых все элементы идемпотентны (т. е. $E \odot E = E$ для любого E из **R**), также называются булевскими кольцами. Именно тесная связь между булевскими кольцами множеств и общими булевскими кольцами оправдывает употребление „кольцевой" терминологии в применении к классам множеств.

5. Если **R** — какое-нибудь кольцо множеств и **A** — класс тех множеств, которые либо сами принадлежат **R**, либо обладают принадлежащими **R** дополнениями, то **A** представляет собой алгебру.

6. *Полукольцом* называется непустой класс **P** множеств, такой, что

а) если $E \in \mathbf{P}$ и $F \in \mathbf{P}$, то $E \cap F \in \mathbf{P}$;

б) если $E \in \mathbf{P}$, $F \in \mathbf{P}$ и $E \subset F$, то существует конечный класс: $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$ множеств, принадлежащих **P**, со следующим свойством: $E = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = F$,

причем $D_i = C_i - C_{i-1} \in \mathbf{P}$, $i = 1, \ldots, n$.

Всякое полукольцо содержит пустое множество. Если X — произвольное множество, то класс **P**, состоящий из пустого множества и всех одноточечных подмножеств X (т. е. множеств вида $\{x\}$, где $x \in X$), есть полукольцо. Если X — действительная прямая, то класс всех ограниченных интервалов, замкнутых слева и открытых справа, является полукольцом.

2. 5. ПОРОЖДЕННЫЕ КОЛЬЦА И σ-КОЛЬЦА

Теорема 1. *Если* **E** *— произвольный класс множеств, то существует единственное кольцо* $\mathbf{R}_0$*, такое, что* $\mathbf{E} \subset \mathbf{R}_0$ *и* $\mathbf{R}_0 \subset \mathbf{R}$*, каково бы ни было кольцо* **R**, *содержащее* **E**.

$\mathbf{R}_0$ — наименьшее кольцо, содержащее **E**, — называется кольцом, *порожденным* классом **E**, и обозначается **R(E)**.

Доказательство. Так как класс всех подмножеств *X* представляет собой кольцо, то всегда существует по меньшей мере одно кольцо, содержащее **E**. Далее, пересечение любой системы колец есть кольцо (см. упр. 3 § 2.4), поэтому пересечение всех колец, содержащих **E**, также является кольцом, содержащим **E**. Оно и будет, как легко видеть, искомым кольцом $\mathbf{R}_0$.

Теорема 2. *Если* **E***— произвольный класс множеств, то всякое множество, принадлежащее* **R(E)**, *может быть покрыто соединением конечного числа множеств из* **E**.

Доказательство. Класс тех множеств, которые могут быть покрыты конечными соединениями множеств из **E**, представляет собой кольцо; это кольцо содержит **E**, следовательно, оно содержит и **R(E)**.

Теорема 3. *Если* **E** *— счетный класс множеств, то* **R(E)** *также счетно.*

Доказательство. Для любого класса **C** множеств условимся обозначать *C** класс всевозможных конечных соединений разностей множеств из **C**. Ясно, что если **C** счетно, то счетно и **C***, и если

$$\varnothing \in \mathbf{C},$$

то

$$\mathbf{C} \subset \mathbf{C}^*.$$

Не нарушая общности, мы можем допустить, что

$$\varnothing \in \mathbf{E}.$$

Положим теперь

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{E}_n = \mathbf{E}^*_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, что

$$\mathbf{E} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n \subset \mathbf{R}(\mathbf{E}),$$

и класс

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n$$

— счетный. Доказательство теоремы будет завершено, когда мы покажем, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n$$

представляет собой кольцо.
Так как

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \subset \mathbf{E}_1 \subset \mathbf{E}_2 \subset \ldots,$$

то, каковы бы ни были множества *A* и *B* из

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n,$$

существует такой номер *n*, что и *A* и *B* принадлежат классу E_n. При этом

$$A - B \in \mathbf{E}_{n+1},$$

и так как

$$\varnothing \in \mathbf{E}_0 \subset \mathbf{E}_n,$$

то

$$A \cup B = (A - \varnothing) \cup (B - \varnothing) \in \mathbf{E}_{n+1}.$$

Мы доказали, что вместе с любыми двумя множествами *A* и *B* классс

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n$$

одержит их соединение и разность, т. е.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n$$

есть кольцо.
Непустой класс S множеств называется σ-*кольцом,* если он обладает следующими свойствами:

а) если $E \in \mathbf{S}$ и $F \in \mathbf{S}$, то $E - F \in \mathbf{S}$;

б) если $E_i \in \mathbf{S}$, $i = 1, 2, \ldots$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{S}$.

Таким образом, σ -кольцо представляет собой кольцо, замкнутое относительно образования счетных соединений. Если **S** есть σ -кольцо и

$$E_i \in S, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

то, так как

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = E - \bigcup_{i=1}^{\infty} (E - E_i),$$

мы видим, что

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{S},$$

т. е. σ -кольцо замкнуто относительно образования счетных пересечений. Если

$$E_i \in \mathbf{S}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где **S** есть σ -кольцо, то (см. упр. 2 §2. 3) S содержит также

$\liminf_i E_i$ и $\limsup_i E_i$.

Теорема 1 и ее доказательство останутся справедливыми, если „кольцо" заменить всюду „ σ -кольцом". Поэтому можно ввести понятие σ -кольца **S (E)**, *порожденного* каким-либо классом **E**, как наименьшего σ -кольца, содержащего **E**.

Теорема 4. *Если* **E** *— произвольный класс множеств, а E— произвольное множество, принадлежащее* **S = S(E)**, *то* **E** *содержит счетный подкласс* **D**, *такой, что* $E \in$ **S(D)**.

Доказательство. Соединение всех σ -подколец σ -кольца **S**, порожденных всевозможными счетными подклассами класса **E**, представляет собой σ -кольцо, содержащее **E**. Следовательно, оно совпадает с **S**.

Если **E** — какой-нибудь класс подмножеств из *X* и *A*— фиксированное подмножество в *X*, то

$$\mathbf{E} \cap A$$

будет означать класс множеств вида $\mathbf{E} \cap A$, где $E \in$ **E**.

Теорема 5. *Если* **E** *— произвольный класс множеств и A— любое фиксированное подмножество из X, то*

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) \cap A = \mathbf{S}(\mathbf{E} \cap A).$$

Доказательство. Класс множеств вида

$$B \cup (C - A),$$

где

$$B \in \mathbf{S}(\mathbf{E} \cap A) \quad \text{и} \quad C \in \mathbf{S}(\mathbf{E}),$$

обозначим **C**. Легко видеть, что C есть о-кольцо. Если $E \in \mathbf{E}$, то из соотношений

$$E = (E \cap A) \cup (E - A)$$

и

$$E \cap A \in \mathbf{E} \cap A \subset \mathbf{S}(\mathbf{E} \cap A)$$

вытекает, что $E \in \mathbf{C}$; таким образом,
$\mathbf{E} \subset \mathbf{C}$.
Следовательно,

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) \subset \mathbf{C},$$

Откуда

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) \cap A \subset \mathbf{C} \cap A.$$

Очевидно, однако, что

$$\mathbf{C} \cap A = \mathbf{S}(\mathbf{E} \cap A);$$

поэтому

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) \cap A \subset \mathbf{S}(\mathbf{E} \cap A).$$

Обратное включение

$$\mathbf{S}(\mathbf{E} \cap A) \subset \mathbf{S}(\mathbf{E}) \cap A$$

следует из того, что $\mathbf{S}(\mathbf{E}) \cap A$ есть σ-кольцо, и из соотношения

$$\mathbf{E} \cap A \subset \mathbf{S}(\mathbf{E}) \cap A.$$

1. В следующих примерах указать кольцо, порожденное классом **E**.

а) В *X* взято фиксированное подмножество *E*, и **E** = *{E}* есть класс, состоящий из этого единственного множества.

б) В *X* фиксировано подмножество *E,* и **E** есть класс всех подмножеств *X*, содержащих *E,* т. е, $\mathbf{E} = \{F : E \subset F\}$.

в) **E** есть класс всех множеств, содержащих ровно по две различные точки.

2. Класс **L** множеств называется *структурой* (lattice), если $\varnothing \in \mathbf{L}$ и $E \cup F \in \mathbf{L}$. $E \cap F \in \mathbf{L}$, коль скоро $E \in \mathbf{L}$, $F \in \mathbf{L}$. Пусть **L** — структура, а **P** = **P(L)**— класс всех множеств вида *F—E,* где $E \in \mathbf{L}$, $F \in \mathbf{L}$ и $E \subset F$. Тогда **P** представляет собой полукольцо. (**Указание**. Если $D_i = F_i - E_i$, $i = 1, 2,$ — представления двух множеств из **P** в виде собственных разностей множеств из **L** — и если $D_1 \supset D_2$, то $F_2 - E_2 \subset C \subset F_1 - E_1$, где $C = (F_1 \cap F_2) - (E_1 \cap F_2)$ или $C = F_1 - [E_1 \cup (F_1 \cap E_2)]$.). Будет ли **P** кольцом?

3. Пусть **P** — какое-нибудь полукольцо, а **R** — класс всех множеств вида $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, где $\{E_1, \ldots, E_n\}$ —произвольный конечный класс непересекающихся множеств из **P**:

а) **R** замкнуто относительно образования, во-первых, конечных пересечений и, во-вторых, соединений непересекающихся множеств.

б) Если $E \in \mathbf{P}$, $F \in \mathbf{P}$ и $E \subset F$, то $F - E \in \mathbf{R}$

в) Если $E \in \mathbf{P}$, $F \in \mathbf{R}$ и $E \subset F$, то $F - E \in \mathbf{R}$

г) Если $E \in \mathbf{R}$, $F \in \mathbf{R}$ и $E \subset F$, то $F - E \in \mathbf{R}$.

д) **R** = **R** (**P**). Отсюда, в частности, следует, что полукольцо, замкнутое относительно образования соединений, есть кольцо.

4. Прямо или посредством упр. 5 §2.4 доказать аналог теоремы 1 для алгебр.

5. Если **P** —полукольцо и **R** = **R(P)**, то **S (R) = S (P)**.

6. Является ли σ-кольцом непустой класс множеств, замкнутый относительно образования симметрических разностей и счетных пересечений?

7. Если **E** — непустой класс множеств, то всякое множество из **S (E)** может быть покрыто соединением счетного числа множеств из **E** (см. теорему 2).

8. Если **E** — бесконечный класс множеств, то **E** и **S (E)** имеют одинаковую мощность (см. теорему 3).

9. Аналог теоремы 3 для σ-колец можно получить следующим путем (см. также упр. 8). Для любого класса **E**, содержащего $\varnothing$, полагаем $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}$, и для всякого порядкового числа α>0

$$\mathbf{E}_\alpha = \left(\bigcup \{\mathbf{E}_\beta : \beta < \alpha\}\right)^*,$$

где класс **C*** образован из всевозможных счетных соединений разностей множеств из **C**:

а) $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}_\beta \subset \mathbf{E}_\alpha \subset \mathbf{S}(\mathbf{E})$ при $0 < \beta < \alpha$;

б) $\mathbf{S}(\mathbf{E}) = \bigcup \{\mathbf{E}_\alpha : \alpha < \Omega\}$, где Ω — первое несчетное порядковое число;
в) если мощность **E** не выше мощности континуума, то и мощность **S (E)** не выше мощности континуума.
10. Как формулируются для колец теоремы, аналогичные теоремам 4 и 5?

2. 6. МОНОТОННЫЕ КЛАССЫ

Мы не располагаем конструктивным приемом, позволяющим для заданного класса множеств строить порожденное им σ-кольцо. Однако рассматривая некоторый тип классов, определяемый менее стеснительными условиями по сравнению с σ -кольдами, мы получаем теорему, касающуюся строения σ -колец, порожденных некоторыми классами.
Непустой класс М множеств называется *монотонным,* если, какова бы ни была содержащаяся в нем монотонная последовательность множеств $\{E_n\}$,

$$\lim_n E_n \in \mathbf{M}.$$

Так же как в случае колец и σ -колец, все подмножества пространства X образуют монотонный класс, и пересечение любой системы монотонных классов также представляет собой монотонный класс. Поэтому мы можем ввести монотонный класс **M(E)**, *порожденный* произвольным классом **E**, как наименьший монотонный класс множеств, содержащий *E*.

Теорема 1. *Всякое σ -кольцо представляет собой монотонный класс; монотонное кольцо есть σ -кольцо.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для того, чтобы доказать второе, нужно обнаружить, что кольцо, одновременно являющееся монотонным классом, замкнуто относительно образования счетных соединений. Пусть **M** — монотонное кольцо и

$$E_i \in \mathbf{M}, \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

Тогда, так как **M** есть кольцо,

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathbf{M}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Последовательность $\left\{\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right\}$ — возрастающая, и ее предел равен

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Так как кольцо **M** монотонно, то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{M}$$

Теорема 2. *Если* **R** *— кольцо, то* **M(R) = S(R)**. *Следовательно, если монотонный класс содержит кольцо* **R**, *то он содержит и* **S(R)**.

Доказательство. Так как σ-кольцо представляет собой монотонный класс и **S(R)** $\supset$ **R,** то

$$\mathbf{S}(\mathbf{R}) \supset \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{R}).$$

Доказательство будет завершено, если мы обнаружим, что **M** есть σ-кольцо; из **M(R)** $\supset$ **R** будет тогда следовать, что $\mathbf{M}(\mathbf{R}) \supset \mathbf{S}(\mathbf{R})$.

Класс множеств **E**, таких, что *E*— *F, F* — *E* и *E* $\cup$ *F,* где *F*— некоторое фиксированное множество, принадлежат **M**, условимся обозначать **K***(F).* Заметим, что так как *E* и *F* в определении **K**(*F*) участвуют симметрично, то соотношения

$$E \in \mathbf{K}(F) \quad \text{и} \quad F \in \mathbf{K}(E)$$

следуют одно из другого. Если класс **K**(*F*) не пуст и $\{E_n\}$—какая-нибудь содержащаяся в нем монотонная последовательность, то

$$\lim_n E_n - F = \lim_n (E_n - F) \in \mathbf{M},$$

$$F - \lim_n E_n = \lim_n (F - E_n) \in \mathbf{M},$$

$$F \cup \lim_n E_n = \lim_n (F \cup E_n) \in \mathbf{M};$$

таким образом, **K***(F)* есть монотонный класс.

Если $E \in \mathbf{R}$ и $F \in \mathbf{R}$, то, согласно определению кольца, $E \in \mathbf{K}(F)$. Это верно для любого *E* из **R**, поэтому $\mathbf{R} \subset \mathbf{K}(F)$. Так как **M** — наименьший монотонный класс, содержащий R, то

$$\mathbf{M} \subset \mathbf{K}(F).$$

Отсюда если $E \in \mathbf{M}$ и $F \in \mathbf{R}$, то $E \in \mathbf{K}(F)$, следовательно, $F \in \mathbf{K}(E)$. Это верно для любого F из R, поэтому так же, как и выше, мы заключаем, что

$$\mathbf{M} \subset \mathbf{K}(E).$$

Справедливость последнего соотношения при любом E из **М** равнозначно утверждению, что **М** есть кольцо, а из теоремы 1 следует, что **М** есть даже σ-кольцо.

Доказанная теорема не дает нам способа построения для заданного кольца **R** порожденного им σ -кольца. Однако она показывает, что вместо того, чтобы исследовать σ -кольцо, порожденное кольцом **R**, достаточно исследовать порожденный им монотонный класс. Во многих приложениях это совсем нетрудно.

1. Верна ли теорема 2 для полуколец?
2. Класс **N** называется *нормальным,* если он замкнут относительно образования пересечений убывающих последовательностей и счетных соединений непересекающихся множеств, в него входящих. Всякое σ -кольцо представляет собой нормальный класс; нормальное кольцо есть σ -кольцо.
3. Наименьший нормальный класс, содержащий класс **E**, обозначим **N** (**E**); тогда, если **P** — любое полукольцо, то **N(P) = S(P)**.
4. Назовем σ -*алгеброй* непустой класс множеств, замкнутый относительно образования дополнений и счетных соединений; тогда σ -алгебру можно описать как σ -кольцо, содержащее X. Если **R** — алгебра, то σ) совпадает с наименьшей σ -алгеброй, содержащей **R**. Верно ли это тогда, когда **R** есть кольцо?
5. В следующих примерах указать σ -алгебру, σ -кольцо и монотонный класс, порожденные классом **E**:

а) X — какое угодно множество, P — некоторая фиксированная перестановка точек из X, т. е. некоторое фиксированное взаимно-однозначное отображение X самого на себя. Подмножество E в X назовем *инвариантным* относительно P, если, коль скоро $x \in E$, непременно $P(x) \in E$ и $P^{-1}(x) \in E$.

В качестве **E** взят класс всех инвариантных множеств.

б) X и Y—два произвольных множества, T—какое-нибудь (не обязательно взаимно-однозначное) отображение X в Y. Если $E \subset Y$, то $T^{1}(E)$ означает множество всех x из X, для которых $T(x) \in E$.

E — класс всех множеств вида $T^{1}(E)$, где E — произвольное подмножество из Y.

в) X — топологическое пространство, **E** — класс его подмножеств первой категории.

г) X — трехмерное эвклидово пространство; назовем его подмножество *E цилиндром,* если из $(x, y, z) \in E$ вытекает $(x, y, \hat{z}) \in E$, где— $\hat{z}$ произвольное действительное число. **E** — класс всевозможных цилиндров.

д) X—эвклидова плоскость; **E** — класс подмножеств из X, могущих быть покрытыми конечным или счетным числом горизонтальных прямых

3. Введение в теорию мер

3.1. Мера на кольцах

Функция, областью определения котсрой служит какой-либо класс множеств, называется *функцией множества.* Действительная функция множества μ, определенная на некотором классе **E** и принимающая конечные или бесконечные значения, называется *аддитивной* в том случае, когда она обладает следующим свойством: если

$$E \in \mathbf{E},\ F \in \mathbf{E},\ E \cup F \in \mathbf{E} \text{ и } E \cap F = 0,$$

то

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F).$$

Действительная функция множества μ, определенная на некотором классе **E** и принимающая конечные или бесконечные значения, называется *конечно-аддитивной,* если для всякого конечного подкласса непересекающихся множеств $\{E_1, \ldots, E_n\}$ из **E**, соединение которых также принадлежит **E**, выполняется равенство

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i).$$

Действительная функция множества μ, определенная на некотором классе **E** и принимающая конечные или бесконечные значения, называется *счетно-аддитивной,* если для всякой последовательности непересекающихся множеств $\{E_n\}$ из **E**, соединение которых также принадлежит **E**, выполняется равенство

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Действительная функция множества |**x**, принимающая конечные или бесконечные значения, называется *мерой,* если она определена на некотором кольце **R**, неотрицательна, счетно-аддитивна и μ ($\varnothing$) = $\varnothing$. Заметим, что в силу равенства

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup \ldots \cup E_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots$$

мера всегда конечно-аддитивна. Тривиальный пример меры можно построить следующим образом. Пусть *f*—действительная неотрицательная функция, заданная на каком-нибудь множестве *X* и принимающая конечные или бесконечные значения; пусть **R**— кольцо, состоящее из всевозможных конечных подмножеств *X*. Меру μ определим, положив

$$\mu(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

и μ ($\varnothing$) = $\varnothing$.

Менее тривиальные примеры появятся в следующих параграфах.

Пусть на кольце **R** определена мера μ; о множестве *E* из **R** скажем, что оно — *конечной меры,* если μ (*E*)<∞. *E* называется множеством σ-*конечной меры,* если в **R** существует последовательность множеств *{E_n}*. такая, что

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{и} \quad \mu(E_n) < \infty, \ n = 1, 2, \ldots$$

Если мера любого множества *E* из R конечна (σ-конечна), то сама мера μ называется *конечной* (соотв. σ-*конечной)* на **R**. Если *X* $\in$ **R**, т. е. **R** представляет собой алгебру, и при этом мера самого *X* конечна или σ-конечна, то μ называется *вполне конечной* или соответственно *вполне* σ *-конечной* мерой. Мера μ называется *полной,* если из

$$E \in \mathbf{R}, \quad F \subset E$$

и μ (*E*) = $\varnothing$ следует, что $F \in$ **R**.

1. Если μ — заданная на некотором кольце **R** неотрицательная аддитивная действительная функция множества, принимающая конечные или бесконечные значения, причем μ *(E)*<∞ хотя бы для одного *E* из **R**, то μ ($\varnothing$) = $\varnothing$.

2. Если **E** — непустой класс множеств и μ — мера на **R(E)**, такая, что μ *(E)*<∞ для всех *E* из **E**, то μ конечна на **R(E)** (см. теорему 2 §2.5).

3. Пусть μ — мера на некотором σ-кольце; тогда класс всех множеств конечной меры представляет собой кольцо, а класс всех множеств σ -конечной меры — σ -кольцо. Если, кроме того, мера μ σ -конечна, то для того, чтобы класс всех множеств конечной меры представлял собой σ -кольцо, необходимо и достаточно, чтобы μ была конечной. Верно ли последнее утверждение в том случае, когда мера μ не σ -конечна?

4. Пусть μ — мера на некотором σ -кольце **S** и *E* — множество σ -конечной меры из **S**. Если **D** — произвольный класс, состоящий из непересекающихся множеств и содержащийся в **S**, то неравенство $\mu(E \cap D) \neq 0$ выполняется лишь для конечного или счетного числа множеств *D* из **D**. [**Указание**. Предположить сначала, что $\mu(E) < \infty$; для целых положительных *n* рассмотреть классы:

$$\left\{ D : D \in \mathbf{D},\ \mu(E \cap D) \geqslant \frac{1}{n} \right\}.$$

5. Заданная накольце **R** неотрицательная аддитивная функция множества μ, принимающая конечные или бесконечные значения и равная нулю на пустом множестве, конечно-аддитивна. То же верно и тогда, когда μ задана на полукольце **P**, но доказательство в этом случае нетривиально. Его можно ровести следующим образом. Назовем *разбиением* множества *E* из **P** конечный класс $\{E_1, ..., E_n\}$ непересекающихся множеств E_i, принадлежащих **P**, соединение которых равно *E*. Разбиение $\{E_i\}$ назовем μ *-разбиением,* если, каково бы ни было *F* из **P**,

$$\mu(E \cap F) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap F).$$

Разбиение $\{E_i\}$ множества *E* назовем *подразбиением* разбиения $\{F_j\}$ (того же множества *E),* если каждое E_i содержится в некотором F_j. Далее доказьь ваем последовательно:

а) Если $\{E_i\}$ и $\{F_j\}$ — разбиения *E,* то их *произведение,* т. е. класс множеств вида $E_i \cap F_j$, также является разбиением.

б) Если некоторое подразбиение разбиения $\{E_i\}$ есть μ -разбиение, то и само $\{E_i\}$ является μ -разбиением.

в) Произведение двух μ -разбиений представляет собой μ -разбиение.

г) Если $E = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = F$, где $C_i \in \mathbf{P},\ i = 0, 1, \ldots, n$, и

$$D_i = C_i - C_{i-1} \in \mathbf{P}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то $\{E, D_1, \ldots, D_n\}$ есть μ -разбиение множества *F*.

д) Всякое разбиение множества *E* из **P** есть μ -разбиение.

3.2. МЕРА НА ИНТЕРВАЛАХ

С целью разъяснения основных понятий теории меры мы рассмотрим один классический частный случай, важный и сам по себе. В этом параграфе пространством *X* будет служить числовая прямая. Пусть **P** обозначает класс всех ограниченных интервалов, замкнутых слева и открытых справа, т. е. точечных множеств вида

$$\{x: -\infty < a \leqslant x < b < \infty\},$$

а **R** — класс конечных соединений интервалов такого рода. Таким образом, **R** состоит из множеств вида

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{x: -\infty < a_i \leqslant x < b_i < \infty\}.$$

(Легко видеть, что всякое такое множество может быть представлено как соединение непересекающихся интервалов, принадлежащих классу Р.)

Ограниченные замкнутые слева и открытые справа интервалы мы условимся называть просто „полузамкнутыми интервалами". Использование полузамкнутых интервалов, вместо замкнутых или открытых, представляет собой лишь технический прием. Так, например, если *a, b, c* и *d* -действительные числа, причем $-\infty < a < b < c < d < \infty$, то разность между открытыми интервалами $\{x: a < x < d\}$ и $\{x: b < x < c\}$ не является ни открытым интервалом, ни соединением конечного числа открытых интервалов. Если рассматривать замкнутые интервалы, то мы столкнемся с подобным же явлением. С полузамкнутыми интервалами такого затруднения не возникает, и в этом как раз состоит их преимущество. Мы обозначаем

$$[a, b] = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$$

— замкнутый интервал,

$$[a, b) = \{x: a \leqslant x < b\}$$

— полузамкнутый интервал,

$$(a, b) = \{x: a < x < b\}$$

—открытый интервал. При этом всегда подразумевается, что $a \leq b$. В классе **P** мы задаем функцию множества μ, ПОЛОЖИВ

$$\mu([a,\ b)) = b - a.$$

Заметим, что в случае $a = b$ интервал *[a, b)* оказывается пустым множеством и $\mu(\varnothing) = \varnothing$.

Теперь мы выясним, как сказываются на функции μ некоторые теоретико-множественные соотношения в классе **P**.

Теорема 1. *Если* $(E_1, ..., E_n\}$*—конечный класс непересекающихся множеств из* **P** *и* $E_i \subset E_0,\ i = 1, \ldots, n,$ *где* E_0 *— некоторое множество, принадлежащее* **P**, *то*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \leqslant \mu(E_0).$$

Доказательство. Пусть $E_i = [a_i,\ b_i),\ i = 0,\ 1, \ldots, n,$ причем множества $E_1, ..., E_n$ занумерованы так, что

$$a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n.$$

Из предположений, касающихся $\{E_1, ..., E_n\}$, следует, что

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0,$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - b_i) =$$

$$= b_n - a_1 \leqslant b_0 - a_0 = \mu(E_0).$$

Теорема 2. *Если замкнутый интервал* $F_0 = [a_0, b_0]$ *содержится в соединении конечного числа ограниченных открытых интервалов* $U_1, \ldots, U_n,$ *где* $U_i = (a_i,\ b_i),\ i = 1, \ldots, n,$ *то*

$$b_0 - a_0 < \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Доказательство. Пусть k_1—такой номер, при котором $a_0 \in U_{k_1}$. Если $b_{k_1} \leqslant b_0,$ то пусть k_2 — такой номер, при котором $b_{k_1} \in U_{k_2}$; если $b_{k_2} \leqslant b_0,$ то пусть k_4 — такой номер, при котором $b_{k_2} \in U_{k_3},$ и т. д. по индукции. Мы дойдем, наконец, до номера k_m, такого, что $b_{k_m} > b_0.$ Не нарушая общности, можно предположить, что $m = n$ и $U_{k_i} = U_i;$ этого можно добиться, выбрасывая лишние U_i и изменяя нумерацию. Другими словами, мы предполагаем, что

$$a_1 < a_0 < b_1, \quad a_n < b_0 < b_n$$

и, в случае $n > 1$,

$$a_{i+1} < b_i < b_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Отсюда

$$b_0 - a_0 < b_n - a_1 = b_1 - a_1 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} (b_{i+1} - b_i) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Теорема 3. *Если* $\{E_0, E_1, E_2, \ldots\}$*—последовательность множеств из* **P**, *такая, что*

$$E_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

то

$$\mu(E_0) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Доказательство. Пусть $E_i = [a_i, b_i), \ i = 0, 1, 2, \ldots$ При $a_0 = b_0$ теорема тривиальна. Если $a_0 < b_0$, то возьмем произвольное положительное число ε, такое, что $\varepsilon < b_0 - a_0$. Взяв еще произвольное положительное δ, положим

$$F_0 = [a_0, b_0 - \varepsilon] \text{ и } U_i = \left(a_i - \frac{\delta}{2^i}, b_i\right), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$F_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,$$

и согласно теореме Гейне — Бореля, существует такое целое положительное n, что $F_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Из теоремы 2 получим

$$\mu(E_0) - \varepsilon = (b_0 - a_0) - \varepsilon <$$

$$< \sum_{i=1}^{n}\left(b_i - a_i + \frac{\delta}{2^i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\mu(E_i) + \delta.$$

Отсюда, так как ε и δ могут быть сколь угодно малыми, следует утверждение теоремы.

Теорема 4. *Функция множества* μ *счетно-аддитивна на* **P**.

Доказательство. Пусть $\{E_i\}$—последовательность непересекающихся множеств из **P**, соединение которых — обозначим его E— также принадлежит **P**. Согласно теореме 1,

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i) \leqslant \mu(E), \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i) \leqslant \mu(E),$$

и остается лишь воспользоваться теоремой 3.

Теорема 5. *На кольце* **R** *существует единственная конечная мера* $\bar{\mu}$, *такая, что* $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$, *когда* $E \in$ **P**.

Доказательство. Всякое множество E из **R** может быть представлено как соединение конечного числа непересекающихся множеств из **P**. Пусть

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{и} \quad E = \bigcup_{j=1}^{m} F_j$$

— два таких представления одного и того же множества E. Тогда для любого i=1, ..., n

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{m}(E_i \cap F_j)$$

есть представление множества E_i из **P** в виде соединения конечного числа непересекающихся множеств, также принадлежащих **P**, и так как μ конечно-аддитивна, то

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mu(E_i\cap F_j).$$

Точно так же

$$\sum_{j=1}^{m}\mu(F_j)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i\cap F_j).$$

Отсюда следует, что если $E\in\mathbf{R}$ и $\{E_1,\ \ldots,\ E_n\}$ есть конечный класс непересекающихся множеств из **P**, соединение которых равно *E,* то равенство

$$\bar{\mu}(E)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)$$

однозначно определяет на **R** некоторую функцию $\bar{\mu}$.

Из самого определения функции $\bar{\mu}$ следует, что она конечно-аддитивна и совпадает с μ на **P**. Ясно также, что этими двумя свойствами функция $\bar{\mu}$ определяется однозначно, Остается показать, что $\bar{\mu}$ счетно-аддитивна.

Пусть $\{E_i\}$ —последовательность непересекающихся множеств из **R**, соединение которых E также принадлежит **R**. Каждое E_i, в свою очередь, представляет собой соединение конечного числа непересекающихся множеств из **P**,

$$E_i=\bigcup_j E_{ij}$$

и

$$\bar{\mu}(E_i)=\sum_j\mu(E_{ij}).$$

Если $E\in\mathbf{P}$, то, так как множества E_{ij} не пересекаются и образуют счетный класс, а μ счетно-аддитивна на P,

$$\bar{\mu}(E)=\mu(E)=\sum_i\sum_j\mu(E_{ij})=\sum_i\bar{\mu}(E_i).$$

В общем случае E представляет собой соединение конечного числа непересекающихся множеств из **P**,

$$E=\bigcup_k F_k;$$

воспользовавшись только что полученным результатом, мы получим

$$\bar{\mu}(E)=\sum_k \bar{\mu}(F_k)=\sum_k \sum_i \bar{\mu}(F_i \cap F_k)=$$

$$=\sum_i \sum_k \bar{\mu}(E_i \cap F_k)=\sum_i \bar{\mu}(E_i).$$

В силу теоремы 5 мы можем, не опасаясь путаницы, писать μ *(E)* вместо $\bar{\mu}(E)$ даже тогда, когда *E* принадлежит **R**, а не **P**.

1. В доказательстве теоремы 4 пусть E_{n1} —тот интервал последовательности $\{E_i\}$, левый конец которого совпадает с левым концом интервала E, E_{n2} — тот интервал, левый конец которого совпадает с правым концом интервала E_{n1}, и т. д. Не пользуясь теоремами 1, 2 и 3, показать, что

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i} \in \mathbf{P} \quad \text{и} \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_{n_i}).$$

2. Еще одно доказательство теоремы 4, не опирающееся на теоремы 1, 2 и 3, можно получить, расположив интервалы последовательности $\{E_i\}$ в порядке возрастания их левых концов и затем применив трансфинитную индукцию.

3. Пусть g — конечная возрастающая непрерывная функция действительного переменного; положим

$$\mu_g([a,\ b))=g(b)-g(a).$$

Для μ_g справедливы теоремы, аналогичные теоремам 4 и 5, относящимся к μ.

4. Теоремы 4 и 5 могут быть обобщены на n-мерное эвклидово пространство, если ввести „интервалы" вида

$$E=\{(x_1,\ \ldots,\ x_n): a_i \leqslant x_i < b_i, \quad i=1,\ \ldots,\ n\}$$

и положить

$$\mu(E)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i).$$

5. Если μ— вполне аддитивная неотрицательная функция множества, заданная на полукольце **P**, причем $\mu(\varnothing)=\varnothing$, то на **R (P)**

существует единственная мера $\bar{\mu}$, такая, что $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$, коль скоро $E \in$ **P**. Если μ (вполне) конечна, или σ-конечна, то такова же и $\bar{\mu}$ (см. упр. 3 §2.5 и доказательство теоремы 5).

3.3. СВОЙСТВА МЕР

Действительная функция множества μ, заданная на некотором классе **E** и принимающая конечные или бесконечные значения, называется *монотонной,* если из $E \in \mathbf{E}$, $F \in \mathbf{E}$ и $E \subset F$ вытекает $\mu(E) \leqslant \mu(F)$. Действительная функция множества μ, заданная на **E** и принимающая конечные или бесконечные значения, называется *субтрактивной,* если из

$E \in \mathbf{E},\ F \in \mathbf{E},\ E \subset F,\ F - E \in \mathbf{E}$ и $|\mu(E)| < \infty$

вытекает

$$\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E).$$

Теорема 1. *Если* μ *— мера на некотором кольце* **R**, *то* μ *монотонна и субтрактивна.*

Доказательство.

Если $E \in \mathbf{E}$, $F \in \mathbf{E}$ и $E \subset F$, то $F - E \in \mathbf{E}$ и $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E)$. Монотонность меры μ следует из того, что она неотрицательна. Тогда, когда μ *(E)* конечно, полученное равенство можно переписать в виде $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$, и мы видим, что μ субтрактивна.

Теорема 2. *Если* μ *— мера на кольце* $\mathbf{R}$, $E \in \mathbf{R}$, *и* $\{E_i\}$ *—конечный или счетный класс множеств из* **R**, *такой, что* $E \subset \bigcup_i E_i$, *то*

$$\mu(E) \leqslant \sum_i \mu(E_i).$$

Доказательство. Здесь мы воспользуемся следующим простым, но важным замечанием: если $\{F_i\}$ — конечный или счетный класс множеств из кольца **R**, то можно выделить класс $\{G_i\}$ непересекающихся множеств из **R**, таких, что

$$G_i \subset F_i \quad \text{и} \quad \bigcup_i G_i = \bigcup_i F_i;$$

для этого можно положить

$$G_i = F_i - \bigcup \{F_j : 1 \leqslant j < i\}.$$

Требуемый результат получится, если применить это замечание к классу $\{E \cap \bar{E}_j\}$ и воспользоваться тем, что μ счетно-аддитивна и монотонна.

Теорема 3. *Если* μ — *мера на кольце* $\mathbf{R}$, $E \in \mathbf{R}$, *и* $\{E_i\}$—*конечный или счетный класс непересекающихся множеств из* **R**, *такой, что* $\bigcup_i E_i \subset E,$ *то*

$$\sum_i \mu(E_i) \leqslant \mu(E).$$

Доказательство. Если класс *{E*$_i$*}* конечен, то $\bigcup_i E_i \in \mathbf{R}$ и, следовательно,

$$\sum_i \mu(E_i) = \mu\left(\bigcup_i E_i\right) \leqslant \mu(E).$$

В счетном случае требуемое неравенство можно получить предельным переходом из соответствующих неравенств, справедливых для конечных подклассов.

Теорема 4. *Если* μ — *мера на кольце* **R**, *{E*$_n$*}*—*возрастающая последовательность множеств из* **R** *и* $\lim_n E_n \in \mathbf{R},$ *то*

$$\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n).$$

Доказательство. Положим $E_0 = 0$; тогда

$$\mu(\lim_n E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i - E_{i-1})\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i - E_{i-1}) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i - E_{i-1}) =$$

$$= \lim_n \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E_i - E_{i-1})\right) = \lim_n \mu(E_n). \quad *$$

Теорема 5. *Если* μ *— мера на кольце* **R**, *$\{E_n\}$—убывающая последовательность множеств из* **R**, *из которых хотя бы одно имеет конечную меру, и* $\lim_n E_n \in \mathbf{R}$, *то* $\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n)$.

Доказательство. Если $\mu(E_m) < \infty$, то $\mu(E_n) \leqslant \mu(E_m) < \infty$ для $n \geq m$, и поэтому $\mu(\lim_n E_n) < \infty$. Последовательность $\{E_m—E_n : n=m,\ m+1, ...\}$ — возрастающая, следовательно, в силу теорем 1 и 4,

$$\mu(E_m) - \mu(\lim_n E_n) = \mu(E_m - \lim_n E_n) =$$
$$= \mu(\lim_n (E_m - E_n)) =$$
$$= \lim_n \mu(E_m - E_n) =$$
$$= \lim_n (\mu(E_m) - \mu(E_n)) =$$
$$= \mu(E_m) - \lim_n \mu(E_n).$$

Так как $\mu(E_m) < \infty$, то теорема доказана.

Мы будем говорить, что действительная функция μ, заданная на некотором классе **E** и принимающая конечные или бесконечные значения, *непрерывна снизу* на множестве E (в классе **E**), если для любой возрастающей последовательности множеств $\{E_n\}$ из **E**, такой, что $\lim_n E_n = E$, выполняется равенство $\lim_n \mu(E_n) = \mu(E)$.

Подобным же образом μ *непрерывна сверху* на E, если, какова бы ни была убывающая последовательность множеств $\{E_n\}$ из **E**, такая, что $\lim_n E_n = E$ и $|\mu(E_m)| < \infty$, хотя бы для одного значения m, выполняется равенство $\lim_n \mu(E_n) = \mu(E)$. Теоремы 4 и 5 утверждают, что мера μ непрерывна сверху и снизу (на любом множестве, входящем в кольцо, на котором μ определена); следующая теорема содержит утверждение обратного характера.

Теорема 6. *Пусть* μ *— конечная неотрицательная аддитивная функция множества, заданная на некотором кольце* **R**. *Если* μ *непрерывна снизу на любом E из* **E** *или непрерывна сверху на пустом множестве, то* μ *представляет собой меру.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что μ, будучи аддитивной и заданной на кольце, конечно-аддитивна. Пусть $\{E_n\}$—последовательность непересекающихся множеств из **R**, соединение которых E также принадлежит **R**. Положим

$$F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \qquad G_n = E - F_n.$$

Если μ непрерывна снизу, то, так как $\{F_n\}$ — возрастающая последовательность и $\lim_n F_n = E,$ мы получим

$$\mu(E) = \lim_n \mu(F_n) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Если же μ непрерывна сверху на пустом множестве, то, так как $\{G_n\}$— убывающая последовательность и $\lim_n G_n = 0,$

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) + \mu(G_n) =$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) + \lim_n \mu(G_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

1. Теоремы 1—5 верны не только для колец, но и для полуколец. Доказательства могут быть проведены непосредственно или получены из соответствующих результатов для колец посредством упр. 5 §3.2.

2. Если μ. — мера на каком-нибудь кольце **R**, а E и F—множества из **R**, то

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

Если E, F и G — множества из **R**, то

$$\mu(E) + \mu(F) + \mu(G) + \mu(E \cap F \cap G) =$$

$$= \mu(E \cup F \cup G) + \mu(E \cap F) + \mu(F \cap G) + \mu(G \cap E).$$

Эти соотношения можно обобщить на любое конечное число множеств.

3. Если μ — мера на кольце R, то для двух множеств E и F из **R** мы пишем $E \sim F$, если $\mu(E \Delta F) = 0$. Отношение рефлективно, „$\sim$" симметрично и транзитивно. Если $E \sim F$, то $\mu(E) = \mu(F) = \mu(E \cap F)$. Будет ли кольцом класс тех множеств E из **R**, для которых $E \sim 0$?

4.Положим $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$. Тогда

$$\rho(E, F) \geqslant 0, \ \rho(E, F) = \rho(F, E)$$

и

$$\rho(E, F) \leqslant \rho(E, G) + \rho(G, F).$$

Если $E_1 \sim E_2$ и $F_1 \sim F_2$, то $\rho(E_1, F_1) = \rho(E_2, F_2)$.

5. Теоремы 4 и 5 могут быть обобщены следующим образом. Пусть μ — мера на кольце **R**. Если $\{E_n\}$ — последовательность множеств из **R**, причем

$$\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i \in \mathbf{R}, \ n = 1, 2, \ldots, \text{ и } \liminf_n E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} E_i \in \mathbf{R},$$

то $\mu(\liminf_n E_n) \leqslant$

$$\leqslant \liminf_n \mu(E_n).$$

В том случае, когда

$$\bigcup_{i=n}^{\infty} F_i \in \mathbf{R}, \ n = 1, 2, \ldots, \ \limsup_n E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \in \mathbf{R}$$

и $\mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i\right) < \infty$ хотя бы при одном значении n, имеем

$$\mu(\limsup_n E_n) \geqslant$$

$$\geqslant \limsup_n \mu(E_n).$$

6. Если выполняются предположения второй части упр. 5 и $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, то $\mu(\limsup_n E_n) = 0$.

7. Пусть X — множество всех рациональных чисел, заключенных в промежутке $0 \leq x \leq 1$, а **P**—класс „полузамкнутых интервалов" вида

$\{x: x\in X,\ a\leq x<b\}$, где a, b рациональны и $0\leq a\leq b\leq 1$. Функция μ, определенная на **P** равенством

$$\mu(\{x: a\leqslant x<b\}) = b-a,$$

конечно-аддитивна и непрерывна как сверху, так и снизу. Однако μ^* не счетно-аддитивна, так что теорема 6 не распространяется на полукольца.

8. Пусть X — множество всех целых положительных чисел, а **R** — класс всех конечных подмножеств из X и их дополнений. Для множеств E, входящих в μ, мы полагаем $\mu(E) = \varnothing$ или $\mu(E) = \infty$, в зависимости от того, конечно E или бесконечно. Такая функция множества μ непрерывна сверху на пустом множестве, но свойством счетной аддитивности не обладает. Следовательно, вторая половина теоремы 6 неверна в том случае, когда для μ допускаются бесконечные значения.

9. Будет ли верна теорема 5, если в ее формулировке опустить условие, что $\mu(E_n)<\infty$ при некотором n?

10. Пусть μ — мера, заданная на борелевских множествах некоторого сепарабельного полного метрического пространства X, причем $\mu(X) = 1$. Тогда X содержит множество E, представляющее собой соединение счетного числа компактных множеств и такое, что $\mu(E) = 1$. (Указание. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек, плотная в X, а U^k_n —замкнутая сфера радиуса $\frac{1}{k}$ с центром в x_n.

Если $0<\varepsilon<1$ и $F^k_m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U^k_n$, то m_k определим по индукции как наименьшее целое положительное число, для которого

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{k} F^i_{m_i}\right) > 1-\varepsilon.$$

Тогда множество $C = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F^i_{m_i}$ компактно и $\mu(C) \geqslant 1-\varepsilon$.)

3.4. ВНЕШНИЕ МЕРЫ

Внешняя мера — одно из обобщений понятий длина, площадь и объем; является вещественнозначной функцией, определенной на всех подмножествах пространства, которая удовлетворяет нескольким дополнительным техническим условиям

Непустой класс **Е** множеств называется *наследственным* классом, если каковы бы ни были множества E и F, такие, что $E \in$ Е и $F \subset E$, непременно $F \in$ Е.

Типичный пример наследственного класса представляет собой класс всех подмножеств некоторого множества E в пространстве X. Та часть алгебраической теории наследственных классов, которая нам понадобится, чрезвычайно проста и во всех подробностях походит на теории колец, σ-колец и других известных нам классов множеств. В частности, пересечение любой системы наследственных классов является наследственным классом, поэтому для всякого класса множеств существует наименьший содержащий его наследственный класс. Наибольший интерес будут представлять для нас наследственные классы, являющиеся вместе с тем σ -кольцами; легко видеть, что наследственный класс представляет собой σ -кольцо тогда и только тогда, когда он замкнут относительно образования счетных соединений. Если **Е** — какой-нибудь класс множеств, то наследственное σ -кольцо, *порожденное* классом **Е**, т. е. наименьшее наследственное σ -кольцо, содержащее **Е**, будет обозначаться **Н(Е)**. Наследственное σ -кольцо **Н(Е**) состоит из множеств, могущих быть покрытыми счетными классами множеств, принадлежащих **Е**; если же само **Е** замкнуто относительно образования счетных соединений (например, если **Е** есть **о**-кольцо), то **Н(Е**) представляет собой класс всех множеств, служащих подмножествами множеств класса **Е**.

Действительная функция множества μ*, заданная на некотором классе **Е** и принимающая конечные или бесконечные значения, называется *полуаддитивной,* если для любых множеств E и F из **Е**, таких, что $E \cup F \in \mathbf{E}$, выполняется неравенство

$$\mu^*(E \cup F) \leqslant \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

Действительная функция множества μ*, заданная на **Е** и принимающая конечные или бесконечные значения, называется *конечно-полуаддитивной,* если для любого конечного класса $\{E_1, ..., E_n\}$ множеств из **Е**, соединение которых также принадлежит **Е**, выполняется неравенство

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E_i).$$

Действительная функция множества μ*, заданная на **E** и принимающая конечные или бесконечные значения, называется *счетно-полу-аддитивной,* если для любой последовательности $\{E_n\}$ множеств из **R**, соединение которых также принадлежит **R**, выполняется неравенство

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

Общая теория внешней меры была разработана Константином Каратеодори с целью обеспечить основу для теории измеримых множеств и счётно-аддитивных мер. Работы Каратеодори по внешней мере нашли немало применений в теории измеримых множеств (внешняя мера, например, используется в доказательстве фундаментальной теоремы Каратеодори о продолжении), и была использована Хаусдорфом для определения метрического инварианта, обобщающего размерность, сейчас он называется размерностью Хаусдорфа.

Случай числовой прямой

Для произвольного подмножества E числовой прямой можно найти сколь угодно много различных систем, состоящих из конечного или счётного количества интервалов, объединение которых содержит множество E. Назовем такие системы покрытиями. Поскольку сумма длин интервалов, составляющих любое покрытие, является величиной неотрицательной, она ограничена снизу, и, значит, множество длин всех покрытий имеет точную нижнюю границу. Эта грань, зависящая только от множества E, и называется *внешней мерой*:

$$m^*E = \inf\left\{\sum_i \Delta_i\right\}$$

Варианты обозначения внешней меры:

$$m^*E = \varphi(E) = |E|^*$$

Формальное определение

Пусть X — фиксированное множество. *Внешней мерой* называется функция $\mu^*\colon 2^X \longrightarrow [0,\ +\infty]$, такая, что

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$;
2. $\forall A \subseteq X,\ \forall A_n \subset X, n \geqslant 1,\ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\colon \mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Пусть μ — мера, определенная на кольце K. Внешней мерой, порожденной мерой μ, называется функция $\mu^*\colon 2^X \longrightarrow [0,\ +\infty]$, такая, что

1. $\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\right\},\ A_n \subset K, n \geqslant 1,\ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, если хоть одно такое покрытие множества A существует;
2. $\mu^*(A) = +\infty$ в противном случае.

Словесно:*внешней мерой* называется действительная функция множества μ*, заданная на каком-либо наследственном σ-кольце **H** и принимающая конечные или бесконечные значения, если она неотрицательна, монотонна, счетно-полуаддитивна и обращается в нуль на пустом множестве. Заметим, что внешняя мера всегда конечно-полуаддитивна. (Вполне) конечные и σ -конечные внешние меры определяются точно так же, как соответствующие меры.
Внешняя мера естественно возникает при попытке распространить меру, заданную на некотором кольце, на более широкий класс множеств. Простейшие относящиеся сюда подробности точно формулируются в следующей теореме.
Теорема 1. *Если* μ *— мера на каком-либо кольце* **R**, *то функция* μ*, *заданная на* **H(R)** *посредством равенства*

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) : E_n \in \mathbf{R},\ n = 1, 2, \ldots,\ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right\},$$

представляет собой внешнюю меру, совпадающую на **R** *с* μ; *если* μ *(вполне)* σ*-конечна, то такова же и* μ*.

Словесно μ*(*E*) может быть определена как нижняя грань сумм вида $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, где последовательность множеств $\{E_n\}$ из **R** выбирается так, чтобы

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

$$\varnothing$$

содержало *E.* Так определенная внешняя мера μ* называется внешней мерой, *индуцированной* мерой μ.

Доказательство.

Если $E \in \mathbf{R}$, то $E \subset E \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots$ и, следовательно,

$$\mu^*(E) \leqslant \mu(E) + \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) + \ldots = \mu(E).$$

С другой стороны, если $E \in R$, $E_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots,$ и $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, то, согласно теореме 2 § 3.3,

$$\mu(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

так что $\mu(E) \leqslant \mu^*(E)$.

Таким образом, μ* представляет собой продолжение функции μ, т. е. $\mu^*(E) = \mu(E)$, когда $E \in \mathbf{R}$; отсюда, в частности, следует, что μ* (∅) = 0.

Если $E \in \mathbf{H}(\mathbf{R})$, $F \in \mathbf{H}(\mathbf{R})$ и $E \subset F$, то всякая последовательность множеств из **R**, покрывающая *F*, покрывает и *E,* поэтому $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$.

Для того чтобы доказать, что μ* счетно-полуаддитивна, возьмем множества *E* и E_i из **H(R)**, такие, что $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Пусть ε — произвольное положительное число; тогда для всякого целого положительного i выберем последовательность множеств $\{E_{ij}\}$ из **R** таким образом, чтобы

$$E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_{ij}) \leqslant \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2i}.$$

Возможность выбора такой последовательности вытекает из определения $\mu^*(E_i)$. Тогда, так как все E_{ij} образуют счетный класс множеств из **R**, покрывающий E, то

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_{ij}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \varepsilon.$$

Так как ε выбрано произвольно, то

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

Предположим, что мера μ σ-конечна, и возьмем любое множество E из **H(R)**. Согласно определению **H(R)**, в **R** существует последовательность множеств $\{E_i\}$, такая, что $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$ Так как μ σ -конечна, то для каждого i=1, 2, ... в **R** найдется последовательность множеств $\{ E_{ij} \}$, для которой

$$E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij} \quad \text{и} \quad \mu(E_{ij}) < \infty.$$

Отсюда получаем

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij} \quad \text{и} \quad \mu^*(E_{ij}) = \mu(E_{ij}) < \infty.$$

Теорема 2. Внешняя мера μ^*, порожденная мерой μ, является внешней мерой.

Проверим пункт первый из определения внешней меры.

$\mu \geqslant 0 \Rightarrow \mu^* \geqslant 0$. μ^* определена на 2^X.

$$\varnothing \in K\colon \mu^*(\varnothing) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\varnothing) = 0 \Rightarrow \mu^*(\varnothing) = 0.$$

Проверим второй пункт определения. Пусть $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Если существует такое множество A_n из покрытия, что $\mu^*(A_n) = +\infty$, то неравенство выполняется. Пусть дальше все множества из покрытия такие, что $\mu^*(A_n) < +\infty,\ \forall n \geqslant 1$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, по определению точной нижней границы

$$\forall n \geqslant 1\, \exists B_{n_k} \in K, k \geqslant 1,\ A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n_k}\colon \mu^*(A_n) > \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n_k}) - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Тогда

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n_k} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A.$$

Поскольку $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n_k}$ является счётным объединением элементов кольца K, то

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n_k}) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon, \varepsilon \longrightarrow 0+.$$

1. Всегда ли в предположениях теоремы 1 конечна μ*, коль скоро конечна μ?
2. Наименьшее наследственное кольцо, содержащее заданный класс **E**, будем обозначать **J (E)**. Пусть на некотором кольце **R** задана действительная конечная функция множества μ, неотрицательная и конечно-аддитивная. Для *E*, принадлежащих **J (E)**, положим

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(F) : E \subset F \in \mathbf{R}\};$$

функция μ^* оказывается конечной, неотрицательной и полуаддитивной. Выполняется ли для множеств E из $\mathbf{R}$ равенство $\mu^*(E)=\mu(E)$?

3. Класс **H** подмножеств заданного множества X образует идеал в булевском кольце всех его подмножеств тогда и только тогда, когда **H** — наследственное кольцо (см. упр. 4 §2. 4).

4. Здесь приведено несколько примеров функций множества, заданных на наследственных классах. Некоторые из них являются внешними мерами, остальные нарушают в точности по одному из условий, определяющих внешнюю меру:

а) X — произвольное множество, **H** — класс всех его подмножеств. Фиксируем в X какую-нибудь точку x_0 и положим $\mu^*(E)=\chi_E(x_0)$.

б) X и **H** те же, что в примере „а"; $\mu^*(E)=1$ для всех E из **H**.

в) $X=\{x, y\}$ — множество, состоящее из двух различных точек, H — класс всех его подмножеств; μ^* определена равенствами

$$\mu^*(\varnothing)=0, \quad \mu^*(\{x\})=\mu^*(\{y\})=10, \quad \mu^*(X)=1.$$

г) X—множество, состоящее из 100 точек, размещенных в квадратной таблице из 10 столбцов, по 10 точек в каждом; **H** — класс всех подмножеств X; $\mu^*(E)$ определено как число столбцов, которые содержат хотя бы одну точку из E.

д) X — множество всех целых положительных чисел, **H** — класс всех его подмножеств. Если E — конечное множество из **H**, то $\nu(E)$ означает число элементов этого множества; μ^* определена для любого E из **H** равенством

$$\mu^*(E)=\limsup_n \frac{1}{n}\nu(E\cap\{1, \ldots, n\}).$$

е) X—произвольное множество, **H** — класс всех его конечных или счетных подмножеств; $\mu^*(E)$ есть число точек, входящих в E (если E бесконечно, то $\mu^*(E)=\infty$).

5. Если μ^*— внешняя мера на наследственном σ-кольце **H**, а E_0 — некоторое фиксированное множество из **H**, то функция μ^*_0, определенная равенством $\mu^*_0(E)=\mu^*(E\cap E_0)$, представляет собой внешнюю меру на **H**.

6. Если λ^* и μ^*— внешние меры на наследственном σ-кольце **H**, то функция ν^*, определенная равенством $\nu^*(E)=\lambda^*(E)\cup\mu^*(E)$, есть внешняя мера на **H**.

7. Если { μ_n} — последовательность внешних мер, заданных на наследственном σ-кольце **H**, а *{a_n}* — последовательность положительных чисел, то функция μ^*, определенная равенством представляет

$$\mu^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n^*(E),$$

собой внешнюю меру на **H**.

Свойства внешней меры. Свойства внешней меры μ^*:

- $$\forall n \geqslant 1,\ A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k : \mu^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k)$$.

Действительно,

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k) + \mu^*(\varnothing) + \mu^*(\varnothing) + \cdots = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k)$$.

- $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$(*монотонность*).

Вытекает из предыдущего свойства при $n = 1$.

- $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow m^* E_1 \leqslant m^* E_2.$
- $$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \Rightarrow m^* E \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m^* E_k.$$
- $\forall E,\ \varepsilon > 0\ \exists G \supseteq E \colon m^* G \leqslant m^* E + \varepsilon$, где G — открытое множество. Действительно, достаточно в качестве G взять сумму интервалов, составляющих покрытие E, такую что $\sum_i \Delta_i \leqslant m^* E + \varepsilon$. Существование такого покрытия следует из определения точной нижней грани.

3.5. ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть на некотором наследственном σ-кольце **H** задана внешняя мера μ*. Множество *E* из **H** называется μ*-*измеримым,* если для любого *A* из **H**

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E').$$

Понятие μ*-измеримости играет важнейшую роль в теории внешней меры. Не так легко, однако, уловить смысл этого понятия, не обращаясь к его следствиям, которые будут изложены ниже. Поэтому может быть полезным следующее пояснение. Внешняя мера может не быть не только счетно-аддитивной, но даже конечно-аддитивной (см. пример „г" упр. 4 § 3.4). Стремясь удовлетворить естественному требованию аддитивности, мы выделяем такие множества, которые всякое другое множество расщепляют аддитивно; определение μ*-измеримых множеств точно формулирует это несколько вольное описание. Введение такого, на первый взгляд сложного, понятия полностью оправдывается тем успехом, с каким оно применяется при доказательстве весьма важной теоремы о продолжении меры (см. § 3.8).

Теорема 1. *Если μ*— внешняя мера на наследственном σ-кольце* **H**, *то класс* $\overline{\mathbf{S}}$ *всех μ*-измеримых множеств представляет собой кольцо.*

Доказательство. Если *E* и *F* принадлежат $\overline{\mathbf{S}}$ и $A \in \mathbf{H}$, то

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'), \tag{1}$$

$$\mu^*(A \cap E) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F'), \tag{2}$$

$$\mu^*(A \cap E') = \mu^*(A \cap E' \cap F) + \mu^*(A \cap E' \cap F'). \tag{3}$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F') + \\ + \mu^*(A \cap E' \cap F) + \mu^*(A \cap E' \cap F'). \tag{4}$$

Если в равенстве (4) вместо *A* взять $A \cap (E \cup F)$, то первые три слагаемых в правой части не изменятся, а последнее выпадет, так что мы получим

$$\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \\ + \mu^*(A \cap E \cap F') + \mu^*(A \cap E' \cap F). \quad (5)$$

Так как $E' \cap F' = (E \cup F)'$, то подстановка (5) в (4) дает

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap (E \cup F)'), \quad \textbf{(6)}$$

откуда следует, что $E \cup F \in \overline{\mathbf{S}}$.
Подобным же образом, заменив A в равенстве (4) множеством

$$A \cap (E - F)' = A \cap (E' \cup F),$$

мы получим

$$\mu^*(A \cap (E - F)') = \mu^*(A \cap E \cap F) + \\ + \mu^*(A \cap E' \cap F) + \mu^*(A \cap E' \cap F'). \quad (7)$$

Но $E \cap F' = E - F$, поэтому подстановка (7) в (4) дает

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E - F)) + \mu^*(A \cap (E - F)'), \quad \textbf{(8)}$$

а это означает, что $E - F \in \overline{\mathbf{S}}$. Так как пустое множество, очевидно, μ^*-измеримо, то $\overline{\mathbf{S}}$ есть кольцо.
Прежде чем перейти к изучению более глубоких свойств μ^*-измеримых множеств, полезно привести следующее замечание: если на наследственном σ-кольце **H** задана внешняя мера μ^* и если множество E из **H** таково, что для всякого A из **H** выполняется неравенство

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'),$$

то множество E μ^*-измеримо. Для доказательства достаточно вспомнить, что обратное неравенство
$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$ прямо следует из полуаддитивности внешней меры.
Теорема 2. *Если* μ^* — *внешняя мера на наследственном σ-кольце* **H**, *то класс* $\overline{\mathbf{S}}$ *всех* μ^*-*измеримых множеств есть σ-кольцо. Если* $A \in \mathbf{H}$, $\{E_n\}$—*последовательность непересекающихся множествиз* S *и* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, *то*

$$\mu^*(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n).$$

Доказательство. Взяв в (5) E_1 и E_2 соответственно вместо E и F, получим

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2).$$

Методом индукции доказывается равенство

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i)$$

для любого целого положительного n. Если мы положим

$$F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то, согласно теореме 1, будем иметь

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F'_n) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E').$$

Так как это неравенство верно при любом n, то

$$\mu^*(A) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E') \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'). \quad (9)$$

Мы видим, что $E \in \overline{\mathbf{S}}$ (так что класс $\overline{\mathbf{S}}$ замкнут относительно образования счетных соединений непересекающихся множеств) и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E') = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'). \quad (10)$$

Взяв $A \cap E$ вместо A в (10), мы придем ко второму утверждению теоремы [слагаемое $\mu^*(A \cap E')$ может быть бесконечно, поэтому его нельзя просто вычесть из обеих частей равенства (10)]. Но всякое счетное соединение множеств из кольца может быть представлено как счетное соединение непересекающихся множеств из этого кольца, следовательно, $\overline{\mathbf{S}}$ есть σ-кольцо.

Теорема 3. *Если* μ* — *внешняя мера на наследственном* *ν-кольце* **H** *и* $\bar{\mathbf{S}}$ *—класс всех* μ**-измеримых множеств, то всякое множество нулевой внешней меры принадлежит* $\bar{\mathbf{S}}$ *и функция множества* $\bar{\mu}$, *определенная на* $\bar{\mathbf{S}}$ *равенством* $\bar{\mu}(E) = \mu^*(E)$, *представляет собой полную меру на* $\bar{\mathbf{S}}$.

О мере $\bar{\mu}$ условимся говорить, что она *индуцирована* внешней мерой μ*.

Доказательство. Если $E \in \mathbf{H}$ и $\mu^*(E) = 0$, то, каково бы ни было A из **H**,

$$\mu^*(A) = \mu^*(E) + \mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'),$$

так что $E \in \bar{\mathbf{S}}$. Счетная аддитивностьна $\bar{\mu}$ будет $\bar{\mathbf{S}}$ следовать из равенства (10), если взять в нем E вместо A. Если, наконец,

$$E \in \bar{\mathbf{S}}, \quad F \subset E \quad \text{и} \quad \bar{\mu}(E) = \mu^*(E) = 0,$$

то $\bar{\mu}(F) = \mu^*(F) = 0$, следовательно, $\bar{\mu}$ —полная мера.

Множество называется *измеримым по Лебегу*, если его внешняя и внутренняя меры равны. Тогда общее значение последних называется *мерой множества по Лебегу* и обозначается $mE,\ \mu E,\ |E|$, $\lambda(E)$или $mesE$.

Пример неизмеримого множества

Пример неизмеримого по Лебегу множества построил Дж. Витали в 1905 году. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности $\sim$на отрезке $[0,\ 1]$: $x \sim y$если разность $x - y$рациональна. Далее, из каждого класса эквивалентности выберем по представителю — одной точке (здесь мы пользуемся аксиомой выбора). Тогда полученное множество Eпредставителей будет неизмеримым.

Действительно, если сдвинуть E счётное число раз на все рациональные числа в интервале $[-1, 1]$, то объединение будет содержать весь отрезок $[0, 1]$ но при этом оно будет содержаться в отрезке $[-1, 2]$. При этом «сдвинутые копии» множества E не будут пересекаться друг с другом, что непосредственно следует из построения $\sim$ и E. Следовательно, в силу счётной аддитивности меры Лебега $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Если бы у построенного множества E существовала мера, то она должна быть либо равна нулю, либо быть больше нуля (в силу определения меры вообще).

Пусть $\mu(E) > 0$, при этом все $\mu(E_n)$ - равны друг другу в силу свойства инвариантности меры Лебега, а это значит, что в силу свойства счётной аддитивности меры Лебега $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) > 1$, что невозможно, так как $\mu([0,1]) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(E) = 1$.

Пусть $\mu(E) = 0$, однако это также невозможно, поскольку в этом случае $\mu([0,1]) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(E)$, что противоречит определению меры Лебега, так как для отрезка $[0, 1]$ эта мера равна 1 в силу именно определения меры Лебега, а это значит, что $\mu(E)$ не существует. Q.E.D.

Заметим, что построение этого, как и любого другого примера неизмеримого множества на отрезке, было бы невозможно без принятия аксиомы выбора (нельзя было бы допустить универсальную возможность выбрать по представителю в каждом классе эквивалентности).

3.6 Внешние меры и критерий Каратеодори

Определение. Пусть X — произвольное множество. *Внешняя мера* на X — это функция $\mu : 2^X \to [0,+\infty]$, обладающая следующими свойствами:

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. Монотонность: если $A \subset B$, то $\mu(A) \leq \mu(B)$.
3. Счетная субаддитивность:
$\mu(\bigcup A_i) \leq \sum \mu(A_i)$

для любого конечного или счетного набора множеств $\{A_i\}$.

Примеры. 1. Мера Хаусдорфа — см. свойства.

2. Пусть μ — мера на какой-нибудь σ-алгебре $\mathfrak{A} \subset 2^X$.Ее можно продолжить до внешней меры μ *, определенной равенством
$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : A \subset B \in \mathfrak{A}\}$.

3. Если $\mathfrak{A} \subset 2^X$ — произвольная система множеств и $\mu : \mathfrak{A} \to [0,+\infty]$ то можно определить внешнюю меру μ^* так:

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum \mu(A_i); A \subset \bigcup A_i, A_i \in \mathfrak{A}\},$$

где инфимум берется по всем не более чем счетным покрытиям множества A множествами из $\mathfrak{A}$.

Определение. Пусть на X задана внешняя мера μ. Будем говорить, что множество $A \subset X$ *хорошо разбивает* множество $B \subset X$, если $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$. Множество $A \subset X$ называется *хорошо разбивающим* или *μ-измеримым,* если оно хорошо разбивает любое множество $B \subset X$.

Замечание. В равенстве $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$ содержательно только неравенство "≥", обратное неравенство следует из определения внешней меры.

Теорема. *Пусть μ — внешняя мера на X. Тогда класс всех μ-измеримых множеств является σ-алгеброй, и сужение μ на эту σ-алгебру является мерой.*

Доказательство. 1. Очевидно, что пустое множество и все пространство X — хорошо разбивающие.

2. Если A — хорошо разбивающее, то и его дополнение $X \setminus A$ — хорошо разбивающее. Действительно, определение симметрично относительно замены A на $X \setminus A$, так как $B \setminus B = B \cap (X \setminus A)$.

3. Пусть A_1, A_2 — хорошо разбивающие, докажем, что $A_1 \cap A_2$ хорошо разбивающее. Пусть B — произвольное множество. Оно разбивается на четыре части: $B_0 = B \setminus A_1 \setminus A_2$, $B_1 = B \cap A_1 \setminus A_2$,

$B_2 = B \cap A_2 \setminus A_1$ и $B_3 = B \cap A_1 \cap A_2$. Так как A_1 хорошо разбивает B, имеем

$$\mu(B) = \mu(B \cap A_1) + \mu(B \setminus A_1).$$

Так как A_2 хорошо разбивает $B \cap A_1$, имеем

$$\mu(B \cap A_1) = \mu(B \cap A_1 \cap A_2) + \mu(B \cap A_1 \setminus A_2).$$

Таким образом,

$$\mu(B) = \mu(B \cap A_1 \cap A_2) + \mu(B \cap A_1 \setminus A_2) + \mu(B \setminus A_1).$$

Так как A_1 хорошо разбивает множество $B \setminus (A_1 \cap A_2)$, с учетом теоретико-множественных тождеств $(B \setminus (A_1 \cap A_2)) \cap A_1 = B \cap A_1 \setminus A_2$ и $(B \setminus (A_1 \cap A_2)) \cap A_1 = \mu(B \setminus A_1)$ получаем

$$\mu(B \setminus (A_1 \cap A_2)) = \mu(B \cap A_1 \setminus A_2) + \mu(B \setminus A_1).$$

Отсюда и из предыдущего равенства следует, что

$$\mu(B) = \mu(B \cap A_1 \cap A_2) + \mu(B \setminus (A_1 \cap A_2)),$$

что и требовалось.

4. Из пунктов 2 и 3 следует, что объединение и разность любых двух хорошо разбивающих множеств тоже хорошо разбивающее.

5. Докажем вспомогательное утверждение: если $A_1, A_2,...$ — дизъюнктные хорошо разбивающие множества и $B_i \subset A_i$ при всех i, то $\mu(\bigcup B_i) = \sum \mu(B_i)$.

Для каждого $n \geq 2$ имеем

$\mu(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = \mu(B_n) + \mu(B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1})$, так как A_n хорошо разбивает $B_1 \cup \cdots \cup B_n$. Отсюда по индукции получаем, что

$$\mu(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = \mu(B_1) + \cdots + \mu(B_n)$$

для всех n. Отсюда и из монотонности внешней меры следует, что

$$\mu(\bigcup B_i) \geq \mu(B_1) + \cdots + \mu(B_n)$$

при всех n. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\mu(\bigcup B_i) \geq \sum \mu(B_i)$. Обратное неравенство следует из определения внешней меры.

6. Пусть $A_1, A_2,...$ — дизъюнктные хорошо разбивающие множества. Докажем, что множество $A = \bigcup A_i$ — хорошо разбивающее. Пусть $B \subset X$, положим $B_i = B \cap A_i$. Так как каждое конечное объединение $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ — хорошо разбивающее (по п. 4), имеем

$$\mu(B) = \mu(B \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n)) \geq \mu(B_1 \cup \cdots \cup B_n) + \mu(B \setminus A).$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$. Из п. 5 следует, что, $\mu(B_1 \cup \cdots \cup B_n) \to \mu(\bigcup B_i) = \mu(B \cap A)$. Значит,

$\mu(B) \geq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$, то есть *A* хорошо разбивает *B*.
7. Объединение любых хорошо разбивающих множеств $A_1, A_2, \ldots$ — хорошо разбивающее. Действительно, $\bigcup A_i$ можно представить в виде объединения дизъюнктных множеств $A_1,\ A_2 \setminus A_1,$

$A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots$.
8. Счетная аддитивность μ на классе хорошо разбивающих множеств следует из п. 5 (подставим $B_i = A_i$).
Теорема (критерий Каратеодори). *Пусть X — метрическое пространство, μ — внешняя мера на X, обладающая таким свойством: для любых множеств* $A, B \subset X$ *с* $\operatorname{dist}(A, B) > 0$ *верно, что* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. *Тогда все борелевские множества μ-измеримы. Как следствие, сужение любой такой внешней меры (в частности, меры Хаусдорфа) на борелевскую σ-алгебру является борелевской мерой.*
Доказательство. Достаточно доказать, что открытые множества — хорошо разбивающие (так как они порождают борелевскую σ-алгебру). Пусть $U \subset X$ — открытое множество, $B \subset X$ — произвольное множество. Достаточно доказать, что
$\mu(B \cap U) + \mu(B \setminus U) \leq \mu(B)$. Если $\mu(B) = \infty$, то это неравенство очевидно, поэтому будем считать, что $\mu(B) < \infty$. Для каждого натурального *n* определим множества

$$U_n = \{x \in U : \operatorname{dist}(x, X \setminus U_n) > \frac{1}{n}\}.$$

Докажем вспомогательное утверждение:
Лемма. $\mu(B \cap U_n) \to \mu(B \cap U)$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Для каждого *n* положим $A_n = B \cap (U_{n+1} \setminus U_n)$. Рассмотрим все непустые множества вида A_{2k}. Каждые два из них разлелены некоторым положительным расстоянием. Применяя свойство из формулировки теоремы, получаем, что для любого *n*

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_{2k}) = \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_{2k}) \leq \mu(B)$$

в силу монотонности внешней меры. Так как $\mu(B) < \infty$, отсюда следует, что ряд $\sum \mu(A_{2k})$ сходится.
Аналогично ряд $\sum \mu(A_{2k+1})$ сходится, значит, ряд $\sum \mu(A_k)$ сходится.
Обозначим $\varepsilon_n = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_n)$. Поскольку ряд сходится, имеем $\varepsilon_n \to 0$.
Заметим, что $B \cap U = (B_n \cap U) \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$. По счетной субаддитивности отсюда следует, что

$$\mu(B\cap U)\leq \mu(B_n\cap U)+\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_n)=\mu(B_n\cap U)+\varepsilon_n.$$

Значит, $\mu(B\cap U_n)\to\mu(B\cap U)$.

Для каждого *n* рассмотрим множества $B\cap U_n$ и $B\setminus U$. Они разделены расстоянием 1/*n*, поэтому

$$\mu(B\cap U_n)+\mu(B\setminus U)=\mu((B\cap U_n)\cup(B\setminus U))\leq\mu(B).$$

Переходя к пределу с помощью леммы получаем требуемое неравенство $\mu(B\cap U)+\mu(B\setminus U)\leq \mu(B)$.

Из теоремы следует существование меры Лебега в $\mathbb{R}^n$ (в качестве меры Лебега можно взять *n*-мерную меру Хаусдорфа).

1. В примере „г" упр. 4 § 3.4 множество *E* оказывается μ*-измеримым тогда и только тогда, когда столбец, содержащий какую-либо точку из *E,* целиком входит в *E*. Какие множества μ*-измеримы в примере „е" упр. 4 § 3.4?

2. Внешняя мера μ* задана на наследственном σ-кольце **H**; при каких дополнительных условиях класс μ*-измеримых множеств представляет собой алгебру?

3. Заменив в равенстве (4) в доказательстве теоремы 1 множество *A* множеством $A\cap(E'\cup F')$, можно доказать непосредственно, что класс $\overline{\mathbf{S}}$ замкнут относительно образования пересечений. К какому выводу приведет этот прием, если *A* заменить множеством $A\cap(F-E)'=A\cap(E\cup F')$?

4. Пусть μ*—конечная, неотрицательная, монотонная и конечно-полуаддитивная функция множества на наследственном кольце **J** (см. упр. 2 § 3.4). Класс всех μ*-измеримых множеств представляет собой кольцо, и μ* на этом кольце аддитивна.

5. Пусть μ*— внешняя мера на наследственном σ-кольце **H**, $\overline{\mathbf{S}}$, — класс ; всех μ*-измеримых множеств. Если $A\in$ **H**, а $\{E_n\}$ — возрастающая последовательность множеств из $\overline{\mathbf{S}}$, то

$$\mu^*(\lim_n(A\cap E_n))=\lim_n\mu^*(A\cap E_n);$$

если $\{E_n\}$— убывающая последовательность множеств из $\overline{\mathbf{S}}$, причем $\mu^*(A\cap E_m)<\infty$ хотя бы при одном значении *m,* то

$$\mu^*(\lim_n(A\cap E_n))=\lim_n\mu^*(A\cap E_n).$$

6. Если μ*— внешняя мера на наследственном σ-кольце **H**, а *E* и *F*— два множества из μ*, из которых хотя бы одно μ*-измеримо, то

$$\mu^*(E)+\mu^*(F)=\mu^*(E\cup F)+\mu^*(E\cap F).$$

7. Выводы этого параграфа могут быть получены также посредством разбиений (см. упр. 5 § 3.1). Назовем *разбиением* конечный или счетный класс *{E{}* непересекающихся множеств, такой, что

$$\bigcup_i E_i = X.$$

Пусть μ*— внешняя мера на наследственном σ-кольце **H**; разбиение$\{E_i\}$ назовем μ*-*разбиением*, если, каково бы ни было множество *A* из **H**,

$$\mu^*(A)=\sum_i \mu^*(A\cap E_i).$$

Будем называть множество *E* μ*-*множеством,* если $\{E, E'\}$ представляет собой μ*-разбиение. Разбиение $\{E_i\}$ называется *подразбиением* разбиения $\{F_j\}$, если всякое E_i содержится в одном из F_j. *Произведением* двух произвольных разбиений $\{E_i\}$ и $\{F_j\}$ называется разбиение, образованное множествами вида E_iF_j. Заметим, что *E* представляет собой μ*-множество тогда и только тогда, когда оно { μ*-измеримо в смысле определения, приведенного в этом параграфе. Дальше последовательно доказываем следующие утверждения:

а) Произведение двух μ*-разбиений есть μ*-разбиение.

б) Если некоторое подразбиение разбиения $\{E_i\}$ есть μ*-разбиение, то само $\{E_i\}$ является μ*-разбиением.

в) $\{E_i\}$ представляет собой μ*-разбиение тогда и только тогда, когда каждое E_i есть μ*-множество.

г) Класс всех μ*-множеств есть σ-кольцо. (Указание. Класс всех μ*-множеств есть кольцо, замкнутое относительно образования счетных соединений непересекающихся множеств.)

8. а) Внешняя мера μ*, заданная в классе **H** всех подмножеств метрического пространства *X,* называется *метрической* внешней мерой, если

$$\mu^*(E\cup F)=\mu^*(E)+\mu^*(F),$$

коль скоро $d(E, F)>0$, где *d* — расстояние в *X,* Пусть μ* — метрическая внешняя мера, *E* — подмножество в *X* и *U* — некоторое содержащее *E* открытое множество; если

$$E_n = E\cap\left\{x : d(x, U')\geqslant \frac{1}{n}\right\},\quad n=1, 2, \ldots,$$

то

$$\lim_n \mu^*(E_n) = \mu^*(E).$$

[**Указание.** $\{E_n\}$ есть возрастающая последовательность множеств, соединение которых равно E; если $E_0 = 0$, $D_n = E_{n+1} — E_n$ и ни D_{n+1}, ни E_n не пусты, то $d(D_{n+1}, E_n) > 0$, следовательно,

$$\mu^*(E_{2n+1}) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu^*(D_{2i}) \quad \text{и} \quad \mu^*(E_{2n}) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu^*(D_{2i-1}).$$

Требуемое равенство тривиально в том случае, когда один из рядов

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(D_{2i}), \ \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(D_{2i-1})$$

расходится; если же они оба сходятся, то следует воспользоваться неравенством

$$\mu^*(E) \leqslant \mu^*(E_{2n}) + \sum_{i=n}^{\infty} \mu^*(D_{2i}) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(D_{2i-1}).]$$

б) Если μ^*— метрическая внешняя мера, то всякое открытое множество и, следовательно, всякое борелевское множество μ^*-измеримы. [Указание. Если U — открытое множество, A — произвольное подмножество в X, то следует применить „а" к множеству $E = A \cap U$. Так как $d(E_n, A \cap U') > 0$, то

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(E_n \cup (A \cap U')) = \mu^*(E_n) + \mu^*(A \cap U').]$$

в) Если μ^*— внешняя мера в классе всех подмножеств метрического пространства, такая, что всякое открытое множество оказывается μ^*-измеримым, то μ^*— метрическая внешняя мера. (Указание. Если $d(E, F) > 0$, то возьмем открытое множество U, такое, что $E \subset U$ и $F \cap U = \varnothing$, и запишем равенство, характеризующее измеримость U, взяв в качестве A множество $B \cup F$.)

3.7. СВОЙСТВА ИНДУЦИРОВАННЫХ МЕР

Всякая мера индуцирует некоторую внешнюю меру, а всякая внешняя мера, в свою очередь, индуцирует некоторую меру. Если, исходя из некоторой меры μ, образовать индуцированную ею внешнюю меру μ^*, а затем меру $\overline{\mu}$, индуцированную этой последней, то каково соотношение между мерами μ и $\bar{\mu}$? Цель настоящего параграфа— получить ответ на этот вопрос. Всюду в этом параграфе мы будем предполагать, что μ — мера, заданная на некотором кольце **R**,

μ *— индуцированная ею внешняя мера на H(R), $\bar{\mu}$— индуцированная этой последней мера на σ-кольце $\bar{\mathbf{S}}$ всех μ *-измеримых множеств.

Теорема 1. *Всякое множество из* **S(R)** μ **-измеримо.*

Доказательство. Если $E \in \mathbf{R},\ A \in \mathbf{H}(\mathbf{R})$ и $\varepsilon > 0$, то, согласно определению μ *, существует последовательность *{E_n}* множеств из **R**, такая, что $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ и

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(E_n \cap E) + \mu(E_n \cap E')) \geqslant$$

$$\geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E').$$

Так как это неравенство справедливо при любом ε, то *E* оказывается μ *-измеримым. Другими словами, мы доказали, что $\mathbf{R} \subset \bar{\mathbf{S}}$, а так как $\bar{\mathbf{S}}$ представляет собой σ-кольцо, то $\mathbf{S}(\mathbf{R}) \subset \bar{\mathbf{S}}$.

Теорема 2. *Если* $E \in \mathbf{H}(\mathbf{R})$, *то*

$$\mu^*(E) = \inf\{\bar{\mu}(F) : E \subset F \in \bar{\mathbf{S}}\} = \inf\{\bar{\mu}(F) : E \subset F \in \mathbf{S}(\mathbf{R})\}.$$

Это означает, что внешние меры, индуцированные мерой $\bar{\mu}$, заданной на **S(R)**, и мерой $\bar{\mu}$, заданной на $\bar{\mathbf{S}}$, совпадают с μ *,

Доказательство. Так как, в силу определения $\bar{\mu}$ и теоремы 1 §3.4, $\mu(F) = \bar{\mu}(F)$ тогда, когда $F \in$ **R**, то

$$\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n):E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\ E_n\in\mathbf{R},\ n=1,\ 2,\ \ldots\right\}\geqslant$$
$$\geqslant\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}(E_n):E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\ E_n\in\mathbf{S}(\mathbf{R}),\ n=1,\ 2,\ \ldots\right\}.$$

Но всякую последовательность $\{E_n\}$ множеств из **S** (**R**), для которой

$$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=F,$$

можно заменить последовательностью $\{F_n\}$ непересекающихся множеств из **S**(**R**), такой, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n=F \text{ и } \mu(F_n)\leqslant\mu(E_n),\ n=1,2,\ldots$$

Далее, согласно определению $\bar{\mu}$, $\bar{\mu}(F)=\mu^*(F)$ для F из $\bar{\mathbf{S}}$; следовательно,

$$\mu^*(E)\geqslant\inf\left\{\bar{\mu}(F):E\subset F\in\mathbf{S}(\mathbf{R})\right\}\geqslant$$
$$\geqslant\inf\left\{\bar{\mu}(F):E\subset F\in\bar{\mathbf{S}}\right\}\geqslant\mu^*(E).$$

Множество F из **S**(**R**) называется *измеримой оболочкой* некоторого множества E из **H**(**R**), если $E\subset F$, и, каково бы ни было множество G из **S**(**R**), содержащееся в $F—E$, непременно $\bar{\mu}(G)=0$. Грубо говоря, измеримая оболочка множества E из **H**(**R**) — это наименьшее множество из **S**(**R**), покрывающее E.

Теорема 3. *Если множество E из* **H**(**R**) *имеет σ-конечную внешнюю меру, то оно обладает измеримой оболочкой F. При этом*

$$\mu^*(E)=\bar{\mu}(F).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\mu^*(E)<\infty.$ В силу теоремы 2, для всякого n=1, 2, ... в **S**(R) найдется множество F_n, такое, что

$$E\subset E_n \quad\text{и}\quad \bar{\mu}(F_n)\leqslant\mu^*(E)+\frac{1}{n}.$$

Положим $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n;$ тогда

$$E\subset F\in\mathbf{S}(\mathbf{R}) \quad\text{и}\quad \mu^*(E)\leqslant\bar{\mu}(F)\leqslant\bar{\mu}(F_n)\leqslant\mu^*(E)+\frac{1}{n}.$$

Так как n в этих неравенствах произвольно, то $\mu^*(E)=\bar{\mu}(F)$.
Если $G\subset F-E$, причем $G\in \mathbf{S}(\mathbf{R})$, то $E\subset F-G$ и, следовательно,

$$\bar{\mu}(F)=\mu^*(E)\leqslant\bar{\mu}(F-G)=\bar{\mu}(F)=\bar{\mu}(G)\leqslant\bar{\mu}(F).$$

Так как $\bar{\mu}(F)<\infty$, то $\bar{\mu}(G)=0$, так что F служит измеримой оболочкой множества E.
Если $\mu^*(E)=\infty$, то E, будучи множеством σ-конечной внешней меры, представляет собой соединение счетного числа непересекающихся множеств конечной внешней меры

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\qquad \mu^*(E_n)<\infty.$$

Пусть F_n— измеримая оболочка множества E_n и $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n.$

Тогда, очевидно, $F\in\mathbf{S}(\mathbf{R})$ и $E\subset F$. Если $G\subset F-E$, то

$G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$, где $G_n=G\cap F_n$. Так как $G_n\subset F_n-E_n$,

то $\bar{\mu}(G_n)=0$, откуда $\bar{\mu}(G)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}(G_n)=0.$ Мы видим,

что F служит измеримой оболочкой множества E. Равенство $\mu^*(E)=\bar{\mu}(F)$ в рассматриваемом случае очевидно, так как $\bar{\mu}(F)=\infty$.

Теорема 4. *Если* $E\in\mathbf{H}(\mathbf{R})$ *и* F *— измеримая оболочка множества E, то* $\mu^*(E)=\bar{\mu}(F)$; *если и* F_1 *и* F_2 *служат измеримыми оболочками множества E, то* $\mu(F_1\,\Delta\,F_2)=0$.

Доказательство. Из $E\subset F_1\cap F_2\subset F_1$ вытекает, что $F_1-(F_1\cap F_2)\subset F_1-E$, а так как F_1 служит измеримой оболочкой множества E, то

$$\bar{\mu}(F_1-(F_1\cap F_2))=0.$$

Подобным же образом доказывается, что

$$\bar{\mu}(F_2 - (F_1 \cap F_2)) = 0.$$

Отсюда

$$\bar{\mu}(F_1 \Delta F_2) = 0.$$

При $\mu^*(E) = \infty$ равенство $\mu^*(E) = \bar{\mu}(F)$ тривиально.

При $\mu^*(E) < \infty$ существование измеримой оболочки F_0 множества E, обладающей свойством

$$\bar{\mu}(F_0) = \mu^*(E),$$

обеспечено теоремой 3. Согласно же результатам предыдущего параграфа, любые две измеримые оболочки одного и того же множества имеют одинаковую меру.

Теорема 5. *Если мера* μ *на* R *σ-конечна, то σ-конечны также меры* $\bar{\mu}$ *на* S(R) *и* $\bar{\mu}$ *на* $\bar{\mathbf{S}}$.

Доказательство. В силу теоремы 1 § 3.4, если μ σ -конечна, то μ^* σ-конечна. Поэтому для любого E из $\bar{\mathbf{S}}$ существует последовательность $\{E_i\}$ множеств из **H(R)**, такая, что

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \qquad \mu^*(E_i) < \infty, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Доказательство завершается применением теоремы 3 к каждому из множеств E_i.

Помимо вопроса, сформулированного в начале этого параграфа, мы можем поставить еще такой вопрос. Если, исходя из некоторой внешней меры μ^*, образовать индуцированную ею меру $\bar{\mu}$, а затем внешнюю меру $\bar{\mu}^*$, индуцированную мерой $\bar{\mu}$, то каково соотношение между μ^* и $\bar{\mu}^*$? Вообще говоря, эти две функции различны; если же $\bar{\mu}^*$ совпадает с исходной внешней мерой μ^*, то μ^* называется *регулярной* внешней мерой. Утверждение теоремы 2, собственно, состоит в том, что если внешняя мера μ^* индуцирована некоторой мерой, заданной на кольце, то μ^* регулярна. Обратное также верно: если внешняя мера μ^* регулярна, т. е. $\mu^* = \bar{\mu}^*$, то она индуцирована некоторой мерой, заданной на кольце, именно мерой $\bar{\mu}$ на кольце μ*-измеримых множеств. Таким образом, понятия индуцированной внешней меры и регулярной внешней меры равнообъемны.

1. Теорема 4 утверждает, что измеримая оболочка, если она вообще существует, определяется однозначно с точностью до множества меры нуль; теорема 3 устанавливает существование измеримой оболочки у множеств σ-конечной внешней меры. Следующий пример показывает, что условие σ-конечности внешней меры в теореме 3 не может быть опущено.

Пусть *X*—эвклидова плоскость. Обозначим $\mathbf{R}_0$ класс множеств *E* в *X*, могущих быть покрытыми конечным или счетным числом горизонтальных прямых, на каждой из которых либо *E*, либо его дополнение конечно или счетно. Пусть **R** — алгебра, порожденная классом $\mathbf{R}_0$. Если положить μ *(E)* = 0 тогда, когда *E* конечно или счетно, и $\mu(E) = \infty$, для несчетных *E*, то μ будет мерой на **R**. Легко видеть, что в этом случае $\mathbf{R} = \mathbf{S}(\mathbf{R})$, а $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{H}(\mathbf{R})$ совпадает с классом всех подмножеств *X*, Если множество *E* есть ось *y* и $E \subset F \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$, то в $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ всегда найдется множество *G*, такое, что $G \subset F - E$ и $\mu(G) \neq 0$.

2. Говорят, что множество *E* на числовой прямой имеет *точку сгущения на бесконечности,* если вне любого конечного интервала оказывается несчетное подмножество множества *E.* Пусть *X* — числовая прямая, а *E* — любое ее подмножество. Зададим функцию μ*, положив μ* *(E)* = 0, если *E* конечно или счетно, μ* *(E)* = 1, если *E* несчетно, но не имеет точки сгущения на бесконечности, и $\mu^*(E) = \infty$, если *E* обладает точкой сгущения на бесконечности. Тогда μ* будет вполне σ-конечной внешней мерой, но индуцированная ею мера $\bar{\mu}$ не будет σ-конечной, так как μ*-измеримыми оказываются лишь множества, сами конечные или счетные, а также множества с конечными или счетными дополнениями. Регулярна ли μ*? Что получится, если для множеств с точкой сгущения на бесконечности положить μ* *(E)* = 17?

3. Пусть *n* — некоторое фиксированное целое положительное число, а $\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_n$ — первые *n*+1 бесконечных мощностей, расположенные в порядке возрастания. Возьмем в качестве *X* множество мощности $\aleph_n$ и зададим на его подмножествах функцию μ*, положив μ* *(E)* = 0, если *E* конечно, и $\mu^*(E) = k$, если *E*

обладает мощностью $\aleph_k$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Функция μ* является внешней мерой; регулярна ли она?

4. Если μ*— регулярная внешняя мера на наследственном σ-кольце **H**, $\{E_n\}$ — возрастающая последовательность множеств из **H** и

$$\lim_n E_n = E,$$

то

$$\mu^*(E) = \lim_n \mu^*(E_n).$$

(Указание. В случае

$$\lim_n \mu^*(E_n) = \infty$$

результат очевиден. В противном случае возьмем μ*-измеримые оболочки F_n множеств E_n, n= 1, 2, ...; они образуют возрастающую последовательность, предел которой обозначим F. Так как $\mu^*(F_n) = \mu^*(E_n) \leqslant \mu^*(E)$, то $\lim_n \mu^*(F_n) = \mu^*(F) \leqslant \leqslant \mu^*(E)$; с другой стороны, $E \subset F$, поэтому $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$. Таким образом, F служит измеримой оболочкой множества E.) Для нерегулярных внешних мер этот результат неверен; соответствующий пример можно построить, опираясь на упр. 2.

5. Для любого подмножества E произвольного множества X положим { μ* (E) = 0 или 1, в зависимости от того, пусто E или нет; при таком определении функция μ*оказывается регулярной внешней мерой в классе всех подмножеств X. Если $\{E_n\}$ — убывающая последовательность непустых множеств с пустым пересечением (в бесконечном X такая последовательность всегда существует), то

$$\lim_n \mu^*(E_n) = 1,$$

тогда как

$$\mu^*(\lim_n E_n) = 0.$$

Другими словами, для убывающих последовательностей свойство, аналогичное указанному в упр. 4, не имеет места, даже если внешняя мера вполне конечна и регулярна.

6. Пусть μ^*_1 и μ^*_2 — две конечные внешние меры, заданные на всевозможных подмножествах некоторого X, и пусть $\overline{\mathbf{S}}_i$, i=1, 2, —

класс μ^*-измеримых множеств. Если задать μ^*, положив для любого *E,* заключенного в *X,*

$$\mu^*(E) = \mu_1^*(E) + \mu_2^*(E),$$

то класс $\overline{\mathbf{S}}$ μ^*-измеримых множеств совпадает с пересечением классов $\overline{\mathbf{S}}_1$ и $\overline{\mathbf{S}}_2$. (Указание. Равенство

$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E') = \mu^*(A)$ возможно только при

$\mu_i^*(A \cap E) + \mu_i^*(A \cap E') = \mu_i^*(A), \quad i = 1, \quad 2.$) Что можно сказать, если не предполагать μ^*_1 и μ^*_2 конечными?

7. Пусть μ^*_1 — любая конечная регулярная внешняя мера на всевозможных подмножествах множества *X,* а μ^*_2 задана так, как μ^* в упр. 5. Тогда, хотя μ^*_2 конечна и регулярна, но, если μ^*_1 принимает больше двух различных значений, внешняя мера $\mu^*_1 + \mu^*_2$ нерегулярна.

8. Если *X*—метрическое пространство, а *p* — положительное действительное число, то *p*-мерной *хаусдорфовой* (внешней) *мерой* множества *E* в пространстве *X* называется

$$\mu_p^*(E) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\delta(E_i))^p : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \delta(E_i) < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots \right\},$$

где δ *(E)* означает диаметр множества *E:*

а) Функция множества μ^*_pесть метрическая внешняя мера (см. упр. 8 § 3.5).

б) Внешняя мера μ^*_p регулярна; в самом деле, для любого подмножества *E* пространства *X* существует убывающая последовательность $\{U_n\}$ открытых множеств, содержащих *E*, такая, что

$$\mu_p^*(E) = \mu_p^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right).$$

3.8. РАСШИРЕНИЕ И ПОПОЛНЕНИЕ МЕРЫ

Всегда ли можно распространить меру, заданную на некотором кольце, на порожденное им σ-кольцо? Ответ на этот вопрос, по существу, содержится в результатах предыдущих параграфов; формально он заключен в следующей теореме.

Теорема 1. *Если* μ — *σ-конечная мера, заданная на некотором кольце* **R**, *то существует единственная мера* $\bar{\mu}$, *заданная на σ-кольце* **S(R**), *такая, что* $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ *для множеств* E *из* **R**; *при этом мера* $\bar{\mu}$ σ-*конечна.*

Мера $\bar{\mu}$ называется *расширением* меры μ. Всюду, где это не может вызвать недоразумение, мы будем писать μ *(E)* вместо $\bar{\mu}(E)$ даже для множеств E из **S(R)**.

Существование меры $\bar{\mu}$ установлено теоремой 3 § 3.5 и теоремой 1 § 3.7. Для того чтобы доказать единственность, допустим, что на **S(R)** заданы две меры μ_1 и μ_2, обладающие тем свойством, что $\mu_1(E) = \mu_2(E)$, коль скоро $E \in$ **R**. Пусть **M** — класс всех тех множеств из **S(R)**, на которых μ_1 и μ_2 совпадают. Если одна из этих мер конечна и если $\{E_n\}$ — монотонная последовательность множеств из **M**, то, так как

$$\mu_i(\lim_n E_n) = \lim_n \mu_i(E_n), \qquad i = 1,\ 2,$$

мы приходим к заключению, что $\lim\limits_n E_n \in \mathbf{M}$. (Здесь существенно используется тот факт, что при любом n одно из чисел $\mu_1(E_n)$ и $\mu_2(E_n)$, а вместе с ним и другое, конечно; см. теоремы 4 и 5 § 3.3.) Таким образом, класс **M** монотонный, и так как он содержит **R**, то, согласно теореме 2 § 2.6, **M** охватывает **S(R)**.

В общем случае, без всяких предположений о конечности мер μ_1 и μ_2, можно действовать следующим образом. Возьмем какое-нибудь множество A из **R** конечной меры (безразлично, относительно μ_1 или μ_2, потому что на **R** обе меры совпадают). Так как **R** ∩ A представляет собой кольцо, а $\mathbf{S}(\mathbf{R}) \cap A$ —σ-кольцо, им порожденное (см. теорему 5 § 2.5), то к $\mathbf{R} \cap A$ и $\mathbf{S}(\mathbf{R}) \cap A$ применимы рассуждения предыдущего абзаца, следовательно, μ_1 и μ_2 совпадают на **S(R)** ∩ A . Но всякое множество E из **S(R)** может быть покрыто счетным числом непересекающихся множеств из **R**, мера которых конечна, откуда и вытекает утверждение теоремы.

Процесс распространения меры, описанный в § 3.7, дает даже несколько больше, чем утверждается теоремой 1: заданная на **R** мера μ в действительности распространяется на класс всех μ *-измеримых множеств, который, вообще говоря, шире σ-кольца, порожденного кольцом **R**. Следующая теоремд показывает, что такое расширение области определения μ может быть осуществлено без помощи внешней меры,

Теорема 2. *Если* μ — *мера на некотором* σ-*кольце* S, *то класс* $\bar{\mathbf{S}}$ *всех множеств вида* $E\Delta N$, *где* $E \in$ S, *a N есть подмножество какого-либо множества меры нуль из* S, *представляет собой* σ-*кольцо, и функция* $\bar{\mu}$, *определенная на* $\bar{\mathbf{S}}$ *равенством* $\bar{\mu}(E \Delta N) = \mu(E)$, *есть полная мера на* $\bar{\mathbf{S}}$.

Мера $\bar{\mu}$, таким образом определенная, называется *пополнением* меры μ.

Доказательство. Пусть $E \in \mathbf{S}$ и $N \subset A \in \mathbf{S}$, где $\mu(A) = 0$; тогда соотношения

$$E \cup N = (E - A) \Delta [A \cap (E \cup N)]$$

и

$$E \Delta N = (E - A) \cup [A \cap (E \Delta N)]$$

показывают, что **S** можно охарактеризовать как класс множеств вида $E \cup N$, где $E \in \mathbf{S}$, а N—подмножество некоторого множества меры нуль из **S**. Отсюда следует, что класс $\bar{\mathbf{S}}$, который, очевидно, замкнут относительно образования симметрических разностей, замкнут также относительно образования счетных соединений, следовательно, $\bar{\mathbf{S}}$ представляет собой σ-кольцо. Если

$$E_1 \Delta N_1 = E_2 \Delta N_2,$$

где

$$E_i \in \mathbf{S},\ N_i \subset A_i \in \mathbf{S},\ \mu(A_i) = 0,\ i = 1,\ 2,$$

то

$$E_1 \Delta E_2 = N_1 \Delta N_2$$

и, следовательно, $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$. Отсюда $\mu(E_1) = \mu(E_2)$, и мы видим, что равенства

$$\bar{\mu}(E \Delta N) = \bar{\mu}(E \cup N) = \mu(E)$$

действительно определяют $\bar{\mu}$ однозначно. Пользуясь представлением множеств, входящих в **S** в виде $E \cup N$, нетрудно проверить, что $\bar{\mu}$ есть мера. Так как $\bar{\mathbf{S}}$ содержит все подмножества всевозможных множеств меры нуль из $\bar{\mathbf{S}}$, то мера $\bar{\mu}$ полная. Следующая теорема устанавливает связь между пополнением заданной меры и тем продолжением ее, которое строится посредством внешней меры.

Теорема 3. *Пусть* μ — σ*-конечная мера, заданная на некотором кольце* **R**, *и* μ * — *индуцированная ею внешняя мера. Тогда пополнение расширения меры* μ, *заданного на* **S(R)**, *совпадает с* μ * *на всех* μ* -*измеримых множествах.*

Доказательство. Пусть **S*** — класс всех μ *-измеримых множеств, а $\bar{\mathbf{S}}$—область определения пополнения $\bar{\mu}$ меры μ. Так как μ * представляет собой полную меру на **S***, то $\bar{\mathbf{S}}$ содержится в **S***, и на **S** мера $\bar{\mu}$ совпадает с μ *. Мы покажем теперь, что **S*** содержится в $\bar{\mathbf{S}}$. Мера μ * σ-конечна на **S*** (см. теорему 5 § 3.7), поэтому достаточно доказать, что если $E \in \mathbf{S}^*$ и $\mu^*(E) < \infty$, то $E \in \bar{\mathbf{S}}$.
Согласно теореме 3 § 3.7, множество *E* обладает измеримой оболочкой *F*. Так как $\mu^*(F) = \mu(F) = \mu^*(E)$, $\mu^*(E) < \infty$ и μ* есть мера на **S***, то $\mu^*(F - E) = 0$. Множество *F* — *E* также имеет измеримую оболочку *G* и

$$\mu(G) = \mu^*(F - E) = 0,$$

поэтому равенство

$$E = (F - G) \cup (E \cap G)$$

представляет *E* в виде соединения множества из **S(R)** и подмножества некоторого множества из **S (R)** меры нуль. Таким образом, $E \in \bar{\mathbf{S}}$, и теорема 3 доказана.

Грубо говоря, теорема 3 утверждает, что в σ-конечном случае σ-кольцо всех μ *-измеримых множеств и σ-кольцо **S (R)** разнятся весьма незначительно: всякое μ *-измеримое множество с точностью до множества меры нуль совпадает с некоторым множеством из **S(R)**. В заключение этого параграфа мы приведем теорему, касающуюся связи между мерой в кольце и ее расширением в порожденном им σ-кольце.

Теорема 4. *Если* μ — σ*-конечная мера в некотором кольце* **R**, *то для любого множества* E *из* **S(R)** *конечной меры и для любого положительного числа* ε *в* **R** *существует множество* E_0, *такое, что* $\mu(E \Delta E_0) < \varepsilon$.

Доказательство. В силу результатов §3.4—3.7 и теоремы 1

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad E_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \ldots\right\}.$$

Поэтому в **R** существует последовательность множеств $\{E_i\}$, такая, что

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{и} \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right),$$

то можно указать такое целое положительное n, что, обозначив

$$E_0 = \bigcup_{i=1}^{n} E_i,$$

будем иметь

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \mu(E_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ясно, что $E_0 \in \mathbf{R}$. Утверждение теоремы будет следовать из соотношений

$$\mu(E - E_0) \leqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i - E_0\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) - \mu(E_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\mu(E_0-E)\leqslant\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i-E\right)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)-\mu(E)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

1. Пусть μ — конечная, неотрицательная, конечно-аддитивная функция множества в кольце **R**. Функция μ^*, построенная согласно § 3.4, и в этом случае будет внешней мерой; следовательно, можно будет образовать меру $\bar{\mu}$, согласно теореме 3 § 3.5, но $\bar{\mu}$ не будет, вообще говоря, продолжением функции μ (см. упражнения 2 § 3.4; 4 (e) § 3.4; 4 § 3.5).

2. Если $\bar{\mu}$ — расширение описанной в § 3.2 меры μ, заданной в кольце **R**, порожденном интервалами, то, каково бы ни было счетное множество E из

$$\mathbf{S}(\mathbf{R}),\ \bar{\mu}(E)=0.$$

3. Утверждение единственности в теореме 1 неверно, если класс **R**, на котором задана мера μ, не является кольцом. (Указание. Пусть $X=\{a, b, c, d\}$ — пространство, состоящее из четырех точек, и в классе всех его подмножеств заданы меры μ_1 и μ_2 следующим образом:

$$\mu_1(\{a\})=\mu_1(\{d\})=$$
$$=\mu_2(\{b\})=\mu_2(\{c\})=1,$$

$$\mu_1(\{b\})=\mu_1(\{c\})=\mu_2(\{a\})=\mu_2(\{d\})=2.)$$

4. Справедлива ли теорема 1 в том случае, когда μ задана на полукольце?

5. Пусть **R** — кольцо подмножеств счетного множества X, такое, что всякое непустое множество из **R** счетно, а **S (R)** охватывает все подмножества X (см. упр. 7 § 3.3). Для всякого E из **S (R)** положим $\mu_1(E)$ равным числу точек в E и $\mu_2(E)=2\mu_1(E)$. Тогда μ_1 и μ_2 совпадают на **R**, но не совпадают на **S (R)**. Таким образом, утверждение единственности в теореме 1 неверно без условия σ-конечности мер на **R**, хотя бы эти меры были вполне σ-конечны на **S (R)**.

6. Предположим, что μ есть мера в σ-кольце **S**, а $\bar{\mu}$ в кольце $\bar{\mathbf{S}}$ — ее пополнение. Если $A \in \mathbf{S}$, $B \in \mathbf{S}$, $A \subset E \subset B$ и $\mu(B - A) = 0$, то $E \in \bar{\mathbf{S}}$.
7. Пусть *X* — какое-нибудь несчетное множество, **S** — класс его конечных или счетных подмножеств и их дополнений и для всякого *E* из **S** μ *(E)* равно числу точек, входящих в *E*. При этом μ представляет собой полную меру в **S**, и все подмножества в *X* оказываются μ *-измеримыми. Таким образом, теорема 3 без предположения σ-конечности неверна.
8. Если μ и *v* — σ-конечные меры в кольце **R**, то для всякого множества *E* из **S (R**), для которого $\mu(E) < \infty$ и $\nu(E) < \infty$, и для всякого положительногочисла ε в **R** найдется множество E_0, такое, что $\mu(E \Delta E_0) \leqslant \varepsilon$ и

$$\nu(E \Delta E_0) \leqslant \varepsilon.$$

3.9. ВНУТРЕННИЕ МЕРЫ

Мы возвращаемся к изучению мер в общем виде, внешних мер и соотношений между ними, с целью изложения интересного и исторически важного раздела теории.
Мы видели, что если в σ-кольце **S** задана мера μ, то функция μ *, определенная для всех множеств *E* наследственного σ-кольца **H(S**) равенством

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(F) : E \subset F \in \mathbf{S}\},$$

представляет собой внешнюю меру; в σ-конечном случае индуцированная внешней мерой μ * мера $\bar{\mu}$ в σ-кольце $\bar{\mathbf{S}}$ всех μ *-измеримых множеств совпадает с пополнением меры μ. Теперь мы определим *внутреннюю меру* μ_*, индуцированную мерой μ, ПОЛОЖИВ ДЛЯ *E* из **H(S**)

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(F) : E \supset F \in \mathbf{S}\}.$$

В этом параграфе мы изучим μ_* и ее связь с μ *; мы покажем, что свойства μ_* в некотором, вполне естественном, смысле двойственны свойствам μ *. Прежде всего мы заметим, что функция множества μ_*

неотрицательна, монотонна и обращается в нуль на пустом множестве; этими свойствами внутренней меры мы будем пользоваться в дальнейшем без особых пояснений.
Итак, в этом параграфе всюду предполагается, что μ есть σ-конечная мера в некотором σ-кольце **S**, μ^* и μ_* — индуцированные ею внешняя и внутренняя меры, $\bar{\mu}$ —мера в $\bar{\mathbf{S}}$ —пополнение меры μ.

Напоминаем, что $\bar{\mu}$ совпадает с μ^* в классе μ^*-измеримых множеств (см. теорему 3 § 3.8).

Теорема 1. *Если* $E \in \mathbf{H}(\mathbf{S})$, *то*

$$\mu_*(E) = \sup\{\bar{\mu}(F) : E \supset F \in \bar{\mathbf{S}}\}.$$

Доказательство. Так как $\mathbf{S} \subset \bar{\mathbf{S}}$, то прямо из определения μ_* вытекает неравенство

$$\mu_*(E) \leqslant \sup\{\bar{\mu}(F) : E \supset F \in \bar{\mathbf{S}}\}.$$

С другой стороны, согласно теореме 2 § 3.8, каково бы ни было *F* из $\bar{\mathbf{S}}$, в **S** существует множество *G*, такое, что

$$G \subset F \text{ и } \bar{\mu}(F) = \mu(G).$$

Это означает, что любое значение меры μ на $\bar{\mathbf{S}}$ достигается мерой μ на **S**; тем самым теорема доказана.
Множество *F* из **S** называется *измеримым ядром* некоторого множества *E* из **H(S)**, если $F \subset E$ и, каково бы ни было множество *G* из **S**, содержащееся в *E — F*, непременно μ (G) = 0. Грубо говоря, измеримое ядро множества *E* есть наибольшее множество из **S**, содержащееся в *E*.
Теорема 2. *Всякое множество из* **H(S)** *обладает измеримым ядром.*

Доказательство. Пусть $\hat{E}$ —измеримая оболочка множества *E*, а *N*—измеримая оболочка множества $\hat{E} - E$.

Положим $F = \hat{E} - N$; тогда

$$F = \hat{E} - N \subset \hat{E} - (\hat{E} - E) = E,$$

и если $G \subset E - F$, то

$$G \subset E - (\hat{E} - N) = E \cap N \subset N - (\hat{E} - E).$$

Так как N есть измеримая оболочка множества $\hat{E} - E$, то из полученных включений следует, что F является измеримым ядром множества E.

Теорема 3. *Если* $E \in \mathbf{H}(\mathbf{S})$, *а* F *— измеримое ядро множества* E, *то* $\mu(F) = \mu_*(E)$. *Если* F_1 *и* F_2 *служат измеримыми ядрами множества* E, *то* $\mu(F_1 \Delta F_2) = 0$.

Доказательство. Так как $F \subset E$, то, очевидно, $\mu(F) \leqslant \mu_*(E)$. Если бы имело место неравенство $\mu(F) < \mu_*(E)$, то, согласно определению $\mu_*(E)$, в **S** существовало бы множество F_0, такое, что $F_0 \subset E$ и $\mu(F_0) > \mu(F)$; тогда мы имели бы

$$F_0 - F \subset E - F \quad \text{и} \quad \mu(F_0 - F) \geqslant \mu(F_0) - \mu(F) > 0,$$

Что противоречит свойствам множества F. Таким образом,

$$\mu(F) =$$

$$= \mu_*(E).$$

Из соотношений $F_1 \subset F_1 \cup F_2 \subset E$ следует

$$(F_1 \cup F_2) - F_1 \subset E - F_1.$$

Поэтому, в силу того, что F_1 служит измеримым ядром множества E,

$$\mu\big((F_1 \cup E_2) - F_1\big) = 0;$$

подобным же образом

$$\mu\big((F_1 \cup F_2) - F_2\big) = 0.$$

Следовательно, $\mu(F_1 \Delta F_2) = 0$.

Теорема 4. *Если* $\{E_n\}$ *— последовательность непересекающихся множеств из* **H**(S), *то*

$$\mu_*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(E_n).$$

Доказательство. Пусть F_n — измеримое ядро множества E_n, n=1, 2, ...; тогда, в силу счетной аддитивности μ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) \leqslant \mu_*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big).$$

Теорема 5. *Если* $A \in \mathbf{H}(\mathbf{S})$, *а* $\{E_n\}$*—последовательность непересекающихся множеств из* S, *такая, что* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, *то*

$$\mu_*(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A \cap E_n).$$

Доказательство. Если *F*— измеримое ядро множества *A* ∩*E,* то

$$\mu_*(A \cap E) = \mu(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(F \cap E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A \cap E_n).$$

Обратное неравенство имеет место в силу теоремы 4.

Теорема 6. *Если* $E \in \bar{\mathbf{S}}$, *то*

$$\mu^*(E) = \mu_*(E) = \bar{\mu}(E).$$

Обратно, если $E \in \mathbf{H}(\mathbf{S})$ *и*

$$\mu^*(E) = \mu_*(E) < \infty,$$

то $E \in \bar{\mathbf{S}}$.

Доказательство. Если $E \in \bar{\mathbf{S}}$, то как верхняя грань, фигурирующая в теореме 1, так и нижняя грань в теореме 2 § 3.7 достигаются функцией $\bar{\mu}$ на множестве *E.* Чтобы доказать обратное утверждение, возьмем измеримое ядро и измеримую оболочку множества *E,* обозначив их соответственно *A* и *B*. Так как $\mu(A) = \mu_*(E) < \infty$, то

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A) = \mu^*(E) - \mu_*(E) = 0,$$

и требуемый результат вытекает из полноты меры $\bar{\mu}$ в $\bar{\mathbf{S}}$ (см. теорему 3 § 3.5, и упр. 6 § 3.8).

Теорема 7. *Если E и F — непересекающиеся множества из* **H(S)**, *то*

$$\mu_*(E \cup F) \leqslant \mu_*(E) + \mu^*(F) \leqslant \mu^*(E \cup F).$$

Доказательство. Пусть *A*—измеримая оболочка множества *F,* а *B*—измеримое ядро множества *E* ∪ *F,* Так как $B - A \subset E$, то

$$\mu_*(E \cup F) = \mu(B) \leqslant \mu(B - A) + \mu(A) \leqslant \mu_*(E) + \mu^*(F).$$

Пусть теперь *A*— измеримое ядро множества *E*, а *B* — измеримая оболочка множества *E* ∪ *F*. Тогда $B - A \supset F$ и

$$\mu^*(E \cup F) = \mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geqslant \mu_*(E) + \mu^*(F).$$

Теорема 8. *Если* $E \in \bar{\mathbf{S}}$, *то, каково бы ни было подмножество A пространства* X_y

$$\mu_*(A\cap E)+\mu^*(A'\cap E)=\bar{\mu}(E).$$

Доказательство. Применив теорему 7 к множествам $A\cap E$ и $A'\cap E$, получим

$$\mu_*(E)\leqslant\mu_*(A\cap E)+\mu^*(A'\cap E)\leqslant\mu^*(E).$$

Но $E\in\bar{\mathbf{S}}$, поэтому, в силу теоремы 6,

$$\mu_*(E)=\mu^*(E)=\bar{\mu}(E).$$

Результаты этого параграфа позволяют наметить еще один подход к построению расширения меры $\bar{\mu}$, которым часто пользуются. Пусть μ — σ-конечная мера на некотором кольце **R**, μ * — индуцированная ею внешняя мера в **H (R)**; тогда для любого *E* конечной меры из **R** и для любого *A* из **H(R)**

$$\mu_*(A\cap E)=\mu(E)-\mu^*(A'\cap E).$$

Это равенство может служить для определения внутренней меры, если мы покажем, что любые два множества *E* и *F* конечной меры из **R**, такие, что $A\cap E=A\cap F$, удовлетворяют условию $\mu(E)-\mu^*(A'\cap E)=\mu(F)-\mu^*(A'\cap F)$. В самом деле, тогда можно сказать,
что множество *E* из **H(R)**, имеющее конечную внешнюю меру, измеримо, если $\mu_*(E)=\mu^*(E)$. Читатель сможет провести это построение во всех подробностях с помощью приемов, развитых в этой главе.

1. Имеют ли место для μ_* свойства, сформулированные в упр. 4 § 3.7 для μ *?
2. При некоторых дополнительных условиях для внутренних мер справедливо предложение, двойственное тому, которое сформулировано в упр. 4 § 3.7; буквально это предложение на внутренние меры не распространяется (см. упр. 5 § 3.7).

3. Если *E*— множество конечной меры из $\bar{\mathbf{S}}$ и $F\subset E$, то из $\bar{\mu}(E)=$
$=\mu^*(F)+\mu^*(E-F)$ следует, что $F\in\bar{\mathbf{S}}$. Другими словами, испытывать *F* на измеримость можно посредством одного фиксированного множества (содержащего *F)* из $\bar{\mathbf{S}}$, вместо того чтобы прибегать к всевозможным *A* из **H (S)**. [Указание. Можно воспользоваться теоремой 8.]

4. Верен ли для внутренних мер аналог предложения, сформулированного в упр. 6 § 3.5?

5.Если $E \in$ **H(S)** и F—измеримая оболочка множества E, то $\bar{\mu}(F \cap M) = \mu^*(E \cap M)$, каково бы ни было измеримое множество M. (Указание. Применить теорему 8 к множествам $\bar{E} = F \cap M$ и $A = E'$.)Обратно, если множество F обладает этим свойством и $E \subset F \in \mathbf{S}$,то F служит измеримой оболочкой множества E. Подобным же образом, F представляет собой измеримое ядро множества E тогда и только тогда, когда $E \supset F \in S$ и

$\bar{\mu}(F \cap M) = \mu_*(E \cap M)$ для любого M из $\bar{\mathbf{S}}$.

3.10. Мера множества

алгебраическими операциями и с заданным на каждом множестве отношении линейным порядком. Числовые пространства — это числовые множества вместе с функцией расстояния, заданной на соответствующем множестве.

В самом общем случае, **числовая функция** — это функция, принимающая значения в области вещественных чисел и которая задана на произвольном (чаще всего) метрическом пространстве. Такова, например, индикаторная или характеристическая функция множества. Другой пример числовой функции — это функция расстояния (или, что то же самое, метрика).

Числовые функции, **заданные на множестве вещественных или комплексных чисел** называются функциями вещественного или комплексного переменного и являются предметом рассмотрения в *анализе*:

- *вещественнозначные функции вещественного переменного* рассматриваются в *математическом анализе,*
- *комплекснозначные функции комплексного переменного* рассматриваются в *комплексном анализе*.

Важнейший предмет рассмотрения в анализе — представление числовых функций в виде системы приближений (числовых и функциональных рядов).

Числовые функции обладают как общими свойствами, которыми могут обладать отображения произвольных метрических пространств (например, непрерывность), так и рядом свойств, непосредственно связанных с природой числовых пространств. Таковы свойства

- *дифференцируемости*, *интегрируемости*, *суммируемости*, *измеримости* (для произвольных числовых функций);

а, также, свойства

- *чётности* (*нечётности*), *монотонности* (для вещественнозначных функций вещественного переменного);
- *аналитичности, многолистности* (для комплекснозначных функций комплексного переменного).

Определения

Пусть задано множество X с некоторым выделенным классом подмножеств $\mathcal{F}$, предполагается, что данный класс подмножеств является иногда кольцом множеств или алгеброй множеств, в наиболее общем случае — полукольцом множеств.

Функция $\mu\colon \mathcal{F} \to [0,\ \infty]$ называется **мерой** (иногда **объёмом**), если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $\mu(\varnothing) = 0$ — мера пустого множества равна нулю;
2. Для любых непересекающихся множеств $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \varnothing$

   $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ — мера объединения непересекающихся множеств равна сумме мер этих множеств (*аддитивность, конечная аддитивность*).

Первая аксиома является удобной, но в некотором смысле «избыточной»: достаточно предположить что существует хотя бы одно множество с *конечной* мерой, из чего будет следовать, что мера пустого множества будет равна нулю (в противном случае добавление к любому множеству конечной меры пустого множества изменило бы меру, несмотря на то, что множество не изменилось).

Непосредственно из второй аксиомы (в случае кольца множеств) следует, что мера объединения любого *конечного* числа непересекающихся множеств равна сумме мер этих множеств:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

В случае определения над полукольцом множеств данное свойство конечной аддитивности обычно принимается вместо второй аксиомы, так как из попарной аддитивности конечная аддитивность в общем случае не следует.

Счётно-аддитивная мера

Из (конечной) аддитивности меры в общем случае не следует, что аналогичное свойство выполнено и для *счетного* объединения непересекающихся множеств. Выделяют специальный важный класс мер, называемых *счетно-аддитивными* мерами.

Пусть задано множество X с выделенной σ-алгеброй $\mathcal{F}$.

Функция $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, \infty]$ называется *счётно-аддитивной* (или *σ-аддитивной*) *мерой*, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $\mu(\varnothing) = 0.$
2. (*σ-аддитивность*) Если $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ — *счётное* семейство попарно непересекающихся множеств из $\mathcal{F}$, то есть $E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j$, то

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Замечания

- Если обратное не указано явно, то обычно подразумевается *счётно-аддитивная мера*.
- Очевидно, любая счётно-аддитивная мера является конечно-аддитивной, но не наоборот.
- Если мера всего пространства конечна, то есть $\mu(X) < \infty$, то такая мера сама по себе называется **конечной**. В противном случае мера **бесконечна**.

Измеримые и неизмеримые множества

- Обычно измеримые относительно заданной меры множества составляют собственный подкласс в классе всех подмножеств пространства X. И хотя существует несколько общих схем, позволяющих продолжать меры на большие классы измеримых множеств, иногда продолжение меры возможно лишь ценой утраты уникальных свойств исходной меры. Например, мера Лебега в конечномерных евклидовых пространствах является инвариантной относительно движений этого пространства. Всякое продолжение меры Лебега на класс всех подмножеств евклидова пространства уже не может быть инвариантным даже относительно одних только сдвигов (смотри Пример неизмеримого множества). Так что с практической точки зрения такие продолжения теряют всякую ценность.

- На прямой и двумерной плоскости существует бесконечное число расширений лебеговой меры с Борелевской σ-алгебры, на множество всех ограниченных подмножеств, сохраняющее *конечную* аддитивность меры и такую, что конгруэнтные множества имеют равную меру. Начиная с размерности 3, это сделать невозможно.

Связанные определения

- Тройка $(X,\ \mathcal{F},\ \mu)$ называется **пространством с мерой**, если $(X,\ \mathcal{F})$ есть измеримое пространство, а $\mu:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ — определённая на нём мера.
- Если μ является вероятностной мерой, то такое пространство с мерой называется вероятностным пространством.

Свойства

Из определения следует, что мера обладает как минимум следующими свойствами (предполагается, что мера задана как минимум на полукольце множеств):

- Мера пустого множества равна нулю

$$\mu(\varnothing)=0$$

  - Это свойство, либо предполагается в определении меры в качестве аксиомы, либо предполагается, что существует хотя бы одно множество, мера которого *конечна*. Непосредственно из этого и следует, что мера пустого множества должна быть равна нулю (иначе добавление пустого множества к множеству конечной меры увеличит меру этого множества, хотя множество при этом не изменится). Случай бесконечности меры всех множеств не представляет никакого интереса и практического смысла. Поэтому наличие множеств конечной меры подразумевается изначально.

  - Из равенства меры множества нулю в общем случае не следует, что это множество пусто. Принято говорить о *множествах меры ноль*.

- Монотонность — мера подмножества не больше меры самого множества

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$$

Это интуитивно понятное свойство — чем «меньше» множество, тем меньше его «размер».

- Мера разности вложенных множеств равна разности мер этих множеств

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

- Мера суммы (объединения) двух произвольных множеств равна сумме мер этих множеств минус мера их пересечения:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)$$

Свойства счетно-аддитивных мер

Счетно-аддитивные меры, в дополнение к указанным, обладают также следующими свойствами.

- Непрерывность: мера предела бесконечной последовательности вложенных множеств равна пределу последовательности мер этих множеств:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 ... \supseteq A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

  - Здесь предполагается что мера первого множества конечна.
- Также имеет место данное свойство для «обратной» последовательности множеств

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 ... \subseteq A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

- Счётная монотонность означает, что мера подмножества счетного объединения множеств не больше суммы мер этих множеств:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mu(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Продолжение мер

Определять меру в явном виде на каждом множестве из соответствующей сигма-алгебры (кольца или алгебры) множеств зачастую сложно и не нужно, поскольку меру достаточно определить на каком-нибудь классе измеримых множеств, а затем с помощью стандартных процедур (и при известных условиях) продолжить на кольцо, алгебру или сигма-алгебру множеств, порождённые этим классом.

Продолжение с полукольца

Класс измеримых множеств по своей структуре должен быть кольцом множеств (если мера аддитивна) или сигма-алгеброй множеств (если мера счётно-аддитивна), однако для задания меры, в обоих случаях её достаточно определить на полукольце множеств — тогда мера единственным образом может быть продолжена на минимальное кольцо (минимальную сигма-алгебру) множеств, содержащее исходное полукольцо.

Пусть начальный класс измеримых множеств $\mathcal{F}_0$ имеет структуру полукольца: содержит пустое множество и для любых множеств A и B из $\mathcal{F}_0$ их разность допускает конечное разбиение на измеримые множества из $\mathcal{F}_0$, то есть найдётся конечный набор *непересекающихся* множеств $C_1, C_2, \ldots, C_n$ из $\mathcal{F}_0$, таких что

$$A \setminus B = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n.$$

Пусть $\mathcal{F}$ означает класс всех подмножеств рассматриваемого пространства, допускающих конечное разбиение на множества из $\mathcal{F}_0$. Класс $\mathcal{F}$ замкнут относительно операций разности, пересечения и объединения множеств, и таким образом, является кольцом множеств, содержащим $\mathcal{F}_0$ (причём, очевидно, минимальным). Всякая аддитивная функция μ на $\mathcal{F}_0$ однозначно продолжается до аддитивной функции на $\mathcal{F}$, если и только если её значения согласованы на $\mathcal{F}_0$. Это требование означает, что для любых наборов непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $B_1, B_2, \ldots, B_m$ из $\mathcal{F}_0$, если совпадает их объединение, то должна совпадать и сумма их мер:

Если $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, то $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)$.

Пример

Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — классы измеримых множеств на пространствах X_1 и X_2, имеющие структуру полукольца. Множества вида $A \times B$, где $A \in \mathcal{F}_1$, $B \in \mathcal{F}_2$ образуют полукольцо $\mathcal{F}$ множеств на пространстве $X = X_1 \times X_2$.

Если на $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ заданы меры μ_1 и μ_2, то на $\mathcal{F}$ определена аддитивная функция $\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$, удовлетворяющая требованию согласованности. Её продолжение на минимальное кольцо, содержащее $\mathcal{F}$, называется прямым произведением мер μ_1 и μ_2 и обозначается $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. Если исходные меры были сигма-аддитивны на своих областях определения, то и мера μ будет сигма-аддитивной. Эта мера используется в теории кратных интегралов (смотри Теорема Фубини).

Теорема Тонелли — Фубини

и

$$\iint\limits_{X_1\times X_2} f(x_1,\ x_2)\,\mu_1\otimes\mu_2(dx_1\,dx_2) = \int\limits_{X_2}\left[\,\int\limits_{X_1} f(x_1,\ x_2)\,\mu_1(dx_1)\right]\,\mu_2(dx_2).$$

Частные случаи

Теория вероятностей

Пусть $(\Omega_i,\ \mathcal{F}_i,\ \mathbb{P}_i),\ i=1,\ 2$ — вероятностные пространства, и $X\colon \Omega_1\times\Omega_2\to\mathbb{R}$ — случайная величина на $(\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2,\ \mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2)$. Тогда

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}[X]\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}[X]\right],$$

где индекс обозначает вероятностную меру, относительно которой берётся математическое ожидание.

Математический анализ

Пусть $f\colon\ D=[a,\ b]\times[c,\ d]\to\mathbb{R}$ функция двух переменных, интегрируемая по Риману на прямоугольнике $[a,\ b]\times[c,\ d]$, то есть $f\in\mathbb{R}(D)$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,\ y)\,dy\right]\,dx = \int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx\right]\,dy,$$

где интеграл в левой части двумерный, а остальные повторные одномерные.

Доказательство

Любое разбиение λ множества $[a,\ b]\times[c,\ d]$ получено некоторыми разбиениями λ_x отрезка $X=[a,\ b]$ и λ_y отрезка $[c,\ d]$, при этом объём любого прямоугольника $X_i\times Y_j$ определяется $V\left(X_i\times Y_j\right)=\left|X_i\right|\cdot\left|Y_j\right|$, где X_i, Y_j — некоторые частичные отрезки разбиений. Тогда рассмотрим следующие оценки интеграла

$$\int\limits_X dx\left[\int\limits_Y f\left(x,y\right)\,dy\right]\qquad(*)$$

и нижних и верхних интегральных сумм функции $\mathcal{L}\left(f,\lambda\right)$ и $\mathcal{U}\left(f,\lambda\right)$:

$$\mathcal{L}\left(f,\lambda\right)=\sum_{i,j}\inf_{x\in X_i,y\in Y_j}f\left(x,y\right)V\left(X_i\times Y_j\right)\le\sum_i\inf_{x\in X_i}\left(\sum_i\inf_{y\in Y_j}f\left(x,y\right)\left|Y_j\right|\right)\left|X_i\right|$$

$$\sum_i\inf\left(\int\limits_Y f\left(x,y\right)\,dy\right)\left|X_i\right|\le\int\limits_X dx\int\limits_Y f\left(x,\ y\right)\,dy\le\sum_i\sup\left(\int\limits_Y f\left(x,y\right)\,dy\right)\left|X_i\right|$$

$$\mathcal{U}\left(f,\lambda\right)=\sum_{i,j}\sup_{x\in X_i,y\in Y_j}f\left(x,y\right)V\left(X_i\times Y_j\right)\ge\sum_i\sup_{x\in X_i}\left(\sum_i\sup_{y\in Y_j}f\left(x,y\right)\left|Y_j\right|\right)\left|X_i\right|$$

Тогда при интегрируемости f по $X\times Y$, то есть равенстве $\sup\limits_\lambda\mathcal{L}\left(f,\lambda\right)=\inf\limits_\lambda\mathcal{U}\left(f,\lambda\right)$ из вышеуказанных оценок интеграл $(*)$ также существует и имеет такое же значение, как и $\iint\limits_{X\times Y}f(x,\ y)\,dx\,dy.$

Вариации и обобщения

Сигма-конечная мера

С

Заряд (теория меры)

Заряд — вещественнозначная конечно-аддитивная функция множества, определённая на некоторой σ-алгебре, (например, борелевских подмножеств).

В отличие от обычной меры, под которой обычно понимают положительную σ-аддитивную функцию множества, заряд может принимать и отрицательные значения и не обязательно быть счётно-аддитивным.

При этом термин «заряд» и «конечно-аддитивная мера» — это синонимы.

Множество всех зарядов над произвольным множеством X с сигма-алгеброй Σ принято обозначать $ba(X,\ \Sigma)$.

Связанные определения

- Положительный заряд $\nu \in ba(X,\ \Sigma)$ называется **чисто конечно аддитивным**, если для любой положительной счётно-аддитивной меры μ из $0 \leqslant \mu \leqslant \nu$ вытекает, что $\mu = 0$.
    - Произвольный заряд чисто конечно аддитивен, если таковы заряды ν^+ и ν^-.
- Заряд λ **абсолютно непрерывен относительно меры** μ, если $(\forall A \in \Sigma)(\mu(A) = 0 \to \lambda(A) = 0)$

Свойства

- Множество всех зарядов образует нормированную решётку и даже, более того, K-пространство.
- Для любого заряда ν имеется положительная часть $\nu^+ \geqslant 0$ и отрицательная часть $\nu^- \leqslant 0$. Имеет место **разложение Хана — Жордана** $\nu = \nu^+ + \nu^-$, в силу которого

свойства зарядов могут быть выражены в терминах теории меры.

- Пусть $\mu \in ba(X, \Sigma)$. Любой заряд νединственным образом представим в виде суммы $\nu = \nu_1 + \nu_2$, где ν_1абсолютно непрерывна относительно μи ν_2дизъюнктна μ. Такое представление меры νпринято назвать разложением по Лебегу.
- Любой заряд $\nu \in ba(X, \Sigma)$единственным образом представим в виде суммы $\nu = \nu_{ca} + \nu_{pfa}$, где ν_{ca} — произвольная счётно-аддитивная мера, а ν_{pfa} — произвольная чисто конечно-аддитивный заряд. Такое разложение иногда называют **разложением Иосиды — Хьюита**.
- Пространство $ba(X, \Sigma)$является топологически сопряжённым к пространству измеримых и ограниченных функций, заданных над данным измеримым пространством.

Термин «заряд» был впервые введён А. Д. Александровым. Изучение заряда послужило толчком для развития конечно-аддитивной теории меры (40-е года XX века).

- Термин «мера» может означать любую конечно-аддитивную с областью значений абелева полугруппа. Для счётно-аддитивной меры естественная область значений — топологическая абелева полугруппа (топология нужна для того, чтобы можно было говорить о сходимости ряда из мер счётного числа измеримых частей, на которые в определении счётной аддитивности разбивается измеримое множество).
  - Примером нечисловой меры является мера со значениями в линейном пространстве, в частности, проекторонозначная мера, участвующая в геометрической формулировке спектральной теоремы.

Спектральная теорема

Спектральная теорема — наименование утверждений из класса теорем о линейных операторах или о матрицах в линейной алгебре и функциональном анализе, дающих условия, при которых оператор или матрица может быть диагонализирован, то есть представлен диагональной матрицей в некотором базисе (в бесконечномерных пространствах эта концепция о диагонализации требует некоторых уточнений). Вообще говоря, спектральная теорема выделяет класс линейных операторов, которые могут моделироваться операторами умножения[en] — простейшими операторами, какие только могут быть. Более абстрактно, спектральная теорема является утверждением о коммутативных C^*-алгебрах.

Примерами операторов, к которым может быть применена спектральная теорема являются самосопряжённые операторы или, более общо, — нормальные операторы в гильбертовых пространствах.

Спектральная теорема также даёт каноническое разложение объемлющего векторного пространства, называемое **спектральным разложением** или **разложением по собственным значениям**.

Спектральная теорема для ограниченных самосопряжённых операторов

Следующее обобщение, которое мы рассмотрим, касается ограниченных самосопряжённых операторов в гильбертовых пространствах. Такие операторы могут не иметь собственных значений (например, таков оператор A умножения на независимую переменную в пространстве $L^2[0,1]$, то есть $[A\phi](t) = t\phi(t)$.

Теорема
Пусть A является ограниченным самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве H. Тогда существует пространство с мерой (X, Σ, μ), вещественнозначная измеримая функция f на X и унитарный оператор $U : H \to L^2_\mu(X)$ такие, что $U^*TU = A$, где T является оператором умножения, то есть $[T\phi](x) = f(x)\phi(x)$.

С этой теоремы начинается обширная область исследований по функциональному анализу, называемая теорией операторов.

Аналогичная спектральная теорема справедлива для ограниченных нормальных операторов в гильбертовых пространствах. Единственная разница состоит в том, что теперь f может быть комплекснозначной.

Альтернативная формулировка спектральной теоремы позволяет записать оператор A как интеграл, взятый по спектру оператора, от координатной функции по проекционной мере. В случае когда рассматриваемый нормальный оператор является компактным, эта версия спектральной теоремы сводится к приведённой выше конечномерной спектральной теореме (с той оговоркой, что теперь линейная комбинация может содержать бесконечно много проекторов).

Спектральная теорема для общих самосопряжённых операторов

Многие важные линейные операторы, возникающие в математическом анализе, не являются ограниченными. Например, таковы дифференциальные операторы. Имеется спектральная теорема для самосопряжённых операторов, которая работает для неограниченных операторов. Например, любой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами унитарно эквивалентен оператору умножения (соответствующим унитарным оператором является преобразование Фурье, а соответствующий оператор умножения называют мультипликатором Фурье).

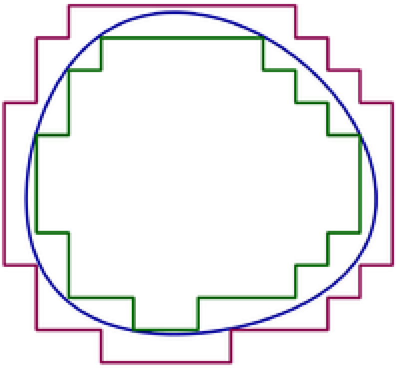
Примечания

1. ↑ Контрпример для случая полукольца: пусть $X = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, X\}$, и определим функцию μ следующим образом: $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = \mu(\{3\}) = \mu(\{4\}) = 1$, $\mu(\{1,2\}) = 2$, $\mu(X) = 3$. Нетрудно заметить, что попарная аддитивность и аксиомы полукольца здесь выполняются, но конечной аддитивности нет.

3.11. Мера Жордана

Мера Жордана — один из способов формализации понятия длины, площади и n-мерного объёма в n-мерном евклидовом пространстве.

Построение



Множество измеримо по Жордану если внутренняя мера Жордана равна внешней мере Жордана.

Мера Жордана $m\Delta$ параллелепипеда $\Delta = \prod_{i=1}^{n}[a_i,\ b_i]$ в $\mathbb{R}^n$ определяется как произведение

$$m\Delta = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Для ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ определяются:

- внешняя мера Жордана

$$m_e E = \inf \sum_{k=1}^{N} m\Delta_k, \quad \bigcup_k \Delta_k \supset E$$

- внутренняя мера Жордана

$$m_i E = \sup \sum_{k=1}^{N} m\Delta_k, \quad \bigcup_k \Delta_k \subset E, \quad \Delta_k \cap \Delta_m = \varnothing$$,

если $k \neq m,$

здесь $\Delta_1, \ \Delta_2, \ \ldots, \ \Delta_N$ — параллелепипеды описанного выше вида.

Множество E называется **измеримым по Жордану** (**квадрируемым** при $n = 2$, **кубируемым** при $n \geqslant 3$), если $m_e E = m_i E$. В этом случае мера Жордана равна $mE = m_e E = m_i E$.

Свойства

- Мера Жордана инвариантна относительно движений евклидова пространства.
- Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда его граница имеет меру Жордана нуль (или, что равносильно, когда его граница имеет меру Лебега нуль).
    - В частности, все множества, граница которых состоит из конечного числа гладких кривых и точек, измеримы по Жордану. Тем не менее, существуют множества, ограниченные простой замкнутой кривой Жордана, которые не измеримы по Жордану.
- Внешняя мера Жордана одна и та же для E и $\bar{E}$ (замыкания множества E) и равна мере Бореля $\bar{E}$.
- Измеримые по Жордану множества образуют кольцо, на котором мера Жордана конечная аддитивная функция.

Приведённое понятие меры ввели Пеано (1887) и Жордан (1892). Впоследствии понятие было обобщено Лебегом на более широкий класс множеств.

Пример множества, неизмеримого по Жордану

Рассмотрим меру Жордана m, определённую на $\mathbb{R}$и пусть $A = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$— множество точек единичного отрезка. Пусть $\mathbb{Q}$— подмножество рациональных точек множества A, тогда $\mathbb{Q}$ — неизмеримое по Жордану множество, так как $m_e\mathbb{Q} = 1,\ m_i\mathbb{Q} = 0,\ m_e\mathbb{Q} \neq m_i\mathbb{Q}$, то есть верхняя и нижняя мера Жордана не совпадают.

Основы теории меры Жордана

Ограничимся рассмотрением двумерных множеств. В плоскости зададим прямоугольную систему координат *x, y*.
Зададим натуральное число N и две системы прямых

$$x = kh, \quad y = lh \quad (k,\ l = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \quad h = 2^{-N},$$

определяющих в плоскости прямоугольную сетку, состоящую из квадратов со стороной h. Такую сетку мы будем называть h-сеткой (рис. 1).

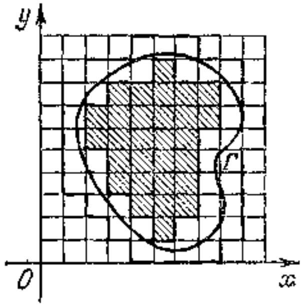


Рис. 1

Ясно, что при переходе от N к N+1l каждый квадрат h-сетки ($h = 2^{-N}$) разрезается на четыре равных квадратика. Последние образуют уже $h = 2^{-N-1}$ -сетку.

В плоскости зададим произвольное ограниченное множество Ω и для данного N введем два множества $\underline{\Omega}_N$ и $\overline{\Omega}_N$. Первое из них $\underline{\Omega}_N$ есть сумма (теоретико-множественная) квадратиков h-сетки ($h = 2^{-N}$), каждый из которых полностью принадлежит к Ω (на рис. 1 заштрихованная часть). Будем называть Ω_N *внутренней фигурой множества* $\overline{\Omega}$ (определяемой данной h-сеткой). Может случиться, что $\underline{\Omega}_N$ есть пустое множество, т. е. нет ни одного квадратика, который бы полностью принадлежал к Ω. Это имеет место, например, если *Ω* есть множество, состоящее из конечного числа точек, или если это есть кусок гладкой кривой.

Второе множество $\overline{\Omega}_N$ мы называем *внешней фигурой множества* Ω (определяемой дайной *h*-сеткой). Оно есть сумма квадратиков *h*-сетки, каждый из которых содержит в себе хотя бы одну точку Ω.

Очевидно,

$$\underline{\Omega}_N \subset \Omega \subset \overline{\Omega}_N,$$

и площади фигур $\underline{\Omega}_N$, $\overline{\Omega}_N$, которые мы будем обозначать через $|\underline{\Omega}_N|$, $|\overline{\Omega}_N|$, удовлетворяют неравенству

$$|\underline{\Omega}_N| \leqslant |\overline{\Omega}_N| \qquad (N=1,\ 2,\ \ldots).$$

Если $\underline{\Omega}_N$ —пустое множество, то считают $|\underline{\Omega}_N|=0$. Нетрудно видеть, что

$$\underline{\Omega}_1 \subset \underline{\Omega}_2 \subset \underline{\Omega}_3 \subset \ldots \subset \Omega \subset \ldots \subset \overline{\Omega}_3 \subset \overline{\Omega}_2 \subset \overline{\Omega}_1,$$

откуда

$$|\underline{\Omega}_1| \leqslant |\underline{\Omega}_2| \leqslant |\underline{\Omega}_3| \leqslant \ldots \leqslant |\overline{\Omega}_3| \leqslant |\overline{\Omega}_2| \leqslant |\overline{\Omega}_1|.$$

Таким образом,

$$|\underline{\Omega}_N| \leqslant |\overline{\Omega}_M|,$$

каковы бы ни были натуральные числа *N* и *M*.

Если зафиксировать *M,* то получится, что числа $|\underline{\Omega}_N|$ при неограниченном возрастании *N* не убывают, оставаясь не большими числа $|\overline{\Omega}_M|$. Это показывает, что существует предел

$$\lim_{N\to\infty} |\underline{\Omega}_N| \leqslant |\overline{\Omega}_M|.$$

Его называют *внутренней мерой множества* Ω и обозначают так:

$$\lim_{N\to\infty} |\underline{\Omega}_N| = m_i\Omega.$$

Это вполне определенное число, не зависящее от *N*. Мы получили неравенство

$$m_i\Omega \leqslant |\overline{\Omega}_M| \qquad (M=1,\ 2,\ \ldots),$$

где числа $|\overline{\Omega}_M|$ монотонно не возрастают при неограниченном возрастании *M*. Но тогда существует предел

$$\lim_{M\to\infty} |\overline{\Omega}_M| \geqslant m_i\Omega,$$

который называют *внешней мерой Жордана* множества Ω и обозначают через $m_e\,\Omega$.

Итак, *произвольное ограниченное множество* Ω *плоскости имеет внутреннюю и внешнюю меры* $m_i\Omega$ *и* $m_e\Omega$. *Это неотрицательные числа, удовлетворяющие неравенству* $m_i\Omega \le m_e\Omega$.

Если на самом деле имеет место равенство, то Ω называют *измеримым по Жордану в двумерном смысле* и число

$$m\Omega = m_i\Omega = m_e\Omega$$

называют *двумерной мерой* Ω *по Жордану*

Меру Жордана мы будем называть также и просто *мерой*. Итак, множество Ω измеримо (по Жордану), если для него

$$\lim_{N\to\infty} |\underline{\Omega}_N| = \lim_{N\to\infty} |\overline{\Omega}_N|. \tag{1}$$

Обозначим через Г границу множества Ω (Г = ∂Ω). Чтобы получить совокупность квадратиков сетки, покрывающих Г или, как мы будем говорить, чтобы получить фигуру, покрывающую Г (см. рис. 1), надо из фигуры $\overline{\Omega}_N$ вычесть в теоретико-множественном смысле фигуру $\underline{\Omega}_N$ и замкнуть полученное множество

$$\overline{\Gamma}_N = \overline{\overline{\Omega}_N \setminus \underline{\Omega}_N}.$$

Очевидно, площадь (двумерная мера) $\overline{\Gamma}_N$ равна

$$|\overline{\Gamma}_N| = |\overline{\Omega}_N| - |\underline{\Omega}_N|.$$

Из (1) следует:

$$\lim_{N\to\infty} |\overline{\Gamma}_N| = \lim_{N\to\infty} |\overline{\Omega}_N| - \lim_{N\to\infty} |\underline{\Omega}_N| = 0. \tag{2}$$

Обратно, из равенства

$$\lim_{N\to\infty} |\overline{\Gamma}_N| = 0, \tag{3}$$

учитывая, что пределы

$$\lim_{N\to\infty} |\overline{\Omega}_N| \text{ и } \lim_{N\to\infty} |\underline{\Omega}_N|$$

существуют следует равенство (1), т. е. измеримость Ω.

Заметим, что предел (3) есть внешняя мера Г, т, е,

$$m_e\Gamma = 0.$$

Но $0 \leqslant m_i\Gamma \leqslant m_e\Gamma$, поэтому и

$$m_i\Gamma = m_e\Gamma = 0.$$

Мы доказали важное утверждение: *для того чтобы множество* Ω *плоскости было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы мера его границы равнялась нулю* ($m\Gamma = 0$).

Ниже будет показано, что *кусочно-гладкая кривая имеет двумерную меру нуль.* Но тогда *область* Ω*, имеющая кусочно-гладкую границу, измерима в двумерном смысле по Жордану.*

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Множество Ω, состоящее из одной точки, имеет днумерную меру нуль ($m\Omega = 0$). Точка может принадлежать самое большее к четырем квадратикам h-сетки, их общая площадь стремится к нулю при $N\to\infty$ и, следовательно, $m_e\Omega=0$, но $0\le m_i\Omega\le m_e\Omega$, поэтому $m_i\Omega = m_e\Omega = m\Omega = 0$.

Пример 2. *Непрерывная кривая* Γ (рис. 2) $y=f(x)$ $(a<x<b)$ *имеет двумерную меру нуль* ($m\Gamma=0$).

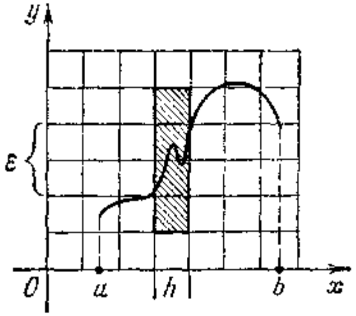


Рис. 2

В самом деле, вследствие равномерной непрерывности f на $[a, b]$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $| f(x'') — f(x') | < \varepsilon$ для всех $x', x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x'—x''| < \delta$. Найденное $\delta > 0$ можно уменьшить, как мы хотим. Будем считать, что $\delta < \varepsilon$, Зададим h -сетку с

$$h=2^{-N}<\delta$$

и рассмотрим какой-либо столбик из квадратов сетки, содержащих в себе точки Γ. Его высота не превышает $\varepsilon +2h$ (на рис. 2 при $\varepsilon = 2h$ выделенный столбик включает четыре квадратика h-сетки, содержащих точки Γ и $\varepsilon+2h = 4h$), а площадь не превышает $(\varepsilon +2h)h$. Общая площадь столбиков, покрывающих Γ, не превышает

$$(\varepsilon+2h)\,h\cdot\frac{K}{h}=(\varepsilon+2h)\,K\leqslant 3\varepsilon K,$$

где K— длина некоторого отрезка, содержащего в себе отрезок $[a, b]$.

Это показывает, что общая площадь $|\Gamma_N|$ квадратиков, покрывающих кривую Γ, при достаточно большом N может быть сделана меньшей наперед заданного как угодно малого положительного числа, и, следовательно, внешняя мера Г, тем более внутренняя, равна нулю. Но тогда

$$m\Gamma = 0.$$

Так как *сумма конечного числа множеств, имеющих меру нуль,* очевидно, *имеет меру нуль,* то из примера 1 следует, что *двумерная мера множества, состоящего из конечного числа точек, равна нулю.*

А из примера 2 следует, что *гладкая кривая*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{4}$$

имеет двумерную меру нуль (рис. 3).

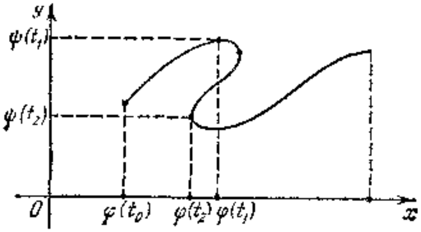


Рис. 3.

Дело в том, что если Г—гладкая кривая на [*a*, *b*], то отрезок [*a*, *b*] можно разделить на конечное число отрезков точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

так, что на каждом частичном отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ одно из двух уравнений (4) можно разрешить относительно *t* и подставить во второе. В результат получим, что соответствующий кусок Γ_j кривой Г описывается либо уравнением вида

$$y = f(x) \qquad (x \in [c, d]),$$

либо уравнением вида

$$x = g(y) \qquad (y \in [p, q]),$$

где функции *f* и g непрерывны на соответствующих отрезках. Но тогда, как мы знаем из примера 2,

$$m\Gamma_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, r).$$

Поэтому, так как Г есть сумма конечного числа кусков Γ_j,

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{r} \Gamma_j,$$

каждый из которых имеет меру нуль, то *m*F = 0.

Отметим, что если *два множества* Ω_1 *и* Ω_2 *измеримы, то измеримы также их сумма* $\Omega_1+\Omega_2$, *разность* $\Omega_1\backslash\Omega_2$ *и пересечение* $\Omega_1\Omega_2=\Omega_1\cap\Omega_2$.

В самом деле, обозначим через Г (E) границу множества E. На рис. 4 изображены два множества Ω_1 и Ω_2. Очевидно,

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(\Omega_1+\Omega_2) &\subset \Gamma(\Omega_1)+\Gamma(\Omega_2),\\ \Gamma(\Omega_1\diagdown\Omega_2) &\subset \Gamma(\Omega_1)+\Gamma(\Omega_2),\\ \Gamma(\Omega_1\Omega_2) &\subset \Gamma(\Omega_1)+\Gamma(\Omega_2). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

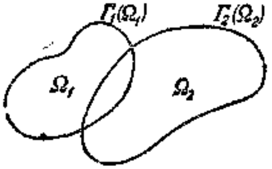


Рис. 4.

Если Ω_1 и Ω_2 измеримы, то $m\Gamma(\Omega_1)=0$, $m\Gamma(\Omega_2)=0$, но тогда и меры левых частей (5) равны нулю, что показывает, что множества $\Omega_1+\Omega_2$, $\Omega_1\diagdown\Omega_2$, $\Omega_1\Omega_2$ измеримн.

Здесь мы воспользовались очевидным свойством меры. Если множество ω имеет меру нуль, то и любое его подмножество также имеет меру нуль.

Наконец, если Ω_1 и Ω_2 — измеримые множества, пересекающиеся разве что по своим границам, то

$$m(\Omega^1+\Omega^2)=m\Omega^1+m\Omega^2. \tag{6}$$

В самом деле, очевидно (рис. 5)

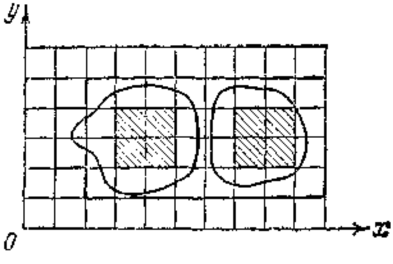


Рис. 5.

$$\underline{\Omega}^1_N+\underline{\Omega}^2_N\subset\underline{(\Omega^1+\Omega^2)}_N\subset\overline{(\Omega^1+\Omega^2)}_N\subset\overline{\Omega}^1_N+\overline{\Omega}^2_N,$$

и так как

$$\lim_{N\to\infty}|\underline{\Omega}^1_N| = \lim_{N\to\infty}|\overline{\Omega}^1_N| = m\Omega^1,$$

$$\lim_{N\to\infty}|\underline{\Omega}^2_N| = \lim_{N\to\infty}|\overline{\Omega}^2_N| = m\Omega^2,$$

то, очевидно,

$$\lim_{N\to\infty}|\underline{(\Omega^1+\Omega^2)}_N| = \lim_{N\to\infty}|\overline{(\Omega^1+\Omega^2)}_N| = m\Omega^1 + m\Omega^2,$$

что доказывает (6).

Отметим, что если область Ω измерима, то ее мера Жордана равна мере ее замыкания:

$$m\Omega = m\overline{\Omega}.$$

В самом деле, $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$, где Γ —граница Ω и $m\overline{\Omega} = m\Omega + m\Gamma$, где $m\Gamma = 0$.

Пример 3. Множество ω, состоящее из всех рациональных чисел отрезка [0, 1], не измеримо по Жордану: $m_i\omega = 0$, $m_e\omega = 1$.

В трехмерном случае теория меры Жордана аналогична. Теперь вводится прямоугольная система координат *x, y, z* и три семейства параллельных плоскостей

$$\begin{aligned} &x = kh && (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),\\ &y = lh && (l = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),\\ &z = mh && (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \end{aligned}$$

делящих пространство на кубики с ребром $h = 2^{-N}$ (N=1,2, ...). Такое разбиение пространства мы снова называем h-сеткой (трехмерной).

Пусть Ω есть ограниченное множество точек, принадлежащих пространству. Обозначим через $\underline{\Omega}_N$ *внутреннюю фигуру множества* Ω — совокупность кубиков сетки, полностью принадлежащих Ω, и через $\overline{\Omega}_N$ —*внешнюю фигуру множества* Ω — совокупность кубиков сетки, каждый из которых содержит хотя бы одну точку Ω.

Снова заключаем, что

$$\underline{\Omega}_1 \subset \underline{\Omega}_2 \subset \underline{\Omega}_3 \subset \ldots \subset \Omega,$$

$$\overline{\Omega}_1 \supset \overline{\Omega}_2 \supset \overline{\Omega}_3 \supset \ldots \supset \Omega,$$

откуда следует:

$$|\underline{\Omega}_1| \leqslant |\underline{\Omega}_2| \leqslant |\underline{\Omega}_3| \leqslant \ldots,$$

$$|\overline{\Omega}_1| \geqslant |\overline{\Omega}_2| \geqslant |\overline{\Omega}_3| \geqslant \ldots$$

и

$$|\underline{\Omega}_N| \leqslant |\overline{\Omega}_M|,$$

каковы бы ни были натуральные *N* и *M* Отсюда вытекает существование пределов

$$\lim_{N\to\infty}|\underline{\Omega}_N| \leqslant \lim_{N\to\infty}|\overline{\Omega}_N|.$$

Первый предел в этом неравенстве называют *внутренней* (трехмерной) *мерой* Ω*:*

$$m_i\Omega = \lim_{N\to\infty}|\underline{\Omega}_N|,$$

а второй—внешней *мерой* Ω*:*

$$m_e\Omega = \lim_{N\to\infty}|\overline{\Omega}_N|.$$

Таким образом,

$$m_i\Omega \leqslant m_e\Omega.$$

Если

$$m_i\Omega = m_e\Omega = m\Omega,$$

то множество Ω начинают *измеримым в трехмерном смысле по Жордану* и число $m\Omega$ называют его *трехмерной мерой.*

Рассуждениями, подобными тем, которые велись в связи о равенствами (1), (2), (3), доказывается, что множество измеримо в трехмерном смысле тогда и только тогда когда его граница имеет трехмерную меру нуль.

Мы не будем формулировать дальнейшие свойства измеримых в трехмерном смысле множеств. Они аналогичны отмеченным выше свойствам множеств, измеримых в двумерном смысле.

Остановимся только на объяснении того, что кусочно-гладкая поверхность имеет трехмерную меру нуль. Такая поверхность состоит из конечного числа кусков S, пересекающихся разве что по своим краям, каждый из которых при соответствующем переобозначении координат определяется уравнением

$$z = f(x, y) \qquad ((x, y) \in \overline{g}),$$

где $\overline{g}$ —замыкание некоторой ограниченной в плоскости *x, y* области.

Зададим ε > 0 и подберем δ > 0 так, чтобы

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$$

для всех точек $(x', y'), (x'', y'') \in \overline{g}$, находящихся на расстоянии друг от друга

$$|(x', y') - (x'', y'')| < \delta.$$

Считаем δ < ε и берем h-сетку с $h = 2^{-N} < \delta$. Рассматриваем какой-либо столбик из кубиков сетки, содержащих в себе точки S. Его высота не превышает $\varepsilon + 2h$, а объем не превышает $(\varepsilon + 2h)\, h^2$. Общий объем всех таких столбиков, покрывающих S, не превышает

$$(\varepsilon + 2h)\, h^2 \cdot \frac{K}{h^2} = (\varepsilon + 2h)\, K < 3\varepsilon K. \qquad (7)$$

Злесь K есть площадь квадрата Δ, покрывающего множество $\overline{g}$. Правая часть (5.253) может быть взята как угодно малой, что доказывает, что трехмерная мера $mS = 0$.

Можно ввести по аналогии понятие n-мерной меры для множеств пространства R_n и показать, что гладкая поверхность в R_n имеет n-мерную меру нуль.

3.12. ЛЕБЕГОВСКЛЯ МЕРА

В этом параграфе мы применим общие методы теории продолжения меры к специальному случаю, рассмотренному в § 3.2, и установим относящиеся к этому случаю классические результаты; попутно будет введена терминология, установившаяся в этом круге вопросов.

функций замкнут относительно основных аналитических операций, включая операцию предельного перехода. В 1904 году Лебег обобщил свою теорию, сняв условие ограниченности функции.

Уже в следующем году (1905) Дж. Витали показал, что мера, удовлетворяющая трём приведенным выше условиям, не охватывает всех ограниченных вещественных множеств: он построил множество, не имеющее меры с указанными свойствами. Более того, в 1914 году Хаусдорф доказал, что даже заменив требование счётной аддитивности на более слабое условие конечной аддитивности, мы всё равно обнаружим в трёхмерном пространстве ограниченные неизмеримые множества. Для прямой, как обнаружил Банах в 1923 году, универсальная конечно-аддитивная мера существует и даже не единственна.

Исследования Лебега нашли широкий научный отклик, их продолжили и развили многие математики: Э. Борель, М. Рис, Дж. Витали, М. Р. Фреше, Н. Н. Лузин, Д. Ф. Егоров и др. Было введено понятие сходимости по мере (1909).

Труды Лебега имели ещё одно важное концептуальное значение: они были полностью основаны на спорной в те годы канторовской теории множеств, и плодотворность лебеговской теории послужила веским аргументом для принятия теории множеств как фундамента математики.

Теорема (Лебег). *Существует единственная борелевская мера μ_n в Rn $\mathbb{R}^n$, инвариантная относительно параллельных переносов и такая, что мера стандартного единичного куба $I^n = [0,1]^n$ равна 1.*
Мера из теоремы называется *n-мерной мерой Лебега* или *n-мерным евклидовым объемом.* Теорема Лебега будет доказана позднее (окольным путем). Более простые и "прямолинейные" доказательства можно найти в учебниках по анализу.
Замечание. На самом деле меру Лебега определяют на большей σ-алгебре, чем борелевская. Эта тонкость пока несущественна
Всюду в этом параграфе предполагается, что *X*—числовая прямая, **P**— класс всех ограниченных полузамкнутых интервалов вида *[a, b),* **S** — порожденное классом **P** σ-кольцо и μ— функция множества, заданная на **P** равенством $\mu([a,\ b)) = b - a.$
Примеры. Предполагая доказанным существование одномерной меры Лебега, найдем меры некоторых множеств.

1. Мера точки равна 0, так как в единичный отрезок помещается сколь угодно много точек.
2. Мера отрезка $[a, b]$ равна $b - a$. Для рационального $b - a$ это доказывается разбиением на отрезки длины 1/N, где N — знаменатель, в общем случае — приближением рациональными длинами снизу и сверху.
3. Мера множества рациональных чисел (как и любого счетного множества) равна 0.
4. Мера множества иррациональных чисел из отрезка [0,1] равна 1.
5. Мера стандартного канторовского множества равна 0.

Объемы некоторых множеств в $\mathbf{R}^n$.

1. Мера $(n - 1)$-мерного линейного подпространства (и любого его измеримого подмножества) равна 0.
2. Объем параллелепипеда с ребрами $a_1,..., a_n$, параллельными осям координат, равен произведению $a_1... a_n$. Доказывается аналогично вычислению меры отрезка на прямой.

Множества, принадлежащие σ-кольцу **S**, называются *борелевскими множествами* на прямой; согласно теоремам 5 §3.2 и1 §3.8, мы можем считать, что мера μ определена на всех борелевских множествах. Множества класса $\bar{\mathbf{S}}$ называются *множествами, измеримыми в смысле Лебега*, а мера $\bar{\mu}$ на $\bar{\mathbf{S}}$, являющаяся пополнением меры μ, — *лебеговской мерой.* Самоё меру μ также называют обычно лебеговской.

Так как вся прямая X представляет собой соединение счетного числа множеств из **P**, то $X \in$ **S**, так что σ-кольца **S** и $\bar{\mathbf{S}}$ оказываются даже σ-алгебрами. Очевидно, $\mu(X) = \infty$, но, так как μ конечна на **P**, то и μ на **S** и $\bar{\mu}$ на $\bar{\mathbf{S}}$ вполне σ-конечны. Некоторые другие свойства ∈ и $\bar{\mu}$ перечислены в следующих теоремах.

Теорема 1. *Всякое счетное множество представляет собой борелевское множество меры нуль.*

Доказательство. Для любого a $(-\infty < a < \infty)$ имеем

$$\{a\} = \{x : x = a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x : a \leqslant x < a + \frac{1}{n}\right\},$$

поэтому

$$\mu(\{a\}) = \lim_n \mu\left(\left[a,\ a+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

Таким образом, всякое одноточечное множество есть борелевское множество меры нуль. Так как борелевские множества образуют σ-кольцо и мера μ счетно-аддитивна, то мы прямо получаем утверждение теоремы.

Теорема 2. *Класс* S *борелевских множеств совпадает с σ-кольцом, порожденным классом* **U** *всех открытых множеств.*

Доказательство. Так как, каково бы ни было действительное число *a*, *{a}* есть борелевское множество, то из соотношения $(a,\ b) = [a,\ b) - \{a\}$ следует, что всякий ограниченный открытый интервал является борелевским множеством. Далее, всякое открытое множество представляет собой соединение счетного числа ограниченных открытых интервалов, поэтому $\mathbf{S} \supset \mathbf{U}$ и, следовательно, $\mathbf{S} \supset \mathbf{S}(\mathbf{U})$. Чтобы установить обратное включение, заметим, что, каково бы ни было действительное число *a,*

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n},\ a + \frac{1}{n}\right);$$

следовательно, $\{a\} \in \mathbf{S}(\mathbf{U})$. Из соотношения $[a,\ b) = (a,\ b) \cup \{a\}$ вытекает, что $\mathbf{P} \subset \mathbf{S}(\mathbf{U})$ и, следовательно,

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{P}) \subset \mathbf{S}(\mathbf{U}).$$

Теорема 3. *Если* **U** — *класс всех открытых множеств, то для любого множества E на прямой*

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\}.$$

Доказательство. Так как $\mu^*(E) = \inf\{\mu(F) : E \subset F \in \mathbf{S}\}$, то из соотношения $\mathbf{U} \subset \mathbf{S}$ следует, что

$$\mu^*(E) \leqslant \inf\{\mu(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\}.$$

С другой стороны, в силу определения μ^*, для любого положительного числа ε существует последовательность множеств $\{[a_n,\ b_n)\}$, принадлежащих **P**, такая, что

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n,\ b_n)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \leqslant \mu^*(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\ b_n\right) = U \in \mathbf{U}$$

и

$$\mu(U) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Утверждение теоремы вытекает из того, что ε произвольно.

Теорема 4. *Пусть T—взаимно-однозначное отображение всей числовой прямой самой на себя, определенное формулой* $T(x) = \alpha x + \beta,$ *еде* α *и* β *— действительные числа, причем* $\alpha \neq 0.$ *Если для любого множества E множество точек вида T*(*x*), *где* $x \in E$, *обозначить T(E), то*

$$\mu^*(T(E)) = |\alpha|\mu^*(E) \quad \text{и} \quad \mu_*(T(E)) = |\alpha|\mu_*(E).$$

При этом множество T(E) является борелевским или измеримым в смысле Лебега тогда и только тогда, когда множество E соответственно борелевское или измеримое в смысле Лебега.

Доказательство. Мы докажем эту теорему для случая α > 0. При α < 0 отображение *T* представляет собой результат наложения преобразований T_1 и T_2: $T(x) = T_1(T_2(x)),$ где $T_1(x) = |\alpha| x + \beta$ и $T_2(x) = -x.$ Читателю предоставляется доказать, что преобразование T_2 переводит борелевские множества в борелевские, а множества, измеримые в смысле Лебега, — в множества, измеримые в смысле Лебега, и что оно сохраняет как внутреннюю, так и внешнюю меру любого множества. Итак, предположим, что α>0. Пусть *T*(**S**) — класс множеств вида *T(E),* где $E \in \mathbf{S}$. Ясно, что *T*(**S**) представляет собой σ-кольцо, и нам нужно доказать, что $T(\mathbf{S}) = \mathbf{S}.$ Если $E = [a,\ b) \in \mathbf{P},$ то *E = T(E),* где

$$F = \left[\frac{a-\beta}{\alpha},\ \frac{b-\beta}{\alpha}\right) \in \mathbf{P};$$

таким образом, $E \in T(\mathbf{S})$ и, следовательно, $\mathbf{S} \subset T(\mathbf{S})$. Применив это же рассуждение к обратному преобразованию T^{1}, мы придем к соотношению $\mathbf{S} \subset T^{-1}(\mathbf{S})$. Подвергнув **S** и T^{1}(**S**) преобразованию T, мы получим $T(\mathbf{S}) \subset \mathbf{S}$, откуда T(**S**) = S.

Если для борелевских множеств E мы положим

$$\mu_1(E) = \mu\big(T(E)\big) \quad \text{и} \quad \mu_2(E) = \alpha\mu(E),$$

то функции μ_1 и μ_2 будут мерами на **S**. В том случае, когда $E = [a, b) \in \mathbf{P}$,

$$T(E) = [\alpha a + \beta, \ \alpha b + \beta)$$

и

$$\mu_1(E) = \mu\big(T(E)\big) = (\alpha b + \beta) - (\alpha a + \beta) = \alpha(b - a) =$$
$$= \alpha\mu(E) = \mu_2(E).$$

Согласно теоремам 5 § 3.2 и 1 §33.8, $\mu\big(T(E)\big) = \alpha\mu(E)$ для любого множества E из **S**.

Применив к отображению T^{1} выводы двух предыдущих абзацев, мы получим равенства

$$\mu^*\big(T(E)\big) = \inf\{\mu(F) : T(E) \subset F \in \mathbf{S}\} =$$
$$= \inf\{\alpha\mu\big(T^{-1}(F)\big) : E \subset T^{-1}(F) \in \mathbf{S}\} =$$
$$= \alpha \inf\{\mu(G) : E \subset G \in \mathbf{S}\} =$$
$$= \alpha\mu^*(E).$$

Взяв здесь всюду sup вместо inf, μ_* вместо μ^* и $\supset$ вместо $\subset$, придем к равенству

$$\mu_*\big(T(E)\big) = \alpha\mu_*(E),$$

где E — произвольное множество.

Пусть теперь E — множество, измеримое в смысле Лебега, и A — любое множество. Тогда

$$\mu^*\big(A \cap T(E)\big) + \mu^*\big(A \cap \big(T(E)\big)'\big) =$$
$$= \mu^*\big(T\big(T^{-1}(A) \cap E\big)\big) + \mu^*\big(T\big(T^{-1}(A) \cap E'\big)\big) =$$
$$= \alpha\,[\mu^*(T^{-1}(A) \cap E) + \mu^*(T^{-1}(A) \cap E')] =$$
$$= \alpha\mu^*\big(T^{-1}(A)\big) = \mu^*(A),$$

и мы видим, что $T(E)$ измеримо в смысле Лебега. Применив это же рассуждение к T^1 , мы завершим доказательство теоремы,

1. Класс борелевских множеств совпадает с σ-кольцом, порожденным классом **C** всех замкнутых множеств, и для любого множества E

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(C) : E \supset C \in \mathbf{C}\}.$$

2. Для всякого измеримого в смысле Лебега множества E существуют борелевские множества A и B, такие, что

$$A \subset E \subset B \quad \text{и} \quad \mu(B - A) = 0;$$

при этом A есть множество F_σ, а B — множество G_δ.

3. Всякое ограниченное множество имеет конечную внешнюю меру. Верно ли обратное утверждение?

4. Пусть M — множество рациональных чисел, заключенных в замкнутом единичном интервале X. Точки множества M каким-то образом занумерованы: $M = \{x_1, x_2, \dots\}$. Для любого ε>0 и для i = 1,2,... пусть $F_i(\varepsilon)$ означает открытый интервал длины $\frac{\varepsilon}{2^i}$ с центром в точке x_i; положим

$$F(\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i(\varepsilon), \qquad F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{n}\right).$$

Справедливы следующие утверждения:

а) Можно указать ε>0 и точку x из X таким образом, что $x \overline{\in} F(\varepsilon)$.

б) $F(\varepsilon)$— открытое множество и $\mu\left(F(\varepsilon)\right) \leqslant \varepsilon$.

в) Множество $X — F(\varepsilon)$ нигде не плотно.

г) Множество $X — F$ первой категории, и, следовательно, F несчетно, так как X представляет собой полное метрическое пространство (отсюда, в частности, следует, что $F \neq M$).

д) Мера множества F равна нулю.

Так как $F \supset M$, то из утверждения „д" вытекает, что M (как и всякое счетное множество) имеет меру нуль. Более интересно то, что обнаружено существование несчетного множества меры нуль (см. упр. 5).

5. Представим число x из замкнутого единичного интервала бесконечной троичной дробью:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}, \quad \alpha_n = 0,\ 1,\ 2, \quad n = 1,\ 2,\ \dots;$$

пусть *С*—множество тех *x,* в представлении которых такими дробями можно обойтись без цифры 1. (Заметим, что если вместо $\sum \frac{\alpha_n}{3^n}$ писать, по аналогии с десятичными дробями, $0,\alpha_1\alpha_2\ \ldots,$то, например, $\frac{1}{3} = 0{,}100\ldots = 0{,}222\ldots;$ поэтому $\frac{1}{3} \in C.$ В то же время $\frac{1}{2} = 0{,}111\ldots,$ и представить $\frac{1}{2}$ иначе в троичной системе невозможно, следовательно, $\frac{1}{2}\ \bar{\in} C.$) Возьмем последовательность открытых интервалов: $X_1 = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$— „средняя треть" замкнутого отрезка *X;* $X_2 = \left(\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right),\ \ X_3 = \left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right)$—„средние трети" двух отрезков, соединение которых есть $X - X_1;\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ X_7$— „средние трети" четырех отрезков, образующих $X - (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$, и т. д. Тогда справедливы следующие утверждения;

а) $C = X - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n.$ (Указание. Представить все *x* из *X* в виде $x = 0{,}\alpha_1\alpha_2\ \ldots$ таким образом, чтобы для каждого *x*, принадлежащего С, все соответствующие α_n были равны 0 или 2. Такое представление *x* единственно, и $x \in X_1$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = 1;\ \ x \in X_2 \cup X_3$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \neq 1,\ \alpha_2 = 1;\ x \in X_4 \cup X_5 \cup X_6 \cup X_7$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \neq 1,\ \alpha_2 \neq 1,\ \alpha_3 = 1$ и т. д.)

б) μ (С) = 0.

в) *С* нигде не плотно. (Указание. Предположите, что *X* содержит открытый интервал, не пересекающийся с $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n.$)

г) *С*—совершенное множество. (Указание. Никакие два интервала из последовательности X_1, X_2, ... не пересекаются.)

д) *С* имеет мощность континуума. (Указание. Поставим в соответствие числу *x* из С, представленному бесконечной троичной дробью $0,\alpha_1\alpha_2\ldots,$ в которой α_n = 0 или 2, число *y*, представляющееся бесконечной *двоичной* дробью $0,\beta_1\beta_2\ldots,$где $\beta_n = \frac{1}{2}\alpha_n.$ Это соответствие между *С* и *X* не взаимно-однозначно, но оно взаимно-

однозначно между иррациональными числами, входящими в С, и иррациональными числами интервала *X*, Иначе можно доказать это, опираясь на утверждение «г”.) *С* называется *канторовым множеством.*
6. Так как класс всех борелевских множеств имеет мощность континуума (см. упр. 9 §2.5), а всякое подмножество канторова множества измеримо в смысле Лебега (см. утверждение „б"), то существуют множества, измеримые в смысле Лебега и не являющиеся борелевскими множествами.
7. Множество точек замкнутого единичного интервала, изображаемых бесконечными двоичными дробями, в которых на всех четных местах стоят нули, измеримо в смысле Лебега и имеет меру нуль.
8. Пусть *X* — окружность в эвклидовой плоскости. На борелевских множествах в *X* можно единственным образом задать меру μ, инвариантную относительно всех вращений этой окружности и такую, что $\mu(X)=1$. (Множество на окружности назовем борелевским, если оно принадлежит σ-кольцу, порожденному классом всех открытых дуг этой окружности.)
9. Пусть g— конечная возрастающая непрерывная функция действительного переменного. Тогда на некотором σ-кольце $\mathbf{S}_g$, содержащем все борелевские множества, можно единственным образом задать полную меру $\bar{\mu}_g$, такую, что $\bar{\mu}_g([a,\ b)) = g(b) - g(a)$, и для всякого *E* из $\mathbf{S}_g$ существует борелевское множество *F*, для которого $\bar{\mu}_g(E \Delta F) = 0$ (см. упр. 3 § 3.2).

Мера $\bar{\mu}_g$ называется *мерой Лебега—Стильтьеса, порожденной* функцией g.

Единственность меры Лебега

Для завершения доказательстве теоремы Лебега осталось проверить единственность борелевской меры μ, удовлетворяющей условиям теоремы (т.е. инвариантной относительно параллельных переносов и нормированной единицей на стандартном единичном кубе).
Назовем *кирпичом* в $\mathbb{R}^n$ множество вида $I_1 \times I_2 \times \dots I_n$, где $I_1, \dots, I_n$ — ограниченные интервалы на прямой (замкнутые, открытые или полуоткрытые).

Свойства. 1. Любое открытое множество можно представить в виде объединения счетного набора кирпичей. Например, можно взять объединение всех кирпичей с рациональными координатами вершин, содержащихся в данном множестве.
Следовательно, σ-алгебра, порожденная кирпичами, — это борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$.
2. Если μ — борелевская мера в $\mathbb{R}^n$, инвариантная относительно параллельных переносов и нормированная на стандартном кубе в $\mathbb{R}^n$, то мера кирпича $I_1 \times .. .I_n$ равна произведению длин интервалов $I_1,..., I_n$. Это доказано ранее.
Теперь единственность меры Лебега следует из теоремы о единственности продолжения меры с полукольца.

Продолжение меры с полукольца

Определение. Система множеств называется *кольцом,* если она замкнута относительно бинарных операций объединения, пересечения и разности.
Система $\mathfrak{P}$ множеств называется *полукольцом,* если для любых $A, B \in \mathfrak{P}$ верно, что (1) $A \cap B \in \mathfrak{P}$; (2) $A \setminus B$ есть дизъюнктное объединение нескольких (конечного набора) множеств из $\mathfrak{P}$.
Примеры полуколец. 1. Всевозможные ограниченные интервалы на прямой.
2. Интервалы вида $[a, b)$ на прямой.
3. Произведение полуколец — полукольцо. В частности, множество кирпичей в $\mathbb{R}^n$— полукольцо.
Замечание. Если $\mathfrak{P}$ — полукольцо, то множество всех конечных дизъюнктных объединений элементов $\mathfrak{P}$ — кольцо.
Теорема (о единственности продолжения меры с полукольца). *Пусть X — произвольное множество, $\mathfrak{P} \subset 2^X$ — полукольцо,—$\mathfrak{A}$ порождаемая им σ-алгебра. Пусть μ и μ' — две меры, определенные на $\mathfrak{A}$ и совпадающие на $\mathfrak{P}$. Предположим, что X покрывается счетным набором множеств из $\mathfrak{P}$, мера каждого из которых конечна. Тогда μ и μ' совпадают.*
Доказательство. Достаточно доказать теорему в предположении, что все пространство входит в полукольцо и его мера конечна. Пусть $\mathfrak{K}$ — кольцо, порожденное полукольцом $\mathfrak{P}$. Из описания этого кольца (см. выше) ясно, что μ и μ' совпадают на $\mathfrak{K}$.
Рассмотрим $\mathfrak{B} = \{A \in \mathfrak{A} : \mu(A) = \mu'(A)$. Эта система множеств обладает следующими свойствами:
1. Она содержит кольцо $\mathfrak{K}$.

2. Она является *монотонным классом,* то есть замкнута относительно объединений и пересечений вложенных последовательностей.

Теперь требуемое утверждение следует из следующей *леммы о монотонном классе:*

Лемма. Если монотонный класс $\mathfrak{B}$ содержит кольцо $\mathcal{K} \ni X$, то он содержит и порождаемую этим кольцом σ-алгебру $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Можно считать, что $\mathfrak{B}$ — минимальный монотонный класс, содержащий $\mathcal{K}$. Докажем, что тогда $\mathfrak{B}$ является σ-алгеброй. Достаточно проверить, что для любых $A, B \in \mathfrak{B}$ множества $A \cap B$, $A \cup B$ и $X \setminus A$ принадлежат $\mathfrak{B}$.

Докажем, что $X \setminus A \in \mathfrak{B}$ для любого $A \in \mathfrak{B}$. Рассмотрим множество $\mathfrak{B}' = \{A \in \mathfrak{B} : X \setminus A \in \mathfrak{B}\}$.

Оно является монотонным классом и содержит $\mathcal{K}$. Отсюда и из минимальности B следует, что $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$. Утверждение доказано.

Докажем, что $A \cap B \in \mathfrak{B}$ для любых $A \in \mathcal{K}$ и $B \in \mathfrak{B}$.

Зафиксируем $A \in \mathcal{K}$ и рассмотрим множество

$\mathfrak{B}_A = \{B \in \mathfrak{B} : A \cap B \in \mathfrak{B}\}$. Легко видеть, что $\mathfrak{B}_A$ — монотонный класс. При этом $\mathcal{K} \subset \mathfrak{B}_A$, так как $\mathcal{K}$ — кольцо и $B \in \mathcal{K}$. Отсюда и из минимальности $\mathfrak{B}$ следует, что $\mathfrak{B}_A = \mathfrak{B}$, то есть $A \cup B \in \mathfrak{B}$ для любого $B \in \mathfrak{B}$.

Теперь докажем, что $A \cap B \in \mathfrak{B}$ для любых $A, B \in \mathfrak{B}$. Зафиксируем $A \in \mathfrak{B}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{B}_A = \{B \in \mathfrak{B} : A \cap B \in \mathfrak{B}\}$.

Аналогично предыдущему рассуждению, $\mathfrak{B}_A$ — монотонный класс. По доказанному выше, $\mathcal{K} \subset \mathfrak{B}_A$. Отсюда и из минимальности $\mathfrak{B}$ следует, что $\mathfrak{B}_A = \mathfrak{B}$, то есть $A \cup B \in \mathfrak{B}$ для любого $B \in \mathfrak{B}$.

Для объединения доказательство аналогично.

Таким образом, $\mathfrak{B}$ содержит σ-алгебру, порожденную кольцом $\mathcal{K}$, что и требовалось.

Мера Лебега и линейные преобразования

Следующую теорему трудно доказать прямым рассуждением, но она легко следует из единственности меры Лебега.

Теорема. *Пусть μ — мера Лебега в* $\mathbb{R}^n$, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — *невырожденное линейное отображение.*

Тогда для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^n$ *верно, что* $\mu(L(A)) = |\det L| \cdot \mu(A)$.

Теорема Лебега о разложении меры

Вводные определения

Пусть F — монотонно неубывающая функция, непрерывная справа на отрезке $[a,\ b]$. На $[a,\ b]$ вводится борелевская алгебра:

$$m[a,\ b) = F(b) - F(a),$$
$$m(a,\ b) = F(b) - F(a+0),$$
$$m(a,\ b] = F(b+0) - F(a+0),$$
$$m[a,\ b] = F(b+0) - F(a),$$

μ_F — мера Стилтьеса на отрезке $[a,\ b]$, для производящей функции которой: $F(+\infty) - F(-\infty)$. Поэтому можно продолжить меру на всю числовую прямую.

Частные случаи производящей функции:

- F — функция скачков. Скачок всегда положительный, множество A — из конечного или счётного числа точек (скаляров).

$$\mu_F(A) = \sum_{x_i \in A} h_i$$ — дискретная мера.

- Функция F непрерывна, монотонно не убывает на $[a,\ b]$, на $(a,\ b) F'(x) = f(x)$.

$$\mu_F(A) = \int_A f(x)\,dx$$ — абсолютно непрерывная мера.

- F — сингулярная функция (например, лестница Кантора, где приращение F равно 1 на всём отрезке, но почти всюду $const$). Мера сосредоточена в точках роста функции.

Теорема разложения меры

Любую меру Лебега — Стилтьеса можно представить в виде суммы трех мер — дискретной, абсолютно непрерывной, и сингулярной.

3.13. НЕИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Рассмотрения предыдущего параграфа не достаточно тонки для того, чтобы полностью выяснить строение множеств на прямой, измеримых в смысле Лебега. В частности, далеко не тривиален вопрос, существуют ли вообще неизмеримые множества. Цель этого параграфа— ответить на этот вопрос, а также на некоторые смежные вопросы. Приемы, которые мы здесь употребим, заметно отличаются от тех, которыми мы пользовались до сих пор. Но многие из них постоянно употребляются в теории меры, особенно при построении различных примеров, поэтому мы изложим эти приемы во всех подробностях. Обозначения здесь те же, что в §3.12.

Пример неизмеримого множества

Предполагая существование меры Лебега, построим неизмеримое множество на отрезке [0,1). Отождествим отрезок с окружностью S радиуса $1/2\pi$ (длины 1) с помощью соответствия

$$t \mapsto \frac{1}{2\pi}(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t).$$

Мере Лебега на отрезке соответствует мера μ на окружности, инвариантная относительно поворотов. Пусть $\alpha = \pi 2$ (вместо 2 можно взять любое иррациональное число). Объявим точки на окружности эквивалентными, если они получаются друг из друга поворотом на угол, кратный α. Окружность разбивается на классы эквивалентности, каждый класс — счетное множество.

Воспользовавшись аксиомой выбора, построим множество A, содержащее по одной точке из каждого класса. Для каждого $k \in \mathbf{Z}$ обозначим через A_k образ множества A при повороте на угол $k\alpha$. Тогда множества A_k, $k \in \mathrm{Z}$, попарно не пересекаются и покрывают окружность. Следовательно, A неизмеримо: если $\mu(A) = 0$, то $\mu(A_k) = 0$ при всех k, откуда $\mu(S) = 0$ в силу счетной аддитивности, а если $\mu(A) > 0$, то, аналогично, $\mu(S) = \infty$, противоречие.

Замечание. Без использования аксиомы выбора построить неизмеримое множество невозможно.

Если E— какое-нибудь множество на числовой прямой, то $E+a$, где a— фиксированное действительное число, будет означать множество всех чисел вида $x+a$, где $x \in E)$ вообще, если E и F — множества на числовой прямой, то. $E+F$ будет означать множество всех чисел вида $x+y$, где $x \in E$ и $y \in F$. Символом $D(E)$ мы будем обозначать *множество разностей* $x—y$, в которых и x и y входят в E.

Теорема 1. *Если E — множество, измеримое в смысле Лебега, конечной положительной меры и* $0 \leqslant \alpha < 1$, *то существует открытый интервал U, такой, что* $\overline{\mu}(E \cap U) \geqslant \alpha\overline{\mu}(U)$.

Доказательство. Пусть **U** — класс всевозможных открытых множеств. Согласно теореме 3 § 3.12,

$$\overline{\mu}(E) = \inf\{\mu(U)\colon E \subset U \in \mathbf{U}\},$$

поэтому можно выбрать такое открытое множество U_0, что $E \subset U_0$ и $\alpha\mu(U_0) \leqslant \overline{\mu}(E)$. Отсюда, если $\{U_n\}$ — последовательность непересекающихся открытых интервалов, соединение которых равно U_0, то

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \leqslant \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E \cap U_n).$$

Следовательно, хотя бы для одного значения n должно выполняться неравенство $\alpha\mu(U_n) \leqslant \overline{\mu}(E \cap U_n)$; в качестве U мы возьмем такое U_n.

Теорема 2. *Каково бы ни было измеримое в смысле Лебега множество E положительной меры, существует открытый интервал, содержащий нуль и целиком содержащийся в множестве D(E).*

Доказательство. В том случае, когда E содержит какой-нибудь открытый интервал, утверждение тривиально. В общем случае мы прибегнем к теореме 1, согласно которой можно выбрать такой интервал U, что

$$\overline{\mu}(E \cap U) \geqslant \frac{3}{4}\mu(U).$$

Если $-\frac{1}{2}\mu(U) < x < \frac{1}{2}\mu(U)$, то множество

$$(E \cap U) \cup ((E \cap U) + x)$$

заключено в интервале $U \cup (U + x)$, длина которого меньше

$$\frac{3}{2}\mu(U).$$

Если бы множества $E \cap U$ и $(E \cap U) + x$ не пересекались, то, раз ониимеют одинаковую меру,

$$\bar{\mu}\left(((E \cap U) \cup ((E \cap U) + x)\right) = 2\bar{\mu}(E \cap U) \geqslant \frac{3}{2}\mu(U).$$

Следовательно, по крайней мере одна точка из $E \cap U$ принадлежит множеству $(E \cap U) + x$, откуда следует, что $x \in D(E)$. Мы показали, что интервал $\left(-\frac{1}{2}\mu(U),\ \frac{1}{2}\mu(U)\right)$ обладает свойством, утверждаемым теоремой.

Теорема 3. *Если ξ — иррациональное число, то множество A всех чисел вида $n + m\xi$, где n и m — произвольные целые числа, всюду плотно на числовой прямой. Тем же свойством обладает его подмножество B чисел вида $n + m\xi_t$ с четным n и подмножество C чисел вида $n + m\xi$ с нечетным n.*

Доказательство. Для любого целого положительного i существует единственное целое число n_i, положительное, отрицательное или равное нулю, такое, что $0 \leqslant n_i + i\xi < 1$; обозначим $x_i = n_i + i\xi.$

Пусть U — произвольный интервал. Возьмем целое положительное число k, удовлетворяющее неравенству $\mu(U) > \frac{1}{k}$.

Тогда среди k +1 чисел $x_1, \ldots, x_{k+1}$, заключенных в единичном интервале, найдутся по меньшей мере два, x_i и x_j такие, что $|x_i - x_j| < \frac{1}{k}$. Отсюда следует, что некоторое целое кратное разности $x_i — x_j$, т. е. некоторый элемент множества A, попадает в интервал U. Тем самым утверждение теоремы, относящееся к множеству A, доказано. Доказательство для множества B можно провести таким же путем, только вместо единичного интервала следует взять интервал [0, 2). Справедливость теоремы для множества C вытекает из равенства $C=B+1$.

Теорема 4. *Существует по крайней мере одно множество E_0, не являющееся измеримым в смысле Лебега.*

Доказательство. Для двух действительных чисел x и y мы будем писать (только в этом доказательстве) $x \sim y$, если $x — y \in A$, где A — множество, описанное в предыдущей теореме и соответствующее какому-нибудь фиксированному ξ. Легко убедиться в том, что отношение «~" рефлективно, симметрично и транзитивно, и, следовательно, все действительные числа разбиваются на непересекающиеся множества, каждое из которых образовано числами, находящимися в отношении „~" с некоторым определенным числом. Согласно аксиоме выбора, существует множество E_0, содержащее в точности по одной точке из каждого такого множества. Мы докажем, что E_0 неизмеримо.

Пусть F — какое-нибудь борелевское множество, содержащееся в E_0. Так как множество разностей $D(F)$ не может содержать никаких отличных от нуля элементов множества A, то, в силу теоремы 2, множество F должно иметь меру нуль.

Следовательно, $\mu_*(E_0)=0.$

Другими словами, если бы E_0 было измеримым по Лебегу, то его мера должна была бы равняться нулю.

Заметим теперь, что если a_1 и a_2 представляют собой различные элементы из A, то множества E_0+a_1 и E_0+a_2 не пересекаются. В самом деле, если допустить, что $x_1+a_1=x_2+a_2,$ где $x_1 \in E_0$ и $x_2 \in E_0$, то $x_1-x_2=a_2-a_1 \in A,$ т. е. $x_1 \sim x_2$, что противоречит определению множества E_0. Далее, счетный класс множеств вида E_0+a, где $a \in A$, покрывает всю числовую прямую, т. е. $E_0+A=X,$ поэтому если бы E_0 было измеримо в смысле Лебега, то и все E_0+a были бы измеримы в смысле Лебега и имели бы ту же меру, что E_0. Следовательно, допущение, что E_0 измеримо в смысле Лебега, приводит к нелепому выводу: $\mu(X)=0.$

Это — известное доказательство теоремы 4. Однако нам понадобится в дальнейшем, для построения некоторых примеров, следующая, более сильная,

Теорема 5. *На числовой прямой существует множество М, такое, что, каково бы ни было множество Е, измеримое в смысле Лебега,*

$$\mu_*(M \cap E)=0 \quad \text{и} \quad \mu^*(M \cap E)=\bar{\mu}(E).$$

Доказательство. Пусть $A=B \cup C$ (см. теорему 3), а E_0—множество, описанное в доказательстве предыдущей теоремы. Положим $M=E_0+B.$

Пусть F — какое-нибудь борелевское множество, содержащееся в M. Тогда, так как множество разностей $D(F)$ не может содержать ни одного элемента из всюду плотного множества С, то, в силу теоремы 2, $\mu_*(M)=0.$ Из соотношений же

$$M'=E_0+C=E_0+(B+1)=M+1$$

вытекает, что и $\mu_*(M')=0$ (см. теорему 4 §3.12). Если E — произвольное множество, измеримое в смысле Лебега, то, в силу монотонности внутренней меры, $\mu_*(M \cap E)=\mu_*(M' \cap E)=0.$ Отсюда, согласно теореме 8 § 3.9, $\mu^*(M \cap E)=\bar{\mu}(E).$

Из результатов этого параграфа следует, что лебеговскую меру нельзя распространить на класс *всех* подмножеств действительной прямой, так чтобы распространенная функция множества была мерой, инвариантной относительно переносов.

1. Если E—множество, измеримое в смысле Лебега, обладающее тем свойством, что для всякого x из некоторого всюду плотного множества $\overline{\mu}(E \Delta (E+x))=0$, то либо $\overline{\mu}(E)=0$, либо $\overline{\mu}(E')=0$.

2. Пусть μ — σ-конечная мера на некотором σ-кольце **S** подмножеств пространства X, а (μ* и μ* — соответственно верхняя и нижняя меры, индуцированные мерой μ на **H (S)**. Пусть M — произвольное множество из **H (S)** и $\tilde{\mathbf{S}}$ —σ-кольцо, порожденное классом всех множеств из **S** совместно с множеством M. Следующая цепочка утверждений приводит к доказательству того, что мера μ может быть продолжена на $\tilde{\mathbf{S}}$:

а) σ -кольцо состоит $\tilde{\mathbf{S}}$ из всевозможных множеств вида $(E \cap M) \Delta (F \cap M')$, где $E \in \mathbf{S}$, $F \in \mathbf{S}$. [Указание. Достаточно обнаружить, что класс множеств указанноговида образует σ -кольцо. Заметим, что $(E \cap M) \Delta (F \cap M') =$

$= (E \cap M) \cup (F \cap M')$.]

б) Если $\mu^*(M) < \infty$, G и H— соответственно измеримое ядро и измеримая оболочка множества M и $D = H$— G, то пересечение любого множества из $\tilde{\mathbf{S}}$ с D' принадлежит **S**.

в) В **S** содержатся множества G и H, такие, что $G \subset M \subset H$, $\mu_*(M-G)=\mu_*(H-M)=0$, и если $D = H$— G, то пересечение с D' любого множества из $\tilde{\mathbf{S}}$ принадлежит **S**. (Указание. Существует такая последовательность $\{X_n\}$ попарно непересекающихся множеств из S, что $\mu(X_n)<\infty$ и $M=\bigcup_{n=1}^{\infty}(M \cap X_n)$.)

г) В тех же обозначениях

$$\mu^*(M \cap D)=\mu^*(M' \cap D)=\mu(D).$$

и, следовательно

$\mu_*(M\bigcap D)=\mu_*(M'\bigcap D)=0$

д) В тех же обозначениях, если

$$[(E_1\bigcap M)\,\Delta\,(F_1\bigcap M')]\bigcap D=[(E_2\bigcap M)\,\Delta\,(F_2\bigcap M')]\bigcap D,$$

где E_1, F_1, E_2 и F_2 принадлежат S, то

$$\mu(E_1\bigcap D)=\mu(E_2\bigcap D) \text{ и } \mu(F_1\bigcap D)=\mu(F_2\bigcap D).$$

Указание. Воспользоваться тем, что из

$$[(E_1\,\Delta\,E_2)\bigcap M\bigcap D]\,\Delta\,[(F_1\,\Delta\,F_2)\bigcap M'\bigcap D]=0$$

следует

$$(E_1\bigcap D)\,\Delta\,(E_2\bigcap D)\subset M'\bigcap D \quad\text{и}\quad (F_1\bigcap D)\,\Delta\,(F_2\bigcap D)\subset M\bigcap D.]$$

е) Пусть α и β — неотрицательные числа, такие, что $\alpha+\beta=1.$ Пользуясь теми же обозначениями, положим

$$\tilde{\mu}((E\bigcap M)\,\Delta\,(F\bigcap M'))=\mu([(E\bigcap M)\,\Delta\,(F\bigcap M')]\bigcap D')+\alpha\mu(E\bigcap D)+\beta\mu(F\bigcap D).$$

Тогда $\tilde{\mu}_t$ представляет собой меру на $\tilde{\mathbf{S}}$, совпадающую на **S** с μ.

3. Если μ — σ-конечная мера на некотором σ-кольце **S** и если $\{M_1, \ldots, M_n\}$ — конечный класс множеств, принадлежащих наследственному σ -кольцу **H (S)**, то $M_1, \ldots, M_n$ могут быть присоединены к **S** и на σ-кольце $\tilde{\mathbf{S}}$, порожденном классом $\mathbf{S}\bigcup\{M_1, \ldots, M_n\}$, можно определить меру $\tilde{\mu}$, совпадающую на S с μ.

4. Следующий пример полезен для интуитивного овладения понятием неизмеримого множества. Фактически все основные свойства неизмеримых множеств могут быть обнаружены на этом примере. Пусть $X=\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$ — единичный квадрат. Для любого подмножества E интервала [0, 1] положим

$$\hat{E}=\{(x, y): x\in E,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}\subset X,$$

Пусть **S** — класс множеств $\hat{E}$, соответствующих измеримым в смысле Лебега множествам *E*. Положим $\mu(\hat{E})$ равной лебеговской мере множества *E*. Тогда множество

$M=\left\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant 1,\ y=\frac{1}{2}\right\}$ будет неизмеримым: $\mu_*(M)=0$ и $\mu^*(M)=1.$

5. Пусть μ* — регулярная внешняя мера в классе всех подмножеств некоторого множества *X*, такая, что μ *(X)* = 1. Возьмем

такое подмножество *M* в *X,* для которого
$\mu_*(M) = 0$ и $\mu^*(M) = 1$ (см. теорему 5 и упр. 4). Тогда функция ν^*, определенная равенством
$\nu^*(E) = \mu^*(E) + \mu^*(E \cap M)$, представляет собой внешнюю меру (см. упр. 5 и 7 § 3.4).

а) Множество *E* ν^*- измеримо тогда и только тогда, когда оно μ^*-измеримо (см. упр. 6 § 3.7).

б) inf $\nu^*(E)$ по всем ν *-измеримым множествам *E,* содержащим заданное множество *A,* равняется $2\mu^*(A)$. [Указание. Если *E* μ^*-измеримо, то
$\mu^*(E \cap M) = \mu^*(E)$.]

в) Внешняя мера ν^* нерегулярна. (Указание. Проверить на множестве *M'.)*

4. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

4.1. ПРОСТРАНСТВА С МЕРОЙ

Измеримым пространством назовем множество *X* с выделенным в нем σ-кольцом **S** подмножеств, обладающим тем свойством, что $\bigcup$ **S** = *X*. Обычно можно, не опасаясь путаницы, обозначать измеримое пространство той же буквой *X,* что и само множество. В тех случаях, однако, когда важно подчеркнуть выделенное σ -кольцо, мы будем пользоваться обозначением *(X,* **S**). Множество *E* в пространстве *X* принято называть *измеримым* тогда и только тогда, когда *E* принадлежит σ -кольцу **S**. Такая терминология не означает, однако, что **S** представляет собой σ -кольцо μ*-измеримых множеств относительно некоторой внешней меры, которая задана или хотя бы может быть задана на **S**.

Пользуясь термином „измеримое множество", можно сформулировать условие, фигурирующее в определении измеримого пространства, сказав, что соединение всех измеримых множеств равно всему пространству или что каждая точка пространства принадлежит некоторому измеримому множеству. Цель этого ограничения состоит в том, чтобы, исключив из рассмотрения точки (или целые участки) пространства, несущественные с точки зрения теории меры, избавиться тем самым от многочисленных очевидных оговорок.

Пространством с мерой назовем измеримое пространство $(X_y\ \mathbf{S})$ с заданной на **S** мерой μ. Так же как для измеримого пространства, мы условимся и пространство с мерой обычно обозначать той же буквой X. В тех случаях, когда важно подчеркнуть выделенное σ -кольцо и заданную на нем меру, мы будем пользоваться обозначением $(X, \mathbf{S}, \mu)$. Будем говорить, что имеем пространство с (вполне) конечной, σ -конечной или полной мерой тогда, когда мера μ обладает соответствующим свойством. В пространстве с мерой мы будем, без особых пояснений, вводить внешнюю меру μ^* и (в σ -конечном случае) внутреннюю меру μ_*, индуцированные мерой μ на наследственном σ -кольце H(S).

Большинство результатов предыдущей главы, как в основном тексте так и в примерах, относится к превращению определенных измеримых пространств в пространства с мерой. В этом параграфе мы сделаем несколько общих замечаний об измеримых пространствах и о пространствах с мерой, а в остальных параграфах этой главы и в дальнейших главах займемся рассмотрением функций, заданных на пространствах с мерой, методами построения новых пространств с мерой из некоторых исходных, и, наконец, изучением особенно важных частных случаев.

Заметим прежде всего, что всякое измеримое подмножество X_0 пространства с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ само может рассматриваться как пространство с мерой $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$, в котором в качестве $\mathbf{S}_0$ взят класс измеримых подмножеств множества X_0, а μ_0 определена на таких подмножествах равенством $\mu_0(E) = \mu(E)$. Обратно, если некоторое подмножество X_0 множества X представляет собой пространство с мерой $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$, то само X может быть обращено в пространство с мерой, если отнести к **S** те множества в X, пересечения которых с X_0 принадлежат S_0, а μ определить на **S** равенством $\mu(E) = \mu_0(E \cap X_0)$. Подобные же замечания справедливы и для измеримых пространств. Часто бывает удобно пользоваться некоторым видоизменением указанной конструкции даже и тогда, когда X уже является пространством с мерой. Если X_0 — какое-нибудь измеримое множество в пространстве X, то в классе всех измеримых подмножеств пространства X можно задать новую меру μ_0, положив $\mu_0(E) = \mu(E \cap X_0)$; легко проверить, что $(X, \mathbf{S}, \mu_0)$ оказывается при этом пространством с мерой.

К чему приведут построения, указанные в предыдущем абзаце, если в качестве X_0 взять неизмеримое множество? Для того чтобы выделить случай, когда такого рода построения могут оказаться полезными, введем следующее новое понятие. Множество X_0 в пространстве с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ назовем *массивным,* если $\mu_*(E - X_0) \doteq 0$, каково бы ни было измеримое множество E. Если само X измеримо, то X_0 массивно тогда и только тогда, когда $\mu_*(X - X_0) = 0$; если μ — вполне конечная мера, то X_0 оказывается массивным подмножеством тогда и только тогда, когда $\mu^*(X_0) = \mu(X)$ (примеры массивных подмножеств указаны в теореме 5 § 3.13 и в упр. 4 §3.13). Следующий результат, несколько более глубокий, нежели замечания предыдущего абзаца, состоит в том, что всякое массивное множество в пространстве с мерой также может быть рассматриваемо как пространство с мерой.

Теорема 1. *Пусть X_0 — массивное множество в пространстве с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$. Если $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S} \cap X_0$ и $\mu_0(E \cap X_0) = \mu(E)$ для множеств E, принадлежащих $\mathbf{S}$, то $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$ представляет собой пространство с мерой.*

Доказательство. Если множества E_1 и E_2 из $\mathbf{S}$ таковы, что $E_1 \cap X_0 = E_2 \cap X_0$, то $(E_1 \Delta E_2) \cap X_0 = 0$, поэтому $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$ и $\mu(E_1) = \mu(E_2)$. Другими словами, мера μ_0 определена на $\mathbf{S}_0$ однозначно.

Рассмотрим какую-нибудь последовательность $\{F_n\}$ непересекающихся множеств из $\mathbf{S}_0$; пусть

$$F_n = E_n \cap X_0,$$

где $E_n \in \mathbf{S}$. Если

$$\tilde{E}_n = E_n - \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то

$$(\tilde{E}_n \Delta E_n) \cap X_0 = \left(F_n - \bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) \Delta F_n = F_n \Delta F_n = 0,$$

следовательно, $\mu(\tilde{E}_n \Delta E_n) = 0$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\tilde{E}_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) =$$

$$= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right).$$

Таким образом, μ_0 действительно представляет собой меру.

1. Справедливо предложение, обратное теореме 1: если (X, S, μ) — пространство с мерой и X_0 — подмножество X, обладающее тем свойством, что $E_1 \cap X_0 = E_2 \cap X_0$ влечет за собой равенство $\mu(E_1) = \mu(E_2)$, то X_0 является массивным подмножеством в X. (Указание. Если $F = E - X_0$, то $(E-F) \cap X_0 = E \cap X_0$.)

2. В σ-конечном случае теорема 1 может быть доказана иначе с помощью результата, содержащегося в упр. 2 § 3.13.

3. Следующее предложение показывает, что пространства с конечной мерой лишь незначительно отличаются от пространств с вполне конечной мерой, хотя на первый взгляд последние образуют гораздо более специальный класс пространств. В любом пространстве с конечной мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ существует массивное измеримое множество. (Указание. Пусть $c = \sup \{\mu(E) : E \in \mathbf{S}\}$; тогда, если $\{E_n\}$ — последовательность измеримых множеств, такая, что

$$\lim_n \mu(E_n) = c,$$

то можно положить

$$X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Заметим, что $\mu(X_0) = c$.) Этот вывод позволяет во многих приложениях без особенных потерь заменять пространство X множеством X_0. В качестве примера пространства с конечной, но не вполне конечной, мерой рассмотрим числовую прямую X и на ней класс $\mathbf{S}$ множеств вида $E \cup C$, где E — измеримое в смысле Лебега подмножество интервала $[0, 1]$, а C — некоторое конечное или счетное множество; μ пусть будет лебеговской мерой. Указанный здесь метод замены X множеством X_0 конечной меры часто применяется в теории меры и носит название *метода исчерпывания.*

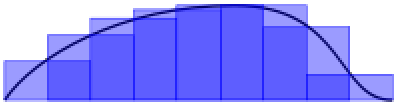
4. Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с полной σ-конечной мерой, то в нем всякое μ^*-измеримое множество измеримо. Таким образом, для пространств с полной σ-конечной мерой оба понятия измеримости эквивалентны.

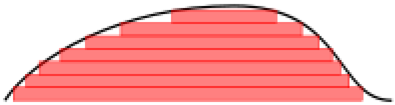
4.2. Интеграл Лебега и измеримые функции

В 1901 году французский математик А. Лебег, на основе построенной им теории интеграла Лебега, поставил задачу: найти класс функций, более широкий, чем аналитические, однако при этом допускающий применение к нему многих аналитических методов. К этому времени уже существовала общая теория меры, разработанная Э. Борелем (1898), и первые работы Лебега опирались на борелевскую теорию. Однако в диссертации Лебега (1902) теория меры была существенно обобщена до «меры Лебега». Лебег определил понятия измеримых множеств, ограниченных измеримых функций и интегралов для них, доказал, что все «обычные» ограниченные функции, исследуемые в анализе, измеримы, и что класс измеримых функций замкнут относительно основных аналитических операций, включая операцию предельного перехода. В 1904 году Лебег обобщил свою теорию, сняв условие ограниченности функции.

Интеграл Лебега

Интеграл





Сверху интегрирование по Риману, снизу по Лебегу

Определение

Интеграл Лебега определяют пошагово, переходя от более простых функций к сложным. Будем считать, что дано пространство с мерой $(X, \mathcal{F}, \mu)$, и на нем определена борелевская функция $f : (X, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Определение 1. Пусть f — индикатор некоторого измеримого множества, то есть $f(x) = \mathbf{1}_A(x)$, где $A \in \mathcal{F}$. Тогда интеграл Лебега функции f по определению:

$$\int\limits_X f(x)\,\mu(dx) \equiv \int\limits_X f\,d\mu = \mu(A).$$

Определение 2. Пусть f — простая функция, то есть $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\,\mathbf{1}_{F_i}(x)$, где $\{f_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, а $\{F_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$ — конечное разбиение X на измеримые множества. Тогда

$$\int\limits_X f(x)\,\mu(dx) = \sum_{i=1}^n f_i\,\mu(F_i)$$.

Определение 3. Пусть теперь f — неотрицательная функция, то есть $f(x) \geqslant 0\; \forall x \in X$. Рассмотрим все простые функции $\{f_s\}$, такие что $f_s(x) \leqslant f(x)\; \forall x \in X$. Обозначим это семейство $\mathcal{P}_f$. Для каждой функции из этого семейства уже определён интеграл Лебега. Тогда интеграл от f задаётся формулой:

$$\int\limits_X f(x)\,\mu(dx) = \sup\left\{\int\limits_X f_s(x)\,\mu(dx) \mid f_s \in \mathcal{P}_f\right\}$$

Наконец, если функция f произвольного знака, то её можно представить в виде разности двух неотрицательных функций. Действительно, легко видеть, что:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x),$$

где

$$f^+(x) = \max(f(x), 0),\; f^-(x) = -\min(0, f(x))$$.

Определение 4. Пусть f — произвольная измеримая функция. Тогда ее интеграл задаётся формулой:

$$\int\limits_X f(x)\,\mu(dx) = \int\limits_X f^+(x)\,\mu(dx) - \int\limits_X f^-(x)\,\mu(dx)$$.

Определение 5. Пусть наконец $A \in \mathcal{F}$ произвольное измеримое множество. Тогда по определению

$$\int\limits_A f(x)\,\mu(dx) = \int\limits_X f(x)\,\mathbf{1}_A(x)\,\mu(dx),$$

где $\mathbf{1}_A(x)$ — индикатор-функция множества A.

Пример

Рассмотрим функцию Дирихле $f(x) \equiv \chi_{\mathbb{Q}_{[0,1]}}(x)$, заданную на $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$, где $\mathcal{B}([0,1])$ — борелевская σ-алгебра на $[0,1]$, а m — мера Лебега. Эта функция принимает значение 1 в рациональных точках и 0 в иррациональных. Легко увидеть, что f не интегрируема в смысле Римана. Однако, она является простой функцией на пространстве с конечной мерой, ибо принимает только два значения, а потому её интеграл Лебега определён и равняется:

$$\int\limits_{[0,1]} f(x)\,m(dx) = 1\cdot m(\mathbb{Q}_{[0,1]}) + 0\cdot m([0,1]\setminus\mathbb{Q}_{[0,1]}) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0.$$

Действительно, мера отрезка $[0,1]$ равна 1, и так как множество рациональных чисел счётно, то его мера равна 0, а значит мера иррациональных чисел равна $1-0=1$.

Замечания

- Так как $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$, измеримая функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу тогда и только тогда, когда функция $|f(x)|$ интегрируема по Лебегу. Это свойство не выполняется в отношении интеграла Римана;
- В зависимости от выбора пространства, меры и функции, интеграл может быть конечным или бесконечным. Если интеграл функции конечен, то функция называется **интегрируемой по Лебегу** или **суммируемой**;

- Если функция определена на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и измерима, то она называется случайной величиной, а ее интеграл называют математическим ожиданием или средним. Случайная величина интегрируема, если она имеет конечное математическое ожидание.

Свойства

- Интеграл Лебега линеен, то есть

$$\int\limits_X [af(x) + bg(x)]\,\mu(dx) = a\int\limits_X f(x)\,\mu(dx) + b\int\limits_X g(x)\,\mu(dx)$$

,

где $a, b \in \mathbb{R}$ — произвольные константы;

- Интеграл Лебега сохраняет неравенства, то есть если $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ почти всюду, $f(x)$ измерима и $g(x)$ интегрируема, то интегрируема и $f(x)$, и более того

$$0 \leqslant \int\limits_X f(x)\,\mu(dx) \leqslant \int\limits_X g(x)\,\mu(dx)$$

;

- Интеграл Лебега не зависит от поведения функции на множестве меры нуль, то есть если $f(x) = g(x)$ почти всюду, то

$$\int\limits_X f(x)\,\mu(dx) = \int\limits_X g(x)\,\mu(dx)$$

.

Сходимость интегралов Лебега от последовательностей функций

Теорема Леви о монотонной сходимости

Теорема о монотонной сходимости (теорема

- Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)$ состоит из суммируемых неотрицательных функций. Тогда если интегралы от частичных сумм ряда ограничены в совокупности:

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_X \varphi_k(x)\mu(dx)\leqslant C,$$

то ряд $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)$ сходится к почти всюду конечной суммируемой функции и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_X \varphi_k(x)\mu(dx)=\int\limits_X \varphi(x)\mu(dx).$$

Формулировка из теории вероятностей

Так как математическое ожидание случайной величины определяется как её интеграл Лебега по пространству элементарных исходов Ω, вышеприведенная теорема переносится и в теорию вероятностей. Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонная последовательность неотрицательных п.н. интегрируемых случайных величин. Тогда

$$\mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty}X_n\right]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}X_n.$$

Теорема Лебега о мажорируемой сходимости

интегрируемой функцией, то все члены последовательности, а также предельная функция тоже интегрируемы. Более того, интеграл последовательности сходится к интегралу её предела.

Формулировка

Пусть фиксировано пространство с мерой $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Предположим, что $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и f — измеримые функции на X, причём $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду. Тогда если существует определённая на том же пространстве интегрируемая функция g, такая что $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x)| \leqslant g(x)$ почти всюду, то функции f_n, f интегрируемы и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,\mu(dx) = \int\limits_X f(x)\,\mu(dx).$$

Замечание

Условие мажорированности последовательности $\{f_n\}$ интегрируемой функцией g принципиально и не может быть опущено, как показывает следующий контрпример. Пусть $(X,\ \mathcal{F},\ \mu) = ([0,\ 1],\ \mathcal{B},\ m)$, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра на $[0,\ 1]$, а m — мера Лебега на том же пространстве. Определим

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in \left[0,\ \dfrac{1}{n}\right); \\ 0, & x \in \left[\dfrac{1}{n},\ 1\right]. \end{cases}$$

Тогда последовательность $\{f_n\}$ не может быть мажорирована интегрируемой функцией, и

$$\int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, m(dx) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\, m(dx).$$

Приложение к теории вероятностей

Так как математическое ожидание случайной величины определяется как её интеграл Лебега по пространству элементарных исходов Ω, вышеприведенная теорема переносится и в теорию вероятностей. Пусть есть сходящаяся почти всюду последовательность случайных величин: $X_n \to X$ почти всюду. Пусть в дополнение существует интегрируемая случайная величина Y, такая что $\forall n \in \mathbb{N} \quad |X_n| \leqslant Y$ почти наверное. Тогда случайные величины $X_n,\ X$ интегрируемы и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X.$$

Лемма Фату

$$\int\limits_X \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mu(dx) \le \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,\mu(dx).$$

Обратите внимание: в формуле функции могут достигать бесконечности, их интегралы тоже могут быть бесконечными.

Если, кроме того, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — суммируемы, имеют предел $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ почти всюду и имеют ограниченные в совокупности интегралы

$$\int\limits_X f_n(x)\mu(dx) \le K, \forall n,$$

K — некоторое фиксированное число, тогда $f(x)$ — суммируема и справедливо неравенство:

$$\int\limits_X f(x)\mu(dx) \le K$$

Формулировка из теории вероятностей

Так как математическое ожидание случайной величины определяется как её интеграл Лебега по пространству элементарных исходов Ω, вышеприведенная теорема переносится и в теорию вероятностей. Пусть есть неотрицательная последовательность интегрируемых случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда выполняется следующее неравенство для нижних пределов

$$\mathbb{E}\left[\varliminf_{n\to\infty} X_n\right] \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n.$$

Примечания

1. ↑ Если $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ обладает более слабым условием — ограниченностью снизу какой-либо суммируемой функцией: $f_n(x) \geq f(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, то теорему можно применить к последовательности $f_n - f$

Вещественнозначные измеримые функции

Пусть дана функция $f : (X, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Тогда данное выше определение измеримости эквивалентно любому из нижеследующих:

- Функция f измерима, если

  $\forall c \in \mathbb{R},\ \{x \in X \mid f(x) \leq c\} \in \mathcal{F}$.

- Функция f измерима, если

  $\forall a, b \in \mathbb{R}$, таких что $a \leq b$, имеем $\{x \in X \mid f(x) \in |a, b|\} \in \mathcal{F}$,

где $|a, b|$ обозначает любой интервал, открытый, полуоткрытый или замкнутый.

Связанные определения

- Пусть $(X, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ и — две копии вещественной прямой вместе с ее борелевской σ-алгеброй. Тогда измеримая функция $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ называется борелевской.
- Измеримая функция $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$, где Ω— множество элементарных исходов, а $\mathcal{F}$— σ-алгебра случайных событий, называется случайным элементом.

Примеры

- Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$— непрерывная функция. Тогда она измерима относительно борелевской σ-алгебры на числовой прямой.

- Пусть $f:(X,\mathcal{F})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, и $f(x)=\mathbf{1}_A(x),\ x\in X$ — индикатор множества $A\notin\mathcal{F}$. Тогда функция f не является измеримой.

Предположим, что f—функция, заданная на каком-нибудь множестве X и принимающая действительные значения, и M — множество на числовой прямой. Будем пользоваться обозначением

$$f^{-1}(M)=\{x:f(x)\in M\}$$

и называть $f^{-1}(M)$, т. е. множество всех тех точек из X, которые функцией f отображаются в множество M, прообразом множества M (при отображении f). Если, например, f—характеристическая функция некоторого множества E, заключенного в X, то $f^{-1}(\{1\})=E$ и

$f^{-1}(\{0\})=E'$; вообще

$$f^{-1}(M)=0,\ E,\ E'\text{ или }X$$

соответственно в тех случаях, когда M не содержит ни 0, ни 1, содержит 1 и не содержит 0, содержит 0 и не содержит 1 и содержит как 1, так и 0.

Легко проверить, что, какова бы ни была функция f,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(M_n),$$

$$f^{-1}(M-N)=f^{-1}(M)-f^{-1}(N);$$

другими словами, отображение f^{1} подмножеств числовой прямой на подмножества X сохраняет теоретико-множественные операции. Отсюда, в частности, следует, что если **E** — класс множеств на числовой прямой, обладающий определенными алгебраическими свойствами (например, **E** есть кольцо или σ-кольцо), то f^{1}(**E**) — класс множеств вида $f^{1}(M)$, где $M\in$ **E**,— обладает теми же алгебраическими свойствами. Наибольший интерес для нас в дальнейшем будет представлять тот случай, когда **E** — класс всех борелевских множеств на прямой. Предположим теперь, что в X выделено, кроме того, некоторое σ-кольцо **S** подмножеств, так что мы имеем измеримое пространство $(X,$ **S**). Для всякой функции f, заданной на X и принимающей действительные значения (конечные или бесконечные), обозначим

$$N(f) = \{x : f(x) \neq 0\}.$$

Действительную функцию, обладающую тем свойством, что, каково бы ни было борелевское множество M на числовой прямой, множество $N(f) \cap f^{-1}(M)$ измеримо, назовем *измеримой функцией.*

В связи с этим определением нужны некоторые пояснения. Прежде всего следует подчеркнуть особую роль, которую играет в множестве значений функции число 0. Причина этого кроется в тем, что нуль служит единичным элементом аддитивной группы действительных чисел. В следующей главе будет введено понятие интеграла, применимое к некоторым измеримым функциям, —важнейшее понятие в теории меры. Тот факт, что интегрирование можно рассматривать как своего рода обобщенное суммирование, заставляет особым образом подходить к числу 0.

Пусть f—измеримая функция на X. Если в качестве M взять всю числовую прямую, то мы получим, что множество $N(f)$ должно быть измеримым. Отсюда, если E — измеримое подмножество пространства X, а M — какое-нибудь борелевское множество на числовой прямой, то из равенства

$$E \cap f^{-1}(M) = [E \cap N(f) \cap f^{-1}(M)] \cup [(E - N(f)) \cap f^{-1}(M)]$$

следует, что множество $E \cap f^{-1}(M)$ измеримо. (Заметим, что $(E - N(f)) \cap f^{-1}(M)$ в правой части этого равенства либо пусто, либо равно $E - N(f)$.) Другими словами, если функцию f, заданную на измеримом множестве E, назвать *измеримой на* E в том случае, когда $E \cap f^{-1}(M)$ измеримо, каково бы ни было борелевское множество M на числовой прямой, то, как мы видим из проведенного рассуждения, измеримая функция оказывается измеримой на всяком измеримом множестве. Если, в частности, само пространство X принадлежит классу измеримых множеств, то определение измеримости f сводится к требованию, чтобы при любом борелевском множестве M на числовой прямой множество $f^{1}(M)$ было измеримым. Таким образом, в этом случае, т. е. когда измеримо само X, функция f измерима, если отображение f^{1} переводит множества определенного σ-кольца, именно, борелевские множества на числовой прямой, в множества другого заранее выбранного σ-кольца, именно, σ-кольца **S**.

Ясно, что понятие измеримости зависит от выбора σ-кольца **S**, поэтому в тех случаях, когда будут рассматриваться несколько σ -колец одновременно, мы будем говорить о функциях, измеримых относительно **S**, или просто измеримых (**S**). Если, в частности, X есть числовая прямая, **S** — класс борелевских множеств, а $\bar{\mathbf{S}}$ — класс множеств, измеримых в смысле Лебега, то функции, измеримые относительно **S**, мы будем называть функциями, *измеримыми в смысле Бореля,* а функции, измеримые относительно $\bar{\mathbf{S}}$,— *измеримыми в смысле Лебега.*

Важно подчеркнуть еще, что измеримость функции, так же как измеримость множеств, согласно § 4.1, зависит лишь от выбора σ -кольца **S** и *не зависит* от того, задана ли на **S** какая-либо мера и если задана, то какие числовые значения она принимает.

Можно сказать, что множества и функции *декретируются* измеримыми; понятие измеримости — чисто теоретико-множественное, и от теории меры оно совершенно не зависит.

Такое положение вещей сходно с тем, что имеет место в теории топологических пространств, где некоторые множества можно объявить открытыми, а некоторые функции — непрерывными, не обращаясь к метрике. Возможность ввести метрику, в терминах которой открытые множества и непрерывность могут быть *определены,* хотя и представляет известный интерес, но обычно не столь уж существенна.

Эта аналогия более глубока, чем может показаться на первый взгляд: читатель, знакомый с определением непрерывной функции на топологическом пространстве *X,* вспомнит, что функция f называется непрерывной, если отображение f^{-1} переводит открытые множества на числовой прямой (в нашем случае, т. е. когда f принимает действительные значения) в множества некоторого заранее выделенного класса, названные открытыми множествами.

Понятие измеримости надо распространить на функции, могущие принимать бесконечные значения. Достигается это тем, что одноточечные множества $\{\infty\}$ и $\{-\infty\}$ на расширенной числовой прямой причисляются к классу борелевских множеств. После этого само определение измеримой функции повторяется дословно. Таким образом, функция, принимающая действительные значения, конечные или бесконечные, измерима, если измеримы множества $f^{-1}(\{\infty\})$ и $f^{-1}(\{-\infty\})$, а также $N(f)\cap f^{-1}(M)$, каково бы ни было борелевское множество *M* на числовой прямой. Заметим, что класс борелевских множеств с присоединением к нему $\{\infty\}$ и $\{-\infty\}$ перестает быть σ-кольцом, порожденным всевозможными полузамкнутыми интервалами.

Теперь мы займемся изучением измеримых функций. Весьма полезен следующий предварительный результат.

Теорема 1. *Функция f на измеримом пространстве (X,* **S***), принимающая действительные значения, измерима тогда и только тогда, когда, каково бы ни было действительное число c, множество* $N(f) \cap \{x : f(x) < c\}$ *измеримо.*

Доказательство. Высказанное здесь условие необходимо для того, чтобы f была измерима. В самом деле, если $M = \{t : t < c\}$— открытая полупрямая от —∞ до c, то M представляет собой борелевское множество и $\{x : f(x) < c\} = f^{-1}(M)$.

Предположим теперь, что множество $N(f) \cap \{x : f(x) < c\}$ при любом c измеримо. Если c_1 и c_2 — действительные числа, причем $c_1 \leq c_2$, то

$$\{x : f(x) < c_2\} - \{x : f(x) < c_1\} = \{x : c_1 \leqslant f(x) < c_2\}.$$

Таким образом, если M — полузамкнутый интервал вида $[c_1, c_2)$, то $N(f) \cap f^{-1}(M)$, будучи разностью двух измеримых множеств, измеримо. Пусть **E** — класс всех тех множеств M на числовой прямой, для которых $N(f) \cap f^{-1}(M)$ измеримо. Тогда **E** представляет собой σ-кольцо, содержащее, как мы только что видели, все полузамкнутые интервалы. Следовательно, **E** охватывает все борелевские множества, и теорема доказана.

1. Теорема 1 остается справедливой, если вместо множеств $\{x : f(x) < c\}$ рассматривать множества $\{x : f(x) \leqslant c\}$, или $\{x : f(x) > c\}$, или $\{x : f(x) \geqslant c\}$. [Указание. Если $-\infty < c < \infty$, то, например,

$$\{x : f(x) \leqslant c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) < c + \frac{1}{n}\right\}.]$$

2. Теорема 1 справедлива и тогда, когда значения c берутся лишь из некоторого всюду плотного множества действительных чисел.
3. Если f—измеримая функция и c — любое действительное число, то cf также измерима.
4. Если E—измеримое множество, то его характеристическая функция измерима. Верно ли обратное предложение?
5. Функция, тождественно равная отличной от нуля постоянной, измерима тогда и только тогда, когда $X \in S$.
6. Если X—числовая прямая и f—заданная на ней возрастающая функция, то f измерима в смысле Бореля. Будет ли измерима в смысле Бореля всякая непрерывная функция?
7. Пусть X—числовая прямая и E— какое-нибудь множество на ней, не измеримое в смысле Лебега; функция f задана следующим

образом: $f(x)=x$, когда $x \in E$, $f(x) = -x$, когда $x \bar{\in} E$. Измерима ли f в смысле Лебега?

8. Если f— измеримая функция, то, каково бы ни было действительное число c, множество $\{x : f(x) = c\}$ измеримо. Верно ли обратное предложение?

9. Функция f, принимающая комплексные значения, называется измеримой, если одновременно измеримы Ref и Imf. Доказать, что функция f, принимающая комплексные значения, измерима тогда и только тогда, когда, каково бы ни было открытое множество M в комплексной плоскости, множество $N(f) \cap f^{-1}(M)$ измеримо.

10. Пусть f—функция на измеримом пространстве $(X$, **S**), принимающая действительные значения. Для действительных t положим $B(t) = \{x : f(x) \leqslant t\}$.

Тогда

а) из $s < f$ следует $B(s) \subset B(t)$,

б) $\bigcup\limits_t B(t) = X$, $\bigcap\limits_t B(t) = 0$,

в) $\bigcap\limits_{t>s} B(t) = B(s)$.

Обратно, если $\{B(t)\}$ — класс множеств, обладающий свойствами „а" — „в", то существует единственная функция f заданная на X и принимающая (конечные) действительные значения, для которой $\{x : f(x) \leqslant t\} = B(t)$. (Указание. $f(x) = \inf \{t : x \in B(t)\}$.)

11. Пусть f—измеримая функция, заданная на пространстве (X, **S**, μ) с вполне конечной мерой. Если для всякого борелевского множества M на расширенной числовой прямой положить $\nu(M) = \mu(f^{-1}(M))$, то ν будет мерой в классе всех борелевских множеств. Если все значения f конечны, то функция g действительного переменного, определенная равенством $g(t) = \mu(\{x : f(x) < t\})$, обладает следующими свойствами: она монотонно возрастает, непрерывна слева, $g(-\infty) = 0$ и $g(\infty) = \mu(X)$; g называется *функцией распределения* для функции f. Если g непрерывна, то мера Лебега — Стильтьеса $\bar{\mu}_g$, порожденная функцией g (см. упр. 9 § 3.12), будет служить пополнением меры ν. Если $f = \chi_E$ — характеристическая функция измеримого множества E, то

соответствующая ей мера v будет обладать следующим свойством: $\nu(M) = \chi_M(1)\mu(E) + \chi_M(0)\mu(E')$.

4.3. ДЕЙСТВИЯ НАД ИЗМЕРИМЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Теорема 1. *Если f и g — измеримые функции, заданные на измеримом пространстве (X,* **S**) *и принимающие конечные или бесконечные действительные значения, то, каково бы ни было действительное число с, каждое из множеств*

$$A = \{x : f(x) < g(x) + c\},$$
$$B = \{x : f(x) \leqslant g(x) + c\},$$
$$C = \{x : f(x) = g(x) + c\}$$

имеет измеримое пересечение со всяким измеримым множеством.

Доказательство. Пусть *M* — множество всех рациональных чисел. Утверждение теоремы, относящееся к множеству *A*, следует из соотношения

$$A = \bigcup_{r \in M} [\{x : f(x) < r\} \cap \{x : r - c < g(x)\}],$$

а утверждения, относящиеся к *B* и С,— соответственно из равенств

$$B = X - \{x : g(x) < f(x) - c\} \quad \text{и} \quad C = B - A.$$

Теорема 2. *Пусть* φ *— измеримая в смысле Бореля функция, заданная на расширенной числовой прямой и принимающая конечные или бесконечные действительные значения, причем* φ (0) = 0, *а f— измеримая функция на каком-нибудь измеримом пространстве X, принимающая конечные или бесконечные действительные значения. Тогда, если* $\hat{f}(x) = \varphi(f(x))$, *то* $\hat{f}$ *представляет собой измеримую функцию на X.*

Доказательство. Здесь удобнее обратиться непосредственно к определению измеримой функции, нежели пользоваться необходимым и достаточным условием измеримости, установленным в § 4.2. Пусть *M* — произвольное борелевское множество на расширенной числовой прямой. Тогда

$$N(\hat{f}) \cap \hat{f}^{-1}(M) = \{x : \varphi(f(x)) \in M - \{0\}\} =$$
$$= \{x : f(x) \in \varphi^{-1}(M - \{0\})\}.$$

Так как φ (0) = 0, то

$$\varphi^{-1}(M-\{0\})=\varphi^{-1}(M-\{0\})-\{0\}.$$

Функция φ измерима в смысле Бореля, поэтому $\varphi^{-1}(M-\{0\})$ представляет собой борелевское множество и измеримость функции *f* влечет за собой измеримость множества

$$N(\hat{f})\cap\hat{f}^{-1}(M)=N(f)\cap f^{-1}(\varphi^{-1}(M-\{0\})).$$

Легко убедиться в том, что при всяком положительном α функция φ, определенная на всей числовой прямой равенством $\varphi(t)=|t|^{\alpha}$, измерима в смысле Бореля. Отсюда следует, что измеримость функции *f* влечет за собой измеримость $|f|^{\alpha}$. Точно так же измеримы любая целая положительная степень измеримой функции и произведение измеримой функции на (действительную) постоянную. Рассматривая измеримые в смысле Бореля функции двух и большего числа переменных и проводя аналогичные рассуждения, мы обнаружим, что сумма и произведение двух измеримых функций представляют собой измеримые функции. Но так как мы еще не ввели понятие измеримости в смысле Бореля для функций нескольких переменных, то эти рассмотрения мы отложим и обратимся к прямому доказательству измеримости суммы и произведения.

Теорема 3. *Если f и g—измеримые функции на измеримом пространстве X, принимающие конечные или бесконечные действительные значения, то f+*g *и fg также измеримы.*

Доказательство. Так как смысл выражения $f(x)+g(x)$ и $f(x)g(x)$ в тех точках, в которых хотя бы одно из значений $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно, легко установить, перебрав немногочисленные возможные случаи, то мы сразу ограничимся рассмотрением функций, принимающих конечные значения. (Попутно мы напомним читателю, что в случае $f(x)=\pm\infty,\ g(x)=\mp\infty$ сумма $f(x)+g(x)$ не имеет смысла.)

Тогда, когда *f* и *g* конечны, для любого действительного числа *c* мы имеем

$$\{x:f(x)+g(x)<c\}=\{x:f(x)<c-g(x)\},$$

и измеримость функции *f*+*g* вытекает из теоремы 1, если взять в ней —*g* вместо *g*. Измеримость *fg* следует из тождества

$$fg=\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2].$$

Для конечных *f* и *g* имеют место тождества

$$f \cup g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

и

$$f \cap g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|),$$

откуда, согласно теоремам 2 и 3, из измеримости f и g следует измеримость $f \cup g$ и $f \cap g$. Если для любой действительной (конечной или бесконечной) функции f положить

$$f^+ = f \cup 0 \quad \text{и} \quad f^- = -(f \cap 0),$$

то

$$f = f^+ - f^- \quad \text{и} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Функция f^+ называется *положительной частью* функции f, а f^- — ее *отрицательной частью.* В силу только что сделанного замечания, положительная и отрицательная части измеримой функции являются измеримыми функциями; обратно, функция, у которой измеримы ее положительная и отрицательная части, сама измерима.

1. Пусть f такова, что функция $|f|$ измерима; измерима ли сама f?

2. Если $X \in$ **S**, то теорема 2 верна и без предположения, что $\varphi(0) = 0$; другими словами, в этом случае подстановка измеримой функции в функцию, измеримую в смысле Бореля, всегда приводит к измеримой функции.

3. Подстановка измеримой функции в функцию, измеримую в смысле Лебега, не приводит, вообще говоря, к измеримой функции даже тогда, когда $X \in$ **S**. В следующих ниже предложениях намечено доказательство этого утверждения путем построения соответствующего примера неизмеримой в смысле Лебега функции $\hat{f} = \varphi(f)$, где φ — функция действительного переменного y, измеримая в смысле Лебега, а f — непрерывная возрастающая (в строгом смысле) функция действительного переменного x, $0 \le x \le 1$. Пусть $X = [0, 1]$ —замкнутый единичный интервал. Любое x из X может быть представлено в виде

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i} = 0,\alpha_1\alpha_2 \ldots,$$

где $\alpha_i = 0$, 1 или 2, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда, если $x \in C$, где C — канторово множество (см. упр. 5 §3.12), то $\alpha_i = 0$ или 2, $i = 1,2, \ldots$ Пусть $n = n(x)$- первый индекс, при котором $\alpha_n = 1$; если таких индексов нет вовсе, то мы положим $n(x) = \infty$. Определим теперь функцию ψ, положив

$$\psi(x) = \sum_{1 \leqslant i < n} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^n}$$

(ψ называют иногда *канторовой функцией):*

а) Если $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, то

$$0 = \psi(0) \leqslant \psi(x) \leqslant \psi(y) \leqslant \psi(1) = 1.$$

(Указание. Если

$$x = 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \leqslant y = 0, \beta_1\beta_2 \ldots \quad \text{и} \quad \alpha_i = \beta_i$$

при $1 \leq i < j$, то $\alpha_j \leqslant \beta_j$.)

б) Функция ψ непрерывна. (Указание. Если $x = 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$, $y = 0, \beta_1\beta_2 \ldots$ и $\alpha_i = \beta_i$ при $1 \leqslant i < j$, то

$|\psi(x) - \psi(y)| \leqslant 2^{j-1}$.)

в) Для любого x из X найдется одно и только одно число y, $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, ,такое, что $x = \frac{1}{2}(y + \psi(y))$; это уравнение определяет y как функцию от x; обозначим ее f. Она строго возрастает и непрерывна на X. (Указание. $\frac{1}{2}(y + \psi(y))$ непрерывна и строго возрастает.)

г) Множество $f^{-1}(C)$ измеримо в смысле Лебега и имеет положительную меру. (Указание. Множество $\psi(X - C) = \{\psi(y) : y \in X - C\}$ счетно, поэтому его мера равна нулю; следовательно,

$\mu(f^{-1}(X - C)) = \frac{1}{2}$.)

д) Существует измеримое в смысле Лебега множество M, такое, для которого $f^{-1}(M)$ не измеримо в смысле Лебега. (Указание. В силу теоремы 5 § 3.13, $f^{-1}(C)$ содержит неизмеримое подмножество. Вспомним, что всякое подмножество множества, лебеговская мера которого равна нулю, измеримо в смысле Лебега.)

е) Если φ — характеристическая функция множества M, введенного в „д", и если $\hat{f}(x) = \varphi(f(x))$, то φ измерима в смысле Лебега, а $\hat{f}$ неизмерима.

4. Множество M в „д" служит примером множества, измеримого в смысле Лебега, но не являющегося борелевским множеством (см. упр. 6 § 3.12).

4.4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 1. *Если $\{f_n\}$ — последовательность измеримых функций на измеримом пространстве X, принимающих конечные или бесконечные действительные значения^ то все четыре футкции h, g, f* и f_*, определяемые равенствами*

$$h(x) = \sup\{f_n(x) : n = 1, 2, \dots\},$$

$$g(x) = \inf\{f_n(x) : n = 1, 2, \dots\},$$

$$f^*(x) = \limsup_n f_n(x),$$

$$f_*(x) = \liminf_n f_n(x),$$

измеримы.

Доказательство. Общий случай легко сводится к случаю, когда функции принимают только конечные значения. Измеримость функции g следует из равенства

$$\{x : g(x) < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) < c\},$$

измеримость функции h — из соотношения

$$h(x) = -\inf\{-f_n(x) : n = 1, 2, \dots\}.$$

Равенства

$$f^*(x) = \inf_{n \geqslant 1} \sup_{m \geqslant n} f_m(x), \quad f_*(x) = \sup_{n \geqslant 1} \inf_{m \geqslant n} f_m(x)$$

влекут за собой измеримость функций f^* и f_*.

Из теоремы 1 вытекает, что множество точек, в которых сходится последовательность измеримых функций $\{f_n\}$, т. е. множество

$$\{x : \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x)\}$$

имеет измеримое пересечение со всяким измеримым множеством. Следовательно, функция f, определенная равенством $f(x) = \lim_n f_n(x)$ в тех точках x, в которых этот предел существует, измерима.

Большую пользу в теории измеримых функций приносит понятие простой функции. Функция f, заданная на измеримом пространстве X, называется *простой,* если можно указать конечный класс непересекающихся измеримых множеств $\{E_1, ..., E_n\}$ и конечное множество действительных чисел $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, такие, что

$$f(x)=\begin{cases} \alpha_i, & \text{когда } x \in E_i,\ i=1, \ldots, n, \\ 0, & \text{когда } x \overline{\in} E_1 \cup \ldots \cup E_n. \end{cases}$$

(Мы подчеркиваем, что значения простой функции суть *конечные* действительные числа; это важно для дальнейшего.)

Простейшим примером простой функции может служить характеристическая функция χ_E измеримого множества E. Нетрудно убедиться в том, что всякая простая функция измерима; в самом деле, простая функция f, отвечающая множествам E_i и числам α_i, может быть представлена в виде

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x).$$

Произведение двух простых функций, а также любая линейная комбинация простых функций представляют собой простые функции.

Теорема 2. *Всякая измеримая функция f, принимающая конечные или бесконечные действительные значения, представляет собой предел последовательности $\{f_n\}$ простых функций. В том случае, когда функция f неотрицательна, все f_n можно выбрать неотрицательными, притом так, что последовательность $\{f_n\}$ будет возрастающей.*

Доказательство. Сначала предположим, что $f \geq$. Для любого n= 1, 2, ... положим

$$f_n(x)=\begin{cases} \dfrac{i-1}{2^n}, & \text{если } \dfrac{i-1}{2^n} \leqslant f(x) < \dfrac{i}{2^n},\ i=1,\ 2, \ldots,\ 2^n n, \\ n, & \text{если } f(x) \geqslant n. \end{cases}$$

Ясно, что каждая f_n представляет собой неотрицательную простую функцию и последовательность $\{f_n\}$ — возрастающая. Если $f(x)<\infty$, то при любом n

$$0 \leqslant f(x)-f_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n};$$

если же $f(x)=\infty$, то $f_n(x)=n$, также при любом n. Вторая половина теоремы доказана. Первая половина доказывается применением полученного результата отдельно к функциям f^+ и f.

1. Понятия, введенные в этом и в предыдущем параграфах, а также все полученные здесь результаты, за исключением тех, в которых существенную роль играет упорядоченность множества

действительных чисел, переносятся на функции, принимающие комплексные значения.

2. Если в теореме 2 функция f ограничена, то последовательность $\{f_n\}$ можно выбрать так, чтобы она сходилась к f равномерно.

3. Допустив в определении простой функции выбор счетного числа множеств E_i и счетного числа соответствующих чисел α_i, мы придем к понятию *элементарной функции.* Всякая конечная измеримая функция служит пределом равномерно сходящейся последовательности элементарных функций.

4.5. СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ

В трех предыдущих параграфах была развита теория измеримых функций в тех пределах, в которых это разумно делать, не обращаясь к самому понятию меры. Начиная с этого момента, мы предполагаем, что пространство X, на котором заданы рассматриваемые нами функции, представляет собой пространство с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$. Если некоторое предложение, касающееся точек пространства с мерой, верно для всех точек за исключением некоторого множества, измеримого и имеющего меру нуль (может быть, пустого), то принято говорить, что это предложение верно для *почти всех* точек или верно *почти всюду.* Так, например, некоторая функция постоянна почти всюду, если есть такая постоянная c, что множество $\{x : f(x) \neq c\}$ имеет меру нуль. Функция f называется *существенно ограниченной,* если она ограничена почти всюду, т. е. если существует такая постоянная c, что множество $\{x : |f(x)| > c\}$ имеет меру нуль. Нижняя грань множества тех c, для которых только что высказанное утверждение справедливо, называется *существенной верхней гранью* функции $|f|$ и обозначается

$$\operatorname{sup\,vrai} |f|.$$

Пусть на пространстве X с мерой задана последовательность функций $\{f_n\}$, принимающих конечные или бесконечные действительные значения. Предположим, что эта последовательность сходится почти всюду к некоторой функции f. Это означает, что, каковы бы ни были $\varepsilon>0$ и точка x из $X—E_0$, где E_0 — некоторое фиксированное множество меры нуль (может быть пустое), можно указать такое целое число $n_0 = n_0(x, \varepsilon)$, что для всех $n \geq n_0$

$$f_n(x) < -\frac{1}{\varepsilon}, \text{ если } f(x) = -\infty,$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ если } -\infty < f(x) < \infty,$$

$$f_n(x) > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ если } f(x) = \infty.$$

Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n\}$, принимающих конечные значения, — *фундаментальная почти всюду,* если, каковы бы ни были $\varepsilon>0$ и точка x из $X—E_0$, где E_0 — некоторое определенное множество меры нуль, можно указать такое целое число $n_0 = n_0(x, \varepsilon)$, что для всех $n \geq n_0$ и $m \geq n_0$

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Очевидно, что если последовательность сходится почти всюду к некоторой конечной функции, то эта последовательность — фундаментальная почти всюду, и, обратно, всякая фундаментальная почти всюду последовательность сходится почти всюду к некоторой конечной функции. Далее, если последовательность сходится почти всюду к некоторой функции f и одновременно к некоторой другой функции g, то почти всюду $f(x) = g(x)$, т. е. предельная функция единственна с точностью до определения ее на некотором множестве меры нуль.

В дальнейшем нам придется иметь дело с различными видами сходимости, и всегда мы будем придерживаться аналогичной терминологии. Коль скоро введено какое-нибудь новое понятие сходимости, т. е. определено, в каком смысле f_n оказываются близкими к f при больших n, так без дальнейших пояснений мы будем пользоваться понятием последовательности, фундаментальной в этом новом смысле, т. е. такой, для которой при больших m и n разность $f_m —f_n$ близка в указанном смысле к нулю.

Первым из таких „новых" понятий сходимости появится равномерная сходимость почти всюду. Последовательность функций $\{f_n\}$ называется *почти всюду равномерно сходящейся* к функции /, если существует такое множество E_0 меры нуль, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать целое число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, обладающее тем свойством, что

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

для всех $n \geq n_0$ и для всех x из $X—E_0$. Другими словами, $\{f_n\}$ сходится равномерно (в обычном смысле) вне множества E_0. И в этом случае, как легко проверить, последовательность сходится равномерно почти всюду тогда й только тогда, когда она почти всюду равномерно фундаментальная.

Следующий результат, известный под названием *теоремы Егорова,* устанавливает связь сходимости почти всюду с равномерной сходимостью.

Теорема 1. *Пусть E — измеримое множество конечной меры и* $\{f_n\}$ *— последовательность почти всюду конечных измеримых функций, сходящаяся почти всюду на E к конечной измеримой функции f. Тогда для всякого* $\varepsilon > 0$ *в E существует измеримое подмножество F, такое, что* $\mu(F)<\varepsilon$, *и на множестве E—F последовательность* $\{f_n\}$ *сходится к f равномерно.*

Доказательство. Исключая из *E,* если это нужно, некоторое множество E_0 меры нуль, мы добьемся того, что $\{f_n\}$ будет сходиться во всех точках множества $E - E_0$. Поэтому мы вправе сразу предположить, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к f на всем E. Пусть

$$E_n^m = \bigcap_{i=n}^{\infty} \left\{ x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\},$$

тогда

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \ldots ,$$

и так как $\{f_n\}$ сходится к f на E, то

$$E \subset \lim_n E_n^m$$

при любом $m = 1, 2, \ldots$ Отсюда следует, что $\lim\limits_n \mu(E - E_n^m) = 0,$

поэтому для некоторого $n_0 = n_0(m)$

$$\mu(E - E_{n_0(m)}^m) < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

(Номер n_0 зависит от выбора ε, но ε в этом рассуждении фиксировано.) Если

$$F = \bigcup_{m=1}^{\infty} (E - E_{n_0(m)}^m),$$

то множество F измеримо, $F \subset E$ и

$$\mu(F) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}(E - E_{n_0(m)}^m)\right) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\mu(E - E_{n_0(m)}^m) < \varepsilon.$$

Каково бы ни было m, если $x \in E - F = E \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m$, то

$x \in E_n^m$, где $n \geq n_0(m)$, следовательно, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$. Таким образом, $\{f_n\}$ сходится на E— F равномерно.

Теорема Егорова подсказывает определение почти равномерной сходимости. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ почти всюду конечных измеримых функций *сходится почти равномерно* к функции f, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество F, такое, что $\mu(F)<\varepsilon$ и $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на F.

Пользуясь понятием почти равномерной сходимости, теорему Егорова можно сформулировать так: на множестве конечной меры сходимость почти всюду влечет за собой почти равномерную сходимость.

Теорема 2. *Если последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ сходится к f почти равномерно, то $\{f_n\}$ сходится к f почти всюду.*

Доказательство. Пусть F_n — измеримое множество, такое, что $\mu(F_n) < \frac{1}{n}$ и на F_n последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно. Положим $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, тогда

$$\mu(F) \leqslant \mu(F_n) < \frac{1}{n},$$

следовательно, $\mu(F) = 0$ и, очевидно, в любой точке x из F' последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$.

Заметим, что термин „почти равномерная сходимость", вполне установившийся, неудачен, так как он может неверно ассоциироваться со свойствами, имеющими место „почти всюду"; лучше подошло бы название вроде „сходимость, близкая к равномерной". Во всяком случае не следует смешивать почти равномерную сходимость со сходимостью, равномерной почти всюду.

1. Для всякой измеримой в смысле Лебега функции f можно найти функцию g, измеримую в смысле Бореля, такую, что $f(x) = g(x)$ почти всюду. (Указание. Пусть $E_r = \{x : f(x) < r\}$, где r— рациональное число. В силу теоремы 2 § 3.8, $E_r = F_r \Delta N_r$, где

F_r — борелевское множество, а N_r имеет меру нуль. Возьмем борелевское множество N меры нуль, содержащее $\bigcup\limits_r N_r$, и положим

$$g(x)=\begin{cases}0, & \text{когда } x\in N,\\ f(x), & \text{когда } x\overline{\in} N.)\end{cases}$$

2. Пусть E— измеримое множество, такое, что $0<\mu(E)<\infty$, и $\{f_n\}$ — почти всюду фундаментальная последовательность функций, измеримых и почти всюду конечных. Тогда существуют такая положительная постоянная c и такое измеримое подмножество $F\subset E$ положительной меры, что $|f_n(x)|<c$ для всех x из F и для всех n = 1, 2, ...

3. Пусть E — измеримое множество σ-конечной меры и $\{f_n\}$ — последовательность почти всюду конечных измеримых функций, сходящаяся почти всюду на E к некоторой конечной измеримой функции f. Тогда существует такая последовательность измеримых множеств $\{E_n\}$, что

$$\mu\left(E-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=0,$$

и на каждом E_i последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно. [Указание. Достаточно доказать это предложение для случая $\mu(E)<\infty$. Пользуясь теоремой Егорова, можно выбрать E_t таким образом, чтобы $\{f_n\}$ сходилась на E_i равномерно и $\mu\left(E-\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i\right)<\frac{1}{n}$.]

4. Пусть X—множество всех целых, положительных чисел, **S** — класс всех его подмножеств. Для E, принадлежащих S, положим $\mu(E)$ равным числу элементов множества E. Пусть χ_n — характеристическая функция множества $\{1,..., n\}$. Тогда последовательность $\{\chi_n\}$ сходится к 1 всюду на X, но эта последовательность не является фундаментальной в смысле почти равномерной сходимости. Таким образом, теорема Егорова не верна тогда, когда множество E имеет бесконечную меру.

5. Для всякой существенно ограниченной функции f положим $\|f\|=$

$= \sup \operatorname{vrai} |f|$. Тогда для того, чтобы последовательность существенно ограниченных функций *{f_n}*сходилась равномерно к *f* почти всюду, необходимо и достаточно условие $\lim\limits_n \|f_n - f\| = 0.$

6. Образует ли множество М всех существенно ограниченных измеримых функций с нормой $\|f\| = \sup \operatorname{vrai} |f|$ банахово пространство?

4.6. СХОДИМОСТЬ ПО МЕРЕ

В этом параграфе, как и в предыдущем, мы будем рассматривать произвольное фиксированное пространство с мерой *(X,* **S**, μ).

Теорема 1. *Пусть f и f_n, n* = 1, 2, ..., — *конечные измеримые функции на некотором множестве Е конечной меры и E_n*(ε)= *{x* : |*f_n(x)* —*f(x)*≥ ε}, *где* ε > 0 *произвольно. Последовательность {f_n) сходится к f почти всюду на Е тогда и только тогда, когда*

$$\lim_n \mu(E \mid \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m(\varepsilon)) = 0,$$

каково бы на было ε > 0.

Доказательство. Последовательность действительных чисел *{$f_n(x)$}* не сходится к действительному числу *f(x)* тогда и только тогда, когда существует такое ε >0, при котором точка *х* входит в *E_n(ε)* при бесконечно многих значениях *п.* Другими словами, если *D* — множество тех точек *х*, в которых *{$f_n(x)$}* не стремится к *f*(*x*), то

$$D = \bigcup_{\varepsilon>0} \limsup_n E_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \limsup_n E_n\left(\frac{1}{k}\right).$$

Следовательно, для того чтобы *E*∩*D* имело меру, равную нулю, (т. е. *{f_n}* сходилась бы к *f* почти всюду на *Е),* необходимо и достаточно выполнение равенства $\mu\left(E \cap \limsup\limits_n E_n(\varepsilon)\right) = 0$ при

любом ε > 0. Окончательно, утверждение теоремы следует из соотношений

$$\mu\left(E \cap \limsup_n E_n(\varepsilon)\right) = \mu\left(E \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m(\varepsilon)\right) = \lim_n \mu\left(E \cap \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m(\varepsilon)\right).$$

Осуществив ослабление условия, сформулированного в теореме 1, мы придем к еще одному виду сходимости, с которым часто приходится иметь дело в теории функций. Говорят, что последовательность почти всюду конечных измеримых функций {f_n} *сходится по мере* к функции f, если $\lim\limits_{n} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0$, каково бы ни было ε >0. В соответствии общим замечанием относительно терминологии (см. §4.5), функции $f_1, f_2, \ldots$ образуют последовательность, *фундаментальную по мере,* если, каково бы ни было ε > 0,

$$\mu\left(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$$

при $n, m \to\infty$.

Из теоремы 1 прямо следует, что если последовательность конечных измеримых функций сходится почти всюду к конечной функции (или является фундаментальной почти всюду) на некотором множестве E конечной меры, то она сходится на E также по мере (соотв. является фундаментальной по мере). Сейчас мы докажем это утверждение, не предполагая, что мера множества E конечна.

Теорема 2. *Почти равномерная сходимость влечет за собой сходимость по мере.*

Доказательство. Если $\{f_n\}$ сходится к f почти равномерно, то, каковы бы ни были положительные числа ε и δ, существует такое измеримое множество F, что $\mu(F) < \delta$ и $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, когда x принадлежит F' и n достаточно велико.

Теорема 3. *Если последовательность $\{f_n\}$ сходится по мере к f, то $\{f_n\}$—фундаментальная по мере. Если, кроме того, $\{f_n\}$ сходится по мере к g, то $f = g$ почти всюду.*

Доказательство. Первое утверждение следует из соотношения

$$\{x : |f_m(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset$$
$$\subset \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x : |f_m(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Для того чтобы доказать второе утверждение, заметим, что

$$\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset$$
$$\subset \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x : |f_n(x) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Так как при достаточно большом n мера обоих множеств в правой части последнего соотношения сколь угодно мала, то

$$\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

каково бы ни было ε > 0. Отсюда следует, что $f = g$ почти всюду.

В дополнение к этим сравнительно элементарным замечаниям приведем два несколько более глубоких результата, касающихся сходимости по мере.

Теорема 4. *Последовательность измеримых функций $\{f_n\}$, фундаментальная по мере, содержит подпоследовательность, сходящуюся почти равномерно.*

Доказательство. Для любого целого положительного k возьмем такое целое $\bar{n}(k)$, что $\mu\left(\left\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\right\}\right) < \frac{1}{2^k}$, когда $n \geqslant \bar{n}(k)$ и $m \geqslant \bar{n}(k)$. Положим

$n_1 = \bar{n}(1), \quad n_2 = (n_1 + 1) \cup \bar{n}(2), \quad n_3 = (n_2 + 1) \cup \bar{n}(3), \ \ldots$

Тогда $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ и функции $f_{n_1}, f_{n_2}, f_{n_3}, \ldots$ образуют бесконечную подпоследовательность последовательности $\{f_n\}$. Если

$$E_k = \left\{x : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\right\}$$

и $k \leqslant i \leqslant j$, то для любого x, не принадлежащего $E_k \cup E_{k+1} \cup \ \ldots$, выполняются неравенства

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |f_{n_m}(x) - f_{n_{m+1}}(x)| < \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Таким образом, последовательность $\{f_{n_i}\}$ равномерно фундаментальна на множестве $X - (E_k \cup E_{k+1} \cup \ldots)$. Так как

$$\mu(E_k \cup E_{k+1} \cup \ldots) \leqslant \sum_{m=k}^{\infty} \mu(E_m) < \frac{1}{2^{k-1}},$$

то теорема доказана.

Теорема 5. *Если $\{f_n\}$ — последовательность измеримых функций, фундаментальная по мере, то существует измеримая функция f, к которой $\{f_n\}$ сходится по мере.*

Доказательство. Согласно предыдущей теореме, существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, почти равномерно фундаментальная и, следовательно, сходящаяся почти всюду.

Положим $f(x) = \lim\limits_{k} f_{n_k}(x)$ для всех тех x, для которых такой предел существует. Заметим теперь» что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset$$
$$\subset \left\{x : |f_n(x) - f_{n_k}(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Мера первого множества справа, по предположению, сколь угодно мала при достаточно больших *n* и *n,* а мера второго стремится к нулю при $k \to \infty$, так как почти равномерная сходимость влечет за собой сходимость по мере.

1. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с вполне конечной мерой и $\{f_n\}$, $\{g_n\}$— последовательности конечных измеримых функций, сходящиеся по мере соответственно к f и g:

а) Последовательность $\{\alpha f_n + \beta g_n\}$, где α и β — действительные постоянные, сходится по мере к $\alpha f + \beta g$; $\{|f_n|\}$ сходится по мере к $|f|$.

б) Если f=0 почти всюду, то $\{f_n\}$ сходится по мере к f^2.

в) Последовательность $\{f_n g\}$ сходится по мере к fg. (Указание. Для заданного положительного числа δ существует постоянная c, такая, что если $E = \{x : |g(x)| \leqslant c\}$, то $\mu(X - E) < \delta$; поведение $\{f_n g\}$ можно рассмотреть отдельно на E и на $X—E$.)

г) Последовательность $\{f^2_n\}$ сходится по мере к f^2. (Указание. Применить утверждение „б" к $\{f_n - f\}$.)

д) Последовательность $\{f_n g_n\}$ сходится по мере к fg. (Указание. Выразить произведение через суммы и квадраты.)

е) Верны ли утверждения „а" — „д" тогда, когда мера μ не вполне конечна?

2. Всякая подпоследовательность фундаментальной по мере последовательности фундаментальна по мере.

3. Если $\{f_n\}$— последовательность, фундаментальная по мере, а $\{f_{n_i}\}$ и $\{f_{n_j}\}$— ее подпоследовательности, сходящиеся почти всюду соответственно к f и g, то $f = g$ почти всюду.

4. Пусть X—множество всех целых положительных чисел, $\mathbf{S}$ — класс всех его подмножеств, μ — мера на $\mathbf{S}$, определенная таким образом, что $\mu(E)$ равно числу элементов множества E. Для измеримых функций на X сходимость по мере эквивалентна равномерной сходимости.

5. Вытекает ли сходимость по мере из сходимости почти всюду на множестве бесконечной меры? (См. упр. 4 и упр. 4 §4.5).
6. Пусть X—замкнутый единичный интервал с лебеговской мерой. Если

$$E_n^i=\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right],\quad n=1,\ 2,\ \ldots,\quad i=1,\ \ldots,\ n,$$

и χ_n^i — характеристическая функция интервала E^i_n, то последовательность $\{\chi_1^1,\ \chi_2^1,\ \chi_2^2,\ \chi_3^1,\ \chi_3^2,\ \chi_3^3,\ \ldots\}$ сходится по мере к 0, но не сходится ни в одной точке.
7. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность измеримых множеств, $\{\chi_n\}$ — последовательность соответствующих характеристических функций. Последовательность $\{\chi_n\}$ фундаментальна по мере тогда и только тогда, когда $\rho(E_n,\ E_m)\to 0$ при $n,\ m\to\infty$. (Определение ρ см. в упр. 4 §3.3).

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

5.1. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПРОСТЫЕ ФУНКЦИИ

Простая функция

$$f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i},$$

заданная на пространстве с мерой $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$, *интегрируема,* если $\mu(E_i)<\infty$ для всех тех значений индекса i, при которых $\alpha_i\neq 0$.
Интеграл от f обозначается

$$\int f(x)\,d\mu(x),\quad \text{или}\quad \int f\,d\mu$$

и определяется равенством

$$\int f\,d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\mu(E_i).$$

(Если $\alpha_{i_0}=0$ и $\mu(E_{i_0})=\infty$, то $\alpha_{i_0}\mu(E_{i_0})=0$, в силу соглашения, принятого во введении, согласно которому $0\bullet\infty=0$.)

Если одновременно f может быть представлена в виде

$$f=\sum_{i=1}^{m}\beta_i\chi_{F_i},$$ то, в силу аддитивности

$$\mu, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(F_j);$$

таким образом, значение интеграла не зависит от представления f и определяется однозначно. Заметим, что абсолютная величина интегрируемой простой функции, произведение интегрируемой простой функции на постоянную, а также сумма двух интегрируемых простых функций представляют собой интегрируемые простые функции.

Если E— измеримое множество и f — интегрируемая простая функция, то, как легко видеть, произведение $\chi_E f$ является интегрируемой простой функцией. *Интеграл* от f *по множеству E* определяется равенством

$$\int_E f\,d\mu=\int\chi_E f\,d\mu.$$

Простейшим примером интегрируемой простой функции может служить характеристическая функция измеримого множества конечной меры; при этом $$\int\chi_E\,d\mu=\int_E d\mu=\mu(E).$$

В дальнейшем мы распространим понятие интеграла на класс функций, гораздо более широкий, чем класс интегрируемых простых функций. В то же время некоторые определения и формулировки (но не доказательства!) многих теорем опираются на столь элементарные свойства интеграла, что могут быть высказаны уже теперь. Поэтому, чтобы избежать ненужных повторений, мы условимся всюду в этом параграфе вместо „простая функция" говорить просто „функция". Таким образом, все теоремы этого параграфа будут иметь смысл сразу для того более широкого класса функций, который мы рассмотрим ниже. Доказательства же, проведенные здесь, приложимы только к простым функциям; доказательства для общего случая будут изложены несколько позднее.

Доказательства теорем 1 и 2 мы опускаем; они прямо следуют из определений, только в случае теоремы 1 потребуется еще совсем простой и очевидный подсчет.

Теорема 1. *Если f и g—интегрируемые функции, то для любых действительных* α *и* β

$$\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu.$$

Теорема 2. *Если интегрируемая функция f почти всюду неотрицательна, то* $\int f\, d\mu \geqslant 0.$

Теорема 3. *Если f* и *g — интегрируемые функции, такие, что почти всюду f≥g, то*

$$\int f\, d\mu \geqslant \int g\, d\mu.$$

Доказательство. Достаточно применить теорему 2 к функции *f—g* и воспользоваться теоремой 1 при $\alpha = 1,\ \beta = -1.$

Теорема 4. *Если f и g—интегрируемые функции, то*

$$\int |f+g|\, d\mu \leqslant \int |f|\, d\mu + \int |g|\, d\mu.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 3, взяв $|f| + |g|$ вместо *f* и $|f+g|$ вместо *g*.

Теорема 5. *Если f — интегрируемая функция, то*

$$\left| \int f\, d\mu \right| \leqslant \int |f|\, d\mu.$$

Доказательство. Достаточно применить теорему 3 сначала к функциям |*f*| и *f*, затем к |*f*| и —*f*.

Теорема 6. *Если f—интегрируемая функция,* α *и* β *— действительные числа и E— измеримое множество, такое, что* $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ *для всех x из E, то*

$$\alpha\mu(E) \leqslant \int_E f\, d\mu \leqslant \beta\mu(E).$$

Доказательство. Основное предположение этой теоремы может быть выражено неравенствами $\alpha\chi_E \leqslant f\chi_E \leqslant \beta\chi_E$, поэтому в случае $\mu(E) < \infty$ требуемый результат следует из теоремы 3. В случае $\mu(E) = \infty$ нужно прямо обратиться к определению интегрируемости.

Неопределенным интегралом функции *f* называется функция множества *v*, заданная на всевозможных измеримых множествах *E* равенством

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu.$$

Теорема 7. *Если интегрируемая функция f почти всюду неотрицательна, то ее неопределенный интеграл есть монотонная функция множества.*

Доказательство. Если *E* и *F* — измеримые множества и $E \subset F$, то почти всюду $\chi_E f \leqslant \chi_F f$ и требуемый результат следует из теоремы 3.

Функция множества *v*, заданная на всевозможных измеримых множествах в пространстве с мерой *(X,* **S**, μ*)* и принимающая лишь конечные значения, называется *абсолютно непрерывной,* если, каково бы ни было положительное число ε, существует такое положительное число δ, что $|\nu(E)| < \varepsilon$ для всякого измеримого множества *E,* удовлетворяющего условию $\mu(E) < \delta$.

Теорема 8. *Неопределенный интеграл интегрируемой функции представляет собой абсолютно непрерывную функцию множества.*

Доказательство. Если *с* — любое положительное число, превосходящее все значения |*f*|, то для любого измеримого множества *E* будет выполняться неравенство

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leqslant c\mu(E).$$

Теорема 9. *Неопределенный интеграл интегрируемой функции представляет собой счетно-аддитивную функцию множества.*

Доказательство. В том случае, когда *f*— характеристическая функция некоторого измеримого множества *E* конечной меры, счетная аддитивность ее неопределенного интеграла сводится к счетной аддитивности меры. Тогда, когда *f* — любая интегрируемая простая функция, она может быть представлена как линейная комбинация характеристических функций, откуда следует утверждение теоремы.

Пусть *f* и *g*— интегрируемые функции. Определим *расстояние* ρ (*f, g)* между *f* и *g* посредством равенства

$$\rho(f, g) = \int |f - g|\,d\mu.$$

Функция ρ оправдывает название „расстояние" во всех отношениях, за исключением одного. В самом деле, верны и тривиальны следующие свойства:

$\rho(f, f)=0, \quad \rho(f, g)=\rho(g, f), \quad \rho(f, g)\leqslant\rho(f, h)+\rho(h, g).$

Однако сходство с расстоянием нарушает следующее свойство ρ: из $\rho(f, g)=0$ не следует, что $f = g$. Расстояние между двумя интегрируемыми функциями равно нулю и тогда, когда функции совпадают почти всюду. В следующем параграфе мы ознакомимся с этим явлением ближе.

1. Если одна из двух простых функций интегрируема, то интегрируемо и их произведение.
2. Если E и F—измеримые множества конечной меры, то $\rho(\chi_E, \chi_F) =$ $= \mu(E \Delta F)$ (см. упр. 4 § 3.3 и упр. 7 § 4.6).
3. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — замкнутый единичный интервал с определенной на нем лебеговской мерой. Фиксируем какую-нибудь точку x_0 в X и полагаем $\nu(E) = \chi_E(x_0)$. Обладает ли ν свойством абсолютной непрерывности?
4. Если ν — абсолютно непрерывная функция множества, заданная на всевозможных измеримых множествах в некотором пространстве с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$, то $\nu(E) = 0$, каково бы ни было измеримое множество E, такое, что $\mu(E) = 0$.
5. Если пространство X с вполне конечной мерой состоит из конечного числа точек, то всякая конечная измеримая функция на X является интегрируемой простой функцией и все свойства интегралов от таких функций сводятся к свойствам конечных сумм.

5.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПРОСТЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы продолжаем рассматривать некоторое фиксированное пространство с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и снова вместо „простая функция" говорим „функция". Так как все методы, применяемые в этом параграфе (за исключением одного рассуждения в конце доказательства теоремы 4), основаны только на выводах предыдущего параграфа, то, когда мы обратимся к рассмотрению интегрируемых функций общего вида, как формулировки, так и доказательства следующих ниже теорем сохранятся без изменений.

Последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ назовем *фундаментальной в смысле сходимости в среднем* или просто *фундаментальной в среднем,* если $\rho(f_n, f_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Теорема 1. *Последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$, фундаментальная в среднем, является фундаментальной по мере.*

Доказательство. Для любого фиксированного положительного числа ε положим

$$E_{mn} = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon\},$$

Тогда

$$\rho(f_n, f_m) = \int |f_n - f_m| \, d\mu \geqslant \int\limits_{E_{m,n}} |f_n - f_m| \, d\mu \geqslant \varepsilon\mu(E_{mn}),$$

откуда $\mu(E_{mn}) \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Теорема 2. *Если $\{f_n\}$ —фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых функций и ν_n — неопределенный интеграл от f_n, $n = 1, 2, \ldots$, то*

$$\nu(E) = \lim_n \nu_n(E)$$

существует для всякого измеримого множества E и функция множества ν конечна и счетно-аддитивна.

Доказательство. Существование конечного предела $\nu(E)$, притом равномерного относительно E, следует из соотношений

$$|\nu_n(E) - \nu_m(E)| \leqslant \int |f_n - f_m| \, d\mu \to 0 \ \text{ при } \ m, \ n \to \infty.$$

Отсюда же вытекает, что ν конечно-аддитивна. Пусть теперь $\{E_n\}$ — последовательность непересекающихся измеримых множеств, соединение которых равно E. Для любых двух целых положительных чисел k и n будем иметь неравенство

$$\left|\nu(E) - \sum_{i=1}^{k} \nu(E_i)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\nu(E) - \nu_n(E)| + \left|\nu_n(E) - \sum_{i=1}^{k} \nu_n(E_i)\right| + \left|\nu_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) - \nu\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)\right|.$$

Первое и третье слагаемые справа становятся сколь угодно малыми при возрастании n. Когда достаточно большое значение n фиксировано, второе слагаемое можно сделать сколь угодно малым, выбрав достаточно большое k. Таким образом,

$$\nu(E) = \lim_k \sum_{i=1}^{k} \nu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i).$$

Будем говорить, что конечные функции множества ν_n, $n = 1, 2, \ldots$, заданные на **S**, *равностепенно абсолютно непрерывны,* если, каково бы ни было положительное число ε, существует такое положительное число δ, что $|\nu_n(E)| < \varepsilon$ для любого измеримого множества *E*, удовлетворяющего условию $\mu(E) < \delta$, и для всех *n*.

Теорема 3. *Если* $\{f_n\}$ *— фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых функций и* ν_n *— неопределенный интеграл от* f_n, $n = 1, 2, \ldots$, *то функции множества* ν_n *равностепенно абсолютно непрерывны.*

Доказательство. Пусть ε > 0; выберем целое положительное число n_0 таким образом, чтобы

$$\int |f_m - f_n|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

для $m \geq n_0$ и $n \geq n_0$. Пусть, далее, δ — такое положительное число, что для любого измеримого множества *E*, удовлетворяющего условию

$\mu(E) < \delta$, выполняются неравенства

$$\int_E |f_n|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_0$$

(см. теорему 8 § 5.1). Возьмем теперь произвольное измеримое множество *E* меры < δ и произвольное *n*. Если $n \leq n_0$, то

$$|\nu_n(E)| \leqslant \int_E |f_n|\, d\mu < \varepsilon;$$

если же $n > n_0$, то и тогда

$$|\nu_n(E)| \leqslant \int_E |f_n - f_{n_0}|\, d\mu + \int_E |f_{n_0}|\, d\mu < \varepsilon.$$

Следующая теорема не особенно важна в общем случае; поэтому как ее формулировка, так и доказательство будут относиться лишь к случаю простых функций.

Теорема 4. *Пусть* $\{f_n\}$ *и* $\{g_n\}$*—фундаментальные в среднем последовательности интегрируемых простых функций, сходящиеся по мере к одной и той же функции f. Если* ν_n *и* λ_n *— неопределенные интегралы соответственно от* f_n *и* g_n, $n=1, 2, \ldots$, *и если*

$$\nu(E) = \lim_n \nu_n(E), \qquad \lambda(E) = \lim_n \lambda_n(E),$$

где E — любое измеримое множество, то функции множества ν и λ тождественны.

Доказательство. Так как для любого ε>0

$$E_n=\{x:|f_n(x)-g_n(x)|\geqslant\varepsilon\}\subset$$
$$\subset\left\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{x:|f(x)-g_n(x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

то отсюда следует, что $\lim\limits_n \mu(E_n)=0.$ Поэтому если E — измеримое множество конечной меры, то в неравенстве

$$\int\limits_E|f_n-g_n|\,d\mu\leqslant\int\limits_{E-E_n}|f_n-g_n|\,d\mu+\int\limits_{E\cap E_n}|f_n|\,d\mu+\int\limits_{E\cap E_n}|g_n|\,d\mu$$

первое слагаемое справа не превосходит $\varepsilon\mu(E)$, а два других становятся сколь угодно малыми при достаточно большом n. Последнее утверждение основывается на теореме 3, согласно которой неопределенные интегралы от f_n и g_n равностепенно абсолютно непрерывны. Таким образом,

$$\lim_n|\nu_n(E)-\lambda_n(E)|=0$$

и, следовательно, $\nu(E)=\lambda(E)$. Так как ν и λ счетно-аддитивны, то равенство $\nu(E)=\lambda(E)$ верно и для измеримых множеств E σ-конечной меры.

Функции f_n и g_n — простые; следовательно, каждая из них определяется с помощью некоторого конечного класса измеримых множеств конечной меры. Если E_0— соединение множеств из таких классов, отвечающих всем f_n и g_n,то множество E_0 измеримо и имеет σ-конечную меру. При этом для любого измеримого множества E

$$\nu_n(E-E_0)=\lambda_n(E-E_0)=0$$

и, следовательно, $\nu(E-E_0)=\lambda(E-E_0)=0.$ Отсюда вытекает, что $\nu(E)=\nu(E\cap E_0)$, $\lambda(E)=\lambda(E\cap E_0)$, и теорема полностью доказана.

1. Является ли полным метрическим пространством множество всех интегрируемых простых функций, с определенным выше расстоянием ρ?
2. В обозначениях теоремы 2, если $\{E_n\}$ — последовательность непересекающихся измеримых множеств, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

сходится абсолютно. (Указание. Сумма этого ряда не зависит от порядка его членов).

5.3. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

Почти всюду конечная измеримая функция f, заданная в пространстве с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$, называется *интегрируемой,* если существует фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых простых функций $\{f_n\}$, сходящаяся по мере к f. *Интеграл* функции f обозначается

$$\int f(x)\, d\mu(x) \quad \text{или} \quad \int f\, d\mu$$

и определяется равенством

$$\int f\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu.$$

Из теоремы 4 § 5.2, если положить в ней $E = \bigcup_n N(f_n)$, будет следовать, что значение интеграла не зависит от выбора последовательности простых функций $\{f_n\}$, фигурирующей в его определении. В то же время из теоремы 2 следует, что значение интеграла всегда конечно, — на это мы обращаем особое внимание читателя. Заметим еще, что абсолютная величина интегрируемой функции, произведение интегрируемой функции на постоянную и сумма двух интегрируемых функций представляют собой интегрируемые функции; это вытекает из свойств последовательностей функций, сходящихся по мере и фундаментальных в среднем. Соотношения

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \quad \text{и} \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

показывают, что вместе с f интегрируемы также f^+ и f^-.

Если E— измеримое множество и $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых простых функций, сходящаяся по мере к f, то, как легко видеть, $\{\chi_E f_n\}$ представляет собой последовательность такого же рода, сходящуюся по мере к $\chi_E f$. Определим *интеграл* функции f *по множесту* E равенством

$$\int_E f\,d\mu = \int \chi_E f\,d\mu.$$

Вспомним, что теоремы §§ 5.1 и 5.2, за исключением теоремы 4 § 5.2, были сформулированы для произвольных интегрируемых функций, а доказаны лишь для простых функций. Дополним теперь эти доказательства.

Теоремы 1 и 2 § 5.1 вытекают прямо из простейших свойств предела. Теоремы 3—7 § 5.1 опираются на теорему 2 § 5.1, и доказательства их можно повторить дословно. Для доказательства теоремы 8 § 5.1, утверждающей абсолютную непрерывность неопределенного интеграла от f, возьмем фундаментальную в среднем последовательность интегрируемых простых функций, сходящуюся к f по мере. Для всякого измеримого множества E будем иметь неравенство

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leqslant \left|\int_E f_n\,d\mu\right| + \left|\int_E f_n\,d\mu - \int_E f\,d\mu\right|.$$

В его правой части первое слагаемое становится сколь угодно малым, когда достаточно мала мера E, так как f_n — простые функции, и для них теорема 8 §5.1 доказана. Что касается второго слагаемого, то оно стремится к нулю в силу самого определения $\int_E f\,d\mu$, и теорема 8 § 5.2 доказана полностью.

Еще проще доказательство счетной аддитивности неопределенного интеграла. В самом деле, в обозначениях предыдущего абзаца утверждение теоремы 9 § 5.1 получается непосредственно применением теоремы 2 § 5.2 к последовательности простых функций.

Доказательства теорем 1—3 § 5.2 основаны на самих результатах, а не на доказательствах предыдущего параграфа, следовательно, эти теоремы оказываются справедливыми и в общем случае. Будем говорить, что последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ *сходится в среднем* к интегрируемой функции f, если

$$\rho(f, f_n) = \int |f - f_n|\,d\mu \to 0$$

при $n\to\infty$. Наш первый результат, относящийся к этому понятию, как по своей формулировке, так и по методу доказательства очень близок к теореме 1 § 5.2.

Теорема 1. *Если последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ сходится в среднем к f, то $\{f_n\}$ сходится к f также по мере.*

Доказательство. Если для произвольного положительного числа ε положим

$$E_n = \{ x : |f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon \},$$

то

$$\int |f - f_n| \, d\mu \geqslant \int_{E_n} |f - f_n| \, d\mu \geqslant \varepsilon \mu (E_n),$$

следовательно, $\mu(E_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. *Если интегрируемая функция f почти всюду неотрицательна, то* $\int f \, d\mu = 0$ *тогда и только тогда, когда* $f = 0$ *почти всюду.*

Доказательство. Если $f = 0$ почти всюду, то в качестве последовательности интегрируемых простых функций, сходящейся по мере к f, можно взять последовательность функций, тождественно равных нулю; отсюда будет следовать, что $\int f \, d\mu = 0$. Чтобы доказать обратное, заметим, что если фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых простых функций $\{f_n\}$ сходится по мере к f, то все f_n можно считать неотрицательными, так как вместо f_n можно взять $|f_n|$. Условие $\int f \, d\mu = 0$ влечет за собой $\lim\limits_{n} \int f_n \, d\mu = 0,$

т. е., в силу неравенств $f_n \geqslant 0$, $\{f_n\}$ сходится в среднем к 0. Согласно теореме 1, $\{f_n\}$ сходится к 0 по мере, и из теоремы 3 § 4.6 следует, что $f = 0$ почти всюду.

Теорема 3. *Если f — интегрируемая функция и E — множество меры нуль, то*

$$\int_E f \, d\mu = 0.$$

Доказательство. Так как $\int_E f \, d\mu = \int \chi_E f \, d\mu,$ а характеристическая функция множества меры нуль почти всюду равна нулю, то сформулированное утверждение следует из теоремы 2.

Теорема 4. *Если интегрируемая функция f положительна почти всюду на некотором измеримом множестве E и*

$$\int_E f\,d\mu = 0,$$

то μ *(E)* = 0.

Доказательство. Положим $F_0 = \{ x : f(x) > 0 \}$ и $F_n = \left\{ x : f(x) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$. Согласно условию теоремы, множество $E - F_0$ имеет меру нуль, поэтому нам достаточно будет доказать, что $\mu(E \cap F_0) = 0$. А это следует из неравенств

$$0 = \int_{E \cap F_n} f\,d\mu \geqslant \frac{1}{n}\mu(E \cap F_n) \geqslant 0$$

и соотношения

$$F_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

откуда

$$\mu(E \cap F_0) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap F_n).$$

Теорема 5. *Если f — интегрируемая функция, такая, что*

$$\int_F f\,d\mu = 0$$

для всякого измеримого множества F, то f = 0 *почти всюду.*

Доказательство. Если $E = \{ x : f(x) > 0 \}$, то, согласно условию теоремы,

$$\int_E f\,d\mu = 0$$

и, в силу предыдущей теоремы, μ *(E)* = 0.

Применяя то же рассуждение к функции —*f*, придем к заключению, что и множество $\{ x : f(x) < 0 \}$ имеет меру нуль.

Теорема 6. *Если f — интегрируемая функция, то* $N(f) = \{ x : f(x) \neq 0 \}$ *есть множество σ-конечной меры.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых простых функций, сходящаяся по мере к *f*. При любом *n* = 1, 2, ... множество $N(f_n)$ имеет конечную меру. Если $E = N(f) - \bigcup_{n=1}^{\infty} N(f_n)$, а F — произвольное измеримое подмножество множества E, то из равенства

$$\int_F f\,d\mu = \lim_n \int_F f_n\,d\mu$$

и теоремы 5 следует, что f=0 почти всюду на E. А так как, в силу определения множества $N(f)$, функция f отлична от нуля на E, то $\mu(E) = 0$. Отсюда и из соотношения

$$N(f) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} N(f_n) \cup E$$

следует утверждение теоремы.

Иногда оказывается целесообразным применять символ

$$\int f\,d\mu$$

и к некоторым неинтегрируемым функциям. Так, например, если f—неинтегрируемая измеримая функция, принимающая конечные или бесконечные значения, и $f \geq 0$ почти всюду, то мы полагаем

$$\int f\,d\mu = \infty.$$

Наиболее широкий класс функций, для которых можно разумно определить $\int f\,d\mu$, образован теми f, для которых хотя бы одна из функций f^+ и f^- интегрируема. Для них мы полагаем

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu.$$

В правой части этого равенства только одно из слагаемых $\int f^+\,d\mu$ и $\int f^-\,d\mu$ может быть бесконечно, поэтому значение

$$\int f\,d\mu$$

может быть конечно или бесконечно, но оно не может свестиськ неопределенному выражению $\infty - \infty$. Мы будем в дальнейшем пользоваться таким расширенным понятием интеграла, хотя сам термин „интегрируемая функция" всегда будет употребляться в его первоначальном смысле.

1. Если X — пространство, состоящее из целых положительных чисел (см., например, упр. 4 § 4.6), то заданная на нем функция f интегрируема тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится абсолютно. Если это условие выполнено, то $\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$

2. Если f— неотрицательная интегрируемая функция, то ее неопределенный интеграл представляет собой конечную меру в классе всех измеримых множеств.

3. Если fинтегрируема, то, каково бы ни было ε> 0,

$$\mu(\{x : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}) < \infty.$$

4. Пусть g— конечная, возрастающая и непрерывная функция действительного переменного и $\bar{\mu}_g$—индуцированная ею мера Лебега — Стильтьеса (см. упр. 9 § 3.12). Если f—функция, интегрируемая относительно этой меры, то $\int f(x)\, d\bar{\mu}_g(x)$ называется *интегралом Лебега — Стильтьеса* функции f относительно g и обозначается $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dg(x).$ В частности, если $g(x) \equiv x$, то мы приходим к интегралу Лебега, который обозначается $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$

Если f—непрерывная функция, для которой множество $N(f)$ ограничено, то f—интегрируема в смысле Лебега.

5.4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 1. *Если* $\{f_n\}$ *— фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых простых функций, сходящаяся по мере к интегрируемой функции* f*, то*

$$\rho(f, f_n) = \int |f - f_n|\, d\mu \to 0 \ \text{\textit{при}}\ \ n \to \infty.$$

Таким образом, для всякой интегрируемой функции f *и для всякого положительного числа* ε *существует интегрируемая простая функция* g*, такая, что* $\rho(f, g) < \varepsilon.$

Доказательство. При любом фиксированном целом положительном m последовательность простых функций $\{|f_n - f_m|\}$— фундаментальная в среднем и сходится по мере к $|f - f_m|$. Поэтому

$$\int |f - f_m|\, d\mu = \lim_n \int |f_n - f_m|\, d\mu.$$

Утверждение теоремы следует из того факта, что последовательность $\{f_n\}$— фундаментальная в среднем.

Теорема 2. *Если $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых функций, то существует интегрируемая функция f, такая, что при* $n \to \infty$, $\rho(f, f_n) \to 0$, *и, следовательно,* $\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu.$

Доказательство. В силу теоремы 1, для всякого целого положительного n найдется интегрируемая простая функция g_n, такая, что $\rho(f_n, g_n) < \frac{1}{n}$. Последовательность интегрируемых простых функций $\{g_n\}$ оказывается, таким образом, фундаментальной в среднем. Пусть f— измеримая (и, следовательно, интегрируемая) функция, к которой $\{g_n\}$ сходится по мере. Имеем

$$0 \leqslant \left| \int f_n\, d\mu - \int f\, d\mu \right| \leqslant \int |f_n - f|\, d\mu = \rho(f_n, f) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(f_n, g_n) + \rho(g_n, f),$$

и требуемое утверждение вытекает из теоремы 1.

Для того чтобы кратко сформулировать следующую теорему, вспомним введенное в § 3.3 для функций множества понятие непрерывности сверху. Конечная функция множества v, заданная на некотором классе **E** множеств E, называется непрерывной сверху в 0, если, какова бы ни была убывающая последовательность множеств $\{E_n\}$ из **E**, такая, что $\lim_n E_n = 0$, имеет место соотношение

$$\lim_n \nu(E_n) = 0.$$

Пусть теперь $\{v_n\}$ — последовательность конечных функций множества, заданных на **E**; будем говорить, что функции v_n, образующие эту последовательность, *равностепенно непрерывны* сверху в 0, если для любой убывающей последовательности множеств $\{E_n\}$ из **E**, такой, что $\lim_n E_n = 0$, и для любого положительного числа ε существует целое положительное m_0, обладающее тем свойством, что $|\nu_n(E_m)| < \varepsilon,$ n=1, 2, ..., коль скоро $m \geq m_0$.

Теорема 3. *Последовательность интегрируемых функций* $\{f_n\}$ *сходится в среднем к интегрируемой функции f тогда и только тогда, когда* $\{f_n\}$ *сходится к f по мере и неопределенные интегралы от* f_n, n=1, 2, ..., *равностепенно абсолютно непрерывны и равностепенно непрерывны сверху в* 0.

Доказательство. Докажем сначала необходимость этих условий. Сходимость $\{f_n\}$ по мере и равностепенная абсолютная непрерывность неопределенных интегралов устанавливаются соответственно теоремой 1 § 5.3 и теоремой 3 § 5.2. Поэтому нам нужно доказать только равностепенную непрерывность сверху в 0.

Из сходимости $\{f_n\}$ к f в среднем следует, что, каково бы ни было ε > 0, существует целое положительное n_0, такое, что $\int |f - f_n|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ для $n \geqslant n_0$. Так как неопределенный интеграл от неотрицательной интегрируемой функции представляет собой меру (см. теорему 9 § 5.1), то, согласно теореме 5 § 3.3, неопределенный интеграл непрерывен сверху в 0. Пусть $\{E_n\}$ — какая-нибудь убывающая последовательность измеримых множеств с пустым пересечением; можно указать целое положительное m_0, такое, что для $m \geq m_0$

$$\int_{E_m} |f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\int_{E_m} |f_n - f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_0.$$

Отсюда, если $m \geq m_0$, то

$$\int_{E_m} |f_n|\, d\mu \leqslant \int_{E_m} |f_n - f|\, d\mu + \int_{E_m} |f|\, d\mu < \varepsilon$$

для всех целых положительных n. Равностепенная непрерывность в 0 неопределенных интегралов от f_n, n=1, 2, ..., установлена.

Переходим к доказательству достаточности высказанных условий. Так как соединение счетного числа измеримых множеств σ-конечной меры само является измеримым множеством σ-конечной меры, то таким, согласно теореме 7 § 5.3, должно быть множество

$$E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x : f_n(x) \neq 0 \}.$$

Пусть $\{ E_n \}$—возрастающая последовательность измеримых множеств конечной меры, такая, что $\lim\limits_n E_n = E_0$. Тогда если

$F_n = E_0 - E_n$, $n = 1, 2, ...$, то $\{ F_n \}$ — убывающая последовательность и

$$\lim_n F_n = 0.$$

По предположению, для всякого δ > 0 можно указать такое целое k, при котором

$$\int_{F_k} |f_n| \, d\mu < \frac{\delta}{2}$$

и, следовательно,

$$\int_{F_k} |f_m - f_n| \, d\mu \leqslant \int_{F_k} |f_m| \, d\mu + \int_{F_k} |f_n| \, d\mu < \delta.$$

Для любого фиксированного ε > 0 положим

$$G_{mn} = \{ x : |f_m(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon \};$$

тогда

$$\int_{E_k} |f_m - f_n| \, d\mu \leqslant \int_{E_k - G_{mn}} |f_m - f_n| \, d\mu + \int_{E_k \cap G_{mn}} |f_m - f_n| \, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\mu(E_k) + \int_{E_k \cap G_{mn}} |f_m - f_n| \, d\mu.$$

В силу сходимости $\{f_n\}$ по мере и равностепенной абсолютной непрерывности соответствующих неопределенных интегралов, второе слагаемое в последней части неравенств при достаточно больших m и n сколь угодно мало, поэтому

$$\limsup_{m,n} \int_{E_k} |f_m - f_n|\, d\mu \leqslant \varepsilon\mu(E_k).$$

Так как ε произвольно, то

$$\limsup_{m,n} \int_{E_k} |f_m - f_n|\, d\mu = 0.$$

Из равенств

$$\int |f_m - f_n|\, d\mu = \int_{E_0} |f_m - f_n|\, d\mu = \int_{E_k} |f_m - f_n|\, d\mu + \int_{F_k} |f_m - f_n|\, d\mu$$

мы заключаем, что

$$\limsup_{m,n} \int |f_m - f_n|\, d\mu < \delta$$

и, так как δ произвольно,

$$\limsup_{m,n} \int |f_m - f_n|\, d\mu = 0.$$

Мы доказали таким образом, что последовательность $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем; отсюда, согласно теореме 2, следует, что существует интегрируемая функция g, к которой $\{ f_n \}$ сходится по мере. А так как сходимость в среднем влечет за собой сходимость по мере, то $f=g$ почти всюду.

Следующий результат известен под названием теоремы Лебега об ограниченно сходящихся последовательностях функций.

Теорема 4. *Если последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ сходится к f по мере (или почти всюду) и почти всюду* $|f_n(x)| \leqslant |g(x)|,\ n = 1,\ 2,\ \ldots,$ *где g — некоторая интегрируемая функция, то f интегрируема и последовательность $\{ f_n \}$ сходится к f в среднем.*

Доказательство. В случае, когда $\{ f_n \}$ сходится к f по мере, наше утверждение прямо следует из теоремы 3; легко видеть, что выполнение условий этой теоремы, касающихся неопределенных интегралов, обеспечено неравенством

$$\int_E |f_n|\, d\mu \leqslant \int_E |g|\, d\mu.$$

Случай, когда имеет место сходимость почти всюду, может быть сведен к случаю сходимости по мере, в силу существования функции g (даже тогда, когда мера множества, по которому берутся интегралы, бесконечна; см. упр. 4 и 5 § 4.6). В самом деле, не нарушая общности, мы можем предположить, что неравенства $|f_n(x)| \leqslant$ $\leqslant |g(x)|$ и $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ выполняются для всех x из X. Тогда, каково бы ни было положительное ε,

$$E_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} \{x : |f_i(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{x : |g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

откуда следует, что $\mu(E_n) < \infty, \quad n = 1, \quad 2, \ldots$. Сходимость почти всюду влечет за собой равенство

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0,$$

поэтому, в силу теоремы 5 § 3.3,

$$\limsup_n \mu(\{x : |f_i(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \lim_n \mu(E_n) = \mu(\lim_n E_n) = 0.$$

Таким образом, последовательность, ограниченная интегрируемой функцией и сходящаяся почти всюду, сходится по мере. На этом доказательство теоремы заканчивается.

1. Является ли банаховым пространством множество всех интегрируемых функций с нормой $\|f\| = \int |f| \, d\mu$?

2. Пусть $\{f_n\}$ — равномерно фундаментальная последовательность функций, интегрируемых на измеримом множестве E конечной меры. Функция f, определяемая равенством $f(x) = \lim_n f_n(x)$, интегрируема на E, и

$$\int_E |f_n - f| \, d\mu \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

3. Для случая пространства с конечной мерой теорема 3 справедлива без предположения о равностепенной непрерывности неопределенных интегралов в 0.

4. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$—пространство целых положительных чисел, описанное в упр. 4 § 4.6.

а) Положим

$$f_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad k > n. \end{cases}$$

На этом примере мы видим, что условие равностепенной непрерывности неопределенных интегралов в 0 в общем случае не может быть опущено.

б) Тот же пример позволяет заключить, что из равномерной сходимости последовательности интегрируемых функций $\{f_n\}$ к интегрируемой функции f не следует, вообще говоря, что

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

(см. выше, упр. 2).

в) Пусть

$$f_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad k > n. \end{cases}$$

На этом примере нетрудно показать, что предел равномерно сходящейся последовательности интегрируемых функций может не быть интегрируемой функцией.

5. Пусть X—замкнутый единичный интервал, μ — лебеговская мера. Возьмем убывающую последовательность открытых интервалов E_n, такую, что $\mu(E_n) = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ На примере последовательности $\{n\chi_n\}$ мы убеждаемся в том, что условие ограниченности в теореме 4 не может быть опущено.

6. Если $\{f_n\}$ — последовательность интегрируемых функций, сходящаяся в среднем к интегрируемой функции f, а g — существенно ограниченная измеримая функция, то последовательность $\{f_n g\}$ сходится в среднем к fg.

7. Если $\{f_n\}$ — последовательность неотрицательных интегрируемых функций, сходящаяся почти всюду к интегрируемой функции f, и если

$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\{f_n\}$

сходится к f в среднем. (Указание. Пусть $g_n = f_n — f$. Тогда из неравенства $|f_n - f| \leqslant f_n + f$ следует, что $0 \leqslant g_n^- \leqslant f$. Применяя к последовательности $\{g_n^-\}$ теорему об ограниченной сходимости, мы получим требуемый результат из равенств

$$\int g_n^+ \, d\mu - \int g_n^- \, d\mu = 0, \; n = 1, 2, \ldots)$$

5.5. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА

Теорема 1. *Если f измерима, g интегрируема и $|f| \leqslant |g|$ почти всюду, то f интегрируема.*

Доказательство. Рассматривая отдельно положительную и отрицательную части функции f, мы сведем теорему к случаю, когда f неотрицательна. Если f— простая функция, то теорема очевидна. В общем случае существует возрастающая последовательность неотрицательных простых функций, такая, что $\lim\limits_n f_n(x) = f(x)$ для всех x из X. Так как $0 \leqslant f_n \leqslant |g|$, то каждая f_n интегрируема, и наше утверждение следует из теоремы об ограниченно сходящихся последовательностях.

Теорема 2. *Если $\{f_n\}$—возрастающая последовательность неотрицательных измеримых функций (могущих принимать и бесконечные значения) и f—предел этой последовательности в смысле сходимости почти всюду, то* $\lim\limits_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu,$

Доказательство. Когда f интегрируема, этот результат вытекает из теоремы об ограниченно сходящихся последовательностях и из теоремы 1. Таким образом, то новое, что содержится в этой теореме, относится к случаю неинтегрируемой f и состоит в том, что $\lim\limits_n \int f_n \, d\mu = \infty,$ коль скоро $\int f \, d\mu = \infty.$ Для доказательства этого мы покажем, что если $\lim\limits_n \int f_n \, d\mu < \infty,$ то f интегрируема. Пусть этот предел конечен, тогда

$$\lim_{m,\, n}\left|\int f_m\, d\mu - \int f_n\, d\mu\right| = 0.$$

Так как при фиксированных m и n функция $f_m - f_n$ не меняет знака, то

$$\left|\int f_m\, d\mu - \int f_n\, d\mu\right| = \int |f_m - f_n|\, d\mu,$$

и мы видим, что последовательность $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем. Согласно теореме 2 § 5.4, она сходится в среднем к некоторой интегрируемой функции g. Из сходимости в среднем следует сходимость по мере, следовательно, некоторая подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится к g почти всюду, откуда $f=g$ почти всюду.

Теорема 3. *Измеримая функция интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема ее абсолютная величина.*

Доказательство. Новым для нас в этой теореме является утверждение, что если $|f|$ интегрируема, то интегрируема и f. Это следует из теоремы 1, если вместо g взять $|f|$.

Теорема 4. *Если f интегрируема, а g существенно ограничена, то fg интегрируема.*

Доказательство. Если почти всюду $|g| \leqslant c$, то $|fg| \leqslant c|f|$ также почти всюду и интегрируемость fg следует из теоремы 3.

Теорема 5. *Если f — существенно ограниченная измеримая функция и E— измеримое множество конечной меры, то f интегрируема на E.*

Доказательство. Характеристическая функция измеримого множества конечной меры интегрируема, поэтому наше утверждение вытекает из теоремы 4, если в ней вместо f и g взять соответственно χ_E и f.

Следующее предложение носит название *леммы Фату.*

Теорема 6. *Если $\{f_n\}$ — последовательность неотрицательных интегрируемых функций, такая, что*

$$\liminf_{n} \int f_n\, d\mu < \infty,$$

то функция f, определенная равенством

$$f(x) = \liminf_{n} f_n(x),$$

интегрируема и

$$\int f\, d\mu \leqslant \liminf_{n} \int f_n\, d\mu.$$

Доказательство. Если $g_n(x) = \inf\{f_i(x) : n \leqslant i < \infty\}$, то $g_n \leqslant f_n$ и последовательность $\{g_n\}$—возрастающая. Так как

$\int g_n \, d\mu \leqslant$
$\leqslant \int f_n \, d\mu$, то

$$\lim_n \int g_n \, d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n \, d\mu < \infty.$$

Вместе с тем

$$\lim_n g_n(x) = \liminf_n f_n(x) = f(x);$$

следовательно, в силу теоремы 2, f интегрируема и

$$\int f \, d\mu \leqslant \lim_n \int g_n \, d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n \, d\mu.$$

1. Пусть g — интегрируемая функция, f—измеримая функция, причем почти всюду $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, где α, β— действительные числа. Тогда существует такое действительное число γ, $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$, что

$$\int f |g| \, d\mu = \gamma \int |g| \, d\mu.$$

Этот результат носит название *теоремы о среднем значении,* (Указание. Имеем неравенства

$$\alpha \int |g| \, d\mu \leqslant \int f |g| \, d\mu \leqslant \beta \int |g| \, d\mu.)$$

2. Если последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ такова, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, d\mu < \infty,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

сходится почти всюду к некоторой интегрируемой функции f и

$$\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\,d\mu.$$

(Указание. Примените теорему 2 к последовательности частичных сумм ряда $\sum f_n$.)

3. Если функции f и f_n, $n = 1, 2, ...$, интегрируемы и $|f_n(x)| < f(x)$ почти всюду, то функции f^* и f_*, определяемые равенствами

$$f^* = \lim_n \sup f_n(x), \quad f_* = \lim_n \inf f_n(x),$$

интегрируемы, и

$$\int f_*\,d\mu \leqslant \lim_n \inf \int f_n\,d\mu \leqslant \lim_n \sup \int f_n\,d\mu \leqslant \int f^*\,d\mu.$$

(Указание. Прибегая к рассмотрению положительной и отрицательной частей функций f_n, можно свести общий случай к случаю неотрицательных f_n и применить лемму Фату к последовательностям $\{f+f_n\}$ и $\{f-f_n\}$.)

4. Измеримая функция f интегрируема на измеримом множестве E конечной меры тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap \{x : |f(x)| \geqslant n\}).$$

(Указание. Применить метод суммирования Абеля.) Что можно утверждать в тех случаях, когда $\mu(E) < \infty$ или когда сумма берется от $n = 0$?

5. Пусть $\{E_n\}$— последовательность измеримых множеств и m — произвольное фиксированное целое положительное число. Если G — множество всех тех точек, которые входят в E_n по меньшей мере при m значениях номера n, то G измеримо и

$$m\mu(G) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

(Указание. Рассмотрите $\sum_{n=1}^{\infty} \int_G \chi_{E_n}(x)\,d\mu(x)$.)

6. Пусть f— конечная измеримая функция на пространстве $(X, \mathbf{S}, \mu)$ с вполне конечной мерой. Положим

$$s_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mu\left(\left\{x : \frac{k}{2^n} < f(x) \leqslant \frac{k+1}{2^n}\right\}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$\int f \, d\mu = \lim_n s_n$$

в том смысле, что если f интегрируема, то все ряды s_n сходятся абсолютно и существует их предел, равный интегралу от f; обратно, если хотя бы один из рядов s_n сходится абсолютно, то и все они сходятся абсолютно, существует $\lim\limits_n s_n$, функция f интегрируема и ее

интеграл равен этому пределу. (Указание. Достаточно рассмотреть случай, когда $f \geq 0$. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & \text{при } \dfrac{k}{2^n} < f(x) \leqslant \dfrac{k+1}{2^n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{при } f(x) = 0 \end{cases}$$

и применим теорему 2. Обратное утверждение можно получить так: из неравенств

$$f(x) \leqslant 2f_n(x) + \mu(X)$$

заключаем, что f интегрируема, после чего обращаемся к только что проведенному рассуждению.)

7. В следующих рассуждениях намечен другой, часто употребляемый подход к понятию интеграла. Пусть f—неотрицательная интегрируемая функция, заданная на пространстве с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$. Для любого измеримого множества E полагаем

$$a(E) = \inf\{f(x) : x \in E\}$$

и для любого конечного класса непересекающихся измеримых множеств

$$\mathbf{C} = \{E_1, \ldots, E_n\}$$

$$s(\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^{n} a(E_i) \mu(E_i).$$

Мы утверждаем, что верхняя грань множества чисел вида s (**C**) равна $\int f\,d\mu$. Если функция f простая, то это очевидно. В общем случае

рассмотрим неотрицательную простую функцию g, такую, что $g \le f$. Пусть

$$g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i};$$

взяв класс $\mathbf{C} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, получим для него неравенство

$$\int g\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a(E_i)\,\mu(E_i) = s(\mathbf{C}).$$

Отсюда следует, что если $\{g_n\}$— последовательность неотрицательных интегрируемых простых функции, сходящаяся к f, то

$$\lim_n \int f_n\,d\mu \leqslant \sup s(\mathbf{C})$$

и, следовательно,

$$\int f\,d\mu \leqslant \sup s(\mathbf{C}).$$

С другой стороны, так как всякое s (**C**) равно интегралу от некоторой функции g описанного типа, то

$$s(\mathbf{C}) \leqslant \int f\,d\mu.$$

а) Распространяется ли полученный здесь результат на неинтегрируемые неотрицательные функции?

б) Если f—интегрируемая функция на пространстве $(X, \mathbf{S}, \mu)$ с вполне конечной мерой и ее функция распределения g (см. упр. 11 §4.2) непрерывна, то

$$\int f\,d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dg(x)$$

(см. упр. 4 § 5.3). (Указание. Предположив, что $f \geq 0$, рассмотреть „интегральные суммы" $s(\mathbf{C})$ для того и другого интеграла и воспользоваться результатами упр. 7.)

6. ОБЩИЕ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА

6.1. ОБОБЩЕННЫЕ МЕРЫ

В этой главе мы рассмотрим одно обобщение понятия меры, не очень сложное, но полезное. В отличие от мер, те функции, которые мы предполагаем здесь изучить, могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Пусть на каком-нибудь σ-кольце **S** подмножеств множества X заданы две меры μ_1 и μ_2. Если для множеств E из **S** мы положим $\mu(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E)$, то μ будет, очевидно, некоторой мерой; то же справедливо и для любой конечной суммы мер. Иначе можно получить новую меру, снабдив исходную некоторым фиксированным неотрицательным множителем. Сочетая эти два приема, мы придем к выводу, что если $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$—конечное множество мер, а— $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ конечное множество неотрицательных чисел, то функция μ, определенная на **S** равенством

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i(E),$$

также представляет собой меру.

Иное положение возникнет, если в качестве коэффициентов мы будем брать числа произвольного знака. Если, например, μ_1 и μ_2— какие-нибудь две меры на **S**, то, определив μ равенством $\mu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E)$, мы столкнемся с двумя обстоятельствами. Во-первых, μ может оказаться отрицательной на некоторых E; это не только не вызывает серьезных возражений, но представляет значительный интерес и заслуживает изучения. Во-вторых, может случиться, что $\mu_1(E) = \mu_2(E) = \infty$ для некоторого множества E; вопрос о том, какой смысл следует при этом приписать $\mu(E)$, представляет затруднение, которое должно быть устранено с самого начала.

Для того чтобы избежать неопределенных выражений, мы условимся рассматривать разности двух мер только тогда, когда по крайней мере одна из них конечна. Это напоминает условие, принятое нами при распространении символа $\int f\,d\mu$ на некоторые неинтегрируемые функции. (Напомним читателю, что

$$\int f\,d\mu$$

определялся для тех измеримых функций, для которых по крайней мере одна из функций f^+ и f^- интегрируема, т. е. по крайней мере одна из функциймножества v^+ и v^-, определенных равенствами

$$\nu^+(E)=\int_E f^+\,du, \qquad \nu^-(E)=\int_E f^-\,d\mu,$$

представляет собой конечную меру.) Эту аналогию можно продолжить: если f—измеримая функция, для которой определен $\int f\,d\mu$,

то функция множества

$$\nu(E)=\int_E f\,d\mu$$

представляется в виде разности двух мер.

В предыдущих абзацах достаточно серьезно мотивировано введение следующего определения.

Обобщенной мерой будем называть действительную счетно-аддитивную функцию множества μ, заданную на классе всех измеримых множеств в измеримом пространстве $(X,$ **S**$)$ и обладающую, кроме того, следующими свойствами: μ (0) = 0 и из бесконечных значений ∞ и —∞ функция μ может принимать лишь какое-нибудь одно.

Заметим, что из условия счетной аддитивности вытекает следующее свойство обобщенной меры μ: для любой последовательности непересекающихся измеримых множеств $\{E_n\}$ сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

всегда имеет определенный смысл, т. е. такой ряд либо сходится, либо сумма его равна ∞ или —∞.

Понятия (вполне) конечной и (вполне) σ-конечной обобщенной меры определяются очевидным образом. Только вместо μ *{E)* в соответствующих определениях надо брать |μ *(E)* | или, что то же самое, вместо $\mu(E)<\infty$ требовать выполнения неравенств $-\infty<\mu(E)<\infty.$
Так, например, обобщенная мера μ вполне конечна, если само пространство *X* представляет собой измеримое множество и $|\mu(X)|<\infty.$

Ниже, мы докажем, что всякая обобщенная мера представляется в виде разности двух мер. Отсюда будет следовать, что можно было бы первоначально задать обобщенную меру на некотором кольце, а потом строить расширение, подобно тому как это делалось с мерами. Вместе с тем ясно, что такое изложение было бы пустой тратой времени, так как расширение всякой обобщенной меры можно будет получить, строя расширения соответствующих обычных мер.

Так же как в случае меры, прямо из определения обобщенной меры вытекает, что обобщенная мера конечно-аддитивна и, следовательно, субтрактивна.

Теорема 1. *Если* μ— *обобщенная мера, а E а F—измеримые множества, такие, что* $E\subset F$ *и* $|\mu(F)|<\infty,$ *то*

$$|\mu(E)|<\infty.$$

Доказательство. Имеем равенство

$$\mu(F)=\mu(F-E)+\mu(E).$$

Если в его правой части бесконечно только одно слагаемое, то бесконечно и μ *(F).* Если оба слагаемых справа бесконечны, то либо $\mu(F-E)=\mu(E)=\infty,$ либо $\mu(F-E)=\mu(E)=-\infty,$ так как, согласно определению, обобщенная мера не может принимать на **S** и значение ∞, и значение —∞; но тогда соответственно $\mu(F)=\infty$ или $\mu(F)=-\infty.$ Таким образом, значение μ *(F)* конечно только в том случае, когда оба слагаемых в правой части последнего равенства конечны, а это означает, что всякое измеримое подмножество множества конечной обобщенной меры имеет конечную обобщенную меру.

Теорема 2. *Если* μ — *обобщенная мера и* $\{E_n\}$*—последовательность непересекающихся измеримых множеств, такая, что*

$|\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)|<\infty,$ *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ *сходится абсолютно.*

Доказательство. Положим

$$E_n^+ = \begin{cases} E_n, & \text{если} \quad \mu(E_n) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad \mu(E_n) < 0, \end{cases}$$

и

$$E_n^- = \begin{cases} E_n, & \text{если} \quad \mu(E_n) \leqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad \mu(E_n) > 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n^+)$$

и

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^-\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n^-).$$

В правых частях последних двух равенств стоят ряды соответственно с положительными и отрицательными членами, и так как для μ по крайней мере одно из значений ∞ и $-\infty$ исключено, то хотя бы один из этих рядов сходится. В то же время сумма этих рядов представляет собой сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, поэтому в действительности сходятся, как $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n^+)$, так и $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n^-)$. Сходимость каждого изэтих рядов в отдельности равносильна абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$; теорема доказана.

Теорема 3. *Если* μ *— обобщенная мера,* $\{E_n\}$ *— монотонная последовательность измеримых множеств и если, в том случае, когда эта последовательность убывающая,* $|\mu(E_n)| < \infty$ *хотя бы при одном значении n, то*

$$\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n).$$

Доказательство. В случае возрастающей последовательности доказательство проходит так же, как для меры (см. теорему 4 § 3.3). Случай убывающей последовательности сводится к предыдущему переходом к дополнениям (см. теорему 5 § 3.3); то, что $|\mu(E_n)| < \infty$ при достаточно больших *n,* следует теперь из теоремы 1.

1. Сумма двух (вполне) σ-конечных мер представляет собой (вполне) σ-конечную меру. Верно ли аналогичное утверждение для обобщенных мер?
2. *Комплексной мерой* в классе **S** всех измеримых множеств некоторого измеримого пространства называется функция множества μ, такая, что $\mu(E) = \mu_1(E) + i\mu_2(E)$, где $E \in \mathbf{S}$, $i = \sqrt{-1}$ и μ_1, μ_2—обобщенные меры в смысле определения, приведенного в этом параграфе. Распространяются ли на комплексные меры теоремы 1—3?
3. Если обобщенная мера ц двояким образом представлена в виде разности мер, $\mu = \mu_1 - \mu_2$ и $\mu = \nu_1 - \nu_2$, то всегда ли $\mu_1 = \nu_1$ и $\mu_2 = \nu_2$?
4. Тот факт, что обобщенная мера может принимать только одно из бесконечных значений ∞ и — ∞, следует из условия аддитивности. (У к а з а н и е. Если $\mu(E) = \infty$ и $\mu(F) = -\infty$, то по крайней мере в одном из равенств

$$\mu(E) = \mu(E - F) + \mu(E \cap F),$$
$$\mu(F) = \mu(F - E) + \mu(E \cap F),$$
$$\mu(E \Delta F) = \mu(E - F) + \mu(F - E)$$

правая часть оказывается неопределенной.)

6.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ПЛОСКОЙ ФРАКТАЛЬНОЙ КРИВОЙ, ЗАДАЧА О СКАЧКЕ И ОБОБЩЕННЫЕ МЕРЫ

К настоящему времени реализовано несколько подходов к построению теории интегрирования по фрактальным кривым и по неспрямляемым кривым более обширных классов. В данном параграфе интегрирование по фрактальной кривой рассматривается как обобщенная функция или как обобщенная мера, т. е. мера со значениями в пространстве обобщенных функций. При таком подходе задача о фрактальном интегрировании оказывается связанной с одной краевой задачей для голоморфных функций, а именно с задачей о скачке.

6.2.1. Введение

Построение интеграла $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$ по фрактальному контуру является довольно актуальным вопросом. Так, одним из типичных примеров фрактальной кривой является трещина (в пластине, плите и т.п. Известно, что при решении краевых задач теории упругости в плоской области с прямолинейным разрезом, моделирующей плиту с трещиной, важную роль играет интеграл типа Коши по контуру трещины. Поэтому желательно уметь вычислять аналогичный интеграл по фрактальной кривой. Но такая кривая неспрямляема, и интеграл по ней в классическом смысле не существует. Имеется, однако, несколько способов определения этого интеграла в некотором обобщенном смысле.

В ряде работ интеграл определяется следующим образом. Пусть Г есть простая замкнутая жорданова кривая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, разбивающая ее на области D^+ и D^- так, что $\infty \in D^-$, и ориентированная положительным образом относительно D^+. Пусть на Г задана непрерывная функция *f(z)*. Если она является следом на Г непрерывной в $\overline{D^+}$ функции *u(z)* с интегрируемыми первыми производными, то для спрямляемой кривой Г формула Стокса дает

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = -\iint\limits_{D^+} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} dz\, d\bar{z}. \tag{1}$$

Для неспрямляемой кривой правая часть равенства (1) может служить определением левой. Как отмечает Дж. Харрисон, это замечание восходит к Уитни. При таком определении интеграла его можно вычислить, предварительно продолжив плотность *f*(*t*) с кривой Г в область D^+. Здесь возникает вопрос о существовании продолжения с требуемыми свойствами и о возможной зависимости интеграла от этого продолжения. В ряде работ этот вопрос решается в терминах условия Гёльдера. При $A \subset \mathbb{C}$, $0 < \nu \le 1$ класс Гёльдера $H_\nu(A)$ по определению состоит из непрерывных на множестве *A* функций *f*(*t*), для которых величина

$$h_\nu(f, A) \equiv \sup\left\{\frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\nu} : t_{1,2} \in A,\ t_1 \ne t_2\right\} \tag{2}$$

конечна. В ряде работ показано, что при условии

$$\nu > d - 1, \tag{3}$$

где *d* клеточная размерность множества Г (она же — его верхняя метрическая размерность, box dimension и т.п., продолжение Уитии функции $f \in H_\nu(\Gamma)$ имеет интегрируемые в $\overline{D^+}$ производные и правая часть (1) не зависит от выбора конкретного продолжения Уитни *v(z)*. Для определения интеграла по разомкнутой дуге Г предложен следующий прием. Пусть *a* и *b* - начало и конец дуги Г. Если эти точки можно соединить спрямляемой дугой γ, не имеющей с Г иных общих точек (в этом случае дуга Г названа достижимой), то Г ∪ γ есть простая замкнутая кривая, интегрирование по которой определено формулой (1), и можно положить

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma\cup\gamma} f(z)dz - \int_{\gamma} f(z)dz. \qquad \textbf{(4)}$$

В раде работ формула (1) исследуется с позиций геометрической теории интеграла. Если функция *f* первоначально задана во всей плоскости $\mathbb{C}$, то величину интеграла $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$ можно рассматривать как функцию, заданную на некотором множестве кривых, например, на множестве ломаных. На этом множестве задается метрика. Если интеграл непрерывен в этой метрике, то он продолжим по непрерывности на замыкание множества ломаных. В раде работ предполагается, что $f \in H_\nu(\Gamma)$, а метрика на множестве ломаных строится таким образом, чтобы соответствующее замыкание содержало все *d*-мерные кривые при заданном *d*, $1 < d \le 2$. Выясняется, что интеграл непрерывен в такой метрике при условии (3). Отметим, что вышеописанное продолжение интеграла реализуется все той же формулой (1).

В раде работ рассматривается определение интеграла по плоской разомкнутой неспрямляемой дуге с помощью конструкции, двойственной по отношению к только что описанному геометрическому продолжению. Значения интеграла от голоморфной функции *f* по дуге с началом *a* и концом *b* определяются здесь по формуле Ньютона-Лейбница $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = F(b) - F(a),\ F'(z) = f(z).$

Тем самым на линеале голоморфных вблизи Г функций задается функционал $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$, выясняются условия, при которых этот функционал непрерывен в норме пространства Гёльдера $H_\nu(\Gamma)$ и, следовательно, может быть продолжен на замыкание вышеупомянутого линеала в $H_\nu(\Gamma)$. Показано, что искомое продолжение интеграла имеет вид

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = -\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} k_{\Gamma}(z) dz\, d\bar{z}, \tag{5}$$

где *u(z)* есть продолжение *a* с Г в $\mathbb{C}$, имеющее интегрируемые частные производные и компактный носитель, а $k_{\Gamma}(z)$ однозначная ветвь функции

$$k_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z-b}, \tag{6}$$

выделенная посредством разреза по Г и условия $k_{\Gamma}(\infty) = 0$. Формула (5) установлена в предположении, что ядро k_{Γ} интегрируемо вблизи дуги Г в достаточно высокой степени. Определение интеграла (1) используется в ситуации, когда плотность *f* не является, вообще говоря, непрерывной функцией, но принадлежит пространству О.В. Бесова. Ее продолжение *u(z)* получается с помощью оператора продолжения типа Уитни.

Наконец. Т.Е. Объедков дал определение интеграла по неспрямляемой кривой средствами нестандартного анализа. Его стандартизация также приводит к формуле (1). Таким образом, все известные к настоящему времени версии обобщенного интегрирования по неспрямляемой кривой сводятся к формулам (1), (4), (5). Отметим, что формула (5) в отличие от (4) справедлива и в ситуации, когда дуга Г не является достижимой. Если же она достижима, то применение этих двух формул приводит к одинаковому результату.

Функционал

$$\int_{\Gamma} f(z)dz$$

оказывается при этом ограниченным по норме пространств Гёльдера или Бесова, но не пространства непрерывных функций. Вероятно, ограниченность функционала (1) или (4) в норме пространства *C*(Г) влечет спрямляемость кривой Г. Прямое доказательство этого предположения было получено Т.Е. Объедковым в его неопубликованной студенческой работе для случая, когда Г представляет собою график вещественной функции.

6.2.2. Интегрирование по фрактальной кривой как обобщенная функция

Как обычно, через $C^{\infty}(D)$ обозначаем множество всех заданных в области $D \subset \mathbb{C}$ функций, имеющих частные производные любого порядка, а через $C^{\infty}(D)$ — множество тех из них, которые имеют компактные носители в *D*. При $D = \mathbb{C}$ эти множества обозначаются через C^{∞} и C^{∞}_0 соответственно.

Согласно классической теории распределений любое распределение φ с носителем на Г может рассматриваться как интегрирование по Г некоторой обобщенной функции *f*

$$\varphi(\omega) = \int_\Gamma f(z)\omega(z)dz, \quad \omega \in C^\infty.$$

Если, в частности, $\omega(z) = 1$ на Г, то $\varphi(\omega)$ можно рассматривать как интеграл от функции по Г. Поэтому интегрирование по фрактальной кривой Г можно определить как обобщенную функцию с носителем Г, обладающую какими-либо дополнительными свойствами, позволяющими восстановить соответствующую плотность *f*. Чтобы охарактеризовать эти свойства, рассмотрим преобразования Коши распределений с носителями на Г. Преобразование Коши распределения φ, supp φ $\subset$ Г, есть определенная в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$функция

$$k_\varphi(z) = (2\pi i)^{-1}\varphi((\cdot - z)^{-1});$$

здесь распределение φ применяется к некоторой функции $\omega(t) \in C_0^\infty$, совпадающей с $(t-z)^{-1}$ вблизи Г. Очевидно, $k_\varphi(z)$ есть голоморфная в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Gamma$ функция и $k_\varphi(\infty) = 0$. Как обычно, мы отождествляем k_φ с распределением

$$k_\varphi(\omega) = \iint\limits_{\mathbb{C}} k_\varphi(x+iy)\omega(x+iy)dx\,dy, \quad \omega \in C_0^\infty(\mathbb{C}\setminus\Gamma).$$

Далее, рассмотрим распределение $E = (\pi z)^{-1}$ и свертку $\psi = \varphi * E$; она существует, поскольку носитель φ компактен. Пусть носитель функции $\omega \in C_0^\infty$ лежит в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Несложные преобразования дают

$$\psi(\omega) = -2i\iint\limits_{\mathbb{C}} k_\varphi(x+iy)\omega(x+iy)dx\,dy = -2ik_\varphi(\omega).$$

Таким образом, — $2ik_\varphi$ есть сужение ψ на $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Если Г имеет нулевую площадь и функция k_φ интегрируема вблизи Г, то распределение — $2ik_\varphi$ продолжимо на всю плоскость $\mathbb{C}$,и на C^∞_0 определено распределение

$$s_\varphi = \varphi * E + 2ik_\varphi. \tag{7}$$

Очевидно, supp $s_\varphi \subset$ Г. Вообще говоря, $s_\varphi \neq 0$; соответствующий пример дает распределение

$$\varphi = \frac{\partial\delta_a}{\partial\bar{z}}, \ a \in \Gamma.$$

Определение 1. Будем называть распределение φ с носителем на Г регулярным, если преобразование Коши этого распределения интегрируемо в любой конечной части плоскости и $s_\varphi = 0$.

Для регулярного распределения φ имеем

$\varphi * E = -2ik_\varphi$. Но $\frac{\partial E}{\partial \bar{z}} = \delta_0$,

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\varphi * E) = \varphi * \delta_0 = \varphi.$$

и $\varphi = -2i\frac{dk_\varphi}{\partial \bar{z}}$. Итак, регулярное распределение действует по формуле

$$\varphi(\omega) = 2i \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} k_\varphi(x+iy)dx\,dy = -\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} k_\varphi(z)dz\,d\bar{z}. \quad \textbf{(8)}$$

Если Г - спрямляемая кривая и $f \in L^1(\Gamma, ds)$, то интегрирование

$$\varphi(\omega) = \int\limits_\Gamma f(z)\omega(z)dz$$

является регулярным распределением. Его преобразование Коши есть интеграл типа К.оши

$$k_\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t-z}.$$

В почти всех (относительно *ds)* точках $t \in$ Г эта функция имеет некасательные предельные значения с обеих сторон, связанные соотношением

$$k_\varphi^+(t) - k_\varphi^-(t) = f(t). \quad (9)$$

Если $f \in H_\nu(\Gamma)$ и $\nu > 1/2$. то функция k_φ имеет непрерывные граничные значения на всей кривой Г за возможным исключением концов Г. если это разомкнутая дуга. Если кривая кусочно-гладкая, то это справедливо при любом *и*. Разумеется, в обоих этих случаях соотношение (9) выполняется во всех точках кривой Г за возможным исключением ее концов. Это наблюдение приводит к следующему определению интегрирования.

Определение 2. Будем называть регулярное распределение Г с носителем на Г интегрированием, если его преобразование Коши имеет предельные значения с обеих сторон в каждой точке Г (за возможным исключением концов Г, если это разомкнутая дуга). Разность (9) этих предельных значений есть плотность данного интегрирования.

Обсудим вопрос о существовании интегрирований на неспрямляемых кривых. Прежде всего отметим, что формула (1) определяет интегрирование по замкнутой неспрямляемой кривой с единичной плотностью. Его преобразование Коши есть характеристическая функция χ_Γ *(z)* области D^+, равная единице в этой области и нулю вне ее. Аналогично, формула (5) определяет интегрирование с единичной плотностью по разомкнутой дуге, а формула (6) — его преобразование Коши.

В общем случае вопрос о существовании интегрирования с заданной плотностью есть вопрос о разрешимости краевой задачи о восстановлении голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$функции по заданному скачку на кривой Γ, т. е. по краевому условию (9). Эта задача исследовалась Б.А.Кацом.

Им установлено, что градиент продолжения Уитни $f^w(z)$ функции $f \in H_\nu(\Gamma)$ (в обозначениях $f^w \equiv \mathcal{E}_0 f$) интегрируем вблизи Γ в любой степени, меньшей величины

$$p_1(\nu, d) = \frac{2-d}{1-\nu}.$$

При

$$\nu > d/2 \qquad (10)$$

эта величина больше двух, и функция

$$k(z) = u(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial u}{\partial \overline{\zeta}} \frac{d\zeta\, d\overline{\zeta}}{\zeta - z} \qquad \mathbf{(11)}$$

при$u(z) = f^w(z)\chi_\Gamma(z)$ дает решение краевой задачи (9) на замкнутой кривой Γ. Полагая в (8) $k_\varphi = k$, получаем интегрирование с плотностью *f*. На разомкнутой дуге Γ формула (11) также дает решение задачи о скачке (9), если положить в ней $u(z) = f^w(z)k_\Gamma(z)$, где k_Γ — логарифмическое ядро (5), и f^w должно иметь компактный носитель, т.е. $f^w = \xi\mathcal{E}_0 f$, а функция $\xi \in C_0^\infty$ равна единице вблизи Γ. Здесь, однако, возникают дополнительные условия разрешимости краевой задачи (9), связанные с тем, что на показатель интегрируемости $\frac{\partial u}{\partial \overline{\zeta}} = k_\Gamma(\zeta)\frac{\partial f^w}{\partial \overline{\zeta}}$ влияет логарифмическое ядро k_Γ. Если k_Γ интегрируемо вблизи точек *a* и *b* в степени *p,* то интеграл (11) имеет смысл при

$$\nu > 1 - (1 - p^{-1})(2 - d), \qquad (12)$$

а определяемая им функция *k(z)* имеет непрерывные предельные значения с обеих сторон на Γ \ *{a, b}* при условии (10). Если концы фрактальной дуги Γ можно соединить гладкой дугой γ, не имеющей с Γ общих внутренних точек, то k_Γ имеет вблизи точек *a* и *b* логарифмическую асимптотику. В таком случае показатель *p* в условии (12) можно устремить к бесконечности, и это условие совпадает с (3). Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть* Γ *есть замкнутая кривая клеточной размерности d, f* ∈ *H*$_\nu$*(Г) и выполнено условие* (10). *Тогда существует интегрирование по кривой* Γ с *плотностью f. На разомкнутой дуге* Γ *размерности d* *интегрирование с заданной плотностью $f \in H_\nu(\Gamma)$ существует, если кроме* (10) *выполнено условие* (12).

Замечание 1. Т.Е. Объедков доказал средствами нестандартного анализа, что на самоподобном фрактале функция (11) имеет непрерывные граничные значения на Г с обеих сторон не только при условии (10), но и при более слабом условии (3). Это значит, что на замкнутом самоподобтгом фрактале Г размерности *d* интегрирование с заданной плотностью $f \in H_\nu(\Gamma)$ существует при условии (3), а на разомкнутой — при условии (12).

Теперь рассмотрим вопрос о продолжениях интегрирований и об их порядках сингулярности. Обычно порядком сингулярности распределения φ называют такое число *n,* что

$$|\varphi(\omega)| \leq B\|\omega\|_{C^n(A)}, \quad \forall\omega \in C^\infty,$$

где положительная постоянная *B* не зависит от ω. а множество *A* содержит supp φ. Согласно (8) порядок сингулярности любого регулярного распределения не превосходит единицы, и поэтому любое такое распределение продолжимо до непрерывного функционала на C^1. Как мы отмечали выше, интегрирование по неспрямляемой кривой не может, по-видимому, быть распределением нулевого порядка (т.е. распределением типа меры). Однако покажем сейчас, что порядок сингулярности такого интегрирования все же ниже единицы.

Чтобы говорить о дробных порядках сингулярности, мы должны рассмотреть какую-нибудь шкалу пространств A_λ. $0 \leq \lambda \leq 1$, таких, что при $\lambda \to 0$ пространство A_λ приближается по своим свойствам к $C(\Gamma)$, а при $\lambda \to 1$ — к $C^1(\Gamma)$. В такой ситуации порядком сингулярности распределения φ относительно шкалы A_λ можно назвать точную нижнюю грань таких λ, что

$$|\varphi(\omega)| \leq B_\lambda\|\omega\|_{A_\lambda} \quad \forall\omega \in C_0^\infty,$$

где $B_\lambda > 0$ не зависит от ω.

Найдем порядок сингулярности интегрирования (8) относительно шкалы Гёльдера H_λ. Напомним, что норма в пространстве Гёльдера $H_\lambda(\Gamma)$ определяется равенством

$$\|\omega\|_{H_\lambda} = h_\lambda(\omega, \Gamma) + \sup\{|\omega(z)| : z \in \Gamma\}$$

(см. (2)).

Лемма 1. *Пусть* Г — *замкнутая кривая размерности* $d < 2$, $\omega \in C_0^\infty$, *а* $\tilde\omega$ — *продолжение Уити и сужения* $\omega|_\Gamma$ *в* $\mathbb{C}$ с *компактным носителем, т. е.* $\tilde\omega(z) = \xi(z)\mathcal{E}_0(\omega|_\Gamma)(z)$, *где* ξ *есть равная* 1 *вблизи* Г *функция класса* C_0^∞. *Если голоморфная в* $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ *функция K*(z) *ограничена в* $\mathbb{C}$,*то*

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}} K(z) dz\, d\overline{z} = \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \overline{z}} K(z) dz\, d\overline{z}. \quad \textbf{(13)}$$

Доказательство. Продолжение Уитни сохраняет модуль непрерывности, так что $\widetilde{\omega} \in H_1(\mathbb{C})$. Но тогда разность $w(z) = \omega(z) - \widetilde{\omega}(z)$ также принадлежит $H_\lambda(\mathbb{C})$, имеет компактный носитель, ограниченные первые производные и исчезает на Г. Разобьем плоскость на квадраты со стороной $\varepsilon > 0$ и обозначим через Δ_ε объединение тех из них, которые пересекают Г. При $d < 2$ площадь Δ_ε стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, и поэтому

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} K(z) dz\, d\overline{z} = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{\mathbb{C}\setminus\Delta_\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} K(z) dz\, d\overline{z} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial\Delta_\varepsilon} w(z) K(z) dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{Q \subset \Delta_\varepsilon} \int\limits_{\partial Q} w(z) K(z) dz,$$

где Q — входящие в Δ_ε квадраты рассматриваемого разбиения, а $\partial\Delta_\varepsilon$ и ∂Q — обычным образом ориентированные границы Δ_ε и Q соответственно. Каждый квадрат Q содержит точку $z_Q \in \Gamma$ и $w(z_Q) = 0$. Поскольку $|z - z_Q| \le \sqrt{2}\,\varepsilon$ при $z \in Q$. то

$$\left| \int\limits_{\partial Q} w(z) K(z) dz \right| = \left| \int\limits_{\partial Q} (w(z) - w(z_Q)) K(z) dz \right| \le 4\sqrt{2}\,\varepsilon^2 B_K h_1(\omega, \Gamma),$$

где B_K - верхняя граница K. Пусть m_ε есть число входящих в Δ_ε квадратов, тогда

$$\left| \sum_{Q \subset \Delta_\varepsilon} \int\limits_{\partial Q} w(z) K(z) dz \right| \le B m_\varepsilon \varepsilon^2, \quad B = 4\sqrt{2}\, h_1(w, \Gamma) B_K.$$

Но $m_\varepsilon \varepsilon^2$ есть площадь Δ_ε, и она стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 2. *Пусть* Г *есть замкнутая кривая размерности* d, *а* φ — *заданное на* Г *интегрирование. Тогда порядок сингулярности* φ *в шкале Гёльдера не превосходит* $d - 1$.

Доказательство. Пусть $\omega \in C_0^\infty$, $0 < \lambda \le 1$. Очевидно, $\omega|_\Gamma \in H_\lambda(\Gamma)$. Тогда продолжение Уитни $\mathcal{E}_0(\omega|_\Gamma)$ принадлежит пространству $H_\lambda(\mathbb{C})$. причем $h_\lambda(\mathcal{E}_0(\omega|_\Gamma), \mathbb{C}) = h_\lambda(\omega, \Gamma)$. Следовательно,

$$\left| \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \mathcal{E}_0(\omega|_\Gamma) \right| \le h_\lambda(\omega, \Gamma)(\mathrm{dist}(z, \Gamma))^{\lambda - 1} \le \|\omega\|_{H_\lambda} (\mathrm{dist}(z, \Gamma))^{\lambda - 1}.$$

При построении функции $\widetilde{\omega}(z) = \xi(z) \mathcal{E}_0(\omega|_\Gamma)(z)$ сомножитель $\xi \in C_0^\infty$ можно выбрать так, чтобы любая точка носителя ξ была удалена от Г не более, чем на 1. Если при этом

$\left|\frac{\partial\xi}{\partial\bar z}\right| \le B,\ B \ge 1$

то
$$\left|\frac{\partial\tilde\omega}{\partial\bar z}\right| = \left|\frac{\partial\xi}{\partial\bar z}\mathcal{E}_0(\omega|_\Gamma) + \xi\frac{\partial\mathcal{E}_0(\omega|_\Gamma)}{\partial\bar z}\right| \le B\|\omega\|_{H_\lambda}(\operatorname{dist}(z,\Gamma))^{\lambda-1}.$$

Согласно лемме 1 теперь получим
$$|\varphi(\omega)| \le B\|\omega\|_{H_\lambda}\iint\limits_{\operatorname{supp}\xi}|k_\varphi(z)|(\operatorname{dist}(z,\Gamma))^{\lambda-1}|dz\,d\bar z|, \qquad (14)$$

где B зависит от ξ, но не от ω. Поскольку функция k_φ здесь ограничена, то доказательство сводится к вопросу: при каких значениях $p > 0$ функция $(\operatorname{dist}(z,\Gamma))^{-p}$ интегрируема вблизи Г?
Показано, что это так при $p < 2 - d$. Неравенство $1 - \lambda < 2 - d$ равносильно условию $\lambda > d - 1$.
Следствие 1. Пусть Г есть замкнутая кривая размерности d. Любое заданное на Г интегрирование φ продолжимо по непрерывности на пространства Гёльдера $H_\lambda(\Gamma)$ при $\lambda > d - 1$. Продолженный функционал определяется формулой
$$\varphi(g) = -\iint\limits_{\mathbb{C}}\frac{\partial g^w}{\partial\bar z}k_\varphi(z)dz\,d\bar z, \quad g\in H_\lambda(\Gamma), \qquad (15)$$

где $g^w = \xi\mathcal{E}_0 g$, $\mathcal{E}_0$ — оператор продолжения Уитни с множества Г в плоскость $\mathbb{C}$, а $\xi \in C_0^\infty$ и $\xi(z) = 1$ вблизи Г.

Доказательство вытекает из теоремы 2 и непрерывности оператора Уитни $\mathcal{E}_0$.

Таким образом, хотя интегрирование существует, вообще говоря, лишь для плотности f, удовлетворяющей условию Гёльдера с показателем $\nu > d/2$, оно позволяет вычислить интеграл
$\varphi(g)\ \left(=\int_\Gamma f(t)g(t)dt\right)$

при любом $g\in H_\lambda(\Gamma),\ \lambda > d-1$. Если $f(t) \ne 0$ на Г, то произведение fg пробегает все пространство $H_\lambda(\Gamma)$.
Если Г — разомкнутая дуга, то преобразование Коши интегрирования по Г уже не обязано быть ограниченным. На концах дуги оно может иметь особенности. Однако доказательство леммы 1 нетрудно перенести на случай, когда функция $K(z)$ ограничена вне произвольной окрестности концов дуги Г и интегрируема внутри этой окрестности. Оценивая правую часть (14) с помощью неравенства Гёльдера,

нетрудно убедиться, что функционал φ ограничен по норме H_λ при условии

$\lambda > 1 - (2 - d)(1 - p^{-1}) = d - 1 + (2 - d)p^{-1}$ (16)

где p — показатель интегрируемости преобразования Коши k_φ. В частности, если функция k_φ интегрируема вблизи концов Г в любой степени, то получим ту же оценку для порядка сингулярности φ, что и в теореме 2.

Теперь перейдем к вопросам единственности интегрирований и интегралов. Прежде всего решим вопрос о единственности интегрирования с заданной плотностью, или, иначе говоря, о существовании нетривиальных интегрирований с нулевой плотностью. Преобразование Коши интегрирования по замкнутой кривой Г с нулевой плотностью представляет собой непрерывную в $\overline{\mathbb{C}}$ и голоморфную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функцию, обращающуюся в нуль в точке ∞. Если Г — спрямляемая кривая, то такая функция есть тождественный нуль по теореме Пенлеве. Это означает, что интегрирование по спрямляемой кривой единственным образом определяется своей плотностью, т. е. на спрямляемой кривой нет никаких интегрирований, кроме классических. Если же Г — неспрямляемая кривая размерности Хаусдорфа $d_H > 1$, то существуют нетривиальные функции, голоморфные в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ и непрерывные в $\overline{\mathbb{C}}$. Известные примеры таких функций имеют вид

$$k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \tag{17}$$

где μ — мера Хаусдорфа на кривой Г, а E - такое подмножество Г, что $0 < \mu(E) < \infty$. Ясно, что функция (17) является преобразованием Коши меры μ, т.е. распределения, действующего по формуле

$$\mu(\omega) = \int_E \omega(\zeta) d\mu(\zeta). \tag{18}$$

Интересно, что порядок сингулярности интегрирования μ с нулевой плотностью оказывается равным нулю, т. е. оно продолжимо на пространство всех непрерывных на Г функций, и в этом смысле ведет себя лучше "естественного" интегрирования (1). Обозначим через W_Γ множество всех интегрирований с нулевой плотностью, заданных на Г, а через $\widetilde{W}_\Gamma$ — множество их преобразований Коши. Если Г — замкнутая кривая, то $\widetilde{W}_\Gamma$ состоит из всех голоморфных в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ и непрерывных в $\overline{\mathbb{C}}$ функций, обращающихся в нуль в точке ∞; если же Г — разомкнутая дуга, то входящие в $\widetilde{W}_\Gamma$ функции могут иметь интегрируемые особенности на концах Γ. Таким образом, на замкнутой кривой множество $\widetilde{W}_\Gamma$ имеет структуру банаховой алгебры. Вермер рассматривал алгебру голоморфных в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ и непрерывных в $\overline{\mathbb{C}}$ функций для случая, когда Γ дуга ненулевой площади. Многими свойствами алгебры Вермера обладают и алгебры $\widetilde{W}_\Gamma$. Так, повторяя рассуждения Вермера, нетрудно показать, что если множество $\widetilde{W}_\Gamma$ не сводится к тождественному нулю, то оно содержит три функции, разделяющие точки $\overline{\mathbb{C}}$, и любая функция из этого множества принимает на Γ все значения, которые она принимает в $\overline{\mathbb{C}}$.

Если φ есть интегрирование на Γ с плотностью f и $\psi \in W_\Gamma$, то $\varphi + \psi$ есть интегрирование с той же плотностью, так что при $W_\Gamma \neq \{0\}$ (в частности, при $d_H > 1$) интегрирование восстанавливается по заданной плотности неедипственным образом. Однако из множества всех интегрирований нередко можно выбрать одно, обладающее каким-либо дополнительным свойством. Так. согласно теореме Е.П.Долженко всякая функция $F \in H_\mu(\overline{U})$ (где $U \supset \Gamma$ — область в $\mathbb{C}$), голоморфная в $U \setminus \Gamma$, должна быть голоморфной в U при $\mu > d_H - 1$. В связи с этим введем в рассмотрение следующие классы голоморфных функций. Пусть $0 < \mu \leq 1$. Будем относить голоморфную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функцию F к классу $\mathcal{H}_\mu(\Gamma)$, если у любой точки $t \in \Gamma$ (за исключением концов Γ, если Γ — разомкнутая дуга) имеется такая окрестность U_t в $\mathbb{C}$, что F удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ, в замыкании любой связной компоненты $U_t \setminus \Gamma$. Пусть Γ — замкнутая кривая, тогда $F \in \mathcal{H}_\mu(\Gamma)$, если

$F|_{D^+} \in H_\mu(\overline{D^+})$ и $F|_{D^-} \in H_\mu(\overline{D^-})$.

Из теоремы Е.П.Долженко следует

Теорема 3. *Если* $\mu > d_H - 1$, *то существует, не более одного интегрирования с заданной плотностью, преобразование Коши которого принадлежит классу* $\mathcal{H}_\mu(\Gamma)$.

В частности, функция (11) принадлежит классу $\mathcal{H}_\mu(\Gamma)$ при $\mu < 1 - 2p_1^{-1}(\nu, d)$. Это следует из классических оценок интеграла, входящего в формулу (11). Отсюда получаем

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того,

$$d_H - 1 < \mu < \frac{2\nu - d}{2 - d}. \tag{19}$$

Тогда существует единственное интегрирование с плотностью $f \in H_\nu(\Gamma)$, преобразование Коши которого принадлежит классу $\mathcal{H}_\mu(\Gamma)$.

Кроме вопроса о единственности интегрирования с заданной плотностью, возникает вопрос о единственности интеграла, т. е. о выполнении равенства

$$\varphi_1(g_1) = \varphi_2(g_2) \tag{20}$$

при условии, что φ_j есть интегрирование с плотностью f_j, $j = 1,2$, и

$$f_1(t)g_1(t) = f_2(t)g_2(t), \quad t \in \Gamma. \tag{21}$$

Как мы только что видели, равенство (20) может быть нарушено даже при $f_1 = f_2$, $g_1 = g_2$, поскольку условие $f_1 = f_2$ не влечет, вообще говоря, совпадения интегрирований φ_1 и φ_2. Однако сейчас мы покажем, что условие (21) все же влечет равенство (20), если $\varphi_{1,2}$— это те интегрирования, о которых идет речь в теореме 3 и следствии 2. Преобразования Коши этих интегрирований имеют вид (11). Подставив эти функции в (15), после стандартных преобразований получим (20). Таким образом, справедливо

Следствие 3. Пусть Г есть кривая клеточной размерности *d* и размерности Хаусдорфа d_{Ht}, а $f_j \cdot g_j$ - заданные на ней функции, $j = 1,2$. Если $f_j \in H_\nu(\Gamma)$, $g_j \in H_\lambda(\Gamma)$, $j = 1, 2$, причем числа ν и λ удовлетворяют условиям $\nu > d/2$, $\lambda > d - 1$ и (19) (в случае, когда Г есть разомкнутая дуга, то сюда нужно добавить условия (12) и (16)), а φ_j — интегрирование с плотностью f_j и преобразованием Коши из класса $\mathcal{H}_\mu(\Gamma)$, то из равенства (21) следует (20).

В частности, полагая $f_2 \equiv 1$, убеждаемся, что вычисление значений интегрирования, о котором идет речь в следствии 2, сводится к вычислению интегрирований с единичной плотностью (1), (4), (5).

6.2.3. Обобщенные меры

Наше определение интегрирования основано на формуле (9), позволяющей восстановить по интегрированию его плотность. Однако было бы интересно уметь восстанавливать плотность посредством предельного перехода типа дифференцирования интеграла по верхнему пределу. Для этого нужно определить интегрирования по частям γ кривой Г, которые могут затем стягиваться в точку. Если φ — интегрирование на Г, $U \subset \mathbb{C}$ есть открытое множество и $\gamma = \Gamma \cap U$, то можно определить интегрирование по γ как сужение φ на *U*. Но тогда мы можем применять φ только к функциям с носителями в *U*, т. е.

нельзя применить последовательность таких сужений, соответствующих стягивающейся в точку последовательности множеств *U*, к одной и той же пробной функции ω. Значит, желая осуществить вышеописанный предельный переход, мы должны с самого начала рассматривать не одно распределение φ, а семейство распределений, каждое из которых представляет собой интегрирование по некоторой дуге $\gamma \subset \Gamma$.

Определение 3. Система дуг $a(\Gamma)$ состоит из всевозможных дуг кривой Г, направление обхода которых индуцировано ориентацией Г. Она содержит как замкнутые (т.е. содержащие свои концы) дуги, так и открытые (т. е. не содержащие своих концов) и полуоткрытые (т. е. содержащие один из концов). С каждой из дуг $\gamma \in a(\Gamma)$ мы связываем ее начало $b(\gamma)$, конец $e(\gamma)$ и хорду $c(\gamma) = e(\gamma) - b(\gamma)$.

Определение 4. Обобщенной мерой на Г будем называть отображение $\varphi : a(\Gamma) \to \mathcal{D}'(\mathbb{C})$, ставящее в соответствие каждой дуге $\gamma \in a(\Gamma)$ обобщенную функцию $\varphi(\gamma, \bullet)$ таким образом, что:

а) $\operatorname{supp} \varphi(\gamma, \cdot) \subset \overline{\gamma}$;

б) если $\gamma_1, \gamma_2, \ldots,$ - конечная или счетная система попарно непересекающихся дуг, составляющих в совокупности одну дугу γ, то

$$\varphi(\gamma, \cdot) = \varphi(\gamma_1, \cdot) + \varphi(\gamma_2, \cdot) + \cdots ; \qquad \textbf{(22)}$$

если система $\{\gamma_j\}$ счетна, то равенство (22) означает, в частности, что ряд в его правой части сходится.

С каждой точкой $t \in \Gamma$ свяжем однопараметрическое семейство дуг $\gamma_{t,\varepsilon}$. При фиксированном $\varepsilon > 0$ дуга $\gamma_{t,\varepsilon}$ представляет собою связную компоненту пересечения $\Gamma \cap \{z : |t - z| \leq \varepsilon\}$. содержащую точку *t*.

Определение 5. Будем говорить, что обобщенная мера φ имеет плотность $f = f(t)$ в точке $t \in \Gamma$, если для любой функции $\omega \in C_0^\infty$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{c(\gamma_{t,\varepsilon})} \varphi(\gamma_{t,\varepsilon}, \omega) = f(t)\omega(t). \qquad (23)$$

Иначе говоря, обобщенная мера φ имеет плотность $f(t)$, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{c(\gamma_{t,\varepsilon})} \varphi(\gamma_{t,\varepsilon}, \cdot) = f(t)\delta_t. \qquad (23^1)$$

Теперь приведем некоторые примеры обобщенных мер и вычислим их плотности.

6.2.4. Примеры

1. Простейшим примером обобщенной меры является обычная мера на Г. Если μ есть заданная на Г конечная мера, то ее можно отождествить с обобщенной мерой φ_μ, действующей по правилу

$$\varphi_\mu(\gamma, \omega) = \int_\gamma \omega\, d\mu. \tag{24}$$

Если Г есть самоподобный фрактал размерности *d*, 1 < *d* < 2, то Г есть *d*-множество. т.е. *d*-мерная мера Хаусдорфа μ удовлетворяет неравенству

$$C^{-1} r^d \le \mu(\Gamma \cap \{z : |z - t| \le r\}) \le C r^d,$$

где постоянная *C* не зависит ни от $t \in \Gamma$, ни от $r \in (0,1]$. В частности, $\mu(\gamma_{t,\varepsilon}) \le C\varepsilon^d$. Для многих классических фракталов $c(\gamma_{t,\varepsilon}) \ge c'\varepsilon$, где c' не зависит от ε. Тогда предел (23) есть нуль, т. е. соответствующая обобщенная мера имеет плотность нуль в каждой точке кривой. Напомним, что порождаемое мерой Хаусдорфа интегрирование (18) имеет плотность нуль в смысле предыдущего параграфа.
Очевидно, условие аддитивности (22) позволяет продолжить всякую обобщенную меру с семейства дуг $a(\Gamma)$ на множество $a_{\text{fin}}(\Gamma)$, содержащее всевозможные конечные объединения дуг семейства $a(\Gamma)$. Обсуждаемые в данном пункте обычные меры продолжимы, кроме того, на σ-алгебру $a_\sigma(\Gamma) \supset a_{\text{fin}}(\Gamma)$, содержащую все счетные объединения дуг. В следующем пункте рассмотрим меры, не обладающие свойством σ -продолжимости.
2. С каждой дугой $\gamma \in a(\Gamma)$ свяжем логарифмическое ядро

$$k_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z - b(\gamma)}{z - e(\gamma)}, \tag{25}$$

где ветвь логарифма выделена посредством разреза по дуге γ и условия $k_\gamma(\infty) = 0$. Если эта функция k_γ интегрируема в любой конечной части плоскости для любой дуги γ, то запишем обобщенную меру

$$\varphi(\gamma, \omega) = -\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}} k_\gamma(z)\, dz\, d\overline{z}. \tag{26}$$

Условие интегрируемости выполнено, в частности, если каждая дуга $\gamma \subset \Gamma$ является достижимой, т.е. если точки *b*(γ) и *e*(γ) можно соединить спрямляемой дугой γ', не имеющей с γ иных общих точек. При этом дуги γ и γ' в совокупности ограничивают область *D*(γ). Если она расположена слева от γ, то обобщенную меру (26) можно записать в форме

$$\varphi(\gamma,\omega) = -\iint\limits_{D(\gamma)} \frac{\partial\omega}{\partial\bar z} dz\, d\bar z + \int\limits_{\gamma'} \omega\, dz; \qquad \textbf{(27)}$$

в противном случае в этой формуле следует изменить знак.
В терминах предыдущего параграфа можно сказать, что данная обобщенная мера связывает с каждой дугой $\gamma \subset \Gamma$ интегрирование по этой дуге с единичной плотностью. Покажем, что при некоторых геометрических ограничениях она имеет единичную плотность и в смысле определения 5. Действительно,

$$\int_{\gamma'} \omega\, dz = c(\gamma')w,$$

где *w* лежит в замкнутой выпуклой оболочке множества $\omega(\gamma')$.
Очевидно, $c(\gamma') = c(\gamma)$, а при стягивании дуги γ в точку *t* множество conv ω (γ ') стягивается в точку $\omega(t)$. Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{c(\gamma_{t,\varepsilon})} \int\limits_{\gamma'_{t,\varepsilon}} \omega(z) dz = \omega(t),$$

и нам осталось установить, что предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{c(\gamma_{t,\varepsilon})} \iint\limits_{D(\gamma_{t,\varepsilon})} \frac{\partial\omega}{\partial\bar z} dz\, d\bar z$$

есть нуль. В качестве замыкающей дуги $\gamma'_{t,\varepsilon}$ можем взять дугу окружности $|z-t| = \varepsilon$; тогда $D(\gamma_{t,\varepsilon})$ кcть часть соответствующего круга, и двойной интеграл имеет порядок ε^2. Таким образом, обобщенная мера (26) имеет плотность единица, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon^2}{c(\gamma_{t,\varepsilon})} = 0. \qquad \textbf{(28)}$$

Это условие выполнено для многих классических фракталов, таких, как снежинка Коха.
Как уже отмечалось, любая обобщенная мера продолжима по аддитивности на конечные объединения дуг семейства *a*(Γ). Однако обобщенную меру (26), вообще говоря, нельзя продолжить на произвольное счетное объединение дуг кривой Γ. Рассмотрим в качестве примера бесконечно-звенную ломаную Γ, построенную следующим образом. Пусть $\{ x_j \}$ есть монотонно убывающая последовательность положительных чисел, $x_1 = 1$, $\lim x_j = 0$.
Положим $z_{2j-1} = x_{2j-1}$, $z_{2j} = (1+i)x_{2j}$, $j = 1,2,3,\ldots$ Ломаная Γ состоит из прямолинейных отрезков, последовательно соединяющих точки $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_j, \ldots$ Пусть функция ω тождественно равна

единице в окрестности Г. Тогда для любой дуги $\gamma \subset \Gamma$ имеем $\varphi(\gamma, \omega) = e(\gamma) - b(\gamma)$. Рассмотрим последовательность звеньев $\{ \gamma_j \}$ ломаной Г, взятых через один, т. е. γ_j начинается в точке z_{2j-1} и кончается в точке z_{2j}. Тогда $\varphi(\gamma_j, \omega) = z_{2j} - z_{2j-1} = ix_{2j} + (x_{2j} - x_{2j-1})$. Очевидно, ряд $\sum(x_{2j} - x_{2j-1})$ сходится всегда, но сходимость ряда $\sum x_{2j}$ равносильна конечности длины ломаной Г. Таким образом, если Г имеет бесконечную длину, то ряд $\sum \varphi(\gamma_j, \omega)$ расходится и обобщенную меру объединения звеньев $\bigcup \gamma_j$ определить не удается. С другой стороны, меру φ все же можно определить на многих счетных семействах дуг неспрямляемой кривой общего вида. Так, если Г — замкнутая неспрямляемая кривая, а Δ — область со спрямляемой границей, то обобщенную меру (27) нетрудно определить на множестве $\Gamma \cap \Delta$, даже если оно состоит из счетного числа дуг. Действительно, в этом случае $D^+ \cap \Delta$ состоит из счетного числа подобластей Δ, причем их совокупная граница состоит из $\Gamma \cap \Delta$ и системы γ' граничных дуг Δ конечной суммарной длины. При их подходящей ориентации имеем

$$\varphi(\Gamma \cap \Delta, \omega) = -\iint\limits_{D^+ \cap \Delta} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} dz\, d\bar{z} + \int\limits_{\gamma'} \omega\, dz.$$

Далее, пусть на Г задана функция $f \in H_\nu(\Gamma)$, $\nu > d/2$. Если логарифмическое ядро (25) любой дуги $\gamma \in a(\Gamma)$ интегрируемо в любой степени $p \geq 1$ (скажем, если любая дуга достижима), то мы можем рассмотреть семейство голоморфных функций

$$F_\gamma(z) = f^w(z) k_\gamma(z) - \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial f^w}{\partial \bar{\zeta}} \frac{k_\gamma(\zeta) d\zeta\, d\bar{\zeta}}{\zeta - z},$$

где f^w продолжение Уитни функции f с компактным носителем, и обобщенную меру

$$\varphi_f(\gamma, \omega) = -\iint\limits_{\mathbb{C}} F_\gamma(z) \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} dz\, d\bar{z}. \qquad (29)$$

Это - интегрирование по γ с плотностью f в смысле предыдущего параграфа. По-видимому, при некоторых геометрических ограничениях типа (28) обобщенная мера (29) имеет плотность $f(t)$ и в смысле определения 5. Отметим, что задача о восстановлении обобщенной меры по ее плотности не может иметь единственного решения в виду наличия нетривиальных обобщенных мер нулевой плотности (см. предыдущий пункт).

3. Существуют и другие содержательные примеры обобщенных мер. Так, согласно формуле Грина в области D^+ со спрямляемой границей Г справедливо соотношение

$$\int_{\Gamma} u\frac{\partial v}{\partial n}ds = -\int_{D^+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\nabla^2 v\right)dx\,dy,$$

где u, v — заданные в $\overline{D^+}$ функции, ∇^2 — лапласиан, ds — элемент длины, $\frac{\partial}{\partial n}$ - нормальная производная. Пусть теперь γ — дуга Г, а γ ' - лежащая в D^+ спрямляемая дуга с теми же началом и концом. Если γ и γ ' в совокупности ограничивают область D (γ), то правая часть формулы

$$\int_{\gamma} u\frac{\partial v}{\partial n}ds = -\iint_{D(\gamma)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\nabla^2 v\right)dx\,dy + \int_{\gamma'} u\frac{\partial v}{\partial n}ds$$

имеет смысл независимо от того, спрямляема дуга γ или нет. Таким образом, на неспрямляемой кривой Г можем определить обобщенные меры

$$\varphi_v(\gamma,\omega) = -\iint_{D(\gamma)}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \omega\nabla^2 v\right)dx\,dy + \int_{\gamma'} \omega\frac{\partial v}{\partial n}ds, \qquad \textbf{(30)}$$

$$\psi_u(\gamma,\omega) = -\iint_{D(\gamma)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial y} + u\nabla^2 \omega\right)dx\,dy + \int_{\gamma'} u\frac{\partial \omega}{\partial n}ds. \qquad (31)$$

В соотношениях (30), (31) функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ фиксированы, причем $v \in C^2(\overline{D^+})$, $u \in C^1(\overline{D^+})$. Обе эти обобщенные меры могут рассматриваться как усредненные значения нормальной производной (соответственно, фиксированной функции v или пробной функции ω*)* на дуге γ . При этом на фрактальной кривой Г $\supset$ γ не существует в классическом смысле ни элемента длины, ни нормали. Таким образом, понятие обобщенной меры позволяет объединить в рамках единой концепции обычные меры, обобщенные интегралы на фрактальной кривой и другие содержательные объекты. Это дает основания полагать, что такие меры могут стать полезным инструментом фрактального анализа.

6.3. РАЗЛОЖЕНИЯ В СМЫСЛЕ ХАНА И В СМЫСЛЕ ЖОРДАНА

Пусть μ — обобщенная мера, заданная на классе всех измеримых множеств в некотором измеримом пространстве *(X*, **S**). Множество *E* назовем *положительным* (по отношению к μ), если для любого F из **S** множество $E \cap F$ измеримо и $\mu(E \cap F) \geqslant 0$; аналогично назовем E *отрицательным,* если для любого F из **S** множество $E \cap F$ измеримо и $\mu(E \cap F) \leqslant 0$. Пустое множество в этом смысле одновременно положительно и отрицательно. Мы пока не утверждаем, что существуют другие, нетривиальные, положительные или отрицательные множества.

Теорема 1. *Если μ — обобщенная мера, то существуют такие непересекающиеся множества A и B, что A — положительно, B — отрицательно (по отношению к* μ) *и* $A \cup B = X$.

Говорят, что множества *A и B* образуют *разложение в смысле Хана* пространства X по отношению к μ.

Доказательство. Так как μ принимает не более одного из бесконечных значений, то можно предположить, что

$$-\infty < \mu(E) \leqslant \infty$$

для любого измеримого множества E. Так как разность двух отрицательных множеств и соединение конечного или счетного числа непересекающихся отрицательных множеств, очевидно, представляют собой отрицательные множества, то соединение счетного числа любых отрицательных множеств отрицательно. Положим $\beta = \inf \mu(B)$, где нижняя грань берется по всем измеримым отрицательным множествам B. Пусть $\{B_i\}$ — последовательность измеримых отрицательных множеств, такая, что $\lim\limits_i \mu(B_i) = \beta$; если

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

то B представляет собой измеримое отрицательное множество, для которого $\mu(B)$ принимает наименьшее значение.

Теперь мы докажем, что $A = X—B$ представляет собой положительное множество. Допустим противное, т. е. что A содержит измеримое подмножество E_0, такое, что $\mu(E_0) < 0$. Множество E_0 не может быть отрицательным, потому что иначе $B \cup E_0$ было бы отрицательным множеством, на котором μ принимала бы значение, меньшее, чем $\mu(B)$, что невозможно. Пусть k_1 — наименьшее целое положительное число, обладающее тем свойством, что E_0 содержит измеримое множество E_1, такое, что $\mu(E_1) \geqslant \frac{1}{k_1}$. (Заметим, что, так как $\mu(E_0) < \infty$, значения μ (E_0) и μ (E_1) оба конечны.) В силу соотношений

$$\mu(E_0 - E_1) = \mu(E_0) - \mu(E_1) \leqslant \mu(E_0) - \frac{1}{k_1} < 0,$$

рассуждение, только что примененное к E_0, применимо и к $E_0 — E_1$. Возьмем k_2 — наименьшее целое положительное число, обладающее тем свойством, что $E_0 — E_1$ содержит измеримое подмножество E_2, такое, что

$$\mu(E_2) \geqslant \frac{1}{k_2},$$

и продолжим это построение неограниченно.
Так как μ конечна на измеримых подмножествах множества E_0 (см. теорему 1 § 6.1), то

$$\lim_n \frac{1}{k_n} = 0.$$

Отсюда следует, что, каково бы ни было измеримое множество F, содержащееся в

$$F_0 = E_0 - \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j,$$

непременно $\mu(F) \leq 0$, т. е. F_0 представляет собой измеримое отрицательное множество. Из того факта, что F_0 не пересекается с B и соотношения

$$\mu(F_0) = \mu(E_0) - \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \leqslant \mu(E_0) < 0$$

противоречат свойству минимальности множества B, мы заключаем, что предположение μ $(E_0)<0$ неприемлемо.
Нетрудно показать на примерах, что разложение в смысле Хана, вообще говоря, не единственно. Однако если $X = A_1 \cup B_1$ и $X = A_2 \cup B_2$ — два таких разложения пространства X, то, каково бы ни было измеримое множество E,

$$\mu(E \cap A_1) = \mu(E \cap A_2) \quad \text{и} \quad \mu(E \cap B_1) = \mu(E \cap B_2).$$

Чтобы показать это, заметим, что

$$E \cap (A_1 - A_2) \subset E \cap A_1$$

и

$$E \cap (A_1 - A_2) \subset E \cap B_2,$$

откуда $\mu(E \cap (A_1 - A_2)) \geqslant 0$ и одновременно
$\mu(E \cap (A_1 - A_2)) \leqslant 0.$
Следовательно, $\mu(E \cap (A_1 - A_2)) = 0$ и точно так же
$\mu(E \cap (A_2 - A_1)) = 0;$ отсюда следует, что

$$\mu(E \cap A_1) = \mu(E \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu(E \cap A_2).$$

Это рассуждение показывает, что равенства

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \quad \text{и} \quad \mu^-(E) = -\mu(E \cap B)$$

однозначно определяют в классе всех измеримых множеств функции μ^+ и μ^-, называемые соответственно *верхней вариацией* и *нижней вариацией* обобщенной меры μ. Функция множества $|\mu|$, определенная в классе всех измеримых множеств равенством
$|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E)$, называется *полной вариацией* обобщенной меры μ. (Следует обратить внимание на существенное различие смысла символов $|\mu|(E)$ и $|\mu(E)|$.)

Теорема 2. *Верхняя, нижняя и полная вариации обобщенной меры* μ *представляют собой меры, причем* $\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E)$ *для любого измеримого множества E. Если* μ *(вполне) конечна или* σ*-конечна, то таковы же* μ^+ *из* μ^-; *по крайней мере одна и мер* μ^+ *и* μ^- *всегда конечна.*

Доказательство. Все три вариации, очевидно, неотрицательны; если всякое измеримое множество представляется в виде соединения счетного числа измеримых множеств, на которых μ конечна, то, в силу теоремы 1 § 6.1, это же верно и по отношению к μ^+ и μ^-. Равенство $\mu = \mu^+ - \mu^-$ следует из определений μ^+ и μ^-. Тот факт, что μ способна принимать лишь одно из бесконечных значений ∞ и $-\infty$, влечет за собой, что по крайней мере одна из функций множества μ^+ и μ^- конечна. Так как счетная аддитивность μ^+ и μ^- очевидна, то теорема полностью доказана.

Из теоремы 2 следует, что всякая обобщенная мера представляется в виде разности двух мер, из которых хотя бы одна конечна; представление обобщенной меры в виде разности верхней и нижней вариаций называется ее *разложением в смысле Жордана.*

1. Если μ— конечная обобщенная мера и $\{E_n\}$ — последовательность измеримых множеств, для которой существует

$\lim_n E_n$ (т. е. такая, что $\limsup_n E_n = \liminf_n E_n$),

то

$$\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n).$$

2. Конечная обобщенная мера и все ее вариации ограничены. Поэтому конечную обобщенную меру иногда называют мерой *с ограниченной вариа* цией.*

3. Если μ — обобщенная мера и E — измеримое множество, то

$$\mu^+(E) = \sup\{\mu(F) : E \supset F \in \mathbf{S}\} \quad \text{и} \quad \mu^-(E) = -\inf\{\mu(F) : E \supset F \in \mathbf{S}\}.$$

Эти равенства иногда рассматривают как определения μ^+ и μ^- и с их помощью доказывают существование разложения в смысле Жордана.

4. Является ли банаховым пространством множество всех вполне конечных обобщенных мер μ, заданных на некоторой σ-алгебре, с нормой $\|\mu\| = |\mu|(X)$?

5. Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ —пространство с мерой и f—заданная на нем интегрируемая функция, то функция множества v, определенная равенством

$$\nu(E) = \int_E f(x)\, d\mu(x),$$

представляет собой конечную обобщенную меру и

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu, \quad \nu^-(E) = \int_E f^- d\mu.$$

Как с помощью f выражается $|\mu|$?

6. Если μ и v—вполне конечные меры на некоторой σ-алгебре **S** и если E — множество из S, то для всякого действительного числа t в **S** существует множество A_t, такое, что $A_t \subset E_t$ и, каково бы ни было множество F из **S**, содержащееся в A_t (или в $E — A_t$), выполняется неравенство $\nu(F) \leqslant t\mu(F)$ (или соответственно $\nu(F) \geqslant t\mu(F)$).

7. Если μ — обобщенная мера и f—измеримая функция, интегрируемая относительно $|\mu|$, то можно положить по определению

$$\int f\, d\mu = \int f\, d\mu^+ - \int f\, d\mu^-.$$

Такой интеграл обладает многими существенными свойствами „положительных" интегралов, рассмотренных ранее. Если μ — конечная обобщенная мера, то для любого измеримого множества *E*

$$|\mu|(E) = \sup\left|\int_E f\,d\mu\right|,$$

где верхняя грань берется по всем измеримым функциям *f*, подчиненным условию $|f| \leq 1$.

8. Если рассматривать отдельно действительные и мнимые части, то можно определить для комплексных функций *f* и комплексных мер μ

$$\int f\,d\mu$$

(см. упр. 2 §6.1). Упр. 7 подсказывает нам определение полной вариации конечной комплексной меры μ в виде

$$|\mu|(E) = \sup\left|\int_E f\,d\mu\right|,$$

где верхняя грань берется по всем (вообще говоря, комплексным) измеримым функциям *f*, подчиненным условию $|f| \leq 1$.Какова связь между | μ | и полными вариациями действительной и мнимой частей μ?

6.4. АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Мы показали, что обобщенная мера обладает многими важными свойствами неопределенного интеграла, обобщением которого она является. Однако неопределенному интегралу присущи некоторые свойства (или лучше сказать, некоторые связи с той мерой, относительно которой он определен), непосредственно не распространяющиеся на обобщенные меры. С одним из таких свойств — свойством абсолютной непрерывности — мы познакомились в § 5.1; здесь мы рассмотрим более общую схему, в рамках которой понятие абсолютной непрерывности сохраняет смысл.

Пусть (*X*, **S**) — какое-нибудь измеримое пространство, а μ и *ν* — обобщенные меры, заданные на **S**. Мы будем говорить, что *ν абсолютно непрерывна* относительно μ, и писать $\nu \ll \mu$, если $\nu(E) = 0$ для любого измеримого множества *E*, для которого $|\mu|(E) = 0.$

Грубо говоря, $\nu \ll \mu$ означает, что значения *ν* малы, коль скоро малы значения μ. Следует обратить внимание на известное отсутствие симметрии в точном определении; малость μ выражена условием, наложенным на ее полную вариацию. Мы сейчас покажем, что это отсутствие симметрии только кажущееся.

Теорема 1. *Если* μ *и* ν *— обобщенные меры, то условия*

$$(1) \qquad \nu \ll \mu,$$

$$(2) \qquad \nu^+ \ll \mu \quad \text{и} \quad \nu^- \ll \mu,$$

$$(3) \qquad |\nu| \ll |\mu|$$

эквивалентны между собой.

Доказательство. Если выполняется (1), то $\nu(E) = 0$, коль скоро $|\mu|(E) = 0$. Пусть $X = A \cup B$ —разложение в смысле Хана по отношению к ν; тогда если $|\mu|(E) = 0$, то

$$0 \leqslant |\mu|(E \cap A) \leqslant |\mu|(E) = 0$$

и

$$0 \leqslant |\mu|(E \cap B) \leqslant |\mu|(E) = 0,$$

следовательно,

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = 0, \qquad \nu^-(E) = \nu(E \cap B) = 0,$$

т. е. выполняется условие (2). То, что (2) влечет за собой (3) и (3) влечет за собой (1), вытекает соответственно из соотношений

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) \quad \text{и} \quad 0 \leqslant |\nu(E)| \leqslant |\nu|(E).$$

Следующая теорема устанавливает связь между общим определением абсолютной непрерывности и тем определением, которое мы имели в § 5.1 (для конечных функций множества). Эта теорема по существу утверждает, что фразе „значения ν малы, коль скоро малы значения μ " можно придать иную точную интерпретацию, эквивалентную первоначальной, хотя внешне отличную от нее.

Теорема 2. *Пусть* μ *и* ν *— обобщенные меры, причем* ν *конечна и* $\nu \ll \mu$. *Тогда для всякого положительного числа* ε *найдется такое положительное число* δ, *что* $|\nu|(E) < \varepsilon$ *для всякого измеримого множества E, для которого* $|\mu|(E) < \delta$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого ε>0 можно найти последовательность измеримых множеств *{E$_n$}*, такую, что

$$|\mu|(E_n) < \frac{1}{2^n} \text{ и } |\nu|(E_n) \geqslant \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если $E = \limsup_n E_n$, то

$$|\mu|(E) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} |\mu|(E_i) < \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

откуда $|\mu|(E) = 0$. С другой стороны, так как ν конечна, то

$$|\nu|(E) = \lim_n |\nu|(E_n \cup E_{n+1} \cup \ldots) \geqslant \limsup_n |\nu|(E_n) \geqslant \varepsilon.$$

Это противоречит условию $\nu \ll \mu$; тем самым теорема доказана.
Легко видеть, что отношение „$\ll$“ рефлективно (т. е. $\mu \ll \mu$) и транзитивно (т. е. если $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_2 \ll \mu_3$, то $\mu_1 \ll \mu_3$).
Две обобщенные меры μ и ν называются *эквивалентными,* если одновременно $\nu \ll \mu$ и $\mu \ll \nu$. Отношение эквивалентности записывается μ ≡ ν
Пусть *(X,* **S**) — измеримое пространство и на **S** заданы обобщенные меры μ и ν. Назовем μ и ν *взаимно сингулярными,* если в *X* существуют непересекающиеся множества *A* и *B,* такие, что *A* ∪ *B* = *X* и, каково бы ни было измеримое множество *E,* множества *A*∩*E* и *B* ∩ *A* измеримы и $|\mu|(A \cap E) = |\nu|(B \cap E) = 0$; отношение сингулярности условимся записывать $\mu \perp \nu$. Несмотря на симметрию этого отношения, часто удобнее бывает говорить, что мера ν *сингулярна относительно* μ.
Сингулярность ν относительно μ представляет собой как бы крайнюю форму отрицания абсолютной непрерывности v относительно μ. В самом деле, при $\mu \perp \nu$, если, например, $|\mu|(E) = 0$, то не только отсюда не следует равенство $|\nu|(E) = 0$, но вообще мера | ν | способна быть отличной от нуля лишь на тех множествах, на которых | μ | равна нулю.
В заключение этого параграфа введем еще одно новое обозначение. Традиционный термин „почти всюду", которым мы уже неоднократно пользовались, вполне удовлетворителен в тех случаях, когда мы имеем дело с одной мерой. Однако уже при рассмотрении понятий абсолютной непрерывности и сингулярности мы по необходимости сталкиваемся с несколькими мерами, и для того, чтобы не повторять часто выражений вроде „почти всюду по отношению к μ", условимся применять следующее обозначение. Пусть π(*x*) — какое-нибудь предложение, которое может быть отнесено к любой точке *x* измеримого пространства *(X,* **S**)*,* и μ — обобщенная мера на **S**; тогда

$\pi(x)\ [\mu]$ или $\pi[\mu]$

будет означать, что если E — множество всех тех точек x, для которых $\pi(x)$ неверно, то $|\mu|(E)=0.$ Так, например, если f и g— функции, заданные на X, то $f=g\ [\mu]$означает, что $\{x: f(x)\neq g(x)\}$ представляет собой измеримое множество меры нуль относительно $|\mu|$. Символ $[\mu]$ можно читать: „по модулю μ ".

1. Пусть μ — обобщенная мера, f—функция, интегрируемая относительно μ; если ν задана на измеримых множествах посредством равенства $\nu(E)=\int\limits_E f\,d\mu$ (см. упр. 7 §6.3), то

$\nu \ll \mu.$

2. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$— единичный интервал с лебеговской мерой. Положим $F=\left\{x: 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\right\}$ и зададим функции f_1, f_2 и функции множества μ_1, μ_2 следующим образом:

$$f_1(x)=2\chi_F(x)-1,\ f_2(x)=x;\ \mu_i(E)=\int\limits_E f_i\,d\mu,\ i=1, 2.$$

Тогда $\mu_2 \ll \mu_1$. Однако из $\mu_1(E)=0$, вообще говоря, не следует, что $\mu_2(E)=0.$

Если бы μ_2 было определено, например, так:

$$\mu_2(E)=\int\limits_E\left(f_2-\frac{1}{2}\right)d\mu,$$

то из $\mu_1(E)=0$ вытекало бы $\mu_2(E)=0.$

3. Какова бы ни была обобщенная мера μ, вариации μ^+ и μ^- взаимно сингулярны и обе они абсолютно непрерывны по отношению к μ.

4. Какова бы ни была обобщенная мера μ, всегда $\mu\equiv|\mu|.$

5. Если μ — обобщенная мера и E—измеримое множество, то $|\mu|(E)=0$ тогда и только тогда, когда $\mu(F)=0$ для всякого измеримого подмножества F множества E,

6. Если μ и ν — любые две меры на каком-либо σ-кольце $\mathbf{S}$, то $\mu \ll \mu+\nu$

7. Пусть f_1 и f_2— интегрируемые функции, заданные в пространстве. $(X, \mathbf{S}, \mu)$ с вполне конечной мерой, и μ_i — неопределенный интеграл от f_i, $i=1, 2$. Тогда если

$\mu(\{x : f_1(x) = 0\} \Delta \{x : f_2(x) = 0\}) = 0,$ то $\mu_1 \equiv \mu_2.$

8. Пусть ψ — канторова функция (см. упр. 3 §4.3), μ_0 — порожденная ею мера Лебега — Стильтьеса на борелевских множествах единичного интервала (см. упр. 9 § 3.12). Если μ — лебеговская мера, то μ_0 и μ взаимно сингулярны.

9. Если μ и ν — обобщенные меры, причем $\nu \ll \mu$ и в то же время $\mu \perp \nu,$ то $\nu = 0$.

10. Пусть ν_1, ν_2 и μ — конечные обобщенные меры; если ν_1 и ν_2 сингулярны относительно μ, то $\nu_1 + \nu_2$ также сингулярна относительно μ . (Указание. Пусть $X = A_1 \cup B_1$ и $X = A_2 \cup B_2$ — такие разложения, что $|\mu|$ обращается в нуль на всех измеримых подмножествах множеств A_i, а $|\nu_i|$ — на измеримых подмножествах множеств B_i, $i = 1, 2$; тогда

$$X = [(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1)] \cup (B_1 \cap B_2)$$

будет представлять собой соответствующее разложение для μ и ν.)

11. Пусть μ и ν — меры на какой-либо σ-алгебре **S**, такие, что μ конечна и $\nu \ll \mu.$ Тогда существует измеримое множество E, обладающее следующим свойством: X— E есть множество σ-конечной меры по отношению к ν и, каково бы ни было измеримое подмножество F множества E, $\nu(F)$ равно либо 0, либо ∞. (Указание. E строится методом исчерпывания (см. упр. 3 § 4.1), исходя из условий: ν должна равняться 0 или ∞ на измеримых подмножествах E и μ должна принимать на E свое наибольшее значение; требуемое свойство множества X—E устанавливается также методом исчерпывания.)

12. Теорема 2 может нарушиться, если не предполагать, что ν конечна. (Указание. Пусть X—множество всех целых положительных чисел; положим

$$\mu(E) = \sum_{n \in E} 2^{-n}, \quad \nu(E) = \sum_{n \in E} 2^{n}.)$$

6.5. ТЕОРЕМА РАДОНА — НИКОДИМА

Теорема 1. *Если* μ *и* ν *— вполне конечные меры, причем* $\nu \ll \mu$ *и* ν *не равна нулю тождественно, то существуют положительное число* ε *и измеримое множество* A*, такие, что* $\mu(A) > 0$ *и* A *положительно по отношению к обобщенной мере* $\nu - \varepsilon\mu$.

Доказательство. Пусть $X = A_n \cup B_n$ —разложение в смысле Хана по отношению к обобщенной мере $\nu - \frac{1}{n}\mu, \quad n = 1, 2, \ldots$

Положим

$$A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad B_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Тогда, так как $B_0 \subset B_n$, то

$$0 \leqslant \nu(B_0) \leqslant \frac{1}{n}\mu(B_0), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и, следовательно, $\nu(B_0) = 0.$ Отсюда следует, что $\nu(A_0) > 0$ и, в силу абсолютной непрерывности ν относительно μ, $\mu(A_0) > 0.$ Следовательно, $\mu(A_n) > 0$ хотя бы для одного значения *n;* остается для такого *n* положить $A = A_n$ и $\varepsilon = \frac{1}{n}.$

Теперь мы установим основной результат, касающийся абсолютной непрерывности; это — так называемая *теорема Радона — Никодима.*

Теорема 2. *Пусть* $(X, \mathbf{S}, \mu)$*—пространство с вполне σ-конечной мерой. Если σ-конечная обобщенная мера ν, заданная на* **S**, *абсолютно непрерывна относительно μ, то на X существует конечная измеримая функция f, такая, что*

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu$$

для любого измеримого множества E. Такая функция f единственна, в том смысле, что если

$$\nu(E) = \int_E g\, d\mu$$

для всякого измеримого E, то $f = g \quad [\mu].$

Следует особо отметить, что интегрируемость *f* при этом не утверждается; *f* будет интегрируемой, очевидно, тогда и только тогда, когда v конечна. Впрочем, употребляя символ

$$\int_E f\,d\mu,$$

мы тем самым в неявной форме утверждаем (см. § 5.3), что хотя бы одна из функций f^+ и f^- интегрируема; если интегрируема f^+, то конечна верхняя вариация v^+ обобщенной меры v, если интегрируема f^-, то конечна нижняя вариация v^-

Доказательство. Так как X представляет собой соединение счетного числа измеримых множеств, на каждом из которых μ и v конечны, то, не нарушая общности доказательства, можно с самого начала предположить, что обе рассматриваемые обобщенные меры конечны. Так как v конечна, то функция f интегрируема, и единственность f, в указанном смысле, следует из теоремы 5 § 5.3. Наконец, предположение $\nu \ll \mu$ эквивалентно совокупности условий

$$\nu^+ \ll \mu, \qquad \nu^- \ll \mu,$$

поэтому существование f достаточно доказать в том случае, когда μ и v являются конечными мерами.

Пусть $\mathscr{K}$ — множество функций f на X, обладающих следующими свойствами: f неотрицательны, интегрируемы относительно μ и

$$\int_E f\,d\mu \leqslant \nu(E)$$

для всякого измер имого множества E. Положим

$$\alpha = \sup\left\{\int f\,d\mu : f \in \mathscr{K}\right\}$$

и возьмем последовательность функций $\{f_n\}$ из $\mathscr{K}$, такую, что

$$\lim_n \int f_n\,d\mu = \alpha.$$

Пусть E — произвольное измеримое множество, n — любое целое положительное число и $g_n = f_1 \cup \ldots \cup f_n$. Тогда E можно представить в виде соединения n непересекающихся измеримых множеств, $E = E_1 \cup \ldots \cup E_n$, таким образом, что $g_n(x) = f_j(x)$, когда *x* принадлежит E_j, $j = 1, \ldots, n$. Следовательно,

$$\int_E g_n\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \int_{E_j} f_j\, d\mu \leqslant \sum_{j=1}^{n} \nu(E_j) = \nu(E).$$

Положим $f_0(x) = \sup\{f_n(x) : n = 1, 2, \ldots\}$. Тогда $f_0(x) = \lim_n g_n(x)$ и, согласно теореме 2 § 5.5, $f_0 \in \mathscr{K}$ и

$\int f_0\, d\mu = \alpha$. Так как f_0 интегрируема, то существует такая конечная функция *f*, что $f_0 = f \; [\mu]$; теперь мы покажем, что если $\nu_0(E) = \nu(E) - \int_E f\, d\mu$, то мера ν_0 тождественно равна нулю.

Если бы ν_0 не обращалась в нуль тождественно, то, в силу теоремы 1, можно было бы указать положительное число ε и измеримое множество *A*, такие, что $\mu(A) > 0$ и

$$\varepsilon\mu(E \cap A) \leqslant \nu_0(E \cap A) = \nu(E \cap A) - \int_{E \cap A} f\, d\mu$$

для любого измеримого множества *E*. Тогда, положив $g = f + \varepsilon\chi_E$, мы получили бы для любого измеримого *E*

$$\int_E g\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \varepsilon\mu(E \cap A) \leqslant \int_{E-A} f\, d\mu + \nu(E \cap A) \leqslant \nu(E),$$

т. е. $g \in \mathscr{K}$. Но

$$\int g\, d\mu = \int f\, d\mu + \varepsilon\mu(A) > \alpha,$$

то противоречит выбору функции *f*.

1. Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$—пространство с мерой и

$$\nu(E)=\int_E f\,d\mu$$

для любого измеримого множества E, то

$$X=\{x:f(x)>0\}\cup\{x:f(x)\leqslant 0\}$$

представляет собой разложение в смысле Хана по отношению к ν.

2. а) Предположим, что $(X, \mathbf{S})$ — измеримое пространство, а μ и ν — вполне конечные меры на $\mathbf{S}$, причем $\nu \ll \mu$. Если

$\bar{\mu}=\mu+\nu$ и $\nu(E)=\int_E f\,d\bar{\mu}$ для любого E из S, то

$$0\leqslant f(x)<1\ [\mu].$$

б) Если $\int g\,d\nu=\int fg\,d\bar{\mu}$ для любой неотрицательной измеримой функции g, то $\nu(E)=\int_E \frac{f}{1-f}\,d\mu,$ каково бы ни было измеримое множество E, (Указание. Записав сделанное предположение в виде $\int g(1-f)\,d\nu=$

$=\int fg\,d\mu,$ положим, для заданного

$E,\ g=\frac{\chi_E}{1-f}$.)

3. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$—единичный интервал с лебеговской мерой и M — какое-нибудь его неизмеримое подмножество. Пусть, далее, (α_1, β_1) и (α_2, β_2)—две пары положительных чисел, таких, что $\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2=1$ и $\tilde{\mu}_i,\ i=1, 2,$—продолжения меры μ, заданные с помощью α_i и β_i, как это указано в упр. 2 „е" § 3,13, на σ-кольце $\tilde{\mathbf{S}}$, порожденном классом $\mathbf{S}$ и множеством M. Тогда существуют такие измеримые функции f_1 и f_2, что

$$\tilde{\mu}_1(E)=\int_E f_1\,d\tilde{\mu}_2 \quad \text{и} \quad \tilde{\mu}_2(E)=\int_E f_2\,d\tilde{\mu}_1$$

для любого измеримого множества E. Как строятся функции f_1 и f_2?

4. Теорема Радона — Никодима справедлива в том случае, когда μ представляет собой обобщенную меру. (Указание. Пусть $X = A \cup B$ — разложение в смысле Хана по отношению к μ; применить теорему Радона — Никодима отдельно к *ν* и μ^+ на множестве *A* и к *ν* и μ^- на множестве *B.)*

5. Пусть μ — вполне с-конечная обобщенная мера. Так как μ^+ и μ^- абсолютно непрерывны как относительно μ, так и относительно | μ |, то

$$\mu^+(E) = \int_E f_+ \, d\mu = \int_E g_+ \, d|\mu| \quad \text{и} \quad \mu^-(E) = \int_E f_- \, d\mu = \int_E g_- \, d|\mu|.$$

Функции f_+, g_+, f_- и g_- удовлетворяют соотношениям $f_+ = g_+ \, [\mu]$ и $f_- = g_- \, [\mu]$. Как строятся эти функции?

6. Если μ — обобщенная мера,

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \ \text{ и } \ |\nu|(E) = \int_E g \, d|\mu|$$

для любого измеримого множества *E*, то $g=|f|$ [μ].

7. Теорема Радона — Никодима справедлива и тогда, когда *ν* не с-конечна, но в этом случае функция *f* может принимать бесконечные значения. (У к а з а н и е. Достаточно рассмотреть тот случай, когда *ν* представляет собой меру, а μ конечна; в этом случае пользуемся упр. 11 § 6.4.)

8. Теорема Радона — Никодима, вообще говоря, неверна тогда, когда μ не вполне σ-конечна, даже если при этом *ν* конечна. (Указание. Пусть *X*—какое-нибудь несчетное множество, а **S** — класс тех его подмножеств, которые либо сами конечны или счетны, либо имеют конечные или счетные дополнения. Для любого *E* из **S** положим μ *(E)* равным числу точек в множестве *E,* а *ν (E)* положим равным 0, если *E* конечно или счетно, и равным 1, если *E* несчетно.)

9. Пусть *(X,* **S**) — измеримое пространство, μ и *ν* — заданные на **S** с-конечные меры, такие, что $\nu \lll \mu$. Тогда теорема Радона — Никодима может быть применена отдельно к каждому измеримому множеству, и возникает вопрос, нельзя ли задать на *X* функцию *f* так, чтобы она служила подинтегральной функцией в теореме Радона — Никодима сразу для всех измеримых множеств. Следующий пример показывает, что это, вообще говоря, невозможно.

Возьмем какое-нибудь несчетное множество *A* мощности α и множество *B* мощности β>α. В качестве *X* возьмем множество всех упорядоченных пар (*a*, *b*), где $a \in A$ и $b \in B$, Множество вида $\{(a, b_0) : a \in A\}$ условимся называть *горизонтальной линией,* множество вида $\{(a_0, b) : b \in B\}$ — *вертикальной линией.* Пусть **S**

— класс всех тех множеств *E*, которые могут быть покрыты конечным или счетным числом горизонтальных и вертикальных линий *L* и, кроме того, обладают тем свойством, что либо $L \cap E$, либо *L* — *E* не более, чем счетно. Для любого *E* из **S** положим μ *(E)* равным числу горизонтальных и вертикальных линий Z, таких, что *L* — *E* конечно или счетно, а *v (E)* — равным числу вертикальных линий с тем же свойством. Очевидно, что μ и *v* — σ-конечные меры и $\nu \ll \mu$. Допустим теперь, что на *X* можно задать такую функцию *f*, что $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ для любого *E* из **S**. Легко видеть, что множество $M = \{x : f(x) = 0\}$ должно иметь конечное или счетное пересечение со всякой вертикальной линией и в то же время, какова бы ни была горизонтальная линия *L*, *L* — *M* должно быть конечно или счетно. Из первого условия вытекает, что мощность множества *M* не может превзойти $\alpha\aleph_0 = \alpha,$ а из второго, — что эта мощность не меньше $\beta\ (\alpha - \aleph_0) \geqslant \beta.$

10. (J. C. Oxtoby) Меру μ в пространстве $(X, \mathbf{S}, \mu)$, можно подчинить условию, более слабому, чем полная σ-конечность, и более сильному, чем σ-конечность, при выполнении которого справедлива теорема Радона — Никодима. Это условие состоит в том, что пространство может быть представлено в виде соединения непересекающихся измеримых множеств конечной меры, образующих класс **D**, такой, что всякое измеримое множество может быть покрыто, с точностью до множества меры нуль, конечным или счетным числом множеств из **D**. Приведем пример пространства с не вполне σ-конечной мерой, удовлетворяющего высказанному условию. В качестве *X* возьмем эвклидову плоскость, в качестве **S** — класс всех тех множеств, которые можно покрыть конечным или счетным числом горизонтальных прямых и пересечение которых с каждой такой прямой измеримо в смысле Лебега (на прямой). Если *E* из **S** помещается на одной горизонтальной прямой, то μ *(E)* полагаем равной лебеговской мере множества *E* на этой прямой; для произвольного *E* из **S** значение μ *(E)* определяется однозначно свойством счетной аддитивности.

11. Если в упр. 9 положить *B* = *A* а мощность этого множества равна $\aleph_1$ (= наименьшая несчетная мощность), то мы не придем к противоречию. В самом деле, в этом случае *X* содержит множество *E*, обладающее тем свойством, что если *L* — произвольная вертикальная линия, то $E \cap L$ конечно или счетно, а если *L'* — произвольная

горизонтальная линия, то $L' - E$ конечно или счетно. [Указание. Пусть A вполне упорядочено, т. е. каждому элементу a множества A поставлено в соответствие некоторое порядковое число $\xi(a) < \Omega$ (где Ω— наименьшее несчетное порядковое число), и соответствие между A и множеством всех чисел, меньших Ω, взаимно однозначно. Тогда $E = \{(a, b) : \xi(a) > \xi(b)\}$.]

12. Если μ — вполне конечная мера и

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$$

для любого измеримого множества E, то

$$B(t) = \{x : f(x) \leqslant t\}$$

представляет собой отрицательное множество по отношению к обобщенной мере $\mu - t\mu$ (см. упр. 1 выше). Теорему Радона — Никодима можно доказать иначе, восстановив функцию f по заданным множествам $B(t)$ (см. упр. 10 § 4.2). Основная трудность этого доказательства состоит в том, что отрицательные множества определяются не единственным образом. Трудность эту можно частично устранить, выбрав для всех t множества $B(t)$ так, чтобы значения $\mu(B(t))$ были наименьшими.

6.6. ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ ОБОБЩЕННЫХ МЕР

Для функций, фигурирующих под знаком интеграла в теореме Радона — Стильтьеса, часто употребляется специальное обозначение. Если μ — вполне σ-конечная мера и если $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$ для любого измеримого множества E, то мы будем писать

$$f = \frac{d\nu}{d\mu} \quad \text{или} \quad d\nu = f \, d\mu,$$

а самое функцию f называть *производной* Радона — Стильтьеса. При этом соотношениям, получаемым формальными действиями над дифференциалами, отвечают содержательные теоремы. Некоторые из них тривиальны, как, например,

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu},$$

тогда как другие выражают более или менее глубокие свойства операции интегрирования. К числу последних относятся правило дифференцирования сложной функции и, как очевидное следствие, правило замены переменного в интеграле; и то, и другое здесь точно сформулировано и доказано. Надо, конечно, иметь в виду, что производная Радона — Никодима

$$\frac{d\nu}{d\mu}$$

определяется единственным образом лишь с точностью до множествмеры нуль (относительно μ); поэтому в точном словесном выражении всякой дифференциальной формулы приходится часто применять термин „почти всюду".

Теорема 1. *Если λ и μ — вполне σ-конечные меры, такие, что* $\mu \ll \lambda$, *а ν — вполне σ-конечная обобщенная мера, причем* $\nu \ll \mu$, *то*

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} \; [\lambda].$$

Доказательство. Если равенство такого вида справедливо как для верхней, так и для нижней вариации обобщенной меры *v*, то оно будет справедливо и для самой *v*; поэтому достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда *v* есть мера. Обозначим $\frac{d\nu}{d\mu} = f$ и $\frac{d\mu}{d\lambda} = g.$ Так как *v* неотрицательна, то, согласно теореме 5 § 5.3, $f \geqslant 0 \; [\mu]$, и мы можем предположить, не нарушая общности, что *f* неотрицательна всюду.

Пусть $\{f_n\}$ — возрастающая последовательность неотрицательных простых функций, сходящаяся к *f* в каждой точке пространства *X* (см. теорему 2 § 4.4). Тогда, в силу теоремы 2 § 5.5, для любого измеримого множества *E*

$$\lim_n \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu \quad \text{и} \quad \lim_n \int_E f_n g \, d\lambda = \int_E fg \, d\lambda.$$

А так как для любого измеримого *F*

$$\int_E \chi_F \, d\mu = \mu(E \cap F) = \int_{E \cap F} g \, d\lambda = \int_E \chi_F g \, d\lambda,$$

то

$$\int\limits_E f_n\,d\mu = \int\limits_E f_n g\,d\lambda, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

и, следовательно,

$$\nu(E) = \int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E fg\,d\lambda.$$

Теорема 2. *Если* λ *и* μ *— вполне σ-конечные меры, причем* $\mu \ll \lambda$, *и f — конечная измеримая функция, для которой имеет смысл* $\int f\,d\mu$, *то*

$$\int f\,d\mu = \int f\,\frac{d\mu}{d\lambda}\,d\lambda.$$

Доказательство. Зададим на измеримых множествах *E* обобщенную меру *ν*, положив

$$\nu(E) = \int\limits_E f\,d\mu,$$

и воспользуемся теоремой 1. Получим равенство

$$\nu(E) = \int\limits_E \frac{d\mu}{d\lambda}\,d\lambda;$$

искомый результат получим при *E = X.*

Следующая теорема, касающаяся соотношений между различными обобщенными мерами, даст нам так называемое *разложение в смысле Лебега* вполне σ-конечной обобщенной меры на части, одна из которых абсолютно непрерывна, а другая сингулярна относительно некоторой другой вполне σ-конечной меры.

Теорема 3. *Если (X,* **S**) *— измеримое пространство, а* μ *и ν — вполне σ-конечные обобщенные меры, заданные на* **S**, *то существуют единственным образом определенные вполне* σ *-конечные меры* ν_0 *и* ν_1, *такие, что сумма их равна* ν, $\nu_0 \perp \mu$ и $\nu_1 \ll \mu$.

Доказательство. Предположим, как обычно, что μ и *ν* конечны. Так как ν_1 абсолютно непрерывна относительно μ тогда и только тогда, когда она абсолютно непрерывна относительно | μ | , а ν_0 сингулярна относительно μ тогда и только тогда, когда $\nu_0 \perp |\mu|$, то мы можем предположить, что μ представляет собой меру. И, наконец, так как v^+ и v^- можно рассматривать отдельно, то мы вправе предположить, что и v является мерой.

Доказательство этой теоремы для случая вполне конечных мер основано на замечании, которое состоит в том, что v абсолютно непрерывна относительно $\mu+\nu$. Следовательно, существует такая измеримая функция f, что

$$\nu(E)=\int_E f\,d\mu+\int_E f\,d\nu$$

для любого измеримого множества E. Так как $0\leqslant\nu(E)\leqslant\mu(E)+\nu(E)$, то $0\leqslant f\leqslant 1\ [\mu+\nu]$ и, следовательно, $0\leqslant f\leqslant 1\ [\nu]$. Если мы положим $A=\{x:f(x)=1\}$ и $B=\{x:0\leqslant f(x)<1\}$, то будем иметь

$$\nu(A)=\int_A d\mu+\int_A d\nu=\mu(A)+\nu(A),$$

откуда, так как v конечна, $\mu(A)=0$. Положим теперь

$$\nu_0(E)=\nu(E\cap A)\quad\text{и}\quad\nu_1(E)=\nu(E\cap B),$$

где E — произвольное измеримое множество. Тогда очевидно, что $\nu_0\perp\mu$. Остается доказать соотношение $\nu_1\ll\mu$.

Если $\mu(E)=0$, то

$$\int_{E\cap B} d\nu=\nu(E\cap B)=\int_{E\cap B} f\,d\nu$$

и, следовательно,

$$\int_{E\cap B}(1-f)\,d\nu=0.$$

Так как $1-f\geqslant 0\ [\nu]$, то отсюда следует, что $\nu_1(E)=\nu(E\cap B)=0.$

Существование v_0 и v_1 доказано.

Если $\nu=\nu_0+\nu_1$ и $\nu=\bar{\nu}_0+\bar{\nu}_1$ —два разложения в смысле Лебега обобщенной меры v, то $\nu_0-\bar{\nu}_0=\bar{\nu}_1-\nu_1$. При этом

$\nu_0 - \bar{\nu}_0 \perp \mu$ (см. упр. 10 § 6.4) и $\bar{\nu}_1 - \nu_1 \ll \mu$, следовательно,

$$\nu_0 = \bar{\nu}_0 \quad \text{и} \quad \nu_1 = \bar{\nu}_1$$

(см. упр. 9 § 6.4).

1. Пользуясь понятием интеграла относительно обобщенной меры, можно обобщить понятие производной Радона — Никодима. Теорема 1 справедлива и тогда, когда λ и μ — обобщенные меры. (Указание. Возьмите разложения в смысле Хана $X = A_i \cup B_i \quad (j = 1, 2, 3)$ по отношению к каждой из обобщенных мер λ , μ и ν и разложите X на восемь множеств $C_k\ (k = 1, \dots, 8)$, составленных из таких пересечений множеств A_i, B_j по три, чтобы на измеримых подмножествах каждого из C_k все три функции λ , μ и ν сохраняли знак; после этого можно почти непосредственно применить теорему 1.)

2. Если μ и ν — вполне σ-конечные меры и $\mu \equiv \nu$, то

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{1}{\dfrac{d\nu}{d\mu}}.$$

3. Если μ и ν — вполне σ -конечные меры и $\nu \ll \mu$, то

$$\nu\left(\left\{x : \frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0\right\}\right) = 0.$$

4. Если μ_0, μ_1 и μ_2 — вполне конечные меры и если

$$d\mu_0 = f_1\, d(\mu_0 + \mu_1) =$$
$$= f_2\, d(\mu_0 + \mu_2) = f\, d(\mu_0 + \mu_1 + \mu_2),$$ то почти всюду относительно $\mu_0 + \mu_1 + \mu_2$ выполняются равенства

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{f_1(x) f_2(x)}{f_1(x) + f_2(x) - f_1(x) f_2(x)} & \text{при} \quad f_1(x) f_2(x) \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad f_1(x) = f_2(x) = 0. \end{cases}$$

5. Пусть $\{\mu_n\}$ и $\{\nu_n\}$—последовательности вполне конечных мер.

Положим

$$\bar{\mu}_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \quad \bar{\nu}_n = \sum_{i=1}^{n} \nu_i, \quad \mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i, \quad \nu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i$$

и допустим, что μ и ν представляют собой конечные меры. Тогда если $\nu_n \ll \bar{\mu}_n,\ n = 1, 2, \dots,$ то $\nu \ll \mu$ и

$$\lim_n \frac{d\bar{\nu}_n}{d\bar{\mu}_n} = \frac{d\nu}{d\mu} \quad [\mu].$$

Доказательство этого предложения основывается на следующих леммах:

а) Если $\{E_n\}$ — такая последовательность измеримых множеств, что $\bar{\mu}_n(E_n) = 0,\ n = 1, 2, \ldots,$ то $\mu(\limsup_n E_n) = 0.$

(Указание. $\bar{\mu}_n\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leqslant$

$\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \bar{\mu}_k(E_k)$.)

б) Если $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ — последовательности функций, такие, что $\varphi_n = \psi_n\ [\mu_n],\ n = 1, 2, \ldots$ то

$\limsup_n \varphi_n(x) = \limsup_n \psi_n(x)\ [\mu]$ и $\liminf_n \varphi_n(x) =$

$= \liminf_n \psi_n(x)\ [\mu].$ (Указание. Примените „а" к множествам

$E_n = \{x : \varphi_n(x) \neq \psi_n(x)\}$.)

В силу „б", результат, сформулированный в упр. 5, можно доказывать при каких-нибудь фиксированных представлениях производных $\dfrac{d\bar{\nu}_n}{d\bar{\mu}_n}$. Если

$$\frac{d\nu_n}{d\mu} = f_n \quad \text{и} \quad \frac{d\mu_n}{d\mu} = g_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

то, в силу теоремы 1, в качестве такого представления можно взять

$$\frac{d\bar{\nu}_n}{d\bar{\mu}_n} = \frac{f_1 + \ldots + f_n}{g_1 + \ldots + g_n}\ [\mu_n], \qquad n = 1, 2, \ldots$$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \dfrac{d\nu}{d\mu}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = 1\ [\mu].$ (Указание. Так как

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(E) = \int_E (g_1 + \ldots + g_n)\, d\mu, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i(E) = \int_E (f_1 + \ldots + f_n)\, d\mu, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то требуемый результат вытекает из теоремы 2 §5.5 и теоремы 5 §5.3.)

7. ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ

7.1. ДЕКАРТОВЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Если X и Y—какие-нибудь два множества (необязательно подмножества одного пространства), то *декартовым произведением* X на Y называется множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$; оно обозначается $X \times Y$. Простейшим примером декартова произведения служит координатная плоскость, которую можно рассматривать как произведение координатных осей. Большинство терминов и понятий, связанных с декартовыми произведениями, подсказаны именно этим примером. Так, если $A \subset X$ и $B \subset Y$, то множество $E = X \times Y$ содержащееся в $X \times Y$, назовем *прямоугольником,* а сами множества A и B— *сторонами* этого прямоугольника. (Заметим, что в случае плоскости мы отклоняемся от классической терминологии, согласно которой $A \times B$ будет называться прямоугольником только в том случае, когда A и B представляют собой интервалы.)

Теорема 1. *Прямоугольник оказывается пустым множеством тогда и только тогда, когда пуста одна из его сторон.*

Доказательство. Если $A \times B \neq 0$ и $(x, y) \in A \times B$, то $x \in A$ и $y \in B$, так что $A \neq 0$ и $B \neq 0$. С другой стороны, если ни A, ни B не пусто, то найдется хотя бы одна точка (x, y), принадлежащая $A \times B$, т. е. $A \times B \neq 0$.

Теорема 2. *Если* $E_1 = A_1 \times B_1$ и $E_2 = A_2 \times B_2$ *—два непустых прямоугольника, то* $E_1 \subset E_2$ *тогда и только тогда, когда*

$A_1 \subset A_2$ *и* $A_1 \subset B_2$.

Доказательство. Достаточность высказанного условия очевидна. Чтобы доказать его необходимость, возьмем какую-нибудь точку *(x, y)* из $A_1 \times B_1$ и допустим, что в A_1 существует точка x_1, не принадлежащая множеству A_2. Тогда

$$(x_1,\ y) \in A_1 \times B_1, \text{ но } (x_1,\ y) \bar{\in} A_2 \times B_2.$$

Полученное противоречие показывает, что $A_1 \subset A_2$. Точно так же доказывается, что $B_1 \subset B_2$.

Теорема 3. *Если* $A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2$ *—непустой прямоугольник, то* $A_1 = A_2$ *и* $B_1 = B_2$.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что

$$A_1 \subset A_2 \subset A_1 \quad \text{и} \quad B_1 \subset B_2 \subset B_1.$$

Теорема 4.

Пусть $E_1 = A_1 \times B_1, \quad E_2 = A_2 \times B_2, \quad E = A \times B$ *непустые прямоугольники. Тогда для того, чтобы* E_1 *и* E_2 *не пересекались и соединение их было равно E, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: либо* $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = 0$ *и* $B_1 = B_2 = B$, *либо* $B_1 \cup B_2 = B$, $B_1 \cap B_2 = 0$ *и* $A_1 = A_2 = A$.

Доказательство. Высказанное условие необходимо. В самом деле, так как $E_1 \subset E$ и $E_2 \subset E$, то, согласно теореме 2, $A_1 \subset A$ и $A_2 \subset A$ и, следовательно, $A_1 \cup A_2 \subset A$; точно так же $B_1 \cup B_2 \subset B$.

С другой стороны, из соотношения

$$E_1 \cup E_2 \subset (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$$

следует, что $A \subset A_1 \cup A_2$ и $B \subset B_1 \cup B_2$. Итак, $A = A_1 \cup A_2$ и $B = B_1 \cup B_2$. Рассуждая подобным же образом, мы придем к выводу, что

$$0 = E_1 \cap E_2 \supset (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

и, в силу теоремы 1, хотя бы одно из множеств $A_1 \cap A_2$ и $B_1 \cap B_2$ пусто.

Пусть, например, $A_1 \cap A_2 = 0$; покажем, что в этом случае

$B_1 = B_2 = 0.$ (Случай, когда $B_1 \cap B_2 = 0$ исследуется совершенно так же.) Допустим противное, т. е. что, например, в $B — B_1$ найдется точка y. Тогда, какова бы ни была точка x из A_1 непременно $(x, y) \in E$, но (так как $y \overline{\in} B_1$) $(x, y) \overline{\in} E_1$ и (так как $x \overline{\in} A_2$) $(x, y) \overline{\in} E_2$. Это противоречит предположению, что $E = E_1 \cup E_2$, следовательно, $B — B_1 = 0$; равенство $B — B_2 = 0$ устанавливается подобным же образом.

Достаточность условия доказывается проще. Если, например, $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = 0$ и $B_1 = B_2 = B$, то $A \supset A_1$, $A \supset A_2$, $B \supset B_1$, $B \supset B_2$ и, следовательно, $E \supset E_1 \cup E_2$. Если же $(x, y) \in E$, то либо $(x, y) \in E_1$, либо $(x, y) \in E_2$, в зависимости от того, входит x в A_1 или в A_2. Таким образом, E оказывается соединением прямоугольников E_1 и E_2, причем эти последние не пересекаются.

Теорема 5. *Если* **S** *— некоторое кольцо подмножеств множества X, а* **T** *— некоторое кольцо подмножеств множества Y, то класс* **R** *всевозможных конечных соединений непересекающихся прямоугольников вида $A \times B$, где $A \in \mathbf{S}$, $B \in \mathbf{T}$, представляет собой кольцо.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что пересечение двух множеств вида $A \times B$, где $A \in \mathbf{S}$, $B \in \mathbf{T}$, также представляет собой множество такого вида. Если одно из них, или их пересечение, пусто, то это утверждение тривиально. Если

$$E_1 = A_1 \times B_1, \quad E_2 = A_2 \times B_2 \quad \text{и} \quad (x, y) \in E_1 \cap E_2,$$

то $x \in A_1 \cap A_2$ и $y \in B_1 \cap B_2$, следовательно,

$$E_1 \cap E_1 \subset (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

С другой стороны, в силу теоремы 2, $(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ содержится как в E_1 так и в E_2, поэтому

$$E_1 \cap E_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

Так как **S** и **T** представляют собой кольца, то

$A_1 \cap A_2 \in \mathbf{S}$ и $B_1 \cap B_2 \in \mathbf{T}.$

Таким образом, класс **R** замкнут относительно образования конечных пересечений.

Из соотношения

$$(A_1 \times B_1) - (A_2 \times B_2) = [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 - B_2)] \cup [(A_1 - A_2) \times B_1]$$

следует, что разность двух множеств рассматриваемого вида есть множество такого же вида. А так как

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i - \bigcup_{j=1}^{m} F_j = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} (E_i - F_j),$$

то, принимая во внимание результат предыдущего абзаца, мы приходим к заключению, что класс **R** замкнут относительно образования разностей. Так как соединение любого конечного числа непересекающихся множеств из **R**, очевидно, входит в **R**, то теорема полностью доказана.

Пусть одновременно с множествами *X* и *Y* нам заданы некоторые σ-кольца **S** и **T** подмножеств соответстенно *X* и *Y*. Тогда **S** × **T** будет означать σ-кольцо подмножеств произведения *X*×*Y*, порожденное классом всевозможных множеств вида *A*×*B*, где *A*∈ **S** и *B* ×**T**.

Теорема 6. *Если (X,* **S**) *и* (*Y*, **T**) — *измеримые пространства, то* $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ *также представляет собой измеримое пространство.*

Измеримое пространство $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ назовем *декартовым произведением* измеримых пространств *(X,* **S**) и (*Y*, **T**).

Доказательство. Если $(x, y) \in X \times Y$, то существуют множества *A* и *B*, такие, что $X \in A \in \mathbf{S}$ и $y \in B \in \mathbf{T}$; отсюда следует, что $(x, y) \in A \times B \in \mathbf{S} \times \mathbf{T}$.

Заметим, что здесь мы впервые воспользовались тем, что измеримое пространство равно соединению всех своих измеримых множеств; в настоящей главе мы будем существенно пользоваться этим свойством измеримых пространств.

Нам не раз понадобится также понятие *измеримого прямоугольника.* Два естественных определения этого понятия напрашиваются сами собой. Согласно одному из них, прямоугольник в произведении измеримых пространств *(X,* **S**) и (*Y*, **T**) измерим, если он принадлежит **S** × **T**; согласно другому, прямоугольник *A* × *B* измерим, если *A* ∈ **S** и B ∈ **T**. Ниже мы увидим, что в применении к непустым прямоугольникам эти определения эквивалентны, а до тех пор мы остановимся на втором определниию Тогда можно будет сказать, что класс измеримых множеств в декартовом произведении двух измеримых пространств представляет собой σ-кольцо, порожденное классом всех измеримых прямоугольников.

1. Пересечение любого счетного класса (измеримых) прямоугольников представляет собой (измеримый) прямоугольник. Можно ли в этом предложении опустить слово „счетный"?
2. В случае пустых прямоугольников условия теорем 2, 3 и 4 перестают быть необходимыми.
3. В предположениях теоремы 5, класс **P** всех множеств вида $A \times B$, где $A \in$ **S** и $B \in$ **T**, представляет собой полукольцо. Верно ли это утверждение, если относительно **S** и **T** предполагать только, что они — полукольца?
4. Если кольца **S** и **T** содержат хотя бы по два различных непустых множества, то класс **P** (см. упр. 3) не является кольцом.
5. Для того чтобы **S × T** было σ-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы и **S** и **T** были σ-алгебрами.
6. Если $(X$, **S**) и (Y, **T**) — измеримые пространства, то всякое измеримое множество в $X \times Y$ содержится в некотором измеримом прямоугольнике. (Указание. Класс всех тех множеств, каждое из которых может быть покрыто некоторым измеримым прямоугольником, представляет собой σ-кольцо.)

7.2. СЕЧЕНИЯ

Пусть $(X$, **S**) и (Y, **T**) — измеримые пространства, а $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ — их декартово произведение. Если E— какое-нибудь множество в $X \times Y$, и x — любая точка из X, то множество $E_x = \{y : (x, y) \in E\}$ будем называть *сечением* множества E или, говоря точнее, сечением, *определяемым* точкой x. В тех случаях, когда существенно лишь то, что сечение определено какой-то точкой пространства X (и, следовательно, представляет собой подмножество пространства Y), а какой именно точкой — не имеет значения, мы будем также употреблять термин *X-сечение.* При этом сама запись исключает возможность смешения такого сечения с Y-сечением, определяемых некоторой точкой y из Y; последнее определяется как множество $E^y = \{x : (x, y) \in E\}$. Мы хотим подчеркнуть тот факт, что сечение множества в произведении пространств X и Y само не является подмножеством этого произведения, а представляет собой подмножество либо из X, либо из Y.

Если f—произвольная функция, заданная на некотором множестве E в произведении $X \times Y$, и x — какая-нибудь точка из X, то функцию f_x, определеннуюна сечении E_x равенством

$$f_x(y) = f(x,\ y),$$

мы назовем *сечением* функции f, или, точнее, X*-сечением* функции f, или, еще точнее, сечением функции f, *определяемым* точкой x. Подобным же образом Y*-сечение* функции f, определяемое точкой y из Y, есть функция f^y, заданная на сечении E^y равенством

$$f^y(x) = f(x,\ y).$$

Теорема 1. *Любое сечение измеримого множества есть измеримое множество.*

Доказательство. Пусть **E** — класс всех множеств в $X \times Y$, обладающих тем свойством, что все их сечения измеримы. **E** является, очевидно, σ-кольцом. Если $E = A \times B$ —произвольный измеримый прямоугольник, то любое его сечение либо пусто, либо совпадает с одной из его сторон (с A, если имеем Y-сечение; с B, если имеем X-сечение); таким образом $E \in$ Е. Следовательно, $\mathbf{S} \times \mathbf{T} \subset \mathbf{E}$.

Теорема 2. *Любое сечение измеримой функции представляет собой измеримую функцию.*

Доказательство. Пусть f — измеримая функция на $X \times Y$, x — точка из X, M — произвольное борелевское множество на числовой прямой. Тогда измеримость множества

$$N(f_x) \cap f_x^{-1}(M)$$

следует из соотношений

$$f_x^{-1}(M) = \{y : f_x(y) \in M\} = \{y : f(x,\ y) \in M\} =$$
$$= \{y : (x,\ y) \in f^{-1}(M)\} = (f^{-1}(M))_x.$$

(Заметим еще, что $N(f_x) = (N(f))_x$.) Измеримость Y-сечения функции f доказывается подобным же образом.

1. Если χ — характеристическая функция какого-либо множества E в $X \times Y$, то χ_x и χ^y представляют собой характеристические функции соответственно сечений E_x и E^y. В частности, если χ — характеристическая функция прямоугольника $A \times B$, то

$$\chi(x, y) = \chi_A(x)\,\chi_B(y).$$

Любое сечение простой функции является простой функцией.

2. Пусть $X= Y$—произвольное несчетное множество, а **S = T**— класс всех его конечных или счетных подмножеств. Если $D = \{(x, y): x = y\}$— „диагональ" пространства $X\times Y$, то всякое сечение множества D измеримо, тогда как само D неизмеримо; таким образом, теорема 1 не обратима.

3. Пусть на декартовом произведении двух измеримых пространств X и Y задана действительная функция f, принимающая конечные или бесконечные значения. Если f такова, что, каково бы ни было борелевское множество M на расширенной числовой прямой, пересечение f^{-1} (M) со всяким измеримым множеством измеримо, то любое сечение функции f обладает тем же свойством. Сохранит ли силу это утверждение, если в определении измеримого пространства не требовать, чтобы все пространство было равно соединению всех измеримых множеств? Каково соотношение между сформулированным здесь свойством функции и свойством измеримости?

4. Непустой прямоугольник представляет собой измеримое множество тогда и только тогда, когда он является измеримым прямоугольником. (Указание. Если множество $A \times B$ измеримо, то всякое его сечение измеримо.)

5. Пусть $(X,$ **S**) — измеримое пространство, причем $X \in$ **S** (другими словами, **S** есть σ-алгебра); пусть Y — числовая прямая и **T** — класс всех борелевских множеств. Если f— неотрицательная функция, заданная на X, то множество

$$V^*(f) = \{(x, y): x \in X, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

в $X\times Y$ называется *верхним множеством ординат* функции f, а

$$V_*(f) = \{(x, y): x \in X, \quad 0 \leqslant y < f(x)\}$$

— ее *нижним множеством ординат.* (Заметим, что, например, для функции, тождественно равной нулю, нижнее множество ординат пусто.) Здесь мы наметим вкратце другой возможный подход к изучению измеримых функций йа декартовых произведениях:

а) Если f— неотрицательная простая функция, то множества $V^*(f)$ и $V_*(f)$ измеримы. (Указание. Оба эти множества представляют собой соединения конечного числа измеримых прямоугольников.)

б) Если f и g — неотрицательные функции и для $f(x) \leqslant g(x)$ всех x, то $V^*(f) \subset V^*(g)$ и $V_*(f) \subset V_*(g)$.

в) Если $\{f_n\}$ — возрастающая последовательность неотрицательных функций, сходящаяся во всех точках к f, то $\{V_*(f_n)\}$ представляет собой возрастающую последовательность множеств, соединение которых равно $V_*(f)$; подобным же образом, если $\{f_n\}$ сходится к f, убывая, то $\{V^*(f_n)\}$—убывающая последовательность множеств, пересечение которых равно $V^*(f)$.

г) Если f—неотрицательная измеримая функция, то $V^*(f)$ и $V_*(f)$ — измеримые множества. (Указание. Если / ограничена, то существуют последовательности простых функций $\{g_n\}$ и $\{h_n\}$, такие, что

$$0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant f \leqslant h_{n+1} \leqslant h_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\lim_n g_n = \lim_n h_n = f.)$$

д) Если E— любое измеримое множество в $X \times Y$ и α, β— действительные числа, причем $\alpha > 0$, то $\{(x, y) : (x, \alpha y + \beta) \in E\}$ представляет собой измеримое множество в $X \times Y$ (Указание. Это предложение верно в том случае, когда E есть измеримый прямоугольник и все множества, для которых оно верно, образуют σ-кольцо.)

е) Если f—неотрицательная функция, для которой множество $V^*(f)$ (или $V_*(f)$) измеримо, то f измерима. (Указание. В том случае, когда измеримо $V^*(f)$, достаточно показать, что, каково бы ни было положительное число c, множество $\{x : f(x) > c\}$ измеримо. Если $E = V^*(f)$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{(x, y) : \left(x, \frac{1}{n} y + c\right) \in E,\ y > 0\right\} = \{(x, y) : f(x) > c,\ y > 0\},$$

и наше утверждение следует из того факта, что стороны измеримого прямоугольника измеримы.)

ж) Множество $\{(x, y) : f(x) = y\}$ называется *графиком* функции f (не обязательно неотрицательной). График измеримой функции представляет собой измеримое множество.

7.3. ПРОИЗВЕДЕНИЯ МЕР

Продолжая изучение декартовых произведений, мы будем теперь в качестве множителей брать пространства с мерой.

Теорема 1. *Если* $(X, \mathbf{S}, \mu)$ *и* $(Y, \mathbf{T}, \nu)$— *пространства σ-конечными мерами и* E— *любое измеримое множество в* $X \times Y$, *то функции* f *и* g, *заданные соответственно на* X *и* Y *равенствами*

$f(x) = \nu(E_x)$ *и* $g(y) = \mu(E^y)$, *представляют собой неотрицательные измеримые функции, такие, что*

$$\int f\, d\mu = \int g\, d\nu.$$

Доказательство. Если **M** — класс всех тех множеств *E*, для которых справедлива эта теорема, то, как легко видеть, **M** замкнут относительно образования счетных соединений непересекающихся множеств, входящих в него. Так как меры μ и *ν* σ-конечны, то всякое множество из **S** × **T** может быть покрыто счетным числом непересекающихся измеримых прямоугольников со сторонами, мера которых конечна. Поэтому, если бы нам удалось доказать, что всякое измеримое подмножество измеримого прямоугольника со сторонами конечной меры входит в **M**, то отсюда следовало бы утверждение теоремы, т. е. что любое измеримое множество входит в **M**. Другими словами, мы свели доказательство к случаю, когда меры конечны. В этом случае достаточно показать, что в **M** входят все измеримые прямоугольники (а следовательно, все конечные соединения измеримых прямоугольников) и что **M** представляет собой монотонный класс.

Если $E = A \times B$—непустой измеримый прямоугольник, то $f = \nu(B)\chi_A$ и $g = \mu(A)\chi_B$.

Следовательно, функции *f* и *g* измеримы и

$$\int f\, d\mu = \int g\, d\nu = \mu(A)\,\nu(B).$$

То, что **M** — монотонный класс, следует из теоремы об интегрировании последовательностей функций, в частности, из теорем 4 § 5.4 и 2 § 5.5, (Возможность применения этих теорем обусловлена тем, что меры μ и *ν* конечны.) Так как всевозможные соединения конечного числа непересекающихся измеримых прямоугольников образуют кольцо (см. теорему 5 § 7.1) и так как, по самому определению, класс измеримых множеств является σ-кольцом, порожденным этим кольцом, то, согласно теореме 2 § 2.6, все измеримые множества принадлежат **M**.

Теорема 2. *Если (X,* **S**, μ*) и* (*Y*, **T**, *ν*) — *пространства с σ-конечными мерами, то функция множества λ, заданная на множествах E из* **S** × **T** *равенством*

$$\lambda(E) = \int \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int \mu(E^y)\, d\nu(y),$$

представляет собой σ-конечную меру и обладает тем свойством, что, каков бы ни был измеримый прямоугольник A × B,

$$\lambda(A\times B)=\mu(A)\,\nu(B).$$

Этим последним свойством функция λ определяется однозначно.
Мера λ называется *произведением* мер μ и ν и обозначается $\lambda=\mu\times\nu$; при этом $(X\times Y,\ \mathbf{S}\times\mathbf{T},\ \mu\times\nu)$ называется *декартовым произведением* пространств с мерами $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$ и $(Y,\ \mathbf{T},\ \nu)$.

Доказательство. То, что λ есть мера, следует из теоремы 2 § 5.5 (см. также упр. 2 § 5.5). Мера λ σ-конечна, так как всякое измеримое множество в *X*×*Y* может быть покрыто счетным числом измеримых прямоугольников конечной меры. Единственность λ следует из теоремы 1 § 3.8.

1. Пусть *X*=*Y*— единичный интервал, а **S** = **T**—класс борелевских множеств; пусть, далее, μ *(E)*— лебеговская мера множества *E,* а ν (*E*) равно числу точек множества *E.* Тогда $D=\{(x,\ y):x=y\}$ представляет собой измеримое множество в $X\times Y$ такое, что $\int\nu(D_x)\,d\mu(x)=1$ и $\int\mu(D^y)\,d\nu(y)=0.$ Таким образом,

теорема 1, вообще говоря, неверна, если меры не σ-конечны.
2. Произведение двух σ -конечных полных мер может не быть полной мерой. (Указание. Пусть *X* = *Y*— единичный интервал, *M* — неизмеримое множество в *X, у* — любая точка из *Y;* рассмотрите множество $M\times\{y\}$;см. также упр. 4 §7.2.)
3. Пусть $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$— пространство с вполне оконечной мерой, $(Y,\ \mathbf{T},\ \nu)$ — числовая прямая, **T** — класс всех борелевских множеств и ν-лебеговская мера; пусть $\lambda=\mu\times\nu.$ Мы уже видели (см. упр. 5 §7.2), что для любой неотрицательной измеримой (следовательно, для любой неотрицательной интегрируемой) функции *f* множества ординат $V^*(f)$ и $V_*(f)$ представляют собой измеримые множества в *X*×*Y*. Теперь мы утверждаем, что

$\lambda(V_*(f))=\lambda(V^*(f))=\int f\,d\mu.$ (Указание. В силу известных

результатов, относящихся к приближению функций простыми функциями и к интегрированию последовательностей, это равенство достаточно установить для простых функций *f*.)
Само это равенство может служить определением интеграла

$$\int f\,d\mu;$$

в нем заключена точная формулировка утверждения, что „интеграл равен площади, органиченной кривой".

4. При условиях, высказанных в предыдущем упражнении, график измеримой функции имеет меру нуль. (Указание. Достаточно рассмотреть неотрицательные ограниченные измеримые функции на пространстве с вполне конечной мерой; для них справедлив результат предыдущего упражнения.)

5. Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ —пространства с σ-конечными мерами и $\lambda = \mu \times \nu$, то для любого множества E из $\mathbf{H}(\mathbf{S} \times \mathbf{T})$ значение $\lambda^*(E)$ равно нижней грани сумм вида $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$, где $\{E_n\}$ — последовательность измеримых прямоугольников, покрывающая E, (Указание. См. упр. 3 §7.1, теорему 1 § 3.4 и упр. 5 §3.2.)

7.4. ТЕОРЕМА ФУБИНИ

В этом параграфе мы рассмотрим связь между интегралами по произведению пространств и интегралами по множителям. Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ — пространства с σ-конечными мерами, а $\lambda = \mu \times \nu$ — произведение мер, заданное на **S** × **T**.

Если функция h на $X \times Y$ такова, что для нее имеет смысл интеграл по этому пространству (например, если h интегрируема или измерима и неотрицательна), то такой интеграл мы будем записывать

$$\int h(x, y)\,d\lambda(x, y) \quad \text{или} \quad \int h(x, y)\,d(\mu \times \nu)(x, y)$$

и называть *двойным интегралом* функции h. Если функция f такова, что для нее существует интеграл

$$\int h_x(y)\,d\nu(y) = f(x),$$

причем и $\int f\,d\mu$ имеет смысл, то мы будем писать

$$\int f\,d\mu = \int\int h(x,\ y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) = \int d\mu(x)\int h(x,\ y)\,d\nu(y).$$

Подобным же образом определяется

$$\int\int h(x,\ y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)$$

или

$$\int d\nu(y)\int h(x,\ y)\,d\mu(x),$$

как интеграл (если он существует) функции g на Y, определенной равенством $g(y) = \int h^y(x)\,d\mu(x).$ Интегралы

$$\int\int h\,d\mu\,d\nu \text{ и } \int\int h\,d\nu\,d\mu$$

называются *повторными интегралами* функции h. Двойной и повторные интегралы функции h по измеримому множеству E в пространстве $X\times Y$, т. е. соответствующие интегралы функции h_{χ_E}, обозначаются

$$\int_E f d\lambda, \quad \int\int_E f\,d\mu\,d\nu \text{ и } \int\int_E f\,d\,.$$

Всякое X-сечение (множества или функции) определяется выбором точки x из X. Поэтому, говоря, что некоторое утверждение верно для „почти всех X-сечений", мы будем подразумевать, что X-сечения, для которых это утверждение неверно, отвечают некоторым точкам x, образующим множество меры нуль. Подобный же смысл мы будем вкладывать в выражение „почти все Y -сечения". Если некоторое утверждение справедливо одновременно для почти всех X-сечений и для почти всех Y -сечений, то мы будем просто говорить, что оно верно для почти всех сечений.

Начнем с того, что установим один простой, но важный результат.

Теорема 1. *Множество E в $X\times Y$ имеет меру нуль тогда и только тогда, когда почти все его X-сечения (или почти все Y-сечения) имеют меру нуль.*

Доказательство. Согласно определению произведения мер,

$$\lambda(E) = \begin{cases} \int \nu(E_x)\,d\mu(x), \\ \int \mu(E^y)\,d\nu(y). \end{cases}$$

Если λ *(E)* = 0, то интегралы в правой части конечны, и, в силу теоремы 2 § 5.3, неотрицательные подинтегральные функции справа должны почти всюду обращаться в нуль. Обратно, если хотя бы одна из подинтегральных функций равна нулю почти всюду, то λ *(E)* = 0.

Теорема 2. *Если h — неотрицательная измеримая функция на X×Y, то*

$$\int hd(\mu\times\nu)=\int\int h\,d\mu\,d\nu=\int\int h\,d\nu\,d\mu.$$

Доказательство. Если *h*—характеристическая функция какого-нибудь измеримого множества *E*, то

$$\int h(x,\ y)\,d\nu(y)=\nu(E_x)\ \text{ и }\ \int h(x,\ y)\,d\mu(x)=\mu(E^y),$$

и наше утверждение следует, из теоремы 2 § 7.3. В общем случае мы возьмем возрастающую последовательность неотрицательных простых функций $\{H_n\}$, сходящуюся всюду к *h* (см. теорему 2 § 4.4). Так как всякая простая функция представляется в виде линейной комбинации характеристических функций, то утверждение теоремы верно для функций h_n.

Согласно теореме 2 § 5.5,

$$\lim_n\int h_n\,d\lambda=\int h\,d\lambda.$$

Если

$$f_n(x)=\int h_n(x,\ y)\,d\nu(y),$$

то из свойств последовательности $\{h_n\}$ вытекает, что $\{\ h_n\ \}$ представляет собой возрастающую последовательность неотрицательных измеримых функций, сходящуюся к $f(x)=\int h(x,\ y)\,d\nu(y)$ при любом *x* (см. теорему 2 § 5.5). Отсюда следует, что функция *f* измерима (и, очевидно, неотрицательна); еще раз применяя теорему 2 § 5.5, мы получим равенство

$$\lim_n\int f_n\,d\mu=\int f\,d\mu.$$

Мы доказали, что двойной интеграл совпадает с одним из повторных интегралов; совпадение его с другим повторным интегралом устанавливается точно так же.

Следующий результат называется *теоремой Фубини.* Впрочем, иногда это название присваивают также теоремам 1 и 2.

Теорема 3. *Если h — интегрируемая функция на $X\times Y$, то почти все ее сечения интегрируемы. Функции f и g, определенные равенствами*

$$f(x)=\int h(x,y)\,d\nu(y) \text{ и } g(y)=\int h(x,y)\,d\mu(x),$$

интегрируемы и

$$\int h\,d(\mu\times\nu)=\int f\,d\mu=\int g\,d\nu.$$

Доказательство. Так как действительная функция интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируемы ее положительная и отрицательная части, то достаточно рассмотреть случай неотрицательной h. В этом случае требуемый результат следует из теоремы 2. Интегралы неотрицательных функций f и g оказываются конечными, следовательно, сами f и g—интегрируемыми. Отсюда вытекает, что f и g почти всюду конечны и, следовательно, почти все сечения функции h интегрируемы.

1. Пусть X — множество мощности $\aleph_1$, $\mathbf{S}$ — класс всех его конечных или счетных подмножеств и их дополнений; μ задана на $\mathbf{S}$ таким образом, что для любого A из $\mathbf{S}$ значение $\mu(A)$ равно 0, если A конечно или счетно, и 1, если A несчетно. Положим теперь $(Y,\ \mathbf{T},\ \nu)=(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$ и возьмем в $X\times Y$ множество E, обладающее тем свойством, что пересечение E с любой горизонтальной линией конечно или счетно, а пересечение с любой вертикальной линией имеет относительно этой линии конечное или счетное дополнение (см. упр. 11 §6.5). В качестве h возьмем характеристическую функцию множества E; тогда h неотрицательна и

$$\int h(x,y)\,d\mu(x)=1, \qquad \int h(x,y)\,d\nu(y)=0.$$

Не противоречит ли этот пример теореме 2?

2. Если $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)=(Y,\ \mathbf{T},\ \nu)$— единичный интервал с лебеговской мерой и E — множество в $X\times Y$, такое, что E_x и E — E^y конечны или счетны при любых x и y (см. упр. 1), то E — неизмеримое множество.

3. Здесь мы укажем обобщение результатов, изложенных в этом параграфе. Пусть $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$— пространство с вполне конечной мерой, и $(Y,\ \mathbf{T})$ — измеримое пространство, такое, что $X\in\mathbf{T}$. Предположим, что почти каждому x из X поставлена в соответствие конечная мера ν_x на $\mathbf{T}$ таким образом, что если $\varphi(x)=\nu_x(B)$, то при любом

множестве B из $\mathbf{T}$ функция φ на X оказывается измеримой. Положим $\nu(B) = \int \nu_x(B)\, d\mu(x)$. Тогда если g — неотрицательная измеримая функция на X и $f(x) = \int g(y)\, d\nu_x(y)$, то f—неотрицательная измеримая функция на X и $\int f\, d\mu = \int g\, d\nu$.

4. Теорема Фубини часто доказывается несколько сложнее; это объясняется тем, что вместо меры λ рассматривается ее пополнение $\overline{\lambda}$. Действительно, теоремы этого параграфа оказываются справедливыми, если заменить λ мерой $\overline{\lambda}$. (Указание. Всякая функция, измеримая $(\overline{\mathbf{S} \times \mathbf{T}})$, совпадает почти всюду $[\overline{\lambda}]$ с некоторой функцией, измеримой ($\mathbf{S} \times \mathbf{T}$); см. упр. 1 § 4.5.) В упражнениях 5—9 предполагается, что $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ — пространства с вполне конечными мерами. Легко убедиться в том, что результаты этих упражнений распространяются на пространства с вполне σ-конечными мерами и, следовательно, на измеримые множества в произведении пространств с σ -конечными мерами.

5. Если E и F—измеримые множества в $X \times Y$ такие, что $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ для (почти) всех x из X, то $\lambda(E) = \lambda(F)$. (Некоторые частные случаи этого предложения, обычно формулируемые недостаточно строго, носят название *принципа Кавальери.)*

6. Если f и g — интегрируемые функции соответственно на X и Y, то функция h на $X \times Y$, определяемая равенством $h(x, y) = f(x)\, g(y)$, интегрируема и

$$\int h\, d(\mu \times \nu) = \int f\, d\mu \cdot \int g\, d\nu.$$

7. Предположим, что $\mu(X) = \nu(Y) = 1$, A_0 и B_0— измеримые множества соответственно в X и Y, такие, что $\mu(A_0) = \nu(B_0) = \frac{1}{2}$. Пусть χ — характеристическая функция множества $(A_0 \times Y)\, \Delta\, (X \times B_0)$. Положим $f(x, y) = 2\chi(x, y)$. Если для любого измеримого множества E из $X \times Y$

$$\bar{\lambda}(E) = \int\limits_E f(x, y)\, d\lambda(x, y),$$

то $\bar{\lambda}$ — конечная мера на **S** × **T**, обладающая тем свойством, что $\bar{\lambda}(A \times Y) = \mu(A)$ и $\bar{\lambda}(X \times B) = \nu(B)$, когда $A \in$ **S** и $B \in$ **T**. Это означает, что произведение мер не определяется однозначно своими значениями на таких прямоугольниках.

8. Существование произведения мер часто доказывается следующим прямым, хотя технически довольно сложным приемом. Всевозможные конечные соединения непересекающихся измеримых прямоугольников образуют кольцо **R** (см. теорему 5 §7.1). Если

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i) \text{ и } \bigcup_{j=1}^{m} (C_j \times D_j)$$

— два представления какого-нибудь множества E из **R** в виде соединений нескольких измеримых прямоугольников, то

$$\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} [(A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j)]$$

есть еще одно представление E в таком виде; следовательно, выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\, \nu(B_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(C_j)\, \nu(D_j).$$

Другими словами, функция множества λ однозначно определяется равенством

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\, \nu(B_i).$$

Можно обнаружить (по существу, доказав теорему Фубини для интегралов по множествам, принадлежащим **R**), что λ представляет собой меру, к которой применима теорема 1 § 3.8.

9. Если A и B — произвольные (не обязательно измеримые) множества соответственно в X и Y, то

$$\lambda^*(A \times B) = \mu^*(A)\, \nu^*(B).$$

(Указание. Если A^* и B^* — измеримые оболочки множеств A и B, то из $A \times B \subset A^* \times B^*$ следует неравенство $\lambda^*(A \times B) \leqslant \mu^*(A)\, \nu^*(B)$. Обратное неравенство можно получить, рассмотрев измеримую оболочку E^* множества $X \times Y$ • Так как $E^* \bigcap (A^* \times B^*)$ также служит измеримой оболочкой множества $X \times Y$, то можно предположить, что $E^* \subset A^* \times B^*$. Из теоремы Фубини получим

$$\lambda(E^*) \geqslant \int_{A^*} \nu(E_x^*)\, d\mu(x) \geqslant \mu(A^*)\, \nu(B^*).\ )$$

7.5. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ

В предыдущих параграфах была развита теория произведений пространств в случае двух множителей; теперь мы посмотрим, как можно распространить эту теорию на произвольное конечное число множителей. Предположим, что $n(> 1)$ — целое положительное число, $X_1, \ldots, X_n$ — произвольные множества; *декартовым произведением* этих множеств назовем множество всех упорядоченных систем вида $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i,\ i = 1, \ldots, n$. Такое декартово произведение мы будем обозначать

$X_1 \times \ldots \times X_n$,

или

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} X_i$$

или, наконец,

$$\times \{X_i : i = 1, \ldots, n\}.$$

Если A_i — множество в X_i, $i=1, \ldots, n$, то множество $\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$ называется *прямоугольником.*

Относительно образования декартовых произведений, так же как относительно любой алгебраической операции, можно поставить вопрос, ассоциативно ли оно. Если, например, $X_1,\ X_2,\ X_3$ —какие-нибудь три множества, то, не нарушая того порядка, в каком они перечислены, можно образовать множества $(X_1 \times X_2) \times X$, $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ и $X_1 \times X_2 \times X_3$. В каком смысле эти три декартовых произведения можно считать равными? Очевидно, они состоят из различных элементов; в самом деле, упорядоченная пара $((x_1, x_2), x_3)$, первый элемент которой сам представляет собой упорядоченную пару, не тождественна упорядоченной тройке (x_1, x_2, x_3). Столь же очевидно, однако, наличие „естественного" взаимно-однозначного соответствия между рассматриваемыми декартовыми произведениями, которое сопоставляет друг другу их элементы

$$((x_1, x_2), x_3) \quad (x_1, (x_2, x_3)) \quad \text{и} \quad (x_1, x_2, x_3).$$

Так как при таком соответствии сохраняются все интересующие нас свойства строения декартовых произведений, то мы сознательно согласимся на то, чтобы, допуская некоторую логическую погрешность, считать все три описанных произведения тождественными. Это соглашение будет осуществляться вполне последовательно, так что, например, в случае семи множителей, элемент

$$(((x_1, x_2), x_3), ((x_4, x_5), (x_6, x_7)))$$

множества

$$(((X_1 \times X_2) \times X_3) \times ((X_4 \times X_5) \times (X_6 \times X_7)))$$

мы будем отождествлять с элементом

$$(x_1, x_2, x_3\ x_4, x_5, x_6, x_7)$$

множества

$$(X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4 \times X_5 \times X_6 \times X_7).$$

Такое отождествление позволит нам упростить изложение многих доказательств. Так, например, рассматривая $X_1 \times \ldots \times X_n$ как повторное произведение

$$(\ldots((X_1 \times X_2) \times X_3) \times \ldots) \times X_n,$$

мы сможем, обобщая теоремы § 7.1, пользоваться методом математической индукции. Формулируя такие обобщения, надо соблюдать известную осторожность. Так, например, теорема 4 § 7.1 обобщается следующим образом: если

$$E=\bigtimes_{i=1}^{n} A_i, \quad F=\bigtimes_{i=1}^{n} B_i \quad \text{и} \quad G=\bigtimes_{i=1}^{n} C_i$$

— непустые прямоугольники, то $E=F\cup G$ и

$F\cap G=0$ тогда и только тогда, когда существует такое целое положительное j, $1\leqslant j\leqslant n$, что

$A_j=B_j\cup C_j$, $B_j\cap C_j=0$ и $A_i=B_i=C_i$ при $i\neq j$.

Несколько видоизменяется понятие сечения (множества или функции): X_j-сечение множества $\bigtimes_{i=1}^{n} X_i$, отвечающее точке x_j из X_j, представляет собой подмножество произведения

$$\bigtimes\{X_i : 1\leqslant i\leqslant n, \quad i\neq j\}.$$

Пусть $(X_i, \mathbf{S}_i)$, $i=1, \ldots, n$,—измеримые пространства; их декартовым произведением назовем измеримое пространство $(X_1\times\ldots\times X_n, \mathbf{S}_1\times\ldots\times\mathbf{S}_n)$, в котором

$$\mathbf{S}_1\times\ldots\times\mathbf{S}_n$$

(иначе обозначаемое

$$\bigtimes_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i \quad \text{или} \quad \bigtimes\{\mathbf{S}_i : i=1, \ldots, n\})$$

есть σ-кольцо, порожденное прямоугольниками вида

$$\bigtimes_{i=1}^{n} A_i,$$

где $A_i\in\mathbf{S}_i$, $i=1, \ldots, n$. Из этого определения следует, что любое сечение измеримого множества (или измеримой функции) представляет собой измеримое множество (соотв. измеримую функцию).

Прибегнув к методу индукции, определим декартово произведение пространств $(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)$, $i=1, \ldots, n$, с σ-конечными мерами. На $\mathbf{S}_1\times\ldots\times\mathbf{S}_n$ можно задать единственную меру μ (обозначаемую $\mu_1\times\ldots\times\mu_n$), обладающую тем свойством, что

$$\mu(A_1\times\ldots\times A_n)=\prod_{i=1}^{n}\mu_i(A_i)$$

для произвольного измеримого прямоугольника $A_1 \times \ldots \times A_n$. Непосредственное обобщение допускает теорема Фубини, так что интеграл произвольной интегрируемой функции на произведении пространств можно вычислить, взяв любой из соответствующих повторных интегралов.

Произведение пространств $X = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n} X_i$ принято называть *n-мерным.*

Термин этот не имеет отношения к понятию размерности, он указывает лишь, каким путем образовано X из пространств X_i. Пространство с мерой может оказаться трехмерным в одном контексте и двумерным — в другом, так как $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ можно одновременно представить в виде $X = X_0 \times X_3$, где $X_0 = X_1 \times X_2$.

В упражнениях 1—5 предполагается, что

$$(X, \mathbf{S}, \mu) = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n} (X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i),$$

где X_i — числовая прямая, S_i — класс всех борелевских множеств, μ_i — лебе-говская мера, $i = 1, \ldots, n$.

1. Множества, образующие σ-кольцо S, называются *борелевскими множествами* в n-мерном эвклидовом пространстве. Класс всех борелевских множеств совпадает с σ-кольцом, порожденным классом всех открытых множеств.
2. Если φ — функция на X, измеримая в смысле Бореля, а $f_1, \ldots, f_n$ — действительные измеримые функции на некотором измеримом пространстве $(Y, \mathbf{T})$, причем $Y \in \mathbf{T}$, то функция $\hat{f}$ на Y, определенная равенством $\hat{f}(y) = \varphi(f_1(y), \ldots, f_n(y))$, измерима (см. теорему 2 § 4.3).
3. Пополнение $\bar{\mu}$ меры μ называется *n-мерной лебеговской мерой;* большинство результатов §§ 3.12 и 3.13 справедливо для $\bar{\mu}$. В частности, если **U** — класс всех открытых множеств в X, а **C** — класс всех замкнутых множеств в X, то для любого множества E в X

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\}$$

и

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(C) : E \supset C \in \mathbf{C}\}.$$

4. Если T—линейное преобразование, определенное равенствами

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n), \quad y_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то для любого множества E в X

$$\mu^*(T(E)) = |\Delta|\mu^*(E) \quad \text{и} \quad \mu_*(T(E)) = |\Delta|\mu_*(E),$$

где Δ — определитель матрицы (a_{ij}). (Указание. Достаточно доказать это предложение для прямоугольников E, стороны которых представляют собой интервалы. Сначала следует рассмотреть такие частные случаи:

а) $y_i = x_i + b_i,\ i = 1, \ldots, n.$

б) $y_i = x_i$ при $i \neq j$ и $i \neq k$; $y_j = x_k$ и $y_k = x_j$.

в) $y_i = x_i$ при $i \neq j$; $y_j = x_j \pm x_k$, где $k \neq j$.

г) $y_i = x_i$ при $i \neq j$; $y_j = cx_j$.

Произвольное линейное преобразование может быть представлено в виде произведения преобразований типов „а" — „г".

5. Функции φ_j, определенные равенствами

$$\varphi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

измеримы.

6. Можно определить n-мерную лебеговскую меру, не прибегая к произведениям пространств. Рассмотрим пространство $X_1 \times \ldots \times X_n$, где $X_i = X$— единичный интервал, $i = 1, \ldots, n$. Для любого x из X пусть $x = 0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$— представление x в виде двоичной дроби; положим

$$x_i = 0{,}\alpha_i\alpha_{n+i}\alpha_{2n+i}\ldots, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(Для тех x, для которых существуют два таких представления, выберем какое-нибудь одно, например конечное.) Отображение T единичного интервала X в $X_1 \times \ldots \times X_n$, определенное равенством $T(x) = (x_1, \ldots, x_n)$, обладает тем свойством, что если множество E в $X_1 \times \ldots \times X_n$ измеримо, то множество $T^{-1}(E) = \{x : T(x) \in E\}$ в X также измеримо. (Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда E— прямоугольник со сторонами, концы которых являются двоичными рациональными числами.) Произведение $\mu_1 \times \ldots \times \mu_n$ может быть определено равенством $(\mu_1 \times \ldots \times \mu_n)(E) = \mu(T^{-1}(E))$, где μ — лебеговская мера. Это новое определение согласуется с тем, которое было дано выше.

7. С помощью диагонального метода, т. е. положив

$$x_1 = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_7\ldots,$$
$$x_2 = 0,\alpha_3\alpha_5\alpha_8\alpha_{12}\ldots,$$
$$x_3 = 0,\alpha_6\alpha_9\alpha_{13}\alpha_{18}\ldots,$$
$$x_4 = 0,\alpha_{10}\alpha_{16}\alpha_{19}\alpha_{25}\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

можно распространить указанное в упр. 6 определение меры на бесконечномерный аналог эвклидова пространства.

7.6. БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ

Переходим к обобщению понятия произведения пространств на случай бесконечного числа множителей. Первый шаг в этом направлении очевиден: если $\{X_i\}$— последовательность каких-нибудь множеств, то их декартовым произведением

$$X = \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{\infty} X_i$$

мы назовем множество всех последовательностей вида $(x_1, x_2, \ldots)$, где $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Однако если каждое X_i есть пространство с мерой, т. е. в каждом X_i выделено σ-кольцо множеств $\mathbf{S}_i$ с заданной на ней мерой μ_i, то отнюдь не ясно, как следует определить в X измеримые множества и как задать на них меру. В этом параграфе мы решим эту задачу в предположении, что все X_i представляют собой пространства с вполне конечными мерами, причем $\mu_i(X_i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots$. Разумеется, введя соответствующий множитель, можно всякую вполне конечную меру сделать равной 1 на всем пространстве. Однако, как мы увидим, здесь это требование не является условной нормировкой; введение его объясняется особой ролью, которую играет 1 в умножении (особенно в образовании бесконечных произведений).

Итак, предположим, что для любого i=1, 2, ... мы имеем множество X_i, некоторую σ -алгебру $\mathbf{S}_i$ его подмножеств и заданную на $\mathbf{S}_i$ меру μ_i, такую, что $\mu_i(X_i) = 1$. Назовем прямоугольником множество вида $\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i \subset X_i$ для всех i и $A_i = X_i$ для всех, за исключением некоторого конечного числа, значений i. *Измеримым прямоугольником* мы назовем прямоугольник $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, в котором все A_i являются измеримыми множествами в X_i; в силу предыдущего определения, это условие налагает ограничение лишь на конечное число множеств A_i. Множество в $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ назовем *измеримым,* если оно принадлежит σ-кольцу **S**, порожденному классом всевозможных измеримых прямоугольников; при этом будем писать

$$\mathbf{S}=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i.$$

В действительности **S** оказывается σ -алгеброй.
Пусть J— любое подмножество множества I всех целых положительных чисел; будем говорить, что две точки

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots) \quad \text{и} \quad y=(y_1,\ y_2,\ldots)$$

согласованы на Y, и записывать это символом $x \equiv y \quad (J)$, если $x_j=y_j$ для всех j из J. Множество E в X называется J *-цилиндром,* если из $x \equiv y \quad (J)$ вытекает, что x и y либо оба принадлежат, либо оба не принадлежат множеству E. Иначе говоря, E представляет собой j-цилиндр, если никакое изменение координат с номерами, не попадающими в J, не может удалить из множества E содержащуюся в нем точку или ввести в множество E точку, ранее ему не принадлежавшую (см. пример „д" упр. 5 §2.6). Например, если $J=\{1,\ \ldots,\ n\}$ и A_j — произвольное множество в X_j, j=1, ..., n, то прямоугольник $A_1 \times \ldots \times A_n \times X_n \times X_{n+1} \times \ldots$ представляет собой J-цилиндр. Положим

$$X^{(n)}=\mathop{\times}\limits_{i=n+1}^{\infty} X_i, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

в силу принятого нами в предыдущем параграфе соглашения, мы можем записать следующее равенство:

$$X=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} X_i=(X_1 \times \ldots \times X_n) \times X^{(n)}.$$

Любое $X^{(n)}$ представляет собой бесконечномерное произведение пространств, подобное $X (= X^{(0)})$, поэтому все выводы, относящиеся к X, применимы и к $X^{(n)}$.

Если $(x_1, \ldots, x_n)$—любая точка из $X_1 \times \ldots \times X_n$, а E—множество в X, то сечение множества E, определяемое точкой $(x_1, \ldots, x_n)$, будем обозначать $E(x_1, \ldots, x_n)$; такое сечение представляет собой множество в $X^{(n)}$. Заметим, что если E—(измеримый) прямоугольник в X, то $E(x_1, \ldots, x_n)$—(измеримый) прямоугольник в $X^{(n)}$.

Теорема 1. *Если $J = \{1, \ldots, n\}$ и множество E в X представляет собой J-цилиндра то $E = A \times X^{(n)}$, где A — измеримое множество в произведении $X_1 \times \ldots \times X_n$.*

Доказательство. Пусть $(\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \ldots)$— произвольная точка из $X^{(n)}$ и A — $X^{(n)}$-сечение множества E, определяемое этой точкой; A, очевидно, заключено в $X_1 \times \ldots \times X_n$. Так как множества E и $A \times X^{(n)}$ оба являются J-цилиндрами, то если точка $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$ из X принадлежит одному из них, то и $(x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \ldots)$ принадлежит этому множеству. Ясно, однако, что если точка $(x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \ldots)$ входит в одно из этих множеств, то она входит и в другое. Еще раз воспользовавшись тем, что E и $A \times X^{(n)}$ представляют собой J-цилиндры, т. е. тем, что любое из этих множеств содержит точку $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$, если оно содержит $(x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \ldots)$, мы приходим к выводу, что E и $A \times X^{(n)}$ состоят из одних и тех же точек. Из теоремы 1 § 7.2 следует, что если измеримо E, то измеримо и A.

Пусть m и n — целые положительные числа, причем $m < n$; может случиться, что непустое множество E в X является одновременно и $\{1, \ldots, m\}$-цилиндром и $\{1, \ldots, n\}$-цилиндром. Тогда, согласно теореме 1,

$$E = A \times X^{(m)} \quad \text{и} \quad E = B \times X^{(n)},$$

где $A \subset X_1 \times \ldots \times X_m$ и $B \subset X_1 \times \ldots \times X_n$. Первое из этих равенств можно записать в виде

$$E = (A \times X_{m+1} \times \ldots \times X_n) \times X^{(n)},$$

поэтому, в силу теоремы 3 § 7.1, $B = A \times X_{m+1} \times \ldots \times X_n$.
Следовательно, если E измеримо, то A и B измеримы, причем

$$(\mu_1 \times \ldots \times \mu_m)(A) = (\mu_1 \times \ldots \times \mu_n)(B).$$

Таким образом, если мы положим

$$\mu(A \times X^{(n)}) = (\mu_1 \times \ldots \times \mu_n)(A),$$

то это равенство однозначным образом определит на измеримых {1, ..., n)-цилиндрах некоторую функцию μ. Областью определения этой функции служит класс всех измеримых множеств, являющихся {1, ..., n}-цилиндрами, каждое при некотором значении n. Обозначим этот кладе **F**, а содержащиеся в нем множества условимся называть конечномерными множествами в X. Легко убедиться в том, что **F** представляет собой алгебру, порожденное ею σ-кольцо **S(F**) совпадает с **S**, а функция множества μ на **F** конечна, неотрицательна и конечно-аддитивна.

Класс множеств в $X^{(n)}$ и функцию множества на нем, аналогичные **F** и μ для X, будем обозначать соответственно $\mathbf{F}^{(n)}$ и $\mu^{(n)}$. Из полученных нами результатов, касающихся конечномерных произведений, вытекает, что если E принадлежит классу **F**, то всякое его сечение вида $E(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит классу $\mathbf{F}^{(n)}$ и

$$\mu(E) = \int \ldots \int \mu^{(n)}(E(x_1, \ldots, x_n))\, d\mu_1(x_1) \ldots d\mu_n(x_n).$$

Теорема 2. *Если* $\{(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)\}$ *—последовательность пространств с вполне конечными мерами, причем* $\mu_i(X_i) = 1$, *то на σ-алгебре* $\mathbf{S} = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i$ *существует единственная мера* μ, *обладающая тем свойством, что для любого измеримого множества E вида $A \times X^{(n)}$*

$$\mu(E) = (\mu_1 \times \ldots \times \mu_n)(A).$$

Такая мера μ называется *произведением* заданных мер μ_i и обозначается символом

$$\mu = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i;$$

пространство с мерой

$$\left(\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{\infty} X_i,\ \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i,\ \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{\infty} \mu_i\right)$$

будем называть *декартовым произведением* исходных пространств $(X_i,\ \mathbf{S}_i,\ \mu_i),\ i=1,\ 2,\ \ldots$

Доказательство. В силу теорем 7 §3.3 и 1 § 3.8, нам нужно только доказать, что функция μ, построенная нами на алгебре **F** всех конечномерных множеств, непрерывна сверху в 0, т. е. если *$\{E_n\}$* — убывающая последовательность множеств из F, такая, что $0<\varepsilon\leqslant\mu(E_j)$, j=1, 2, ..., то $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} E_j \neq 0.$

Пусть $F_1=\left\{x_1 : \mu^{(1)}(E_j(x_1)) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$; тогда, в силу равенств

$$\mu(E_j)=\int \mu^{(1)}(E_j(x_1))\,d\mu_1(x_1)=$$

$$=\int\limits_{F_j} \mu^{(1)}(E_j(x_1))\,d\mu_1(x_1)+\int\limits_{F_j'} \mu^{(1)}(E_j(x_1))\,d\mu_1(x_1),$$

имеем

$$\mu(E_j)\leqslant\mu_1(F_j)+\frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$\mu_1(F_j)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как { *Fj)* — убывающая последовательность множеств в X_1, а мера μ_1, будучи счетно-аддитивной, непрерывна сверху в 0, то X_1

содержит хотя бы одну точку $\bar{x}_1$, для которой

$\mu^{(1)}(E_j(\bar{x}_1))\geqslant\frac{\varepsilon}{2},\ j=1,\ 2,\ \ldots\ \{E_j(\bar{x})\}$ представляет собой убывающую последовательность измеримых множеств в $X^{(n)}$ и то рассуждение, которое мы только что провели для *X*, *$\{E_j\}$* и ε, можно повторить для $X^{(1)}$ $\{E_j(\bar{x}_1)\}$ и $\frac{\varepsilon}{2}$. Мы получим точку

$\bar{x}_2$, принадлежащую $X^{(2)}$, такую, что

$\mu^{(2)}(E_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2)) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$, $j = 1, 2, \ldots$ Продолжая это

рассуждение, мы получим последовательность $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\}$,

обладающую следующими свойствами:

$\bar{x}_n \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и

$$\mu^{(n)}(E_j(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)) \geqslant \frac{\varepsilon}{2^n}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Теперь мы докажем, что точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)$ принадлежит множеству

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j.$$

Для этого рассмотрим какое-нибудь E_j и выберем n
Таким образом, чтобы E_j было $\{1, \ldots, n\}$-цилиндром. Из неравенства $\mu^{(n)}(E_j(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)) > 0$ следует, что E_j содержит хотя бы одну точку $(x_1, x_2, \ldots)$, такую, что $x_i = \bar{x}_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Из определения $\{1, \ldots, n\}$-цилиндра мы заключаем, что точка

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)$

сама принадлежит множеству E_j.

1. То, что в этом параграфе множествам индексов I служило множество целых положительных чисел, несущественно; в качестве I можно было бы взять любое счетное множество. (При этом пространство $X = \times\{X_i : i \in I\}$ состояло бы, по определению, из всевозможных функций x, заданных на I и принимающих при любом i из I значение $x(i)$ из X_i.) Доказать это можно, перенумеровав элементы множества I, т. е. выбрав какое-нибудь фиксированное взаимно-однозначное соответствие между I и множеством целых положительных чисел. Часто, например, встречается случай, когда I — множество всех целых чисел.

2. Построение произведений пространств обобщается на случай несчетного числа множителей. Пусть I —произвольное множество индексов; если для любого i из I задано $(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)$— пространство с вполне конечной мерой, причем $\mu_i(X_i) = 1$, то $X = \times (X_i : i \in I)$ определяется дословно, так же, как в упр. 1 соответствующее произведение в случае, когда I счетно. Так же дословно могут быть повторены определения прямоугольника, измеримого прямоугольника и измеримого множества. Так как класс всех множеств, являющихся J-цилиндрами при некотором фиксированном *конечном или счетном* подмножестве J множества I, представляет собой σ-алгебру, содержащую все измеримые прямоугольники, то всякое измеримое множество E является J-цилиндром при некотором, должным образом выбранном, множестве J. Если $\mu(E)$ определить как

$$\left(\underset{j \in J}{\times} \mu_j\right)(E),$$

то μ оказывается мерой в классе всех измеримых множеств; эту меру мы обозначим

$$\underset{i \in I}{\times} \mu_i.$$

3. Нетрудно, комбинируя теорию конечномерных произведений с теорией бесконечномерных произведений, построить произведения пространств, в которых конечное число множителей обладает не вполне конечной, а лишь σ-конечной мерой.

4. Если $X = \underset{i=1}{\overset{\infty}{\times}} X_i$ —произведение пространств, описанное в теореме 2, E_i — измеримое множество в X_i, $i = 1, 2, \ldots$, то—

$$E = \underset{i=1}{\overset{\infty}{\times}} E_i$$

измеримое множество в X и

$$\mu(E) = \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(E_i) = \lim_n \prod_{i=1}^{n} \mu_i(E_i).$$

[Указание. Пусть $F_n = E_1 \times \ldots \times E_n \times X^{(n)}$; тогда $\{F_n\}$ — убывающая последовательность измеримых множеств в X, такая, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{и} \quad \mu(F_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(E_i).]$$

5. С помощью произведений пространств можно построить лебеговскую меру на числовой прямой (см. доказательство теоремы 3 §3.2), а следовательно, и в n-мерном эвклидовом пространстве (см. упр. 6 §7.5), совсем не опираясь на топологические понятия. Для осуществления такого построения возьмем пространство с мерой $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$, где X_0 состоит из двух точек,0 и 1; $\mathbf{S}_0$ — класс всех множеств в X_0 и $\mu_0(\{0\}) = \mu_0(\{1\}) = \frac{1}{2}$. Для всех i = 1,2,... положим $(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i) = (X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$ и образуем произведение

$$(X, \mathbf{S}, \mu) = \left(\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{\infty} X_i, \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i, \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{\infty} \mu_i \right).$$

При этом справедливы следующие утверждения:

а) Какова бы ни была точка $x = (x_1, x_2, \ldots)$ из X, множество $\{x\}$ измеримо и $\mu(\{x\}) = 0$.(Указание. См. упр. 4.)

б) Множество $\bar{\bar{E}}$ точек $x = (x_1, x_2, \ldots)$, для которых все x_i, за исключением конечного числа значений i, равны 1, измеримо и имеет меру нуль. (Указание. $\bar{\bar{E}}$ — счетное множество.) Положим $\bar{X} = X - \bar{\bar{E}}$ и в дальнейшем условимся рассматривать пространство с мерой $(\bar{X}, \bar{\mathbf{S}}, \bar{\mu})$, где $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \cap \bar{X}$ и

$$\bar{\mu}(E \cap \bar{X}) = \mu(E), \; E \in \mathbf{S}.$$

в) Для $x = (x_1, x_2, \ldots)$ из $\bar{X}$ положим $z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$; тогда функция z определит взаимнооднозначное соответствие между $\bar{X}$ и интервалом $Z = \{z : 0 \leqslant z < 1\}$. (Указание. Рассмотреть разложения точек z из Z в двоичные дроби; для тех z, для которых возможны два различных разложения, выбрать конечное.)

г) Если $A = \{z : 0 \leqslant a \leqslant z < b \leqslant 1\}$ и $E = \{x : z(x) \in A\}$, то E измеримо и $\bar{\mu}(E) = b - a$. (Указание. Достаточно рассмотреть случай, когда a и b—-двоичные рациональные числа.)

д) Если A — любое борелевское множество и $E = \{x : z(x) \in A\}$, то E измеримо и $\bar{\mu}(E)$ равна лебеговской мере множества A.

(У к а з а н и е. Функция множества v, определенная равенством $\nu(A) = \bar{\mu}(E)$, представляет собой меру, совпадающую с лебеговской мерой на интервалах.)

Результаты „а" — „д" означают построение лебеговской меры на интервале Z, Рассматривая числовую прямую как соединение счетного числа таких интервалов, можно определить лебеговскую меру на всей числовой прямой. Иначе можно взять пространство I всех целых чисел, задать в нем меру, определив ее значение на любом подмножестве как число элементов в этом подмножестве, и воспользоваться очевидным взаимно-однозначным соответствием между числовой прямой и произведением $I \times Z$,

6. Результат, сходный с результатом упр. 5, можно получить, взяв пространство с мерой $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$, где X_0— множество всех целых положительных чисел, $\mathbf{S}_0$ — класс всех подмножеств множества X_0 и $\mu_0(E) = \sum_{i \in E} 2^{-i}$ Положим $(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i) = (X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$ и образуем произведение

$$X = \bigtimes_{i=1}^{\infty} X_i,$$

точками которого служат последовательности целых положительных чисел. Для $x = (x_1, x_2, \ldots)$ положим

$$z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(x_1 + \ldots + x_n)}.$$

Рассматривая разложения действительных чисел в двоичные дроби, можно доказать, что для этой функции z справедливы предложения „в"—„д" предыдущего упражнения.

7. Пусть $X_0 = \{x : 0 \leqslant x < 1\}$— полузамкнутый единичный интервал, $\mathbf{S}_0$ — класс борелевских множеств в X_0, μ_0 — лебеговская мера на $\mathbf{S}_0$. Положим $(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i) = (X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$, $i = 1, 2, \ldots$, и образуем произведение

$X = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} X_i.$ Между X и X_0 существует взаимно-однозначное соответствие, такое, что всякому борелевскому множеству в X_0 соответствует измеримое множество (т. е. множество, принадлежащее классу $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} S_i)$ в X, причем соответствующие друг другу множества имеют одинаковые меры. (Указание. Пусть Y_0—множество из двух точек, описанное в упр. 5 и обозначенное там X_0; если $Y_{ij} = Y_0$ для i = 0, 1,2,... и j = 1, 2, ..., то . $X_i = \mathop{\times}\limits_{j=1}^{\infty} Y_{ij},$

i = 0, 1, 2, ..., и

$$X = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} X_i = \mathop{\times}\limits_{i=0}^{\infty} \mathop{\times}\limits_{j=1}^{\infty} Y_{ij}.$$

Указанное соответствие может быть установлено с помощью известного соответствия между элементами обыкновенной и двойной последовательности множеств.)

8 . ОТОБРАЖЕНИЯ И ФУНКЦИИ

8.1. ИЗМЕРИМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

При изучении каждой математической системы объектов важно исследовать те преобразования, которые оставляют инвариантными все или некоторые структурные свойства такой системы. В наши намерения не входит изучение во всех подробностях преобразований, встречающихся в теории меры, однако некоторые основные их свойства мы рассмотрим в этом параграфе.

Отображение есть функция T, определенная в каждой точке некоторого множества X и принимающая значения из некоторого множества Y. Множество X называется *областью определения* функции T; множество тех точек из H, каждая из которых является образом $T(x)$ какой-либо точки x из X, называется *областью значений* функции T. Отображение, область определения которого есть X, а область значений лежит в Y, называется часто отображением множества X в множество Y; если область значений функции T совпадает с Y, то T называется отображением множества X *на* множество Y. *Образ* $T(E)$ произвольного подмножества E множества X при отображении T

определяется как область значений отображения T множества E в множество Y; *прообраз* $T^{-1}(F)$ произвольного подмножества F множества Y при отображении T есть множество всех тех точек из X, образы которых лежат в F, т. е.

$$T^{-1}(F) = \{x : T(x) \in F\}.$$

Отображение T называется *взаимно-однозначным,* если $T(x_1) = T(x_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$. Отображение, обратное к взаимно-однозначному отображению T, обозначается символом T^{-1}; для каждого $y = T(x)$ из области значений отображения T оно определяется соотношением $T^{-1}(y) = x$.

Если T есть отображение множества X в множество Y, а S — отображение множества Y в множество Z, то *произведением* ST отображений S и T называется отображение множества X в множество Z, определенное соотношением $(ST)(x) = S(T(x))$.

Для каждой функции g, определенной на множестве Y, отображение T множества X в множество Y определяет очевидным образом некоторую функцию f, определенную на множестве X; функция f определяется соотношением $f(x) = g(T(x))$. Удобно и естественно писать $f = gT$.

Теорема 1. *Если T—отображение множества X в множество Y, g—функция на Y, а M — произвольное подмножество того пространства, которому принадлежат значения функции g, то*

$$\{x : (gT)(x) \in M\} = T^{-1}(\{y : g(y) \in M\}).$$

Доказательство. Следующие утверждения эквивалентны между собой:

(а) $x_0 \in \{x : (gT)(x) \in M\}$,

(б) $g(T(x_0)) \in M$,

(в) **если** $y_0 = T(x_0)$, **то** $g(y_0) \in M$

и

(г) $T(x_0) \in \{y : g(y) \in M\}$.

Эквивалентность первого и последнего из этих утверждений и составляет как раз утверждение теоремы.

Пусть $(X, \mathbf{S})$ и $(Y, \mathbf{T})$—измеримые пространства, а T—отображение множества X в множество Y. Как следует определять понятие измеримости отображения Г? Исходя из того частного случая, когда Y есть числовая прямая, мы скажем, что отображение T *измеримо,* если прообраз каждого измеримого множества измерим. Мы видим, что это определение не согласуется с тем, которое было установлено ранее для измеримых функций; в силу особой роли числа 0, измеримая функция может не быть измеримым отображением. Эта несогласованность целиком окупается удобством в приложениях; недоразумений всегда можно избежать, если не путать термины «функция» и «отображение». В том важном случае, когда X само принадлежит **S**, а Y представляет собой числовую прямую, понятия измеримого отображения и измеримой функции совпадают.

Если T—измеримое отображение пространства $(X$, **S**) в пространство (Y, **T**), то символом T^{-1} (**T**) мы обозначим класс всех подмножеств множества X, имеющих вид $T^{-1}(F)$, где $F \in$ **T**; ясно, что T^{-1} (**T**) есть σ-кольцо, содержащееся в **S**.

Теорема 2. *Если T—измеримое отображение пространства (X,* **S**) *в пространство* (Y, **T**) *и если g — измеримая функция на Y, принимающая конечные или бесконечные действительные значения, то функция gT измерима относительно σ-кольца* T^{-1} (**T**).

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что для каждого борелевского множества M на числовой прямой,

$$N(gT) \cap (gT)^{-1}(M) = \{x : (gT)(x) \in M - \{0\}\} =$$
$$= T^{-1}(\{y : g(y) \in M - \{0\}\}) = T^{-1}(N(g) \cap g^{-1}(M));$$

из измеримости отображения T следует, что

$$N(gT) \cap (gT)^{-1}(M) \subset T^{-1}(\mathbf{T}).$$

Измеримое отображение T пространства (X, **S**) в пространство (Y, **T**) определяет очевидным образом для каждой функции множества μ на **S** некоторую функцию множества ν на **T**; функция ν определяется для каждого F из **T** соотношением $\nu(F) = \mu(T^{-1}(F))$. Удобно и естественно писать $\nu = \mu T^{-1}$.

Теорема 3. *Если T—измеримое отображение пространства с мерой (X, **S**, μ) в измеримое пространство (Y,* **T**) *и если g—измеримая действительная функция на Y, принимающая конечные или бесконечные значения, то*

$$\int g\,d(\mu T^{-1}) = \int (gT)\,d\mu,$$

в том смысле, что из существования одного из этих интегралов вытекает существование другого, и оба интеграла равны.

Доказательство. Достаточно рассмотреть неотрицательную функцию g. Если g—характеристическая функция измеримого множества F из Y, то из теоремы 1 следует, что gT является характеристической функцией множества $T^{-1}(F)$ и, следовательно,

$$\int gd(\mu T^{-1}) = (\mu T^{-1})(F) = \mu(T^{-1}(F)) = \int (gT)\, d\mu.$$

Из этого соотношения следует, что утверждение теоремы справедливо для простых функций g. Рассмотрим теперь общий случай; пусть $\{g_n\}$ — возрастающая последовательность простых функций, сходящаяся к g; тогда $\{g_nT\}$ представляет собой возрастающую последовательность простых функций, сходящуюся к gT, и желаемый результат получается переходом к пределу.

Если в обозначениях последней теоремы F есть измеримое множество в Y, то, применив эту теорему к функции $\chi_F g$, получим

$$\int_F g(y)\, d\mu T^{-1}(y) = \int_{T^{-1}(F)} g(T(x))\, d\mu(x).$$

Мы видим, что каждая часть этого равенства может быть получена из другой формальной подстановкой $y = T(x)$.

Теорема 4. *Если T—измеримое отображение пространства с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ в пространство с вполне а-конечной мерой $(Y, \mathbf{T}, \nu)$, такое, что μT^{-1} абсолютно непрерывна относительно ν, то существует такая неотрицательная измеримая функция φ на Y, что*

$$\int g(T(x))\, d\mu(x) = \int g(y)\varphi(y)\, d\nu(y)$$

для любой измеримой функции g, в том смысле, что из существования одного из этих интегралов вытекает существование другого, и оба интеграла равны.

Функция φ играет ту же роль, что и функциональный определитель (или, точнее, его абсолютная величина) при замене переменных в кратном интеграле.

Доказательство. Возьмем равенство, доказанное в теореме 3, и воспользуемся теоремой 2 § 6.6, положив

$$\varphi = \frac{d(\mu T^{-1})}{d\nu}.$$

Пусть T—взаимно-однозначное отображение измеримого пространства $(X, \mathbf{S})$ на измеримое пространство $(Y, \mathbf{T})$; если как T, так и T^{-1} измеримы, то будем называть T отображением, *сохраняющим* *измеримость.* Сохраняющее измеримость отображение T пространства с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ на пространство с мерой $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ называется *сохраняющим меру,* если $\mu T^{-1} = \nu.$

1. Произведение двух измеримых отображений измеримо.
2. Если T— измеримое отображение пространства $(X, \mathbf{S})$ в пространство $(Y, \mathbf{T})$ и если функция f на X измерима относительно $T^{-1}(\mathbf{T})$, то $f(x_1) = f(x_2)$, когда $T(x_1) = T(x_2)$. [Указание. Если F_1— измеримое множество в Y, содержащее $T(x_1)$, то существует такое измеримое множество F в Y, что

$$\{x : f(x) = f(x_1)\} \cap T^{-1}(F_1) = T^{-1}(F).$$

Из $x_1 \in T^{-1}(F)$ вытекает, что $x_2 \in T^{-1}(F)$.]
3. Если T—измеримое отображение пространства $(X, \mathbf{S})$ *на* пространство $(Y, \mathbf{T})$ и если действительная функция f на X измерима относительно $T^{-1}(\mathbf{T})$, то существует единственная измеримая функция g на Y, такая, что $f = gT$. [Указание. Как видно из упр. 2, функция g однозначно определяется для каждого $y = T(x)$ соотношением $g(y) = f(x)$. Из того, что для каждого борелевского множества M на числовой прямой

$$T^{-1}(\{y : g(y) \in M\}) = \{x : f(x) \in M\},$$

вытекает, в силу равенства $T(X) = T$, что

$N(g) \cap \{y : g(y) \in M\} \in T$.]

Остается ли в силе этот результат для отображений T пространства X в пространство Y/
4. Предположим, что $X = Y$—единичный интервал, $\mathbf{S}$ — класс всех борелевских множеств, а $\mathbf{T}$ — класс всех конечных или счетных множеств. Если определить отображение T пространства X на пространство Y равенством $T(x) = x$, то это отображение будет взаимно-однозначным и измеримым, но не сохраняющим измеримость. Можно ли построить подобный пример для случая $(X, \mathbf{S}) = (Y, \mathbf{T})$?
5. Если T—измеримое отображение пространства $(X, \mathbf{S})$ в пространство $(Y, \mathbf{T})$ и если μ и ν — две меры на $\mathbf{S}$, такие, что $\nu \ll \mu$, то $\nu T^{-1} \ll \mu T^{-1}$.

8.2. КОЛЬЦА С МЕРОЙ

Булевское кольцо есть кольцо в обычном алгебраическом смысле, все элементы которого идемпотентны. Это означает, что булевское кольцо представляет собой множество **R**, в котором определены две алгебраические операции (называемый сложением и умножением), удовлетворяющие следующим условиям:
а) операции сложения и умножения коммутативны и ассоциативны, а умножение дистрибутивно относительно сложения;
б) в **R** существует единственный элемент (обозначаемый 0), такой, что сложение 0 с любым элементом E дает E;
в) произвольный элемент E при сложении с самим собой дает 0;
г) произвольный элемент E при умножении самого на себя дает E.
Типичным примером булевского кольца является кольцо подмножеств некоторого множества X, в котором сумма множеств E и F определяется как $E \Delta F$, а произведение тех же множеств — как $E \cap F$. Так как понятие булевского кольца было введено нами ради приложений к кольцам множеств, мы условимся всегда обозначать операции сложения и умножения в булевских кольцах символами Δ и $\cap$•
Большинство введенных нами понятий и установленных результатов, относившихся к кольцам множеств, переносится без изменений на произвольные булевские кольца. Если, в частности, определить соединение и разность соотношениями

$$E \cup F = (E \Delta F) \Delta (E \cap F)$$

и

$$E - F = E \Delta (E \cap F),$$

то эти операции будут удовлетворять тем же формальным соотношениям, что и соответствующие операции над множествами. Аналогичное утверждение справедливо применительно к отношениям включения, которые определяются следующим образом:

$$E \subset F, \text{ если } E \cap F = E,$$

и

$$E \supset F, \text{ если } E \cap F = F.$$

Напомним, что соединение некоторого класса множеств есть наименьшее множество, содержащее все множества данного класса, а их пересечение — наибольшее множество, содержащееся во всех множествах данного класса; аналогичные утверждения справедливы применительно к соединениям и пересечениям (если только они могут быть образованы) в произвольном булевском кольце. Если, например, *E* и *F*— элементы булевского кольца **R**, то $E \cup F$ действительно является наименьшим элементом, содержащим и *E* и *F;* это означает, что $E \subset E \cup F,\ \ F \subset E \cup F,$ и, каков бы ни был элемент *G* из **R**, такой,что $E \subset G$ и $F \subset G,$ непременно $E \cup F \subset G.$

Однако для бесконечного множества элементов из булевского кольца не всегда существует элемент, содержащий все элементы этого множества, и даже если такие элементы существуют, то среди них может не быть наименьшего.

Булевское кольцо **S** называется *булевским σ-кольцом,* если каждое счетное множество элементов из S имеет соединение; легко проверить, что каждое счетное множество элементов из булевского σ -кольца имеет пересечение. Типичным примером булевского σ -кольца является, конечно, σ-кольцо подмножеств множества *X*.

Булевская алгебра есть булевское кольцо **R**, в котором существует элемент (его естественно обозначить *X),* отличный от 0 и обладающий тем свойством, что $E \subset X$ для любого *E* из **R**. *Булевская σ -алгебра* есть булевское σ-кольцо, являющееся булевской алгеброй.

Для функций, определенных на булевском кольце, понятия аддитивности, σ-конечности и т. п. вводятся так же, как и для функций множества на кольце множеств; очевидным образом переносятся на булевские кольца и понятия меры, *σ* -конечной меры и т. д. Мера μ на булевском кольце называется *положительной,* если она равна нулю только на нулевом элементе.

Мера μ на σ-кольце **S** подмножеств некоторого множества *X* обычно не является положительной. Однако существуют хорошо известные методы, с помощью которых можно построить, исходя из заданной меры μ, некоторую положительную меру. Один из таких методов заключается в том, что рассматривается класс **N** измеримых множеств меры нуль, являющийся идеалом кольца **S** (эти слова употребляются в их обычном алгебраическом смысле), и кольцо **S** заменяется фактор-кольцом *S/N*. Другой метод, равносильный только что описанному, заключается в том, что пишут *E*~F, если $\mu(E \Delta F) = 0,$ и затем, пользуясь рефлективностью, симметричностью и транзитивностью этого отношения, заменяют **S** множеством всех классов эквивалентных между собой (относительно ~) элементов.

В теории меры наиболее удобен следующий вариант (который мы и будем применять) указанного выше приема. Мы не будем заменять **S** другой системой, — элементами булевского σ-кольца, которые мы будем рассматривать, попрежнему являются измеримые множества. Однако при этом мы изменим само понятие равенства; если два множества *E* и *F* из S таковы, что $\mu(E \Delta F) = 0,$то мы будем считать

их равнымии писать $E=F\ [\mu]$ (равенство по модулю μ). Если $E_n=F_n\ [\mu]$, n = 1, 2, ..,
то

$$E_1-F_1=E_2-F_2 \quad \text{и} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \ [\mu],$$

так что даже после изменения понятия равенства **S** остается булевским σ-кольцом относительно обычных теоретико-множественных операций. Если $E=F\ [\mu]$, то $\mu(E)=\mu(F)$, т. е. мера μ снова оказывается однозначно определенной на **S**. Так как соотношения $\mu(E)=0$ и $E=0\ [\mu]$, очевидно, эквивалентны, то при новом определении равенства μ становится положительной мерой.
Если $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$ — пространство с мерой, то **S** (μ) будет обозначать о-кольцо **S**, в котором равенство элементов понимается как равенство по модулю μ.
Кольцом с мерой (**S**, μ) мы назовем булевское σ-кольцо **S** с заданной на нем положительной мерой μ. Из предыдущего видно, что если $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$—пространство с мерой, то $(\mathbf{S}(\mu),\ \mu)$ представляет собой кольцо с мерой; мы будем называть его кольцом с мерой, *связанным* с *X*, или просто — кольцом с мерой пространства *X*. *Алгебра с мерой* есть булевская алгебра, являющаяся в то же время кольцом с мерой.
Выражения „(вполне) конечная" и „σ-конечная" употребляются для колец с мерой и алгебр с мерой в том же смысле, что и для пространств с мерой.
Изоморфизмом двух колец с мерой (**S**, μ) и (**T**, ν) называется такое взаимно-однозначное отображение *T* кольца **S** на кольцо **T**, при котором

$$T(E-F)=T(E)-T(F), \quad T\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)=\bigcup_{n=1}^{\infty} T(E_n)$$

и

$$\mu(E)=\nu(T(E))$$

для любых элементов *E, F* и E_n, n== 1, 2, ..., кольца **S**. Два кольца с мерой называются *изоморфными,* если между ними можно установить соответствие, являющееся изоморфизмом. Два пространства с мерой

$(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$ и $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ называются изоморфными, если изоморфны связанные с ними кольца с мерой $(\mathbf{S}(\mu),\ \mu)$ и $(\mathbf{T}(\nu),\ \nu)$.
Атомом кольца с мерой $(\mathbf{S}, \mu)$ (или меры μ) называется всякий отличный от 0 элемент E этого кольца, такой, что если $F \subset E$, то либо $F = 0$, либо $F = E$; кольцо с мерой, не содержащее атомов, называется *неатомическим.* Если $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$ —пространство с мерой, кольцо с мерой которого является неатомическим, то и пространство X, и сама мера μ также называются неатомическими.

Если $(\mathbf{S}, \mu)$ — кольцо с мерой, то символом $\mathfrak{S}$ (или $\mathfrak{S}(\mu)$) мы обозначим множество всех элементов из $\mathbf{S}$, имеющих конечную меру, и для любых двух элементов E и F из $\mathfrak{S}$ положим

$$\rho(E,\ F) = \mu(E \Delta F).$$

Легко проверить, что функция ρ определяет в $\mathfrak{S}$ некоторую метрику; мы будем называть $\mathfrak{S}$ метрическим пространством, *связанным* с $(\mathbf{S}, \mu)$, или просто — метрическим пространством кольца $(\mathbf{S}, \mu)$. Мы будем пользоваться обозначением $\mathfrak{S}(\mu)$ также для метрического пространства, связанного с кольцом с мерой $(\mathbf{S}(\mu),\ \mu)$ пространства с мерой $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$. Кольцо с мерой, или пространство с мерой, называется *сепарабельным,* если сепарабельно связанное с ним метрическое пространство.

Теорема 1. *Если* $\mathfrak{S}$ *—метрическое пространство кольца с мерой* $(\mathbf{S}, \mu)$ *и если*

$$f(E,\ F) = E \cup F \ \ и \ \ g(E,\ F) = E \cap F,$$

то f, g *и* μ *являются равномерно непрерывными функциями своих аргументов.*

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из соотношений

$$\left.\begin{array}{l}\mu((E_1 \cup F_1) - (E_2 \cup F_2)) + \mu((E_2 \cup F_2) - (E_1 \cup F)) \\ \mu((E_1 \cap F_1) - (E_2 \cap F_2)) + \mu((E_2 \cap F_2) - (E_1 \cap F_1))\end{array}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mu(E_1 - E_2) + \mu(F_1 - F_2) + \mu(E_2 - E_1) + \mu(F_2 - F_1)$$

и

$$|\mu(E) - \mu(F)| = |\mu(E - F) - \mu(F - E)| \leqslant$$
$$\leqslant \mu(E - F) + \mu(F - E).$$

Теорема 2. *Если* $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$ *— пространство с σ-конечной мерой, такое, что σ-кольцо* S *имеет счетное множество образующих, то метрическое пространство* $\mathfrak{S}(\mu)$ *измеримых множеств конечной меры сепарабельно.*

Доказательство. Пусть *{E}*—последовательность множеств из **S**, такая, что $\mathbf{S}=\mathbf{S}(\{E_n\})$. Так как мера μ σ-конечна, то без ограничения общности можно предполагать, что $\mu(E_n)<\infty$ для всех n=1, 2, ... В силу теоремы 3 § 2,6, кольцо, порожденное последовательностью $\{E_n\}$, также счетно, поэтому мы можем предполагать, что класс $\{E_n : n=1,\ 2,\ \ldots\}$ сам является кольцом. Из теоремы 4 § 3.8 следует, что для каждого E из $\mathfrak{S}(\mu)$ и каждого положительного числа ε существует такое целое положительное число n, что $\rho(E,\ E_n)<\varepsilon$. Но это и означает, что в $(\mathbf{S}(\mu)$ имеется счетное, всюду плотное множество; теорема доказана.

1. Метрическое пространство $\mathfrak{S}$ пространства с мерой $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$ полно. (Указание. Если *$\{E_n\}$* — фундаментальная последовательность в $\mathfrak{S}$ и если χ_n — характеристическая функция множества E_n, то последовательность *$\{x_n\}$* фундаментальна по мере и к ней может быть применена теорема 5 § 4.6.)
2. Полно ли метрическое пространство кольца с мерой?
3. Понятие полноты булевского кольца родственно соответствующему понятию для метрических пространств, но не тождественно ему. Булевское кольцо **R** называется полным, если каждое подмножество **E** кольца **R** имеет соединение. Ясно, что каждое полное булевское кольцо является булевской σ-алгеброй; обратно, каждая алгебра с вполне конечной мерой полна. (У к а з а н и е. Пусть $\tilde{\mathbf{E}}$—множество всевозможных конечных соединений элементов из **E**. Положим $\alpha=\sup\{\mu(E) : E\in\tilde{\mathbf{E}}\}$ и построим последовательность *$\{E_n\}$* элементов из $\tilde{\mathbf{E}}$, такую, что $\lim\limits_n \mu(E_n)=\alpha$; искомым соединением является множество $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.)
4. Результат упр. 3 остается справедливым для алгебр с вполне

σ-конечными мерами.

5. Если ρ — расстояние в метрическом пространстве $\mathfrak{S}$ кольца с мерой (**S**, μ), то ρ инвариантно относительно сдвигов в том смысле, что $\rho(E\,\Delta G,\ F\,\Delta G) = \rho(E,\ F)$, если E, F и G принадлежат $\mathfrak{S}$.
6. Если взаимно-однозначное отображение T кольца с мерой (**S**, μ) на кольцо с мерой (**T**, ν) таково, что

$$T(E-F) = T(E) - T(F),\ T(E \cup F) = T(E) \cup T(F) \text{ и } \mu(E) = \nu(T(E)),$$

когда E и F принадлежат **S**, то T есть изоморфизм.
7. Если взаимно-однозначное отображение T кольца с мерой (**S**, μ) на кольцо с мерой (**T**, ν) таково, что $\mu(E) = \nu(T(E))$ и $E \subset F$ тогда и только тогда, когда $T(E) \subset T(F)$, то T есть изоморфизм.

8. Метрическое пространство $\mathfrak{S}$ с расстоянием ρ называется *выпуклым,* если для любых двух различных элементов E и F из **S** существует такой элемент G, отличный от E и F, что

$$\rho(E,\ F) = \rho(E,\ G) + \rho(G,\ F).$$

Метрическое пространство кольца с σ-конечной мерой выпукло тогда и только тогда, когда это кольцо неатомическое.
9. Изоморфизм двух колец с мерой является изометрией их метрических пространств.
10. Кольцо с вполне σ -конечной мерой содержит не более чем счетное множество атомов.

11. Если $\mathfrak{S}$ — метрическое пространство пространства с мерой $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$ и ν — конечная мера на **S**, такая, что $\nu \ll \mu$, то функция ν однозначно определена и непрерывна на $\mathfrak{S}$.
12. Если $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$—пространство с σ-конечной мерой и $\{\nu_n\}$ — последовательность конечных обобщенных мер на **S**, такая, что каждая ν_n абсолютно непрерывна относительно μ и существует конечный

$$\lim_n \nu_n(E)$$

для каждого E из **S**, то функции множества ν_n равностепенно абсолютно непрерывны относительно μ. [Указание. Пусть $\mathfrak{S}$— метрическое пространство пространства с мерой $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$. Положим для любого фиксированного положительного числа ε

$$\mathcal{E}_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} \left\{ E : E \in \mathcal{S}, | \nu_n (E) - \nu_m (E) | \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \right\}.]$$

Так как, в силу упр. 11, каждое $\mathcal{E}_k$ замкнуто и, в силу упр. 1, $\mathcal{S}$ есть полное метрическое пространство, то по теореме Бэра существуют целое положительное число k_0, положительное число r_0 и множество E_0 из $\mathcal{S}$, такие, что $\{E : \rho (E, E_0) < r_0\} \subset \mathcal{E}_{k_0}$. Пусть δ — положительное число $< r_0$, такое, что $| \nu_n (E) | < \frac{\varepsilon}{3}$, если $\mu (E) < \delta$, и $n = 1, \ldots, k_0$. Заметим, что если $\mu (E) < \delta$, то

$$\rho (E_0 - E, E_0) < r_0, \quad \rho (E_0 \cup E, E_0) < r_0$$

и

$$| \nu_n (E) | \leqslant | \nu_{k_0} (E) | + | \nu_n (E_0 \cup E) - \nu_{k_0} (E_0 \cup E) | + | \nu_n (E_0 - E) - \nu_{k_0} (E_0 - E) |.$$

13. Если, в обозначениях упр. 12, $\nu (E) = \lim_n \nu_n (F)$, то ν— конечная обобщенная мера и $\nu \ll \mu$.

14. Если $\{\nu_n\}$ — такая последовательность конечных обобщенных мер, что

$$\lim_n \nu_n (E) = \nu (E)$$

существует и конечен для любого измеримого множества E, то $\nu (E)$ представляет собой обобщенную меру. [Указание. Пусть $| \nu_n (E) | \leqslant c_n,\ n = 1, 2, \ldots$ Положим

$$\mu (E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n c_n} | \nu_n | (E)$$

и воспользуемся результатом упр. 13.]

15. а) Любое булевское кольцо **R** изоморфно (в обычном алгебраическом смысле этого слова) кольцу подмножеств некоторого множества X. [Указание. Пусть X—множество всех гомоморфизмов кольца **R** в булевскую алгебру $\mathbf{R}_0$, состоящую из двух элементов, 0 и 1. Если для каждого E из **R**

$$T(E) = \{x : x \in X,\ x(E) = 1\},$$

то *T* представляет собой гомоморфизм кольца **R** в алгебру всех подмножеств множества *X;* остается доказать только, что если $E \in \mathbf{R}$ и $E \neq 0$, то существует *x* из *X,* для которого $x(E) = 1$. Если кольцо **R** конечно, этот результат получить легко. В общем случае пусть *X** — множество всех функций, определенных на *R* и принимающих значения из $\mathbf{R}_0$; в обычной для произведений пространств топологии *X** является компактным хаусдорфовым пространством. Если $\tilde{\mathbf{R}}$ — такое конечное подкольцо кольца **R**, что $E \in \tilde{\mathbf{R}}$, и $X^*(\tilde{\mathbf{R}})$ — множество всех функций *x** из *X**, являющихся гомоморфизмами на $\tilde{\mathbf{R}}$, для которых $x^*(E) = 1$, то соотношение

$$\bigcap_{i=1}^{n} X^*(\tilde{\mathbf{R}}_i) \supset X^*(\tilde{\mathbf{R}})$$

(где $\tilde{\mathbf{R}}$ — кольцо, порожденное $\tilde{\mathbf{R}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{R}}_n$) показывает, что любой конечный подкласс класса $\{X^*(\tilde{\mathbf{R}})\}$ имеет непустое пересечение. Этот результат известен как *теорема Стоуна.]*

б) Доказательство теоремы Стоуна, намеченное выше, показывает, что кольцо **R** изоморфно некоторому кольцу множеств, одновременно открытых и замкнутых, в компактном хаусдорфовом пространстве. Если **R** — булевская алгебра, то **R** изоморфна кольцу всех множеств, одновременно открытых и замкнутых, в компактном хаусдорфовом пространстве. [Указание. Слегка изменив обозначения в упр. 15, „а[a], возьмем в качестве *X* множество всех тех гомоморфизмов **R** в $\mathbf{R}_0$, которые отображают максимальный элемент алгебры **R** на 1. Тогда образ алгебры **R** при преобразовании *T* содержит базис пространства *X* (относительно той топологии, которая введена в *X).* Если некоторый класс подмножеств компактного хаусдорфова пространства, одновременно открытых и замкнутых, представляет собой базис и если он замкнут относительно образования конечных соединений, то он содержит все множества, являющиеся одновременно открытыми и замкнутыми.]

в) Каждая булевская σ-алгебра **S** изоморфна σ-алгебре подмножеств некоторого множества *X* по модулю некоторого σ -идеала. (Указание. Отобразим **S** с помощью алгебраического изоморфизма *T* на алгебру всех тех множеств некоторого компактного хаусдорфова пространства *X,* которые одновременно открыты и замкнуты; пусть $\mathbf{S}_0$ есть σкольцо, порожденное классом всех подмножеств пространства *X,* одновременно открытых и замкнутых, а $\mathbf{N}_0$ — класс всех множеств первой категории в $\mathbf{S}_0$. Если для последовательности $\{E_n\}$ множеств, одновременно открытых и замкнутых, положить $E = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(E_n)\right)$, то множество

$E - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ нигде не плотно.

Другими словами, класс всех множеств, одновременно открытых и замкнутых, замкнут по модулю $\mathbf{N}_0$ относительно образования счетных соединений. Остается еще, показать,, что *T* будет изоморфизмом даже после приведения по модулю $\mathbf{N}_0$, т. е. что $\mathbf{N}_0$ не содержит ни одного непустого множества, одновременно открытого и замкнутого; этот результат, однако, является частным случаем теоремы Бэра, которая справедлива для локально компактных пространств так же, как и для полных метрических пространств,)

8.3. ТЕОРЕМА ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ

Цель настоящего параграфа — показать, что понятие кольца с мерой не является таким общим, как это может показаться. Действительно, мы докажем, что каждое кольцо с мерой, удовлетворяющее некоторым весьма общим условиям, является кольцом с мерой некоторого пространства с мерой. Из многих теорем этого типа мы разберем только одну, выбранную в силу ее исторического значения и разнообразия ее приложений.

Мы ограничимся рассмотрением алгебр с вполне конечной мерой. Пусть ($\mathbf{S}$, μ) — алгебра с вполне конечной мерой; если не оговорено противное, то под *X* мы будем понимать максимальный элемент алгебры $\mathbf{S}$. Алгебра $\mathbf{S}$ и мера μ называются *нормированными,* если $\mu(X)=1$. *Разбиением* элемента *E* алгебры $\mathbf{S}$ называется конечное множество $\mathbf{P}$ непересекающихся элементов алгебры $\mathbf{S}$, соединение которых есть *E*. *Нормой* $|\mathbf{P}|$ разбиения $\mathbf{P} = \{E_1, \ldots, E_k\}$ называется наибольшее из чисел $\mu(E_1), \ldots, \mu(E_k)$. Если $\mathbf{P} = \{E_1, \ldots, E_k\}$— разбиение элемента *E* и *F*— произвольный элемент алгебры $\mathbf{S}$, содержащийся в *E*, то символом $\mathbf{P} \cap F$ обозначается разбиение $\{E_1 \cap F, \ldots, E_k \cap F\}$ элемента *F*.

Если $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ — разбиения, то мы будем писать $\mathbf{P}_1 \leqslant \mathbf{P}_2$, если каждый элемент из $\mathbf{P}_1$ содержится в некотором элементе из $\mathbf{P}_2$; последовательность $\{\mathbf{P}_n\}$ разбиений называется *убывающей,* если $\mathbf{P}_{n+1} \leqslant \mathbf{P}_n$ при n==1, 2,... Последовательность $\{\mathbf{P}_n\}$ разбиений называется *плотной,* если каждому элементу E алгебры $\mathbf{S}$ и каждому положительному числу ε соответствуют такое целое положительное число n и такой элемент E_0 алгебры $\mathbf{S}$, что E_0 является соединением элементов $\mathbf{P}_n$ и $\rho(E,\ E_0) = \mu(E \Delta E_0) < \varepsilon$.

Теорема 1. *Если* ($\mathbf{S}$, μ) *— неатомическая алгебра с вполне конечной мерой, а* $\{\mathbf{P}_n\}$*—плотная убывающая последовательность разбиений элемента X, то*

$$\lim_n |\mathbf{P}_n| = 0.$$

Доказательство. Так как $\{|\mathbf{P}_n|\}$—убывающая последовательность положительных чисел, то она имеет предел; допустив, что этот предел равен некоторому положительному числу δ, приведем это предположение к противоречию.

Если $\mathbf{P}_1 = \{E_1, \ldots, E_k\}$, то по крайней мере для одного из элементов E_i

$$|\mathbf{P}_n \cap E_i| \geqslant \delta \text{ при } n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Пусть F_1— такой элемент; рассмотрим последовательность $\{\mathbf{P}_n \cap F_1\}$ разбиений элемента F_1. Повторив только что приведенное рассуждение, найдем такой элемент F_2 разбиения $\mathbf{P}_2$, что $F_2 \subset F_1$ и

$$|\mathbf{P}_n \cap F_2| \geqslant \delta \text{ при } n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

и продолжаем так неограниченно.

Если $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, то $\mu(F) \geqslant \delta > 0$ и, так как F не является атомом, существует такой элемент F_0, что $F_0 \subset F$ и $0 < \mu(F_0) < \mu(F)$. Заметим, что элемент F_0 либо содержится во всех элементах разбиений $\mathbf{P}_n$, n=1, 2, ..., либо не пересекается ни с одним из них. Отсюда следует, что если ε меньше каждого из чисел $\mu(F_0)$ и $\mu(F) - \mu(F_0)$, то ни один элемент из $\mathbf{S}$, являющийся соединением элементов разбиения $\mathbf{P}_n$, не может отстоять от F_0 на расстояние, меньшее, чем ε. Так как это противоречит плотности последовательности $\{\mathbf{P}_n\}$, то теорема доказана.

Теорема 2. *Если Y — единичный интервал,* **T** *— класс всех борелевских множеств в Y , а* ν *— мера Лебега на* **T** *и если* $\{Q_n\}$*—такая последовательность разбиений на интервалы максимального элемента Y алгебры с мерой* (**T**, ν), *что* $\lim_n |\mathbf{Q}_n| = 0,$

то последовательность $\{Q_n\}$ *является плотной.*

Доказательство. Для каждого положительного числа ε существует такое целое положительное *n,* что $|\mathbf{Q}_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Для произвольного подинтервала *E* интервала *Y* обозначим E_t единственным образом определенный интервал разбиения Q_n, содержащий левый конец интервала *E.* Если E_1 не содержит правого конца интервала *E*, то обозначим E_2 интервал разбиения Q_n, примыкающий к E_t справа, и продолжаем так конечное число раз до тех пор, пока не придем к интервалу E_k разбиения Q_n, содержащему правый конец интервала *E*. Соединение интервалов $E_1, \ldots, E_k$ отстоит от *E* меньше, чем на ε; это доказывает, что любой подинтервал интервала *Y* может быть апроксимирован соединениями элементов из $\{Q_n\}$. Так как класс всех конечных соединений интервалов является плотным, то теорема доказана.

Теорема 3. *Каждая сепарабелъная неатомическая нормированная алгебра с мерой* (**S**, μ) *изоморфна алгебре с мерой* (**T**, ν) *единичного интервала.*

Доказательство. Пусть $\{E_n\}$ — плотная последовательность в метрическом пространстве $\mathfrak{S}(\mu)$ алгебры с мерой (**S**, μ). Для каждого n= 1, 2, ... множество элементов вида $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$ где A_i при любом i = 1, ..., n равно либо E_i, либо $X—E_i$, есть разбиение $\mathbf{P}_n$ элемента *X*. Ясно, что последовательность разбиений $\{\mathbf{P}_n\}$ является убывающей; кроме того, эта последовательность — плотная, так как $\{E_n\}$ плотна в $\mathfrak{S}(\mu)$. Из теоремы 1 следует, что $\lim_n |\mathbf{P}_n| = 0.$

Каждому элементу *E* разбиения $\mathbf{P}_1$ можно поставить в соответствие такой подинтервал *T(E)* интервала *Y*, что $\mu(E) = \nu(T(S)),$ и эти интервалы образуют разбиение интервала *Y*. Каждый из этих интервалов мы разбиваем аналогичным образом на подицтервалы, соответствующие элементам разбиения $\mathbf{P}_2$, и продолжаем так по индукции. Таким путем мы получаем последовательность $\{Q_n\}$ разбиений *Y* на интервалы; так как отображение *T* элементов разбиения $\{\mathbf{P}_n\}$ в интервалы сохраняет меру, то $\lim_{n} |\mathbf{Q}_n| = 0$ и,

следовательно, в силу теоремы 2, последовательность разбиений $\{Q_n\}$ является плотной.
Если определить T не только для элементов разбиений $\mathbf{P}_n$, $n = 1, 2, ...$, но также и для конечных соединений таких элементов, отнеся каждому такому соединению соответствующее конечное соединение элементов разбиения Q_n, то отображение T будет изометрией плотного подмножества метрического пространства $\mathfrak{S}(\mu)$ на плотное подмножество пространства $\mathcal{J}(\nu)$, отвечающего алгебре с мерой ($\mathbf{T}$, ν). Следовательно, существует единственное изометрическое отображение T пространства $\mathfrak{S}(\mu)$ на пространстве $\mathcal{J}(\nu)$, совпадающее с T везде, где T определено. Так как T сохраняет соединения и разности и так как эти операции являются равномерно непрерывными функциями своих аргументов, то отсюда следует, что $\overline{T}$ есть изоморфизм.

1. Если ($\mathbf{S}$, μ) — неатомическое кольцо с σ-конечной мерой и если $E_0 \in S$, $E_0 \neq 0$, то для любого положительного числа ε существует такой элемент E из $\mathbf{S}$, что $E \subset E_0$ и $0 < \mu(E) < \varepsilon$. [Указание. Если $\mu(E_0) < \infty$ и если E_1 — такой элемент из $\mathbf{S}$, что $E_1 \subset E_0$ и $0 < \mu(E_1) < \mu(E_0)$, то либо $\mu(E_1) \leqslant \leqslant \frac{1}{2}\mu(E_0)$, либо $\mu(E_0 - E_1) \leqslant \frac{1}{2}\mu(E_0)$.]
2. Если ($\mathbf{S}$, μ) — неатомическое кольцо с σ -конечной мерой и $E_0 \in S$, то для любого неотрицательного числа $\alpha \leqslant \mu(E_0)$ (может быть равного ∞) существует такой элемент E из $\mathbf{S}$, что $E \subset E_o$ и $\mu(E) = \alpha$. [Указание. Так как случай $\alpha = \infty$ тривиален, то можно, не ограничивая общности, предположить, что $\mu(E_0) < \infty$. Требуемый результат получается трансфинитным методом исчерпывания. Этот метод сходен с тем, при помощи которого обычно доказывается, что две любые точки полного выпуклого метрического пространства могут быть соединены сегментом. Наше утверждение является частным случаем этой общей теоремы метрической геометрии (см. упр. 2 и 8 § 8.2).]
3. Если ($\mathbf{S}$, μ) — неатомическая алгебра с вполне σ -конечной мерой и если $E_0 \in \mathbf{S}$, то, каково бы ни было α (конечное или бесконечное), заключенное между $\mu(E_o)$ и $\mu(X)$, существует такой

элемент E из **S**, что $E_o \subset E$ и $\mu(E) = \alpha$. (Указание. Если α конечно, то применим упр. 2 к $X — E_o$ и $\mu(X)$ - α.)

4. Если (**S**, μ) — алгебра с вполне конечной мерой, то множество всех значений меры μ замкнуто.

5. Если неатомическое кольцо (**S**, μ) с σ -конечной мерой содержит по крайней мере один элемент, отличный от 0, то его метрическое пространство $\mathfrak{S}(\mu)$ не имеет изолированных точек. Верно ли, что еслине $\mathfrak{S}(\mu)$ имеет изолированных точек, то кольцо (**S**, μ) — неатомическое.

6. Всякая сепарабельная неатомическая алгебра (**S**, μ) с вполне σ -конечной мерой, такая, что $\mu(X) = \infty$, изоморфна алгебре с мерой (**T**, ν) числовой прямой. [У к а з а н и е. Из упр. 2 следует, что существует такая последовательность $\{X_n\}$ элементов из **S**, что

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

и $\mu(X_n) = 1$, n в 1, 2,...; каково бы ни было n, к алгебре, состоящейиз всех тех элементов, которые содержатся в X_n, применима теорема 3.]

7. Каждая алгебра с мерой изоморфна алгебре с мерой некоторого пространства с мерой (см. упр. 15, „в", § 8.2).

8.4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Существуют некоторые метрические пространства, связанные с произвольным пространством с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$, аналогичные пространству $\mathfrak{S}(\mu)$ измеримых множеств конечной меры. Одним из них является класс $\mathscr{L}_1$ (или $\mathscr{L}_1(\mu)$)всех интегрируемых действительных функций, принимающих конечные или бесконечные значения. Если для f из $\mathscr{L}_1$ положить

$$\|f\| = \int |f|\, d\mu$$

и для f и g из $\mathscr{L}_1$ положить $\rho(f, g) = \|f - g\|$ (см. § 5.1), то функция ρ будет обладать всеми обычными свойствами расстояния, кроме одного — из $\rho(f, g) = 0$ не вытекает, конечно, что $f = g$: в силу теоремы 2 § 5.3, равенство $\rho(f, g) = 0$ означает, что

$f = g\ [\mu]$. Мы снова станем на ту же точку зрения, что и в случае пространства измеримых множеств конечной меры. Два элемента (т. е. две функции) из $\mathscr{L}_1$ будем считать равными, если расстояние между ними равно нулю, или, что то же самое, если они равны почти всюду $[\mu]$; при этом $\mathscr{L}_1$ становится метрическим пространством, даже, как известно (см. теорему 2 § 5.4), полным.

Для некоторых целей анализа желательно обобщить это построение. Если p — действительное число, большее единицы, то обозначим $\mathscr{L}_p$ (или $\mathscr{L}_p(\mu)$) класс всех измеримых функций f, таких, что $|f|^p$ интегрируема. Подобно тому как это мы делали для $\mathscr{L}_1$, будем отождествлять два элемента из $\mathscr{L}_p$, если они равны почти всюду $[\mu]$. Теория пространства $\mathscr{L}_p$ весьма похожа на теорию пространства $\mathscr{L}_1$, однако до известного предела. Например, определяя для f из $\mathscr{L}_p$ норму равенством

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

и полагая, для f и g из $\mathscr{L}_p$, $\rho_p(f, g) = \|f - g\|_p$, мы сталкиваемся с некоторыми трудностями. В то время как ясно, что $\rho_p(f, g) = \rho_p(g, f) \geqslant 0$ и $\rho_p(f, g) = 0$ тогда и только тогда, когда $f = g\ [\mu]$, справедливость неравенства треугольника совсем не очевидна и даже, что еще более серьезно, не очевидно, что ρ_p всегда конечно. Чтобы преодолеть эти трудности, мы докажем сначала две классические теоремы; из них первая устанавливает так называемое *неравенство Гёльдера.*

Теорема 1. *Если v и q — действительные числа, большие* 1 *и такие 1 что* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *и если* $f \in \mathscr{L}_p$ *и* $g \in \mathscr{L}_q$, *то* $fg \in \mathscr{L}_1$ *и* $\|fg\| \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию φ, определенную для всех положительных действительных чисел t равенством $\varphi(t)=\frac{t^p}{p}+\frac{t^{-q}}{q}$. Дифференцируя, получим

$$\varphi'(t)=t^{p-1}-t^{-q-1};$$

мы видим, что φ ' обращается в нуль только при t = 1. Так как

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t)=\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty,$$

то отсюда следует, что функция φ достигает в точке t = 1 своего наименьшего значения; таким образом,

$$\frac{t^p}{p}+\frac{t^{-q}}{q}=\varphi(t)\geqslant\varphi(1)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Если a и b — два произвольных положительных числа, то, положив

$$t=\frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{p}}},$$

получим

$$1\leqslant\frac{a^{p-1}}{bp}+\frac{b^{q-1}}{aq},\quad \text{т. е.}\quad ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q};$$

ясно, что последнее неравенство справедливо и тогда, когда a и b равны нулю.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы. Если $\|f\|_p=0$ или $\|g\|_q=0$, то утверждение теоремы тривиально; если $\|f\|_p$ и $\|g\|_q$ отличны от нуля, то положим

$$a=\frac{|f|}{\|f\|_p}\quad\text{и}\quad b=\frac{|g|}{\|g\|_q}.$$

В силу последнего неравенства, получим

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p\cdot\|g\|_q}\leqslant\frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\int|f|^p\,d\mu}+\frac{1}{q}\frac{|g|^q}{\int|g|^q\,d\mu}.$$

Так как fg измерима, то это неравенство показывает, что $fg\in\mathscr{L}_1$; интегрируя его, получим требуемый результат.

Теперь мы установим так называемое *неравенство Минновского.*

Теорема 2. *Если p— действительное число, большее единицы, и f и g принадлежат $\mathscr{L}_p$, то $f+g\in\mathscr{L}_p$ и*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Доказательство. Неравенство Гёльдера для метрического пространства, состоящего из двух точек, меры 1 каждая, дает элементарное неравенство

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leqslant (|a_1|^p + |a_2|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (|b_1|^q + |b_2|^q)^{\frac{1}{q}},$$

где, как и раньше, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$ Отсюда вытекает, что

$$|f+g|^p \leqslant |f| \cdot |f+g|^{p-1} + |g| \cdot |f+g|^{p-1} \leqslant$$
$$\leqslant (|f|^p + |g|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (2|f+g|^{q(p-1)})^{\frac{1}{q}}$$

и, следовательно,

$$|f+g|^p \leqslant 2^{\frac{p}{q}}(|f|^p + |g|^p).$$

Таким образом, $f+g \in \mathscr{L}_p.$ Требуемое неравенство следует из соотношений

$$(\|f+g\|_p)^p = \int |f+g|^p \, d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \int |f| \cdot |f+g|^{p-1} \, d\mu + \int |g| \cdot |f+g|^{p-1} \, d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} +$$
$$+ \left(\int |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} =$$
$$= (\|f\|_p + \|g\|_p)(\|f+g\|_p)^{\frac{p}{q}}.$$

Из теоремы 2 следует, что если f, g и h принадлежат $\mathscr{L}_p$, то

$$\rho_p(f, g) = \|f-g\|_p \leqslant \|f-h\|_p + \|h-g\|_p = \rho_p(f, h) + \rho_p(h, g);$$

мы доказали, что $\mathscr{L}_p$ —метрическое пространство; доказательство полноты пространства $\mathscr{L}_1$ переносится, с очевидными изменениями, на $\mathscr{L}_p$.

1. Метрическое пространство $\mathscr{L}_p(\mu)$ пространства с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда пространство $\mathfrak{S}(\mu)$ измеримыхмножеств конечной меры сепарабельно. [Указание. Если некоторый класс множеств плотен в $\mathfrak{S}(\mu)$, то множество всех конечных линейных комбинаций с рациональными коэффициентами характеристических функций этих множеств плотно в $\mathscr{L}_p(\mu)$.]

2. Другим полезным пространством является множество $\mathfrak{M}$ всех существенно ограниченных измеримых функций. Если положить для любой f из $\mathfrak{M}$

$$\|f\|_\infty = \sup \operatorname{vrai} \{|f(x)| : x \in X\}$$

и для f и g из $\mathfrak{M}$ положить $\rho_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$, то $\mathfrak{M}$ (с обычным соглашением относительно равенства двух элементов) становится полным метрическим пространством.

3. Из описанных нами функциональных пространств наиболее полно изучено пространство $\mathscr{L}_2$; оно является наиболее естественным и плодотворным обобщением обычного конечномерного эвклидова пространства. *Линейным функционалом* на $\mathscr{L}_2$ называется такая действительная функция Λ на $\mathscr{L}_2$, что

$$\Lambda(\alpha f + \beta g) = \alpha\Lambda(f) + \beta\Lambda(g),$$

где α и β— действительные числа, а f и g принадлежат $\mathscr{L}_2$. Линейный функционал Λ называется *ограниченным,* если существует такая положительная конечная постоянная *c,* что $|\Lambda(f)| \leqslant c\|f\|_2$ для всех f из $\mathscr{L}_2$.

Для каждого ограниченного линейного функционала Λ существует такой элемент g из $\mathscr{L}_2$, что $\Lambda(f) = \int fg\,d\mu$, каково бы ни было f из $\mathscr{L}_2$. (Доказательство этого элементарного геометрического факта не опирается на свойства, более глубокие, чем полнота $\mathscr{L}_2$.) Этот результат может быть использован для доказательства теоремы Радона — Никодима (простым следствием которой он, в свою очередь, является). Для простоты ограничимся при наброске этого доказательства случаем конечных мер. Допустим, что μ и ν — две конечные меры, такие, что $\nu \ll \mu$, и положим $\lambda = \mu + \nu$.

а) Если $\Lambda(f) = \int f\, d\nu$ при любом f из $\mathscr{L}_2(\lambda)$, то Λ — ограниченный линейный функционал на $\mathscr{L}_2(\lambda)$.

б) Если

$$\Lambda(f) = \int fg\, d\lambda,$$

То $0 \leqslant g \leqslant 1$ $[\lambda]$. [Указание. Если f—характеристическая функция измеримого множества E, то $\Lambda(f) = \nu(E) \leqslant \lambda(E)$.]

в) Если $E = \{x : g(x) = 1\}$, то $\lambda(E) = 0$.

[Указание. $\lambda(E) = \nu(E)$.]

г)

$$\int f(1-g)\, d\nu = \int fg\, d\mu$$

для любой неотрицательной измеримой функции f.

д) Если $g_0 = \frac{g}{1-g}$, то $\nu(E) = \int_E g_0\, d\mu$ для любого измеримого множества E. [Указание. Положить $f = \frac{\chi_E}{1-g}$.]

4. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$—пространство с конечной мерой; для любых двух действительных измеримых функций f и g положим

$$\rho_0(f, g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu.$$

Функция ρ_0 определяет в множестве всех измеримых функций некоторую метрику; сходимость в смысле этой метрики эквивалентна сходимости по мере.

8.5. Функции множества и функции точки

В этом параграфе мы изучим связь между некоторыми функциями действительного переменного и конечными мерами на действительной прямой. Всюду в этом параграфе X будет обозначать числовую прямую, **S** — класс всех борелевских множеств и μ — лебеговскую меру на **S**.

Будем рассматривать монотонные неубывающие функции f на X, т. е. такие функции f, для которых $f(x) \leqslant f(y)$, если $x \leqslant y$; для краткости будем называть такие функции просто *монотонными.* Если f—ограниченная монотонная функция, то легко видеть, что

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

всегда существуют и конечны; как обычно, обозначим эти пределы соответственно $f(-\infty)$ и $f(+\infty)$.

Теорема 1. *Если* ν *— конечная мера на* **S** *и если для любого действительного числа* x

$$f_\nu(x) = \nu(\{t: -\infty < t < x\}),$$

то Д *— ограниченная монотонная функция, непрерывная слева и такая, что* $f_\nu(-\infty) = 0.$

Доказательство. Ограниченность и монотонность f_ν следуют из соответствующих свойств меры ν. Так как

$$f_\nu(-n) = \nu((-\infty, -n)), \quad n = 1, 2, \ldots, \text{ то}$$

$$f_\nu(-\infty) = \lim_n f_\nu(-n) = \nu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \{t: -\infty < t < -n\}\right) = \nu(0) = 0.$$

Чтобы доказать непрерывность функций f_ν слева при любом x, предположим, что $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность чисел, такая, что $\lim\limits_n x_n = x$; тогда

$$0 = \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [x_n, x)\right) = \lim_n \nu([x_n, x)) = \lim_n (f_\nu(x) - f_\nu(x_n)).$$

Теорема 2. *Если* f*—ограниченная непрерывная слева монотонная функция, причем* $f(-\infty) = 0$, *то существует единственная конечная мера* ν *на* **S**, *такая, что* $f = f_\nu$.

Доказательство. Это доказательство во всех деталях повторяет построение лебеговской меры. Именно, если определить ν для каждого полузамкнутого интервала, положив $\nu([a, b)) = f(b) - f(a)$, то все, что говорилось в § 3.2 относительно μ, применимо к ν, и, следовательно, может быть применима теорема о продолжении (см. теорему 1 § 3.8). Нуждается в изменении только рассуждение, использованное в доказательстве теоремы 3 § 3.2. Нам нужно доказать, что если $[a_0, b_o)$ — полузамкнутый интервал, содержащийся в соединении последовательности $\{[a_i, b_i)\}$ полузамкнутых интервалов, то

$$\nu([a_0, b_0)) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \nu([a_i, b_i)).$$

Если $a_0 = b_0$, то результат тривиален; в противном случае пусть ε — такое положительное число, что $\varepsilon < b_0 — a_0$. Так как f непрерывна слева в a_i, то для всякого положительного числа δ и всякого целого положительного i существует такое положительное число ε_i, что

$$f(a_i) - f(a_i - \varepsilon_i) < \frac{\delta}{2^i}, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Если $F_0 = [a_0, b_0 - \varepsilon]$ и

$U_i = (a_i - \varepsilon_i, b_i), \quad i = 1, 2, \ldots,$ то

$F_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ и, следовательно, в силу теоремы Гейне — Бореля,

существует такое целое положительное n, что

$$F_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Так же, как и в теореме 2 § 3.2, получаем

$$f(b_0 - \varepsilon) - f(a_0) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (f(b_i) - f(a_i - \varepsilon_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(b_i) - f(a_i)) + \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_i - \varepsilon)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (f(b_i) - f(a_i)) + \delta.$$

Так как ε и δ произвольны, то требуемое неравенство следует из непрерывности функции f слева в точке b_0.

Теоремы 1 и 2 устанавливают взаимно-однозначное соответствие между всеми конечными мерами v на **S** и некоторыми функциями f_v действительного переменного; следующие две теоремы показывают, как некоторые свойства меры v могут быть охарактеризованы с помощью соответствующей функции f_v.

Теорема. 3. *Если* ν *— конечная мера на* **S**, *то для того, чтобы функция* f_ν *была непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы* $\nu(\{x\}) = 0$ *для любой точки x.*

Доказательство. Если $\{x_n\}$ — убывающая последовательность чисел, такая, что $\lim_n x_n = x$, то

$$\nu(\{x\}) = \nu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}[x_n,\ x)\Big) = \lim_n \nu([x_n,\ x)) = \lim_n (f_\nu(x_n) - f_\nu(x)).$$

Остается только заметить, что f_ν непрерывна в точке x тогда и только тогда, когда

$$\lim_n (f_\nu(x_n) - f_\nu(x)) = 0. \ *$$

Действительная функция f действительного переменного называется *абсолютно непрерывной,* если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

для каждого конечного класса $\{(a_i,\ b_i) : i = 1,\ 2, \ldots\}$ непересекающихся ограниченных открытых интервалов, для которого $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta.$

Теорема 4. *Если* ν *— конечная мера на* **S**, *то, для того чтобы функция* f_ν *была абсолютно непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы* ν *была абсолютно непрерывна относительно* μ.

Доказательство. Если $\nu \ll \mu,$ то для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что $\nu(E) < \varepsilon$ для любого борелевского множества E, для которого $\mu(E) < \delta.$ Следовательно, если $\{(a_i,\ b_i) : i = 1,\ 2, \ldots, n\}$—конечный класс непересекающихся ограниченных открытых интервалов, такой, что

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} [a_i,\ b_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n}|f_\nu(b_i)-f_\nu(a_i)|=\sum_{i=1}^{n}\nu([a_i,\ b_i))=\nu\left(\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,\ b_i)\right)<\varepsilon.$$

Обратно, предположим, что функция f_ν абсолютно непрерывна. Пусть ε — произвольное положительное число, а δ — такое положительное число, что $\sum_{i=1}^{n}|f_\nu(b_i)-f_\nu(a_i)|<\varepsilon,$ как только

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta.$$

Если E — борелевское множество лебеговской меры нуль, то существует такая последовательность $\{[a_i,\ b_i)\}$ непересекающихся полузамкнутых интервалов, что

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,\ b_i)\quad \text{и}\quad \sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)<\delta.$$

Так как отсюда следует, что $\sum_{i=1}^{n}|f_\nu(b_i)-f_\nu(a_i)|<\varepsilon$ для любого целого положительного *n*, то

$$\nu(E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\nu([a_i,\ b_i))=\sum_{i=1}^{\infty}|f_\nu(b_i)-f_\nu(a_i)|\leqslant\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то $\nu(E) = 0$.

Для того чтобы сформулировать следующий результат (представляющий собой простое, но часто используемое следствие теоремы Лебега о разложении), нам понадобится еще одно определение. Будем говорить, что конечная мера ν на **S** является *чисто атомической,* если существует такое конечное или счетное множество С, что

$$\nu(X-C)=0.$$

Теорема 5. *Если ν — конечная мера на S, то существуют три однозначно определенные меры ν_1, ν_2 и ν_3 на* **S**, *сумма которых равна ν, причем ν_1 абсолютно непрерывна относительно* μ, *ν_2 является чисто атомической, а ν_3 сингулярна относительно* μ, *но* $\nu_3(\{x\})=0$ *для любой точки x.*

Доказательство. Согласно теореме Лебега о разложении (см. теорему 3 § 6.6), существуют две меры v_0 и v_1 на **S**, сумма которых равна v, причем v_0 сингулярна, а v_1 абсолютно непрерывна относительно лебеговской меры μ. Пусть С—множество тех точек x, для которых $\nu_0(\{x\}) \neq 0$; так как мера v конечна, то множество С конечно или счетно. Если положить

$$\nu_2(E) = \nu_0(E \cap C) \quad \text{и} \quad \nu_3(E) = \nu_0(E - C),$$

то ясно, что разложение $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ обладает требуемыми свойствами. Единственность этого разложения следует из единственности разложения Лебега и очевидной единственности множества C.

1. Все результаты этого параграфа справедливы и для обобщенной меры v, если условие монотонности f_v заменить условием ограниченности ее вариации. [Указание. Каждая функция ограниченной вариации является разностью двух монотонных.]
2. Некоторые хорошо известные свойства монотонных функций и абсолютно непрерывных функций могут быть доказаны применением методов этого параграфа; укажем два примера:
а) Монотонная функция имеет не более счетного множества точек разрыва. [Указание. Если ограниченная монотонная функция f непрерывна слева и $f(-\infty) = 0$, то применим теорему 2 и рассуждение, использованное при доказательстве теоремы 3. Общий случай очевидным образом сводится к этому частному.]
б) Если ограниченная монотонная и абсолютно непрерывная функция f такова, что $f(-\infty) = 0$, то существует такая неотрицательная интегрируемая в смысле Лебега функция φ, что

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, d\mu(t).$$

[Указание. Применить теоремы 2 и 4.]

3. Следующие замечания показывают, что теорема 3 § 3.12 и результат упр. 1 § 3.12 могут быть распространены на весьма широкий класс мер, включающий меры, исследованные в этом параграфе:
а) Если две конечные меры μ и v на σ-кольце **S** подмножеств множества X совпадают на некоторой структуре **L** множеств из **S**, то они совпадают и на σ -кольце **S** (**L**), порожденном **L**. [Указание. Если $E \in$ **L**, $F \in$ **L** и $E \subset F$, то $\mu(F - E) = \nu(F - E)$. Применим теперь результаты упр. 2 § 2.6 и упр. 5 § 3.2 и теорему 1 § 3.8.]

б) Если две конечные меры μ и *v* определены на всех борелевских множествах в метрическом пространстве *X* и совпадают на классе **U** открытых подмножеств пространства *X,* то они совпадают на всех борелевских множествах.

в) Если μ — конечная мера, определенная на всех борелевских множествах в метрическом пространстве *X,* а **U** — класс открытых множеств пространства *X,* то $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\}$ для любого борелевского множества *E.* (Указание. Функция множества *v**, определенная равенством $v^*(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\}$, является конечной метрической внешней мерой; она определяет меру *v* на всех борелевских множествах, и *v* совпадает с μ на **U**.)

г) Если μ — мера на всех борелевских множествах в метрическом пространстве, а **C** — класс замкнутых множеств пространства *X,* имеющих конечную меру, то $\mu(E) = \sup\{\mu(C) : E \supset C \in \mathbf{C}\}$ для любого борелевского множества *E* σ-конечной меры. [Указание. Достаточно рассмотреть множества *E* конечной меры. Положим $v(F) = \mu(E \cap F)$ и применим *„в\"* к *v* и *X—E.)*

д) Если μ — мера на всех борелевских множествах в полном сепарабель-ном метрическом пространстве *X*, а $\mathbf{C}_0$ — класс компактных множеств в пространстве *X,* имеющих конечную меру, то $\mu(E) = \sup\{\mu(C) : E \supset C \in \mathbf{C}_0\}$ для каждого борелевского множества *E* σ-конечной меры. [Указание. Применить „г" и упр. 10 § 3.3.]

4. Если *v* — конечная мера на **S** и если борелевское множество E_0 является для меры *v* атомом, то в E_0 существует такая точка x_0, что $\mu(E_0 - \{x_0\}) = 0$. [Указание. Посредством упр. 3 общий случай может быть сведен к случаю замкнутого и ограниченного E_0.]

5. Если *v* — конечная мера на **S**, то, для того чтобы f_v была непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы мера *v* была неатомической.

6. Большинство результатов этого параграфа остается справедливым для мер и обобщенных мер *v,* не являющихся конечными; существенно только, чтобы *v* была конечна на ограниченных интервалах.

7. В связи с упр. 6 и для построения примеров интересно заметить, что существуют σ-конечные меры *v* на **S**, абсолютно непрерывные относительно μ, для которых $v(E) = \infty$ для каждого интервала *E,* имеющего хотя бы одну внутреннюю точку. (Указание. Пусть *f*— положительная интегрируемая в смысле Лебега функция, такая,

что $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f^2 d\mu = \infty$ для любого положительного числа ε, например $f(x) = (e^{|x|}\sqrt{|x|})^{-1}$. Если $\{r_1, r_2, \ldots\}$— последовательность всех рациональных чисел, то для каждого x положим

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(x - r_n);$$

мера ν, определенная для каждого борелевского множества E равенством

$$\nu(E) = \int_E g^2 d\mu,$$

обладает требуемыми свойствами. Заметим, что так как

$$\int g\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int f\, d\mu,$$

то функция g принимает конечные значения почти всюду **[**μ**].)**

8.6. Мера Хаусдорфа

Мера Хаусдорфа — собирательное название класса мер, определённых на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$метрического пространства X.

Пусть X — метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будет обозначаться через $|xy|$. *Диаметром* непустого множества $A \subset X$ называется величина

$\mathrm{diam}(A) = \sup\{|xy| : x, y \in A\}$, диаметр пустого множества полагаем равным 0.

Покрытием множества A называется любой (конечный или бесконечный) набор множеств $\{A_i\}$ такой, что $A \subset \bigcup A_i$. *Мелкостью* набора множеств $\{A_i\}$ называется число $\Delta(\{A_i\}) = \sup_i \mathrm{diam}\, A_i$.

Определение. Пусть $d \geq 0$, $A \subset X$. Будем называть *d-мерным весом* конечного или набора множеств $\{A_i\}$ величину

$W_d(\{A_i\}) = \sum \mathrm{diam}(A_i)^d$.

Примечание: если $d = 0$ и $\mathrm{diam}(A_i) = 0$, считаем $\mathrm{diam}(A_i)^d = 1$.

Пусть ε > 0. Определим величину

$$\mathcal{H}^d_\varepsilon(A) = \inf\{W_d(\{A_i\}) : A \subset \bigcup A_i, \Delta(\{A_i\}) < \varepsilon\},$$

где инфимум берется по всем конечным и счетным покрытиям $\{A_i\}$ мелкости меньше ε. Величина $\mathcal{H}^d_\varepsilon$ возрастает при убывании ε, поэтому она имеет предел при $\varepsilon \to 0$. Положим

$$\mathcal{H}^d(A) = C_d \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{H}^d_\varepsilon(A),$$

где C_d — нормировочная константа, которая будет определена позже. Величина $\mathcal{H}^d(A)$ называется *d-мерной мерой Хаусдорфа* множества *A*.

При $d = 0$ и $d = 1$ полагаем нормировочную константу равной 1.

Замечание. В определении можно ограничиться открытыми покрытиями $\{A_i\}$ (то есть такими, в которых все множества A_i открыты). Действительно, произвольное покрытие $\{A_i\}$ можно заменить на открытое, сколь угодно мало изменив мелкость и вес.

Ф. Хаусдорф рассматривал некоторый класс $\mathcal{U}$ открытых подмножеств X, на котором определил неотрицательную функцию $l = \{l(A) \mid A \in \mathcal{U}\}$ и

$$\lambda(B,\ \varepsilon) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} l(A_i)\right\},$$

где нижняя грань берётся по всем конечным или счётным покрытиям борелевского множества $B \subset X$ множествами из $\mathcal{U}$ с диаметром, не превосходящим ε, то есть

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{U}$$

и

$$\operatorname{diam} A_i \leqslant \varepsilon, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Мерой Хаусдорфа λ, определяемой классом $\mathcal{U}$и функцией l, называется предел

$$\lambda(B) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lambda(B,\ \varepsilon).$$

Примеры. 1. $\mathcal{H}^0$ — считающая мера.

2. $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}) = 0.$

3. $\mathcal{H}^1([0,1]) = 1$ (доказывается с использованием компактности).

4. Пусть $\mathcal{U}$— совокупность всех шаров в X, а $l(A) = (\operatorname{diam} A)^\alpha$, где $\alpha > 0$. Тогда соответствующая мера λбудет называться α*-мерой Хаусдорфа*. При $\alpha = 1$такая мера будет называться *линейной мерой Хаусдорфа*, а при $\alpha = 2$ — *плоской мерой Хаусдорфа*.
5. Если $X = \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{U}$— совокупность цилиндров с шаровыми основаниями и осями, параллельными направлению оси x_{n+1}и $l(A)$равна n-мерному объёму осевого сечения цилиндра $A \in \mathcal{U}$, то соответствующая мера Хаусдорфа называется *цилиндрической мерой*.

Теорема. $0 < \mathcal{H}^n(I^n) < \infty.$

Доказательство. Для доказательства неравенства $\mathcal{H}^n < \infty$, достаточно предъявить сколь угодно мелкое покрытие с весом, ограниченным сверху некоторой константой. Возьмем, например, разбиение I^n на кубики с ребром $1/N,\ N \to \infty.$

Для доказательства неравенства $\mathcal{H}^n > 0$ нужно проверить, что вес любого покрытия отделен от нуля некоторой константой. Покрытие можно считать открытым, а значит конечным. Увеличив диаметры не более чем в $2n$ раз, можно заменить покрывающие множества на кубики с ребрами, параллельными координатным осям. Вес каждого кубика в константу раз отличается от его элементарного объема (элементарный объем прямоугольного параллелепипеда — произведение ребер). Теперь утверждение следует из леммы:

Лемма. *Пусть* $P, P_1, P_2, \ldots, P_N$ *— параллелепипеды с ребрами, параллельными координатным осям. Предположим, что* $P \subset \bigcup P_i$. *Тогда* $\sum V(P_i) \geq V(P)$, *где V — элементарный объем.*

Лемма легко доказывается по индукции.

Теперь можно определить нормировочную константу C_d при целых d: это такое число, что d-мерная мера Хаусдорфа куба I^d получается равной 1.

Информация: $C_d = \dfrac{\pi^{d/2}}{2^d \cdot \Gamma(d/2+1)}$, где \$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} x^{d-1} e^{-x}\, dx$. Эту формулу можно использовать для определения нормировочной константы и для нецелых d.

Свойства меры Хаусдорфа. 1. Монотонность: если $A \subset B$, то $\mathcal{H}^d(A) \leq \mathcal{H}^d(B)$.

2. Счетная субаддитивность: $\mathcal{H}^d(\bigcup A_i) \leq \sum \mathcal{H}^d(A_i)$ для любого конечного или счетного набора множеств $\{A_i\}$.

3. Пусть $A, B \subset X$, $\mathrm{dist}(A, B) > 0$, где
$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{|xy| : x \in A, y \in B\}$.

Тогда $\mathcal{H}^d(A \cup B) =$
$\mathcal{H}^d(A) + \mathcal{H}^d(B)$.

4. Нерастягивающие отображения не увеличивают меру. Как следствие, меры изометричных множеств равны.

5. Гомотетия с коэффициентом k умножает меру на k^d.

Этих свойств достаточно для вычисления меры Хаусдорфа в большинстве случаев. Например, площадь сферы можно вычислить, разбив ее на маленькие части и сравнив каждую часть с ее проекцией на касательную плоскость.

Хаусдорфова размерность

Теорема. *Для любого множества* $A \subset X$ *существует такое* $d_0 \in [0, +\infty]$, *что* $\mathcal{H}^d(A) = 0$ *при всех* $d > d_0$ *и* $\mathcal{H}^d(A) = \infty$ *при всех* $d < d_0$.

Число d_0 называется *хаусдорфовой размерностью* множества A и обозначается $\dim_H(A)$.

Доказательство. Положим $d_0 = \inf\{d : \mathcal{H}^d(A) < \infty\}$. Тогда $\mathcal{H}^d(A) = \infty$ при всех $d < d_0$. Докажем, что $\mathcal{H}^d(A) = 0$ при $d > d_0$. Выберем между d_0 и d такое d', что $H^{d'}(A) < \infty$. Пусть $d = d' + a$. Тогда $\mathcal{H}^d_\varepsilon \leq \varepsilon^a \mathcal{H}^{d'}_\varepsilon(A)$ для любого $\varepsilon > 0$. Поскольку $\mathcal{H}^{d'}(A) < \infty$ и $H^d \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, получаем $\mathcal{H}^d(A) = 0$. □

Примеры. 1. $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$, так как $0 < \mathcal{H}^n(I^n) < \infty$.

2. Размерность стандартного канторовского множества K равна $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. Это число можно угадать из следующих соображений: пусть $d = \dim_H(K)$, $A = \mathcal{H}^d(K)$. Тогда $A = 2A(1/3)^d$, так как K

состоит из двух копий, подобных ему с коэффициентом 1/3.
Предполагая, что $A = 0$ и $A = \infty$, получаем $3^d = 2$, откуда
$d = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Это не доказательство, так как нет гарантии, что $\mathcal{H}^d(K)$не ноль и не бесконечность.

8.7. Хаусдорфова мера и размерность Хаусдорфа – Безиковича

1. Мера каратеодори

Кантору приходила в голову мысль о том, что «при исследовании размерностей непрерывных множеств невозможно обойтись без общего понятия объема или величины», однако он, по всей видимости, не уделил ей должного внимания. Лебег полагает, что, имей Кантор полное представление о сложности стоящей перед ним задачи, ему вряд ли удалось бы достичь сколько-нибудь значительных результатов. Эта мысль получила дальнейшее развитие в работе Каратеодори и была впоследствии воплощена Хаусдорфом .

Классическая процедура оценки площади плоской фигуры начинается с аппроксимации множества S с помощью набора очень маленьких квадратов; далее сторона каждого квадрата возводится в степень $D = \mathbf{2}$ и полученные результаты складываются. Каратеодори [67] расширяет рамки этого традиционного подхода. Заменив квадраты дисками, он избегает зависимости от координатных осей; кроме того, с самого начала предполагается, что мы не знаем, является ли множество S стандартной евклидовой фигурой известной размерности, вложенной в известное пространство $\mathbf{R}^E$.

Заметим теперь, что если плоскую фигуру, вложенную в трехмерное пространство, можно покрыть дисками, то ее a fortiori можно покрыть шарами, экваторами которых являются эти диски. Следовательно, если мы не хотим заранее считать множество S плоским, нам достаточно покрыть его вместо дисков шарами. Если же S и в самом деле является поверхностью, ее приближенную меру можно получить простым сопоставлением каждому шару выражения вида $\pi\rho^2$ и последующим сложением этих выражений. В более общем виде, для получения меры какой-либо d - мерной фигуры следует складывать выражения вида $h(\rho) = \boldsymbol{\gamma}(d)\rho^d$; входящая сюда функция $\boldsymbol{\gamma}(d) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^d / \Gamma(1 + d/2)$ была определена ранее в этой главе как протяженность шара единичного радиуса. На этом основании Каратеодори [67] распространяет понятия «длины» и «площади» и на нестандартные фигуры.

2. Хаусдорфова мера

Хаусдорф расширяет определение Каратеодори, допуская возможность дробного значения d (функция $\boldsymbol{\gamma}(d)$ записывается таким образом, что она при этом продолжает иметь смысл). Таким образом, мы больше не ограниченны степенями ρ, а вольны использовать любую положительную пробную функцию $h(\rho)$, которая стремится к нулю вместе с ρ.

Более того, поскольку шар представляет собой всего лишь множество точек, расстояние до которых от центра $\mathbf{w}$ не превышает заданного радиуса ρ, шар продолжает оставаться определенным даже в случае неевклидова пространства Ω - при условии, что в этом пространстве определено расстояние. Как мы уже отмечали, такие пространства называются метрическими, следовательно, и хаусдорфова мера представляет собой метрическое понятие.

Если задана некоторая пробная (или «калибровочная») функция

$h(\rho)$, то можно сказать, что мера конечного покрытия множества S шарами радиуса ρ_m равна $\sum h(\rho_m)$. Для получения наиболее экономичного покрытия мы рассматриваем все покрытия шарами, радиус которых меньше ρ, и образуем инфимум

$$\inf_{\rho_m < \rho} \sum h(\rho_m).$$

При $\rho \to 0$ ограничение $\rho_m < \rho$ становится чрезвычайно жестким. То есть выражение $\inf \sum h(\rho_m)$ может только возрастать; у него есть предел, который имеет вид

$$\lim_{\rho \to 0} \inf_{\rho_m < \rho} \sum h(\rho_m).$$

Этот предел может быть конечным положительным, отрицательным или нулевым. Он определяет h - меру множества S.

Если $h(\rho) = \gamma(d)\rho^d$, то h - мера называется d - мерной. Точнее говоря, из-за префактора $\gamma(d)$ h - мера является нормированной d - мерной мерой.

Если $h(\rho) = 1/\ln|\rho|$, то h - мера называется логарифмической.

3. Внутренняя пробная функция множества

Функцию $h(\rho)$ можно назвать внутренней для множества S и обозначить как $h_S(\rho)$, если h_S - мера S положительна и конечна. Эту меру можно назвать фрактальной мерой множества S.

Для стандартных фигур евклидовой геометрии внутренняя пробная функция всегда имеет вид $h_S(\rho) = \gamma(D)\rho^D$, где D - некоторое целое число. Хаусдорф показал, что внутренней для канторовых пылей и кривых Коха является функция $h_S(\rho) = \gamma(D)\rho^D$ с нецелочисленным значением D.

Типичные случайные фракталы, пусть даже и статистически самоподобные, также обладают внутренней функцией $h_S(\rho)$, однако она имеет более сложный вид – например, $h_S(\rho) = \rho^D \mathbf{ln}|\rho|$. В этом случае h - мера множества S относительно функции $h(\rho) = \gamma(D)\rho^D$ обращается в нуль, т.е. фигура содержит меньше «вещества», чем если бы она была D - мерной, но больше, чем если бы она была D - ε-мерной. В качестве примера можно привести траекторию броуновского движения на плоскости, внутренняя функция для которого, согласно Леви, имеет вид $h(\rho) = \rho^2 \ln\ln(1/\rho)$.

Поскольку двумерная мера любого ограниченного множества на плоскости конечна, пробные функции вида $\rho^2 / \ln(1/\rho)$ не могут быть внутренними ни для какого плоского множества.

4. Размерность Хаусдорфа – Безиковича: определение

Если известно, что множество S двумерно, вполне достаточно оценить хаусдорфову h - меру для $h(\rho) = \pi\rho^2$. Однако определение хаусдорфовой меры сформулировано таким образом, что предварительного знания размерности D не требуется. Имея дело со стандартной фигурой неизвестной размерности, мы будем оценивать ее меру для всех пробных функций $h(\rho) = \gamma(d)\rho^d$, где

d - целое число. Если длина фигуры бесконечна, а объем равен нулю, то она может быть только двумерной.

Безикович распространил суть последнего заключения на случаи, в которых показатель d не является целым числом, а множество S - стандартной фигурой. Он показал, что для каждого множества S существует такое вещественное значение D, что d - мера этого множества при $d < D$ бесконечна, а при $d > D$ обращается в нуль.

Эта величина D и называется размерностью Хаусдорфа – Безиковича множества S.

Для физика это означает, что величина D представляет собой критическую размерность.

D - мерная хаусдорфова мера D - мерного множества S может быть либо равна нулю, либо бесконечна, либо положительна и конечна. Хаусдорф ограничился только последним, самым простым, случаем и показал, что в эту категорию входят канторовы множества и кривые Коха. Если множество S ко всему прочему еще и самоподобно, легко заметить, что его размерность подобия должна быть равна D. С другой стороны, мы знаем, что типичные случайные множества имеют в качестве естественной размерности нулевую меру.

Долгое время Безикович являлся автором или соавтором почти всех публикуемых по данной теме работ. Если Хаусдорфа можно назвать отцом нестандартной размерности, то Безикович, несомненно, заслужил себе звание ее матери.

Коразмерность. Когда в роли пространства Ω выступает $\mathbf{R}^E$, $D \leq E$, а разность называется коразмерностью.

5. Прямые произведения множеств (сложение размерностей)

Рассмотрим множества S_1 и S_2, принадлежащие, соответственно, E_1 - пространству и E_2 - пространству, и обозначим через S множество в E - пространстве $(E = E_1 + E_2)$, представляющее собой произведение множеств S_1 и S_2. (Если $E_1 = E_2 = 1$, то S - это множество расположенных на плоскости точек (x, y), причем $x \in E_1$ и $y \in E_2$.)

Эмпирическое правило гласит, что если множества S_1 и S_2 «независимы», то размерность множества S равна сумме размерностей множеств S_1 и S_2.

Понятие «независимости», входящее в это правило, оказывается неожиданно сложно сформулировать и представить в общем виде. К счастью, в подобных прецедентных исследованиях (в таких, например, какие мы рассматриваем в настоящем эссе) нас, как правило, спасает интуиция.

6. Пересечения множеств (сложение коразмерностей)

Эмпирическое правило выглядит следующим образом: если S_1 и S_2 суть независимые множества в E - пространстве, и

$$\text{коразмерность } (S_1) + \text{коразмерность } (S_2) < E,$$

то левая часть этого неравенства почти наверное равна коразмерности $S_1 \cap S_2$. Если сумма коразмерностей больше E, то размерность пересечения почти наверное равна нулю.

В частности, два множества одинаковой размерности не пересекаются, если $D \leq E/2$. Размерность $E = 2D$ можно, таким образом, назвать критической.

Примечательно, что два броуновских следа (при том, что размерность броуновского следа $D = 2$) пересекаются при $E < 4$ и совершенно не соприкасаются при $E \geq 4$.

Правило очевидным образом распространяется и на пересечения более чем двух множеств.

Самопересечения. Множество k - кратных точек S можно рассматривать, как пересечение k реплик S. Напрашивается предположение, что, с точки зрения размерности пересечения, упомянутые k реплик можно считать независимыми. По крайней мере, в одном случае эта догадка оказывается верной. С. Дж. Тейлор в исследовал следы броуновского движения и движения Леви в $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^2$ (обобщая результаты, полученные Дворжецким, Эрдешем и

Какутани). Размерность следа равна D, а размерность множества, состоящего из его k - кратных точек, составляет $\max\left[0,\ E-k\left(E-D\right)\right]$. Телор предположил, что этот результат верен в $\mathbf{R}^E$ для всех k вплоть до $k=\infty$.

7. Проекции множеств

Эмпирическое правило таково: когда фрактал S размерности D проецируется вдоль независимого от S направления на евклидово подпространство размерности E_0, для проекции S^* верно равенство:

$$\text{размерность}\, S=\min\left(E_0,\ D\right).$$

Приложение. Пусть $x_1\in S_1$ и $x_2\in S_2$, где S_1 и S_2 - фракталы в $\mathbf{R}^E$ с размерностями D_1 и D_2. Через a_1 и a_2 обозначим некие неотрицательные вещественные числа и определим множество S как множество, составленное из точек вида $x=a_1x_1+a_2x_2$. Размерность D этого множества удовлетворяет неравенству:

$$\max\left(D_1, D_2\right)\le\ D\ \le\ \min\left(E,\ D_1+D_2\right).$$

Для доказательства находим прямое произведение $\mathbf{R}^E$ на $\mathbf{R}^E$ и проецируем.

В случае независимости множеств скорее всего подойдет и верхний предел размерности. При $D=E=\mathbf{1}$ множество S является либо фракталом, либо множеством с интервалами.

8. Субразмерностная последовательность

Если внутренняя функция множества S имеет вид $h_S(\rho)=\boldsymbol{\gamma}(D)\rho^D$, свойства фрактала полностью описываются его размерностью D. Если же

$$h_S(\rho)=\rho^D\left[\ln(1/\rho)\right]^{\Delta_1}\left[\ln\ln(1/\rho)\right]^{\Delta_2},$$

то описание фрактальных свойств множества S оказывается более громоздким. Одной размерностью в этом случае не обойтись, требуется последовательность D, Δ_1, Δ_2. Величины $\boldsymbol{\Delta}_m$ можно назвать субординатными размерностями или субразмерностями.

Субразмерности в состоянии пролить свет на вопрос, следует ли считать фракталами пограничные множества, описанные в разделе фракталы, 3. Возможно имеет смысл называть фракталами любое множество S, размерность D которого равна D_T, но хотя бы одна субразмерность $\boldsymbol{\Delta}$ отлична от нуля.

9. Длина кривой

Определение. Пусть *X* — метрическое пространство. *Кривая в X* — это непрерывное отображение $\gamma:[a,b]\to X$. *Пунктир* кривой $\gamma:[a,b]\to X$ —конечная последовательность точек $\gamma(t_0),\dots,\gamma(t_n)$, где $\{t_i\}$ — разбиение отрезка [*a, b*], *длина пунктира* — это сумма $\sum|\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})|$ю *Длина кривой* —это супремум длин ее пунктиров, обозначение: *L(γ)*. Кривая конечной длины называется *спрямляемой.*

Свойства. 1. $L(\gamma)=L(\gamma|_{[a,c]})+L(\gamma|_{[c,b]})$ для любой кривой $\gamma:[a,b]\to X$ и любого $c\in[a,b]$.

2. Если мелкость разбиения $\{t_i\}$ стремится к нулю, то $\sum|\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})|$ стремится к *L(γ).*

3. Длина не меняется при замене параметра, у любой кривой конечной длины есть натуральная параметризация, то есть такая параметризация

$\gamma : [0, L] \to X$, что $L(\gamma|_{[a,b]}) = b - a$ для любого отрезка $[a, b] \subset [0, L]$.

Теорема. *Пусть* $\gamma : [a, b] \to X$ *— кривая в метрическом пространстве X. Тогда*

$$L(\gamma) = \int_X \#\{\gamma^{-1}(x)\}\, d\mathcal{H}^1(x).$$

В частности, если γ *не имеет самопересечений, то*
$LL(\gamma) = \mathcal{H}^1(\gamma([a, b]))$.

Доказательство.

Лемма. $\mathcal{H}^1(\gamma([a, b])) \leq L(\gamma)$.

Лемма. $\mathcal{H}^1(\gamma([a, b])) \geq \operatorname{diam}(\gamma([a, b]))$.

Определение. Скоростью кривой γ в момент *t* называется число

$$s_\gamma(t) = \lim_{t' \to t} \frac{|\gamma(t)\gamma(t')|}{|t - t'|}.$$

Теорема. *Пусть* $\gamma : [a, b] \to X$ *— липшицева кривая. Тогда скорость* s_γ *определена почти всюду и* $L(\gamma) = \int_{[a,b]} s_\gamma \, d\mu$, *где* μ *— одномерная мера Лебега.*

Доказательство. Определим верхнюю скорость $\overline{s}_\gamma$ и нижнюю скорость $\underline{s}_\gamma$, заменив в определении предел на верхний и нижний предел соответственно. Обе функции всюду определены и измеримы, так как их можно представить в виде верхнего или нижнего предела счетного набора функций.

Например,

$$\overline{s}_\gamma(t) = \varlimsup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon \to 0} \frac{|\gamma(t)\gamma(t + \varepsilon)|}{|\varepsilon|}.$$

Докажем, что

$$\int_{[a,b]} \overline{s}_\gamma = \int_{[a,b]} \underline{s}_\gamma = L(\gamma).$$

Доказательство проведем для верхней скорости, для нижней оно полностью аналогично.

Снабдим отрезок [*a, b]* одномерной мерой Лебега μ. Пусть $A \subset [a, b]$ — множество всех точек, где s_γ аппроксимативно непрерывно. Пусть C — константа Липшица для γ. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $\delta > 0$, что для любого разбиения отрезка [*a, b]* мелкости меньше δ длина соответствующего пунктира кривой γ больше $L(\gamma) - \varepsilon$. Рассмотрим всевозможные отрезки $[t, t'] \subset [a, b]$ (допускается *t' <t),* обладающие следующими свойствами:

1. $\left|\frac{|\gamma(t)\gamma(t')|}{|t-t'|} - \overline{s}_\gamma(t)\right| < \varepsilon.$
2. $\mu\{x \in [t,t'] : |\overline{s}_\gamma(x) - \overline{s}_\gamma(t)| > \varepsilon\} < \varepsilon|t-t'|.$
3. $|t-t'| < \delta.$

Эти отрезки образуют покрытие множества *А* как в теореме Витали. Действительно, каждая точка $t \in A$ является концом сколь угодно короткого отрезка, удовлетворяющего первому свойству — это следует из определения $\overline{s}_\gamma$. При этом все достаточно короткие отрезки, содержащие *t*, удовлетворяют второму свойству, так как *t* — точка аппроксимативной непрерывности. Для каждого такого отрезка имеем

$$|\gamma(t)\gamma(t')| = \overline{s}_\gamma(t)|t-t'| \pm \varepsilon|t-t'| == \int_{[t,t']} \overline{s}_\gamma \, d\mu \pm (C+2)\varepsilon|t-t'|.$$

С помощью теоремы Витали выберем из этих отрезков дизъюнктный набор, покрывающий почти все *А*, а значит, и почти весь отрезок [a, *b]*. Выберем конечный поднабор $\{[t_i, t_i']\}$ с суммой мер

больше $|a — b|$ — ε. Тогда

$$\int_{[a,b]} \overline{s}_\gamma \, d\mu = \int_{\bigcup [t_i,t_i']} \overline{s}_\gamma \, d\mu \pm C\varepsilon = \sum |\gamma(t)\gamma(t')| \pm (C+2)\varepsilon|a-b| + C\varepsilon.$$

Дополним множество точек $\{t_i, t_i'\}$ до разбиения отрезка [*a, b]* мелкости меньше δ (при этом между t_i и $t_{i'}$ новых точек не вставляем). Длина кривой отличается от длины этого пунктира меньше, чем на ε, а длина пунктира отличается от суммы $\sum |\gamma(t)\gamma(t')|$ меньше чем на $C\varepsilon$.

10. Липшицевы функции

Теорема (Радемахер). *Любая липшицева функция* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *дифференцируема почти всюду.*

Доказательство. Можно считать, что $m = 1$. Будем использовать индукцию по *n*.

При $n = 1$ докажем более сильное утверждение: *f* дифференцируема почти всюду и для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, верно, что $f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f$. Для монотонной функции это следует из представления длины кривой как интеграла скорости, в общем случае представим функцию в виде суммы монотонной и линейной.

Переход: от *n* к *n* +1. Представим $\mathbb{R}^{n+1}$ как прямое произведение $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$ будем обозначать через (x, y), где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$. Для каждого $y \in \mathbb{R}$. рассмотрим функцию $f_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определяемую равенством $f_y(x) = f(x,y)$. ПО индукционному предположению, каждая такая функция дифференцируема почти всюду, поэтому по теореме Фубини для почти всех $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ функция f_y дифференцируема в точке x. Аналогично, частная производная $\partial f/\partial y$определена почти всюду. Нетрудно проверить, что $\partial f/\partial y$— измеримая функция, следовательно, она аппроксимативно непрерывна почти всюду.

Достаточно доказать, что f дифференцируема в любой точке (x, y) такой, что f_y дифференцируема в x и $\partial f/\partial y$ аппроксимативно непрерывна в точке (x, y). Зафиксируем такую точку (x, y). Пусть $A = d_x f_u,\ B = \partial f/\partial y(x, y)$. Обозначим через K_δ куб с ребром 2δ с центром в (x, y). Зафиксируем ε > 0 и выберем такое $\delta_0 > 0$, что для любого положительного $\delta < \delta 0$ верно, что

$$\mu_n(K_{2\delta}) \cap \{(x, y) : |\partial f/\partial x_n(x, y) - \partial f/\partial x_n(x_0, y_0)| > \varepsilon\}) < \varepsilon^n \delta^n$$

(такое существует в силу аппроксимативной непрерывности).

Рассмотрим точку $(x', y') \in K_\delta(x_0, y_0)$ и обозначим $\Delta x = x' - x_0,\ \Delta y = y' = y_0$. Так как f_{y0} дифференцируема в точке x_0, имеем$f(x', y_0) -\ \ f(x_0, y_0) = A\Delta x_0 + o(\delta)$. Теперь достаточно доказать, что $f(x', y') - f(x', y_0) = B\Delta y + o(\delta)$. Пусть K — куб с ребром $\varepsilon\delta$ с центром в x'. Для каждой такой точки $x \in K$ определеим величину

$$\phi(x) = \mu_1(\{t \in [-\delta, \delta] : |\partial f/\partial x_n(x, y_0 + t) - \partial f/\partial x_n(x_0, y_0)| > \varepsilon\})$$

Несложное вычисление показывает, что

$$f(x, y') - f(x, y_0) = \int_{y_0}^{y'} \frac{\partial f}{\partial y} = B\Delta y \pm 2C\phi(x) \pm \varepsilon\delta,$$

где C — константа Липшица для f. По теореме Фубини и выбору δ_0, имеем

$$\int_K \phi\, d\mu_n < \varepsilon^n \delta^n.$$

Значит найдется такая точка $x'' \in K$, что $\phi(x'') < \varepsilon\delta$.Для этой точки имеем

$$f(x'', y') - f(x'', y_0) = B\Delta y \pm 2C\varepsilon\delta \pm \varepsilon\delta.$$

Из липшицевости следуют неравенства

$$|f(x'', y_0) - f(x', y_0)| < \varepsilon\delta$$

и

$$|f(x'', y') - f(x', y')| \leq \varepsilon\delta$$

Складывая, получаем, что

$$|f(x', y') - f(x', y_0)| < (2C + 3)\varepsilon\delta,$$

что и требовалось.

Теорема. *Пусть X — метрическое пространство,* $Y \subset X$, $f : Y \to \mathbb{R}$ *— липшицева функция.*
Тогда существует функция $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ *с той же константой Липшица, продолжающая f.*
Доказательство. Можно считать, что константа Липшица для *f* равна 1. Тогда положим $\tilde{f}(x) = \inf_{y \in Y}(f(y) + |xy|)$.

Теорема (о приближении липшицевой функции). *Пусть* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *— липшицева функция.*
Тогда для любого ε > 0 существует C^1 *функция* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *такая, что f = g всюду на A, кроме множества меры ε.*

10.1 Доказательство теоремы о приближении

Теорема (Лузин). *Пусть μ — борелевски регулярная внешняя мера на метрическом пространстве X, такая, что X покрывается счетным набором открытых множеств конечной меры. Пусть* $f : X \to \mathbb{R}$ *— μ-измеримая функция. Тогда для любого* ε > 0 *найдется непрерывная функция* $\bar{f} : X \to \mathbb{R}$ *такая, что* $\mu(\{\bar{f}(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon$.
Доказательство. 1. Пусть *f* = χ_A, где *A* — измеримое множество. Найдем замкнутое *F* и открытое *G* такие, что $F \subset A \subset G$ и $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. По стандартной лемме Урысона из топологии можно построить такую непрерывную функцию $\tilde{f} : X \to [0, 1]$, что $\tilde{f}|_F \equiv 1$ и $\tilde{f}|_{X \setminus G} \equiv 0$.

Примечание: для метрического пространства *X* функцию легко предъявить явно:

$$\tilde{f}(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, X \setminus G)}{\operatorname{dist}(x, X \setminus G) + \operatorname{dist}(x, F)}.$$

2. Если *f* — простая функция, представим ее в виде линейной комбинации характеристических и применим доказанный случай к каждому слагаемому.
3. Если *f* ограничена, представим ее как равномерный предел простых функций f_k так, что $\sup|f_k - f| < 1/2^k$. Положим $g_1 = f_1$, $g_{k+1} = f_{k+1} - f_k$, тогда $f = \sum g_k$, причем g_k простые и $\sup|g_k| \leq 1/2^{k-1}$. Для каждой функции g_k построим непрерывную $\tilde{g}_k$ с $\mu(\{\tilde{g}_k \neq g_k\} < 1/2^k$. Можно считать, что $\sup|\tilde{g}_k| \leq \sup|g_k| \leq 1/2^{k-1}$

(иначе обрежем). Тогда $\bar{f} = \sum \tilde{g}_k$ подходит.

4. Общий случай сводится к случаю ограниченной функции заменой f на arctg f. □

Теорема (Егоров). *Пусть* (X,μ) *— пространство с мерой и* $\mu(X) < \infty$. *Пусть* f_n *— последовательность измеримых функций,* $f_n \to f$ *поточечно. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое множество* $A \subset X$, *что* $\mu(A) < \varepsilon$ *и* f_n *сходятся к* f *равномерно на* $X \setminus A$.

Доказательство. Зафиксируем $\delta > 0$ и для каждого n рассмотрим множество

$$A_{n,\delta} = \{x \in X : \exists k > n \ |f_k(x) - f(x)| > \delta\}.$$

Это невозрастающая последовательность множеств. Поскольку $f_n(x) \to f(x)$, каждая точка $x \in X$ принадлежит лишь конечному числу из них. То есть $\bigcap A_{n,\delta} = \emptyset$. Поскольку мера конечна, отсюда следует, что $\mu(A_{n,\delta}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Для каждого $\delta = 1/k$ найдем такое n_k, что $\mu(A_{n,\delta}) < \varepsilon/2^k$. Тогда $A = \bigcup A_{n_k,1/k}$ подходит.

Следствие. *Пусть* $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *— последовательность измеримых функций,* $f_n \to f$ *почти всюду относительно меры Лебега. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует множество* $A \subset \mathbb{R}^n$ *такое, что* $\mu(\mathbb{R}^n \setminus A) < \varepsilon$ *и* f_n *сходятся к* f *равномерно на любом компакте* $K \subset A$.

Теперь пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — липшицева функция. По теореме Радемахера, она дифференцируема почти всюду.

Пусть $L_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — дифференциал f в точке x, если он существует, и нулевая линейная функция в противном случае. Тогда

$$\frac{|f(x+h) - f(x) - L_x(h)|}{|h|} \to 0, \qquad h \to 0_{\mathbb{R}^n}$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Выкинув множество малой меры, сделаем эту сходимость равномерной на компактах. А именно, для каждого $\delta > 0$ определим функцию $\alpha_\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ равенством

$$\alpha_\delta(x) = \sup_{h \in \mathbb{R}^n : 0 < |h| < \delta} \frac{|f(x+h) - f(x) - L_x(h)|}{|h|}.$$

Легко видеть, что эта функция измерима (супремум можно брать только по счетному множеству значений h). Для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $\alpha_\delta(x) \to 0$ при $\delta \to 0$. Подставляя $\delta = 1/k$, $k \to \infty$, и применяя следствие из теоремы Егорова, найдем множество $A \subset \mathbb{R}^n$ с $\mu(\mathbb{R}^n \setminus A) < \varepsilon$ и сходимость $\alpha_\delta \to 0$ равомерна на компактах в A. По теореме Лузина, найдется измеримое множество $B \subset A$, на котором функция $x \to L_x$ непрерывна и $\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) < \varepsilon$. Наконец, в силу регулярности меры Лебега найдется замкнутое множество $D \subset B$ с $\mu(\mathbb{R}^n \setminus D) < \varepsilon$. Докажем, что существует C^1 функция $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, совпадающая с *f* на *D*. Для этого достаточно доказать соответствующий частный случай теоремы Уитни о продолжении:

Теорема (теорема Уитни для C^r продолжений). *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^n$ — *замкнутое множество,* $f: D \to \mathbb{R}$ *— непрерывная функция. Пусть каждой точке* $x \in D$ *сопоставлена линейная функция* $L_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *так, что соответствие* $x \mapsto L_x$ *непрерывно и*

$$f(y) - f(x) - L_x(y - x) = o(|y - x|), \qquad x, y \in A, |x - y| \to 0,$$

где o равномерно на компактах.

Тогда существует C^1 *функция* $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *такая, что* $\tilde{f}(x) = f(x)$ *и* $d_x\tilde{f} = L_x$ *для всех* $x \in A$.

Замечание. Аналогичный критерий есть и для C^r продолжений, но его формулировка сложнее.

Доказательство. Сначала построим специальное разбиение единицы для $\mathbb{R}^n \setminus A$. Положим $h(x) = \max\{1, \operatorname{dist}(x, A)\}$. Для каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ обозначим через B_x шар с центром в *x* радиуса $r(x) = \frac{1}{100}h(x)$. Выберем из этих шаров такое подпокрытие $\{B_{xi}\}$, что соответствующие шары радиуса $\frac{1}{5}r(x_i)$ не пересекается. Тогда шары удвоенных радиусов покрывают $R^n \setminus A$ с кратностью не больше *C(n)*. Для каждого шара B_{xi} построим колоколообразную функцию u_i, равную 1 на этом шаре и нулю вне удвоенного шара. Это можно сделать так, что производная не превосходит $C/h(x_i)$. Теперь положим $\sigma(x) = \sum u_i(x)$ и заметим, что $\sigma(x) \geq 1$ и $\|d_x\sigma\| \leq C/h(x)$. Положим $\phi_i(x) = u_i(x)/\sigma(x)$. Тогда $\sum \phi_i \equiv 1$ и $\|d_x\phi_i\| \leq C/h(x)$. Пусть a_i — ближайшая к x_i точка в *A*, $P_i(x) = f(a_i) + L_{a_i}(x - a_i)$.
Положим

$$\tilde{f}(x) = \sum \phi_i(x)P_i(x).$$

при $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ и $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $x \in A$. Докажем, что эта функция подходит. Ясно, что она гладкая на $\mathbb{R}^n \setminus A$. Надо проверить дифференцируемость и значение производной на *A*, а также непрерывность производной при стремлении к *A*.

Пусть $a \in A$. Определим $P(x) = f(a) + L_a(x - a)$. Равенство $d_a\tilde{f} = L_a$ эквивалентно соотношению

$$\tilde{f}(x) = P(x) + o(|x - a|), \qquad x \to a,$$

а непрерыаность производной $\tilde{f}$ в точке *a* — соотношению

$d_x\tilde{f} = L_a + o(1), \qquad x \to a.$

Достаточно проверить эти соотношения только для точек $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Пусть $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ — точка, близкая к a, $\delta = |x - a|$. Заметим, что $h(x) \leq \delta$. Пусть I — множество таких индексов i, что $\phi_i(x) \neq 0$. Для каждого $i \in I$ точка x лежит в шаре радиуса $2r(x_i) = h(x_i)/50$, откуда нетрудно вывести, что $|xx_i| < 5r(x) = h(x)/20$ и $h(x_i) < 2h(x)$. Значит, соответствующая точка a_i лежит на расстоянии меньше $3h(x)$ от x, откуда $|aa_i| < \delta + 3h(x) < 4\delta$. Отсюда по условию $\|L_{a_i} - L_a\| = o(1)$ и $P_i(a) - f(a) = o(\delta)$. Заметим, что

$$P_i(x) = P_i(a) + L_{a_i}(x-a) = f(a) + L_a(x-a) + (P_i(a) - f(a)) + (L_{a_i} - L_a)(x-a) = P(x) + o(\delta)\cdot$$

Складывая с весами по всем $i \in I$, получаем

$$\tilde{f}(x) = \sum \phi_i(x)P_i(x) = \sum \phi_i(x)P(x) + o(\delta) = P(x) + o(\delta),$$

откуда следует равенство $d_a\tilde{f} = L_a$.

Чтобы доказать непрерывность производной, проведем такие же вычисления в случае, когда a — ближайшая к x точка из множества A. В этом случае $h(x) = |ax| = \delta$. Дифференцируя $\tilde{f}$, получаем

$$d_x\tilde{f} = \sum P_i(x)d_x\phi_i + \sum \phi_i(x)d_xP_i = \sum(P(x) + o(\delta))d_x\phi_i + \sum \phi_i(x)L_{a_i}\cdot$$

Первое слагаемое есть $o(1)$, так как $\sum d_x\phi_i = 0$ и $\|d_x\phi_i\| \leq C/\delta$, второе равно $L_a + o(1)$, так как $L_{a_i} = L_a + o(1)$ и $\sum \phi_i(x) = 0$. Таким образом, $d_xf = L_a + o(1)$, $d_x \tilde{f}=L_a+o(1)$, откуда следует непрерывность производной.

11. Якобианы

Определение. Пусть $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение. Для $k \in \mathbb{N}$ определим k-мерный якобиан L (обозначение: J_kL) как максимальный k-мерный объем образа единичного k-мерного куба. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — функция, дифференцируемая в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Для $k \in \mathbb{N}$ определим k-мерный якобиан f в точке x (обозначение: $J_kf(x)$) равенством $J_kf(x) = J_k(d_xf)$.

Примеры. 1. $m = n = k$. Тогда J$J_kL = |\det L|$.

2. $k = n < m$. Тогда $J_kL = \sqrt{\det LL^T}$. Замечание: LL^T — матрица Грама набора векторов $\partial f/\partial x_i$.

3. $k = m < n$. Тогда $J_k L = \sqrt{\det L^T L}$. В частности, при $m = k = 1$ якобиан равен модулю градиента.
Задача. Если ранг L не превосходит k, то $(J_k L)^2$ равен сумме квадратов миноров $k \times k$ матрицы отображения.

11.1 Площадь липшицевой поверхности

Определение. Пусть $k < n,\ A \subset \mathbb{R}^k,\ f : A \to \mathbb{R}^n$— липшицево отображение. Площадь f — это число

$$\operatorname{area}(f) = \int_A J_k f.$$

Теорема (формула площади). *Пусть* $k \leq n,\ A \subset \mathbb{R}^k$ *— измеримое множество,* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *- липшицево отображение. Тогда*

$$\operatorname{area}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \# f^{-1}(x)\, d\mathcal{H}^k(x).$$

Следствие. *Для любой интегрируемой функции* $\phi : A \to \mathbb{R}$

$$\int_A \phi \cdot J_k f = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{y \in f^{-1}(x)} \phi(y)\, d\mathcal{H}^k(y).$$

Доказательство. 1. Обе части аддитивны, поэтому можно разбивать A на части. В частности, можно считать, что A ограничено.
2. По предыдущей теореме, f совпадает с C^1 функцией всюду, кроме множества сколь угодно малой меры. Следующая лемма позволяет выкинуть это малое множество из A.
Лемма. $\int_{\mathbb{R}^n} \# f^{-1}(x)\, d\mathcal{H}^k(x) \leq C^k \mathcal{H}^k(A)$, *где C — константа Липшица для f.*
Доказательство. Аналогично одномерной лемме: начнем с неравенства $\mathcal{H}^k(f(A)) \leq C^k \mathcal{H}^k(A)$ и будем уточнять его, разбивая A на мелкие части.
3. Теперь можно считать, что $f \in C^1$. Сначала рассмотрим множество точек, где f невырождено (ранг равен k). Разобьем его на мелкие части, на каждой части представим f как композицию линейного отображения $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ и отображения $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, производная которого почти постоянна и близка к изометрии. У второго отображения и его обратного константы Липшица близки к 1, поэтому оно почти сохраняет площадь.
4. Теперь рассмотрим множество точек, где f вырождено. Надо доказать, что на этом множестве правая часть равна 0. Рассмотрим

отображение $f_\varepsilon = f \times \varepsilon Id : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n+k}$ при $\varepsilon \to 0$. Оно инъективно и невырождено. Имеем $Jf_\varepsilon \le C^{k-1}\varepsilon$, поэтому $\operatorname{area}(f_\varepsilon|_A) \to 0$.По разобранному иммем $\operatorname{area}(f_\varepsilon|_A) = \mathcal{H}^k(f_\varepsilon(A))$. Проекция $\mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ не увеличивает расстояния, поэтому по лемме

$$\int_{\mathbb{R}^n} \# f^{-1}(x)\, d\mathcal{H}^k(x) \le \operatorname{area}(f_\varepsilon)$$

11.2 Формула коплощади

Теорема (формула коплощади). *Пусть* $k \le n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ *— измеримое множество,* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *- липшицево отображение. Тогда*

$$\int_A J_k f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y))\, dy$$

Следствие (о послойном интегрировании функции).
Пусть $\phi : A \to \mathbb{R}$ *— интегрируемая функция.*
Тогда

$$\int_A \phi(x) J_k f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{A \cap f^{-1}(y)} \phi \; d\mathcal{H}^{n-k} \right) dy$$

Доказательство формулы коплощади

Определение. Верхний интеграл — инфимум верхних интегральных сумм.
Свойство. Для верхнего интеграла выполняется теорема Леви.
Лемма. *Пусть* X *— метрическое пространство,* $f : X \to \mathbb{R}^k$ *— липшицево с константой* L.
Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^k}^{*} \mathcal{H}^{n-k}(f^{-1}(y))\, dy \le L^k C(k,n) \mathcal{H}^n(X),$$

где $\int^*$ *— верхний интеграл Лебега.*
Доказательство. Будем считать, что нормировочные константы всех мер Хаусдорфа равны 1 (это влияет только на значение константы *C(n,k)).* Пусть $\varepsilon > 0$. Покроем X таким счетным набором множеств $\{X_i\}$, *что* $\operatorname{diam} X_i < \varepsilon$ для всех i и $\sum(\operatorname{diam} X_i)^n \le \mathcal{H}^n(X) + \varepsilon$. Для каждой точки $y \in \mathbb{R}^k$ имеем

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{n-k}(f^{-1}(y)) \le \sum_{i: y \in f(X_i)} (\operatorname{diam} X_i)^{n-k} = \sum_i (\operatorname{diam} X_i)^{n-k} \chi_{f(X_i)}(y).$$

Отсюда

$$\int_{\mathbb{R}^k}^{*} \mathcal{H}_{\varepsilon}^{n-k}(f^{-1}(y))\,dy \le \sum_i (\operatorname{diam} X_i)^{n-k}\mathcal{H}^k(f(X_i)) \le$$
$$\le C\sum_i (\operatorname{diam} X_i)^{n-k}(\operatorname{diam} f(X_i))^k \le CL^k \sum_i (\operatorname{diam} X_i)^n \le CL^k(\mathcal{H}^n(X)+\varepsilon).$$

Устремляя ε к нулю и пользуясь теоремой Леви для верхнего интеграла, получаем требуемое.

Следствие. *Если* $\mathcal{H}^n(A) = 0$*, то правая часть формулы коплощади тоже равна 0.*

Лемма. *Для почти всех* $y \in \mathbb{R}^k$ *множество* $A \cap f^{-1}(y)$ *измеримо относительно* $\mathcal{H}^{n-k}$. *Функция* $y \mapsto \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y))$ *измерима.*

Доказательство. В случае, если *A* имеет меру ноль, утверждение вытекает из предыдущего следствия. Отсюда следует, что добавление множества меры ноль не влияет на истинность утверждения леммы. Выкинув множество меры 0, сведем утверждение к случаю, когда *A* — счетное объединение вложенных компактов. Поскольку предел измеримых функций измерим, достаточно доказать утверждение для одного компакта.

Предположим, что *A* компактно. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}^k$ множество $f^{-1}(y)$ замкнуто и, следовательно, измеримо. Проверим измеримость функции $y \mapsto \mathcal{H}^{n-k}(f^{-1}(y))$. Достаточно доказать, что для любого $t \in \mathbb{R}$ множество $A_t = \{y \in \mathbb{R}^k : \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y)) \le t\}$ измеримо. Заметим, что $A_t = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_{t,i}$, где

$$A_{t,i} = \{y \in \mathbb{R}^k : \mathcal{H}_{1/i}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y)) < t + 1/i\}.$$

Докажем, что каждое множество $A_{t,i}$ открыто. Точка $y \in \mathbb{R}^k$ принадлежит ему тогда и только тогда, когда есть покрытие множества $A \cap f^{-1}(y)$ мелкости меньше $1/i$ и k-мерным весом меньше $t + 1/i$. В силу компактности, такое покрытие можно выбрать конечным и открытым. Тогда оно покрывает и множества $A \cap f^{-1}(y')$ для всех y', достаточно близких к y.

Таким образом, A_t есть пересечение счетного набора открытых множеств. Следовательно, оно измеримо.

Левая и правая часть формулы коплощади счетно аддитивны по *A*. По теореме о приближении, *A* можно разбить на счетное число частей, одна из которых имеет меру 0, а на каждой из остальных *f* совпадает с сужением некоторой C^1 функции. Для множества меры 0 формула доказана, поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда $f|_A$ — сужение C^1 функции. Можно считать, что $f \in C^1$.

Разобъем A на две части: множество точек, где $rk(df) = k$, и множество точек, где $rk(df) < k$.
В силу аддитивности, достаточно доказать теорему для каждого из множеств.
Сначала рассмотрим случай, когда df имеет ранг k всюду на A. В этом случае в окрестности любой точки $x \in A$ отображение f можно представить в виде $f = L \circ \phi$, где $L = d_x f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ - линейное отображение, $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм этой окрестности на окрестность начала координат, причем $d_x \phi$ — тождественно. Для L формула коплощади следует из теоремы Фубини. Вблизи x отображение ϕ билипшицево с константой, близкой к 1, поэтому оно мало искажает якобианы и меры Хаусдорфа.
Осталось доказать формулу в случае, когда ранг df всюду меньше k, то есть $J_k f = 0$ всюду на A. В этом случае надо доказать, что

$$\int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y))\, dy = 0.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и определлим $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ формулой $g(x, z) = f(x) + \varepsilon z$. Легко видеть, что dg всюду имеет ранг k и $J_k g(x, z) \leq \varepsilon(C + \varepsilon)^{k-1}$, где C — константа Липшица для f. Пусть $Q = A \times B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Применяя уже разобранный случай, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^n(Q \cap g^{-1}(y))\, dy = \int_Q J_k g \leq C(n)C(f)\varepsilon.$$

Определим $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ формулой $p(x, z) = z$ и применим лемму к множеству $Q \cap g^{-1}(y)$ и отображению p. Получаем

$$\mathcal{H}^n(Q \cap g^{-1}(y)) \geq c \int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}(Q \cap g^{-1}(y) \cap p^{-1}(w))\, dw = c \int_{B(0,1)\subset\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y - \varepsilon w))\, dw.$$

Интегрируя по y и переставляя интегралы по y и по w, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^n(Q \cap g^{-1}(y)) \geq c \int_{B(0,1)} dw \int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y - \varepsilon w))\, dy.$$

Внутренний интеграл не зависит от w, поэтому это выражение равно

$$= c\alpha(n) \int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y))\, dy.$$

Итак,

$$\int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}(A \cap f^{-1}(y))\, dy \leq C(n) \int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^n(Q \cap g^{-1}(y)) \leq C(n, f)\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем, что левая часть равна 0, что и требовалось.

12.Точки Лебега

Замечание. Если *f* суммируема, то функцию $\tilde{f}$ из теоремы Лузина можно выбрать так, что

$\int |f - \tilde{f}|\, d\mu < \varepsilon.$

Доказательство. Найдется такое *M* > 0, что

$\int (f - M)_+ < \varepsilon/4$ и $\int (f_- - M) < \varepsilon/4.$ Обрежем функцию значениями *M* сверху и — *M* снизу и применим теорему Лузина с *ε/2M* вместо *ε.*

Теорема. *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— локально μ-суммируемая функция, где μ — локально конечная борелевски регулярная внешняя мера. Тогда почти любая точка* $x \in \mathbb{R}^n$ *является точкой Лебега, то есть*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r))} |f - f(x)|\, d\mu = 0.$$

в частности,

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r))} f\, d\mu.$$

Доказательство. Можно считать, что *f* суммируема. Предположим противное. Для *δ* > 0 обозначим

$$A_\delta = \{x : \overline{\lim_{r \to 0}} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r))} |f - f(x)|\, d\mu > \delta\}.$$

Тогда для некоторого δ_0 имеем $\mu(A_{\delta_0}) = m_0 > 0.$ Воспользовавшись дополнением к теореме Лузина, представим *f* в виде *f* = *g* + *h,* где *g* непрерывна, *h* = 0 всюду кроме множества меры $m_0/2$ и

$\int |h| < \delta_0 m_0/2.$ Обозначим $A = A_{\delta_0} \cap \{x : h(x) = 0\}.$ Для каждого $x \in A$ имеем

$$\overline{\lim_{r \to 0}} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r))} |h|\, d\mu > \delta_0.$$

По теореме Безиковича существует дизъюнктный набор шаров $B_i = B(x_i, r_i),$ покрывающий почти все *A*, таких, что

$$\int_{B_i} |h|\, d\mu > \delta_0 \mu(B_i)$$

для всех *i*. Тогда

$$\int_{\bigcup B_i} |h|\, d\mu > \delta_0 \mu(A) \geq \delta_0 m_0/2,$$

противоречие с выбором *h*.

9. Интеграл Лебега-Стилтьеса

Понятие интеграла Римана, известное из элементарного курса анализа, применимо лишь к таким функциям, которые или непрерывны или имеют "не слишком много" точек разрыва. Для измеримых функций, которые могут быть разрывны всюду, где они определены (или же вообще могут быть заданы на абстрактном множестве, так что для них понятие непрерывности просто не имеет смысла), римановская конструкция интеграла становится непригодной. Вместе с тем для таких функций имеются аналоги в теориях мер и измерений: это интегралы Лебега и Стилтьеса. Интеграл Стилтьеса охватывает более широкий класс функций, мы остановимся на рассмотрении этого интеграла.

Этот выбор темы обусловлен тем, что изучению интеграла Стилтьеса уделяется меньше внимания, чем интегралам Римана и Лебега, хотя именно идея стилтьесовского интегрирования богаче и плодотворней предыдущих, определение интеграла Стилтьеса шире классического и в некотором отношении удобнее его.

9.1. Развитие понятия интеграла

9.1.1 Проблема моментов

Введение понятия интеграла Стилтьеса и последующая его разработка связаны с проблемой моментов, состоящей в следующем. Пусть задана последовательность чисел $c_0, c_1, ..., c_k, ...$; требуется найти такую функцию распределения $\varphi(x)$, чтобы члены заданной последовательности были моментами, т.е. $c_k = \int_a^b x^k d\varphi(x)$. Если a и b конечны, то поставленная задача называется проблемой моментов в конечном интервале; если $a = 0, b = +\infty$, то получаем проблему моментов Стилтьеса.

Проблема моментов первоначально ставилась в менее общей форме. А именно: по заданной последовательности чисел $\{c_k\}$ ищется такая функция $f(x)$, чтобы имели место равенства $c_k = \int_a^b x^k f(x)dx$. Целесообразность привлечения интеграла Стилтьеса для постановки и решения проблемы моментов напрашивается довольно естественно. С таким положением вещей и столкнулся Стилтьес при изучении непрерывных дробей, и именно в результате этих исследований он предложил своё обобщение интеграла.

Ранние исследования Стилтьеса изложены в его статье о механических квадратурах, в которой выясняется, позволяют ли формулы квадратур получать неограниченное приближение интеграла в смысле Римана. Во вводной части статьи Стилтьес решает задачу об определении многочлена

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

Условиями

$$\int_a^b f(x)dxP(x)x^k dx = 0 \quad (k = 0,1,2,\ldots,n-1) \qquad (1)$$

при неотрицательной $f(x)$ на (a,b).

Мы коснемся двух моментов из содержания его статьи.

Первый относится к задаче о степени приближения, даваемого квадратурной формулой Гаусса:

$$\int_{-1}^{1} F(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F(t_k) \quad (-1 \le t_k \le 1)$$

Здесь Стилтьес пользуется доказанными им формулами П.Л. Чебышева в виде

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k > \int_a^{x_k} f(x)dx,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k < \int_a^{x_{k+1}} f(x)dx,\ k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где

$$A_i = \frac{\varphi(x_i)}{\psi'(x_i)}. \qquad (2)$$

Он показывает, что если в квадратурной формуле Гаусса в качестве α_k брать числа A_i, получаемые по формуле (2) из цепной дроби, соответствующей интегралу $\int_a^b \frac{dx}{z-x}$, а t_k будут корнями знаменателей подходящих дробей, то формула Гаусса даст сколь угодно точное приближение при возрастании n. Для этой цепной дроби числа A_i, очевидно, удовлетворяют неравенствам

$$-1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_k > x_k,$$

$$-1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_k < x_{k+1}. \qquad (3)$$

так как в этом случае $f(x)=1$.

Вторым моментом является следующий. Отметив, что его результаты полезны при изучении вопроса о квадратуре интеграла $\int_a^b f(x)dx$, Стилтьес ставит вопрос о квадратурных формулах для интеграла вида

$$\int_a^b f(x)F(x)dx. \quad (4)$$

Он ограничивается тем частным случаем, когда $F(x)$ - произвольная интегрируемая по Риману функция, а $f(x)$ такова, что внутри (a,b) не существует интервала (α,β), в котором $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, и показывает, что в этом случае аппроксимация возможна со сколь угодно большой степенью точности. Доказательство этого факта опирается на то, что функция

$$y=\int_a^x f(x)dx \quad (5)$$

является непрерывной и строго монотонной, а потому существует обратная функция $x=\psi(y)$, и в интеграле (4) возможна замена переменных

$$\int_a^b f(x)F(x)dx=\int_0^c F[\psi(y)]dy,$$

сводящих интеграл (4) к уже изученному Стилтьесом случаю.

По поводу же общего случая Стилтьес указал, что "условия, налагаемые на функции $f(x), F(x)$, делаются источником трудностей, которых удастся избежать лишь с помощью новых исследований о самих принципах интегрального исчисления". Действительно, если $f(x)$ не удовлетворяет условию отсутствия в (a, b) интервала (α, β), в котором $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, то она может оказаться не монотонной, поэтому обращение $x = \psi(y)$ в том виде, в каком такую замену тогда производили, становится невозможным, и квадратуру интеграла (4) уже нельзя свести к квадратуре интеграла $\int_{a}^{b} F(x)dx$.

Приведенные слова Стилтьеса показывают, что уже в 1884 г. он был в некоторой степени подготовлен к пересмотру понятия интеграла. К мысли о таком пересмотре его приводил прием замены переменных, который играл заметную роль в последующей истории интеграла Стилтьеса.

Стилтьес рассматривал непрерывные дроби вида

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + .. + \cfrac{1}{a_{2n} + \cfrac{1}{a_{2n+1} z + \dots}}}}} \qquad (6)$$

где z - в общем случае комплексное число.

Пусть $\varphi_n(z)/\psi_n(z)$ - подходящая дробь порядка n для непрерывной дроби (6). Тогда существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}\psi_{2n}(z)=p(z), \lim_{n\to\infty}\psi_{2n+1}(z)=p_1(z),$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{2n}(z)=q(z), \lim_{n\to\infty}\varphi_{2n+1}(z)=q_1(z),$$

причем, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi_{2n}(z)}{\varphi_{2n}(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\psi_{2n+1}(z)}{\varphi_{2n+1}(z)}=F(z);$$

если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi_{2n}(z)}{\varphi_{2n}(z)}=F_1(z), \lim_{n\to\infty}\frac{\psi_{2n+1}(z)}{\varphi_{2n+1}(z)}=F_2(z);$$

и функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ различны.

К этому времени математикам, занимавшимся непрерывными дробями, была известна связь между интегралом

$$F(z)=\int_a^b\frac{f(x)}{z-x}dx \quad (7)$$

и непрерывной дробью

$$F(z)=\cfrac{c_0}{q_1-\cfrac{c_1}{q_2-\cfrac{c_2}{q_3-\cdots}}}, \quad (8)$$

где q_i - суть линейные функции z, а числа c_i связаны с коэффициентами разложения (7) в ряд по убывающим степеням z:

$$F(z)=\frac{c_0}{z}+\frac{c_1}{z^2}+\ldots+\frac{c_n}{z^{n+1}}+\ldots$$

Формулами

$$c_k=\int_a^b x^k f(x)dx.$$

Этой-то связью и руководствовался Стилтьес в своих исследованиях. Ход его мысли был следующим. Для подходящих дробей дроби (6) справедливы следующие свойства: корни $\psi_n(z)$ и $\varphi_n(z)$ действительны и различны, степень $\psi_n(z)$ меньше степени $\varphi_n(z)$. Для n-й подходящей дроби справедливо равенство

$$\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}=\frac{a_1}{z+x_1}+\frac{a_2}{z+x_2}+\ldots+\frac{a_n}{z+x_n}$$

или, в другой форме,

$$\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\psi_n(-x_i)/\varphi_n(-x_i)}{z+x_i}.$$

В частности,

Как уже говорилось $\psi_{2n}(z)\to p(z), \psi_{2n}(z)\to q(z)$ при $n\to\infty$, а потому, если обозначить через λ_k нули $q(-z)$, то $x_k\to\lambda_k$ и $M_k\to\mu_k=p(-\lambda_k)/q'(-\lambda_k)$ при $n\to\infty$. Аналогично, если θ_k - нули функции $q_1(-z)$, то $x_k\to\theta_k$ и

$N_k \to \nu_k = p_1(-\theta_k)/q_1'(-\theta_k)$ для случая нечетных n. В случае расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ очевидно, что $\lambda_k = \theta_k$, $\mu_k = \nu_k$.

Пусть дробь вида (6) задана разложением в ряд по убывающим степеням z :

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots + (-1)^n \frac{c_n}{z^{n+1}} + \ldots \qquad (9)$$

Тогда оказывается, что ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \lambda_k^i,\ \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \theta_k^i$$

сходятся и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \lambda_k^i = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \theta_k^i = c_i,\ \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k = c_0. \qquad (10)$$

Эти формулы позволяют по цепной дроби (6) найти её разложение в ряд (9). Обратная же задача - по разложению (9) найти дробь (6) - неизбежно приводит к решению более или менее общей проблемы моментов.

В самом деле, Стилтьесу была известна чебышевско-марковская интерпретация $\psi_n(x_i)/\varphi_n'(x_i)$, как массы, сосредоточенной в точке x_i, являющейся корнем $\varphi_n(x) = 0$. Естественно было распространить эту интерпретацию и на предельный случай, рассматривая μ_k как массы, расположенные в нулях функции $q(-z)$ (или $q_1(-z)$). После введения формул (10) Стилтьес пишет: "Рассмотрим на бесконечной прямой Ox распределение массы (положительной), при котором на расстоянии ξ_i от начала сосредоточена масса m_i.

Сумма

$$\sum m_i \xi_i^k$$

может быть названа моментом порядка k масс относительно начала. В таком случае из предшествующих формул следует, что момент порядка k системы масс

$$(\mu_i, \lambda_i)\ (i = 1,2,3,\ldots)$$

имеет значение $c_k\,(k = 0,1,2,\ldots)$.

Равным образом система масс $(\nu_i, \theta_i)(i = 0,1,2,\ldots)$, где $\theta_0 = 0$, будем иметь те же моменты c_k.

Мы назовем проблемой моментов следующую задачу:

Найти распределение положительной массы на прямой $(0, \infty)$, если даны моменты порядка $k(k = 0,1,2,\ldots)$.

Действительно, формулы (10) приводят к постановке проблемы моментов, если принято истолкование μ_k и ν_k как масс, а λ_k, θ_k как соответствующих расстояний этих масс от начала координат.

Цепные дроби рассматривающегося П.Л. Чебышевым и А.А. Марковым типа получились из разложения интеграла (7) и все корни знаменателей их подходящих дробей были заключены в промежутке (a, b). Стилтьес же не связывал рассматриваемые им дроби с заранее данным аналитическим выражением в виде интеграла, и корни $q(-z)$, $q_1(-z)$ оказывались в общем случае распределенными по всей положительной части числовой оси. Поэтому закономерным был выход в проблеме моментов за пределы конечного интервала и рассмотрение её на интервале $(0,\infty)$. Далее, поскольку c_i рассматриваются как моменты массы относительно начала координат, то прежнее определение момента через интеграл Римана $\int_a^b x^n f(x)dx$ становилось недостаточным, существенно ограничивая класс последовательностей чисел c_i; даже для таких распределений массы, как концентрация её в отдельных точках, приходилось принимать довольно неожиданные предположения относительно функции плотности $f(x)$, как это было у русских ученых. Между тем, как показал Стилтьес, на последовательность чисел c_i достаточно было наложить довольно слабые ограничения, чтобы ряд (9) можно было обратить в цепную дробь (6), а тем самым найти функции $q(z), q_1(z), p(z), p_1(z)$. Зная же эти функции, мы тем самым знаем решение системы уравнений (10), т.е. решение проблемы моментов. Если при этом $q(z)$ и $q_1(z)$, $p(z)$ и $p_1(z)$ попарно совпадут, то получится определенное решение: если же они попарно различны, то решений по крайней мере два: системы (μ_k, λ_k) и (ν_k, θ_k). Следовательно, общность цепных дробей вида (6) достаточно широка, чтобы сделать вывод о разрешимости проблемы моментов для интервала $(0,\infty)$, но для этого требовалось дать иное определение моментов.

Физическое определение момента материальной точки в соединении с обычным для физиков и математиков переходом от момента точки к моменту отрезка приводило к новому определению интеграла, тесно связанному с функциями распределения.

Таким образом, именно для того, чтобы описать в форме некоторого аналитического выражения физическое понятие момента, Стилтьес ввел новое понятие интеграла, причем последнее, как это обычно и случается в математике, оказалось имеющим более общий характер, чем исходное физическое понятие.

Он рассмотрел интеграл $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$ для случая произвольной непрерывной $f(x)$ и произвольной возрастающей $\varphi(x)$. В этих предположениях он высказал без доказательства теорему существования интеграла, отметив лишь, что оно может быть осуществлено так же, как и для определенного интеграла Римана. Затем в этих же общих приложениях он доказал одну из важнейших формул теории нового интеграла, а именно формулу интегрирования по частям. И теорему существования, и формулу интегрирования по частям мы рассмотрим в последующих главах.

9.2. Интеграл Стилтьеса

9.2.1 Определение интеграла Стилтьеса

Пусть

в промежутке $[a,b]$ заданы две ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$. Разложим точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \quad (1)$$

промежуток $[a,b]$ на части и положим $\lambda = \max \Delta x_i$. Выбрав в каждой из частей $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0,1,2,\ldots,n-1)$ по точке ξ_i, вычислим значение $f(\xi_i)$ функции $f(x)$ и умножим его на соответствующее промежутку $[x_i, x_{i+1}]$ приращение функции $g(x)$

$$\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i).$$

Наконец, составим сумму всех таких произведений:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i). \quad (2)$$

Эта сумма носит название интегральной суммы Стилтьеса.

Конечный предел суммы Стилтьеса σ при стремлении $\lambda = \max \Delta x_i$ к нулю называется интегралом Стилтьеса функции $f(x)$ по функции $g(x)$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i). \quad (3)$$

Иной раз, желая особенно отчетливо подчеркнуть, что интеграл рассматривается в смысле Стилтьеса, употребляют обозначение

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)$$

Предел здесь понимается в том же смысле, что и в случае обыкновенного определенного интеграла. Точнее говоря, число I называется интегралом Стилтьеса, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что лишь только промежуток $[a,b]$ раздроблен на части так, что $\lambda < \delta$, тотчас же выполняется неравенство

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

как бы не выбирать точки ξ_i в соответствующих промежутках.

При существовании интеграла (3) говорят также, что функция $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ интегрируема по функции $g(x)$.

Читатель видит, что единственное (но существенное) отличие данного выше определения от обычного определения интеграла Римана состоит в том, что $f(\xi_i)$ умножается не на приращение Δx_i независимой переменной, а на приращение $\Delta g(x_i)$ второй функции. Таким образом, интеграл Римана есть частный случай интеграла Стилтьеса, а когда в качестве функции $g(x)$ взята сама независимая переменная x:

$g(x)=x$.

9.2.2 Общие условия существования интеграла Стилтьеса

Установим общие условия существования интеграла Стилтьеса, ограничиваясь, впрочем, предположением, что функция $g(x)$ монотонно возрастает.

Отсюда следует, что при $a<b$ теперь все $\Delta g(x_i)>0$.

Аналогично суммам Дарбу, и здесь целесообразно внести суммы

$$s=\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta g(x_i), \quad S=\sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta g(x_i),$$

где m_i и M_i означают, соответственно, нижнюю и верхнюю точные границы функции $f(x)$ в i-м промежутке $[x_i, x_{i+1}]$. Эти суммы мы будем называть нижней и верхней суммами Дарбу-Стилтьеса.

Прежде всего, ясно, что (при одном и том же разбиении)

$$s \le \sigma \le S,$$

причем s и S служат точными границами для стилтьесовских сумм σ.

Сами суммы Дарбу-Стилтьеса обладают следующими двумя свойствами:

1-е свойство. Если к имеющимся точкам деления добавить новые точки, то нижняя сумма Дарбу-Стилтьеса может от этого разве лишь возрасти, а верхняя сумма - разве лишь уменьшиться.

2-е свойство. Каждая нижняя сумма Дарбу-Стилтьеса не превосходит каждой верхней суммы, хотя бы и отвечающей другому разбиению промежутка.

Если ввести нижний и верхний интегралы Дарбу-Стилтьеса:

$I_* = \sup\{s\}$ и $I^* = \inf\{S\}$,

то, оказывается, что

$$s \le I_* \le I^* \le S.$$

Наконец, с помощью сумм Дарбу-Стилтьеса легко устанавливается для рассматриваемого случая основной признак существования интеграла Стилтьеса:

Теорема: Для существования интеграла Стилтьеса необходимо и достаточно, чтобы было

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$$

Или

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} w_i \Delta g(x_i) = 0$$

,

если под w_i, как обычно, разуметь колебание $M_i - m_i$ функции $f(x)$ в i-м промежутке $[x_i, x_{i+1}]$.

В следующем пункте мы применим этот критерий к установлению важных парных классов функций $f(x)$ и $g(x)$, для которых интеграл Стилтьеса существует.

9.2.3. Классы случаев существования интеграла Стилтьеса

I. Если функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ имеет ограниченное изменение, то интеграл Стилтьеса

$$\int_a^b f(x) dg(x) \qquad (5)$$

существует.

Сначала предположим, что $g(x)$ монотонно возрастает: тогда примени критерий предыдущего пункта. По произвольно заданному $\varepsilon > 0$ ввиду равномерной непрерывности функции $f(x)$ найдется такое $\delta > 0$, что в любом промежутке с длиной, меньшей δ, колебание $f(x)$ будет меньше $\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$. Пусть теперь промежуток $[a,b]$ произвольно разбит на части так, что $\lambda = \max \Delta x_i < \delta$. Тогда все

$$w_i < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$$ и

$$\sum_i w_i \cdot \Delta g(x_i) < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \cdot \sum_i [g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \varepsilon$$,

откуда и следует выполнение условия (4), а стало быть и существование интеграла.

В общем случае, если функция $g(x)$ имеет ограниченное изменение, она представима в виде разности двух ограниченных возрастающих функций: $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$. В соответствии с этим преобразуется и сумма Стилтьеса, отвечающая функции $g(x)$:

$$\sigma = \sum_{i=o}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i) = \sum_{i=o}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g_1(x_i) - \sum_{i=o}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g_2(x_i) = \sigma_1 - \sigma_2$$
.

Так как по уже доказанному каждая из сумм σ_1 и σ_2 при $\lambda \to 0$ стремится к конечному пределу, то это справедливо и относительно суммы σ, что и требовалось доказать.

Можно ослабить условия, налагаемые на функцию $f(x)$, если одновременно усилить требования к функции $g(x)$:

Если функция $f(x)$ интегрируема в $[a,b]$ в смысле Римана, а $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\left|g(\bar{x})-g(x)\right|\leq L(\bar{x}-x)$$

$$(L=const,\ a\leq x<\bar{x}\leq b), \quad (6)$$

то интеграл (5) существует.

Для того чтобы опять иметь возможность применить установленный выше критерий, предположим сначала функцию $g(x)$ не только удовлетворяющей условию (6), но и монотонно возрастающей.

Ввиду (6), очевидно, $\Delta g(x_i)\leq L\Delta x_i$, так что

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_i \Delta g(x_i)\leq L\sum_{i=0}^{n-1} w_i \Delta x_i .$$

Но последняя сумма при $\lambda\to 0$ и сама стремится к 0 вследствие интегрируемости (в смысле Римана) функции $f(x)$, а тогда стремится к нулю и первая сумма, что доказывает существование интеграла (5).

В общем случае функции $g(x)$, удовлетворяющей условию Липшица (6), представим в виде разности

$$g(x)=Lx-[Lx-g(x)]=g_1(x)-g_2(x).$$

Функция $g_1(x)=Lx$, очевидно, удовлетворяет условию Липшица и в то же время монотонно возрастает. То же справедливо и для функции $g_2(x)=Lx-g(x)$, так как, в силу (6), при $a\leq x<\bar{x}\leq b$

$$g_2(\bar{x}) - g_2(x) = L(\bar{x} - x) - [g(\bar{x}) - g(x)] \geq 0$$

и

$$|g_2(\bar{x}) - g_2(x)| \leq L(\bar{x} - x) + |g(\bar{x}) - g(x)| \leq 2L(\bar{x} - x).$$

В таком случае рассуждение завершается, как и выше.

III. Если функция $f(x)$ интегрируема в смысле Римана, а функция $g(x)$ представима в виде интеграла с переменным верхним пределом:

$$g(x) = c + \int_a^{\bar{x}} \varphi(t)dt, \qquad (7)$$

где $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема, в промежутке $[a, b]$, то интеграл (5) существует.

Пусть $\varphi(t) \geq 0$, так что $g(x)$ монотонно возрастает. Если $\varphi(t)$ интегрируема в собственном смысле и, следовательно, ограничена: $|\varphi(t)| \leq L$, то для $a \leq x < \bar{x} \leq b$

Имеем

$$|g(\bar{x}) - g(x)| = \left| \int_x^{\bar{x}} \varphi(t)dt \right| \leq L(\bar{x} - x).$$

Таким образом, в этом случае $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица, и интеграл существует в силу 2.

Предположим теперь, что $\varphi(t)$ интегрируема в несобственном смысле. Ограничимся случаем одной особой точки, скажем b. Прежде всего, по произвольно взятому $\varepsilon > 0$ выберем $\eta > 0$ так, чтобы было

$$\int_{b-\eta}^{b} \varphi(t)dt < \frac{\varepsilon}{2Q}, \quad (8)$$

где Q - общее колебание функции $f(x)$ в рассматриваемом промежутке.

Разобьем промежуток $[a, b]$ по произволу на части и составим сумму

$$\sum = \sum_{i=0}^{n-1} w_i \Delta g(x_i).$$

Она разлагается на две суммы $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$, из коих первая отвечает промежуткам, целиком содержащимся в промежутке $\left[a, b - \frac{\eta}{2}\right]$, а вторая - остальным промежуткам. Последние наверное содержаться в промежутке $[b - \eta, b]$, если только $\lambda = \max \Delta x_i < \frac{\eta}{2}$; тогда, в силу (8),

$$\Sigma'' < Q \int_{b-\eta}^{b} \varphi(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, так как в промежутке $\left[a, b - \frac{\eta}{2}\right]$ функция $\varphi(t)$ интегрируема в собственном смысле, то по доказанному при достаточно малом λ и сумма Σ' станет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует (4), что и требовалось доказать.

В общем случае, когда функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема в промежутке $[a,b]$, мы рассмотрим функции

$$\varphi_1(t)=\frac{|\varphi(t)|+\varphi(t)}{2},\ \varphi_2(t)=\frac{|\varphi(t)|-\varphi(t)}{2},$$

очевидно, неотрицательные и интегрируемые в названном промежутке. Так как

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)-\varphi_2(t),$$

то вопрос сводится, как и выше, к уже рассмотренному случаю.

Замечание. Пусть функция $g(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b]$ и имеет, исключая разве лишь конечное число точек, производную $g'(x)$, причем эта производная интегрируема (в собственном или несобственном смысле) от a до b; тогда, как известно, имеет место формула типа (7):

$$g(x)=g(a)+\int_a^x g'(t)dt\ .$$

Если $g'(x)$ абсолютно интегрируема, то к функции $g(x)$ полностью приложимо изложенное в 3.

9.2.4. Свойства интеграла Стилтьеса

Из определения интеграла Стилтьеса непосредственно вытекают следующие его свойства:

1°. $\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a)$;

2°. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dg(x) = \int_a^b f_1(x) dg(x) \pm \int_a^b f_2(x) dg(x)$;

3°. $\int_a^b f(x) d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int_a^b f(x) dg_1(x) \pm \int_a^b f(x) dg_2(x)$;

4°. $\int_a^b kf(x) d[lg(x)] = kl \int_a^b f(x) dg(x)$, $(k, l = const)$.

При этом в случаях $2°, 3°, 4°$ из существования интегралов в правой части вытекает существование интеграла в левой части.

Затем имеем

5°. $\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x)$,

в предположении, что $a < c < b$ и существуют все три интеграла.

Для доказательства этой формулы достаточно лишь озаботиться включением точки c в число точек деления промежутка $[a,b]$ при составлении суммы Стилтьеса для интеграла $\int_a^b fdg$.

По поводу этой формулы сделаем ряд замечаний. Прежде всего, из существования интеграла $\int_a^b fdg$ следует уже существование обоих интегралов

$\int_a^c fdg$ и $\int_c^b fdg$.

Для своеобразного предельного процесса, с помощью которого из стилтьесовской суммы получается интеграл Стилтьеса, имеет место принцип сходимости Больцано-Коши. Таким образом, по заданному $\varepsilon > 0$ ввиду существования интеграла $\int_a^b fdg$ найдется такое $\delta > 0$, что любые две суммы σ и $\overline{\sigma}$ Стилтьеса, которым отвечают λ и $\overline{\lambda} < \delta$, разнятся меньше чем на ε. Если при этом в состав точек деления включить точку c, а точки деления, приходящиеся на промежуток $[c,b]$, брать в обоих случаях одними и теми же, то разность $\sigma - \overline{\sigma}$ сведется к разности $\sigma_1 - \overline{\sigma}_1$ двух сумм Стилтьеса, относящихся уже к промежутку $[a,c]$, ибо прочие слагаемые взаимно уничтожатся. Применяя к промежутку $[a,c]$ и вычисленным для него стилтьесовским суммам тот же принцип сходимости, заключим о существовании интеграла $\int\limits_b^c fdg$. Аналогично устанавливается и существование интеграла $\int\limits_c^b fdg$.

Особенно заслуживает быть отмеченным тот не имеющий прецедентов факт, что из существования обоих интегралов $\int\limits_a^c fdg$ и $\int\limits_c^b fdg$, вообще говоря, не вытекает существование интеграла $\int\limits_a^b fdg$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть пример. Пусть в промежутке $[-1,1]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы следующими равенствами:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при -1\le x\le 0\\ 1 & при\ \ 0<x\le 1\end{cases};\quad n(x)=\begin{cases}0 & при -1\le x<0,\\ 1 & при\ \ 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Легко видеть, что интегралы

$$\int\limits_{-1}^{0} f(x)dg(x),\ \int\limits_{0}^{1} f(x)dg(x)$$

оба существуют и равны 0, ибо соответствующие им суммы Стилтьеса все равны 0: для первого это следует из того, что всегда $f(x)=0$, для второго - из постоянства функции $g(x)$, благодаря чему всегда $\Delta g(x_i)=0$.

В то же время интеграл

$$\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$$

не существует. Действительно, разобьем промежуток $[-1,1]$ на части так, чтобы точка 0 не попала в состав точек деления, и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i).$$

Если точка 0 попадет в промежуток $[x_k, x_{k+1}]$, так что $x_k < 0 < x_{k+1}$, то в сумме σ останется только одно k-е слагаемое; остальные будут нули, потому что

$\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i) = 0$ для $i \neq k$.

Итак,

$$\sigma = f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = f(\xi_k).$$

В зависимости от того, будет ли $\xi_k \leq 0$ или $\xi_k > 0$, окажется $\sigma = 0$ или $\sigma = 1$, так что σ предела не имеет.

Указанное своеобразное обстоятельство связано с наличием разрывов в точке $x = 0$ для обеих функций $f(x)$ и $g(x)$.

9.2.5. Интегрирование по частям

Для интегралов Стилтьеса имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x), \qquad (9)$$

в предположении, что существует один из этих интегралов; существование другого отсюда уже вытекает. Формула эта носит название формулы интегрирования по частям. Докажем её.

Пусть существует интеграл $\int_a^b gdf$. Разложив промежуток $[a,b]$ на части $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0,1,2\ldots, n-1)$, выберем в этих частях произвольно по точке ξ_i, так что

$$a = x_0 \le \xi_0 \le x_1 \le \ldots \le x_{i-1} \le \xi_{i-1} \le x_{i+1} \le \ldots \le x_{n-1} \le \xi_{n-1} \le x_n = b.$$

Сумму Стилтьеса для интеграла $\int_a^b fdg$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)]$$

можно представить в виде

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i-1})g(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(x_i) = -\left\{g(a)f(\xi_0) + \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] - g(b)f(\xi_{n-1})\right\}.$$

Если прибавить и опять отнять справа выражение

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

то σ перепишется так:

$$\sigma = f(x)g(x)\Big|_a^b - \left\{g(a)[f(\xi_0) - f(a)] + \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] + g(b)[f(b) - f(\xi_{n-1})]\right\}.$$

Выражение в фигурных скобках представляет собою стилтьесову сумму для интеграла $\int_a^b g df$ (существование которого предположено!). Она отвечает разбиению промежутка $[a, b]$ точками деления

$$a \le \xi_0 \le \xi_1 \le \ldots \le \xi_{i-1} \le \xi_i \le \ldots \le \xi_{n-1} \le b,$$

если в качестве выбранных из промежутков $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ точек взять x_i, а для промежутков $[a, \xi_0]$ и $[\xi_{n-1}, b]$, соответственно, a и b. Если, как обычно, положить $\lambda = \max(x_{i+1} - x_i)$, то теперь длины всех частичных промежутков не превзойдут 2λ. При $\lambda \to 0$ сумма в квадратных скобках стремится к $\int_a^b g df$, следовательно, существует предел и для σ, т.е. интеграл $\int_a^b f dg$, и этот интеграл определяется формулой (9).

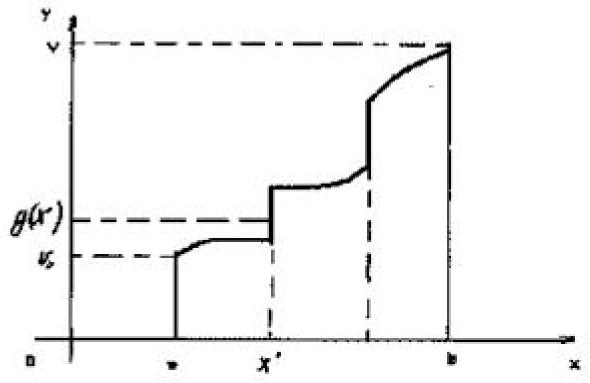
Как следствие нашего рассуждения, особо отметим тот любопытный факт, что если функция $g(x)$ в промежутке $[a, b]$ интегрируема по функции $f(x)$, то и функция $f(x)$ интегрируема по функции $g(x)$.

Это замечание позволяет добавить ряд новых случаев существования интеграла Стилтьеса к тем, которые были рассмотрены в п.3, переменив роли функций f и g.

9.2.6 Приведение интеграла Стилтьеса к интегралу Римана

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b]$, а $g(x)$ монотонно возрастает в этом промежутке, и притом в строгом смысле.

Тогда, как показал Лебег, интеграл Стилтьеса $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ с помощью подстановки $v = g(x)$ непосредственно приводится к интегралу Римана.



На рисунке изображен график функции $v = g(x)$. Для тех значений $x = x'$, при которых функция $g(x)$ испытывает скачок (ибо мы вовсе не предполагаем $g(x)$ обязательно непрерывной), мы дополняем график прямолинейным вертикальным отрезком, соединяющим точки $(x', g(x'-0))$ и $(x', g(x'+0))$. Так создается непрерывная линия, которая каждому значению v между $v_0 = g(a)$ и $V = g(b)$ относит одно определенное значение x между a и b. Эта функция $x = g^{-1}(v)$, очевидно, будет непрерывной и монотонно возрастающей в широком смысле; её можно рассматривать как своего рода обратную для функции $v = g(x)$.

Именно, если ограничиться лишь теми значениями v, которые функция $v = g(x)$ действительно принимает при изменении x от a до b, то $x = g^{-1}(v)$ является обратной для неё в обычном смысле, т.е. относит v именно то значение x, при котором $g(x) = v$. Но из промежутка значений v

$$[g(x'-0), g(x'+0)],$$

связанного со скачком функции $g(x)$, лишь одно значение $v = v' = g(x')$ имеет себе соответствующее значение $x = x'$; другим значениям v в упомянутом промежутке никакие значения x, очевидно, не отвечают. Но мы условно относим и им то же значение $x = x'$; геометрически это и выразилось в дополнении графика функции $y = g(x)$ рядом вертикальных отрезков.

Докажем теперь, что

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_{v_0}^{V} f\left(g^{-1}(v)\right)dv, \tag{10}$$

где последний интеграл берется в обычном смысле, его существование обеспечено, так как функция $g^{-1}(v)$, а с нею и сложная функция $f\left(g^{-1}(v)\right)$, непрерывна.

С этой целью разложим промежуток $[a,b]$ на части с помощью точек деления

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

и составим стилтьесову сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)].$$

Если положить $v_i = g(x_i)(i = 0,1,\ldots,n)$, то будем иметь

$$v_0 < v_1 < \ldots < v_i < v_{i+1} < \ldots < v_n = V.$$

Так как $x_i = g^{-1}(v_i)$, то

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(g^{-1}(v_i))\Delta v_i(\Delta v_i = v_{i+1} - v_i).$$

Это выражение имеет вид римановой суммы для интеграла

$$\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))dv.$$

Отсюда, однако, нельзя ещё непосредственно заключить, переходя к оператору, о равенстве (10), ибо даже при $\Delta x_i \to 0(\lambda \to 0)$ может оказаться, что Δv_i к нулю не стремится, если, например, между безгранично сближающимися x_i и x_{i+1} будет заключено значение $x = x'$, где функция $g(x)$ испытывает скачок. Поэтому мы будем рассуждать иначе.

Имеем

$$\int_{v_0}^{V} f\left(g^{-1}(v)\right)dv = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{v_i}^{v_{i+1}} f\left(g^{-1}(v)\right)dv$$

и

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{v_i}^{v_{i+1}} f(x_i)dv,$$

так что

$$\sigma - \int_{v_0}^{V} f\left(g^{-1}(v)\right)dv = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{v_i}^{v_{i+1}} \left[f(x_i) - f\left(g^{-1}(v)\right)\right]dv.$$

Предположим теперь Δx_i настолько малыми, чтобы колебания функции $f(x)$ во всех промежутках $[x_i, x_{i+1}]$ были меньше произвольного наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Так как

при $v_i \le v \le v_{i+1}$, очевидно, $x_i \le g^{-1}(v) \le v_{i+1}$,

то одновременно и

$$\left|f(x_i) - f\left(g^{-1}(v)\right)\right| < \varepsilon.$$

В таком случае

$$\left|\sigma - \int_{v_0}^{V} f\left(g^{-1}(v)\right)dv\right| < \varepsilon(V - v_0)$$

.

Этим доказано, что

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_{v_0}^{V} f\left(g^{-1}(v)\right) dv,$$

откуда и следует (10).

Несмотря на принципиальную важность полученного результата, он не дает практически удобного средства для вычисления интеграла Стилтьеса. Как осуществлять вычисление в некоторых простейших случаях, мы покажем в следующем пункте.

9.2.7 Вычисление интегралов Стилтьеса

Докажем следующую теорему:

Если функция $f(x)$ интегрируема в смысле Римана в промежутке $[a,b]$, а $g(x)$ представлена интегралом

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt,$$

где функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема в $[a,b]$, то

$$(S)\int_a^b f(x) dg(x) = (R)\int_a^b f(x)\varphi(x) dx. \qquad (11)$$

Интеграл справа существует. Существование интеграла Стилтьеса при сделанных предположениях уже было доказано (п.3,3).

Остается лишь установить равенство (11).

Без умаления общности можно предположить функцию $\varphi(x)$ положительной.

Составим, как обычно, сумму Стилтьеса

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1})-g(x_i)]=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i)\varphi(x)dx.$$

Так как, с другой стороны, можно написать

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi(x)dx,$$

то будем иметь

$$\sigma-\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(\xi_i)-f(x)\varphi(x)dx].$$

Очевидно, для $x_i \le x \le x_{i+1}$ будет $|f(\xi_i)-f(x)|\le w_i$, где w_i означает колебание функции $f(x)$ в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$. Отсюда вытекает такая оценка написанной выше разности:

$$\left|\sigma-\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right|\le\sum_{i=0}^{n-1} w_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1} w_i\Delta g(x_i).$$

Но мы уже знаем (п.3,3), что при $\lambda\to 0$ последняя сумма стремится к 0, следовательно,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx,$$

что и доказывает формулу (11).

В частности, из доказанной теоремы вытекает (если учесть замечание в п.3) такое следствие, удобное для непосредственного применения на практике:

2. При прежних предположениях относительно функции $f(x)$ допустим, что функция $g(x)$ непрерывна во всем промежутке $[a,b]$ и имеет в нем, исключая разве лишь конечное число точек, производную $g'(x)$, которая в $[a,b]$ абсолютно интегрируема. Тогда

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx. \tag{12}$$

Интересно отметить, что интеграл справа в формуле (12) формально получается из интеграла слева, если, понимая символ $dg(x)$ буквально как дифференциал, заменит его выражением $g'(x)dx$.

Обращаясь к случаям, когда функция $g(x)$ оказывается разрывной (что для практики, как увидим, представляет особый интерес), начнем с рассмотрения "стандартной" разрывной функции $\rho(x)$, определяемой равенствами

$$\rho(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ 1 & при\ x>0.\end{cases}$$

Она имеет разрыв первого рода - скачок - в точке $x=0$ справа, причем величина скачка $\rho(+0)-\rho(0)$ равна 1; в точке $x=0$ слева и в остальных точках функция $\rho(x)$ непрерывна. Функция $\rho(x-c)$ будет иметь такой же разрыв в точке $x=c$ справа; наоборот,

$\rho(c-x)$ будет иметь подобный разрыв в точке $x=c$ слева, причем величина скачка будет равна - 1.

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=c$, и вычислим интеграл $(S)\int_a^b f(x)d\rho(x-c)$, где $a \le c < b$ (при $c=b$ этот интеграл равен нулю).

Составим сумму Стилтьеса:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta\rho(x_i - c).$$

Пусть точка c попадет, скажем, в k-й промежуток, так что $x_k \le c < x_{k+1}$. Тогда $\Delta\rho(x_k - c) = 1$, а при $i \ne k$, очевидно, $\Delta\rho(x_i - c) = 0$. Таким образом, вся сумма σ сводится к одному слагаемому: $\sigma = f(\xi_k)$ Пусть теперь $\lambda \to 0$. По непрерывности $f(\xi_k) \to f(c)$. Следовательно, существует (при $a \le c < b$)

$$(S)\int_a^b f(x)d\rho(x-c) = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = f(c). \qquad (13)$$

Аналогично можно убедиться в том, что (при $a < c \le b$)

$$(S)\int_a^b f(x)d\rho(c-x) = -f(c). \qquad (14)$$

(при $c=a$ этот интеграл обращается в нуль).

Теперь мы в состоянии доказать теорему, в некотором смысле более общую, чем 2, а

именно, отказаться от требования непрерывности функции:

Пусть функция $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ непрерывна, а $g(x)$ имеет в этом промежутке, исключая разве лишь конечное число точек, производную $g'(x)$, которая абсолютно интегрируема в $[a,b]$. При этом пусть функция $g(x)$ в конечном числе точек

$$a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k < \ldots < c_m = b$$

терпит разрыв первого рода. Тогда существует интеграл Стилтьеса и выражается формулой

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx + f(a)[g(a+0)-g(a)] + \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)[g(c_k+0$$

$$+ f(b)[g(b)-g(b-0)]. \quad (15)$$

Характерно здесь наличие внеинтегральной суммы, где фигурируют скачки функции $g(x)$ в точках a или b - односторонние.

Для упрощения записи введем обозначения для скачков функции $g(x)$ справа и слева:

$$\alpha_k^+ = g(c_k+0) - g(c_k)(k = 0,1,\ldots,m-1),$$

$$\alpha_k^- = g(c_k) - g(c_k-0)(k = 1,2,\ldots,m);$$

очевидно, для

$1 \le k \le m-1$, $\alpha_k^+ + \alpha_k^- = g(c_k+0) - g(c_k-0)$.

Составим вспомогательную функцию:

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \rho(x-c_k) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^- \rho(c_k - x),$$

которая как бы вбирает в себя все разрывы функции $g(x)$, так что разность $g_2(x) = g(x) - g_1(x)$, как мы сейчас установим, оказывается уже непрерывной.

Для значений x, отличных от всех c_k, непрерывность функции $g_2(x)$ не вызывает сомнений, ибо для этих значений непрерывны обе функции $g(x)$ и $g_1(x)$. Докажем теперь непрерывность $g_2(x)$ в точке $c_k(k<m)$ справа. Все слагаемые суммы $g_1(x)$, кроме члена $\alpha_k^+ \rho(x-c_k)$, непрерывны при $x = c_k$ справа; поэтому достаточно изучить поведение выражения $g(x) - \alpha_k^+ \rho(x-c_k)$. При $x = c_k$ оно имеет значение $g(c_k)$; но таков же и его предел при $x \to c_k + 0$:

$$\lim_{x \to c_k+0} \left[g(x) - \alpha_k^+ \rho(x-c_k) \right] = g(c_k+0) - \alpha_k^+ = g(c_k).$$

Аналогично проверяется и непрерывность функции $g_2(x)$ в точке $c_k(k>0)$ слева.

Далее, если взять точку x (отличную от всех c_k), в которой функция $g(x)$ имеет производную, то вблизи этой точки $g_1(x)$ сохраняет постоянное значение, следовательно, в ней и функция $g_2(x)$ имеет производную, причем

$g_2'(x) = g'(x)$.

Для непрерывной функции $g_2(x)$, по предыдущей теореме, существует интеграл Стилтьеса

$$(S)\int_a^b f(x)dg_2(x) = (R)\int_a^b f(x)g_2'(x)dx = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Точно так же легко вычислить и интеграл

$$(S)\int_a^b f(x)dg_1(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+ \cdot (S)\int_a^b f(x)d\rho(x-c_k) - \sum_{k=1}^{m}\alpha_k^- \cdot (S)\int_a^b f(x)d\rho(c_k - x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+ f(c_k) + \sum_{k=1}^{m}\alpha_k^- f(c_k) = f(a)[g(a+0)-g(a)] + \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)] +$$

$$+ f(b)[g(b)-g(b-0)].$$

Складывая почленно эти два равенства, мы и придем к равенству (15); существование интеграла Стилтьеса от $f(x)$ по функции $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ устанавливается попутно (п.4,3).

9.2.8 Примеры

Вычислить по формуле (11) интегралы:

а) $(S)\int_0^2 x^2 d\ln(1+x)$;

б) $(S)\int_0^{\pi/2} x d\sin x$;

в) $(S)\int\limits_{-1}^{1} xdarctgx.$

Решение:

а)

$$(S)\int\limits_{0}^{2} x^2 d\ln(1+x) = (R)\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2}{1+x}dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)\right)\Big|_0^2 = \ln 3.$$

б) $$(S)\int\limits_{0}^{\pi/2} xd\sin x = (R)\int\limits_{0}^{\pi/2} x\cdot\cos xdx = \begin{vmatrix} u = x & dv = \cos xdx \\ du = dx & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin xdx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1;$$

в)

$$(S)\int\limits_{-1}^{1} xdarctgx = (R)\int\limits_{-1}^{1}\frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 2) = 0.$$

Вычислить по формуле (15) интегралы:

а) $(S)\int\limits_{-1}^{3} xdg(x),$ где $g(x) = \begin{cases} 0 & при & x = -1, \\ 1 & при & -1 < x < 2, \\ -1 & при & 2 \le x \le 3; \end{cases}$

б) $(S)\int\limits_0^2 x^2 dg(x),$ где $g(x)=\begin{cases}-1 & при\quad 0\le x<\frac{1}{2},\\ 0 & при\quad \frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2},\\ 2 & при\quad x=\frac{3}{2},\\ -2 & при\quad \frac{3}{2}<x\le 2.\end{cases}$

Решение:

а) Функция $g(x)$ имеет скачок 1 при $x=-1$ и скачок - 2 при $x=2$; в остальных точках $g'(x)=0$. Поэтому

$$(S)\int\limits_{-1}^{3} x dg(x)=(-1)\cdot 1+2\cdot(-2)=-5.$$

б) Скачок 1 при $x=\frac{1}{2}$ и - 2 при $x=\frac{3}{2}$ (значение функции g при $x=\frac{3}{2}$ не влияет на результат); в прочих точках $g'(x)=0$.

Имеем:

$$(S)\int\limits_0^2 x^2 dg(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot(-2)=-\frac{17}{4}.$$

Вычислить по формуле (15) интегралы:

а) $(S)\int\limits_{-2}^{2} x dg(x),$ б) $(S)\int\limits_{-2}^{2} x^2 dg(x),$ в) $(S)\int\limits_{-2}^{2} (x^2+1) dg(x),$

где

$$g(x)=\begin{cases} x+2 & npu \quad -2\le x\le -1, \\ 2 & npu \quad -1<x<0, \\ x^2+3 & npu \quad 0\le x\le 2. \end{cases}$$

Решение:

Функция $g(x)$ имеет скачки, равные 1, при $x=-1$ и $x=0$. Производная

$$g'(x)=\begin{cases} 1 & npu \quad -2\le x\le -1, \\ 0 & npu \quad -1<x<0, \\ 2x & npu \quad 0<x\le 2. \end{cases}$$

Поэтому

а) $\int\limits_{-2}^{2} xdg(x)=\int\limits_{-2}^{-1} xdx+2\int\limits_{0}^{2} x^2dx=(-1)\cdot 1+0\cdot 1=2\frac{5}{6}.$

Аналогично,

б) $\int\limits_{-2}^{2} x^2dg(x)=11\frac{1}{3};$

в) $\int\limits_{-2}^{2} (x^3+1)dg(x)=15\frac{1}{20}.$

Предположим, что вдоль отрезка $[a,b]$ оси x расположены массы, как сосредоточенные в отдельных точках, так интеграл распределенные непрерывно. Не делая различия между ними, обозначим для $x > a$ через $\Phi(x)$ сумму всех масс, расположенных в промежутке $[a, x]$; сверх того, положим, $\Phi(a) = 0$. Очевидно, $\Phi(x)$ - монотонно возрастающая функция. Поставим себе задачей найти статический момент этих масс относительно начала координат.

Разобьем промежуток $[a, b]$ на части точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ при $i > 0$ содержится, очевидно, масса $\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i) = \Delta\Phi(x_i)$. Точно так же на отрезке $[a, x_1]$ содержится масса $\Phi(x_1) - \Phi(x_0) = \Delta\Phi(x_0)$. Считая массу во всех случаях сосредоточенной, например, на правом конце промежутка, получим для искомого статического момента приближенной выражение

$$M = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}\Delta\Phi(x_i).$$

При стремлении к 0 всех Δx_i, в пределе придем к точному результату:

$$M = (S)\int_a^b x d\Phi(x). \quad (16)$$

Можно было бы здесь сначала установить "элементарный" статический момент $dM = xd\Phi(x)$, отвечающий отрезку оси от x до $x + dx$, а затем "просуммировать" эти элементы.

Аналогично для момента инерции I тех же масс относительно начал найдем формулу

$$I = (S)\int_a^b x^2 d\Phi(x). \quad (17)$$

Важно подчеркнуть, что интеграл Стилтьеса дал возможность объединить одной интегральной формулой разнородные случаи непрерывно распределенных интеграл сосредоточенных масс!

Пусть непрерывно распределенные массы имеют линейную плотность $\rho(x)$; кроме них пусть в точках $x = c_1, c_2, \ldots, c_k$ расположены сосредоточенные массы $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Тогда, исключая эти точки, функция $\Phi(x)$ имеет производную

$$\Phi'(x) = \rho(x).$$

В каждой же точке $x = c_j \ (j = 1, 2, \ldots, k)$ функция испытывает скачок, равный именно массе m_j, в этой точке сосредоточенной.

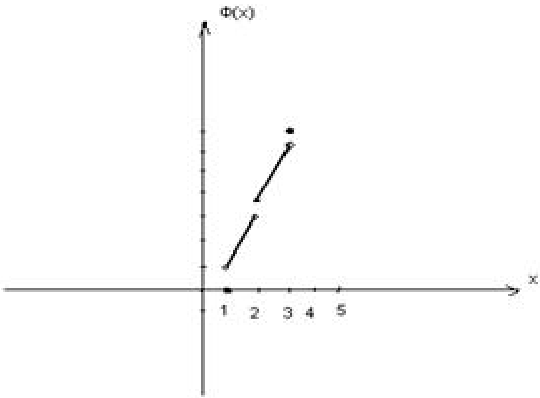
Если теперь разложить интеграл (16) по формуле (15), то получим

$$M = (S)\int_a^b x d\Phi(x) = (R)\int_a^b x_\rho(x)dx + \sum_{j=1}^k c_j m_j.$$

Всмотревшись в правую часть, легко в первом члене узнать статический момент непрерывно распределенных масс, а во втором - статический момент сосредоточенных масс. Аналогичный результат получится интеграл для интеграла (17).

а) Составить выражение $\Phi(x)$ и построить график его для следующего распределения масс: массы величины 1 в точках $x = 1, 2, 3$ и непрерывно распределенные массы с плотностью 2 в промежутке $[1, 3]$.

Решение:

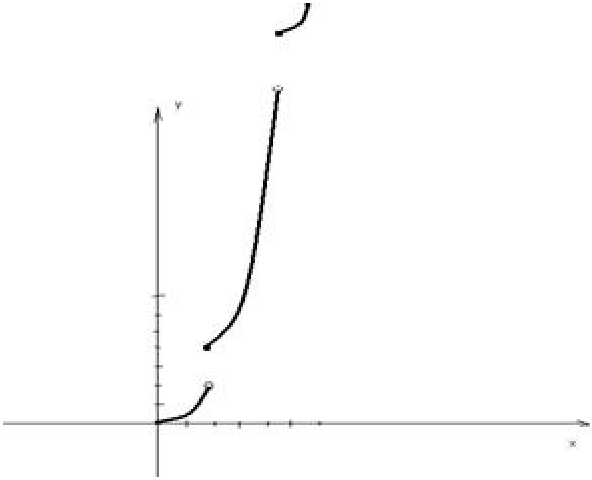


В промежутке $[1,3]$ имеем:

$$\Phi(x)=\begin{cases} 0 & для \quad x=1, \\ 2x-1 & для \; 1<x<2, \\ 2x & для \; 2\le x<3, \\ 7 & для \quad x=3. \end{cases}$$

б) То же самое - для такого распределения: массы величины 2 при $x=2$ и 4 и непрерывно распределенные массы с плотностью $2x$ в промежутке $[0,5]$.

Решение:



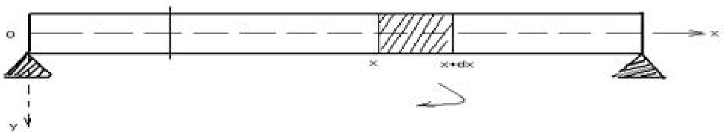
В промежутке $[0,5]$ имеем

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^2 & для \quad 0 \le x < 2, \\ x^2 + 2 & для \quad 2 \le x < 4, \\ x^2 + 4 & для \quad 4 \le x \le 5. \end{cases}$$

в) выяснить распределение масс, если $\Phi(x)$ равна функции $g(x)$ задачи 3).

Решение:

Массы величины 1 в точках $x = -1$ и 0, в промежутке $[-2,-1]$ непрерывно распределенные массы с плотностью 1, в промежутке $[0,2]$ - массы с плотностью $2x$.



6. Рассмотрим другой вопрос, в котором интеграл Стилтьеса играет такую же роль, как интеграл в упражнении 4). Предположим, что на балку (рис.) покоящуюся на двух опорах, кроме непрерывно распределенной нагрузки действуют и сосредоточенные силы. Расположим ось x вдоль по оси балки, а ось y вертикально вниз (см. рис.) Не делая различий между действующими силами, обозначим для $x > 0$ через $F(x)$ сумму всех сил, приложенных на отрезке $[0, x]$ балки, включая интеграл реакции опор; далее, пусть $F(0) = 0$. Силу $F(x)$ называют перерезывающим усилием в сечении x балки. При этом силы, направленные вниз, будем считать положительными, а вверх - отрицательными.

Поставим задачей определить так называемый изгибающий момент M в произвольном сечении $x = \xi$ балки. Под этим разумеют сумму моментов всех сил, действующих на правую (или на левую) часть балки, относительно этого сечения. При этом, когда речь идет о правой части балки, момент считают положительным, если он вращает эту часть по часовой стрелке (для левой части - обратное правило).

Так как на элементе $(x, x + dx]$, скажем, правой части балки приложена сила $F(x + dx) - F(x) = dF(x)$, создающая элементарный момент

$$dM = (x - \xi) dF(x),$$

то, "суммируя" получим

$$M = M(\xi) = (S)\int_{\xi}^{l}(x-\xi)dF(x).$$

Аналогично, исходя из левой части балки, можно было бы получить (учитывая изменение положительного направления для отсчета моментов)

$$M(\xi) = (S)\int_{0}^{\xi}(\xi - x)dF(x). \qquad (18)$$

Легко непосредственно усмотреть, что оба выражения изгибающего момента в действительности тождественны. Их равенство равносильно условию

$$\int_{0}^{l} x dF(x) - \xi F(l) = 0,$$

которое является следствием из условий равновесия

$$F(l) = 0, \int_{0}^{ll} x dF(x) = 0,$$

выражающих равенство нулю суммы всех сил интеграл суммы моментов (относительно начала) всех сил, действующих на балку.

Если интенсивность непрерывно распределенной нагрузки обозначить через $q(x)$, то, исключая точки, где приложены сосредоточенные силы, будет

$$\frac{dF(x)}{dx} = q(\ )$$

Пусть сосредоточенные силы $F_j(j=1,2,\dots,k)$ приложены в точках $x=x_j$. Тогда, очевидно, перерезывающее усилие именно в этих точках имеет скачки, соответственные равные F_j. Далее, применяя, например, к интегралу (18) формулу (15), получим

$$M(\xi)=\int_0^{\xi}(\xi-x)q(x)dx+\sum_{x_j<\xi}(\xi-x_j)F_j$$
.

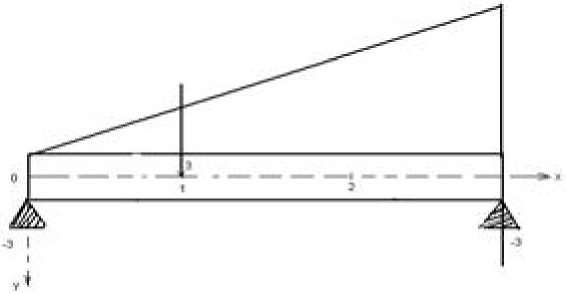
В двух слагаемых правой части легко узнать моменты, порожденные порознь непрерывной нагрузкой интеграл сосредоточенными силами: интеграл Стилтьеса охватывает их единой интегральной формулой.

Установим ещё один факт, интересный для теории сопротивления материалов. Произведя в формуле (18) интегрирование по частям, получим

$$M(\xi)=\int_0^{\xi}(\xi-x)dF(x)=(\xi-x)F(x)\Big|_0^{\xi}-\int_0^{\xi}F(x)d(\xi-x)=\int_0^{\xi}F(x)dx.$$

Отсюда ясно, что всюду, за исключением точек приложения сосредоточенных сил, имеет место равенство

$$\frac{dM}{d\xi}=F(\xi).$$



Пусть балка длины $l = 3$ несет "треугольную" нагрузку с интенсивностью $\frac{2}{3}x$; кроме того, пусть к ней приложены сосредоточенная сила, равная 3, в точке $x = 1$, интеграл реакции опор, обе равные - 3 (они устанавливаются по закону рычага). Определить перерезывающее усилие $F(x)$ интеграл изгибающий момент $M(\xi)$.

Решение:

Формула (15) может оказаться полезной интеграл для вычисления обычных интегралов (в смысле Римана). Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пусть $\varphi(x)$ - "кусочно-полиномиальная" функция в промежутке $[a, b]$; это означает, что промежуток разлагается на конечное число частей точками

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_k = b$$

так, что в каждой из частей функция $\varphi(x)$ представляется полиномом не выше n-й степени. Заменив значения функции $\varphi(x)$ и всех её производных в точках a и b нулями, обозначим через $\delta_j^{(i)}(j = 0,1,\ldots,k; i = 0,1,\ldots,n)$ величину скачка i-й производной $\varphi^{(i)}(x)$ в j-й точке $x = \xi_j$.

Пусть, далее, $f(x)$ - любая непрерывная функция; положим

$F_1(x) = \int f(x)dx$ и, вообще, $F_s(x) = \int F_{s-1}(x)dx(s > 1)$.

Тогда имеет место следующая формула:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = -\sum_{j=0}^{k} F_1(\xi_j)\delta_j^{(0)} + \sum_{j=0}^{k} F_2(\xi_j)\delta_j^{(1)} - \ldots + (-1)^{k+1}\sum F_{k+1}(\xi_j)\delta_j^{(k)}.$$

Действительно, последовательно находим

$$(R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = (S)\int_a^b \varphi(x)dF_1(x) = \varphi(x)F_1(x)\Big|_a^b - (S)\int_a^b F_1(x)d\varphi(x);$$

двойная подстановка исчезает, а интеграл

$$\int_a^b F_1(x)d\varphi(x) = \sum_j F_1(\xi_j)\delta_j^{(0)} + \int_a^b F_1(x)\varphi'(x)dx;$$

Аналогично

$$\int_a^b F_1(x)\varphi'(x)dx = -\sum_j F_2(\xi_j)\delta_j^{(0)} - \int_a^b F_2(x)\varphi''(x)dx;$$

и т.д.

Установим в заключение, с помощью формулы (11) одно полезное обобщение формулы интегрирования по частям для обыкновенных интегралов. Именно, если $u(x)$ и $v(x)$ обе абсолютно интегрируемы в промежутке $[a,b]$, а $U(x)$ и $V(x)$ определяются интегральными формулами:

$$U(x) = U(a) + \int_a^x u(t)dt,$$

$$V(x) = V(a) + \int_a^x v(t)dt,$$

то справедлива формула

$$\int_a^b U(x)v(x)dx = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)u(x)dx. \qquad (19)$$

Для доказательства, по формуле (11) заменим интеграл слева интегралом Стилтьеса интеграл проинтегрируем по частям (п.5):

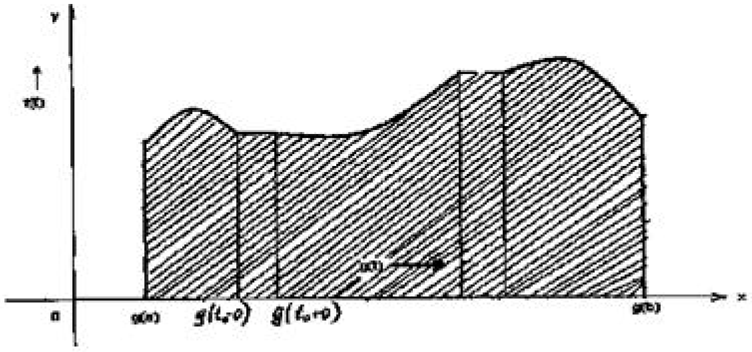
$$\int_a^b U(x)v(x)dx = \int_a^b U(x)dV(x) = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)dU(x).$$

Остается ещё раз применить формулу (11) к последнему интегралу, чтобы прийти к (19).

Здесь функции $u(x)$ и $v(x)$ играют как бы роль производных от функций $U(x)$, $V(x)$ не будучи ими на деле. При непрерывности функций $u(x)$ и $v(x)$ мы возвращаемся к обычной формуле интегрирования по частям, ибо тогда, наверное

$U'(x) = u(x), V'(x) = v(x).$

Геометрическая иллюстрация интеграла Стилтьеса



Рассмотрим интеграл

$$(S)\int_a^b f(t)dg(t), \qquad (20)$$

предполагая функцию $f(t)$ непрерывной интеграл положительной, а $g(t)$ - лишь монотонно возрастающей (в строгом смысле); функция $g(t)$ может иметь и разрывы (скачки).

Система параметрических уравнений

$$x = g(t), y = f(t) \qquad (21)$$

выражает некоторую кривую (K), вообще говоря, разрывную (рис). Если при некотором $t = t_0$ функция $g(t)$ испытывает скачок, так что $g(t_0 - 0) < g(t_0 + 0)$, то этим предельным значениям $x = g(t)$ отвечает одно интеграл то же предельное значение $y = f(\ )$, равное $f(t_9)$. Дополним кривую (K) всеми горизонтальными отрезками, соединяющими пары точек

$(g(t_0 - 0), f(t_0))$ и $(g(t_0 + 0), f(t_0))$,

отвечающие всем скачкам функции $g(t)$ (см. рис). Таким образом, составится уже непрерывная кривая (L). Покажем, что интеграл (20) представляет площадь фигуры под этой кривой, точнее, площадь фигуры, ограниченной кривой (L), осью и двумя крайними ординатами, отвечающими абсциссам $g(a)$ и $g(b)$.

С этой целью разложим промежуток на части точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b$$

и в соответствии с этим промежуток $[g(a), g(b)]$ на оси x - на части точками

$$g(a) < g(t_1) < \ldots < g(t_i) < g(t_{i+1}) < \ldots < g(b).$$

Введя наименьшее и наибольшее значения m_i и M_i функции $f(t)$ в i -м промежутке $[t_i, t_{i+1}]$, составим нижнюю интеграл верхнюю суммы Стилтьеса-Дарбу

$$s = \sum_i m_i \Delta g(t_i),\ S = \sum_i M_i \Delta g(t_i).$$

Легко видеть теперь, что они представляют площади фигур, составленных из входящих интеграл из выходящих прямоугольников, между которыми содержится рассматриваемая криволинейная фигура.

Так как при стремлении к 0 всех Δt_i обе суммы стремятся к общему пределу (20), то отсюда следует, что наша фигура квадрируема и площадью её служит действительно интеграл (20).

9.2.9 Теорема о среднем, оценки

Пусть в промежутке $[a,b]$ функция $f(x)$ ограничена:

$$m \le f(x) \le M,$$

а $g(x)$ монотонно возрастает. Если существует интеграл Стилтьеса I от $f(x)$ по $g(x)$, то имеет место формула

$$I = (S)\int_a^b f(x)dg(x) = \mu[g(b) - g(a)],\ m \le \mu \le M. \qquad (22)$$

Это и есть теорема о среднем для интегралов Стилтьеса.

Для доказательства будем исходить из очевидных неравенств для стилтьесовской суммы σ:

$$m[g(b) - g(a)] \le \sigma \le M[g(b) - g(a)].$$

Переходя к пределу, получим

$$m[g(b) - g(a)] \le I \le M[g(b) - g(a)]. \qquad (23)$$

Или

$$m \le \frac{1}{g(b)-g(a)} \le M.$$

Обозначая написанное отношение через μ, придем к (22).

Если функция $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ непрерывна, то обычным путем убеждаемся в том, что μ есть значение функции в некоторой точке этого промежутка, интеграл формула (22) приобретает вид

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = f(\xi)[g(b)-g(a)]$$, где $a \le \xi \le b.$ (24)

В практике интегралов Стилтьеса наиболее важным является случай, когда функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ имеет ограниченное изменение. Для этого случая справедлива такая оценка интеграла Стилтьеса:

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \le MV,$$ (25)

Где

$$M = \max_{a \le x \le b}|f(x)|, V = \overset{b}{\underset{a}{V}} g(x)$$.

Действительно, для суммы Стилтьеса σ будет

$$|\sigma| = \left|\sum_i f(\xi_i)\Delta g(x_i)\right| \le \sum_i |f(\xi_i)||\Delta g(x_i)| \le M\sum_i |g(x_{i+1})-g(x_i)| \le MV,$$

так что остается лишь перейти к пределу, чтобы получить требуемое неравенство.

Отсюда вытекает, в частности, и оценка близости суммы σ к самому интегралу Стилтьеса I (при прежних предположениях относительно функций f и g). Представив σ и I в виде

$$\sigma = \sum_i f(\xi_i)\Delta g(x_i) = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i) dg(x),$$

$$I = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dg(x)$$

и почленно вычитая эти равенства, получим

$$\sigma - I = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i) - f(x)] dg(x).$$

Если, как обычно, обозначить через w_i колебание функции $f(x)$ в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$, так что

$|f(\xi_i) - f(x)| \le w_i$ для $x_i \le x \le x_{i+1}$,

то, применяя оценку (25) к каждому интегралу $\int_{x_i}^{x_{i+1}}$ в отдельности, будем иметь

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i) - f(x)] dg(x) \right| \le w_i \operatorname*{V}_{x_i}^{x_{i+1}} g(x).$$

Если промежуток $[a,b]$ раздроблен на столь мелкие части, что все $w_i < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - произвольное наперед взятое число, то заключаем, что

$$\left|\sigma - I\right| \leq \varepsilon \overset{b}{\underset{a}{V}} g(x). \qquad (26)$$

Эти оценки будут нами использованы в следующем пункте.

9.2.10 Предельный переход под знаком интеграла Стилтьеса

Пусть функции $f_n(x)(n = 1,2,3...)$ непрерывны в промежутке $[a,b]$ и при $n \to \infty$ равномерно стремятся к предельной функции

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

(очевидно, также непрерывной), а $g(x)$ - функция с ограниченным изменением. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Доказательство: По заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $n > N$ будет для всех x

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Тогда, в силу (25), для $n > N$

$$\left|\int_a^b f_n(x)dg(x) - \int_a^b f(x)dg(x)\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]dg(x)\right| \le \varepsilon \overset{b}{\underset{a}{V}} g(x),$$

что, ввиду произвольности ε, и доказывает теорему.

Пусть теперь функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$, а функции $g_n(x)(n = 1,2,3...)$ - все с ограниченным изменением в этом промежутке. Если полные изменения этих функций в их совокупности ограничены:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} g_n(x) \le V(n = 1,2,3,...)$$

и $g_n(x)$ при $n \to \infty$ стремятся к предельной функции

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

То

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dg_n(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Доказательство:

Прежде всего, убедимся в том, что предельная функция $g(x)$ сама также будет иметь ограниченное изменение. Разложив промежуток $[a, b]$ произвольным образом на части точками

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_m = b,$$

будем иметь (при любом n)

$$\sum_i \left| g_n(x_{i+1}) - g_n(x_i) \right| \le \overset{b}{\underset{a}{V}} g_n(x) \le V.$$

Переходя к пределу здесь при $n \to \infty$, получим

$$\sum_i \left| g(x_{i+1}) - g(x_i) \right| \le V,$$

откуда и

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} g(x) \le V.$$

Составим суммы Стилтьеса

$$\sigma = \sum_i f(x_i) \Delta g(x_i), \quad \sigma_n = \sum_i f(x_i) \Delta g_n(x_i).$$

Если предположить, что промежуток $[a,b]$ при этом разложен на столь мелкие части, что колебание функции $f(x)$ в каждой из них будет уже меньше произвольного наперед взятого числа $\varepsilon > 0$, то в силу оценки (26), при всех n

$$\left| \sigma_n - \int_a^b f(x) dg_n(x) \right| \le \varepsilon V, \quad \left| \sigma - \int_a^b f(x) dg(x) \right| \le \varepsilon V. \tag{27}$$

С другой стороны, если разбиение, выбранное под указанным условием, фиксировать, то, очевидно, $\sigma_n \to \sigma$ при $n \to \infty$, так что найдется такое N, что для $n > N$ будет

$$\left| \sigma_n - \sigma \right| < \varepsilon . \tag{28}$$

Тогда для тех же значений n будем иметь, в силу (27) и (28),

$$\left|\int_a^b fdg_n - \int_a^b fdg\right| \le \left|\int_a^b fdg_n - \sigma_n\right| + |\sigma_n - \sigma| + \left|\sigma - \int_a^b fdg\right| < (2V+1)\varepsilon,$$

откуда, ввиду произвольности ε, и следует требуемое заключение.

9.2.11. Примеры и дополнения

Предполагая функцию $g(x)$ монотонно возрастающей в строгом смысле, можно доказать относительно числа ξ, фигурирующего в формуле (24), более точное утверждение: $a < \xi < b$.

Действительно, обозначив через m и M наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ и считая $m < M$, легко найдем такую часть $[\alpha, \beta]$ этого промежутка, в которой границами $f(x)$ служат числа $m' > m$ и $M' < M$, так что

$$m[g(b) - g(a)] < m'[g(b) - g(a)] \le (S)\int_\alpha^\beta \le M'[g(b) - g(a)] < M[g(b) - g(a)].$$

Написав для промежутков $[a, \alpha]$ и $[\beta, b]$ неравенства вида (23) интеграл складывая их с предыдущими, получим взамен (23) более точные неравенства:

$$m[g(b) - g(a)] < I < M[g(b) - g(a)],$$

так что число

$$\mu = \frac{1}{g(b) - g(a)}$$

Лежит строго между m и M; а тогда найдем и ξ строго между a и b, для которого $\mu = f(\xi)$ и т.д.

Используя формулу (11) п., формулу интегрирования по частям и теорему о среднем для интегралов Стилтьеса, очень легко заново установить вторую теорему о среднем для обыкновенных интегралов.

Итак, пусть $f(x)$ интегрируема (в смысле Римана), а $g(x)$ монотонно возрастает в промежутке $[a,b]$. Введем функцию

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx(a \le x \le b)$$

;

она, как мы знаем, будет непрерывна.

Теперь последовательно имеем

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)dg(x) = g(b)F(b) - F(\xi)[g(b) - g(a)] =$$

$$= g(a)F(\xi) + g(b)[F(b) - F(\xi)] = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

$$a \le \xi \le b,$$

что и требовалось доказать.

Если $g(x)$ монотонно возрастает в строгом смысле, то на основании сделанного в 1) замечания можно точнее сказать относительно ξ: $a \leq \xi \leq b$.

Доказать, что, если в точке $x = c$ одна из функций f и g непрерывна, в то время как другая в окрестности этой точки ограничена, то существование интегралов $(S)\int_a^c$ и $(S)\int_c^b$ влечет за собой существование и $(S)\int_a^b$.

С этой целью заметим, что, если при составлении стилтьесовой суммы σ мы будем включать точку c в состав точек деления, то сумма σ будет слагаться из двух аналогичных сумм для частичных промежутков $[a, c]$ и $[c, b]$; при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ она будет стремиться к сумме интегралов $\int_a^c fdg + \int_c^b fdg$. Пусть теперь точка c не входит в число точек деления. Присоединяя к ним точку c, мы от σ перейдем к новой сумме $\bar{\sigma}$, про которую мы уже знаем, что при $\lambda \to 0$ она имеет указанный предел. Таким образом, достаточно показать, что разность $\sigma - \bar{\sigma}$ будет вместе с λ стремиться к 0.

Пусть точка c попадает в промежуток $[x_k, x_{k+1}]$; тогда сумма $\bar{\sigma}$ <="" div="" width="17">

height="17" border="0" /> отличается от суммы σ лишь тем, что вместо слагаемого

$$f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

в ней имеется два слагаемых:

$$f(\xi')[g(c)-g(x_k)]+f(\xi'')[g(x_{k+1})-g(c)],$$

где ξ' и ξ'' выбираются произвольно под условиями $x_k \le \xi' \le c$ и $c \le \xi'' \le x_{k+1}$. Положив для упрощения $\xi' = \xi'' = c$, сведем последнее выражение к

$$f(c)[g(x_{k+1})-g(x_k)]$$

так что

$$\sigma-\overline{\sigma}=[f(\xi_k)-f(c)][g(x_{k+1})-g(x_k)]. \quad (29)$$

Когда $\lambda \to 0$, то один из множителей правой части бесконечно мал, в то время как второй ограничен; следовательно, $\sigma-\overline{\sigma} \to 0$ что и требовалось доказать.

Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ оказываются разрывными в одной интеграл той же точке $x=c(a \le c \le b)$, то интеграл Стилтьеса

$$\int_a^b f(x)dg(x) \quad (30)$$

заведомо не существует.

Для доказательства будем различать два случая. Пусть сначала $a<c<b$, и пределы $g(c-0)$ и $g(c+0)$ не равны. Тогда при построении суммы Стилтьеса мы точку c не станем вводить в число точек деления; пусть, скажем, $x_k < c < x_{k+1}$. Выбрав один раз $\xi_k \neq c$, а другой раз взяв c в качестве ξ_k составим две суммы σ и $\overline{\sigma}$, разность которых сведется к выражению (29). Сближая точки деления, будем иметь

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) \to g(c+0) - g(c-0) \neq 0.$$

Кроме того, точку ξ_k можно выбрать так, чтобы разность $f(\xi_k) - f(c)$ была по абсолютной величине большей некоторого постоянного положительного числа. Тогда разность $\sigma - \overline{\sigma}$ не стремится к 0, так что интеграл существовать не может.

Если же $g(c-0) = g(c+0)$, но их общее значение отлично от $g(c)$ ("устранимый разрыв"), то, наоборот, включим c в число точек деления; пусть $c = x_k$. Если $f(x)$ имеет, например, разрыв в точке $x = c$ справа, то, как и только что, составим две суммы σ и $\overline{\sigma}$, разнящиеся лишь выбором ξ_k: для σ точка ξ_k взята произвольно между $x_k = c$ и x_{k+1}, а для $\overline{\sigma}$ в качестве ξ_k взята c. По-прежнему имеем (29), интеграл рассуждение завершается аналогично.

Упражнения 3) и 4) проливают свет на тот факт, о котором говорилось в конце п.4.

Пусть $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ имеет ограниченное изменение в промежутке $[a,b]$.

Опираясь на оценку (25), доказать непрерывность интеграла Стилтьеса

$$I(x) = \int_a^x f(t)dg(t)$$

по переменному верхнему пределу x в точке x_0, где функция $g(x)$ непрерывна.

Заключение сразу вытекает из неравенства

$$\left|I(x_0+\Delta x)-I(x_0)\right|=\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f dg\right|\le \max_{a\le x\le b} f(x)\cdot \mathop{V}_{x_0}^{x_0+\Delta x} g(x),$$

если принять во внимание, что в точке x_0 должна быть непрерывна и вариация $\mathop{V}_{a}^{x} g(x)$.

Если δ есть класс непрерывных в промежутке $[a,b]$ функций, а τ - класс функций с ограниченным изменением в этом промежутке, то, как известно, каждая функция одного класса, интегрируема по каждой функции другого класса. Доказать, что ни один, ни другой из этих классов не может быть расширен с сохранением упомянутого свойства.

Это, ввиду 4), почти очевидно относительно класса δ. Действительно, если функция $f(x)$ имеет точку разрыва x_0, то она заведомо не интегрируема, например, по функции с ограниченным изменением $\rho(x-x_0)$, имеющей ту же точку разрыва.

Пусть теперь $g(x)$ в промежутке $[a,b]$ имеет бесконечное полное изменение; в этом предположении построим такую непрерывную функцию $f(x)$, для которой интеграл (30) не существует.

Если разделить промежуток $[a,b]$ пополам, то хоть в одной из половин полное изменение функции $g(x)$ тоже будет бесконечно; разделим эту половину снова пополам интеграл т.д. По этому методу определится некоторая точка c, в каждой окрестности которой $g(x)$ не имеет ограниченного изменения. Для простоты пусть $c = b$.

В таком случае легко построить последовательность возрастающих интеграл стремящихся к b значений $x = a_n$:

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots < a_n \to b$$

так, чтобы ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left| g(a_{i+1}) - g(a_i) \right|$$

расходился. Для этого ряда затем можно подобрать такую последовательность стремящихся к 0 чисел $f_i > 0 (i = 1, 2, \ldots)$, чтобы и ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i \left| g(a_{i+1}) - g(a_i) \right| \qquad (31)$$

все же расходился. Теперь определим функцию $f(x)$, полагая

$$f(a_i) = f_i sign\left[g(a_{i+1}) - g(a_i) \right] \ (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$f(b) = 0,$$

а в промежутках $[a_i, a_{i+1}]$ считая $f(x)$ линейной:

$$f(x) = f(a_i) + \frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i}(x - a_i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, $f(x)$ будет непрерывна. В то же время, ввиду расходимости ряда (31), при $n \to \infty$ и

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)[g(a_{i+1}) - g(a_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f_i |g(a_{i+1}) - g(a_i)| \to +\infty,$$

так что интеграл от f по g действительно не существует.

Доказанное утверждение можно сформулировать и так: если интеграл Стилтьеса (30) для данной функции f существует по любой g из τ, то f необходимо принадлежит δ; аналогично, если этот интеграл по данной функции g существует для любой f из δ, то g необходимо принадлежит τ.

В первой теореме о предельном переходе под знаком интеграла Стилтьеса мы поставили требование, чтобы последовательность функций $\{f_n(x)\}$ стремилась к предельной функции $f(x)$ равномерно. Можно, однако, заменить это требование более общим условием, что эти функции ограничены в их совокупности:

$$|f_n(x)| \le M$$

$$(M = const, a \le x \le b, n = 1,2,3,\ldots)$$

(Только при этом нужно ещё наперед предположить непрерывность предельной функции $f(x)$).

При доказательстве достаточно рассмотреть случай, когда $g(x)$ возрастает в строгом смысле. Но для этого случая можно воспользоваться преобразованием, проведенным в п.:

$$(S)\int_a^b f_n(x)dg(x) = (R)\int_{v_0}^{V} f_n\left(g^{-1}(v)\right)dv,$$

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_{v_0}^{V} f\left(g^{-1}(v)\right)dv$$

и, имея дело уже с римановыми интегралами, просто применить теорему Арцелла.

Укажем, в заключение, другую трактовку понятия интеграла Стилтьеса, связав его с понятием аддитивной функции от промежутка.

Пусть для каждой части $[\alpha, \beta]$ данного промежутка $[a, b]$ определено число $G([\alpha, \beta])$, причем, если промежуток $[\alpha, \beta]$ точкой γ разложен на части $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$, то и

$$G([\alpha, \beta]) = G([\alpha, \gamma]) + G([\gamma, \beta]).$$

Тогда $G([\alpha, \beta])$ есть аддитивная функция от переменного промежутка $[\alpha, \beta]$. Предположим, что кроме неё для промежутка $[a, b]$ задана и функция точки $f(x)$. Разложим теперь, как обычно, промежуток $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

на части $[x_i, x_{i+1}] (i = o, 1, \ldots, n-1)$, в каждой части произвольно выберем по точке ξ_i и, наконец, составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) G([x_i, x_{i+1}]). \quad (32)$$

Предел этой суммы при $\lambda = \max(x_{i+1} - x_i) \to 0$ и есть интеграл Стилтьеса, который естественно - учитывая процесс его построения - обозначить так:

$$\int_a^b f(x) G(dx). \quad (33)$$

Если определить вторую функцию точки $g(x)$, положив

$g(x) = G([a, x])$ для $x > a$, $g(a) = 0$,

то, ввиду аддитивности функции G, во всех случаях

$$G([\alpha, \beta]) = g(\beta) - g(\alpha), \quad (34)$$

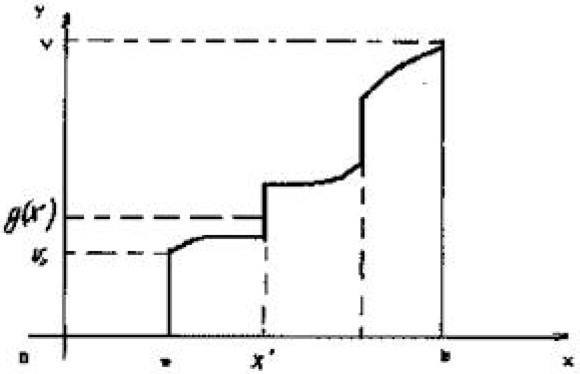
так что сумма (32) сведется к обыкновенной стилтьесовой сумме

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)],$$

а предел (33) - к обыкновенному интегралу Стилтьеса

$$(S)\int_a^b f(x) dg(x).$$

Обратно, если существует последний интеграл, то, определив функцию от промежутка равенством (34) (причем легко проверить, что она окажется аддитивной), можно свести обыкновенный интеграл Стилтьеса к интегралу (33).



9.3. Применение интеграла Стилтьеса

9.3.1 Применение в теории вероятностей

В элементарной теории вероятностей, где рассматриваются случайные величины x, которые могут принимать только конечное множество значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, среднее значение или математическое ожидание $E(x)$ определяется формулой:

$$E(x) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu P(x = x_\nu) \quad (1)$$

Имея эту формулу, мы можем при помощи интеграла Стилтьеса распространить определение среднего значения на случайные величины x, которые могут принимать любое множество значений, заключенное в каком-нибудь ограниченном интервале $a \le x \le b$, - если только мы примем следующую аксиому:

Каковы бы ни были функции y и z случайной величины x, для которых всегда $y \le x \le z$, для них будут иметь место также и неравенства:

$$E(y) \le E(x) \le E(z) \quad (2)$$

Чтобы распространить определения среднего значения, возьмем какое-нибудь подразделение

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

и пусть $x_* = x_{\nu-1}$ и $x^* = x_\nu$, когда $x_{\nu-1} < x \le x_\nu$ Здесь $x_* \le x < x^*$, и поэтому в силу условия (2):

$$E(x_*) \le \mathrm{E}(\mathrm{x}) \le E(x^*)$$

Величины же x_* и x^*, таким образом определенные, могут принимать соответственно только значения $x_{\nu-1}$ и x_ν, а потому по формуле (1):

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu-1} P(x_* = x_{\nu-1}) \le E(x) \le \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu P(x^* = x_\nu)$$

С другой стороны, очевидно, что вероятности $P(x_* = x_{\nu-1})$ и $P(x^* = x_\nu)$ обе равны вероятности $P(x_{\nu-1} < x \le x_\nu)$, и потому

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu-1} P(x_{\nu-1} < x \le x_{\nu}) \le E(x) \le \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu} P(x_{\nu-1} < x \le x_{\nu})$$

Итак, если ввести функции распределения $\Phi(x)$ случайной величины x:

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu-1} \{\Phi(x_{\nu}) - \Phi(x_{\nu-1})\} \le E(x) \le \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu} \{\Phi(x_{\nu}) - \Phi(x_{\nu-1})\}$$

Верхняя грань сумм в левой части и нижняя грань сумм в правой части этих неравенств обе равны интегралу Стилтьеса функции $y = x$, взятому в пределах от a до b; последний всегда существует, как интеграл непрерывной функции, ограниченной в промежутке интегрирования. Итак, для среднего значения $E(x)$ должно иметь место равенство:

$$E(x) = \int_{a}^{b} x d\Phi(x)$$

.

Несколько сложнее обстоит дело со случайными величинами, которые могут принимать неограниченное множество значений. Если такая случайная величина x может принимать только счетное множество значений $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu}, \ldots$, то среднее значение $E(x)$ определяется формулой

$$E(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_{\nu} P(x = x_{\nu})$$

, (3)

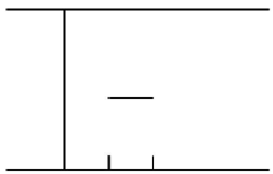
причем ряд в правой части этой формулы должен быть абсолютно сходящимся, иначе его сумма зависела бы от порядка, в котором перенумерованы значения случайной величины, и среднее значение не было бы однозначно определено.

Имея формулу (3), мы можем при помощи соответствующим образом определенного несобственного интеграла Стилтьеса распространить определение среднего значения и на многие такие случайные величины, которые могут принимать несчетное неограниченное множество значений.

Приведем пример вычисления среднего значения $E(x)$ случайной величины x, для которой это вычисление требует именно интеграла Стилтьеса, незаменимого ни обычным интегралом, ни конечным, ни бесконечным рядом.

Пусть случайная величина x определяется следующими условиями:

Она может принимать только значения между 0 и 1. Таким образом, её функция должна быть равна 0 при x<0 и равна 1 при $x \geq 1$.

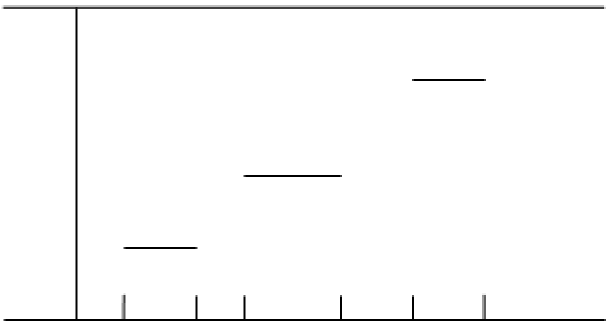


0 $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1

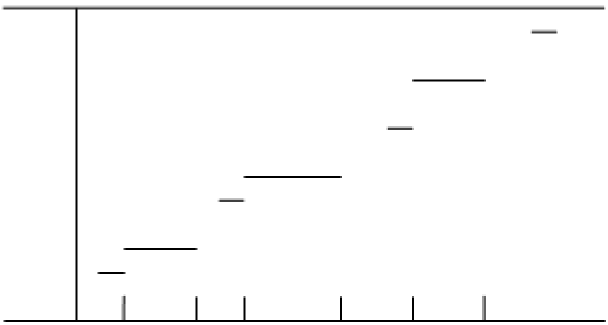
Она не может принимать ни одного значения в интервале $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$; попадание в соседние интервалы равновероятно. Таким образом, в интервале $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ её функция распределения должна быть постоянна и равна $\frac{1}{2}$.

В каждом из крайних интервалов повторяется такая же картина, т.е. x не может принимать ни одного значения в интервале $\frac{1}{9} < x < \frac{2}{9}$ и $\frac{7}{9} < x < \frac{8}{9}$, попадание же в четыре интервала $0 \le x \le \frac{1}{9}$, $\frac{2}{9} \le x \le \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3} \le x \le \frac{7}{9}$, $\frac{8}{9} \le x \le 1$ для неё одинаково вероятно. Таким образом, в интервалах $\left[\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)$ и $\left[\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)$ её функция распределения должна иметь постоянные значения: в первом $\frac{1}{4}$ и во втором $\frac{3}{4}$.

Такая же картина повторяется и в каждом из названных четырех интервалов длины $\frac{1}{9}$ и т.д.



$0 \quad \frac{1}{9} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{7}{9} \quad \frac{8}{9} \quad 1$



$0 \quad \frac{1}{9} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{7}{9} \quad \frac{8}{9} \quad 1$

Повторив n раз наше рассуждение, мы будем иметь 3^n интервалов, каждый длины $\frac{1}{3^n}$; для 2^n из этих интервалов вероятность попадания в каждый из них будет равна $\frac{1}{2^n}$, попадание в остальные будет невозможно. В этих последующих функция распределения будет постоянна. Чтобы определить функцию распределения в каждой точке интервала $0 \le x \le 1$, достаточно представить себе, что мы повторяем такие же рассуждения бесконечное число раз. После этого даже в точках, оставшихся вне интервалов, в которых функция распределения постоянна, она должна была получить определенные значения в силу того, что она должна быть неубывающей.

В самом деле, и слева, и справа от каждой такой точки, с обеих сторон как угодно близко к ней, будут встречаться интервалы, в которых функция распределения постоянна, потому что по мере расширения этих интервалов путем присоединения к имеющимся уже интервалам длины $\frac{1}{3^n}$ следующих интервалов длины $\frac{1}{3^{n+1}}$ расстояния между ними становятся сколь угодно малыми.

Определив таким образом функцию распределения $\Phi(x)$, мы уже без труда вычислим среднее значение $E(x)$.

Для этого достаточно обратиться к его геометрическому изображению. В данном случае оно изображается площадью, ограниченной прямыми $x = 0$ и $y = 1$ и кривой распределения $y = \Phi(x)$. Но эта площадь в силу симметрии равна площади, ограниченной прямыми $y = 0$ и $x = 1$ и кривой $y = \Phi(x)$. Взятые же вместе эти площади составляют площадь квадрата равную 1. Отсюда ясно, что $E(x) = \frac{1}{2}$.

9.3.2 Применение в квантовой механике

Аппарат стилтьесовского интегрирования приспособлен для единообразного описания дискретных и непрерывных явлений. Это обстоятельство оказалось решающим и при введении его в математический арсенал квантовой механики.

Если в механике раньше пользовались в основном классическим математическим анализом - аппаратом, приспособленным для описания определенного класса непрерывных явлений, а в тех случаях, когда нужно было описать дискретные явления, прибегали к теории рядов, конечных или бесконечных, то в квантовой механике такие приемы оказались недостаточными. Непрерывные и дискретные аспекты переплелись в ней настолько тесно, что идея их единообразного описания напрашивалась сама собой.

Идея стилтьесовского интегрирования могла оказаться полезной с самого начала. Но в момент зарождения квантовой механики и некоторое время спустя интегрирование по Стилтьесу было еще недостаточно разработано, а главное - слишком мало известно, чтобы лечь в основу квантовой механики. И Дирак повернул направление ее развития в ином направлении.

Дирак в качестве исходной позиции тоже ставит проблему единообразного описания дискретных и непрерывных явлений. При этом за основное понятие он берет понятие непрерывности, а дискретное описывает в терминах последнего. Против такого подхода сразу восстал И. Нейман, предложив заменить обобщенные функции интегралами Стилтьеса. Большинство физиков не приняло концепции Неймана, тем не менее он продолжал отстаивать и развивать свою точку зрения, подробно изложив свои соображения в своей монографии. И хотя его концепция была принята не сразу, тем не менее в квантовой механике интеграл Стилтьеса нашел своё применение.

Интеграл Стилтьеса и линейные функционалы.

Понятие функционала явилось предметом многочисленных исследований, восходящих ещё к Эйлеру. Среди этих исследований важное место заняли изыскания по аналитическому изображению функционалов.

В явной форме понятие функционала сформулировал Вольтера в 1887 году. Он же дал и первое аналитическое выражение для некоторого класса функционалов в виде выражения, аналогичного ряду Тейлора с привлечением понятия производной функционала. В теории функций наиболее распространенным способом изображения функций является выражение их рядами того или иного типа. По аналогии начались попытки представления функционалов в виде рядов по функционалам

$$U[f]=a_0U^0[f]+a_1U^1[f]+\ldots+a_nU^{(n)}[f]+\ldots,$$

где a_n - некоторые константы, зависящие от природы разлагаемого в ряд функционала $U[f]$, а $U^{(n)}[f]$ - определенная последовательность фиксированных функционалов. Первым таким разложением было разложение, предложенное Пинкерле и Амальди в 1901 г. Оно имело вид:

$$U[f]=U^0f(c)+U^1f'(c)+\ldots+U^{(n)}f^{(n)}(c)+\ldots,$$

где *c* - некоторое фиксированное число промежутка (a,b), на котором задано рассматриваемое множество функций $\{f(x)\}$.

Кроме них предложили общие выражения линейных функционалов Фреше и Адамар, но все эти способы пригодны только для относительно узких классов непрерывных функций. Поэтому поиски новых аналитических выражений для функционалов продолжались.

Решающим в этом направлении был результат Рисса. В 1909 г. Он доказал, что всякий линейный функционал $U[f]$, определенный в пространстве непрерывных функций $f(x)$, заданных на $[a,b]$, раастояние между которыми $\rho(f_1,f_2)=\max\limits_{a\le t\le b}|f_1(t)-f_2(t)|$, выражается интегралом Стилтьеса

$$U[f] = \int f(x) d\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ - функция с ограниченным изменением, определяемая через $U[f]$.

В заключение отметим, что интеграл, который мы рассмотрели, был введен Стилтьесом. Новое понятие ему было нужно, как мы уже говорили в первой главе, в разрабатывавшейся им теории цепных дробей; он ввел его и применил в интересовавших его вопросах. Разработка же выпала на доли других математиков, таких, как Кёниг, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, Г.Ф. Вороной, Рисс, Гильберт, Хеллингер, причем каждый из них пришел к понятию интеграла Стилтьеса, отправляясь от разных задач. В теории цепных дробей применяли его сам Стилтьес и А.А. Марков, в теории R-интеграла - Кёниг, в теории чисел - Г.Ф. Вороной, в небесной механике - А.М. Ляпунов, в теории интегральных уравнений - Гильберт, Хеллингер, в теории линейных функционалов - Рисс. В дальнейшем разработкой интеграла занимались также У.Г. Юнг и Радон. Юнг использовал интеграл Стилтьеса в теории тригонометрических рядов, Радон применял также в теории линейных функционалов, в теории интегральных уравнений.

Очень велико число работ, посвященных изучению различных свойств интеграла Стилтьеса. Это работы Хелли, Брэй, Гильдебрандт, Р. Юнг, Г.М. Шварц, Яджи и др.

Совершенно необозримо поле приложений различных типов интеграла Стилтьеса. Разумеется, та исходная проблема, из которой родилось само понятие интеграла Стилтьеса, - проблема моментов, - не перестала быть связанной с этим понятием. После работ Стилтьеса, Маркова, Юнга и других ученых, о которых сказано выше, поток применений интеграла Стилтьеса вырос в трудно обозримый комплекс. Многие разделы математики невозможно представить без использования интеграла Стилтьеса.

Идея стилтьесовского интегрирования использовалась и продолжает использоваться при изучении различных вопросов математики, физики, квантовой механики.

10. ВЕРОЯТНОСТЬ

10.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Цель этого параграфа — дать интуитивное оправдание построению теории вероятностей на основе теории меры.

Основным неопределимым понятием теории вероятностей является понятие „события". Говоря не строго, можно назвать событием любой из возможных исходов произвольного физического эксперимента. В качестве хорошо известного примера рассмотрим эксперимент, заключающийся в бросании обычной игральной кости и наблюдении выпавшего числа очков x (=1, 2, 3, 4, 5 или 6). „Число x четное", „x меньше 4", „x равно 6" — каждое такое утверждение соответствует некоторому возможному исходу рассматриваемого эксперимента. С этой точки зрения возможно столько событий, сколько существует сочетаний из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Если в целях удобства рассматривать также невозможное событие, состоящее в том, что „число x не равно ни одному из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6", то существует 2^6 возможных событий, связанных с экспериментом бросания кости. Для того чтобы более подробно изучить этот пример, введем следующие обозначения: пусть символ $\{2, 4, 6\}$ означает событие „x есть четное число", $\{1, 2, 3\}$—событие „x меньше 4" и т. д. Невозможное событие и достоверное событие ($=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) заслуживают специальных обозначений; условимся обозначать их соответственно 0 и X.

По отношению к событиям постоянно употребляются следующие выражения: „два события E и F несовместимы, или взаимно исключают друг друга", „событие E является дополнительным к событию F", „событие E заключается в одновременном наступлении событий F и G", „событие E заключается в наступлении хотя бы одного из событий F и G". Такие фразы подсказывают определения отношений между событиями и операций образования новых событий из уже имеющихся, что должно быть, конечно, частью математической теории событий.

Понятие дополнительного события, вероятно, наиболее прозрачно. Событие, дополнительное к событию *E,* заключается в ненаступлении события *E* и обозначается *E'*. Таким образом, если *E={2,* 4, 6}, то *E'* = {1, 3, 5}. Можно ввести также комбинации событий, отвечающие логическим отношениям „и" и „или". Любым двум событиям *E* и *F* мы ставим в соответствие их „соединение" $E \cup F$ и „пересечение " $E \cap F$: событие $E \cup F$ наступает тогда и только тогда, когда наступает по крайней мере одно из событий *E* и F, а $E \cap F$ есть событие, наступающее тогда и только тогда, когда наступают оба события *E* и *F*. Так, например, если *E*= {2, 4, 6} и *F* = {1, 2, 3}, то $E \cup F$ ={1, 2, 3, 4, 6} и $E \cap F$ *F={2}.*

Эти соображения и их очевидные обобщения, относящиеся к более сложным экспериментам, позволяют нам заключить, что теория вероятностей занимается изучением булевских алгебр множеств. Событие представляет собой множество, дополнительное событие — дополнение этого множества; несовместимые события являются непересекающимися множествами; событие, заключающееся в совместном наступлении двух событий, есть пересечение двух множеств. Такой перевод понятий на теоретико-множественный яаык может быть очевидным образом продолжен.

Для классической теории вероятностей, имеющей дело с простыми играми, вроде игры в кости, когда общее число возможных событий конечно, описанное выше сведение класса рассматриваемых событий к булевской алгебре множеств удается осуществить полностью и без каких-либо дополнительных ограничений. В условиях же, возникающих в современной теории и практике, и даже в более сложных азартных играх, приходится дополнительно предполагать, что система событий замкнута относительно образования счетных соединений, т. е., в нашей терминологии, что рассматриваемая булевская алгебра является σ-алгеброй.

Попробуем пояснить необходимость этого дополнительного предположения на одном несколько искусственном примере. Предположим, что игрок бросает кость до первого выпадения шестерки; пусть E_n — событие, заключающееся в том, что шестерка выпала первый раз при *n*-м бросании.

Событие $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ наступает тогда и только тогда, когда игра оканчивается после конечного числа бросаний. Наступление противоположного события *E',* если не практически, то, по крайней мере, теоретически возможно; естественно поэтому подвергнуть изучению и это событие. Многочисленные примеры такого рода, вместе с более серьезными чисто математическими соображениями, оправдывают утверждение, что математическая теория вероятностей состоит в изучении булевских σ-алгебр множеств.

Это не значит, что любые булевские σ -алгебры множеств служат предметом теории вероятностей. Утверждения, касающиеся таких алгебр и отношений между их элементами, носят обычно лишь качественный характер, тогда как теория вероятностей подходит к изучению булевских алгебр также с количественной стороны. Теперь мы перейдем к описанию самих вероятностей.

Когда мы спрашиваем, „какова вероятность некоторого события", то мы ожидаем ответа на этот вопрос в виде числа, связанного с этим событием. Другими словами, вероятность есть числовая функция μ события *E*, т. е. функция множества на некоторой σ-алгебре. Исходя из интуитивных и практических соображений, мы требуем, чтобы число μ *(E)* давало представление о частоте наступления события *E.* Если при многократном повторении эксперимента, исходом которого может служить событие *E,* мы замечаем, что событие *E* наступило в одной четверти общего числа всех испытаний (так что в остальных трех четвертях осуществилось событие *E'),* то можно попытаться отразить этот результат, положив $\mu(E)=\frac{1}{4}$. Даже эта весьма грубая „прикидка" дает некоторые наводящие указания относительно природы функции μ.

Итак, пусть μ (*E*) равно частоте наступления события *E,* т. е. отношению числа наступлений события *E* к общему числу повторений эксперимента; тогда μ *(E)* должно быть неотрицательным действительным числом, заключенным в интервале [0, 1]. Если события *E* и *F* несовместимы, скажем, в примере с костью *E={1}* и F={2, 4, 6}, то частота наступления события $E \cup F$ ={1, 2, 4, 6} равна, очевидно, сумме частот наступления событий *E* и *F* в отдельности. Если единица выпадает в одной шестой всех испытаний, а четное число очков —в половине всех испытаний, то событие, заключающееся в выпадении либо единицы, либо четного числа очков, должно наступать с частотой $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что функция μ не может быть совершенно произвольной; необходимо подчинить ее условию аддитивности, т. е. потребовать, чтобы $\mu(E\cup F)$ при $E\cap F=0$ было равно $\mu(E)+\mu(F)$. Так как достоверное событие наступает при всех осуществлениях эксперимента, то нужно потребовать также, чтобы μ (*X*)=1.

От окончательного определения вероятности нас отделяет сейчас одна подробность чисто математического характера, незначительная на первый взгляд, но в действительности весьма важная. Если μ — аддитивная функция на булевской σ-алгебре, а $\{E_n\}$ — последовательность непересекающихся множеств, принадлежащих этой алгебре, то равенство $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ может выполняться или не выполняться.

Дальнейшим ограничением, налагаемым на функцию μ, является условие счетной аддитивности, без которого теория вероятностей не может обойтись. С точки зрения интуиции конечная и счетная аддитивность в равной мере оправданы. Во всяком случае счетная аддитивность не противоречит нашим интуитивным представлениям, а развитие теории в предположении счетной аддитивности вполне оправдывает введение этого ограничения. Итак, вероятность μ представляет собой меру, определенную на некоторой булевской σ-алгебре **S** подмножеств множества *X*, причем μ *(X)* = 1. В предыдущих главах основную роль играли понятия измеримой функции, интеграла и произведения пространств; сейчас мы выясним, какой смысл приобретают эти понятия в теории вероятностей.

Начнем с часто употребляемого понятия „случайной величины". „Случайная величина есть переменная, значения которой зависят от случая". Таким образом, мы имеем дело с переменной величиной. Известно, однако, что там, где строится математическая теория, „переменная величина", особенно такая, значения которой чем-то „определяются", всегда представляет собой функцию. Значения такой функции, как мы сказали, „зависят от случая". Иначе говоря, наша функция связана с некоторым экспериментом таким образом, что, коль скоро эксперимент произведен и зарегистрирован определенный его исход, значение функции оказывается известным. В нашей схеме эксперименту соответствует пространство с мерой *X;* следовательно, функция исхода эксперимента должна быть функцией точки *x* пространства *X*. Случайная величина есть, таким образом, действительная функция, заданная на пространстве с мерой.

Предыдущая фраза не дает еще полного описания „случайной величины" в обычном понимании этого термина. Функция *f*, определенная на пространстве *X*, называется случайной величиной только в том случае, когда имеется возможность ответить на некоторые вопросы, относящиеся к вероятностям значений, принимаемых функцией *f*. Типичен, например, такой вопрос: „Какова вероятность того, что *f* принимает значение, заключенное между α и β?, т. е., на языке теории вероятностей: „Чему равна мера множества тех точек, для которых $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$?“ Для того чтобы на вопрос такого рода всегда можно было дать ответ, необходимо и достаточно, чтобы множества, о которых идет речь, принадлежали выделенной σ-алгебре **S** множеств в пространстве *X*, другими словами, чтобы случайная величина была измеримой функцией.

Рассмотрим более подробно случайную величину *f*, связанную с экспериментом бросания правильной игральной кости и определенную равенством *f(x) = x*. Возможными значениями функции *f* служат числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Особый интерес для теории вероятностей представляет их среднее арифметическое

$$\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6);$$

оно называется средним значением или математическим ожиданием случайной величины *f*. Если кость неправильная, то вероятности p_x выпадения *x* очков, вообще говоря, не равны $\frac{1}{6}$; в этом случае математическое ожидание определяется как взвешенное среднее $1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \ldots + 6 \cdot p_6$. В случае когда число значений функции *f* не обязательно конечно, аналогом такого взвешенного среднего служит интеграл; итак, если измеримая функция *f* интегрируема, то ее математическим ожиданием является, по определению, интеграл этой функции.

Мы выяснили, как интерпретируются в теории вероятностей измеримые функции и интегралы; для того чтобы найти интерпретацию произведений пространств, продолжим рассмотрение примера с игральной костью. Для простоты мы снова допустим, что кость правильная и выпадение каждой из шести граней имеет вероятность, равную $\frac{1}{6}$.

Рассмотрим события *E*={2, 4, 6} и F={1, 2}. Понятие условной вероятности, которое мы сейчас введем, позволяет давать ответы на вопросы такого рода: „Какова вероятность события *E,* если известно, что наступило событие *F?*“. В нашем примере: „Какова вероятность того, что *x*—четное число, если известно, что *x* меньше 3?" Термин „условная вероятность" отражает специфику в постановке вопроса: определяется вероятность события в предположении, что выполняются некоторые заранее заданные условия.

Рассмотрим сначала событие G = {2} и поставим вопрос, какова условная вероятность события *E*, если известно, что событие *G* произошло. Ответ на этот вопрос интуитивно ясен и не зависит от предположений, определяющих численные значения самих вероятностей (например, от предположения, что кость правильная). Если известно, что x равно 2, то x — четное число, и искомая условная вероятность должна равняться 1. Легкость ответа в этом примере обусловлена тем, что G содержится в E. В общем случае нужно оценить долю события F, содержащуюся в событии G. Ее естественно измерять не просто вероятностью совместного осуществления событий E и F, т. е. числом $\mu(E \cap F)$, а отношением $\mu(E \cap F)$ к вероятности события F. Поэтому условная вероятность $\mu_F(E)$ события E при условии, что событие F наступило, определяется как $\frac{\mu(E \cap F)}{\mu(F)}$.

При $E=\{2, 4, 6\}$ и $G=\{2\}$ мы имеем $\mu_G(E) = 1$, т. е. ответ, полученный выше. При

$E = \{2, 4, 6\}$ и $F=\{1, 2\}$ мы получаем $\mu_F(E) = \frac{1}{2}$, что интуитивно вполне разумно: если известно, что значение x равно 1 или 2, то оно может быть четно (= 2) или нечетно (= 1), причем каждая из этих возможностей осуществляется с вероятностью, равной $\frac{1}{2}$.

Сопоставим теперь следующие два вопроса: „Какова вероятность события E, если известно, что наступило событие F?" и, просто, „Какова вероятность события E?" Ответы на эти вопросы даются соответственно числами $\mu_F(E)$ и $\mu(E)$. Может случиться, как это было в предыдущем примере, что эти два числа совпадают, т. е., другими словами, что наступление события F не влияет на вероятность события E. Такое взаимоотношение событий характеризуется словом „независимость": два события E и F называются независимыми (иначе, статистически или стохастически независимыми), если $\mu_F(E) = \mu(E)$. Воспользовавшись указанным выше выражением условной вероятности, этому определению можно придать следующую более симметричную форму: события E и F независимы тогда и только тогда, когда $\mu(E \cap F) = \mu(E)\mu(F)$.

Предположим теперь, что мы имеем дело с двумя независимыми осуществлениями некоторого эксперимента, например с двумя последовательными бросаниями правильной игральной кости. Результат такого составного эксперимента должен выражаться, конечно, парой чисел (x_1, x_2). Точки пространства с мерой, соответствующего этому составному эксперименту, являются, таким образом, точками декартова произведения исходного пространства с мерой самого на себя; задача заключается в том, чтобы разумным образом определить вероятности, т. е. меру, в таком произведении. Чтобы наметить путь к решению этой задачи, рассмотрим события

$E =$ „$x_1 < 3$" и $F =$ „$x_2 < 4$". Для них

$\mu(E) = \frac{1}{3}$ и $\mu(F) = \frac{1}{2}$; если под независимостью испытаний понимать независимость любых их результатов, в данном случае E и F, то должно выполняться равенство $\mu(E \cap F) = \frac{1}{6}$.

Мы видим, таким образом, что если математическое описание некоторого эксперимента дается пространством с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$, то двукратное независимое повторение этого эксперимента должно описываться декартовым произведением пространства $(X, \mathbf{S}, \mu)$ самого на себя.

Так же как два повторения эксперимента приводят к двумерному декартову произведению, так любое конечное число n повторений приводит к n-мерному декартову произведению. Математической моделью бесконечной последовательности независимых повторений является бесконечномерное произведение. Хотя бесконечная последовательность повторений эксперимента практически неосуществима, но рассмотрение бесконечных произведений приносит большую пользу. Дело в том, что многие вероятностные утверждения относятся к результатам длинных серий испытаний, и точный смысл эти утверждения получают только в строго сформулированных предельных теоремах.

В заключение этого параграфа сделаем одно замечание общего характера. Математика качественно отличается от таких наук, как физика, химия и др., тем, что она в своих выводах не опирается постоянно на опытные данные, с помощью которых естествоиспытатель пытается получить ответы на свои вопросы, а развивается в рамках исходной конструкции или системы аксиом, которыми человек описал исследуемый объект. Таким образом, математика и, в частности, теория вероятностей, исследует природу окружающих нас явлений методологически иначе — **изучаются не сами явления непосредственно, а *модели* этих явлений, созданные однажды на основе человеческого опыта.** Ценность той или иной модели определяется соответствием выводов теории и наших наблюдений и целиком зависит от выбора аксиом, характеризующих объект.

Счетная аддитивность вероятности и вместе с ней свойство σ-алгебры являются качествами более топкими и менее контролируемыми нашей интуицией (так же, впрочем, как и многое другое, связанное с понятием бесконечности). Введение вероятностных свойств

обусловлено главным образом возможностью построения содержательной математической теории. Многочисленные приложения теории вероятностей, развитой из системы аксиом, обнаруживают её высокую эффективность и целесообразность.
На этом мы заканчиваем наши вводные замечания и переходим к подробному изучению основных понятий и результатов теории вероятностей.

10.2. НЕЗАВИСИМОСТЬ

Пространством вероятностей называется пространство $(X, \mathbf{S}, \mu)$ с вполне конечной мерой, такое, что *μ(X) = 1;* мера μ называется при этом *вероятностной мерой* или просто *вероятностью.*
Для математического описания экспериментов со случайными исходами нам потребуется прежде всего понятие *пространства элементарных событий* (или *исходов),* соответствующего рассматриваемому эксперименту. Таким пространством мы будем называть любое множество Ω взаимоисключающих исходов эксперимента, такое что каждый интересующий нас результат эксперимента может быть однозначно описан с помощью элементов этого множества.
Рассмотрим конечные или счетные пространства элементарных событий Ω. Это так называемые *дискретные* пространства.
Элементы пространства Ω мы будем обозначать буквой ω и называть их *элементарными событиями* (или *элементарными исходами).*
Говорят, что заданы *вероятности элементарных событий,* если на Ω задана неотрицательная числовая функция **P** такая, что

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathsf{P}(\omega) = 1$$

(говорят также, что *функция* **P** *задает на* Ω *распределение вероятностей).*
Вероятностью события A называется число

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathsf{P}(\omega),$$

Отметим далее, что далеко не для всех эксперимен тов можно построить модели с дискретным пространством элементарных событий. Допустим, например, что измеряется энергия частиц, возможные значения которой заполняют отрезок [0, *V],* *V* > 0. Ведь множество точек этого отрезка (т. е. множество элементарных событий) континуально. Или, если, например, результатом эксперимента является электрокардиограмма, снятая с больного. Здесь результатом эксперимента является элемент некоторого функционального пространства. В этих случаях требуются более общие схемы.

Из приведенных выше определений, пользуясь абсолютной сходимостью рядов $\sum\limits_{\omega\in A} \mathsf{P}(\omega)$, нетрудно получить следующие свойства вероятности.

1) $\mathsf{P}(\varnothing)=0,\ \mathsf{P}(\Omega)=1.$

2) $$\mathsf{P}(A+B)=\sum_{\omega\in A\cup B}\mathsf{P}(\omega)=\sum_{\omega\in A}\mathsf{P}(\omega)+\sum_{\omega\in B}\mathsf{P}(\omega)-\sum_{\omega\in A\cap B}\mathsf{P}(\omega)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)-\mathsf{P}(AB).$$

3) $\mathsf{P}(\bar{A})=1-\mathsf{P}(A).$

Отсюда следует, в частности, что для *непересекающихся* (несовместных) событий *A и B*

$$\mathsf{P}(A+B)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B).$$

Это свойство *аддитивности вероятности* сохранится и для совокупности из произвольного числа непересекающихся событий $A_1, A_2, \ldots$, если $A_iA_j=\varnothing$ при $i\neq j$, то

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(A_k).$$

Это следует из равенства

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}(A_k)$$

и того, что $\mathsf{P}\left(\bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} A_k\right)\to 0$ при $n\to\infty$.

Для произвольных *A* и *B* $\mathsf{P}(A+B)\leqslant\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)$. Это неравенство справедливо, очевидно, и для суммы произвольного числа событий:

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(A_k).$$

Мы рассматривали такие задачи, в которых множество исходов состояло не более чем из счетного числа элементов. В этом случае вероятность **P***(A)* определялась нами с помощью вероятностей **P**(ω) элементарных исходов ω. Ею оказалась функция, определенная на всех подмножествах *A* пространства элементарных событий Ω и обладающая свойствами:

1) $\mathsf{P}(A) \geqslant 0.$
2) $\mathsf{P}(\Omega) = 1.$
3) Для непересекающихся событий $A_1, A_2, \ldots$

$$\mathsf{P}(\bigcup A_j) = \sum \mathsf{P}(A_j).$$

Однако, легко можно представить себе задачу, где множество всех исходов несчетно. Например, случайное бросание точки в отрезок $[t_1, t_2]$ (скажем, эксперимент с измерением температуры) имеет континуум исходов, так как результатом может быть любая точка отрезка. При этом если в экспериментах, имеющих конечное или счетное множество исходов, любая совокупность исходов представляла событие, то в рассматриваемом примере дело обстоит иначе. Мы встретимся с большими трудностями, если будем считать событием любое подмножество этого отрезка. Здесь в качестве событий нужно выделить *специальный класс подмножеств.*

Пусть пространство элементарных событий Ω есть произвольное множество, а $\mathscr{A}$ — некоторая система подмножеств множества Ω.

$\mathscr{A}$ называется *алгеброй,* если:

A1. $\Omega \in \mathscr{A}.$

A2. Из того, что $A \in \mathscr{A}$ и $B \in \mathscr{A}$ следует, что

$$A \bigcup B \in \mathscr{A}, \quad A \bigcap B \in \mathscr{A}.$$

A3. Если $A \in \mathscr{A}$, то $\bar{A} \in \mathscr{A}.$

Нетрудно видеть, что здесь в условии A2 достаточно требовать выполнения лишь одного из приведенных двух соотношений. Второе будет выполняться автоматически.

Класс множеств $\mathfrak{F}$ называется σ-*алгеброй,* или *борелевским полем* событий, если свойство A2 выполняется для любых последовательностей множеств:

A2'. Если $\{A_n\}$ есть последовательность множеств из $\mathfrak{F}$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}.$$

Здесь, как и в A2, достаточно, чтобы выполнялось лишь одно из этих двух соотношений. Второе будет следствием равенства $\overline{\bigcap A_n} = \bigcup \bar{A}_n.$

Таким образом, алгебра есть класс множеств, замкнутый относительно конечного числа операций дополнения, объединения и пересечения; σ -алгебра есть класс множеств, замкнутый относительно счетного числа этих операций.

Если задано множество Ω и какая-нибудь алгебра или σ -алгебра $\mathfrak{F}$ его подмножеств, то говорят, что задано *измеримое пространство* $\langle \Omega, \mathfrak{F} \rangle$.

На отрезке [0, 1] все множества, составленные из конечного числа отрезков или интервалов, образуют алгебру, но не σ -алгебру.
Для того чтобы формализовать какую-либо вероятностную задачу, надо соответствующему эксперименту приписать измеримое пространство $\langle \Omega, \mathfrak{F} \rangle$. Ω означает множество элементарных исходов эксперимента, а алгебра или σ –алгебра $\mathfrak{F}$ выделяет класс событий. Все остальные подмножества Ω, не входящие в $\mathfrak{F}$, *событиями не являются.*
При этом класс событий $\mathfrak{F}$ часто будет удобно определять как σ -алгебру, порожденную той или иной алгеброй $\mathscr{A}$.
Выделение той или иной алгебры или σ-алгебры событий $\mathfrak{F}$ обусловлено, с одной стороны, существом рассматриваемой задачи, с другой стороны — природой множества Ω. Как мы увидим, далеко не всегда можно определить вероятность так, чтобы она имела смысл для *любого* подмножества Ω.
Введем понятие вероятности событий.
Рассмотрим пространство Ω и какую-нибудь выделенную в нем систему множеств $\mathscr{A}$, образующую *алгебру* событий.
Вероятность на $\langle \Omega, \mathscr{A} \rangle$ *есть числовая функция, определенная на множествах из* $\mathscr{A}$ *и обладающая следующими свойствами:*

P1. $\mathsf{P}(A) \geqslant 0$ *для любого* $A \in \mathscr{A}$.

P2. $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

P3. *Если последовательность* $\{A_n\}$ *событий такова, что* $A_iA_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *то*

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n). \tag{1}$$

Эквивалентным аксиоме P3 будет требование аддитивности (1) для *конечного* набора событий A_j и следующая *аксиома непрерывности.*
P3'. Пусть последовательность $\{B_n\}$ событий такова, что $B_{n+1} \subset B_n$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B \in \mathscr{A}$, тогда $\mathsf{P}(B_n) \to \mathsf{P}(B)$ при $n \to \infty$ю
Тройка $\langle \Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P} \rangle$ называется *вероятностным пространством в широком смысле.*
Если некоторая алгебра $\mathfrak{F}$ образует σ-*алгебру* $(\mathfrak{F} = \sigma(\mathfrak{F}))$, то условие $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$ в аксиоме P3 (для вероятности на $\langle \Omega, \mathfrak{F} \rangle$) *будет выполняться автоматически.*
Тройка $\langle \Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P} \rangle$, где $\mathfrak{F}$ — σ -алгебра называется просто *вероятностным пространством.*
Таким образом, задание вероятностного пространства есть задание счетно-аддитивной неотрицательной меры на измеримом пространстве, такой, что мера Ω равна 1. В таком виде аксиоматика

теории вероятностей была сформулировапа А. Н. Колмогоровым. Введенная система аксиом является неполпой и непротиворечивой. Построение вероятностного пространства $\langle \Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P} \rangle$ является *основным этапом* в создании математической модели (формализации) того или иного эксперимента.

Вернемся теперь к определению вероятностного пространства. Пусть тройка $\langle \Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P} \rangle$ образует вероятностное пространство в широком смысле ($\mathscr{A}$ есть алгебра).

Как мы уже видели, с каждой алгеброй $\mathscr{A}$ связана σ-алгебра $\mathfrak{F} = \sigma(\mathscr{A})$, порожденная $\mathscr{A}$. Существенный интерес для нас представляет следующий вопрос: определяет ли вероятностная мера **P** на $\mathscr{A}$ меру на $\mathfrak{F} = \sigma(\mathscr{A})$ и однозначно ли это происходит? Другими словами, достаточно ли для построения вероятностного пространства $\langle \Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P} \rangle$ задать вероятность **P** лишь на какой-нибудь алгебре $\mathscr{A}$, порождающей $\mathfrak{F}$ (т. е. построить какое-нибудь вероятностное пространство в широком смысле $\langle \Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P} \rangle$, где $\sigma(\mathscr{A}) = \mathfrak{F}$).

Ответ на этот важный вопрос содержится в следующей теореме Каратеодори.

Теорема о продолжении меры. *Пусть* $\langle \Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P} \rangle$ *вероятностное пространство в широком смысле. Тогда существует и притом единственная вероятностная мера* Ω, *определенная на* $\mathfrak{F} = \sigma(\mathscr{A})$ *такая, что*

$$Q(A) = \mathsf{P}(A) \quad \text{для всех } A \in \mathscr{A}.$$

Следствие. *Каждое вероятностное пространство в широком смысле* $\langle \Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P} \rangle$ *автоматически определяет вероятностное пространство* $\langle \Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P} \rangle$ *с* $\mathfrak{F} = \sigma(\mathscr{A})$.

Доказательство теоремы Каратеодори буде приведено позднее.

Если **E** — конечный или бесконечный класс измеримых множеств в пространстве вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$, то множества класса **E** называются *независимыми,* если

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

для любого конечного класса $\{E_i : i = 1, \ldots, n\}$ множеств из **E**.

В случае, когда класс **E** состоит всего из двух множеств *E* и *F*, условие независимости выражается равенством

$$\mu(E \cap F) = \mu(E)\,\mu(F).$$

В качестве примера независимых множеств возьмем множества $E = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ a \leqslant y \leqslant b\}$ и $F = \{(x, y) : c \leqslant x \leqslant d,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ в единичном квадрате с лебеговской мерой (a, b, c и d — произвольные числа, принадлежащие замкнутому единичному интервалу [0, 1]). Заметим, что для того, чтобы множества некоторого класса **E** (даже конечного) были независимы, не достаточно попарной независимости этих множеств.

Если $\mathfrak{E}$ —конечное или бесконечное множество измеримых действительных функций на пространстве вероятностей $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$, то функции, принадлежащие множеству $\mathfrak{E}$, называются *независимыми,* если

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{x : f_i(x) \in M_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mu(\{x : f_i(x) \in M_i\})$$

для любого конечного множества $\{f_i : i = 1, \ldots, n\}$ различных функций из $\mathfrak{E}$ и для любого конечного класса борелевских множеств $\{M_i : i = 1, \ldots, n\}$ на числовой прямой. Этому условию эквивалентно следующее: если для каждой функции f из $\mathfrak{E}$ произвольным образом выбрать борелевское множество M_f на числовой прямой, то множества класса $\mathbf{E} = \{f^{-1}(M_f) : f \in \mathfrak{E}\}$ независимы. Пример двух независимых функций можно получить, взяв в качестве X, как в предыдущем примере, единичный квадрат с лебеговской мерой и определив функции f и g равенствами $f(x, y) = x$ и $g(x, y)=y$.

Наши примеры независимых множеств и функций указывают на тесную связь между понятиями независимости и декартова произведения. Действительно, пусть f_1 и f_2— две независимые функции, заданные на $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$; рассмотрим отображение T пространства X в эвклидову плоскость, определенное равенством

$$T(x) = (f_1(x),\ f_2(x)).$$

Если измеримость на плоскости понимать в смысле Бореля, то, так как $X \in S$ и функции f_1 и f_2 измеримы, измеримо и отображение T; сами функции f_1 и f_2 являются, конечно, измеримыми отображениями пространства X в числовую прямую. Обращаясь непосредственно к определению независимости, мы видим, что независимость функций f_1 и f_2 может быть очень просто выражена равенством

$$\mu T^{-1} = \mu f_1^{-1} \times \mu f_2^{-1}.$$

(Если обозначить, как это иногда делается, отображение T символом $f_1 \times f_2$, то последнее равенство примет вид дистрибутивного закона,) Если функции g_1 и g_2 определены на плоскости равенствами

$$g_1(y_1, y_2) = y_1 \quad \text{и} \quad g_2(y_1, y_2) = y_2,$$

то, как легко видеть, $f_1 = g_1 T$ и $f_2 = g_2 T$. Уже из этих соображений вытекает следующий нетривиальный результат.

Теорема 1. *Если f_1 и f_2 — независимые функции, ни одна из которых не равна нулю почти всюду, то f_1 и f_2 обе интегрируемы тогда и только тогда, когда интегрируемо их произведение f_1f_2. Если это условие выполняется, то*

$$\int f_1 f_2 \, d\mu = \int f_1 \, d\mu \cdot \int f_2 \, d\mu.$$

Доказательство. В только что введенных обозначениях $|f_i|$ интегрируемы тогда и только тогда, когда интегрируемы g_i, $i=1$, 2 (см. теорему 3 § 8.1). Если интегрируемы $|g_t|$ и $|g_2|$, то, в силу теоремы Фубини, интегрируема функция $|g_1g_2|$. Обратно, если функция $|g_1g_2|$ интегрируема, то интегрируемы почти все ее сечения, а так как всякое такое сечение пропорционально $|g_1|$ или $|g_2|$ и множители пропорциональности могут быть выбраны отличными от нуля, в силу того, что f_1 и f_2 не равны нулю почти всюду, то $|g_t|$ и $|g_2|$оказываются интегрируемыми. Еще раз применяя теорему 3 § 8.1, мы придем к заключению, что $|g_1g_2|$ интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема $|f_1f_2|$. Первое утверждение теоремы доказано. Второе следует из теоремы Фубини.

Применение произведений пространств в исследовании независимых функций выходит далеко за пределы описанного частного случая. Пусть, например, $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций и Y — декартово произведение последовательности числовых прямых, на каждой из которых измеримость понимается в смысле Бореля. Если для любого x

$$T(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots),$$

то T будет измеримым отображением X в Y; для того, чтобы функции f_n были независимыми, необходимо и достаточно условие:

$\mu T^{-1} = \mu f_1^{-1} \times \mu f_2^{-1} \times \ \ldots$ Если на Y задать функции g_n равенствами

$g_n(y_1, y_2, \ldots) = y_n, \ n = 1, 2, \ldots,$ то

$f_n = g_n T, \ n = 1, 2, \ldots$ Подобный же результат справедлив для произвольных (конечных, счетных и несчетных) множеств функций.

Теорема 2. *Пусть* $\{f_{ij} : i = 1, \ldots, k; \ j = 1, \ldots, n_i\}$— *множество независимых функций. Если* φ_i— *действительная измеримая в смысле Бореля функция от* n_i *действительных переменных,* $i = 1, \ldots, k$, *и если*

$$f_i(x) = \varphi_i\big(f_{i1}(x), \ldots, f_{in_i}(x)\big),$$

то функции $f_1, \ldots, f_k$ *независимы.*

Доказательство. Эта теорема легко следует из установленной выше связи между произведениями пространств и понятием независимости. Пусть Y_{ij} — числовая прямая, i=1, ..., k, j= 1, ..., n_i и

$$Y = \mathop{\times}_{i,\,j} Y_{ij}.$$

Положим

$$T(x) = \big(f_{11}(x), \ldots, f_{1n_1}(x), \ldots, f_{k1}(x), \ldots, f_{kn_k}(x)\big),$$

$$g_{ij}(y_{11}, \ldots, y_{1n_1}, \ldots, y_{k1}, \ldots, y_{kn_k}) = y_{ij}$$

и

$$g_i = \varphi_i(g_{i1}, \ldots, h_{in_i});$$

тогда $f_i = g_i T, \ \ i = 1, \ldots, k.$ Независимость функций g_i очевидна, следовательно, функции f_i также независимы.

В заключение этого параграфа введем один термин, часто употребляющийся в теории вероятностей. Пусть f—действительная измеримая функция на $(X, \mathbf{S}, \mu)$, такая, что f^2 интегрируема. Тогда, в силу неравенства Буняковского (т. е. неравенства Гёльдера при p = 2, см. теорему 1 § 8.4), сама f также интегрируема и

$$\left(\int f\,d\mu\right)^2 \leqslant \int f^2\,d\mu.$$

Если положить $\alpha = \int f\,d\mu,$ то $\int (f - \alpha)^2\,d\mu$ называется *дисперсией* функции f и обозначается $\sigma^2(f)$. Так как интеграл функции, тождественно равной постоянной, по пространству вероятностей равен самой этой постоянной, то, согласно определению α,

$$\sigma^2(f) = \int f^2\,d\mu - \left(\int f\,d\mu\right)^2.$$

Ясно, что, какова бы ни была действительная постоянная *c*,

$$\sigma^2(cf) = c^2\sigma^2(f).$$

Теорема 3. *Если f и g — независимые функции с конечными дисперсиями,* то

$$\sigma^2(f+g) = \sigma^2(f) + \sigma^2(g).$$

Доказательство. Имеем равенства

$$\sigma^2(f+g) = \int (f+g)^2\,d\mu - \left(\int (f+g)\,d\mu\right)^2 =$$

$$= \int f^2\,d\mu + 2\int fg\,d\mu + \int g^2\,d\mu - \left(\int f\,d\mu\right)^2 -$$

$$-2\left(\int f\,d\mu\right)\left(\int g\,d\mu\right) - \left(\int g\,d\mu\right)^2;$$

требуемый результат следует из теоремы 1.

1. Пусть *F* — измеримое множество положительной меры в пространстве вероятностей $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$. Если, каково бы ни было измеримое множество *E*,

$$\mu_F(E) = \frac{\mu(F \cap E)}{\mu(F)},$$

то μ_F представляет собой вероятностную меру на **S**, причем $\mu_F(F)=1$; множества *E* и *F* независимы тогда и только тогда, когда $\mu_F(E) = \mu(E)$. Число $\mu_F(E)$ называется *условной вероятностью E при условии F*.

2. Если $\{E_i : i = 1, \ldots, n\}$—конечный класс измеримых множеств положительной меры, то

$$\mu(E_1 \cap \ldots \cap E_n) = \mu(E_1)\,\mu_{E_1}(E_2)\ \ldots\ \mu_{E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1}}(E_n).$$

Этот результат называется *теоремой умножения* для условных вероятностей.

3. Если $\{E_i : i = 1, \ldots, n\}$—конечный класс непересекающихся измеримых множеств положительной меры, соединение которых равно *X* (т. е. $\{E_i\}$ представляет собой разбиение *X*), то, каково бы ни было измеримое множество

$F,\ \mu(F) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\,\mu_{E_i}(F);$ если *F* имеет положительную меру,

то

$$\mu_F(E_j) = \frac{\mu(E_j)\,\mu_{E_j}(F)}{\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\,\mu_{E_i}(F)}.$$

Это — так называемая *теорема Байеса.*

4. Разбиения $\{E_i : i = 1, \ldots, n\}$ и $\{F_j : j = 1, \ldots, m\}$ пространства X называются независимыми, если $\mu(E_i \cap F_j) = \mu(E_i)\,\mu(F_j)$ для $i = 1,..., n$ и $j= 1,..., m$. Два множества E и F независимы тогда и только тогда, когда независимы разбиения $\{E, E'\}$ и $\{F, F'\}$.

5. Пусть $X = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ —единичный интервал с лебеговской мерой. Для любого целого положительного n зададим на X функцию f_n, положив $f_n(x) = +1$ или —1, в зависимости от того, нечетно или четно целое положительное число i, при котором $\frac{i-1}{2^n} \leqslant x < \frac{i}{2^n}$. Функции f_n называются *функциями Радемахера.*

Любые две из трех функций f_1 и f_2 и $f_1 f_2$ независимы, тогда как все три не независимы.

6. Пусть f u g — независимые интегрируемые функции, M — борелевское множество на числовой прямой. Если $E = f^{-1}(M)$, то

$$\int_E fg\,d\mu = \int_E f\,d\mu \cdot \int_E g\,d\mu.$$

[Указание. Так как $\chi_E(x) = \chi_M(f(x))$, то, в силу теоремы 2, функции $f\chi_M(f)$ и g независимы.]

7.Если f и g — измеримые функции с конечными дисперсиями, причем $\sigma(f)\,\sigma(g) \neq 0$, то

$$r(f, g) = \frac{\int fg\,d\mu - \int f\,d\mu \cdot \int g\,d\mu}{\sigma(f)\,\sigma(g)}$$

называется *коэффициентом корреляции* между f и g; число $\sigma(f) = \sqrt{\sigma^2(f)}$ называется *средним квадратичным отклонением* функции f. Говорят, что функции f и g некоррелированы, если $r(f, g) = 0$. Равенство $\sigma^2(f+g) =$

$= \sigma^2(f) + \sigma^2(g)$ имеет место тогда и только тогда, когда f и g некоррелированы.

8. Всегда ли независимы две некоррелированные функции f и g (У к а з а н и е. Взять в качестве X единичный интервал и положить
$f(x) = \sin 2\pi x$,
$g(x) = \cos 2\pi x$.)

9. Если f и g — независимые интегрируемые функции, такие, что функция $(f+g)^2$ интегрируема, то f^2 и g^2 также интегрируемы.

10.3. РЯДЫ НЕЗАВИСИМЫХ ФУНКЦИЙ

Всюду в этом параграфе рассматривается некоторое фиксированное пространство вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$. Прежде всего мы установимтак называемое *неравенство Колмогорова.*

Теорема 1. *Если* f_i, $i = 1, ..., n$, *— независимые функции, такие, что* $\int f_i \, d\mu = 0$ *и* $\int f_i^2 \, d\mu < \infty$, $i = 1, \ldots, n$ *и если*

$f(x) = \bigcup_{k=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{k} f_i(x) \right|$ (*т. е. f есть наибольшая из абсолютных величин сумм* $\sum_{i=1}^{k} f_i$, $k = 1, \ldots, n$), *то, каково бы ни было положительное число* ε,

$$\mu(\{x : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma^2(f_k).$$

Доказательство. Положим

$$E = \{x : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}, \qquad s_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

и

$$E_k = \{x : |s_k(x)| \geqslant \varepsilon\} \cap \bigcap_{1 \leqslant i < k} \{x : |s_i(x)| < \varepsilon\}.$$

Тогда

$$\int_{E_k} s_n^2\, d\mu = \int_{E_k} s_k^2\, d\mu + \mu(E_k) \sum_{k<i\leqslant n} \int f_i^2\, d\mu \geqslant$$

$$\geqslant \int_{E_k} s_k^2\, d\mu \geqslant \mu(E_k)\,\varepsilon^2.$$

Так как $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ и множества E_k не пересекаются, то

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma^2(f_k) = \int (f_1 + \ \ldots \ + f_n)^2\, d\mu \geqslant \int_E s_n^2\, d\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} s_n^2\, d\mu \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)\,\varepsilon^2 = \mu(E)\,\varepsilon^2.$$

Теорема 2. *Если $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций., таких, что* $\int f_n\, d\mu = 0$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(f_n) < \infty,$ *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится почти всюду.*

Доказательство. Положим

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x),\ n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$a_m(x) = \sup\{|s_{m+k}(x) - s_m(x)| : k = 1,\ 2,\ \ldots\},$$

$$a(x) = \inf\{a_m(x) : m = 1,\ 2,\ \ldots\}.$$

Тогда для сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{n} f_n(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы *a (x)* = 0. В силу неравенства Колмогорова, для любого положительного ε и для любых двух целых положительных чисел *m* и *n*

$$\mu\left(\left\{x : \bigcup_{k=1}^{n} |s_{m+k}(x) - s_m(x)| \geqslant \varepsilon\right\}\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{m+n} \sigma^2(f_k),$$

откуда

$$\mu(\{x : a_m(x) \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma^2(f_k).$$

Следовательно,

$$\mu(\{x : a(x) \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma^2(f_k).$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(f_n)$ сходится, то $\mu(\{x : a(x) \geqslant \varepsilon\}) = 0.$

Но ε было выбрано произвольно, поэтому теорема доказана.

Следующая теорема содержит результат, в известном смысле обратный предыдущему.

Теорема 3. *Если* $\{f_n\}$ *— последовательность независимых функций, таких, что* $\int f_n d\mu = 0$ *и* $|f_n(x)| \leqslant c,$ *где с — некоторая положительная постоянная, и если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится на множестве положительной меры, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(f_n) < \infty.$$

Доказательство. Обозначим $s_0(x) = 0$ и $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x),$ n=1, 2, ... Тогда, в силу теоремы Егорова (см. упр. 2 § 4.5), существует положительное число *d*, такое, что множество

$$E = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{x : |s_n(x)| \leqslant d\}$$

имеет положительную меру. Если мы положим

$$E_n = \bigcap_{i=1}^{n} \{x : |s_i(x)| \leqslant d\}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

то $\{E_n\}$ будет убывающей последовательностью множеств, пересечение которых равно E.

Положим $F_n = E_{n-1} - E_n,\ n = 1,\ 2,\ \ldots,$ и

$$\alpha_n = \int_{E_n} s_n^2\, d\mu,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$ тогда

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} = \int_{E_{n-1}} s_n^2\, d\mu - \int_{F_n} s_n^2\, d\mu - \int_{E_{n-1}} s_{n-1}^2\, d\mu =$$

$$= \int_{E_{n-1}} f_n^2\, d\mu + 2 \int_{E_{n-1}} f_n s_{n-1}\, d\mu - \int_{F_n} s_n^2\, d\mu,\ n = 1,\ 2, \ldots$$

Так как

$$\int_{E_{n-1}} f_n^2\, d\mu = \mu(E_{n-1})\, \sigma^2(f_n), \qquad \int_{E_{n-1}} f_n s_{n-1}\, d\mu = 0,$$

$$\mu(E_{n-1}) \geqslant \mu(E_n)$$

и

$$|s_n(x)| \leqslant c + d$$

для x принадлежащих F_n, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} \geqslant \mu(E)\, \sigma^2(f_n) - (c+d)^2 \mu(F_n), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Суммируя эти неравенства по n от 1 до k, получим

$$d^2 \geqslant \mu(E_k)\, d^2 \geqslant \alpha_k \geqslant \mu(E) \sum_{n=1}^{k} \sigma^2(f_n) - (c+d)^2.$$

Из теорем 2 и 3 вытекает, что если $\{f_n\}$—равномерно ограниченная последовательность независимых функций, таких, что $\int f_n\, d\mu = 0,$

n=1, 2, ..., то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ либо почти всюду сходится, либо почти всюду расходится; таким образом, мера множества, на котором этот ряд сходится, равна либо 0, либо 1.

Теорема 4. *Если* $\{f_n\}$ *— последовательность независимых функций, таких, что почти всюду* $|f_n(x)| \leqslant c, \ n = 1, 2, \dots,$ *где с некоторая постоянная, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится почти всюду тогда и только тогда, когда сходятся ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu \ \text{ и } \ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(f_n).$$

Доказательство. Достаточность высказанного условия получим, применив теорему 2 к последовательности функций $\{g_n\}$, определенных равенствами $g_n(x) = f_n(x) - \int f_n \, d\mu, \ n = 1, 2, \dots$

Для доказательства необходимости условия рассмотрим декартово произведение пространства X самого на себя и функции h_n на этом произведении, определенные равенствами

$$h_n(x, y) = f_n(x) - f_n(y), \quad n = 1, 2, \dots$$

Одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится почти всюду и ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x, y),$ и так как

$$\int h_n \, d(\mu \times \mu) = 0,$$

то, согласно теореме 3, $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(h_n) < \infty.$ Но $\sigma^2(h_n) = 2\sigma^2(f_n),$ поэтому $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(f_n) < \infty.$ Так как $\sigma^2(g_n) = \sigma^2(f_n),$ то, в силу теоремы 2, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ сходится почти всюду, и из соотношений

$$\int f_n\, d\mu = f_n(x) - g_n(x), \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu.$

Полученные здесь результаты представляют собой частные случаи следующей весьма общей теоремы, принадлежащей Колмогорову и носящей название *теоремы о трех рядах.*

Теорема 5. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций, c — положительная постоянная и* $E_n = \{x : |f_n(x)| \leqslant c\}.$

Тогда для того, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

сходился почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы сходились следующие три ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n'),$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_n\, d\mu,$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{E_n} f_n^2\, d\mu - \left(\int_{E_n} f_n\, d\mu \right)^2 \right).$

Доказательство. Положим

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) \\ c \end{cases} \quad \text{и} \quad h_n(x) = \begin{cases} f_n(x), \\ -c, \end{cases} \quad \text{когда} \quad \begin{cases} |f_n(x)| \leqslant c, \\ |f_n(x)| > c. \end{cases}$$

Ясно, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$$

сходятся в одних и тех же точках. Из теоремы 4 (примененной отдельно к $\{g_n\}$ и $\{h_n\}$) следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится почти всюду тогда и только тогда, когда сходятся ряды

г) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{E_n} f_n \, d\mu \pm c\mu(E_n') \right),$$

д) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{E_n} f_n^2 \, d\mu - \left(\int_{E_n} f_n \, d\mu \right)^2 + c^2\mu(E_n)\,\mu(E_n') \mp 2c\mu(E_n') \int_{E_n} f_n \, d\mu \right).$$

Непосредственно видно, что условие сходимости рядов „а", *„б"* и „в" эквивалентно сходимости всех четырех рядов „г" и „д" (при обеих комбинациях знаков $\pm$ и $\mp$). Остается только заметить, что так как члены сходящегося ряда ограничены, то ряд, полученный почленным перемножением двух сходящихся рядов, в одном из которых все члены неотрицательны, сходится.

1. Следующий результат, который неявно фигурировал в рассуждениях, касавшихся соотношений между сходимостью в среднем и сходимостью по мере, известен под названием *неравенства Чебышева.* Если *f*—измеримая функция с конечной дисперсией, то, каково бы ни было положительное число ε,

$$\mu\left(\left\{ x : \left| f(x) - \int f \, dx \right| \geqslant \varepsilon \right\} \right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma^2(f).$$

Неравенство Колмогорова приводится к неравенству Чебышева при $n = 1$. Так как в обозначениях теоремы 1

$$\{ x : |f(x)| \geqslant \varepsilon \} = \bigcup_{k=1}^{n} \{ x : | \sum_{i=1}^{k} f_i(x) | \geqslant \varepsilon \},$$

то, применив неравенство Чебышева отдельно к каждой из сумм вида $\sum_{i=1}^{k} f_i(x)$, мы получим

$$\mu(\{x : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\,\sigma^2(f_k).$$

2. Интересный результат получится, если применить теорему 4 к последовательности функций Радемахера $\{f_n\}$ (см. упр. 5 § 10.2). Если $\{c_n\}$ — последовательность действительных чисел, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ сходится почти всюду или расходится почти всюду, в зависимости от того, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$. На языке теории вероятностей ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n$ сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$; при этом предполагается, что знаки + и — в каждом члене первого ряда равновероятны и выбор того или другого знака не зависит от знаков остальных членов.

3. Тот факт, что мера множества, на котором сходится ряд независимых функций, может равняться только нулю или единице, представляет собой следствие весьма общего принципа, называемого иногда *законом* 0— 1. Предположим, что пространство вероятностей X есть декартово произведение последовательности $\{X_n\}$ пространств вероятности. Пусть $J_n=\{n+1, n+2, \dots\}$, где n — любое целое положительное число. Если измеримое множество E представляет собой J_n-цилиндр при любом n, то $\mu(E)=0$ или 1. [Указание. Положим $\nu(F)=\mu(E\cap F)$ для любого измеримого множества F. Если F является J-цилиндром, причем J есть некоторое конечное множество, то $\nu(F)=\mu(E)\,\mu(F)$. В этом равенстве вместо F можно взять E, так как конечная мера на измеримых множествах в X однозначно определяется своими значениями на J-цилиндрах (с конечными J).]

4. Если $\{E_n\}$— последовательность независимых множеств, то

$$\mu(\limsup_n E_n)=0$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

(см. упр. 6 § 3.3). [У к а з а н и е. Применитe теорему 4 к последовательности $\{\chi_n\}$ характеристических функций множеств E_n.] Этот результат носит название *леммы Бореля — Кантелли.*

5. Две последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ называются *эквивалентными* в смысле Хинчина, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : f_n(x) \neq g_n(x)\}) < \infty.$$

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций; для того чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

сходился почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы существовалапоследовательность $\{g_n\}$, эквивалентная последовательности $\{ f_n \}$, такая, что все f_n имеют конечные дисперсии и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(f_n)$$

сходятся.

6. Если $\{f_n\}$ — последовательность интегрируемых функций, а f— измеримая функция с конечной дисперсией, такая, что при любом целом положительном n функции

$$f_1, \ldots, f_n, \quad f - (f_1 + \ldots + f_n)$$

независимы, то все f_n имеют конечные дисперсии и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n(x) - \int f_n \, d\mu \right)$$

сходится почти всюду. [Указание. Воспользоваться результатом упр. 9 § 10.2 и теоремой о трех рядах.]

10.4. Функции распределения и их свойства

Случайной величиной ξ называется измеримая функция $\xi = \xi(\omega)$, отображающая Ω в множество действительных чисел R, т. е.

функция, для которой прообраз $\{\omega : \xi(\omega) \in B\} = \xi^{-1}(B)$ любого борелевского множества $B \subset R$ есть множество из σ-алгебры $\mathfrak{F}$.
Например, при бросании монеты Ω состоит из двух точек: герба и решетки. Если мы гербу поставим в соответствие 1, а решетке 0, то, очевидно, получим случайную величину.
Случайной величиной будет также число очков на выпавшей грани кости.
Расстояние от начала координат до случайно брошенной точки в квадрат $[0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1]$ тоже будет случайной величиной, так как множество $\{(x, y): x^2 + y^2 < t)$ измеримо. Читатель, наверное, заметил, что в этих примерах придумать неизмеримую функцию от ω, которая отвечала бы какой-нибудь реальной задаче, очень трудно. Такое явление имеет место часто, но не всегда. При рассмотрении случайных процессов, нас будут интересовать множества, которые, вообще говоря, событиями не являются и требуют специальных модификаций для того, чтобы их можно было считать событиями.
Как отмечалось выше, из определения случайной величины следует, что для любого множества B из σ-алгебры борелевских множеств на прямой

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}.$$

Следовательно, на измеримом пространстве $\langle R,\ \mathfrak{B}\rangle$ определено распределение $\mathsf{P}_\xi(B) = \mathsf{P}(\xi \in B)$, которое называется *распределением случайной величины* ξ и которое порождает вероятностное пространство $\langle R,\ \mathfrak{B},\ \mathsf{P}_\xi\rangle$. В частности, на всей вещественной оси определена функция $F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x)$, которая называется *функцией распределения случайной величины* ξ
Ниже мы увидим, что функция распределения случайной величины полностью определяет ее распределение и часто используется для описания последнего.
Там, где это не вызовет недоразумений, вместо $F_\xi(x)$ будем писать просто $F(x)$.
Обычно мы будем рассматривать случайные величины ξ, для которых $\mathsf{P}(|\xi| < \infty) = 1$. Если это условие не выполнено, то функция ξ (ω) называется *несобственной.* Каждый случай, когда такие величины будут появляться, мы будем особо оговаривать.
Пример 1. Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью успеха p и объемом выборки k. Как известно, множество элементарных исходов Ω в этом случае есть множество всевозможных последовательностей из нулей и единиц длины k. За σ-алгебру $\mathfrak{F}$ возьмем систему всех подмножеств Ω. Определим на Ω случайную величину следующим

образом: каждой последовательности из нулей и единиц поставим в соответствие число единиц в этой последовательности.
Вероятность *r* успехов, как мы уже знаем, есть:

$$P(r,k)=\binom{k}{r}p^r(1-p)^{k-r}.$$

Поэтому функция распределения *F(x)* введенной случайной величины будет определяться следующим образом:

$$F(x)=\sum_{r<x}P(r,k).$$

Суммирование здесь ведется по всем целым *r*, меньшим *x*. Если $x<0$, то $F(x)=0$, если же $x>k$, то $F(x)=1$.
Пример 2. Пусть на отрезок *[a, b]* вещественной прямой случайным образом бросается точка, т. е. вероятность попадания точки в некоторое множество из *[a, b]* полагается пропорциональной лебеговой мере этого множества. Ω здесь есть отрезок *[a, b]*, σ-алгебра $\mathfrak{F}$ есть класс борелевских подмножеств из *[a, b]*. Определим случайную величину ξ так:

$$\xi(\omega)=\omega,\quad \omega\in[a,\ b],$$

т. е. случайная величина равна тому числу из *[a, b]*, в которое попала бросаемая точка. Это измеримая функция. Если $x<a$, то $F(x)=\mathsf{P}(\xi<x)=0$. Пусть $x\in[a,\ b]$. Тогда $\{\xi<x\}$ означает, что точка попала в интервал $[a,x)$. Вероятность попадания в этот интервал пропорциональна длине этого интервала, значит,

$$F(x)=\mathsf{P}(\xi<x)=\frac{x-a}{b-a}.$$

Если же $x>b$, то понятно, что $F(x)=1$. Окончательно находим

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Эта функция распределения определяет так называемое *равномерное распределение* на интервале [*a*, *b*].
Если *μ(B)* —мера Лебега на $\langle R,\ \mathfrak{B}\rangle$, то, как мы увидим ниже, нетрудно установить также, что в этом случае $\mathsf{P}_\xi(B)=\frac{1}{b-a}\mu(B\cap[a,b])$.

Рассмотрим свойства функций распределения.
Пусть *F(x)* есть функция распределения случайной величины ξ. Тогда имеют место следующие свойства *F(x)*:
F1. Свойство МОНОТОННОСТИ: если $x_1\leq x_2$, то $F(x_1)\leq F(x_2)$.

F2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1.$

F3. Свойство непрерывности слева:

$\lim\limits_{x\uparrow x_0} F(x) = F(x_0).$

Доказательство. Так как $\{\xi < x_1\} \subseteq \{\xi < x_2\},$ где $x_1 \le x_2$, то F1 сразу следует из свойства 3) вероятности.

Для доказательства F2 рассмотрим две числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, при этом последовательность $\{x_n\}$ убывает так, что $x_n \to -\infty$, а последовательность y_n возрастает, $y_n \to \infty$. Введем обозначения $A_n = \{\xi < x_n\}$, $B_n = \{\xi < y_n\}$. Из того, что $\{x_n\}$ монотонно стремится к $-\infty$, следует, что последовательность множеств A_n убывает и $\bigcap A_n = \varnothing$. В силу аксиомы непрерывности P3' $\mathsf{P}(A_n) \to 0$ при $n \to \infty$ или, что то же, $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = 0$. Отсюда и из монотонности $F(x)$ следует, что

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$$

Так как последовательность $\{y_n\}$ монотонно сходится к ∞, то последовательность множества B_n возрастает и $\bigcup B_n = \Omega,$ поэтому (см. свойство 9) $\mathsf{P}(B_n) \to 1$. Отсюда, как и прежде, следует, что

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

Свойство F3 доказывается аналогичным способом. Пусть $A = \{\xi < x_0\},\ A_n = \{\xi < x_n\},$ где последовательность $\{x_n\}$ возрастает, $x_n \uparrow x_0$. Последовательность множеств A_n также возрастает и $\bigcup A_n = A$. Следовательно, $\mathsf{P}(A_n) \to \mathsf{P}(A)$. Это означает, что

$\lim\limits_{x\uparrow x_0} F(x) = F(x).$

Нетрудно видеть, что функция F была бы непрерывной справа, если бы мы положили $F(x) = \mathsf{P}(\xi \leqslant x)$.

Теорема 1. *Если функция F(x) обладает свойствами* F1, F2 *и* F3, *то существует вероятностное пространство* $\langle \Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}\rangle$ *и случайная величина* ξ *на нем такая, что* $F_\xi(x)=F(x)$.

Доказательство. Построим сначала вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}\rangle$. В качестве Ω возьмем вещественную прямую R, а в качестве $\mathfrak{F}$ σ-алгебру $\mathfrak{B}$ измеримых по Борелю множеств. Как мы знаем, для построения вероятностного пространства $\langle R, \mathfrak{B}, \mathsf{P}\rangle$ достаточно задать вероятность P на алгебре $\mathscr{A}$, порожденной, скажем, полуинтервалами вида $[\cdot, \cdot)$ (тогда $\sigma(\mathscr{A}) = \mathfrak{B}$). Произвольный элемент A алгебры $\mathscr{A}$ имеет вид конечного объединения непересекающихся полуинтервалов

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i), \quad a_i < b_i$$

(числа a_i и b_i могут быть бесконечными). Мы полагаем по определению

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i)).$$

Совершенно очевидно, что в силу F1, F2 аксиомы P1, P2 выполнены. Остается проверить счетную аддитивность или непрерывность P на алгебре $\mathscr{A}$. Пусть $B_n \in \mathscr{A}$, $B_{n+1} \subset B_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B \in \mathscr{A}$. Мы покажем, что $\mathsf{P}(B_n) \to \mathsf{P}(B)$. Действительно, не ограничивая общности можно считать, что B состоит из одного полуинтервала $[a, b)$. Так как B принадлежит всем B_n, то B_n содержит полуинтервал $[a^n, b^n)$, где $a^n \leqslant a$, $b^n \geqslant b$. Пусть это будет максимальный полуинтервал в B_n, содержащий B. Далее, B_n, начиная с некоторого n не содержат никаких других полуинтервалов вне $[a^n, b^n)$ (если $[c, d) \subset B_n$ при всех n, то $[c, d) \subset B$). Таким образом, из монотонности B_n и того, что $B = [a, b)$ следует, что при всех n, начиная с некоторого $B_n = [a^n, b^n)$, где $a^n \uparrow a$, $b^n = b$. Но в силу F3

$$\mathsf{P}(B_n) = F(b) - F(a^n) \to F(b) - F(a) = \mathsf{P}(B).$$

Таким образом, аксиома P3 также выполнена.

Итак, вероятностное пространство мы построили. Остается в качестве случайной величины ξ взять тождественное отображение действительных чисел на себя. Тогда

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \mathsf{P}(-\infty, x) = F(x).$$

При изучении функций распределений, на основании доказанного утверждения, часто используют удобную модель *выборочного* вероятностного пространства $(R, \mathfrak{B}, \mathsf{P}_\xi)$: считают, что Ω есть вещественная прямая R, $\mathfrak{F}$ есть σ-алгебра борелевских множеств $\mathfrak{B}$, а $\mathsf{P}_\xi(B) = \mathsf{P}(\xi \in B)$ для $B \in \mathfrak{B}$. Пользуясь этим предположением, мы сможем продолжить список примеров распределений.

Пример 3. *Нормальное распределение* (нормальный закон или закон Гаусса).

Функция распределения нормального закона определяется следующим выражением:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(u-a)^2/2\sigma^2} du,$$

Здесь a произвольное, а σ — положительное число. Чтобы убедиться в том, что $F(x)$ есть функция распределения, надо проверить свойства F1, F2, F3. Свойство F3 очевидно, так как *F(x)* — непрерывная функция. Свойства F1, F2 следуют из положительности подынтегральной функции и того, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-a)^2/2\sigma^2} du = \sigma \sqrt{2\pi}.$$

Функция распределения *F(x)* зависит от двух параметров *a* и σ. Если *a* = 0, σ = 1, то нормальное распределение называется *стандартным.*

Пример 4. *Распределение Коши.* Функция распределения определяется формулой

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Так же, как и в предыдущем примере, здесь легко проверяются характеристические свойства функции распределения.

Пример 5. *Распределение Пуассона.* Пусть случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения с вероятностями

$$\mathsf{P}(\xi = m) = \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}, \quad \mu > 0,\ m = 0, 1, 2, \ldots$$

Функция распределения, так же как и в примере 1, будет иметь вид суммы:

$$F(x) = \begin{cases} \sum\limits_{m<x} \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu} & \text{для } x > 0, \\ 0 & \text{для } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Все распределения, рассмотренные в приведенных выше примерах, можно разбить на два типа.

Дискретные распределения соответствуют случайным иоличипам, принимающим конечное или счетное число значений. Сюда относятся примеры 1, 5. Производная функций распределения таких величин всюду равна нулю, за исключением конечного или счетного числа точек $x_1, x_2, \ldots$, где *F(x)* терпит разрыв. Это означает, что ξ может принимать с положительной вероятностью лишь эти значения $x_1, x_2, \ldots$, причем

$$\mathsf{P}(\xi = x_k) = F(x_k + 0) - F(x_k).$$

Из этого равенства видно также, что $\mathsf{P}(\xi = x) = 0$, если и только если *F (x)* в точке *x* непрерывна.

Дискретное распределение бывает удобно характеризовать с помощью таблиц вида

Значения	$x_1, x_2 \ldots$
Вероятности	$p_1, p_2 \ldots$

где $p_i = \mathsf{P}(\xi = x_i) \geqslant 0,\ \Sigma p_i = 1.$

Абсолютно непрерывные распределения. К этому типу относятся распределения $\mathsf{P}_\xi(B)$,представимые при любом борелевском множестве *B* в виде

$$\mathsf{P}_\xi(B) = \mathsf{P}(\xi \in B) = \int_B f(x)\,dx,$$

где

$$f(x) \geqslant 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Из доказательства теоремы 1 (точнее, из теоремы о единственности продолжения меры) нетрудно получить, что приведенное выше определение абсолютной непрерывности эквивалентно представлению

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

для всех $x \in R$. Функции распределения, обладающие таким свойством,, также называются абсолютно непрерывными. Мы имели дело с такими распределениями в примерах 2, 3, 4.
Функция *f(x)* определяется приведенными выше равенствами с точностью до значений на множестве меры Ω и называется *плотностью распределения.* Для нее почти всюду (по мере Лебега) имеет место равенство

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Например, для нормального закона с параметрами

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

(С точки зрения теории меры и интегрирования распределения с такими свойствами являются мерами, абсолютно непрерывными относительно меры Лебега. Утверждение о единственности «почти всюду» функции *f* следует такжеиз теоремы Радона—Никодима.)
Возможны смеси этих двух типов распределений. Но существует еще третий тип, не описываемый предыдущими двумя. Это *сингулярный тип.* Характеризуется он тем, что функция распределения *F (x)* непрерывна, но точки роста *F(x)* образуют множество нулевой меры Лебега. (Точка *x* называется *точкой роста F(x),если* для любого

$\varepsilon > 0$ $F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0$.)

Таким образом, здесь *F(x)* непрерывна, $\frac{dF(x)}{dx} = 0$ почти всюду, а

$F(\infty) - F(-\infty) = 1.$

Примером такой функции распределения может служить известная кривая Кантора, все изменение которой сосредоточено на отрезке [0, 1]: $F(x) = 0$ при $x \leq 0$, $F(x) = 1$ при $x \geq 1$. Строится она следующим образом. Отрезок [0, 1] разбивается на три равные части [0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1]. На внутреннем сегменте мы полагаем $F(x) = 1/2$.

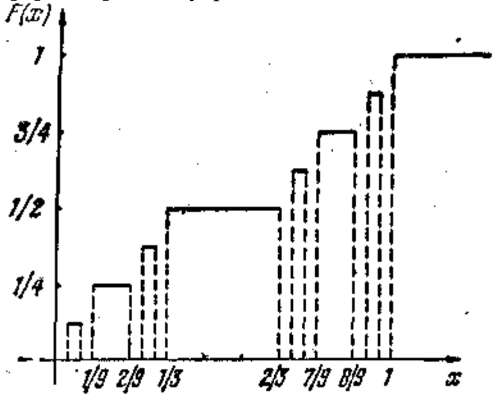


Рис. 1. Процесс построения кривой Кантора.

Оставшиеся два сегмента снова разбиваются на три равные части каждый и на внутренних сегментах $F(x)$ полагается равной соответственно 1/4 и 3/4. Каждый из оставшихся сегментов снова делится на три части и на внутренних $F(x)$ определяется как постоянная, равная среднему арифметическому между соседними, уже определенными значениями $F(x)$, и т. д. В точках, не принадлежащих таким внутренним сегментам, $F(x)$ определяется по непрерывности. Нетрудно видеть, что суммарная длина «внутренних» сегментов, на которых $F(x)$ постоянна, равна

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1,$$

так что функция $F(x)$ растет на множестве меры 0, но без скачков. Известна теорема Лебега о том, что любая функция распределения $F(x)$ может быть единственным образом представлена в виде суммы трех компонент: дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярной. Отсюда следует, что произвольная функция распределения не может иметь более чем счетное число скачков (это видно и непосредственно: мы перечислим все скачки, если перенумеруем их в таком порядке: сначала все скачки, большие 1/2, затем все скачки, большие 1/3, затем — большие 1/4, и т. д.). Это означает, в частпости, что $F(x)$ непрерывна

всюду, за исключением, быть может, счетного или копечного множества точек.
В заключение приводом ряд свойств функций распределения и плотностей, возникающих при переходе к новым случайным величинам.
Пусть $F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x)$ и *g(x)* есть борелевская функция (*g(x)* называется *борелевской,* если прообраз $g^{-1}(B) = \{x : g(x) \in B\}$ борелевского множества *B* есть снова борелевское множество). Тогда функция распределения случайной величины $\eta = g(\xi)$ равна

$$F_{g(\xi)}(x) = \mathsf{P}(g(\xi) < x) = \mathsf{P}(\xi \in g^{-1}(-\infty, x)).$$

Если *g(x)* —неубывающая функция, для которой определена обратная $g^{-1}(x)$, то

$$F_{g(\xi)}(x) = \mathsf{P}(\xi < g^{-1}(x)) = F_\xi(g^{-1}(x)).$$

Отсюда следует, в частности, что если F_ξ непрерывна, то случайная величина $\eta = F_\xi(\xi)$ распределена равномерно на [0, 1]. Наоборот, пусть η — равномерно распределенная случайная величина и F — заданная непрерывная функция распределения. Тогда случайная величина $\xi = F^{-1}(\eta)$ будет иметь функцию распределения *F(x).* Мы получили, таким образом, важный способ построения случайных величин с наперед заданными распределениями с помощью случайных величин, распределенных равномерно.
В другом частном случае, когда $g(x) = a + bx,\ b > 0,$ мы получаем

$$F_{g(\xi)}(x) = F_\xi\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

Если функция g в дополнение к предыдущему дифференцируема, а ξ имеет плотность *f(x),* то существует плотность $g(\xi)$, равная

$$f_{g(\xi)}(x) = f(g^{-1}(x))(g^{-1}(x))' = \frac{f(g^{-1}(x))}{g'(x)}.$$

При $g(x) = a + bx,\ b > 0$ получаем

$$f_{a+b\xi}(x) = \frac{1}{b} f\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

10.5. Интегралы

Как уже отмечалось, введение вероятностного пространства означает введение конечной счетно-аддитивной моры. Это делает возможным рассмотрение *интегралов* по введенной мере $\int g(\xi(\omega))\mathsf{P}(d\omega)$ по множеству Ω для борелевской функции g и для любой случайной величипы ξ на $\langle \Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P} \rangle$ (напомним, что *g(x)* называется *борелевской,* если *{x : g(x) < t}* при любом *t* есть борелевское множество на прямой). Как уже отмечалось, $\xi(\omega)$ индуцирует меру P_ξ на прямой, задаваемую равенством

$$\mathsf{P}_\xi([x, y)) = \mathsf{P}(x \leqslant \xi < y) = F_\xi(y) - F_\xi(x).$$

С помощью этой меры наш интеграл можно записать иииде

$$\int g(\xi(\omega))\,\mathsf{P}(d\omega) = \int g(x)\,\mathsf{P}_\xi(dx).$$

Это равенство есть результат подстановки $x = \xi(\omega)$. Доказать его можно, выписав определения обоих интегралов. Интеграл в правой части называется интегралом Лебега— Стилтьеса от функции *g(x)* по функции $F_\xi(x)$ и записывается в виде

$$\int g(x)\,dF_\xi(x).$$

Этот интеграл часто называется просто интегралом Стилтьеса, как, впрочем, и интеграл Римана — Стилтьеса, который определяется несколько иначе и для более узкого класса функций *g(x).*
Если g(x) — непрерывная функция, то интеграл Лебега — Сталтьеса совпадает с интегралом Римапа — Стилтьеса, равным по определению

$$\int g(x)\,dF(x) = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} g(\widetilde{x}_k)\,[F(x_{k+1}) - F(x_k)], \quad (1)$$

где предел в правой части не зависит от разбиения $x_0, x_1, \ldots, x_N$ полуинтервала *[a, b)* и выбора точек $\widetilde{x}_k \in \Delta_k = [x_k, x_{k+1})$. Разбиение $x_0, x_1, \ldots, x_N$ (свое для каждого *N)* обладает тем свойством, что $\max\limits_k (x_{k+1} - x_k) \to 0$ при $N \to \infty$.

Действительно, как мы знаем, интеграл Лебега — Стилтьеса есть

$$\int g(x)\,dF(x) = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \lim_{N\to\infty} \int_a^b g_N(x)\,\mathsf{P}_\xi(dx), \quad \textbf{(2)}$$

где g_N есть любая последовательность простых фупкций (принимающих конечное число значений), монотонно сходящихся к *g(x),* Из приведенных определений видно, что нам достаточно доказать совпадение интегралов $\int\limits_a^b$ в конечных пределах. Так как интеграл

Лебега — Стилтьеса $\int_a^b g dF$ от непрерывной функции g всегда существует, то в его определении мы можем в качестве g_N взять дне последовательности проствдх функций g^*_N и g^{**}_N постоянных на полуинтервалах Δ_k, и равных на них соответственно

$$g^*(x_k) = \sup_{x \in \Delta_k} g(x) \text{ и } g^{**}(x_k) = \inf_{x \in \Delta_k} g(x).$$

Обе последовательности в (2), построенные по g^*_N и g^{**}_N, будут, очевидпо, монотонно сходиться с разных сторон к одному и тому же пределу, равному интегралу Лебега — Стплтьеса $\int_a^b g(x)\,dF(x)$.

Но для любых $\tilde{x}_k \in \Delta_k$ будет выполняться

$$g^{**}(x_k) \leqslant g(\tilde{x}_k) \leqslant g^*(x_k)$$

и, стало быть, интегральная сумма в (1) будет заключена в границах

$$\int_a^b g_N^{**}\,dF(x) \leqslant \sum_{k=0}^{N} g(\tilde{x}_k)\left[F(x_{k+1}) - F(x_k)\right] \leqslant \int_a^b g_N^{*}(x)\,dF(x).$$

Эти неравенства и доказывают, очевидно, требуемое совпадение. Нетрудно проверить, что такое же совпадение (2) и (1) будет и в том случае, если *F (x)* непрерывна, а *g (x)* есть функция ограниченной вариации, при этом

$$\int_a^b g(x)\,dF(x) = g(x)\,F(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\,dg(x).$$

Пользуясь здесь этим обстоятельством, мы можем определение интеграла Римана — Стилтьеса распространить и на случай, когда *g (x)* есть функция ограниченной вариации, а *F* (*x*) — произвольная функция распределения. Действительно, пусть *F* (*x*) = *F* и *(x)* +$F_д$ *(x)* есть представление *F* в виде суммы непрерывной и дискретной компонент, и $y_1, y_2, \ldots$ есть точки скачков функции $F_д$ *(x)*: .

$$p_k = F_д(y_k + 0) - F_д(y_k) > 0.$$

Тогда следует по определению положить

$$\int g(x)\,dF(x) = \sum p_k g(y_k) + \int g(x)\,dF_н(x),$$

где интеграл Рпмана — Стилтьеса $\int g dF_н(x)$ можно понимать уже, как мы отмечали, в смысле определения (1).

Как общепринято, мы будем говорить, что $\int g dF$ существует, если $\int |g|\,dF$ конечен. Из определения интеграла Стилтьеса легко обнаружить, что для ступенчатых *F(x)* (распределение дискретно) интеграл превращается в сумму

$$\int g(x)\,dF(x) = \sum_k g(x_k)\,F(x_k+0) - F(x_k)) =$$
$$= \sum_k g(x_k)\,\mathsf{P}(\xi = x_k),$$

где $x_1, x_2, \ldots$— точки скачков $F(x)$. Если же $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)\,dx$ абсолютно непрерывна, а $p(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману, то интеграл Стилтьеса

$$\int g(x)\,dF(x) = \int g(x)\,p(x)\,dx$$

превращается в обычный интеграл Римана.
Большинство практически важных распределений относится к таким типам: дискретному или абсолютно непрерывному.
Напомним некоторые другие свойства интеграла Стилтьеса (непосредственно вытекающие из определений (2) или (1)):

$$\int\limits_a^b dF = F(b) - F(a);$$

$$\int\limits_a^b g\,dF = \int\limits_a^c g\,dF + \int\limits_c^b g\,dF;$$

$$\int (g_1 + g_2)\,dF = \int g_1\,dF + \int g_2\,dF;$$

$$\int cg\,dF = c\int g\,dF \quad \text{при} \quad c = \text{const};$$

$$\int\limits_a^b g\,dF = gF\Big|_a^b - \int\limits_a^b F\,dg,$$

если g — функция ограниченной вариации.

10.6. ТЕОРЕМА О ПРОДОЛЖЕНИИ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МЕРЫ

Пусть $\mathscr{A}$ есть некоторая алгебра множеств из Ω, на которой задана вероятностная мера P, т. е. числовая функция, удовлетворяющая условиям Р1 — Р3 . Пусть $\mathscr{P}$ означает класс всех подмножеств Ω. Для любого $A \in \mathscr{P}$ всегда существует последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ непересекающихся множеств из $\mathscr{A}$ такая, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \supset A$ (достаточно взять $A_1 = \Omega,\ A_n = \varnothing;\ n \geqslant 2)$., Обозначим $\gamma(A)$ класс всех таких последовательностей и введем на $\mathscr{P}$ числовую функцию

$$\mathsf{P}^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n); \{A_n\} \in \gamma(A)\right\}.$$

Эта функция (внешняя мера на $\mathscr{P}$, индуцированная мерой **P** на $\mathscr{A}$ обладает свойствами:

1) $\mathsf{P}^*(A) \leqslant \mathsf{P}^*(B) \leqslant 1$, если $A \subset B$.

2) $\mathsf{P}^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n)$, если множества $A_n \in \mathscr{A}$, $n = 1, 2, ...,$ и не пересекаются.

3) $\mathsf{P}^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}^*(A_n)$

для любых $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{P}$.

Первое свойство очевидно. Второе вытекает из следующих рассуждений. Пусть $\{B_n\}$ — любая последовательность из $\gamma(A)$, где $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Так как $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_n B_m =$

$$= A_n \in \mathscr{A}, \text{ то } \mathsf{P}(A_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n B_m).$$

Стало быть,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) = \sum_{n} \sum_{m} \mathsf{P}(A_n B_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n B_m).$$

Но при каждом $N < \infty$

$$\sum_{n=1}^{N} \mathsf{P}(A_n B_m) \leqslant \mathsf{P}(B_m).$$

Значит, это неравенство верно и при $N = \infty$ и для любой $\{B_m\}_{m=1}^{\infty} \in \gamma(A)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_m).$$

Отсюда следует, что $\mathsf{P}^*(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n)$. Так как обратное неравенство очевидно, то

$$\mathsf{P}^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n).$$

Для доказательства третьего свойства рассмотрим при некотором $\varepsilon > 0$ последовательности $\{A_{nk}\}_{k=1}^{\infty} \in \gamma(A_n)$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_{nk}) \leqslant \mathsf{P}^*(A_n) + \varepsilon/2^n.$$

Последовательность множеств

$$\{A_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty},$$

очевидно, содержит $\bigcup A_n$ и, стало быть,

$$\mathsf{P}^*(\bigcup A_n) \leqslant \sum_n \sum_k \mathsf{P}(A_{nk}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}^*(A_n) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε свойство 3) доказано.
Введем теперь *операцию симметрической разности* $\oplus$ над произвольными множествами *A, B* из $\mathscr{P}$ с помощью равенства

$$A \oplus B = A\overline{B} \cup \overline{A}B.$$

Нетрудно заметить, что

$$A \oplus B = B \oplus A = \overline{A} \oplus \overline{B} \subset A \cup B,\ A \oplus A = \varnothing,$$
$$A \oplus \varnothing = A,\ (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C).$$

С помощью этой операции и функции P^* введем на $\mathscr{P}$ *расстояние* ρ, положив для любых $A,\ B \in \mathscr{P}$

$$\rho(A, B) = \mathsf{P}^*(A \oplus B).$$

Очевидно, что

1) $\rho(A, B) \geqslant 0$,
2) $\rho(A, A) = 0$,
3) $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C)$, так как

$$\mathsf{P}^*(A \oplus C) = \mathsf{P}^*(A \oplus B \oplus B \oplus C) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}^*(A \oplus B \cup B \oplus C) \leqslant \mathsf{P}^*(A \oplus B) + \mathsf{P}^*(B \oplus C).$$

Мы отметим еще одно, несколько более специальное свойство расстояния ρ:

4) Для любых $A,\ B \in \mathscr{P},\ \rho(A, B) \geqslant |\mathsf{P}^*(A) - \mathsf{P}^*(B)|$.

Действительно, так как

$$A \subset B \cup (A \oplus B), B \subset A \cup (A \oplus B), \quad (1)$$ то

$$\mathsf{P}^*(A) - \mathsf{P}^*(B) \leqslant \mathsf{P}^*(A \oplus B) = \rho(A, B),$$
$$\mathsf{P}^*(B) - \mathsf{P}^*(A) \leqslant \mathsf{P}^*(A \oplus B) = \rho(A, B).$$

Отсюда следует, в частности, свойство

4') Если $A,\ B \in \mathscr{A}$, то $\rho(A, B) \geqslant |\mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(B)|$.

Просматривая свойства 1)—3), можно заметить, что ρ не обладает лишь одним свойством, котороо необходимо, чтобы ρ стало метрикой, а $\mathscr{P}$—метрическим пространством: из ρ *(A, B)* = 0 не следует *A* = *B*. Однако это обстоятельство не будет мешать нам говорить о *функциях* *на $\mathscr{P}$, непрерывных в смысле расстояния* ρ. Именно, мы будем говорить, что *f*, заданная на $\mathscr{P}$, *непрерывна* и «точке» *A:*

$$\lim_{B\to A} f(B) = f(A),$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(B) - f(A)| < \varepsilon$ для всех *B* таких, что $\rho(A, B) < \delta$.

Из свойства 4') введенного расстояния следуют, что *вероятность* **P** *есть равномерно непрерывная относительно этого расстояния функция на* $\mathscr{A}$.

Замыканием $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathscr{A}$ (или какого-нибудь другого класса множеств) относительно введенного расстоянии называется совокупность множеств *B из* $\mathscr{P}$, обладающих свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $A \in \mathscr{A}$ такое, что

$\rho(B, A) < \varepsilon$.

Лемма. *Замыкание* $\mathfrak{A}$ *алгебры* $\mathscr{A}$ *есть* σ*-алгебра.*

Доказательство. Проверим, что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет свойствам σ -алгебры A1, A2', A3. Свойство A1 очевидно выполняется, так как $A \subset \mathfrak{A}$. Свойство A3 следует, из того, что для *A* ε $\mathfrak{A}$ существует $B \in \mathscr{A}$ такое, что

$$\rho(A, B) < \varepsilon,$$

$$\rho(\bar{A}, \bar{B}) = \mathsf{P}^*(\bar{A} \oplus \bar{B}) = \mathsf{P}^*(A \oplus B) = \rho(A, B) < \varepsilon$$

при произвольном $\varepsilon > 0$. Стало быть, $\bar{A} \in \mathfrak{A}$ вместе с *A*.

Свойство A2 проверяется столь же просто: если A_1 и A_2 — множества из $\mathfrak{A}$, а B_1, B_2 —аппроксимирующие множества, то

$$\rho(A_1A_2, B_1B_2) = \mathsf{P}^*(A_1A_2 \oplus B_1B_2) =$$
$$= \mathsf{P}^*(A_1A_2 \oplus A_1B_2 \oplus A_1B_2 \oplus B_1B_2) = \mathsf{P}^*(A_1(A_2 \oplus B_2) \oplus$$
$$\oplus B_2(A_1 \oplus B_1)) \leqslant \mathsf{P}^*(A_2 \oplus B_2) + \mathsf{P}^*(A_1 \oplus B_1) < 2\varepsilon.$$

Отсюда и из A3 следует, что и $A_1 \cup A_2 = \overline{\bar{A_1} \cap \bar{A_2}} \in \mathfrak{A}$.

Рассмотрим, наконец, свойство A2'. Покажем сначала, что если $A_n \in \mathscr{A}$, то $A = \bigcup A_n \in \mathfrak{A}$.

Действительно, не ограничивая общности можно считать, что A_n не пересекаются. Тогда в силу свойств меры **P** * для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum \mathsf{P}(A_k) \leqslant \mathsf{P}^*(\Omega) = 1,$$

$$\rho\left(A, \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathsf{P}^*\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) < \varepsilon$$

при достаточно большом *n*.

Пусть теперь $A_n \in \mathfrak{A}$. Требуется показать, что

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}.$$

Пусть *{B}* — последовательность множествиз $\mathscr{A}$ таких, что

$$\rho(A_n, B_n) < \varepsilon/2^n.$$

Тогда $B = \bigcup B_n \in \mathfrak{A}$ и если

$A \oplus B \subset \bigcup (A_n \oplus B_n)$, (2)

то в силу счетной полуаддитивности P *

$$\rho(A, B) = \mathsf{P}^*(A \oplus B) \leqslant \mathsf{P}^*(\bigcup (A_n \oplus B_n)) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}^*(A_n \oplus B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n, B_n) < \varepsilon.$$

Таким образом, для доказательства леммы осталось убедиться, что справедливо (2). Но это так в силу соотношений

$$A \oplus B = [(\bigcup A_n) \cap (\bigcap \overline{B_n})] \cup [(\bigcap \overline{A_n}) \cap (\bigcup B_n)] \subset$$
$$\subset [\bigcup A_n \overline{B_n}] \cup [\bigcup B_n \overline{A_n}] = \bigcup (A_n \overline{B_n} \cup \overline{A_n} B_n) =$$
$$= \bigcup (A_n \otimes B_n).$$

Принадлежность $\bigcap A_n \in \mathfrak{A}$ легко получается из предыдущего, если воспользоваться свойством А3.

Теперь мы можем доказать основное утверждение.

Теорема 1. *Вероятность* P *может быть продолжена с алгебры* $\mathscr{A}$ *на* σ-*алгебру* $\mathfrak{A}$ *до некоторой вероятности* $\overline{\mathsf{P}}$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{A}$. В силу равномерной непрерывности P на $\mathscr{A}$ существует предел

$$\overline{\mathsf{P}}(A) = \lim_{\substack{B \to A \\ B \in \mathscr{A}}} \mathsf{P}(B).$$

Очевидно, что $\overline{\mathsf{P}}(A) = \mathsf{P}(A)$, если $A \in \mathscr{A}$. Так как из неравенства $\rho(A, B) < \varepsilon$, $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathscr{A}$, и из свойства 4) следуют соотношения $|\mathsf{P}^*(A) - \mathsf{P}(B)| < \varepsilon$, $|\overline{\mathsf{P}}(A) - \mathsf{P}(B)| < \delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то мы получаем также, что для $A \in \mathfrak{A}$

$$\overline{\mathsf{P}}(A) = \mathsf{P}^*(A).$$

Чтобы убедиться, что $\overline{\mathsf{P}}$ есть вероятность, нам надо доказать лишь счетную аддитивность $\overline{\mathsf{P}}$. Остальные свойстна очевидным образом выполнены. Пусть $A_n \in \mathfrak{A}$ не пересекаются. Тогда полагая

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, из конечной аддитивности $\overline{\mathsf{P}}$ получим

$$\bar{\mathsf{P}}(A) = \sum_{k=1}^{n} \bar{\mathsf{P}}(A_k) + \bar{\mathsf{P}}\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right).$$

Следовательно,

$$\bar{\mathsf{P}}(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathsf{P}}(A_k).$$

С другой стороны,

$$\bar{\mathsf{P}}(A) = \mathsf{P}^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}^*(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathsf{P}}(A_k).$$

Теорема 2. *Продолжение вероятности* P *с алгебры* $\mathscr{A}$ *на* σ*-алгебру* $\mathfrak{A}$ *единственно.*

Доказательство. Предположим, что на $\mathfrak{A}$ существует еще одна вероятность P_1, совпадающая с P на $\mathscr{A}$ и такая, что для некоторого $A \in \mathfrak{A}$

$$\mathsf{P}_1(A) \neq \bar{\mathsf{P}}(A).$$

Допустим сначала, что $\varepsilon = \mathsf{P}_1(A) - \bar{\mathsf{P}}(A) > 0$. Рассмотрим последовательность $\{B_n\} \subset \gamma(A)$ такую, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_n) - \bar{\mathsf{P}}(A) < \varepsilon/2,$$

Тогда $\mathsf{P}_1(A) = \bar{\mathsf{P}}(A) + \varepsilon \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_n) + \varepsilon/2,$ что противоречит принадлежности $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Стало быть,

$$\mathsf{P}_1(A) \leqslant \bar{\mathsf{P}}(A), \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Так как $\bar{\mathsf{P}}$ ρ-непрерывна в точке $\varnothing$, то отсюда следует, что и P_1 ρ -непрерывна в точке $\varnothing$, а вместе с этим и в любой «точке» $A \in \mathfrak{A}$. Действительно, в силу (1)

$$|\mathsf{P}_1(A) - \bar{\mathsf{P}}_1(B)| \leqslant \mathsf{P}_1(A \oplus B) \leqslant \bar{\mathsf{P}}(A \oplus B) \to 0,$$

если только $\rho(A, B) = \bar{\mathsf{P}}(A \oplus B) \to 0$. Поэтому для $A \in \mathfrak{A}$

$$\bar{\mathsf{P}}(A) = \lim_{\substack{B \to A \\ B \in \mathscr{A}}} \mathsf{P}(B) = \lim_{\substack{B \to A \\ B \in \mathscr{A}}} \mathsf{P}_1(B) = \mathsf{P}_1(A).$$

Из полученных утверждений очевидным образом вытекает

Следствие. *Вероятность* P *может быть единственным образом продолжена с алгебры* $\mathscr{A}$ *на минимальную* σ*-алгебру* $\mathfrak{A}^*$, *порожденную* $\mathscr{A}$.

Замечание. σ -алгебра $\mathfrak{A}$, определенная выше как замыкание алгебры $\mathscr{A}$ относительно введенного расстояния ρ, оказывается во многих

случаях шире σ -алгебры $\mathfrak{A}^* = \sigma(\mathscr{A})$, порожденной $\mathscr{A}$. Это обстоятельство тесно связано с понятием *пополнения меры.* Речь идет вот о чем. Пусть $\mathscr{A} = \mathfrak{F}$ с самого начала есть σ -алгебра. Тогда меру **P** в теореме 1 можно построить весьма просто. Для этого мы продолжим меру **P** с $\langle\Omega,\ \mathfrak{F}\rangle$ на более широкую, чем $\mathfrak{F}$ σ -алгебру, построенную следующим образом. Мы будем говорить, что множество N из Ω принадлежит классу $\mathscr{N}$, если для *N* найдется такое $A = A(N) \in \mathfrak{F}$, что $N \subset A,\ \mathsf{P}(A) = 0$. Нетрудно видеть, что класс множеств вида *B* + *N*, где $B \in \mathfrak{F},\ N \in \mathscr{N}$ снова образует σ -алгебру. Обозначим ее $\mathfrak{F}_{\mathscr{N}}$. Положив $\mathsf{P}(B + N) = \mathsf{P}(B)$, мы получим продолжение меры **P** на $\langle\Omega,\ \mathfrak{F}_{\mathscr{N}}\rangle$. Такая мера называется *полной,* а проведенная нами операция — *пополнением меры* **P**.
Теперь можно установить, что построенная в теореме 1 мера **P** является полной, а σ -алгебра $\mathfrak{F}$ совпадает с $\mathfrak{F}_{\mathscr{N}}$.
Если, например, $\Omega = [0,\ 1]$, а $\mathscr{A}$ - есть алгебра, порожденная интервалами, то $\mathfrak{A}^* = \sigma(\mathscr{A})$ будет, как мы уже знаем, борелевской σ -алгеброй, а $\mathfrak{A}$ будет лебеговским расширением $\mathfrak{A}^*$, состоящим из множеств «измеримых по Лебегу».

10.7. ТЕОРЕМА КОЛМОГОРОВА О СОГЛАСОВАННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ

Пусть *T* — некоторое множество индексов *t,* R_t при каждом $f \in T$ есть вещественная прямая (— ∞, ∞). Пусть $N \in T$ — некоторое конечное подмножество *T.* Тогда произведение пространств

$$\prod_{t\in N} R_t = R^N$$

есть евклидово пространство размерности, равной числу *n* элементов в *N*, построенное на *n* осях пространства

$$R^T = \prod_{t\in T} R_t.$$

Предположим, что для любого конечногоподмножества $N \subset T$ на $(R^N,\ \mathfrak{B}^N)$, где $\mathfrak{B}^N$ — σ-алгебра борелевских множеств в R^N, задана вероятностная мера P_N. Тем самым па R^T задано семейство мер. Это семейство называется *согласованным,* если для любых $L \subset N$ и борелевских множеств *B* из R^L -

$$\mathsf{P}_L(B) = \mathsf{P}_N(B \times R^{N-L}).$$

Мера P_L называется *проекцией* P_N на R^L. Множество из R^T. которое можно представить в виде $B \times R^{T-N}$, где $B \in \mathfrak{B}^N$, а *N* — конечное множество, называется *цилиндрическим* в R^T. Множество B называется *основанием* цилиндра.

Обозначим $\mathfrak{B}^T$ σ-алгебру множеств из R^T, порожденную цилиндрическими множествами.

Теорема. *Если на R^T задано согласованное семейство вероятностных мер, то на* $(R^T, \mathfrak{B}^T)$ *существует единственная вероятностная мера* P *такая, что при любом N* P_N *совпадает с проекцией* P *на R^N.*

Доказательство. Цилиндрические множества в R^T образуют алгебру. Покажем, что при $B \in \mathfrak{B}^N$ соотношения

$$\mathsf{P}(B \times R^{T-N}) = \mathsf{P}_N(B)$$

определяют меру на этой алгебре. Прежде всего, в силу согласованности мер P_N это определение вероятности цилиндрических множеств корректно (имеются в виду случаи, когда $B = B_1 \times R^{N-L}$, $B_1 \in \mathfrak{B}^L$. Тогда левая часть будет равна также $\mathsf{P}(B_1 \times R^{T-L})$). Далее, введенная вероятность аддитивна. Действительно, пусть $B_1 \times R^{T-N_1}$ и $B_2 \times R^{T-N_2}$ — два непересекающихся цилиндрических множества. Тогда, обозначив $N = N_1 \cup N_2$, будем иметь

$$\mathsf{P}\left(B_1 \times R^{T-N_1} \bigcup B_2 \times R^{T-N_2}\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(\{B_1 \times R^{N-N_1} \bigcup B_2 \times R^{N-N_2}\} \times R^{T-N}\right) =$$
$$= \mathsf{P}_N\left(B_1 \times R^{N-N_1} \bigcup B_2 \times R^{N-N_2}\right) = \mathsf{P}_N\left(B_1 \times R^{N-N_1}\right) +$$
$$+ \mathsf{P}_N\left(B_2 \times R^{N-N_2}\right) = \mathsf{P}\left(B_1 \times R^{T-N_1}\right) + \mathsf{P}\left(B_2 \times R^{T-N_2}\right).$$

Чтобы проверить счетную аддитивность P, воспользуемся эквивалентностью свойств Р3 и Р3' . В силу этой эквивалентности достаточно показать, что если $\mathscr{B}_n$, n = 1, 2, ...,— убывающая последовательность цилиндрических множеств, то соотношения $\mathsf{P}(\mathscr{B}_n) > \varepsilon$, n = 1, 2, ..., при некотором ε > 0 означают, что

$$\mathscr{B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$$

непусто. Вложенность множеств $\mathscr{B}_n$ означает, что в представлениях $\mathscr{B}_n = B_n \times R^{T-N_n}$ выполняется $N_n \subset N_{n+1}$, $B_{n+1} \bigcap R^{N_n} \subset B_n$.

Не ограничивая общности мы будем считать в дальнейшем, что число элементов множества $N_n = \{t_1, \ldots, t_n\}$ равно *n,* и через x_i (с различными верхними индексами) будем обозначать координаты пространства R_{ti}.

Итак, пусть $\mathsf{P}(\mathscr{B}_n) = \mathsf{P}_{N_n}(B_n) \geqslant \varepsilon > 0$. Мы докажем, что $\mathscr{B} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$ непусто. Для каждого борелевского множества $B_n \subset R^{N_n}$ существует компакт K_n такой, что

$$K_n \subset B_n, \quad \mathsf{P}_{N_n}(B_n - K_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

Если обозначить $\mathscr{K}_n = K_n \times R^{T-N_n}$, то мы получим

$$\mathsf{P}(\mathscr{B}_n - \mathscr{K}_n) = \mathsf{P}_{N_n}(B_n - K_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

Введем в рассмотрение множества $\mathscr{D}_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \mathscr{K}_k$. Легко видеть, что $\mathscr{D}_n \subset \mathscr{B}_n$ — тоже цилиндры. Так как $\mathscr{B}_n - \bigcap\limits_{k=1}^{n} \mathscr{K}_k \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} (\mathscr{B}_k - \mathscr{K}_k)$, то для них

$$\mathsf{P}(\mathscr{B}_n - \mathscr{D}_n) \leqslant \mathsf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (\mathscr{B}_k - \mathscr{K}_k)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(\mathscr{B}_k - \mathscr{K}_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\mathsf{P}(\mathscr{D}_n) \geqslant \mathsf{P}(\mathscr{B}_n) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из последнего соотношения следует, что $\mathscr{D}_n$ есть убывающая последовательность непустых цилиндрических множеств. Обозначим $X^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n)$ некоторую точку основания

$$D_n = \bigcap_{k=1}^{n} K_k \times R^{N_n - N_k}$$

цилиндра $\mathscr{D}_n$, определяющую цилиндрическое множество $\mathscr{X}^n$ в R^T. Так как $\mathscr{D}_n$ убывают, то $(x_1^{n+p}, x_2^{n+p}, \ldots, x_n^{n+p}) \in K_n$ при любом $p \geq 0$. В силу компактности K_n можно выбрать последовательность n_{1k} такую,что $x_1^{n_{1k}} \to x_1$ при $k \to \infty$. Из этой последовательности можно выбрать последовательность n_{2k} такую, что $x_2^{n_{2k}} \to x_2$ и т. д. Рассмотрим теперь диагональную последовательность точек (точнее, цилиндрических множеств) $X^{n_{kk}} = (x_1^{n_{kk}}, x_2^{n_{kk}}, \ldots, x_{n_{kk}}^{n_{kk}})$. Ясно, что при $k \to \infty$ $X^{n_{kk}} \to X = (x_1, x_2, \ldots)$ (имеется в виду покоординатная сходимость) . При этом

$$(x_1^{n_{kk}}, x_2^{n_{kk}}, \ldots, x_m^{n_{kk}}) \to (x_1, \ldots, x_m) \in K_m$$

при любом *m.* Это означает, что соответствующее точке *X* множество
$\mathscr{X} = \{y(t) \in R^T : y(t_1) = x_1,\ y(t_2) = x_2,\ \dots\} \in$
$\in K_m \in \mathscr{B}_m$

при любом *m* и, стало быть, $\mathscr{X} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathscr{B}_m$.
Такимобразом, $\mathscr{B}$ не пусто и счетная аддитивность **Р** на алгебре цилиндрических множеств доказана. Следовательно, **Р** есть мера и остается воспользоваться теоремой о продолжении меры с алгебры на σ-алгебру, порожденную этой алгеброй.

10.8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

10.8.1. Пространство с мерой

Пусть $\langle \Omega,\ \mathfrak{F} \rangle$— измеримое пространство. Мы будем говорить, что задано *пространство с мерой* $\langle \Omega,\ \mathfrak{F},\ \mu \rangle$, если на $\mathfrak{F}$ задана неотрицательная счетно-аддитивная функция μ, т. е. функция, обладающая следующими свойствами:

1) $\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j \mu(A_j)$ для любого счетного набора , непересекающихся множеств $A_j \in \mathfrak{F}$ (σ-аддитивность).

2) $\mu(A) \geqslant 0$ для каждого $A \in \mathfrak{F}$.

3) $\mu(\varnothing) = 0$, где $\varnothing$— пустое множество.

Значение μ*(A)* называется *мерой* множества *А.* Мы будем рассматривать только *конечные* и σ-*конечные* меры. В первом случае предполагается, что $\mu(\Omega) < \infty$. Во втором — что существует разбиение *Ω* на счетное число подмножеств A_j таких,что $\mu(A_j) < \infty$.
Вероятностное пространство является примером пространства с конечной (единичной) мерой. Пространство $\langle R,\ \mathfrak{B},\ \mu \rangle$, где *R* — вещественная прямая, $\mathfrak{B}$ — σ -алгобра борелевских множеств, а μ — мера Лебега, иродставлног собой пример пространства с σ -конечной мерой.
Можно рассматривать также функции множеств μ*(A)*, удовлетворяющие лишь условиям 1), 3) и не обязательно неотрицательные. Такие функции называются *обобщенными мерами.*
Любая конечная обобщенная мера (т. е. такая, что
$\sup_A \mu(A) < \infty,\quad \inf_A \mu(A) > -\infty$) может быть

представлена в виде разности двух конечных неотрицательных мер (теорема Хана о разложении, см. 10.8.5). Обобщенные меры нам понадобятся лишь в 10.8.5. В остальных местах и при отсутствии

специальных оговорок мы везде под мерами будем понимать функции множеств, удовлетворяющие условиям 1)—3).
Так же как при изучении простейших свойств вероятности, легко устанавливаются следующие свойствамеры:

1) $\mu(A) \leqslant \mu(B)$, если $A \subset B$.
2) $\mu(\bigcup A_j) \leqslant \Sigma\mu(A_j)$ для любых A_j.

3) Если $A_n \subset A_{n+1}$, $\bigcup A_n = A$, то $\mu(A_n) \to \mu(A)$, или, что то же самое,

3') если $A_n \supset A_{n+1}$, $\bigcap A_n = A$, то $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

Рассмотрим далее на $\langle \Omega, \mathfrak{F} \rangle$ измеримые функции, т. е. функции $\xi(\omega)$, обладающие свойством $\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}$ для любого борелевского множества *B* на прямой.
Аналогично тому, как это делалось для вероятностной меры, вводятся понятия *сходимости по мере* и *сходимости почти всюду.*
Мы будем говорить, что последовательность ξ_n *сходится к* ξ *почти всюду* (п. в.) $\xi_n \xrightarrow[\text{п. в.}]{} \xi$, если $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$ для всех ω, за исключением множества меры 0.
Мы будем говорить, что ξ_n *сходится к* ξ *по мере:* $\xi_n \xrightarrow[\mu]{} \xi$, если для каждого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$\mu(\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}) \to 0.$$

Займемся теперь построением и изучением свойств интегралов. Мы рассмотрим сначала *конечные меры* и будем считать их, не ограничивая общности, *вероятностными.*
В этом случае мы будем вместо $\mu(A)$писать $\mathbf{P}(A)$.
К интегралам по произвольным σ-конечным мерам мы вернемся в 10.8.4 этого раздела.

10.8.2. Интеграл по вероятностной мере

1. *Интегралы от простых функций.* Измеримая функция $\xi(\omega)$ называется *простой,* если множество ее значений конечно.
Индикатором множества $F \in \mathfrak{F}$ называется простая функция

$$I_F(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in F, \\ 0, & \text{если } \omega \notin F. \end{cases}$$

Очевидно, что любую простую функцию $\xi(\omega)$ можно записать в виде

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k I_{F_k}(\omega),$$

где x_k, $k = 1, 2, ..., n,$— значения, принимаемые ξ, а

$F_k = \{\omega : \xi(\omega) = x_k\}$. Множества F_k попарно не пересекаются и $\bigcup_{k=1}^{n} F_k = \Omega$.

Интегралом от простой случайной величины $\xi(\omega)$ называется число

$$\int \xi\, d\mathsf{P} = \int \xi(\omega)\, d\mathsf{P}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(F_k).$$

Интегралом по множеству $\Lambda \in \mathfrak{F}$ от простой измеримой функции $\xi(\omega)$ называется

$$\int_A \xi\, dP = \int \xi(\omega) I_A(\omega)\, d\mathsf{P}(\omega).$$

Корректность этих определений (разбиения на множества F_k могут быть различны) проверяется очевидным образом.

2. *Определение интегралов от ограниченных функций.*

Лемма 1. *Пусть* $\xi(\omega) \geqslant 0$. *Существует последовательность* $\xi_n(\omega)$ *измеримых простых функций такая, что* $\xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Разобьем отрезок $[0, n]$ на $n2^n$ равных отрезков. Пусть $x_0 = 0,\ x_1, \ldots, x_{n2^n} = n$ означают точки деления, так что $x_{i+1} - x_i = 1/2^n$. Положим

$$F_i = \{\omega : x_i \leqslant \xi(\omega) < x_{i+1}\},\ i = 1, 2, \ldots, n2^n,\ F_0 =$$
$$= \{0 \leqslant \xi(\omega) < x_1\} \cup \{\xi(\omega) > n\},\ \xi_n(\omega) = \sum_{i=0}^{n2^n} x_i I_{F_i}(\omega) \leqslant \xi(\omega).$$

$\xi_n(\omega)$ есть, очевидно, измеримая простая функция, обладающая тем свойством, что в точке $\omega \in \Omega$ при $n > \xi(\omega)$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant \xi(\omega) - \xi_n(\omega) \leqslant 1/2^n.$$

Лемма 2. *Пусть* $0 \leqslant \xi(\omega) \leqslant c$, $\{\xi_n\}$ *и* $\{\eta_n\}$ *— две последовательности простых измеримых функций, сходящихся почти всюду к* $\xi(\omega)$ *снизу. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int \xi_n d\mathsf{P} = \lim_{n\to\infty} \int \eta_n d\mathsf{P}.$$

Доказательство. Из сходимости почти всюду следует сходимость по вероятности. Поэтому для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ при всех достаточно больших n будет выполняться

$$\mathsf{P}(|\xi - \xi_n| > \varepsilon) < \delta,\ \mathsf{P}(|\xi - \eta_n| > \varepsilon) < \delta,$$
$$\mathsf{P}(|\xi_n - \eta_n| > 2\varepsilon) < 2\delta.$$

Пусть

$$\xi_n = \sum_i x_i^{(n)} I_{F_i^{(n)}}(\omega), \quad \eta_n = \sum_j y_j^{(n)} I_{G_j^{(n)}}(\omega),$$

$$A_n(\varepsilon) = \{|\xi_n - \eta_n| > 2\varepsilon\}.$$

Тогда, так как $\xi_n \leqslant \xi \leqslant c$, $\eta_n \leqslant \xi \leqslant c$, то

$$\left|\int \xi_n d\mathsf{P} - \int \eta_n d\mathsf{P}\right| = \left|\sum_i x_i^{(n)} \mathsf{P}\left(F_i^{(n)}\right) - \sum_j y_j^{(n)} \mathsf{P}\left(G_j^{(n)}\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i,j} \left(x_i^{(n)} - y_j^{(n)}\right) \mathsf{P}\left(F_i^{(n)} G_j^{(n)}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j} \left|x_i^{(n)} - y_j^{(n)}\right| \mathsf{P}\left(F_i^{(n)} G_j^{(n)} \overline{A}_n(\varepsilon)\right) + 2c\mathsf{P}\left(A_n(\varepsilon)\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon + 2c2\delta.$$

Утверждения лемм 1, 2 делают корректными следующие определения.

Интегралом функции $0 \leqslant \xi(\omega) \leqslant c$ называется число

$$\int \xi \, d\mathsf{P} = \lim_{n\to\infty} \int \xi_n d\mathsf{P}, \quad (1)$$

где ξ_n - последовательность простых измеримых функций таких, что $\xi_n \uparrow \xi$ при $n\to\infty$.

Интегралом от произвольной огрaпичепной функции $\xi(\omega)$ называется число

$$\int \xi \, d\mathsf{P} = \int \xi^+ d\mathsf{P} - \int \xi^- d\mathsf{P},$$

где $\xi^+(\omega) = \max(0, \xi(\omega)) \geqslant 0, \xi^-(\omega) = \max(0, -\xi(\omega)) \geqslant$ $\geqslant 0$, так что $\xi = \xi^+ - \xi^-$.

3. *Свойства интегралов от ограниченных функций.*

Каки прежде, под $\int\limits_A \xi \, d\mathsf{P}$ мы будем понимать число

$$\int \xi(\omega) I_A(\omega) \, d\mathsf{P}.$$

11. Если множества $A_j \in \mathfrak{F}$ не пересекаются и $\bigcup\limits_j A_j = \Omega$, то

$$\int \xi \, d\mathsf{P} = \sum_j \int\limits_{A_j} \xi \, d\mathsf{P}. \quad \textbf{(2)}$$

Достаточно доказать это соотношение для $\xi(\omega) \geqslant 0$. Для простых функций рдвенство (2) очевидно, так как

$$\int \xi \, d\mathsf{P} = \sum_k x_k \mathsf{P}(\xi = x_k) = \sum_j \sum_k x_k \mathsf{P}(\xi = x_k;\ A_j).$$

В общем случае, используя определение (1), получим

$$\int \xi\, dP = \lim_{n\to\infty} \int \xi_n\, dP = \lim_{n\to\infty} \sum_j \int_{A_j} \xi_n\, dP =$$

$$= \sum_j \lim_{n\to\infty} \int_{A_j} \xi_n\, dP = \sum_j \int_{A_j} \xi\, dP. \quad \textbf{(3)}$$

Изменение порядка предельного перехода и суммирования здесь законно, так как ряды $(c = \sup_\omega \xi(\omega))$

$$\sum_{j=N}^{\infty} \int_{A_j} \xi_n dP \leqslant \sum_{j=N}^{\infty} \int_{A_j} \xi\, dP \leqslant cP\left(\bigcup_{j=N}^{\infty} A_j\right) \to 0$$

при $N\to\infty$ равномерно по n.

I2. $\int (\xi + \eta)\, dP = \int \xi\, dP + \int \eta\, dP.$

Доказательство будет вытекать из следующих трех замечаний.

1. Для простых функций это свойство очевидно. Поэтому для $\xi \geqslant 0,\ \eta \geqslant 0$ это свойство следует из аддитивности операции предельного перехода.

2. Если $\xi = \xi_1^+ - \xi_1^-$, где $\xi_1^\pm \geqslant 0$ и ограничены, то

$$\int \xi\, dP = \int \xi_1^+ dP - \int \xi_1^- dP.$$

Действительно, $\xi_1^+ \geqslant \xi^+ = \max(0, \xi)$, $\xi_1^- \geqslant \xi^- = = \max(0, -\xi)$. Поэтому существует измеримая функция $\zeta \geq 0$ такая, что $\xi_1^\pm = \xi^\pm + \zeta$,

$$\int \xi\, dP = \int \xi^+ dP - \int \xi^- dP + \int \zeta\, dP - \int \zeta\, dP = \int \xi_1^+ dP - \int \xi_1^- dP,$$

3. В общем случае находим ($\xi^\pm$ и $\eta^\pm$ определяются так же, как и в п. 2)

$$\int (\xi + \eta)\, dP = \int (\xi^+ + \eta^+)\, dP - \int (\xi^- + \eta^-)\, dP =$$

$$= \int \xi^+ dP - \int \xi^- dP + \int \eta^+ dP - \int \eta^- dP = \int \xi\, dP + \int \eta\, dP.$$

13. Если a — произвольная постоянная, то

$$\int a\xi\, dP = a \int \xi\, dP.$$

14. Если $\xi \leqslant \eta$, то $\int \xi\, dP \leqslant \int \eta\, dP.$

Доказательство свойств 13,14 очевидно. Так как $\int \xi \, d\mathsf{P}$ есть по определению не что иное как $\mathsf{M}\xi$, то свойства 11 — 14 можно записать с помощью математических ожиданий следующим образом:

I1. $\mathsf{M}\xi = \sum_j \mathsf{M}(\xi;\ A_j)$, если A_j не пересекаются, $\bigcup A_j = \Omega$.

I2. $\mathsf{M}(\xi + \eta) = \mathsf{M}\xi + \mathsf{M}\eta$.

I3. $\mathsf{M}a\xi = a\mathsf{M}\xi$.

I4. $\mathsf{M}\xi \leqslant \mathsf{M}\eta$, если $\xi \leqslant \eta$.

В дальнейшем изложении вместо

$$\int_A \xi \, d\mathsf{P}$$

нам часто будет удобнее писать $\mathsf{M}(\xi;\ A)$.

4. *Определение интеграла а его свойства в общем случае.* *Интегралом* от функции $\xi(\omega) \geqslant 0$ называется число

$$\mathsf{M}\xi = \int \xi \, d\mathsf{P} = \lim_{n\to\infty} \int_{\{\xi \leqslant n\}} \xi \, d\mathsf{P} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}(\xi;\ \xi \leqslant n),$$

если оно существует. Для функции $\xi(\omega)$, принимающей значения обоих знаков, по определению полагаем

$$\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}\xi^+ - \mathsf{M}\xi^-,$$

$(\xi^\pm = \max(0, \pm\xi))$, если оба выражения в правой части существуют. Таким образом, интеграл от неограниченной функции существует не всегда. Ясно, что $\mathsf{M}\xi$ существует тогда и только тогда, когда существует $\mathsf{M}|\xi|$ (ведь $|\xi| = \xi^+ + \xi^-$), и что если существует $\mathsf{M}\xi$, то существует также $\mathsf{M}(\xi;\ A)$ для любого $A \in \mathfrak{F}$.

Мы предоставляем читателю в качестве упражнения убедиться, что свойства интеграла 11 — 14, изложенные в п. 3, сохранятся и в общем случае. Заметим лишь в качестве указания, что при доказательстве равенства (3) (свойство 11) надо использовать соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\left(\xi_n;\ \bigcup_{j=N}^{\infty} A_j\right) \leqslant \mathsf{M}\left(\xi;\ \bigcup_{j=N}^{\infty} A_j\right) \to 0$$

при $N\to\infty$. Этот факт следует из утверждения, которое мы докажем в виде отдельной леммы.

Л е м м а 3. *Если* $\mathsf{M}\xi$ *существует и* $F_n \in \mathfrak{F}$ *есть последовательность множеств такая, что* $\mathsf{P}(F_n) \to 0$ *при* $n\to\infty$, *то*

$$\mathsf{M}(\xi;\ F_n) \to 0.$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $m(\varepsilon)$ такое, что ,

$$\mathsf{M}|\xi| - \mathsf{M}(|\xi|;\ |\xi| \leqslant m) < \varepsilon$$

при $m \geqslant m(\varepsilon)$. Поэтому для любого $F \in \mathfrak{F}$ и $m = m(\varepsilon)$

$$\mathsf{M}(|\xi|;\ F) - \mathsf{M}(|\xi|;\ \{|\xi| \leqslant m\}F) = \\ = \mathsf{M}(|\xi|;\ \{|\xi| > m\}F) = \mathsf{M}(|\xi| I_F;\ |\xi| > m) < \varepsilon.$$

Выбрав n настолько большим, чтобы выполнялось $\mathsf{P}(F_n) < \frac{\varepsilon}{m(\varepsilon)}$,

получим

$$\mathsf{M}(|\xi|;\ F_n) \leqslant \mathsf{M}(|\xi|;\ \{|\xi| \leqslant m\}F_n) + \varepsilon \leqslant \\ \leqslant m(\varepsilon)\mathsf{P}(F_n) + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon.$$

Отметим также следующие свойства интегралов, легко вытекающие из свойств 11—14.

15. $|\mathsf{M}\xi| \leqslant \mathsf{M}|\xi|$.

16. Если $c_1 \leqslant \xi \leqslant c_2$, то $c_1 \leqslant \mathsf{M}\xi \leqslant c_2$.

17. Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathsf{M}\xi = 0$, то $\mathsf{P}(\xi = 0) = 1$. Последнее следует из того, что при $\mathsf{P}(\xi > 0) > 0$ мы смогли бы указать $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathsf{P}(\xi \geqslant \varepsilon) = q > 0$, $\mathsf{M}\xi \geqslant \mathsf{M}(\xi;\ \xi \geqslant \varepsilon) \geqslant \varepsilon q > 0$. Полученное противоречие доказывает 17.

18. Если $\mathsf{P}(\xi = \eta) = 1$ и $\mathsf{M}\xi$ существует, то $\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}\eta$.

Действительно,

$$\mathsf{M}\eta = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}(\eta;\ |\eta| < n) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}(\xi;\ |\xi| < n) = \mathsf{M}\xi.$$

10.8. 3. Дальнейшие свойства интегралов

1. *Теоремы сходимости.*

Т е о р е м а 1 (теорема о сходимости мажорируемой последовательности). *Пусть* ξ_n*—последовательность функций такая, что*

$$|\xi_n| < \eta \ \text{ и } \ \xi_n \xrightarrow[p]{} \xi \ \text{ или } \ \xi_n \xrightarrow[\text{п. н.}]{} \xi.$$

Тогда, если $\mathsf{M}\eta$ *существует, то существует*

$$\mathsf{M}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\xi_n.$$

Доказательство. Интеграл от ξ существует, так как при любых N и ε

$$\mathsf{M}\min(|\xi|, N) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}[\min(|\xi|, N);\ |\xi_n - \xi| < \varepsilon] \leqslant \\ \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\min(|\xi_n|, N) + \varepsilon \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}|\xi_n| + \varepsilon \leqslant \mathsf{M}\eta + \varepsilon.$$

Далее, из сходимости

$$\xi_n \xrightarrow[p]{} \xi$$

следует, что для любого δ > 0 при всех достаточнобольших *n* будет выполняться

$$M(\eta;\ |\xi-\xi_n|>\varepsilon)<\delta;$$
$$M(|\xi|;\ |\xi-\xi_n|>\varepsilon)<\delta.$$

Стало быть,

$$|M\xi_n - M\xi| \leqslant M(|\xi_n-\xi|;\ |\xi_n-\xi|\leqslant\varepsilon)+$$
$$+M(|\xi_n-\xi|;\ |\xi_n-\xi|>\varepsilon)<\varepsilon+2\delta.$$

Часто бывает полезной также теорема о *монотонной сходимости.*

Теорема 2. *Если* $0\leqslant\xi_n\uparrow\xi$, *то*

$$M\xi=\lim_{n\to\infty}M\xi_n.$$

Доказательство. В дополнение к теореме 1 нам надо здесь доказать лишь, что $M\xi_n\to\infty$, если $M\xi=\infty$.

Положим

$$\xi_n^N=\min(\xi_n, N),\quad \xi^N=\min(\xi, N).$$

Тогда, очевидно, $\xi_n^N\uparrow\xi^N$ при $n\to\infty$, $M\xi_n^N\uparrow M\xi^N$.

Следовательно, значение $M\xi_n^N\leqslant M\xi_n$ выбором *n* и *N* может быть сделано сколь угодно большим.

2. *Связь с интегрированием по мере на прямой.* Пусть *g(x)* — некоторая борелевская функция, заданная на прямой *R* (если $\mathfrak{B}$— σ-алгебра борелевских множеств на прямой и $B\in\mathfrak{B}$, то $\{x:\ g(x)\in B\}\in\mathfrak{B})$.

Тогда $\eta=g(\xi(\omega))$, очевидно, также будет, случайной величиной. Как мы видели,случайная величина ξ индуцирует вероятностное пространство $(R,\ \mathfrak{B},\ P_\xi)$ с мерой P_ξ па прямой такое, что $P_\xi(B)=P(\xi\in B)$. Стало быть, мы можем говорить об интегралах по этой мере. Справедлива

Теорема 3. *Если* $M\eta$ *существует, то*

$$M\eta=\int_\Omega\eta\,dP=\int_R g(x)\,P_\xi(dx)$$

(в правой части мы использовали несколько иную запись

$$\int g(x)\,dP_\xi(x)).$$

Доказательство. Пусть сначала $g(x)=I_B(x)$ есть индикатор множества $B\in\mathfrak{B}$. Тогда $\eta=g(\xi(\omega))=I_{\{\xi\in B\}}(\omega)$ и

$M\eta=P(\xi\in B)$. Поэтому

$$\int g(x)\,P_\xi(dx)=\int I_B(x)\,P_\xi(dx)=P_\xi(B)=P(\xi\in B)=M\eta.$$

Используя свойства интеграла, легко установить теперь, что утверждение теоремы верно для простых функций g. Применение предельного перехода распространяет это утверждение на ограниченные функции. Пусть теперь $g \geq 0$. Если функция

$$g(\xi) I_B(\xi) = \eta(\omega) I_{\{\xi \in B\}}(\omega)$$

ограничена, то получаем

$$\int_B g(x)\, d\mathsf{P}_\xi(x) = \mathsf{M}(\eta;\ \xi \in B).$$

Поэтому

$$\int_{\{g \leqslant n\}} g\, d\mathsf{P}_\xi = \mathsf{M}(\eta;\ \eta \leqslant n).$$

Переходя к пределу по *n,* получим утверждение теоремы. Рассмотрение случая, когда g принимает значения обоих знаков, затруднений не вызывает.

Если обозначить

$$F(x) = \mathsf{P}(\xi < x),$$

то наряду с интегралом

$$\int_R g(x)\, \mathsf{P}_\xi(dx), \quad (4)$$

который только что рассматривался, мы можем рассмотреть также интеграл Римана — Стилтьеса

$$\int g(x)\, dF(x), \quad (5)$$

определение которого дано ранее. Там же нами было показано, что для *непрерывных* функций $g(x)$ эти интегралы совпадают. Кроме того, ранее были обсуждены некоторые другие условия совпадения этих интегралов.

Напомним также, что если

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt,$$

а функции $g(x)$ и *}(x)* интегрируемыпо Риману, то интегралы (4) и (5) совпадают с интегралом Римана

$$\int g(x) f(x)\, dx.$$

3. *Произведения мер и повторные интегралы.* Рассмотрим теперь двумерную случайную величину $\zeta = (\xi,\ \eta)$, заданную на $(\Omega,\ \mathfrak{F},\ \mathsf{P})$. Случайные величины ξ и η индуцируют выборочное вероятностное пространство $(R^2,\ \mathfrak{B}^2,\ \mathsf{P}_{\xi,\eta})$ с мерой $\mathsf{P}_{\xi,\eta}$,

заданной на элементах σ-алгебры $\mathfrak{B}^2$ борелевских множеств на плоскости (минимальная σ-алгебра, порожденная прямоугольниками) и такой, что

$$P_{\xi,\eta}(A\times B)=P(\xi\in A,\ \eta\in B).$$

Здесь $A\times B$ есть множество точек на плоскости *(x, y),* для которых $x\in A,\ y\in B$. Если *g(x, y)* есть борелевская функция $(\{(x,y):g(x,y)\in B\}\in\mathfrak{B}^2$ для каждого $B\in\mathfrak{B})$, то из предыдущего легко следует, что

$$Mg(\xi,\eta)=\int\limits_{R^2} g(x,y)P_{\xi,\eta}(dx\,dy), \qquad \textbf{(6)}$$

так как оба интеграла равны $\int\limits_R \theta P_\theta(dx)$ для $\theta=g(\xi,\eta)$.

Пусть теперь ξ и *η независимы,* т. е.

$$P(\xi\in A,\ \eta\in B)=P(\xi\in A)P(\eta\in B)$$

для любых $A,\ B\in\mathfrak{B}$. Произведение $\theta=\xi\eta$, очевидно, также будет случайной величиной.

Чтобы избежать в дальнейшем тривиальных затруднений, случай, когда одна из случайных величин ξ или *η* с вероятностью 1 равна 0 (тогда $P(\theta=0)=1$), мы будем исключать.

Теорема 4. *Если ξ и η независимы,* $\xi\geqslant 0,\ \eta\geqslant 0$, *то*

$$M\theta=M\xi\cdot M\eta.$$

Доказательство. Построим функции $\theta_n=\xi_n\eta_n$, где

$$\xi_n=\frac{k}{2^n}$$

для тех ω, на которых

$$\frac{k}{2^n}\leqslant\xi<\frac{k+1}{2^n}.$$

Функция η_n определяется аналогично. Очевидно, что $\xi_n\uparrow\xi$, $\eta_n\uparrow\eta$, $\theta_n\uparrow\theta$. Поэтому по теореме о монотонной сходимости и в силу независимости ξ и *η* получаем.

$$\mathsf{M}\theta = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\xi_n\eta_n =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k\geq 0\\ j\geq 0}} \frac{kj}{2^{2n}} \mathsf{P}\left(\xi \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right), \eta \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k\geq 0\\ j\geq 0}} \frac{kj}{2^{2n}} \mathsf{P}\left(\xi \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) \mathsf{P}\left(\eta \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\xi_n \cdot \mathsf{M}\eta_n = \mathsf{M}\xi \cdot \mathsf{M}\eta.$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда ξ и η принимают значения обоих знаков.

Теорема 5. *Пусть ξ и η независимы. Если $\mathsf{M}\xi$ и $\mathsf{M}\eta$ существуют, то существует*

$$\mathsf{M}\theta = \mathsf{M}\xi \cdot \mathsf{M}\eta.$$

И наоборот, из конечности $\mathsf{M}\theta$ следует конечность $\mathsf{M}\xi$ и $\mathsf{M}\eta$.

Доказательство. Второе утверждение сразу вытекает из равенства $\mathsf{M}|\theta| = \mathsf{M}|\xi| \cdot \mathsf{M}|\eta|$, которое следует из теоремы 4, независимости случайных величин $|\xi|$ и $|\eta|$ и предположения $\mathsf{M}\xi \neq 0$, $\mathsf{M}\eta \neq 0$. Для доказательства первого утверждения положим $\xi^+ = \max(0, \xi)$, $\xi^- = -\min(0, \xi)$ и аналогично определим $\eta^\pm$. Тогда $\xi^\pm$ и $\eta^\pm$ независимы, неотрицательны и

$$\mathsf{M}\xi\eta = \mathsf{M}(\xi^+ - \xi^-)(\eta^+ - \eta^-) = \mathsf{M}\xi^+\eta^+ - \mathsf{M}\xi^-\eta^+ -$$
$$- \mathsf{M}\xi^+\eta^- + \mathsf{M}\xi^-\eta^- = \mathsf{M}\xi^+\mathsf{M}\eta^+ - \mathsf{M}\xi^-\mathsf{M}\eta^+ -$$
$$- \mathsf{M}\xi^+\mathsf{M}\eta^- + \mathsf{M}\xi^-\mathsf{M}\eta^- = \mathsf{M}\xi \cdot \mathsf{M}\eta.$$

Вспоминая равенство (6), мы видим, что утверждение теорем 4, 5 можно записать также в виде

$$\int xy\mathsf{P}_{\xi\eta}(dx\,dy) = \int x\mathsf{P}_\xi(dx) \int y\mathsf{P}_\eta(dy),$$

так что в левой части этого равенства можно в соответствии с независимостью подставить $\mathsf{P}_{\xi\eta}(dx\,dy) = \mathsf{P}_\xi(dx)\mathsf{P}_\eta(dy)$ и проводить интегрирование по R^2 как повторное интегрирование, сначала по x, затем по y. В общем виде это правило выглядит следующим образом. *Если $g(x, y)$ есть борелевская функция* (тогда $g(x, y)$, как функция y при каждом x, и $\int g(x, y)\mathsf{P}_\eta(dy)$ будут также борелевскими), *то*

$$\int\int g(x, y)\mathsf{P}_{\xi,\eta}(dx\,dy) = \int\left(\int g(x, y)\mathsf{P}_\eta(dy)\right)\mathsf{P}_\xi(dx). \quad (7)$$

Это есть не что иное, как формула полной вероятности для

$$\mathsf{M}g(\xi,\eta)=\mathsf{M}\,[\mathsf{M}\,(g(\xi,\eta)/\xi)],\ \ \mathsf{M}\,(g(\xi,\eta)/\xi)=\int g(\xi,y)\,\mathsf{P}_\eta(dy),$$

когда ξ и η независимы.

Чтобы доказать равенство (7) для тех применений этой формулы, которые имели место в этой книге, достаточно доказать его для функций $g \geq 0$, обладающих тем свойством, что существует последовательность функций $g_{n,\,m}$, постоянных в прямоугольниках $x\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)$, $y\in\left[\frac{j}{m},\frac{j+1}{m}\right)$ и таких, что $g_{n,\,m}\uparrow g$ почти всюду при $n\to\infty,\ m\to\infty$.

Так как изменение значений подынтегральных функций на множестве меры 0 не меняют значения интеграла, то мы можем считать, что $g_{n,\,m}\uparrow g$ всюду. Далее, доказательство достаточно провести для ограниченных функций g, так как тогда

$$\int g\mathsf{P}_{\xi,\eta}(dx\,dy)=\lim_{n\to\infty}\int gI_{\{g\leqslant n\}}\mathsf{P}_{\xi,\eta}(dx\,dy)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int\left(\int gI_{\{g\leqslant n\}}\mathsf{P}_\eta(dy)\right)\mathsf{P}_\xi(dx)=$$

$$=\int\lim_{n\to\infty}\left(\int gI_{\{g\leqslant n\}}\mathsf{P}_\eta(dy)\right)\mathsf{P}_\xi(dx)=\int\left(\int g\mathsf{P}_\eta(dy)\right)\mathsf{P}_\xi(dx).$$

Итак, пусть g ограничена. Обозначим $g_n(x,\ y)=$
$=\lim\limits_{m\to\infty}g_{n,\,m}(x,\ y)$,

$$f(x)=\int g(x,y)\,\mathsf{P}_\eta(dy)=\mathsf{M}g(x,\eta),$$

$$f_n(x)=\int g_n(x,y)\,\mathsf{P}_\eta(dy)=\mathsf{M}g_n(x,\eta).$$

Тогда $g_{n,\,m}\uparrow g_n$ при $m\to\infty,\ \ g_n\uparrow g,\ \ f_n\uparrow f$ при $n\to\infty$ и $f_n(x)$ есть ступенчатая функция. Стало быть,

$$\mathsf{M}g(\xi,\eta)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\mathsf{M}g_{n,m}(\xi,\eta)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{\substack{|k|<n^2\\ |j|<m^2}}g_{n,m}\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right)\mathsf{P}\left(\xi\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)\right)\times$$

$$\times\,\mathsf{P}\left(\eta\in\left[\frac{j}{m},\frac{j+1}{m}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{|k|<n^2}\mathsf{P}\left(\xi\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)\right)\mathsf{M}g_n\left(\frac{k}{n},\eta\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}\,(f_n(\xi);\,|\xi|<n)=\mathsf{M}f(\xi).$$

10.8. 4. Интеграл по произвольной мере

Если μ — конечная мера на $\langle \Omega, \mathfrak{F} \rangle$, $\mu(\Omega) < \infty$, то определение интеграла $\int \xi \, d\mu$ по мере μ ничем не будет отличаться от соответствующей конструкции интеграла по вероятностной мере (мы можем положить просто

$$\int_A \xi \, d\mu = \mu(\Omega) \int_A \xi \, d\mathsf{P},$$

где $\mathsf{P}(B) = \mu(B)/\mu(\Omega)$ есть распределение вероятностей). Еслн же μ σ-конечна и $\mu(\Omega) = \infty$, то дело обстоит несколько сложнее, хотя снова все сводится к уже использованным построениям. Сделаем сначала несколько предварительных замечаний.

Пусть $\langle \Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P} \rangle$— вероятностное пространство и $f = f(\omega) \geq 0$ — п. в. конечная неотрицательная измеримая функция (т. е. случайная величина). Рассмотрим функцию множества

$$\mu(A) = \int_A f \, d\mathsf{P}. \quad \textbf{(8)}$$

Если *f интегрируема* $(\mu(\Omega) < \infty)$, то μ *(A)* будет конечной σ -аддитивной функцией множества (см. свойство 11), удовлетворяющей условиям 1—3 10.8.1 этого раздела. Другими словами, μ будет конечной мерой на $\langle \Omega, \mathfrak{F} \rangle$. Если же *f неинтегрируема,* то μ. будет σ -конечной мерой, что сразу следует из возможности представления

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A \cap \{k-1 \leq f < k\}} f \, d\mathsf{P}$$

(интегралы под знаком суммы, равные $\int_A f I_{\{k-1 \leq f < k\}} d\mathsf{P}$, являются, очевидно, конечными мерами).

Таким образом, интегралы вида (8) для любых распределения Р и функции $f \geq 0$ представляют собой меру. Оказывается, верно и обратное в известном смысле утверждение.

Лемма 4. *Для любой меры* μ *на* $\langle \Omega, \mathfrak{F} \rangle$ *найдется распределение* Р *на этом пространстве и измеримая функция* $f \geq 0$ 0 *такие, что справедливо представление* (8).

Так что любая мера представима в виде интеграла от вероятностной меры (т. е. в виде $\mathsf{M}(f;\ A)$ при соответствующих функции *f* и распределении Р).

Доказательство. Пусть μ — σ-конечпая мера на $\langle \Omega, \mathfrak{F} \rangle$ и множества $B_j \in \mathfrak{F}$, $j = 1, 2, \ldots,$ обладают свойствами

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \Omega, \quad B_i B_j = \varnothing \text{ при } i \neq j, \quad \mu(B_j) < \infty.$$

Положим

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(AB_k)}{2^k \mu(B_k)}. \quad (9)$$

Очевидно, что $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ и P является мерой. Далее, если $A \subset B_k$, то $\mu(A) = 2^k \mu(B_k) \mathsf{P}(A)$. Это означает, что мы должны положить $f(\omega) = 2^k \mu(B_k)$ при $\omega \in B_k$.

Тогда функция множества

$$\varphi(A) = \int_A f \, d\mathsf{P} = \int_\Omega f I_A d\mathsf{P}$$

будет совпадать с μ *(A)*:

$$\varphi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mu(B_k) \mathsf{P}(AB_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mu(B_k) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu(AB_k B_j)}{2^j \mu(B_j)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(AB_k) = \mu(A).$$

Здесь, помимо требуемого утверждения, мы получили также, что в представлении (8) множество значений функции *f*, не ограничивая общности, можно считать счетным.

Функция *f*, для которой возможно равенство (8), называется *плотностью* меры μ относительно P (или *производной Радона — Никодима* меры μ по P) и обозначается $\frac{d\mu}{d\mathsf{P}}$.

Очевидно, что изменение функции $f = \frac{d\mu}{d\mathsf{P}}$ на множестве P -меры нуль оставляет справедливым равенство (8).

Пусть теперь μ и P — две *заданные произвольные* меры. Весьма важным в теории вероятностей является вопрос, при каких условиях эти две меры μ и P могут быть связаны соотношением (8) и единственным ли образом (с точностью до значений на множество нулевой P -меры) определяется при этом функция *f* (подчеркнем, что в предыдущих рассмотрениях мы меру P строили специальным образом по море μ или наоборот). Ответы на эти вопросы содержатся в теореме Радона — Никодима, которая будет изложена в следующем параграфе. Теперь же, пользуясь доказанным несложным утверждением леммы 4, мы дадим определение интеграла но произвольной мере μ.

Пусть μ — σ-конечная мера на $\langle\Omega, \mathfrak{F}\rangle$ и $\xi \geqslant 0$ есть $\mathfrak{F}$- измеримая функция.

Интегралом $\int\limits_A \xi\, d\mu$ по множеству $A \in \mathfrak{F}$ от функции

$\xi \geq 0$ по мере μ называется интеграл по распределению P:

$$\int\limits_A \xi\, d\mu = \int\limits_A \left(\xi \frac{d\mu}{d\mathsf{P}}\right) d\mathsf{P}, \quad (10)$$

где P — любая вероятностная мера, удовлетворяющая равенству (8) (например, мера (9)).

Это определение *корректно,* поскольку оно не зависит от выбора P. Действительно, для простых функций ξ ($\xi(\omega) = x_k$ при $\omega \in F_k$)

$$\int\limits_A \xi\, d\mu = \sum x_k \int\limits_A \frac{d\mu}{d\mathsf{P}} I_{F_k}\, d\mathsf{P} = \sum x_k \int\limits_{AF_k} \frac{d\mu}{d\mathsf{P}}\, d\mathsf{P} = \sum x_k \mu(AF_k).$$

Если теперь $\xi \geq 0$ — произвольная функция, то по теореме о монотонной сходимости $\int\limits_A \xi\, d\mu$ будет равен

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_A \xi^{(n)} \frac{d\mu}{d\mathsf{P}}\, d\mathsf{P} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A \xi^{(n)}\, d\mu,$$

где $\xi^{(n)} \uparrow \xi$ есть последовательность простых функций, монотонно сходящихся к ξ (см. лемму 1). И в том и в другом случае полученный результат от выбора P не зависит.

Интеграл $\int\limits_A \xi\, d\mu$ *от произвольной измеримой функции* ξ

определяется как

$$\int\limits_A \xi\, d\mu = \int\limits_A \xi^+ d\mu - \int\limits_A \xi^- d\mu,$$

если оба выражения в правой части конечны (в этом случае говорят, что интеграл $\int\limits_A \xi\, d\mu$ существует). Здесь, как и прежде,

$\xi^+ = \max(0, \xi) \geqslant 0$, $\xi^- = \max(0, -\xi) \geqslant 0$, так что $\xi = \xi^+ - \xi^-$.

Мы видим, таким образом, что по существу данное нами определение интеграла по произвольной мере эквивалентно той конструкции, которая использовалась в 10.8.2. Однако определение в форме (10) избавляет нас от необходимости повторять весь пройденный путь (причем в более сложных условиях) и позволяет сразу перенести на общий случай все свойства интегралов

$\int \xi \, dP$.

Мы перечислим основные из них, сохранив их нумерацию:

И1. $\int \xi \, d\mu = \sum_j \int_{A_j} \xi \, d\mu$, если A_j не пересекаются, $\bigcup A_j = \Omega$.

И2. $\int (\xi + \eta) \, d\mu = \int \xi \, d\mu + \int \eta \, d\mu$.

И3. $\int a\xi \, d\mu = a \int \xi \, d\mu$.

И4. $\int \xi \, d\mu \leqslant \int \eta \, d\mu$, если $\xi \leqslant \eta$,

И5. $\left| \int \xi \, d\mu \right| \leqslant \int |\xi| \, d\mu$.

И6. Если $c_1 \leqslant \xi(\omega) \leqslant c_2$ при $\omega \in A$, то $c_1\mu(A) \leqslant$ $\leqslant \int_A \xi \, d\mu \leqslant c_2\mu(A)$.

И7. Если $\xi \geqslant 0$ и $\int \xi \, d\mu = 0$, то $\mu(\xi > 0) = 0$.

И8. Если $\mu(\xi \neq \eta) = 0$, то $\int \xi \, d\mu = \int \eta \, d\mu$.

Очевидно,что полностью сохранятся также и теоремы сходимости.

Теорема о сходимости мажорируемой последовательности. *Пусть* $|\xi| \leqslant \eta$ *и* $\int \eta \, d\mu$ *существует. Тогда, если* $\xi_n \xrightarrow[\mu]{} \xi$ *или* $\xi_n \to \xi$ *п. в., то*

$$\int \xi_n d\mu \to \int \xi \, d\mu.$$

Теорема о монотонной сходимости. *Если* $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$, *то* $\int \xi_n d\mu \to \int \xi d\mu$.

Рассмотрим в заключение частный случай, когда $\Omega = R = (-\infty, \infty)$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$ есть σ-алгебра борелевских множеств, а μ есть мера Лебега. Тогда, если *g(x)* непрерывна, то интеграл $\int_{[a,b]} g(x) \, d\mu(x)$ совпадает с интегралом Римана $\int_a^b g(x) \, dx$.

Это следует из соответствующих замечаний в п. 2 10.8.3.

10.8. 5. Теорема Лебега о разложении и теорема Радона — Никодима

Вернемся к вопросу, который был сформулирован в предыдущем параграфе. При каких условиях на меры μ и λ, заданные на $\langle \Omega, \mathfrak{F} \rangle$, мера μ может быть представлена в виде

$$\mu(A) = \int_A f\, d\lambda?$$

Здесь мы уже не предполагаем, что мера λ обязательно вероятностная.

Определения. Мера μ называется *абсолютно непрерывной* относительно меры λ (обозначается $\mu \prec \lambda$), если для всякого A такого, что λ *(A)=0,* будет выполняться μ *(A)* = **0.**

Любое множество N_μ называется *носителем меры* μ, если $\mu(\Omega - N_\mu) = 0.$

Говорят, что мера μ *сингулярна* относительно λ, если найдется такой носитель N_λ меры λ, для которого $\mu(N_\lambda) = 0$. Или, что то же, если найдется носитель N_μ меры μ, для которого $\lambda(N_\mu) = 0.$

Таким образом, последнее определение, в отличие от первого, симметрично и можно говорить о *взаимной сингулярности* мер μ и λ (такое соотношение часто обозначается $\mu \perp \lambda$).

Теорема Радона — Никодима. *Для абсолютной непрерывности* $\mu \prec \lambda$ *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция f, определенная с точностью до* λ *-эквивалентности* (т. е. с точностью до значений на множестве λ -меры нуль), *такая, что*

$$\mu(A) = \int_A f\, d\lambda$$

(Это равенство иногда принимается за определение абсолютной непрерывности.)

Как мы уже отмечали, функция *f* называется *производной Радона — Никодима* $\frac{d\mu}{d\lambda}$ меры μ по мере λ (или *плотностью* μ, относительно λ).

Так как достаточность в утверждении этой теоремы очевидна, мы получим теорему Радона — Никодима как следствие следующей теоремы Лебега о разложении меры.

Теорема Лебега. *Пусть* μ и λ *— две σ-конечные меры на* $\langle \Omega, \mathfrak{F} \rangle$. *Существует единственное разложение меры* μ *на две компоненты* μ_a *и* μ_c *такие, что*

$$\mu_a \prec \lambda, \quad \mu_c \perp \lambda.$$

При этом найдется единственная с точностью до λ -эквивалентности функция f, для которой

$$\mu_a(A) = \int_A f\,d\lambda.$$

Очевидно, что если $\mu \prec \lambda$, то $\mu_c = 0$ и из теоремы Лебега следует теорема Радона — Никодима.

Доказательство. Так как μ и λ σ-конечны, то существуют возрастающие последовательности вложенных множеств Ω_n^μ и Ω_n^λ такие, что

$$\mu\left(\Omega_n^\mu\right) < \infty, \lambda\left(\Omega_n^\lambda\right) < \infty,\ \bigcup_n \Omega_n^\mu = \Omega,\ \bigcup_n \Omega_n^\lambda = \Omega.$$

Положив $\Omega_n = \Omega_n^\mu \Omega_n^\lambda$, мы получим возрастающую до Ω последовательность множеств, на которых

$$\mu(\Omega_n) < \infty, \quad \lambda(\Omega_n) < \infty.$$

Если мы докажем теорему о разложении для сужения мер μ и λ на $\langle B_n, \mathfrak{F}_n\rangle$, где $B_n = \Omega_{n+1} - \Omega_n$, $\mathfrak{F}_n$ образована множествами B_nA, $A \in \mathfrak{F}$, то тем самым мы докажем ее и на всем Ω. Достаточно будет в качестве μ_a и μ_c взять суммы соответствующих компонент по каждому из сужений. Это замечание означает, что мы можем рассматривать лишь случай конечных мер.

Итак, пусть μ и λ — конечные меры.

а) Пусть Φ — класс функций $f \geq 0$, для которых

$$\int_A f\,d\lambda \leqslant \mu(A) \qquad \text{при всех } A \in \mathfrak{F} \quad \textbf{(11)}$$

(класс Φ не пуст, так как $f = 0$ принадлежит Φ). Обозначим

$$\alpha = \sup_{f\in\Phi} \int_\Omega f\,d\lambda \leqslant \mu(\Omega) < \infty$$

и выберем последовательность f_n такую, что

$$\int f_n d\lambda \to \alpha.$$

Положим $f_n' = \max(f_1, \ldots, f_n)$. Тогда, очевидно, $f_n' \uparrow f' = \sup f_n$ и по теореме о монотонной сходимости

$$\int_A f_n' d\lambda \to \int_A f' d\lambda. \quad (12)$$

Покажем теперь, что $f' \in \Phi$, т. е. что для f' выполнено (11). Для этого в силу (12) достаточно заметить, что $f_n' \in \Phi$. Пусть A_k, $k = 1, \ldots, n$,— непересекающиеся множества, на которых $f_n' = f_k$. Тогда $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$,

$$\int_A f_n' d\lambda = \sum_{k=1}^{n} \int_{AA_k} f_k d\lambda \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(AA_k) = \mu(A).$$

Таким образом, для «максимального» элемента f' из Ф также выполнено (11).

б) Положим

$$\mu_a(A) = \int_A f' d\lambda, \ \mu_c = \mu - \mu_a \qquad (13)$$

и докажем, что μ_c сингулярна относительно λ. Для этого нам понадобится следующее утверждение о разложении произвольной обобщенной меры (определение см. в 10.8.1).

Теорема Хана о разложении. *Для любой обобщенной конечной меры* γ *существуют непересекающиеся множества* $D^+ \in \mathfrak{F}$ *и* $D^- \in \mathfrak{F}$ *такие, что для любого*

$$A \in \mathfrak{F}$$

$$\gamma(AD^+) \geqslant 0, \quad \gamma(AD^-) \leqslant 0.$$

Доказательство. Покажем сначала, что существует множество $D \in \mathfrak{F}$, на котором γ *(A)* достигает своей верхней границы.

Пусть $B_n \in \mathfrak{F}$ — такая последовательность, что $\gamma(B_n) \to \Gamma = \sup_A \gamma(A)$.

Положим $B = \bigcup B_k$ и рассмотрим для данного n разбиение B на 2^n множеств $B_{n,m}$, $m = 1, \ldots, 2^n$, вида $\bigcap_{k=1}^{n} B_k'$, где $B_k' = B_k$ или $B - B_k$, $k \leq n$. При $n < N$ каждое $B_{n,m}$ представляет собой конечную сумму множеств $B_{N,M}$, $1 \leqslant M \leqslant 2^N$. Обозначим D_n сумму всех тех $B_{n\,m}$, на которых $\gamma(B_{n,m}) \geqslant 0$. Тогда

$$\gamma(B_n) \leqslant \gamma(D_n).$$

С другой стороны, при $N > n$ каждое $B_{N,M}$ либо лежит в D_n, либо не пересекается с ним. Поэтому

$$\gamma(D_n) \leqslant \gamma(D_n + D_{n+1} + \ldots + D_N).$$

Отсюда следует, что для множества $D = \lim \bigcup_{k=n}^{\infty} D_k$ выполняется

$$\gamma(B_n) \leqslant \gamma(D), \quad \Gamma \leqslant \gamma(D).$$

Вспоминая определение Г, получаем $\gamma(D) = \Gamma$.

Таким образом, существование множества *D*, на котором γ *(D)* максимально, доказано. Покажем теперь, что для любого $A \in \mathfrak{F}$ выполняется $\gamma(AD) \geqslant 0$ и $\gamma(A\bar{D}) \leqslant 0$,

где $\bar{D}$ = Ω — *D*. Действительно, допустив, например, что $\gamma(AD) < 0$, мы придем к противоречию, так как тогда

$$\gamma(D - AD) = \gamma(D) - \gamma(AD) > \gamma(D).$$

Аналогично, допустив $\gamma(A\bar{D}) > 0$, мы получили бы

$$\gamma(D + A\bar{D}) = \gamma(D) + \gamma(A\bar{D}) > \gamma(D).$$

Нам остается положить $D^+ = D,\ D^- = \bar{D}.$

Вернемся к доказательству того, что мера μ_C в равенстве (13) сингулярна. Пусть $D_n^{\pm}$ —множества в разложении Хана для обобщенной меры

$$\varphi_n = \mu_c - \frac{1}{n}\lambda.$$

Обозначим $N = \bigcap D_n^-$. Тогда $\bar{N} = \bigcup D_n^+$ и при всех *n* и $A \in \mathfrak{F}$

$$0 \leqslant \mu_c(AN) \leqslant \frac{1}{n}\lambda(AN).$$

Отсюда, полагая *n* →∞, получаем $\mu_c(AN) = 0$ и, следовательно, $\mu_c(A) = \mu_c(A\bar{N})$. То есть множество $\bar{N}$ является носителем μ_C.
Далее, так как

$$\mu_a(A) = \mu(A) - \mu_c(A\bar{N}) \leqslant \mu(A) - \mu_c(AD_n^+),$$

то

$$\int_A \left(f' + \frac{1}{n} I_{D_n^+}\right) d\lambda = \mu_a(A) + \frac{1}{n}\lambda(AD_n^+) \leqslant$$

$$\leqslant \mu(A) - \varphi_n(AD_n^+) \leqslant \mu(A).$$

Это означает, что $f' + \frac{1}{n} I_{D_n^+} \in \Phi$ и, следовательно,

$$\alpha \geqslant \int \left(f' + \frac{1}{n} I_{D_n^+}\right) d\lambda = \alpha + \frac{1}{n}\lambda(D_n^+).$$

Отсюда вытекает, что $\lambda(D_n^+) = 0,\ \lambda(\bar{N}) = 0$ и, значит, μ_C сингулярна относительно λ, поскольку $\bar{N}$ есть носитель μ_C.

Единственность разложения $\mu = \mu_a + \mu_c$ может быть установлена следующим образом. Допустим, что $\mu = \mu_a' + \mu_c'$ — некоторое другое разложение. Тогда $\gamma = \mu_a' - \mu_a = \mu_c - \mu_c'$. В силу свойства сингулярности существуют множества *N* и *N'* такие, что

$\mu_c(\bar{N}) = 0, \lambda(N) = 0, \mu_c'(\overline{N'}) = 0, \lambda(N') = 0.$ Очевидно, $\lambda(D) = 0,$ где $D = N+ N'$. Если допустить, что $\gamma = \mu_a' - \mu_a - \mu_c - \mu_c' \neq 0,$ то найдется $A \in \mathfrak{F}$, при котором $\gamma(A)\neq 0$. Следовательно, либо $\gamma\ (AD) \neq 0$, либо $\gamma(A\bar{D}) \neq 0$. Однако первое невозможно, поскольку $\lambda(D) = 0$ влечет за собой $\mu_a'(D) = \mu_a(D) = 0.$ Второе также невозможно, поскольку $\bar{D} = \bar{N}\bar{N}'$ и, следовательпо, $*\mu_c(\bar{D}) = \mu_c'(\bar{D}) = 0.$

Единственность функции f (с точностью до λ -эквивалентнооти), вытекает из того, что равенства $\mu_a(A) =$

$$= \int_A f\,d\lambda = \int_A f'd\lambda, \quad \int_A (f - f')\,d\lambda = 0$$ для всех A влекут за собой равенство $f - f' = 0$ п. в. Если допустить, например, что $\lambda\ (A)>0$ для $A = \{\omega : f - f' > \varepsilon\}$, то мы получили бы для такого A $\int_A (f - f')d\lambda > 0.$

Одпим из наиболее существенных приложений теоремы Радона — Никодима является доказательство существования и единственности условных математических ожиданий. Пусть $\mathfrak{F}_0$ есть σ-подалгебра $\mathfrak{F}$ и ξ — случайная величина на $\langle\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}\rangle$ такая, что $\mathsf{M}\xi$ существует. Мы ранее определили условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\xi/\mathfrak{F}_0)$ величины ξ относительно $\mathfrak{F}_0$ как $\mathfrak{F}_0$-измеримую случайную величину γ, для которой

$$\mathsf{M}(\gamma;\ B) = \mathsf{M}(\xi;\ B) \qquad (14)$$

при любом $B \in \mathfrak{F}_0$. Мы можем считать, не ограничивая общности, что $\xi\geq 0$ (произвольная функция ξ представима в виде разности двух положительных). Тогда правая часть в (14) будет мерой на $\langle\Omega, \mathfrak{F}_0\rangle$. Так как $\mathsf{M}(\xi; B) = 0,$ если $\mathsf{P}(B) = 0$, то она будет абсолютно непрерывной относительно P. Это влечет за собой по теореме Радона — Никодима существование единственной с точностью до P-эквивалентиости функции f на $\langle\Omega, \mathfrak{F}_0\rangle$ такой, что для всякого $B \in \mathfrak{F}_0$

$$\mathsf{M}(\xi; B) = \int_B \gamma\,d\mathsf{P}.$$

Полученное соотношение, очевидно, эквивалентно (14) и устанавливает требуемое существование и единственность условного математического ожидания.

Другое следствие доказанных в этом параграфе утверждений касалось теоремы Лебега о том, что любое распределение P на прямой

$R = (-\infty, \infty)$ (или соответствующая функция распределения) единственным образом представимо в виде суммы трех компонент $\mathsf{P} = \mathsf{P}_a + \mathsf{P}_c + \mathsf{P}_\partial$, где компонента P_a, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\mathsf{P}_a(A) =$
$$= \int_A f(x)\,dx;$$

P_∂— дискретная компонента, сосредоточенная на не более чем счетном множестве точек $x_1, x_2, \ldots$ таких, что $\mathsf{P}\,(x_k) > 0$; компонента P_c имеет носитель лебеговой меры 0 и непрерывную функцию распределения. Это есть прямое следствие теоремы Лебега о разложении. Надо только из сингулярной компоненты распределения P (относительно лебеговой меры λ) выделить дискретную ее часть, удалив сначала все точки x, для которых $\mathsf{P}\,(x) \geq 1/2$, затем все точки x, для которых $\mathsf{P}(x) \geqslant 1/3$ и т. д.

Ясно, что мы получим при этом не более чем счетное множество x-в и что такое выделение дискретной компоненты определяет P_∂ однозначно.

Все сказанное, очевидно, сохранится и для распределений в n-мерных евклидовых пространствах R^n.

10.9. ТЕОРЕМА НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность х. ф., а $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$— последовательность соответствующих функций распределения.

Мы уже знаем, что слабая сходимость $F_n \Rightarrow F$ влечет за собой сходимость х. ф. $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ при каждом t, где φ есть х. ф. F. Верно ли обратное утверждение, что из сходимости $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ следует слабая сходимость F_n?

Если φ есть х. ф. некоторого распределения, то положительный ответ на этот вопрос нам известен из. теоремы непрерывности. Таким образом, нам остается выяснить, при каких условиях предельная функция φ будет х. ф.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ *при* $n\to\infty$ *и при каждом* t. *Тогда следующие три условия эквивалентны:*

1) $\varphi(t)$ *есть х. ф.*,

2) $\varphi(t)$ *непрерывна в точке* $t=0$,

3) $\limsup\limits_{n\to\infty} \int\limits_{|x|>N} dF_n(x) \to 0$ *при* $N\to\infty$.

Предварительно мы рассмотрим несколько вспомогательных утверждений о слабой сходимости функций распределения.

Л е м м а 1. *Чтобы последовательность функций распределений* $\{F_n\}$ *слабо сходилась к неубывающей функции* F, *достаточно, чтобы выполнялось*

$$F_n(x) \to F(x)$$

при $n\to\infty$ *на каком-нибудь всюду плотном множестве* D *вещественных чисел.*

Доказательство. Пусть x — произвольная точка непрерывности $F(x)$. Для произвольных $x', x'' \in D$ таких, что $x' \leqslant x \leqslant x''$, выполняется

$$F_n(x') \leqslant F_n(x) \leqslant F_n(x'').$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x') \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} F_n(x'').$$

В силу условий леммы получаем отсюда

$$F(x') \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x'').$$

Полагая $x' \uparrow x$ и $x'' \downarrow x$ по множеству D и учитывая, что x — точка непрерывности $F(x)$, получим:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

Теорема 2 (Холлп). *Всякая последовательность функций распределения* $\{F_n\}$ *содержит подпоследовательность* $\{F_{nn}\}$, *слабо сходящуюся к некоторой неубывающей фужции* F.

Доказательство. Пусть $D = \{x'_n\}$ — произвольное счетное всюду плотное множество вещественных чисел. Последовательность чисел $\{F_n(x')\}$ ограничена и поэтому содержит сходящуюся последовательность $\{F_{1n}(x'_1)\}$. Обозначим предел этой подпоследовательности $F(x'_1)$. Рассмотрим теперь последовательность чисел $\{F_{1n}(x'_2)\}$. Эта последовательность также содержит сходящуюся подпоследовательность $\{F_{2n}(x'_2)\}$ с пределом $F(x'_2)$. При этом

$$\lim_{n\to\infty} F_{2n}(x_1') = F(x_1').$$

Продолжая этот процесс, мы для любого числа *k* получим *k* последовательностей

$$\{F_{kn}(x_i')\}, \quad i = 1, \dots, k$$

таких, что

$$\lim_{n\to\infty} F_{kn}(x_i') = F(x_i').$$

Рассмотрим диагональную последовательность функций распределений $\{F_{nn}(x)\}$. Для любого $x_k' \in D$ только *k — 1* первых членов последовательности чисел $\{F_{nn}(x_k')\}$ могут не принадлежать последовательности $F_{kn}(x_k')$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} F_{nn}(x_k') = F(x_k').$$

Ясно, что *F{x)* есть заданная на *D* неубывающая ограниченная функция. Ее легко продолжить по непрерывности слева до неубывающей функции на всей прямой. Теперь мы видим, что последовательность $\{F_{nn}\}$ и функция *F* удовлетворяют условию леммы 1.

Доказательство теоремы 1. Покажем, что условие 3) влечет за собой 1). Из теоремы 2 следует, что последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит подпоследовательность, $\{F_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, слабо сходящуюся к некоторой неубывающей функции *F*. Мы докажем, что *F* есть функция распределения.

Действительно, для заданного ε > 0 мы можем в силу условия 3) выбрать *N* так, чтобы

$$\limsup_{n\to\infty} (F_n(N) - F_n(-N)) > 1 - \varepsilon \quad .(1)$$

и чтобы *N* и —*N* были точками непрерывности *F(x).* Тогда

$$\lim_{n\to\infty} (F_n(N) - F_n(-N)) = F(N) - F(-N) \leqslant V, \quad \textbf{(2)}$$

где $V = \operatorname{Var} F$. Допустив, что *V* <1, и положив ε =1—*V,*
мы получим, что (1) противоречит (2). Следовательно, *V* = 1, *F* есть функция распределения, $F_{n_k} \Rightarrow F$ и, стало быть, последовательность φ_{nk} (а вместе с ней и φ_n) сходится к х. ф. распределения *F*.

Чтобы установить, что из 2) следует 3), покажем сначала, что справедлива

Л е м м а 2. *Если* ψ *есть х. ф.* ξ, *то при любом и* > 0

$$\mathsf{P}\left(|\xi|>\frac{2}{u}\right)\leqslant\frac{1}{u}\int\limits_{-u}^{u}[1-\psi(t)]\,dt.$$

Доказательство. Правая часть этого неравенства равна

$$\frac{1}{u}\int\limits_{-u}^{u}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1-e^{-itx}\right)dF(x)\,dt,$$

где F — функция распределения ξ. Меняя порядок интегрирования и замечая, что

$$\int\limits_{-u}^{u}\left(1-e^{-itx}\right)dt=\left(t+\frac{e^{-itx}}{ix}\right)\Bigg|_{-u}^{u}=2u\left(1-\frac{\sin ux}{ux}\right),$$

мы получим

$$\frac{1}{u}\int\limits_{-u}^{u}[1-\psi(t)]\,dt=2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\sin ux}{ux}\right)dF(x)\geqslant$$

$$\geqslant 2\int\limits_{|x|>\frac{2}{u}}\left(1-\left|\frac{\sin ux}{ux}\right|\right)dF(x)\geqslant$$

$$\geqslant 2\int\limits_{|x|\geqslant\frac{2}{u}}\left(1-\frac{1}{|ux|}\right)dF(x)\geqslant\int\limits_{|x|\geqslant\frac{2}{u}}dF(x).$$

Пусть теперь выполнено условие 2). В силу леммы 2

$$\limsup_{n\to\infty}\int\limits_{|x|>\frac{2}{u}}dF_n(x)\leqslant$$

$$\geqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{u}\int\limits_{-u}^{u}[1-\varphi_n(t)]\,dt=\frac{1}{u}\int\limits_{-u}^{u}[1-\varphi(t)]\,dt.$$

Так как $\varphi(t)$ непрерывна в точке 0 и $\varphi(0) = 1$, то среднее значение интеграла, стоящее в правой части, может быть сделано выбором u сколь угодно малым. Это означает, очевидно, выполнение условия 3). Тот факт, что условие 1) всегда влечет за собой 2), нам уже известен. Теорема доказана.

10.10. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

В теории вероятностей есть ряд предельных теорем, объединенных общим названием *закона больших чисел.* В этом параграфе мы рассмотрим две типичные теоремы такого рода.

Теорема 1. *Если $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций с конечными дисперсиями, такая, что* $\int f_n\, d\mu = 0,\ n = 1, 2, \ldots,$

и $\lim\limits_{n} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma^2(f_i) = 0,$ *то последовательность средних арифметических* $\left\{\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right\}$ *сходится по мере к нулю.*

Доказательство. Так как функция σ^2 однородна с показателем 2 и, для независимых функций, аддитивна, то

$$\int \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i\right)^2 d\mu = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(f_i).$$

Таким образом, условия теоремы эквивалентны предположению, что последовательность средних арифметических сходится к нулю в среднем с показателем 2 (иначе говоря, сходится к нулю в пространстве $\mathscr{L}_2$), а из этого предположения вытекает сходимость по мере.

Говорят, что две измеримые функции f и g на пространстве вероятностей $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$ имеют *одинаковое распределение,* если: $\mu(f^{-1}(M)) = \mu(g^{-1}(M))$ для всех борелевских множеств M на числовой прямой. Легко проверить, что если f и g— интегрируемые функции с одинаковым распределением и если $F = f^{-1}(M)$ и $G = g^{-1}(M)$, где M —какое-нибудь борелевское множество, то $\int\limits_F f\, d\mu = \int\limits_G g\, d\mu.$ К последовательности независимых функций $\{f_n\}$, таких, что

$\int f_n\, d\mu = 0,$

$n = 1, 2, ...,$ и любые f_m и f_n, $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ n = 1,\ 2,\ \ldots,$ имеют одинаковое распределение, непосредственно применима теорема 1, так как в этом случае $\sigma^2(f_n) = \sigma^2(f_1)$ при любом n, и условие, касающееся дисперсий, выполняется автоматически.

Следующие два предложения из элементарного анализа понадобятся нам для вывода усиленной формы закона больших чисел.

Теорема 2. *Если $\{y_n\}$ — последовательность действительных чисел, имеющая конечный предел y, то* $\lim\limits_{n} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = y.$

Доказательство. Для всякого положительного числа ε существует целое положительное число n_0, такое, что

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2},$$

когда $n > n_0$. Выберем целое положительное число n_1, большее n, так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_0} |y_i - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $n > n_v$ то

$$\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i - y\right| = \left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_0} (y_i - y)\right| + \left|\frac{1}{n} \sum_{i=n_0+1}^{n} (y_i - y)\right| <$$

$$< \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_0} |y_i - y| + \frac{n - n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Теорема 3. *Если $\{y_n\}$ — последовательность действительных чисел, такая, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n}$ *сходится, то*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = 0.$$

Доказательство. Положим

$$s_0 = 0, \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{i}, \quad t_n = \sum_{i=1}^{n} y_i, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Так как $y_i = i(s_i - s_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots,$ и

$$t_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} is_i - \sum_{i=1}^{n+1} is_{i-1} = -\sum_{n=1}^{n} s_i + (n+1)s_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то

$$\frac{t_{n+1}}{n+1} = -\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i + s_{n+1}.$$

Последовательность $\{s_n\}$ сходится к конечному пределу и, в силу теоремы 2, к тому же пределу сходится последовательность

$$\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i\right\}.$$

Следовательно,

$$\lim_n \frac{t_{n+1}}{n+1} = 0.$$

Теорема 4. *Если $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций с конечными дисперсиями, такая, что*

$$\int f_n \, d\mu = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(f_n)}{n^2} < \infty,$ *то последовательность*

$$\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i\right\}$$

сходится к нулю почти всюду.

Как условия, так и утверждение теоремы 4 сильнее, чем в теореме 1. Теорема 4 представляет собой одну из форм *усиленного закона больших чисел.*

Доказательство. Положим $g_n(x) = \frac{1}{n} f_n(x),\ n = 1,\ 2,\ \ldots,$ и применим к последовательности $\{g_n\}$ теорему 2 п. 10.3. Так как

$$\int g_n \, d\mu = 0, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(g_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(f_n)}{n^2} < \infty,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_n(x)$$

сходится почти всюду. Требуемый результат вытекает из теоремы 3.

1. Две измеримые функции имеют одинаковое распределение тогда и только тогда, когда их функции распределения совпадают (см. упр. 11 п.4.2).
2. Если $\{\sigma_i^2\}$—последовательность неотрицательных действительных чисел, а m и n — целые положительные числа, причем $m<n,$ то

$$\frac{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}{n^2} \leqslant \frac{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_m^2}{n^2} + \frac{\sigma_{m+1}^2}{(m+1)^2} + \ldots + \frac{\sigma_n^2}{n^2}.$$

Из этого неравенства следует, что условия теоремы 4 не слабее условий теоремы 1. То, что они в действительности сильнее, можно показать, построив последовательность независимых функций с дисперсиями $\sigma^2(f_n) = \frac{n+1}{\log(n+1)}$.

3. Условие теоремы 4, касающееся дисперсий, ослабить нельзя. В самом деле, какова бы ни была последовательность неотрицательных чисел $\{\sigma_n^2\}$, такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} = \infty,$ существует последовательность независимых функций $\{f_n\}$, такая, что

$$\int f_n \, d\mu = 0, \ \sigma^2(f_n) = \sigma_n^2, \ n = 1,\ 2,\ \ldots,$$ и

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\right\}$$

не сходится к нулю почти всюду. [Указание. Функции f_n следует строить так, чтобы при $\sigma_n^2 \leqslant n^2$ выполнялись условия

$$\mu(\{x : f_n(x) = n\}) = \mu(\{x : f_n(x) = -n\}) = \frac{\sigma_n^2}{2n^2},$$

$$\mu(\{x : f_n(x) = 0\}) = 1 - \frac{\sigma_n^2}{n^2},$$

а при $\sigma_n^2 > n^2$—условия

$$\mu(\{x : f_n(x) = \sigma_n\}) = \mu(\{x : f_n(x) = -\sigma_n\}) = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что если

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 0,$$

то

$$\lim_n \frac{1}{n} y_n = 0,$$

и применим к множествам $\{x : |f_n(x)| \geqslant n\}$ лемму Бореля — Кантелли.]

4. Если $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций, удовлетворяющая условиям теоремы 4, то существует эквивалентная ей последовательность $\{g_n\}$ независимых функций, такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(g_n)}{n^2} = \infty.$$

Другими словами, предложение, обратное усиленному закону больших чисел, не справедливо.

5. Справедливо следующее, несколько ослабленное, обращение теоремы 4: если $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций, такая, что $\int f_n\, d\mu = 0$ и почти всюду

$\left|\frac{1}{n} f_n(x)\right| \leqslant c, \ n = 1, 2, \ldots,$ где c — некоторая постоянная, и если последовательность

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\right\}$$

сходится к нулю почти всюду, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(f_n)}{n^{2+\varepsilon}} < \infty,$$

каково бы ни было положительное число ε. [Указание. Если последовательность действительных чисел $\{y_n\}$ такова, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right\}$ сходится к нулю или хотя бы ограничена, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

сходится при любом положительном ε.

6. В теореме 4 условие $\int f_n\, d\mu = 0, \ n = 1, 2, \ldots,$ можно

заменить условием $\lim\limits_{n} \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu = 0.$

7. Следующую теорему также называют иногда усиленным законом больших чисел: если $\{f_n\}$ — последовательность независимых интегрируемых функций с одинаковыми распределениями, такая, что $\int f_n\, d\mu = 0,$ то

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i = 0$$

почти всюду. К доказательству этой теоремы приводит следующаяцепь предложений:

а) Если $E_n = \{x : |f_1(x)| \leqslant n\}$, то $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^2}\int_{E_n} f_1^2\, d\mu < \infty.$

[Указание. Положим $g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\chi_n f_1^2,$ где χ_n — характеристическая функция множества E_n. Если $k - 1 < |f_1(x)| \leqslant k,$ то $\chi_n(x) = 0$ для всех $n<k;$ отсюда вытекает, что $|g(x)| < |f_1(x)|$ и, следовательно, g интегрируема.]

б) Если $F_n = \{x : |f_n(x)| \leqslant n\}$ и $g_n = \chi_{F_n} f_n,$ то последовательность независимых функций $\{g_n\}$ эквивалентна $\{f_n\}$.

в) $\lim_n \sum_{i=1}^{n} \int g_i\, d\mu = 0.$ [Указание.

$$\int g_i\, d\mu = \int_{F_i} f_i\, d\mu = \int_{E_i} f_1\, d\mu \text{ и } \{E_i\}$$

представляет собой возрастающую последовательность измерительных множеств, соединение которых равно X (см. теорему 2).]

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(g_n)}{n^2} < \infty.$ [Указание. Заметив, что

$$\int g_n\, d\mu = \int_{F} f_n^2\, d\mu = \int_{E_n} f_1^2\, d\mu,$$

и применив „а", установим сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\int g_n^2\, d\mu;$ в силу неравенств

$$\left(\int g_n\,d\mu\right)^2 \leqslant \left(\int |g_n|\,d\mu\right)^2,$$

будет сходиться и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\int g_n\,d\mu\right)^2.]$$

8. Теорема, приведеннаяв упр. 7, допускает следующее обращение: если $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций, имеющих одинаковое распределение, и $\lim\limits_n \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f_i = 0$ почти всюду, то f_n интегрируемы. [Указание. Условие $\lim\limits_n \frac{1}{n} f_n = 0$ почти всюду и лемма Бореля — Кантелли обеспечивают сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\{x : |f_n(x)| > n\}\right).$$

Далее следует заметить, что $\mu\left(\{x : |f_n(x)| > n\}\right) = \mu\left(\{x : |f_1(x)| > n\}\right)$, и применить результат упр. 4 § 5.5.]

9. Применив усиленный закон больших чисел к последовательности функций Радемахера, мы придем к теореме Бореля о *нормальных числах:* почти все числа единичного интервала разлагаются в двоичные дроби, содержащие одинаковое число нулей и единиц. Подобный же вывод справедлив для разложений в бесконечные дроби при любом основании r, отличном от 2 ($r \geq 3$), и мы получаем, таким образом, теорему об *абсолютно нормальных числах:* почти все числа нормальны относительно всех оснований r одновременно.

10.11. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ И УСЛОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ

Пусть E и F измеримые множества в пространстве вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$; если $\mu(F) \neq 0$, то условная вероятность E при условии F была нами определена равенством

$$\mu_F(E)=\frac{\mu(E\cap F)}{\mu(F)}$$

(см. § 10.1 и упр. 1 § 10.2). Теперь нас интересует вопрос, как $\mu_F(E)$ зависит от F. Предположим, что множество F таково, что и $\mu(F)$ и $\mu(F')$ не равны нулю; рассмотрим измеримое пространство Y, состоящее только из двух точек y_1 и y_2 (при этом подразумевается, что все его подмножества измеримы), и отображение T пространства X в Y, такое, что $T(x)=y_1$ или y_2 в зависимости от того, принадлежит x множеству F или нет. Если для любого множества A в Y положить

$$\nu_E(A)=\mu(E\cap T^{-1}(A)) \quad \text{и} \quad \nu(A)=\nu_X(A)=\mu(T^{-1}(A)),$$

то, очевидно,

$$\mu_F(E)=\frac{\nu_E(\{y_1\})}{\nu(\{y_1\})} \quad \text{и} \quad \mu_{F'}(E)=\frac{\nu_E(\{y_2\})}{\nu(\{y_2\})}.$$

Таким образом, условную вероятность можно рассматривать как измеримую функцию на Y, представляющую собой, грубо говоря, отношение мер ν_E и ν.

Построение, осуществленное в предыдущем абзаце, можно несколько обобщить. Пусть $\{F_1, \ldots, F_n\}$— конечный класс непересекающихся измеримых множеств положительной меры, причем $\bigcup_{i=1}^{n} F_i=X$; рассмотрим измеримое пространство Y, состоящее из n точек $y_1, \ldots, y_n$. Если $T(x)=y_i$, когда $x\in F_i$, $i=1, \ldots, n$, то T представляет собой измеримое отображение пространства X в Y и снова условные вероятности могут быть представлены в виде отношений мер в пространстве Y. Мы приходим к следующему общему определению.

Пусть T—любое измеримое отображение пространства вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$ в какое-нибудь измеримое пространство (Y, T); положим $\nu_E(F)=\mu(E\cap T^{-1}(F))$, где E—измеримое множество в X, а F — измеримое множестве в Y. Ясно, что ν_E и μT^{-1} $(=\nu_X)$ представляют собой меры на T, причем $\nu_E \ll \mu T^{-1}$. Согласно теоремеРадона — Никодима, существует интегрируемая функция p_E на Y, такая, что

$$\mu(E\cap T^{-1}(F))=\int_E p_E(y)\,d\mu T^{-1}(y)$$

для любого F из **T**; эта функция p_E определяется однозначно по модулю μT^{-1}. Назовем $p_E(y)$ условной вероятностью E при условии y (или условной вероятностью E при условии $T(x)=y$). Иногда мы будем называть эту функцию „условной вероятностью E при заданном значении $T(x)$" и писать $p_E(T(x))$. Кроме того, мы условимся вместо $p_E(y)$ писать $p(E, y)$; тогда же, когда нас будет интересовать p как функция аргумента E, то мы будем ее обозначать

$$p^y(E) = p(E, y).$$

Если множество F таково, что $\mu\left(T^{-1}(F)\right) \neq 0$, то, разделив обе части равенства, определяющего p, на $\mu\left(T^{-1}(F)\right)$, мы получим соотношение

$$\mu_{T^{-1}(F)}(E) = \frac{\mu(E \cap T^{-1}(F))}{\mu(T^{-1}(F))} = \frac{1}{\mu\left(T^{-1}(F)\right)} \int_F p(E, y)\, d\mu T^{-1}(y).$$

Так как слева стоит условная вероятность E при условии $T^{-1}(F)$, то представляется правдоподобным, что, когда F „стягивается к точке y", левая часть равенства должна стремиться к условной вероятности E при заданном y, а правая — к значению подинтегральной функции $p(E, y)$. Теорема Радона — Никодима позволяет строго оформить эти пока еще довольно шаткие рассуждения.

Теорема 1. *Для любого фиксированного измеримого множества E в X*

$$0 \leqslant p(E, y) \leqslant 1 \qquad [\mu T^{-1}].$$

Для любой фиксированной последовательности $\{E_n\}$ непересекающихся измеримых множеств в X

$$p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(E_n, y) \quad [\mu T^{-1}].$$

Доказательство. Первое утверждение вытекает из неравенств $0 \leqslant \mu\left(E \cap T^{-1}(F)\right) \leqslant 1$, справедливых при любом измеримом множестве F в Y. Для того чтобы доказать второе утверждение, заметим, что

$$\int_F p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, y\right) d\mu T^{-1}(y) = \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cap T^{-1}(F)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(E_n \cap T^{-1}(E)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_F p(E_n, y)\, d\mu T^{-1}(y) =$$

$$= \int_F \left(\sum_{n=1}^{\infty} p(E_n, y)\right) d\mu T^{-1}(y),$$

и воспользуемся свойством единственности производной Радона — Никодима.

Теорема 1 утверждает, что функция p^y в некоторых отношениях напоминает меру. Сходство это проявляется далее в следующих свойствах p^y: $p(X, y) = 1\ [\mu T^{-1}]$; если $E_1 \subset E_2$, то

$$p(E_1, y) \leqslant p(E_2, y)\ [\mu T^{-1}];$$

если $\{E_n\}$ — убывающая последовательность измеримых множеств в X, то

$$p\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n, y\right) = \lim_n p(E_n, y)\ \ [\mu T^{-1}].$$

Важно, однако, помнить, что то исключительное множество меры нуль, на котором соответствующее соотношение нарушается, зависит от выбора множеств E_i, поэтому, вообще говоря, нельзя утверждать, что функция p^y почти для всех y представляет собой меру.

Уравнение, определяющее $p(E, y\backslash$ может быть записано в виде

$$\int_{T^{-1}(F)} \chi_E(x)\, d\mu(x) = \int_F p(E, y)\, d\mu T^{-1}(y).$$

Возьмем теперь вместо χ_E произвольную интегрируемую на X функцию f; тогда функция v, определяемая равенством

$$\nu(F) = \int_{T^{-1}(F)} f(x)\, d\mu(x)$$

для любого измеримого множества F в Y, представляет собой обобщенную меру на **T**. Так как, очевидно, $\nu \ll \mu T^{-1}$, то, согласно теореме Радона — Никодима, существует такая интегрируемая функция e_f на Y, что

$$\int_{T^{-1}(F)} f(x)\,d\mu(x) = \int_F e_f(y)\,d\mu T^{-1}(y),$$

каково бы ни было F из **T**; по модулю μT^{-1} функция e_f определяется таким образом однозначно. Назовем $e_f(y)$ *условным математическим ожиданием* f *при условии* y; вместо $e_f(y)$ мы будем также писать $e(f, y)$. Так как соотношение между p и e напоминает соотношение между мерой и неопределенным интегралом, то можно ожидать, что p и e связаны равенством вроде

$$e(f, y) = \int f(x)\,dp^y(x).$$

Но p^y не является, вообще говоря, мерой, поэтому написанный интеграл может не иметь смысла; на e сказываются, таким образом, плохие свойства функции p.

Теорема 2. *Если f — интегрируемая функция на Y, то fT представляетсобой интегрируемую функцию на X и при этом*

$$e(fT, x) = f(y).$$

Доказательство. Из теоремы 3 § 8.1 следует, что fT интегрируема и

$$\int_{T^{-1}(F)} f\big(T(x)\big)\,d\mu(x) = \int_F f(y)\,d\mu T^{-1}(y)$$

для любого F из **T**.

1. Рассмотрим декартово произведение $(X \times Y,\ \mathbf{S} \times \mathbf{T},\ \mu \times \nu)$ пространств вероятностей $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$ и $(Y,\ \mathbf{T},\ \nu)$.
Если $T(x,\ y) = x$, то T представляет собой измеримое отображение пространства $X \times Y$ на X. Для любого измеримого множества E в $X \times Y$ выполняется равенство $p(E,\ x) = \nu(E_x)\ [\mu]$, и, следовательно, в этом случае p_E можно определить так, что p^x оказывается мерой при любом x.
2. Пусть $(X,\ \mathbf{S},\ \mu)$ и $(Y,\ \mathbf{T},\ \nu)$ —пространства вероятостей и

λ — мера на **S** × **T**, такая, что $\lambda \ll \mu \times \nu$; пусть

$$\lambda(E) = \int_E f d(\mu \times \nu).$$

Если $T(x, y) = x$, то для любого измеримого множества E в $X \times Y$

$$p(E, x) = \int \chi_E(x, y) f(x, y)\, d\nu(y) \ [\mu].$$

3. Если T—измеримое отображение пространства вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$ в измеримое пространство (Y, **T**), то $p(T^{-1}(F), y) = \chi_F(y)$ для любого измеримого множества F в Y.

4. Возможны случаи, когда условные вероятности $p(E, y)$ нельзя задать так, чтобы p^y была мерой для почти всех y. Рассмотрим следующий пример. Пусть Y—замкнутый единичный интервал, **T** — класс всех борелевских множеств в Y, ν — лебеговская мера на **T**. Положим $X= Y$ и возьмем σ-кольцо **S**, порожденное классом **T** и каким-либо множеством M, обладающим тем свойством, что и само M и его дополнение M' являются массивными множествами в Y. Зададим на **S** вероятностную меру μ, положив

$$\mu((A \cap M) \cup (B \cap M')) = \nu(A),$$

где A и B принадлежат **T**, и рассмотрим отображение T пространства X на Y, определенное равенством $T(x) = x$. Допустим, что в **T** существуеттакое множество C_0 меры нуль, что p^y представляет собой меру на **S**, когда $y \overline{\in} C_0$.

а) Если $D_0 = \{x : p(M, y) \neq 1\}$, то $\nu(D_0) = 0$.

б) Если E_0 — множество тех y, для которых нарушается тождество $p(T^{-1}(F), y) = \chi_F(y)$ (относительно F), то $\nu(E_0) = 0$. [Указание. Пусть **R** — счетное кольцо, такое, что $\mathbf{S}(\mathbf{R}) = \mathbf{T}$. Если для любого F из **R** положить

$$E_0(F) = \{y : p(T^{-1}(F), y) \neq \chi_F(y)\},$$

то $\nu(E_0(F)) = 0$. Воспользуемся тем, что две вероятностные меры, совпадающие на **R**, тождественны на всем **T**.]

в) Если то $y \overline{\in} C_0 \cup D_0 \cup E_0$, $y \in M$. [*У к а з а н и е.* Так как

$$p(M, y) = 1$$

и

$$p(T^{-1}(\{y\}), y) = 1,$$

а p^y есть мера, то

$$p(M \cap T^{-1}(\{y\}), y) = 1.]$$

Из „в" вытекает, что в M содержится борелевское множество $C'_0 \cap D'_0 \cap E'_0$ меры 1, а это противоречит предположению, что M' — густое подмножество Y.

5. Если X— числовая прямая, μ — вероятностная мера на всех борелевских множествах в X, T—измеримое отображение X в какое-нибудь измеримое пространство (Y, **T**), то условные вероятности $p(E, y)$ можно задать так, чтобы p^y была мерой для почти всех y. [Указание. Положим $q(x, y) = p((-\infty, x), y)$. В Y существует такое измеримое множество C_0, что $\mu T^{-1}(C_0) = 0$ и, когда $y \bar{\in} C_0$, q^y представляет собой монотонную функцию на множестве всех рациональных чисел и $\lim\limits_n q^y\left(x - \frac{1}{n}\right) = q^y(x)$ для любого рационального числа x.

Пусть $\bar{q}^y$ — монотонная и непрерывная слева функция наX, совпадающая с q^y при рациональных x, а $\bar{p}^y$ —мера на **S**, определенная равенством $\bar{p}^y((-\infty, x)) = \bar{q}^y(x)$; тогда $\bar{p}(E, y) = \bar{p}^y(E)$

обладает требуемым свойством.]

6. Если T—измеримое отображение пространства вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$ в измеримое пространство $(Y$, **T**) и условные вероятности $p(E, y)$ можно задать так, чтобы функция p^y была мерой для почти всех y, то

$$e(f, y) = \int f(x)\, dp^y(x) \quad [\mu T^{-1}],$$

какова бы ни была интегрируемая функция f на X. [Указание. Это равенство справедливо, если f—характеристическая функция измеримого множества.]

7. Пусть T—измеримое отображение пространства вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$ в измеримое пространство (Y, **T**). Если f и g — функции, интегрируемые относительно μ и μT^{-1} соответственно, и если функция h, определенная равенством $h(x) = f(x)\, g(T(x))$, интегрируема на X, то $e(h, y) =$

$$= e(f, y)\, g(y) \quad [\mu T^{-1}].$$

10.12. МЕРЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВ

Существует ли последовательность независимых случайных величин, обладающих наперед заданными распределениями? Говоря точнее, если $\{\mu_n\}$—последовательность вероятностных мер на борелевских множествах числовой прямой, то всегда ли существуют такое пространство вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и такая последовательность независимых функций $\{f_n\}$ на X, что $\mu(f_n^{-1}(E)) = \mu_n(E)$ для любого борелевского множества E и для любого целого положительного n? В более общей постановке вопрос может быть сформулирован так: если $\{(X_n, \mathbf{S}_n, \mu_n)\}$ — последовательность пространств вероятностей, то всегда ли существует такое пространство вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и, для каждого целого положительного числа n, такое измеримое отображение T_n пространства X в $X_1 \times \ldots \times X_n$, что $\mu T_n^{-1} = \mu_1 \times \ldots \times \mu_n$? Положительный ответ на эти вопросы дает теорема 2 § 7.6.

Понятие независимости одно из важнейших в теории вероятностей, однако теория вероятностей не может ограничиться рассмотрением одних только независимых случайных величин. Основная цель этого параграфа состоит в том, чтобы сформулировать и доказать для зависимых случайных величин теорему, соответствующую теореме 2 § 7.6, т. е. установить существование последовательности случайных величин с наперед заданными совместными распределениями. Однако, в отличие от теоремы 2 § 7.6, теорема этого параграфа применима только к равномерно ограниченным действительным функциям; другими словами, „множители" того произведения пространств, которое мы собираемся рассматривать, будут представлять собой единичные интервалы. Сам результат и его доказательство распространяются на более общие случаи, но и эти обобщения существенно опираются на те или иные топологические понятия. Обойтись же без всяких условий топологического характера, повидимому, невозможно; известно, что аналог следующей ниже теоремы 1, сформулированный только в терминах теории меры, неверен. Предположим, что X_n при любом целом положительном n представляет собой замкнутый единичный интервал, а $\mathbf{S}_n$ — класс всех борелевских множеств в X_n; положим $(X,\ \mathbf{S}) = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{n=1}^{\infty} (X_n,\ \mathbf{S}_n)$.

Пусть, далее, F_n есть σ-кольцо всех измеримых $\{1, ..., n\}$-цилиндров в X и—

$$\mathbf{F} \left(= \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n \right)$$

класс всех измеримых конечномерных множеств в X (см. § 7.6).

Теорема 1. *Если* μ — *функция на* **F**, *являющаяся при любом целом положительном n вероятностной мерой на* $\mathbf{F}_n$, *то существует единственное продолжение функции* μ, *представляющее собой вероятностную меру на* **S**.

Доказательство. Определим измеримое отображение T_n пространства X на измеримое пространство $Y_n = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n} X_i$ равенством

$$T_n(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1},\ \ldots) = (x_1,\ \ldots,\ x_n), \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

и положим для измеримых множеств A в Y_n

$$\nu_n(A) = \mu(T_n^{-1}(A)).$$

Тогда, если $\{E_i\}$—убывающая последовательность множеств из **F**, таких, что $0 < \varepsilon \leqslant \mu(E_i),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,$ то для любого фиксированного i найдется такое борелевское множество A_i в Y_n и такое целое положительное число n, что $E_i = T_n^{-1}(A_i)$. Пусть B_i — замкнутое подмножество множества A_i, такое, что

$\nu_n(B_i - A_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Если $F_i = T_n^{-1}(B_i)$, то F_i — замкнутое множество в X (относительно топологии пространства X как тихоновского произведения интервалов) и $\mu(E_i - F_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$.

Положим $G_k = \bigcap_{i=1}^{k} F_i$; тогда $\{G_k\}$— убывающая последовательность компактных множеств в X. Так как

$$\mu(E_k - G_k) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} (E_k - F_i)\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} (E_i - F_i)\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

то

$$\mu(G_k)=\mu(E_k)-\mu(E_k-G_k)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно, $G_k\neq 0,\ k=1,\ 2,\ \ldots$ Убывающая последовательность компактных множеств имеет непустое пересечение; таким образом доказано, что функция μ непрерывна сверху в 0 и, следовательно, счетно-аддитивна. Окончательный результат следует из теоремы 1 § 3.8.

Сохраняя введенные выше обозначения, установим теперь одно интересное свойство произведения единичных интервалов.

Теорема 2. *Для любого измеримого множества E в X*

$$\lim_n p(E,\ T_n(x))=\chi_E(x)\ \ [\mu];$$

другими словами, для всех x, за исключением, быть может, некоторого множества меры нуль, условные вероятности E при заданных первых n координатах точки x с возрастанием n стремятся к 0 или 1, в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит x множеству E.

Доказательство. Вместо сходимости почти всюду мы докажем почти равномерную сходимость (в силу теорем 1 и 2 § 4.5, обе сходимости эквивалентны). Пусть ε и δ — положительные числа, причем δ <1. Согласно теореме 4 § 3.8, существует измеримый {1, ..., n_0}-цилиндр E_0, такой, что $\mu(E\,\Delta\,E_0)<\frac{\varepsilon\delta}{2}$. Положим

$B=E\,\Delta\,E_0$ и заметим, что $\chi_E(x)=\chi_{E_0}(x)$, когда $x\,\overline{\in}\,B$.

Пусть $C_n=\{x:p(B,\ T_n(x))\geqslant\delta\},\ D_n=C_n-\bigcup_{1\leqslant i<n}C_i,$

$n=1,\ 2,\ldots,$ и $C=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n,$ тогда C_n и D_n при любом n являются измеримыми {1, ..., n}-цилиндрами. Поэтому

$$\mu(B\cap D_0)=\int_{D_n}p(B,T_n(x))\,d\mu(x)\geqslant\delta\mu(D_n)$$

и, следовательно,

$$\frac{\varepsilon\delta}{2} > \mu(B) \geqslant \mu(B \cap C) = \mu\left(B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap D_n) \geqslant \delta \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) =$$

$$= \delta\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \delta\mu(C).$$

Если положить $A = B \cup C,$ то $\mu(A) \leqslant \frac{\varepsilon\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$ Так как $|p(E, T_n(x)) - p(E_0, T_n(x))| \leqslant p(E \Delta E_0, T_n(x))\ [\mu], \quad n = 1, 2, \ldots,$ то можно предположить, что эти неравенства выполняются для всех x из X. При $n \geq n_0$, в силу теорем 1 § 7.6 и 2 § 10.11, будем иметь неравенство

$$|p(E, T_n(x)) - \chi_{E_0}(x)| \leqslant p(B, T_n(x)).$$

Если, кроме того, $x \bar{\in} A,$ то, $\chi_{E_0}(x) = \chi_E(x)$ и

$p(B, T_n(x)) < \delta,$ следовательно

$|p(E, T_n(x)) - \chi_E(x)| < \delta.$

1. Пусть— $\{(X_n \mathbf{S}_n, \mu_n)\}$ последовательность пространств вероятностей

$$(X, \mathbf{S}) = \mathop{\mathsf{X}}_{n=1}^{\infty} (X_n, \mathbf{S}_n)$$

и μ — функция на $\mathbf{F}$, такая, что μ является вероятностной мерой на $\mathbf{F}_n$ при любом n. Если на всех F_n функция μ абсолютно непрерывна относительно произведения мер $\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{\infty} \mu_i,$ то для μ существует единственное продолжение, являющееся вероятностной мерой на $\mathbf{S}$. [У к а з а н и е. См. доказательство теоремы 2, § 7.6.] И результат и метод доказательства распространяются на все случаи, когда можно

задать условные вероятности $p\left(E,\ T_n(x)\right)$ так, чтобы для почти всех фиксированных x они были вероятностными мерами на каждом $\mathbf{F}_k$.
2. Утверждение и доказательство теоремы 1 распространяются на случай, когда X_n— любые компактные метрические пространства. Дополнением локально компактного пространства до компактного можно без труда доказать теорему 1 для того случая, когда каждое X_n является числовой прямой. Верна ли теорема 1 тогда, когда все X_n— произвольные компактные пространства?
3. Сохраняя обозначения упр. 1, приведем пример, когда X_n не являются интервалами и теорема 1 неверна. Пусть Y—единичный интервал, $\mathbf{T}$ — класс всех борелевских множеств в Y, ν— лебеговская мера на $\mathbf{T}$. Пусть, далее, $\{X_n\}$ —такая убывающая последовательность массивных подмножеств в Y, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = 0.$$

Положим $\mathbf{S}_n = \mathbf{T} \cap X_n$; если $E \in \mathbf{S}_n$, т. е. $E = F \cap X_n$, где $F \in \mathbf{T}$, то положим $\mu_n(E) = \nu(F)$. Образуем произведение пространств $(X,\ \mathbf{S}) = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{n=1}^{\infty} (X_n,\ \mathbf{S}_n)$ и рассмотрим измеримые отображения S_n пространств X_n в $X_1 \times \ldots \times X_n$, определяемые для произвольного n равенствами $S_n(x_n) =$

$$= (z_1, \ldots, z_n),\ z_i = x_n,\ i = 1, \ldots, n.$$

а) Для любого измеримого $\{1, ..., n\}$-цилиндра

$$E = A \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \ldots, \quad A \in \mathbf{S}_1 \times \ldots \times \mathbf{S}_n,$$

в X положим $\mu(E) = \mu_n\left(S_n^{-1}(A)\right)$. Тем самым мы однозначно определим на $\mathbf{F}$ функцию μ, которая при любом n будет вероятностной мерой на $\mathbf{F_n}$.
б) Если E_i — множество всех тех точек $(x_1, x_2, ...)$ из X, первые i координат которых совпадают, $i = 1, 2, \ldots,$ то $\bar{E}_i \in \bar{\mathbf{F}}_i$.
[Указание. Если

$$D_i = \{(y_1, \ldots, y_i):\quad y_1 = \ldots = y_i\},$$

то D_i представляет собой измеримое подмножество i-мерного декартова произведения Y самого на себя; при этом

$$E_i = \left(D_i \cap (X_1 \times \ldots \times X_i)\right) \times X_{i+1} \times X_{i+2} \times \ldots).]$$

в) Функция множества μ на **F** не непрерывна сверху в 0. [Указание. Множества E_i, определенные в „6[я]", таковы, что

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = 0,$$

но $\mu(E_i) = 1.$]

4. Закон 0—1 (см. упр. 3 §10.3) представляет собойчастный случай теоремы 2. В самом деле, если *E* является J_n-цилиндром и *F*—измеримое множество в Y_n, то $T_n^{-1}(E)$является {1,..., *n*}-цилиндром и

$$\mu\left(E \cap T_n^{-1}(F)\right) = \mu(E)\,\mu T_n^{-1}(F) = \int_F \mu(E)\, d\mu_n,$$

поэтому $p\left(E,\ T_n(x)\right)$ почти всюду [μ] равна постоянной $(= \mu(E))$. Из теоремы 2 вытекает, что

$$\chi_E(x) = \mu(E)\ [\mu]$$

и, следовательно, $\mu(E)$ равна 0 или 1.

11. ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

11.1. НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

В этом параграфе мы выведем несколько топологических результатов, отсутствующих обычно, в силу их весьма специального характера, в руководствах по топологии.

Всюду в этой главе, если не оговорено противное, предполагается, что *X*—локально компактное хаусдорфово пространство. $\mathfrak{F}$ будет обозначать множество всех действительных непрерывных функций *f* на *X*, удовлетворяющих при всех *x* неравенствам $0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$

Теорема 1. *Если C—компактное множество, а U и V— открытые множества, соединение которых содержит* C, *то существуют такие компактные множества* D *и E, что* $D \subset U,\ E \subset V$ *и* $C = D \cup E.$

Доказательство. Так как *C*—*U* и *C*—*V* представляют собой непересекающиеся компактные множества, то существуют такие

непересекающиеся открытые множества $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$, что $C-U\subset\tilde{U}$ и $C-V\subset\tilde{V}$; положим $D=C-\tilde{U}$ и $E=C-\tilde{V}$. Легко видеть, что D и E компактны и $D\subset U$, $E\subset V$. Так как $\tilde{U}\cap\tilde{V}=0$, то $D\cup E=$
$=(C-\tilde{U})\cup(C-V)=C-(\tilde{U}\cap\tilde{V})=C$.

Теорема 2. *Если C—компактное множество, F — замкнутое множество и* $C\cap F=0$, *то в* $\mathfrak{F}$ *существует такая функция f, что* $f(x)=0$ *для x из C и* $f(x)=1$ *для x из F.*

Доказательство. Пространство X вполне регулярно, поэтому для каждой точки y из C существует функция f_y из $\mathfrak{F}$, такая, что $f_y(y)=0$ и $f_y(x)=1$, когда $x\in F$. Так как класс всех множеств вида

$$\left\{x:f_y(x)<\frac{1}{2}\right\}$$

образует открытое покрытие компактного множества C, то C содержит конечное подмножество $\{y_1,\ \ldots,\ y_n\}$, обладающее тем свойством, что

$$C\subset\bigcup_{i=1}^{n}\left\{x:f_{y_i}(x)<\frac{1}{2}\right\}.$$

Положим $g(x)=\prod_{i=1}^{n}f_{y_i}(x)$; тогда $g\in\mathfrak{F}$ и, так как $0\leqslant f_y(x)\leqslant 1$ при всех x из X и при всех y из C, то $g(x)<\frac{1}{2}$, когда $x\in C$, и $g(x)=1$, когда $x\in F$. Легко убедиться в том, что свойствами, указанными в теореме, будет обладать функция $f=(2g-1)\cup 0$.

Иногда бывает важно знать не только, существует или нет функция $f\in\mathfrak{F}$, тождественно равная нулю на C, как в теореме 2, но и можно ли выбрать ее так, чтоба она нигде вне C в нуль не обращалась. Такой выбор f в общем случае невозможен; в следующей теореме этот вопрос рассмотрен подробнее.

Теорема 3. *Если f—действительная непрерывная функция на X и c — произвольное действительное число, то каждое из множеств*

$$\{x : f(x) \geqslant c\}, \quad \{x : f(x) \leqslant c\} \quad \text{и} \quad \{x : f(x) = c\}$$

представляет собой замкнутое G_δ. *Обратно, если C—компактное* G_δ, *то существует функция f из* $\mathfrak{F}$, *такая, что* $C = \{x : f(x) = 0\}$.

Доказательство. Так как

$\{x : f(x) \geqslant c\} = \{x : -f(x) \leqslant -c\}$ и

$\{x : f(x) = c\} = \{x : f(x) \geqslant c\} \cap \{x : f(x) \leqslant c\}$, то достаточно рассмотреть множество $\{x : f(x) \leqslant c\}$. В силу непрерывности функции *f*, множество $\{x : f(x) \leqslant c\}$ замкнуто, тогда как множества вида $\left\{x : f(x) < c + \frac{1}{n}\right\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ открыты. Равенство

$$\{x : f(x) \leqslant c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) < c + \frac{1}{n}\right\}$$

означает, что $\{x : f(x) \leqslant c\}$ есть G_δ.

Теперь предположим, что

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n,$$

где *C*—компактное множество, а $\{U_n\}$—последовательность открытых множеств. Согласно теореме 2, для каждого n=1, 2, ... существует функция f_n из $\mathfrak{F}$, равная нулю на C и единице на $X— U_n$. Положим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n};$$

тогда $f \in \mathfrak{F}$ и $f(x) = 0$, когда $x \in$ C. Какова бы ни была точка *x,* принадлежащая $X - C$, $x \in X - U_n$ при некотором значении *n;* таким образом, если $x \in X - C$, то

$f(x) \geqslant \frac{1}{2^n} f_n(x) = \frac{1}{2^n} > 0$ и, следовательно,

$$C = \{x : f(x) = 0\}.$$

Теорема 4. *Если C— компактное множество, U— открытое множество и* $C \subset U$, *то существуют множество* C_0, *являющееся компактным* G_δ, *и σ-компактное открытое множество* U_0, *такие, что*

$$C \subset U_0 \subset C_0 \subset U.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно предположить, что *U* ограничено, так как всегда существует ограниченное открытое множество *V*, содержащее C и содержащееся в *U*. Пусть *f*—функция из $\mathfrak{F}$, равная нулю на C и единице на *X*—*U* (см. теорему 2); положим

$$U_0 = \left\{x : f(x) < \frac{1}{2}\right\} \quad \text{и} \quad C_0 = \left\{x : f(x) \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

При этом, очевидно, $C \subset U_0 \subset C_0 \subset U$ и, в силу теоремы 3, C_0 представляет собой замкнутое G_δ. Так как *U* ограничено, то C_0 компактно; из равенства

$$U_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right\}$$

видно, что U_0 σ-компактно.

Теорема 5. *Если X сепарабельно, то в нем всякое компактное множество C есть* G_δ.

Доказательство. Какова бы ни была точка *x* из *X*, не принадлежащая C, существуют такие непересекающиеся открытые множества

$U(x)$ и $V(x)$, что $C \subset U(x)$ и $x \in V(x)$.

Пространство *X* сепарабельно, и класс $\{V(x) : x \overline{\in} C\}$ образует открытое покрытие множества *X*— *G*, поэтому существует последовательность $\{x_n\}$ точек из *X*, такая, что

$$X - C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V(x_n).$$

Отсюда следуют соотношения

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U(x_n) \supset C \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(X - V(x_n)\right) \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} U(x_n).$$

1. Теорему 2 можно доказать иначе, дополнив пространство X до компактного (присоединением одной точки) и воспользовавшись тем, что компактное хаусдорфово пространство нормально. Для любых двух непересекающихся замкнутых множеств C и D в компактном хаусдорфовом пространстве существует непрерывная на этом пространстве функция, равная нулю на С и единице на D.
2. С помощью теоремы 3 или непосредственно можно доказать, что класс всех компактных G_δ замкнут относительно образования конечных соединений и счетных пересечений.
3. Если X — несчетное дискретное пространство, а X^*— компактное пространство, полученное из X путем присоединения одной точки x^*, то одноточечное множество $\{x^*\}$ компактно, но не является G_δ.
4. Пусть I — произвольное несчетное множество; поставим в соответствие каждому i из I (компактное хаусдорфово) пространство X_i, состоящее из двух действительных чисел 0 и 1; их тихоновское произведение

$$\mathop{\mathsf{X}}_{i \in I} X_i$$

обозначим X:

а) Любое одноточечное множество в X компактно, но не является G_δ.

б) Назовем множество E в X $\aleph_0$-множеством, если в I существует такое счетное подмножество J, что E представляет собой J-цилиндр (см. упр. 2 § 7.6). Компактное множество C в X есть G_δ тогда и только тогда, когда оно является $\aleph_0$-множеством. [Указание. Если C компактно, U открыто и $C \subset U$, то, в силу самого определения топологии в X, $C \subset U_0 \subset U$, где U_0 — открытое множество в X и одновременно J-цилиндр, причем J — некоторое конечное подмножество в I.]

в) Если f—действительная непрерывная функция на X и M — любое борелевское множество на числовой прямой, то $f^{-1}(M)$ представляет собой $\aleph_0$'-множество.

5. Пусть X^* и Y^*— компактные пространства, полученные из счетного дискретного пространства X и несчетного дискретного пространства Y присоединением к тому и другому по одной точке (x^* и y^*). На примере множеств

$$(\{x^*\} \times Y^*) - \{(x^*, y^*)\} \quad \text{и} \quad (X^* \times \{y^*\}) - \{(x^*, y^*)\}$$

в локально компактном хаусдорфовом пространстве

$$(X^* \times Y^*) - \{(x^*, y^*)\}$$

можно видеть, что в теореме 2 нельзя опустить условие компактности множества C.

6. В локально компактном хаусдорфовом пространстве класс всех σ-компактных открытых множеств образует базис (см. теорему 4).

11.2. БОРЕЛЕВСКИЕ И БЭРОВСКИЕ МНОЖЕСТВА

Соотношения между свойством измеримости и свойством непрерывности функций представляют исключительный интерес; глубже всего эти соотношения изучены в случае локально компактных пространств. В этом параграфе мы изложим основные понятия и результаты, касающиеся некоторых специальных σ -колец множеств в локально компактных пространствах и функций, измеримых относительно этих σ -колец. Введем следующие обозначения: **C** — класс всех компактных множеств в локально компактном хаусдорфовом пространстве X, **S** — σ -кольцо, порожденное классом **C, U** — класс всех открытых множеств, принадлежащих классу **S**. Множества, принадлежащие классу **S**, мы будем называть *борелевскилш множествами* в X, так что, например, **U** может быть определено как класс всех открытых борелевских множеств в X. Действительную функцию f на X назовем функцией, *измеримой в смысле Бореля* (или просто *борелевской функцией),* если она измерима относительно σ -кольца **S**.

Теорема 1. *Всякое борелевское множество σ -ограничено; всякое σ -ограниченное открытое множество есть борелевское множество.*

Доказательство. Всякое компактное множество, очевидно, ограничено и, следовательно, σ -ограничено. Класс всех σ -ограниченных множеств представляет собой σ -кольцо, а так как он содержит **C**, то он содержит и σ -кольцо, порожденное классом **C**.

Предположим теперь, что U — открытое множество и $\{C_n\}$ — последовательность компактных множеств, такая, что

$$U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = K.$$

Так как все множества C_n—U, n = 1, 2, ..., компактны, то

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty}(C_n - U) \in \mathbf{S};$$

в сиду равенства $D=K—U$, имеем $U = K-(K-U) \in \mathbf{S}.$

Пусть $\mathbf{C}_0$ — класс всех компактных множеств в X, которые суть G_δ, $\mathbf{S}_0$— σ -кольцо, порожденное классом $\mathbf{C}_0$, и $\mathbf{U}_0$ — класс всех открытых множеств, принадлежащих $\mathbf{S}_0$. Множества, принадлежащие классу $\mathbf{S}_0$, мы условимся называть *бэровскими множествами* в X, так что, например, $\mathbf{U}_0$ можно определить как класс всех открытых бэровских множеств. Действительную функцию, заданную на X, назовем функцией, *измеримой в смысле Бэра* (или просто *бэровской функцией),* если она измерима относительно σ -кольца $\mathbf{S}_0$.

Борелевские множества могут показаться естественным объектом изучения с точки зрения теории меры. Однако некоторые соображения заставляют нас ввести понятие бэровского множества, на первый взгляд довольно искусственное. Приведем некоторые из этих соображений. Во-первых, теория бэровских множеств в некоторых отношениях проще теории борелевских множеств, хотя, в то же время, бэровские множества могут служить средством изучения борелевских множеств; во-вторых, всякая непрерывная функция, равная нулю вне некоторого компактного множества, измерима в смысле Бэра (см. теорему 2); в-третьих, S_0 представляет собой наименьшее σ -кольцо, содержащее запас множеств, достаточный для того, чтобы с его помощью можно было задать топологию в X (см. теорему 3); в-четвертых, во всех классических частных случаях, когда теория меры применяется в топологических пространствах (например, в эвклидовых пространствах), понятия борелевского и бэровского множеств совпадают (см. теорему 5 §11.2).

Теорема 2. *Если действительная непрерывная функция f на X такова, что множество* $N(f) = \{x : f(x) \neq 0\}$ *σ -ограничено, то f измерима в смысле Бэра.*

Доказательство. Если некоторое σ -ограниченное открытое множество U есть F_σ, то существует последовательность компактных множеств $\{C_n\}$, такая, что $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$ Согласно теореме 5 §11.1, $C_n \subset D_n \subset U,$ где n — произвольное целое положительное число и D_n— компактное бэровское множество. Отсюда следует, что

$U=\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ и U является бэровским множеством. Из предположений, относящихся к f, следует, что при любом действительном числе c множество $N(f)\cap\{x:f(x)<c\}$ представляет собой σ –ограниченное множество и в то же время множество F_σ.

Теорема 3. *Если* **B** *есть подбазис, а* $\hat{\mathbf{S}}$ *— какое-нибудь* σ *-кольцо, содержащее* **B**, *то* $\hat{\mathbf{S}}\supset\mathbf{S}_0$.

Доказательство. Если C—компактное множество, а U— открытое множество, содержащее C, то существует множество E, такое, что $C\subset E\subset U$ и E представляет собой конечное соединение конечных пересечений некоторых множеств из **B**, откуда следует, что E принадлежит классу $\hat{\mathbf{S}}$. Следовательно, если $C=\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, где U_n— открытые множества, то для всякого n=1, 2, ... существует E_n из $\hat{\mathbf{S}}$, такое, что $C\subset E_n\subset U_n$; итак, $C=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\in\hat{\mathbf{S}}$. Мы доказали, таким образом, что

$$\mathbf{C}_0\subset\hat{\mathbf{S}},$$

и утверждение теоремы вытекает из определения $\mathbf{S}_0$.

Класс бэровских множеств был определен как σ-кольцо, порожденное компактными G_δ. Можно поставить вопрос, нет ли среди бэровских множеств компактных множеств, не являющихся G_δ. Следующая теорема показывает, что таких множеств в классе $\mathbf{S}_0$ нет.

Теорема 4. *Всякое компактное бэровское множество есть* G_δ.

Доказательство. Пусть C—компактное множество, принадлежащее классу $\mathbf{S}_0$. Согласно теореме 4 § 2.6, существует последовательность множеств $\{C_n\}$ из $\mathbf{C}_0$, такая, что $C\in\mathbf{S}(\{C_n\})$. В силу теоремы 3 §11.1, при любом n = 1,2, ... существует функция f_n из $\mathfrak{F}$, для которой $C_n=\{x:f_n(x)=0\}$. Если для любой пары точек x и v из X мы положим

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)|,$$

то $d(x, x) = 0,\ d(x, y) = d(y, x)$

и $0 \leqslant d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Таким образом, если под $x \equiv y$ условиться понимать, что $d(x, y)=0$, то отношение $\equiv$ оказывается отношением эквивалентности (т. е. оно рефлективно, симметрично и транзитивно); класс всех множеств, попарно эквивалентных, в указанном смысле, точек пространства X обозначим Ξ. При любом x из X пусть $\xi = T(x)$ обозначает (единственный) элемент из Ξ, содержащий x.

Если $T(x_1) = T(y_1)$ и $T(x_2) = T(y_2)$ (т. е. если $x_1 \equiv y_1$ и $x_2 \equiv y_2$),

то

$$d(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, x_2) = d(y_1, y_2).$$

Точно так же можно доказать, что $d(y_1, y_2) \leqslant d(x_1, x_2)$, следовательно, $d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2)$. Таким образом, если $\xi_1 = T(x_1)$ и $\xi_2 = T(x_2)$ — два элемента из Ξ, то равенство $\delta(\xi_1, \xi_2) = d(x_1, x_2)$ однозначно определяет число $\delta(\xi_1, \xi_2)$. Так как из $\delta(\xi_1, \xi_2) = 0$ следует, что $\xi_1 = \xi_2$, то функция δ определяет в Ξ некоторую метрику;

Пусть $\xi_0 = T(x_0)$—произвольная точка метрического пространства Ξ, r_0 — любое положительное число; тогда если $E = \{\xi : \delta(\xi_0, \xi) < r_0\}$, то $T^{-1}(E) = \{x : d(x_0, x) < r_0\}$.

Так как $d(x_0, x)$ зависит от x непрерывно, то T представляет собой непрерывное отображение X на Ξ.

Множество A в X служит прообразом (при отображении T) некоторого множества в Ξ тогда и только тогда, когда, коль скоро A содержит какую-нибудь точку xг, оно содержит одновременно все точки, эквивалентные x (иначе говоря, когда A является соединением некоторого класса множеств эквивалентных друг другу точек). Каждое

C_n обладает этим свойством; класс прообразов всевозможных множеств из Ξ образует σ-кольцо и, наконец, $C \in \mathbf{S}(\{C_n\})$, поэтому в Ξ существует такое множество Г, что $T^{-1}(\Gamma) = C$. Из того, что $T(T^{-1}(\Gamma)) = \Gamma$, T непрерывно, а C компактно, вытекает, что множество Г компактно. Так как всякое замкнутое (а следовательно, и всякое компактное) множество в метрическом пространстве есть G_δ, то в Ξ существует такая последовательность открытых множеств $\{\Delta_n\}$, что

$$\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

Положим $U_n = T^{-1}(\Delta_n)$, $n = 1, 2, \ldots$; тогда, в силу непрерывности отображения Г, все U_n — открытые множества. При этом $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, так что $C \in \mathbf{C}_0$.

Теорема 5. *Если X и Y— локально компактные хаусдорфовы пространства и если* $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$ *и* $\mathbf{S}_0$*— σ-кольца бэровских множеств соответственно в X,Y и X×Y, то* $\mathbf{S}_0 = \mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_0$.

Доказательство. Если A и B — компактные бэровские множества соответственно в X и Г, то $A \times B$—компактное G_δ и, следовательно, компактное бэровское множество *в* $X \times Y$. Так как $\mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_0$ представляет собой σ-кольцо, порожденное классом множеств вида $U \times V$, то $\mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_0 \subset \mathbf{S}_0$. Пусть теперь U и V—открытые бэровские множества соответственно в X и F, тогда $U \times V \in \mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_0$, а так как класс множеств вида $U \times V$ является базисом в пространстве X× Y, то, согласно теореме 3, $\mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_0 \supset \mathbf{S}_0$.

В заключение этого параграфа мы сформулируем одну теорему, касающуюся строения классов бэровских и борелевских множеств (см. упр. 2 и 3 § 2.6); доказательство ее очень простое.

Теорема 6. *Всевозможные конечные соединения непересекаю щихся собственных разностей множеств из* **C** *(или из* $\mathbf{C}_0$*) образуют кольцо; порожденное им σ-кольцо совпадает с* **S** *{соответственно с* $\mathbf{S}_0$*).*

1. Если в качестве локально компактного пространства взять числовую прямую, то определение борелевского множества в таком пространстве согласуется с определением, данным в § 3.12.
2. Все пространство *X* представляет собой борелевское множество тогда и только тогда, когда оно σ -компактно.
3. σ -кольцо, порожденное классом всех ограниченных открытых множеств, или, что то же самое, σ -кольцо, порожденное классом **U**, совпадает с **S**. [Указание. Для любого компактного множества *C* следует взять открытое множество *U*, содержащее С, и рассмотреть $U - (U - C)$.]
4. Если *X*—произведение пространств, описанное в упр. 4 §11.1, то бэровские множества в *X* совпадают с измеримыми множествами (см. определение в § 7.6).
5. σ -кольцо, порожденное классом всех ограниченных открытых бэров-ских множеств, или, что то же самое, σ -кольцо, порожденное классом $\mathbf{U}_0$, совпадает с $\mathbf{S}_0$. [Указание. Если *C*— компактное множество, *U*— открытое множество и $C \subset U$, то существует такое ограниченное открытое бэровское множество U_0, что $C \subset U_0 \subset U$.]
6. Термин „бэровское множество" подсказан термином „бэровская функция". Пусть $\mathscr{B}$ —наименьший класс функций, охватывающий все непрерывные функции и содержащий предел любой сходящейся (не обязательно равномерно) последовательности функций, принадлежащих $\mathscr{B}$; функции, входящие в $\mathscr{B}$, называются *бэровскими функциями* на *X*. Для того чтобы множество в *X* было бэровским множеством, необходимо и достаточно, чтобы оно было борелевским, а его характеристическая функция была бзровской функ-цией.
7. Всякая булевская σ -алгебра изоморфна классу бэровских множеств, приведенному по модулю бэровских множеств первой категории, в некотором вполне несвязном компактном хаусдорфовом пространстве. [Указание. См. упр. 15, „в", § 8.2; заметим, что σ -кольцо, порожденное классом всех одновременно открытых и замкнутых множеств во вполне несвязном компактном хаусдорфовом пространстве, совпадает с классом всех бэровских множеств.]

11.3. РЕГУЛЯРНЫЕ МЕРЫ

Борелевской мерой назовем меру μ, заданную на классе **S** всех борелевских множеств и обладающую тем свойством, что

$\mu(C) < \infty$ для любого C из **C**; *бэровской мерой* условимся называть меру μ_0, заданную на классе $\mathbf{S}_0$ всех бэровских множеств и обладающую тем свойством, чт $\mu_0(C_0) < \infty$ для любого C_0 из $\mathbf{C}_0$. Теория борелевских мер и теория бэровских мер в некоторых отношениях весьма похожи друг на друга; целесообразно поэтому ряд теорем изложить так, чтобы одновременно охватить и борелевские и бэровские меры. Для этого условимся под $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{U}}$ и $\hat{\mathbf{S}}$ понимать соответственно либо **C**, **U** и **S**, либо $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{S}_0$.

При этом $\hat{\mu}$ будет обозначать борелевскую меру μ тогда, когда $\hat{\mathbf{S}}$ есть **S**, и бэровскую меру тогда, когда $\hat{\mathbf{S}}$ есть $\mathbf{S}_0$.

Множество E из $\hat{\mathbf{S}}$ назовем *внешне регулярным* (по отношению к мере $\hat{\mu}$), если

$$\hat{\mu}(E) = \inf\{\hat{\mu}(U) : E \subset U \in \hat{\mathbf{U}}\};$$

множество E из $\hat{\mathbf{S}}$ назовем *внутренне регулярным* (по отношению к $\hat{\mu}$), если

$$\hat{\mu}(E) = \sup\{\hat{\mu}(C) : E \supset C \in \hat{\mathbf{C}}\}.$$

Назовем множество E из $\hat{\mathbf{S}}$ *регулярным,* если оно и внешне и внутренне регулярно. Мера $\hat{\mu}$ регулярна, если по отношению к ней регулярны все множества E из **S**.

Грубо говоря, мера μ регулярна, если она полностью определяется своими значениями на компактных и на открытых множествах, т. е. на множествах, наиболее важных с точки зрения топологии. Свойство регулярности меры, таким образом, означает наличие некоторой связи между топологическими свойствами пространства и его строением как пространства с мерой. С точки зрения теории меры нерегулярные множества обладают чрезвычайно уродливыми свойствами.

Нетрудно убедиться в том, что множество внешне регулярно, в частности, тогда, когда $E \in \hat{\mathbf{S}}$ и $\hat{\mu}(E) = \infty$ или когда E принадлежит $\bar{\hat{\mathbf{U}}}$ или может быть представлено как пересечение последовательности множеств конечной меры из $\bar{\hat{\mathbf{U}}}$. Верно также двойственное предложение: если $E \in \hat{\mathbf{S}}$ и $\hat{\mu}(E) = 0$ или если E принадлежит $\hat{\mathbf{C}}$ или может быть представлено как соединение последовательности множеств из $\hat{\mathbf{C}}$, то E внутренне регулярно. Теперь мы перейдем к доказательству того, что регулярность некоторых множеств влечет за собой регулярность значительного числа других. Расчленение доказательства на отдельные этапы оправдывается теоремой 6 §11.2: от компактных множеств мы переходим к их разностям, а от разностей — к соединениям разностей. После того как будет показано, что класс регулярных множеств обладает известными свойствами замкнутости, позволяющими применить теорему о монотонных классах, порожденных кольцами (теорему 2 § 2.6), мы установим регулярность некоторых мер.

Теорема 1. *Если все множества, принадлежащие* $\hat{\mathbf{C}}$, *внешне регулярны, то любая собственная разность двух множеств из* $\hat{\mathbf{C}}$ *также внешне регулярна. Если все ограниченные множества, принадлежащие* $\hat{\mathbf{U}}$, *внутренне регулярны, то любая собственная разность двух множеств из* $\bar{\hat{\mathbf{U}}}$ *также внутренне регулярна.*

Доказательство. Пусть C и D — множества из $\hat{\mathbf{C}}$, причем $C \supset D$. Если C внешне регулярно, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое множество U из $\hat{\mathbf{U}}$, что $C \subset U$ и
$\hat{\mu}(U) \leqslant \hat{\mu}(C) + \varepsilon.$
Так как $C - D \subset U - D \in \hat{\mathbf{U}}$, то, в силу соотношений

$$\hat{\mu}(U-D)-\hat{\mu}(C-D)=\hat{\mu}((U-D)-(C-D))=$$

$$=\hat{\mu}(U-C)=\hat{\mu}(U)-\hat{\mu}(C)\leqslant\varepsilon,$$

множество $C—D$ внешне регулярно.

Для того чтобы доказать утверждение теоремы, касающееся внутренней регулярности, предположим, что U — ограниченное множество из $\hat{\mathbf{U}}$, такое, что $C\subset U$. Если ограниченное множество $U — D$ (из $\hat{\mathbf{U}}$) внутренне регулярно, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое множество E из $\hat{\mathbf{C}}$, что $E\subset U-D$ и $\hat{\mu}(U-D)\leqslant\hat{\mu}(E)+\varepsilon$. Так как $C-D=C\cap(U-D)\supset C\cap E\in\hat{\mathbf{C}}$, то, в силу соотношений

$$\hat{\mu}(C-D)-\hat{\mu}(C\cap E)=\hat{\mu}((C-D)-(C\cap E))=$$

$$=\hat{\mu}((C-D)-E)\leqslant\hat{\mu}((U-D)-E)=$$

$$=\hat{\mu}(U-D)-\hat{\mu}(E)\leqslant\varepsilon,$$

множество $C—D$ внутренне регулярно.

Теорема 2. *Конечное соединение непересекающихся внутренне регулярных множеств конечной меры представляет собой внутренне регулярное множество.*

Доказательство. Если $\{E_1, \ldots, E_n\}$— конечный класс непересекающихся внутренне регулярных множеств конечной меры, то для любого положительного $\varepsilon>0$ и для любого $i=1, \ldots, n$ существует множество C_i из $\hat{\mathbf{C}}$, такое, что

$$C_i\subset E_i \quad \text{и} \quad \hat{\mu}(E_i)\leqslant\hat{\mu}(C_i)+\frac{\varepsilon}{n}.$$

Если $C=\bigcup_{i=1}^{n}C_i$ и $E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$, то $E\supset C\in\hat{\mathbf{C}}$ и внутренняя регулярность множества E следует из соотношений

$$\hat{\mu}(E)=\sum_{i=1}^{n}\hat{\mu}(E_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\hat{\mu}(C_i)+\varepsilon=\hat{\mu}(C)+\varepsilon.$$

Нетрудно было бы доказать соответствующее предложение для внешне регулярных множеств, но надобности в этом нет, так как оно полностью покрывается следующей теоремой.

Теорема 3. *Соединение любой последовательности внешне регулярных множеств внешне регулярно; соединение возрастающей последовательности внутренне регулярных множеств внутренне регулярно.*

Доказательство. Пусть $\{E_i\}$ — последовательность внешне регулярных множеств; тогда для любого ε > 0 и для любого i= 1, 2,... существует множество U_i из U, такое, что

$$E_i\subset U_i \quad \text{и} \quad \hat{\mu}(U_i)\leqslant\hat{\mu}(E_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Положим $U=\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$. Если $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ и $\hat{\mu}(E)=\infty$, то E внешнерегулярно; если же $\hat{\mu}(E)<\infty$, то

$$\hat{\mu}(U)-\hat{\mu}(E)=\hat{\mu}(U-E)\leqslant\hat{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i-E_i)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\hat{\mu}(U_i-E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}(\hat{\mu}(U_i)-\hat{\mu}(E_i))\leqslant\varepsilon.$$

Пусть теперь $\{E_i\}$—возрастающая последовательность внутренне регулярных множеств и $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$. Мы должны доказать, что для всякого действительного числа c, меньшего $\hat{\mu}(E)$, существует множество C из $\hat{\mathbf{C}}$, такое, что C ⊂ E и $c<\hat{\mu}(C)$. Для этого воспользуемся равенством

$$\hat{\mu}(E)=\lim_{i}\hat{\mu}(E_i)$$

и выберем i таким образом, чтобы $c<\hat{\mu}(E_i)$; далее, так как E_i

внутренне регулярно, существует множество C из $\hat{\mathbf{C}}$, такое, что $C \subset E_i$ и $c < \hat{\mu}(C)$.

Теорема 4. *Пересечение последовательности внутренне регулярных множеств конечной меры внутренне регулярно; пересечение убывающей последовательности внешне регулярных множеств конечной меры внешне регулярно.*

Доказательство. Пусть $\{E_i\}$—последовательность внутренне регулярных множеств конечной меры; тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для любого i=1, 2, ... найдется такое множество C_i из $\hat{\mathbf{C}}$, что

$$C_i \subset E_i \quad \text{и} \quad \hat{\mu}(E_i) \leqslant \hat{\mu}(C_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Положим $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$. Если $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, то $E \supset C \in \hat{\mathbf{C}}$ и

$$\hat{\mu}(E) - \hat{\mu}(C) = \hat{\mu}(E - C) \leqslant \hat{\mu}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i - C_i)\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\mu}(E_i - C_i) = \sum_{i=1}^{\infty}(\hat{\mu}(E_i) - \hat{\mu}(C_i)) \leqslant \varepsilon.$$

Пусть теперь $\{E_i\}$—убывающая последовательность внешне регулярных множеств и $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$. Мы должны показать, что для всякого действительного числа c, большего $\hat{\mu}(E)$, существует множество U из $\hat{\mathbf{U}}$, такое, что $E \subset U$ и $c > \hat{\mu}(U)$. Для этого воспользуемся равенством

$$\hat{\mu}(E) = \lim_i \hat{\mu}(E_i)$$

и выберем i таким образом, чтобы $c > \hat{\mu}(E_i)$; далее, так как E_i внешне регулярно, существует множество U из **U**, такое, что $E_i \subset U$ и $\hat{\mu}(U) < c$.

Двойственность между свойствами внешней и внутренней регулярности, проявившаяся в сходстве двух последних доказательств, в действительности весьма глубока. Эта двойственность может быть точно сформулирована в виде следующей теоремы.

Теорема 5. *Для того чтобы все множества, принадлежащие* $\hat{\mathbf{C}}$, *были внешне регулярны, необходимо и достаточно, чтобы все множества, принадлежащие* $\hat{\mathbf{U}}$, *были внутренне регулярны.*

Доказательство. Предположим, что все множества из $\hat{\mathbf{C}}$ внешне регулярны, и возьмем любое ограниченное множество *U* из $\hat{\mathbf{U}}$; пусть ε — произвольное положительное число. *U* содержится в некотором множестве *C* из $\hat{\mathbf{C}}$; так как *C*— *U* компактно и принадлежит классу $\hat{\mathbf{S}}$, то, согласно теореме 4 §11.2,

$C - U \in \hat{\mathbf{C}}$ и, следовательно, существует множество *V* из $\hat{\mathbf{U}}$, такое, что

$$C - U \subset V \quad \text{и} \quad \hat{\mu}(V) \leqslant \hat{\mu}(C - U) + \varepsilon.$$

Так как $U = C - (C - U) \supset C - V \in \hat{\mathbf{C}}$, то внутренняя регулярность множества *U* вытекает из соотношений

$$\hat{\mu}(U) - \hat{\mu}(C - V) = \hat{\mu}(U - (C - V)) = \hat{\mu}(U \cap V) \leqslant$$

$$\leqslant \hat{\mu}(V - (C - U)) = \hat{\mu}(V) - \hat{\mu}(C - U) \leqslant \varepsilon.$$

Теперь предположим, что все множества из $\hat{\mathbf{U}}$ внутренне регулярны; возьмем какое-нибудь множество С из $\hat{\mathbf{C}}$ и произвольное положительное число ε. *C* содержится в некотором ограниченном множестве *U* из $\hat{\mathbf{U}}$; так как *U*—*C* ограничено и принадлежит $\hat{\mathbf{U}}$, то существует множество *D* из $\hat{\mathbf{C}}$, такое, что

$$D \subset U - C \quad \text{и} \quad \hat{\mu}(U - C) \leqslant \hat{\mu}(D) + \varepsilon.$$

Так как $C = U - (U - C) \subset U - D \in \hat{\mathbf{U}}$, то внешняя регулярность множества C вытекает из соотношений

$$\hat{\mu}(U - D) - \hat{\mu}(C) = \hat{\mu}((U - D) - C) = \hat{\mu}((U - C) - D) =$$
$$= \hat{\mu}(U - C) - \hat{\mu}(D) \leqslant \varepsilon.$$

Теорема 6. *Для того чтобы мера* $\hat{\mu}$ *была регулярна, необходимо и достаточно любое из двух следующих условий: все множества, принадлежащие* $\hat{\mathbf{C}}$, *внешне регулярны; все ограниченные множества, принадлежащие* $\hat{\mathbf{U}}$, *внутренне регулярны.*

Доказательство. Необходимость обоих условий очевидна. Для того чтобы доказать достаточность, нужно только установить, в силу теоремы 3, регулярность всех ограниченных множеств, принадлежащих $\hat{\mathbf{S}}$, так как любое множество из $\hat{\mathbf{S}}$ может быть представлено в виде соединения возрастающей последовательности ограниченных множеств из $\hat{\mathbf{S}}$. Пусть E_0— ограниченное множество из $\hat{\mathbf{S}}$ и C_0 — множество из $\hat{\mathbf{C}}$, содержащее E_0. Согласно теореме 5 §2.5, класс всех множеств вида $C \cap C_0$. где $C \in \hat{\mathbf{C}}$, порождает σ-кольцо $\hat{\mathbf{S}} \cap C_0$, а, в силу теоремы 6 § 11.2, это σ-кольцо порождается кольцом всех множеств вида $E \cap \mathbf{C}_0$, где E— конечное соединение непересекающихся собственных разностей множеств из $\hat{\mathbf{C}}$.

Исходим ли мы из условия, наложенного на $\hat{\mathbf{C}}$, или из условия, наложенного на $\hat{\mathbf{U}}$, мы получим, в силу теорем 1, 2 и 3, что любое множество, принадлежащее σ-кольцу $\hat{\mathbf{S}} \cap C_0$, внешне или внутренне регулярно. Согласно теоремам 3 и 4, внешне регулярные подмножества множества C_0 и внутренне регулярные подмножества множества C_0 образуют монотонные классы; поэтому, согласно теореме 2 § 2.6 и теореме 5, при том или другом условии, высказанном в теореме, если какое-нибудь подмножество множества C_0 принадлежит $\hat{\mathbf{S}}$, то оно регулярно; в частности, регулярно само E_o.

Теорема 7. *Всякая бэровская мера* ν *регулярна) если* $C \in \mathbf{C}$, *то*

$$\nu^*(C) = \inf\{\nu(U_0) : C \subset U_0 \in \mathbf{U}_0\},$$

и если $U \in \mathbf{U}$, *то*

$$\nu_*(U) = \sup\{\nu(C_0) : U \supset C_0 \in \mathbf{C}_0\}.$$

Доказательство. Так как любое множество из $\mathbf{C}_0$ может быть представлено в виде пересечения последовательности множеств конечной меры, принадлежащих $\mathbf{U}$, то регулярность меры ν следует из теоремы 6. Далее, в силу определения внешней меры,

$$\nu^*(C) = \inf\{\nu(E_0) : C \subset E_0 \in \mathbf{S}_0\} \leqslant \inf\{\nu(U_0) : C \subset U_0 \in \mathbf{U}_0\};$$

для любого $\varepsilon > 0$ существует множество E_o из $\mathbf{S}_0$, такое, что $C \subset E_0$ и $\nu(E_0) \leqslant \nu(C) + \frac{\varepsilon}{2}$. Но множество E_o внешне регулярно, поэтому найдется такое множество U_o из $\mathbf{U}_0$, что

$$E_0 \subset U_0 \quad \text{и} \quad \nu(U_0) \leqslant \nu(E_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что $C \subset U_0$ и $\nu(U_0) \leqslant \nu^*(C) + \varepsilon$.

Утверждение, касающееся внутренней меры, доказывается совершенно так же, только при этом используется внутренняя регулярность бэровских множеств E_o.

Теорема 8. *Пусть* μ *— борелевская мера, а* ν *— мера, определенная на бэровских множествах E равенством* $\nu(E) = \mu(E)$. *Для того чтобы мера* μ *была регулярна, необходимо и достаточно любое из следующих двух условий:*

$$\mu(C) = \nu^*(C) \text{ для всех } C \text{ из } \mathbf{C};$$

$$\mu(U) = \nu_*(U) \text{ для всех ограниченных открытых } U \text{ из } \mathbf{U}.$$

Если две регулярные борелевские меры совпадают на всех бэровских множествах, то они совпадают и на всех борелевских множествах.

Доказательство. Если $\mu(C) = \nu^*(C)$ для некоторого C из $\mathbf{C}$, то, согласно теореме 7, для всякого $\varepsilon > 0$ существует множество U_0 из $\mathbf{U}_0$, такое, что

$$C \subset U_0 \quad \text{и} \quad \mu(U_0) = \nu(U_0) \leqslant \nu^*(C) + \varepsilon = \mu(C) + \varepsilon;$$

таким образом, множество C внешне регулярно и, следовательно, мера μ регулярна. Достаточность условия, относящегося к ν_*, устанавливается совершенно так же, но с использованием последнего утверждения теоремы 7.

Предположим теперь, что μ регулярна. Каково бы ни было положительное число ε, для любого C из **C** существует такое множество U из **U**, что $C\subset U$ и $\mu(U)\leqslant\mu(C)+\varepsilon$; точно так же для любого ограниченного множества U из **U** существует такое C из **C**, что $C\subset U$ и $\mu(U)\leqslant\mu(C)+\varepsilon$. В обоих случаях существуют множества C_0 из $\mathbf{C}_0$ и U_0 из U_0, такие, что $C\subset U_0\subset C_0\subset U$ (см. теорему 5 § 11.1). Из теоремы 7 следует, что

$$\nu^*(C)\leqslant\nu(U_0)=\mu(U_0)\leqslant\mu(U)\leqslant\mu(\mathbf{C})+\varepsilon$$

и

$$\nu_*(U)\geqslant\nu(C_0)=\mu(C_0)\geqslant\mu(C)\geqslant\mu(U)-\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то

$$\nu^*(C)\leqslant\mu(C)\quad\text{и}\quad\nu_*(U)\geqslant\mu(U);$$

обратные неравенства в обоих случаях очевидны. Мы показали, что значения регулярной меры на произвольных компактных множествах однозначно определяются ее значениями на бэровских множествах. Отсюда, в силу теоремы 6 §11.2, вытекает последнее утверждение доказываемой теоремы.

В заключение этого параграфа мы введем одно понятие, с помощью которого иногда удается упростить доказательства регулярности. Пусть μ — произвольная борелевская мера, μ_0 — бэровская мера, определенная равенством $\mu_0(E)=\mu(E)$, где $E\in\mathbf{S}_0$. Если любое множество из **C** или любое множество из **U** и, следовательно, в обоих случаях любое множество из **S** оказывается μ_0^*-измеримым (т. е. все компактные, а вместе с ними и все борелевские множества принадлежат области определения пополнения меры μ_0), то мы будем называть борелевскую меру μ *регулярно пополнимой.* Если μ регулярно пополнима, то для любого борелевского множества E существуют такие бэровские множества A и B, что

$$A\subset E\subset B\quad\text{и}\quad\mu_0(B-A)=0;$$

из теоремы 8 следует, что регулярно пополнимая мера регулярна.

1. Всякая борелевская мера σ-конечна.
2. Если пространство X компактно, то класс всех регулярных множеств в X нормален (см. упр. 2 §2.6).

3. Если μ — борелевская мера и если существует такое счетное множество $\overline{Y}$, что $\mu(E)=\mu(E\cap Y)$ для любого борелевского множества *E*, то мера μ регулярна.
4. Если *X*—эвклидова плоскость и μ. — лебеговская мера, определенная на всех борелевских множествах из *X*, то μ представляет собой регулярную борелевскую меру в смысле, сформулированном в этом параграфе. Если же для любого борелевского множества *E* определить μ *(E)* как сумму мер (на прямой) всех горизонтальных сечений множества *E,* то μ не будет борелевской мерой.
5. Предположим, что пространство *X* компактно и *x** — точка этого пространства, такая, что множество $\{x^*\}$ не есть G_δ (см., например, упр. 3 § 11.1). Тогда мера μ на S, определенная равенством $\mu(E)=\chi_E(x^*)$, является регулярной борелевской мерой, но не обладает свойством регулярной пополнимости.
6. Если μ_1, μ_2, и μ—борелевские меры, причем $\mu=\mu_1+\mu_2$, то, когда регулярны две из этих трех мер, регулярна и третья. [Указание. Если
$C\in \mathbf{C}$, $U\in\mathbf{U}$, $C\subset U$ и $\mu(U)\leqslant\mu(C)+\varepsilon$, то
$\mu_1(C)+\mu_2(U)\leqslant\mu(U)\leqslant\mu_1(C)+\mu_2(C)+\varepsilon$.]
7. Предположим, что *X* и *Y*— компактные хаусдорфовы пространства, *T*— непрерывное отображение *X* на *Y* и μ. — борелевская мера в *X*, Если $\nu=\mu T^{-1}$, то компактное множество *D* в *Y* регулярно по отношению к *ν* тогда и только тогда, когда $C=T^{-1}(D)$ регулярно по отношению к μ. [Указание. Если $C\subset U\in\mathbf{U}$, то *T(X—U)* и *D* представляют собой непересекающиеся компактные множества в *Y*. Если *V* — окрестность множества *D,* не пересекающаяся с $T(X-U)$, то $C\subset T^{-1}(V)\subset U$.]
8. Если μ — регулярная борелевская мера, то для любого σ-ограниченного множества *E*
$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(U):E\subset U\in\mathbf{U}\} \quad \text{и} \quad \mu_*(E)=\sup\{\mu(C):E\supset C\in\mathbf{C}\}.$$
9. Если μ и *ν* — борелевские меры, такие, что μ регулярна и $\nu\ll\mu$, то *ν* также регулярна.

10. а) Пусть Ω — наименьшее несчетное порядковое число и $\overline{X}$ — множество всех порядковых чисел, меньших или равных Ω. Положим $X=\overline{X}-\{\Omega\}$.

Если в качестве базиса в $\overline{X}$ взять класс всех «интервалов» вида $\{x : \alpha < x \leqslant \beta\}$, присоединив к нему множество {0}, то $\overline{X}$ окажется компактным множеством,
б) Класс всех неограниченных замкнутых множеств в *X* замкнут относительно образования счетных пересечений.
в) Если для любого борелевского множества *E* в *X* положить μ *(E)* = 1 или 0, в зависимости от того, содержит или не содержит *E* неограниченное замкнутое подмножество, то μ будет представлять собой борелевскую меру.
г) Борелевская мера μ, описанная в „в", не регулярна. (Указание. Всякий интервал, содержащий Ω, имеет меру 1.)

11.4. ПОСТРОЕНИЕ БОРЕЛЕВСКИХ МЕР

Цель этого параграфа состоит в том, чтобы показать, каким образом можно построить некоторые (регулярные) борелевские меры, исходя из более простых функций множества.
Назовем *объемом* неотрицательную конечную монотонную аддитивную и полуаддитивную функцию множества, заданную на всевозможных компактных множествах. Итак, функция множества λ, заданная на **C**, представляет собой объем, если она обладает следующими свойствами:
а) $0 \leqslant \lambda(C) < \infty$ для любого *C* из **C**,
б) если *C* и *D* — компактные множества и *C* ⊂ *D*, то $\lambda(C) \leqslant \lambda(D)$,
в) если *C* и *D* — непересекающиеся компактные множества, то $\lambda(C \cup D) = \lambda(C) + \lambda(D)$,
г) если *C* и *D* — любые компактные множества, то $\lambda(C \cup D) \leqslant \lambda(C) + \lambda(D)$.
Заметим, что λ должна обращаться в нуль на пустом множестве, так как $\lambda(0) + \lambda(0) = \lambda(0 \cup 0) = \lambda(0) < \infty$.
Исходя из заданного объема λ, мы построим некоторую функцию множества λ_* на всех борелевских множествах. С ее помощью мы зададим на всех σ-ограниченных множествах внешнюю меру μ*. Мера μ, индуцированная этой внешней мерой, окажется, как мы увидим, регулярной борелевской мерой.
Внутренним объемом, индуцированным объемом λ, мы назовем функцию множества λ_*, заданную на **U** равенством

$$\lambda_*(U) = \sup\{\lambda(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\}.$$

Теорема 1. *Внутренний объем* λ_*, *индуцированный каким-либо объемом* λ, *представляет собой функцию множества, монотонную, счетно-полуаддитивную, счетно-аддитивную и обращающуюся в нуль на пустом множестве.*

Доказательство. Очевидно, что $\lambda_*(0) = 0$. Пусть U и V принадлежат классу **U**, причем $U \subset V$, и C—компактное множество, заключенное в V; тогда $C \subset V$ и, следовательно, $\lambda(C) \leqslant \lambda_*(V)$. Поэтому

$$\lambda_*(U) = \sup \lambda(C) \leqslant \lambda_*(V).$$

Если U и V—множества из **U** и C—компактное множество, заключенное в $U \cap V$, то, в силу теоремы 1 § 11.1, существуют компактные множества D и E, такие, что $D \subset U$, $E \subset V$ и $C = D \cup E$. Так как $\lambda(C) \leqslant \lambda(D) + \lambda(E) \leqslant \lambda_*(U) + \lambda_*(V)$, то

$$\lambda_*(U \cup V) = \sup \lambda(C) \leqslant \lambda_*(U) + \lambda_*(V),$$

т. е. функция λ_* полуаддитивна. Конечная полуаддитивность λ_* устанавливается без труда методом индукции. Если $\{U_i\}$—последовательность множеств из **U**, а C—компактное множество, заключенное в $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, то, так как C компактно, существует такое целое положительное число n, что $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Отсюда вытекает, что

$$\lambda(C) \leqslant \lambda_*\Big(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_*(U_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i)$$

и, следовательно,

$$\lambda_*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\Big) = \sup \lambda(C) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i);$$

таким образом, λ_* счетно-полуаддитивна.

Пусть теперь U и V—непересекающиеся множества из **U**, а C и D — компактные множества, такие, что $C \subset U$ и $D \subset V$. Так как

C и D не пересекаются и $C \cup D \subset U \cup V$, то

$$\lambda(C) + \lambda(D) = \lambda(C \cup D) \leqslant \lambda_*(U \cup V)$$

и, следовательно,

$$\lambda_*(U) + \lambda_*(V) = \sup \lambda(C) + \sup \lambda(D) \leqslant \lambda_*(U \cup V).$$

Отсюда и из полуаддитивности функции λ_* вытекает, что λ_* аддитивна; конечная аддитивность доказывается по индукции. Если $\{E_i\}$—последовательность непересекающихся множеств из **U**, то

$$\lambda_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \geqslant \lambda_*\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_*(U_i).$$

Так как эти неравенства верны при любом $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\lambda_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i),$$

и счетная аддитивность функции λ_* следует из ее счетной полуаддитивности, уже доказанной выше.

Пусть λ — какой-либо объем и λ_* — индуцированный им внутренний объем; на наследственном σ-кольце всех σ-ограниченных множеств определим функцию множества μ_*, положив

$$\mu_*(E) = \inf \{\lambda_*(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\}.$$

Будем называть μ^* *внешней мерой, индуцированной объемом* λ*;* это название оправдывается следующей теоремой.

Теорема 2. *Внешняя мера* μ^**, порожденная объемом* λ*, обладает всеми свойствами внешней меры, сформулированными в* § 3.4,

Доказательство. Так как $0 \subset 0 \in \mathbf{U}$ и $\lambda_*(0) = 0$, то $\mu^*(0) = 0$. Пусть E и F — σ-ограниченные множества, причем $E \subset F$. Возьмем такое множество U из **U**, что $F \subset U$; тогда $E \subset U$ и $\mu^*(E) \leqslant \lambda_*(U)$. Отсюда следует, что

$$\mu^*(E) \leqslant \inf \lambda_*(U) = \mu^*(F).$$

Пусть теперь $\{E_i\}$—некоторая последовательность σ-ограниченных множеств. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $i = 1, 2, \ldots$ существуют такие множества U_i из **U**, что

$$E_i \subset U_i \quad \text{и} \quad \lambda_*(U_i) \leqslant \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Отсюда следует, что

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \lambda_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то из этих неравенств следует, что μ* счетно-полуаддитивна.

От описанных здесь функций λ_* и μ * можно было бы ожидать, что λ_* служит продолжением функции λ, а μ* — продолжением функции λ_*, так что, например, $\mu^*(C) = \lambda(C)$ для любого компактного множества C. Однако, вообще говоря, это неверно; все, что можно утверждать в этом направлении, высказано в следующей теореме.

Теорема 3. *Если λ_* — внутренний объем и μ * — внешняя мера, индуцированные объемом λ, то* $\mu^*(U) = \lambda_*(U)$ *для любого U из* **U** *и* $\mu^*(C^0) \leqslant \lambda(C) \leqslant \mu^*(C)$ *для любого C из* **C**.

(Напоминаем, что C^0 обозначает открытое ядро множества *C*)

Доказательство. Если $U \in \mathbf{U}$, то из соотношений $U \subset U \in \mathbf{U}$ следует, что $\mu^*(U) \leqslant \lambda_*(U)$. Если $V \in \mathbf{U}$ и $U \subset V$, то $\lambda_*(U) \leqslant \lambda_*(V)$ и, следовательно,

$$\lambda_*(U) \leqslant \inf \lambda_*(V) = \mu^*(U).$$

Если $C \in \mathbf{C}$, $U \in \mathbf{U}$ и $C \subset U$, то $\lambda(C) \leqslant \lambda_*(U)$, откуда

$$\lambda(C) \leqslant \inf \lambda_*(U) = \mu^*(C).$$

Если $C \in \mathbf{C}$, $D \in \mathbf{C}$ и $D \subset C^0 (\subset C)$, то $\lambda(D) \leqslant \lambda(C)$ и, следовательно,

$$\mu^*(C^0) = \lambda_*(C^0) = \sup \lambda(D) \leqslant \lambda(C).$$

Теорема 4. *Если* μ * *— внешняя мера, индуцированная объемом λ, то σ-ограниченное множество E* μ* *-измеримо тогда и только тогда, когда*

$$\mu^*(U) \geqslant \mu^*(U \cap E) + \mu^*(U \cap E')$$

при любом U из **U**.

Доказательство. Пусть λ_* — внутренний объем, индуцированный объемом λ, *A*—произвольное σ-ограниченное множество и *U*—какое-нибудь множество из **U**, содержащее *A,* Из соотношений

$$\lambda_*(U) = \mu^*(U) \geqslant \mu^*(U \cap E) + \mu^*(U \cap E') \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$$

следует, что

$$\mu^*(A) = \inf \lambda_*(U) \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E');$$

обратное неравенство следует из полуаддитивности μ *, а необходимость высказанного условия — из определения μ *-измеримости.

Теорема 5. *Если* μ * *— внешняя мера, индуцированная объемом λ, то функция множества* μ, *определенная на всевозможных борелевских* *множествах равенством* $\mu(E)=\mu^*(E)$, *представляет собой регулярную борелевскую меру.*

Будем называть μ борелевской мерой, *индуцированной* объемом λ.

Доказательство. Сначала мы покажем, что всякое компактное (а следовательно, и всякое борелевское) множество μ *-измеримо; отсюда прямо будет следовать, что μ представляет собой меру на борелевских множествах. Пусть *C*—компактное множество; в силу теоремы 4, достаточно доказать, что

$$\mu^*(U)\geqslant\mu^*(U\cap C)+\mu^*(U\cap C')$$

для любого *U* из **U**. Пусть *D* и *E*— компактные множества, заключенные соответственно в $U\cap C'$ и $U\cap D'$; заметим, что как $U\cap C'$, так и $U\cap D'$ принадлежат **U**. Так как $D\cap E=0$ ..

и $D\cup E\subset U$, то

$$\mu^*(U)=\lambda_*(U)\geqslant\lambda(D\cup E)=\lambda(D)+\lambda(E),$$

где λ_* — внутренний объем, индуцированный объемом λ. Отсюда вытекает, что

$$\mu^*(U)\geqslant\lambda(D)+\sup\lambda(E)=\lambda(D)+\lambda_*(U\cap D')=$$
$$=\lambda(D)+\mu^*(U\cap D')\geqslant\lambda(D)+\mu^*(U\cap C)$$

и, следовательно,

$$\mu^*(U)\geqslant\mu^*(U\cap C)+\sup\lambda(D)=\mu^*(U\cap C)+\lambda_*(U\cap C')=$$
$$=\mu^*(U\cap C)+\mu^*(U\cap C').$$

Для того чтобы доказать, что $\mu(C)<\infty$, возьмем компактное множество *F*, открытое ядро которого содержит *C*; тогда

$$\mu(C)=\mu^*(C)\leqslant\mu^*(F^0)\leqslant\lambda(F)<\infty.$$

Наконец, регулярность меры μ следует из соотношений

$$\mu(C)=\mu^*(C)=\inf\{\lambda_*(C):C\subset U\in\mathbf{U}\}=$$
$$=\inf\{\mu^*(U):C\subset U\in\mathbf{U}\}=\inf\{\mu(U);C\subset U\in\mathbf{U}\}.$$

В заключение этого параграфа приведем еще одну теорему, которая нам понадобится позднее.

Теорема 6. *Предположим, что T—гомеоморфизм пространства X самого на себя и* λ *— некоторый объем. Для произвольного C из* **C** *положим* $\hat{\lambda}(C)=\lambda(T(C))$. *Если* μ *и* $\hat{\mu}$ *— борелевские меры, индуцированные соответственно объемами* λ *и* $\hat{\lambda}$, *то* $\hat{\mu}(E)=\mu(T(E))$ *для любого борелевского множества E. Если,* *в частности, объем* λ *инвариантен относительно T, то инвариантна и* μ.

Доказательство. Пусть λ_* и $\hat{\lambda}_*$—внутренние объемы, индуцированные соответственно объемами λ и $\hat{\lambda}$. Если $U \in \mathbf{U}$, то из соотношений

$$\{\hat{\lambda}(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\} = \{\lambda(T(C)) : U \supset C \in \mathbf{C}\} =$$

$$= \{\lambda(D) : D = T(C), \quad U \supset C \in \mathbf{C}\} = \{\lambda(D) : U \supset T^{-1}(D) \in \mathbf{C}\} =$$

$$= \{\lambda(D) : T(U) \supset D \in \mathbf{C}\}$$

следует равенство $\hat{\lambda}_*(U) = \lambda_*(T(E))$. Если μ^* и $\hat{\mu}^*$— внешние меры, индуцированные соответственно объемами λ и $\hat{\lambda}$, то аналогичные соотношения приводят к равенству

$\hat{\mu}^*(E) = \mu^*(T(E))$; отсюда следует, что $\hat{\mu}(E) = \mu(T(E))$ для любого борелевского множества *E*. Последнее утверждение теоремы вытекает непосредственно из предыдущих.

1. Здесь приведены примеры неотрицательных конечных функций множества, каждая из которых определена на всех компактных множествах какого-либо локально компактного хаусдорфова пространства. Из них одни представляют собой объемы, другие нарушают какое-нибудь одно из условий (монотонность, аддитивность и полуаддитивность), определяющих объем:

а) X^* — компактное пространство, полученное из некоторого бесконечного дискретного пространства *X* путем присоединения к *X* одной точки x^*; функция λ задана на компактных множествах *C* в X^* следующим образом: λ *(C)* = 0, если *C* конечно, и λ *(C)* = 1, если *C* бесконечно.

б) *X*—дискретное пространство, состоящее из конечного числа точек; λ (C) = 1 для любого компактного множества C.

в) *X* — замкнутый интервал $[-1, +1]$; $\lambda(C) = 1$ или 0, в зависимости от того $0 \in C^\circ$ или $0 \notin C^0$.

г) $X^* = \{X, \ x^*\}$ — то же пространство, что в примере „а"; λ (C)=1 или 0, в зависимости от того, содержит *C* точку x^* или нет.

д) $X = \left\{0, \ \pm\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\right\}$.

Если C содержит бесконечно много отрицательных чисел, то $\lambda(C) = 0$; в противном случае $\lambda(C) = 1$ или 0 в зависимости от того, $0 \in C$ или $0 \overline{\in} C$.

е) В X определена борелевская мера μ_0; для любого C из **C** мы полагаем

$$\lambda(C) = \sup\{\mu_0(C_0) : C \supset C_0 \in \mathbf{C}_0\}.$$

ж)В X определена борелевская мера μ; $\lambda(C) = \mu(C^0)$ для любого C из **C**.

2. Даны два объема λ и $\hat{\lambda}$; μ^* и $\hat{\mu}^*$ —индуцированные ими внешние меры. Если $\lambda(C) \leqslant \hat{\lambda}(C) \leqslant \mu^*(C)$ для любого C из **C**, то $\mu^* = \hat{\mu}^*$. (Указание. В силу первой части теоремы 3, достаточно доказать, что $\mu^*(U) = \sup\{\hat{\lambda}(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\}$ для всех U из **U**.)

3. Усилением результата упр. 2 является следующая теорема, обратная теореме 3: если λ и $\hat{\lambda}$ —объемы, μ^* и $\hat{\mu}^*$ — индуцированные ими внешние меры и если $\mu^*(C^0) \leqslant \hat{\lambda}(C) \leqslant \mu^*(C)$ для любого C из **C**, то $\mu^* = \hat{\mu}^*$.
(У к а з а н и е. В силу теоремы 5,

$$\mu^*(E) = \sup\{\mu^*(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\}$$

для любого U из **U**; мы хотим доказать, что

$$\mu^*(U) = \sup\{\hat{\lambda}(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\}.$$

Если $\varepsilon>0$ и $U \in \mathbf{U}$, то существуют множество C из **C**, такое, что $C \subset U$ и $\mu^*(U) \leqslant \mu^*(C) + \varepsilon$, и множество D из **C**, такое, что $C \subset D^0 \subset D \subset U$.)

4. Если объем λ таков, что $\lambda(C) > 0$, коль скоро $C^0 \neq 0$, то индуцированная этим объемом борелевская мера μ положительна на любом непустом множестве из **U**.

5. Независимо от каких бы то ни было объемов можно рассматривать внешние меры μ на всевозможных σ-ограниченных множествах, обладающие тем свойством, что для любого C из **C**

$$\mu^*(C) = \inf\{\mu^*(U) : C \subset U \in \mathbf{U}\} < \infty.$$

Верны ли для таких внешних мер теоремы 4 и 5?

11.5. РЕГУЛЯРНЫЕ ОБЪЕМЫ

Выше было отмечено, что значения объема могут не совпадать (на компактных множествах, конечно) со значениями борелевской меры, индуцированной этим объемом. Однако для некоторого важного класса объемов построение, описанное в § 11.4, приводит к функции множества, являющейся продолжением исходного объема. В этом параграфе мы исследуем такие объемы и, воспользовавшись полученными при этом результатами, докажем одну важную теорему, устанавливающую в определенных случаях существование борелевской меры; некоторая теорема единственности для борелевских мер была доказана выше (см. теорему 8 § 11.3).

Объем λ назовем *регулярным,* если для любого C из **C**;

$$\lambda(C)=\inf\{\lambda(D): C\subset D^0\subset D\in \mathbf{C}\}.$$

Это определение представляет собой возможно более точную (с учетом того, что объем задан лишь на компактных множествах) имитацию определения (внешней) регулярности меры.

Теорема 1. *Если* μ *— борелевская мера, индуцированная некоторым регулярным объемом* λ, *то* $\mu(C)=\lambda(C)$ *для любого множества* C *из* **C**.

Доказательство. Если $C\in$ **C**, то, в силу регулярности λ, для произвольного ε > 0 существует такое принадлежащее **C** множество D), что

$$C\subset D^0 \quad \text{и} \quad \lambda(D)\leqslant\lambda(C)+\varepsilon,$$

Согласно теореме 3 § 11.4,

$$\lambda(C)\leqslant\mu(C)\leqslant\mu(D^0)\leqslant\lambda(D)\leqslant\lambda(C)+\varepsilon;$$

так как ε > 0 произвольно, то теорема доказана.

Следующая теорема содержит утверждение обратного характера.

Теорема 2. *Пусть* μ*—регулярная борелевская мера. Если для любого* C *из* **C** *положить* $\lambda(C)=\mu(C)$, *то так определенная функция множества* λ *представляет собой регулярный объему и борелевская мера, индуцированная объемом* λ, *совпадает с* μ.

Доказательство. Функция λ, очевидно, является объемом. Так как мера μ регулярна, то для любого C из **C** и для любого ε > 0 в U найдется такое множество U, что

$$C\subset U \quad \text{и} \quad \mu(U)\leqslant\mu(C)+\varepsilon.$$

Если компактное множество D таково, что $C\subset D^0\subset D\subset U$, то

$$\lambda(D)=\mu(D)\leqslant\mu(U)\leqslant\mu(C)+\varepsilon=\lambda(C)+\varepsilon,$$

и регулярность λ таким образом доказана. Пусть $\hat{\mu}$ —борелевская мера, индуцированная объемом λ; тогда, согласно теореме 1,

$$\hat{\mu}(C)=\lambda(C)=\mu(C)$$

для любого C из **C** и, следовательно, $\hat{\mu}=\mu.$

Теорема 3. *Если* μ_0— *бэровская мера и если для любого множества C из* **C**

$$\lambda(C)=\inf\{\mu_0(U_0): C\subset U_0\in \mathbf{U}_0\},$$

то λ *представляет собой регулярный объем.*

Доказательство. Нетрудно убедиться в том, что λ конечна, неотрицательна и монотонна.

Пусть C и D — множества из **C**, а U_o и V_o — множества из $\mathbf{U}_o$, такие, что $C\subset U_0$ и $D\subset V_0$; тогда $C\cup D\subset U_0\cup V_0\in \mathbf{U}_0$ и, следовательно,

$$\lambda(C\cup D)\leqslant\mu_0(U_0\cup V_0)\leqslant\mu_0(U_0)+\mu_0(V_0),$$

откуда

$$\lambda(C\cup D)\leqslant\inf\mu_0(U_0)+\inf\mu_0(V_0)=\lambda(C)+\lambda(D);$$

таким образом, полуаддитивность λ доказана.

Пусть C и D — непересекающиеся множества из **C**; тогда в $\mathbf{U}_o$ существуют такие непересекающиеся множества U_o и V_o, что $C\subset U_0$ и $D\subset V_0$. Если $C\cup D\subset W_0\in \mathbf{U}_0$, то

$$\lambda(C)+\lambda(D)\leqslant\mu_0(U_0\cap W_0)+\mu_0(V_0\cap W_0)\leqslant\mu_0(W_0)$$

и, следовательно,

$$\lambda(C)+\lambda(D)\leqslant\inf\mu_0(W_0)=\lambda(C\cup D).$$

Аддитивность λ вытекает из этого неравенства и из доказанной выше полуаддитивности.

Для того чтобы доказать, что объем λ регулярен, возьмем произвольное компактное множество C и произвольное положительное число ε. Согласно определению λ, найдется такое множество U_o из $\mathbf{U}_o$, что

$$C\subset U_0 \quad \text{и} \quad \mu_0(U_0)\leqslant\lambda(C)+\varepsilon.$$

Если $C\subset D^0\subset D\subset U_0$, где D — компактное множество, то

$$\lambda(D)\leqslant\mu_0(U_0)\leqslant\lambda(C)+\varepsilon.$$

Теорема 4. *Если* μ_0*— бэровская мера, то существует единственная регулярная борелевская мера* μ *, такая, что* $\mu(E)=\mu_0(E)$ *для любого бэровского множества E.*

Доказательство. Положим, для любого *C* из **C**,

$$\lambda(C)=\inf\{\mu_0(U_0): C\subset U_0\in \mathbf{U}_0\};$$

тогда, в силу теоремы 3, λ будет представлять собой регулярный объем. Рассмотрим индуцированную этим объемом борелевскую меру μ. Согласно теореме 1, $\mu(C)=\lambda(C)$ для любого *C* из **C**. Так как всякая бэровская мера регулярна (см. теорему 7 § 11.3), то $\lambda(C)=\mu_0(C)$ и, следовательно, $\mu(C)=\mu_0(C)$ для любого *C* из **C**. Существование меры μ, обладающей требуемыми свойствами, доказано; единственность ее вытекает из теоремы 8 § 11.3.

1. Какие из функций, заданных в упр. 1 § 11.4, представляют собой регулярные объемы?
2. Если, в обозначениях теоремы 6 § 11.4, Х представляет собой регулярный
объем, то $\hat{\lambda}$—также регулярный объем.
3. Если μ — борелевская мера и $\lambda(C)=\sup\{\mu(C_0): C\supset C_0\in \mathbf{C}_0\}$ для всякого *C* из **C**, то мера μ регулярно пополнима тогда и только тогда, когда λ является регулярным объемом (см. пример „*e*[a] в упр. 1 § 11.4).
4. Назовем объем λ *внутренне регулярным,* если $\lambda(C)=\sup\{\lambda(D): C^0\supset D\in \mathbf{C}\}$ для любого *C* из **C**.

Справедливы следующие теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2:

а) Если μ — борелевская мера, индуцированная внутренне регулярным объемом λ, то $\mu(C^0)=\lambda(C)$для любого множества *C* из **C**.

б) Если μ — регулярная борелевская мера и $\lambda(C)=\mu(C^0)$, где $C\in\mathbf{C}$, то λ представляет собой внутренне регулярный объем, и индуцированная им борелевская мера совпадает с μ.

11.6. НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть *X,* как обычно, локально компактное хаусдорфово пространство. Класс всех действительных непрерывных функций, каждая из которых тождественно равна нулю вне некоторого компактного множества, условимся обозначать $\mathscr{L}(X)$ или просто $\mathscr{L}$. Таким образом,

$\mathscr{L}$ представляет собой класс всех тех действительных непрерывных функций *f*, для которых множества

$$N(f)=\{x : f(x)\neq 0\}$$

ограничены. В том случае, когда пространство *X* не компактно и превращается в компактное пространство *X** присоединением одной точки x *, эта последняя называется иногда *бесконечно удаленной точкой* пространства *X*. При этом $\mathscr{L}$ можно определить как класс всех непрерывных функций, каждая из которых равна нулю в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки. Подкласс класса , $\mathscr{L}(X)$, состоящий из всех неотрицательных функций, принадлежащих $\mathscr{L}$, будем обозначать $\mathscr{L}_+(X)$ или $\mathscr{L}_+$.

Следующая теорема устанавливает некоторый результат, неявно фигурировавший ранее во многих наших построениях.

Теорема 1. *Если C— произвольное компактное бэровское множество, то в* $\mathscr{L}_+$ *существует такая убывающая последовательность функций* $\{f_n\}$, *что*

$$\lim_n f_n(x)=\chi_C(x)$$

в любой точке x из X.

Доказательство. Пусть $C=\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, где U_n — ограниченные открытые множества; тогда для любого целого положительного *n* существует такая функция g_n из $\mathfrak{F}$ (см. § 11.1), что

$$g_n(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in C,\\ 0, & \text{если } x\overline{\in} U_n.\end{cases}$$

Положим $f_n=g_1\cap\ldots\cap g_n$; тогда последовательность $\{f_n\}$— убывающая и

$$\lim_n f_n(x)=\chi_C(x)$$

во всякой точке x из X. Так как U_n ограничены, то $f_n \in \mathcal{L}_+$, $n = 1,2, \ldots$

Пусть μ_0 — бэровская мера, f—какая-нибудь функция, принадлежащая классу $\mathcal{L}$, и $\{x : f(x) \neq 0\} \subset C \in \mathbf{C}_0$. Так как $\mu_0(C) < \infty$ и f ограничена и измерима в смысле Бэра (см. теорему 2 §11.2), то f интегрируема по μ_0 и

$$\int f\, d\mu_0 = \int_C f\, d\mu_0.$$

Это верно, в частности, тогда, когда имеется некоторая борелевскаямера μ, и μ_0 определена на бэровских множествах E равенством

$$\mu_0(E) = \mu(E).$$

Теорема 2. *Если* μ *— бэровская мера, принимающая положительные значения на всех непустых открытых бэровских множествах, и* $f \in \mathcal{L}_+$, *то* $\int f\, d\mu = 0$ *тогда и только щогда% когда f(x) = 0 для всех x из X.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Чтобы доказать его необходимость, предположим, что $\int f\, d\mu = 0$, и возьмем ограниченное открытое бэровское множество U, такое, что $\{x : f(x) \neq 0\} \subset U$. Пусть $E = \{x : f(x) = 0\}$. Так как

$$0 = \int f\, d\mu \geqslant \int_{U-E} f\, d\mu$$

и f неотрицательна, то $\mu(U - E) = 0$. Множество U — E— открытое бэровское, поэтому $U - E = 0$, т. е. $U \subset E$.

Теорема 3. *Если* μ_0 *— бэровская мера и* $\varepsilon > 0$, *то, какова бы ни была интегрируемая простая бэровская функция f, существует интегрируемая простая функция*

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{C_i},$$

такая, что C_i — компактные бэровские множества, i=1,...,n, *и*

$$\int |f-g|\,d\mu_0 \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}$ и c — такая положительная постоянная, что $|f(x)|\leqslant c$ всюду на X (т. е. $|\alpha_i|\leqslant c$, i = 1, ..., n). Мера μ_0 регулярна, поэтому для любого i = 1, ..., n существует такое компактное бэровское множество C_i, что

$$C_i\subset E_i \quad \text{и} \quad \mu_0(E_i)\leqslant\mu_0(C_i)+\frac{\varepsilon}{nc}.$$

Если $g=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{C_i}$, то

$$\int |f-g|\,d\mu_0=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\,\mu_0(E_i-C_i)\leqslant\varepsilon.$$

Теорема 4. *Если* μ_0 *— бэровская мера,* ε *— произвольное положительное число и* $g=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{C_i}$ *—простая функция, причем все* C_i *— компактные бэровские множества,* i=l, ..., n, *то существует такая функция* h, *принадлежащая классу* $\mathcal{L}$, *что*

$$\int |g-h|\,d\mu_0\leqslant\varepsilon.$$

Доказательство. Так как $\{C_1,\ldots,C_n\}$—конечный класс непересекающихся компактных множеств, то существует конечный класс $\{U_1,\ldots,U_n\}$непересекающихся ограниченных открытых бэровских множеств, таких, что $C_i\subset U_i,\ i=1,\ldots,n.$ Мера μ_0 регулярна, поэтому мы вправе предположить, что

$$\mu_0(U_i)\leqslant\mu_0(C_i)+\frac{\varepsilon}{nc},\ i=1,\ldots,n,$$

где c>0 таково, что $|g(x)|\leqslant c$ для всех x из X. Для каждого i= 1, ..., n существует функция h_i из $\mathfrak{F}$, равная нулю на X— U_i

и равная единице на C_i. Положим $h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$. Так как $h_i \in \mathscr{L}_+$, $i = 1, \dots, n$, то $h \in \mathscr{L}$; далее, $|h(x)| \leqslant c$ всюду на X, потому что U_i не пересекаются. Таким образом,

$$\int |g - h| \, d\mu_0 = \sum_{i=1}^{n} \int_{U_i - C_i} |h| \, d\mu_0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} c\, \mu_0 (U_i - C_i) \leqslant \varepsilon.$$

1. Если JJ. — регулярная борелевская мера, то совокупность всевозможных конечных линейных комбинаций характеристических функций компактных множеств плотна в $\mathscr{L}_p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$.
2. Если μ — регулярная борелевская мера, то плотно $\mathscr{L}$ в $\mathscr{L}_p(\mu)$,

$1 \leqslant p < \infty$.

3. Если μ— регулярная борелевская мера, *E*— борелевское множество конечной меры и *f*—функция на *E,* измеримая в смысле Бореля, то для всякого ε>0 существует компактное множество *C* в *E,* такое, что $\mu(E - C) \leqslant \varepsilon$ и *f* непрерывна на *C.* [Указание. В том случае, когда *f*— простая функция, этот результат можно получить тем же способом, каким была доказана теорема 3. В общем случае нужно взять последовательность простых функций $\{f_n\}$, сходящуюся к *f*; так как мера μ регулярна, то, в силу теоремы Егорова, существует компактное множество C_o в *E,* такое, что $\mu(E) \leqslant \mu(C_0) + \frac{\varepsilon}{2}$ и $\{f_n\}$ сходится на C_o равномерно.

Выберем в *E* подмножество C_n так, чтобы $\mu(E) \leqslant \mu(C_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ и f_n была непрерывна на C_n.

Тогда множество

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

будет обладать требуемыми свойствами.] Это — известная *теорема Лузина.*

11.7. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Линейным функционалом на $\mathscr{L}$ называется функция Δ, заданная на $\mathscr{L}$ и обладающая тем свойством, что

$$\Delta(\alpha f+\beta g)=\alpha\Delta(f)+\beta\Delta(g)$$

для любых двух функций *f* и *g* из $\mathscr{L}$ и для любых действительных чисел аир. Линейный функционал Δ на $\mathscr{L}$ назовем *положительным,* если $\Delta(f)\geqslant 0$ для любой функции *f* из $\mathscr{L}_+$. Заметим, что положительный линейный функционал Δ обладает свойством монотонности, в том смысле, что если
$f\in\mathscr{L}$, $g\in\mathscr{L}$ и $f\geqslant g$, то $\Delta(f)\geqslant\Delta(g)$. Легко видеть, что если μ_0 — бэровская мера и $\Delta(f)=\int f\,d\mu_0$, где $f\in\mathscr{L}$, то Δ представляет собой положительный линейный функционал на $\mathscr{L}$.
Основная цель настоящего параграфа состоит в доказательстве того, что любой положительный линейный функционал может быть представлен в таком виде.
Здесь удобно прибегнуть к следующему, несколько необычному, но весьма выразительному способу записи: условимся писать $E\subset f$ (или $E\supset f$), где *E*— множество в *X*, а *f*—любая действительная функция на *X*, если $\chi_E(x)\leqslant f(x)$ (соответственно
$\chi_E(x)\geqslant f(x)$)

во всех точках *x* из *X*.

Теорема 1. *Если* Δ *— положительный линейный функционал и если*

$$\lambda(C)=\inf\{\Delta(f):C\subset f\in\mathscr{L}_+\},$$

где $C\in\mathbf{C}$, *то* λ *представляет собой регулярный объем. Если* μ *— борелевская мера, индуцированная этим объемом, то*

$$\mu(U)\leqslant\Delta(f)$$

для любого ограниченного открытого множества U и для любой функции f из $\mathscr{L}_+$, *таких, что* $U\subset f$.

Доказательство. Так как функционал Δ положителен, то
$\lambda(C)\geqslant 0$, каково бы ни было *C* из **C**. Чтобы показать, что функция

λ конечна, возьмем произвольное компактное множество *C* и любое ограниченное открытое множество *U*, содержащее C. Существует функция *f* из $\mathcal{L}_+$, равная единице на C и нулю на *X*— *U;* при этом $C \subset f \in \mathcal{L}_+$ и, следовательно,

$$\lambda(C) \leqslant \Delta(f) < \infty.$$

Если *C* и *D* — компактные множества, такие, что $C \supset D$ и $C \subset f \in \mathcal{L}_+$, то, очевидно, $D \subset f$ и $\lambda(D) \leqslant \Delta(f)$. Отсюда следует, что $\lambda(D) \leqslant \leqslant \inf \Delta(f) = \lambda(C)$, т. е. функция λ монотонна.

Пусть *C* и *D* — компактные множества; если $C \subset f \in \mathcal{L}_+$ и $D \subset g \in \mathcal{L}_+$, то

$$C \cup D \subset f + g \in \mathcal{L}_+,$$

так что $\lambda(C \cup D) \leqslant \Delta(f+g) = \Delta(f) + \Delta(g)$. Отсюда следует, что

$$\lambda(C \cup D) \leqslant \inf \Delta(f) + \inf \Delta(g) = \lambda(C) + \lambda(D),$$

т. е. λ полуаддитивна.

Пусть теперь *C* и *D* — непересекающиеся компактные множества; возьмем непересекающиеся ограниченные открытые множества *U* и *V*, такие, что $C \subset U$ и $D \subset V$. Пусть *f* — функция из $\mathcal{L}_+$, равная единице на C и нулю на *X*—*U*, а *g*—функция из $\mathcal{L}_+$, равная единице на *D* и нулю на *X*— *V*. Если $C \cup D \subset h \in \mathcal{L}_+$, то

$$\lambda(C) + \lambda(D) \leqslant \Delta(hf) + \Delta(hg) = \Delta(h(f+g)) \leqslant \Delta(h).$$

Отсюда следует, что

$$\lambda(C) + \lambda(D) \leqslant \inf \Delta(h) = \lambda(C \cup D);$$

так как полуаддитивность λ была установлена выше, то тем самым доказано, что λ аддитивна.

Итак, мы доказали, что λ есть объем; остается только установить его регулярность. Для любого *C* из **C** и для любого $\varepsilon>0$ в $\mathcal{L}_+$ найдется такая функция *f*, что

$$C \subset f \quad \text{и} \quad \Delta(f) \leqslant \lambda(C) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если γ — действительное число, $0 < \gamma < 1$, и $D = \{x : f(x) \geqslant \gamma\}$, то

$$C \subset \{x : f(x) \geqslant 1\} \subset \{x : f(x) > \gamma\} \subset D^0 \subset D \in \mathbf{C}.$$

Так как $D \subset \frac{1}{\gamma} f \in \mathscr{L}_+$,

то

$$\lambda(D) \leqslant \frac{1}{\gamma} \Delta(f) \leqslant \frac{1}{\gamma}\left(\lambda(C) + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Выберем γ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\gamma}\left(\lambda(C) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \lambda(C) + \varepsilon;$$

тогда

$$\lambda(D) \leqslant \lambda(C) + \varepsilon$$

и, так как ε произвольно, мы видим, что λ — регулярный объем. Последнее утверждение теоремы вытекает из регулярности меры μ. В самом деле, если С—компактное множество, содержащееся в *U*, то $C \subset f$ и, следовательно,

$$\mu(C) = \lambda(C) \leqslant \Delta(f),$$

откуда $\mu(U) = \sup \mu(C) \leqslant \Delta(f)$.

Теорема 2. *Пусть* Δ *— положительный линейный функционал на* $\mathscr{L}$. *Если*

$$\lambda(C) = \inf\{\Delta(f) : C \subset f \in \mathscr{L}_+\}$$

для любого C из **C**, *и если* μ*— борелевская мера, индуцированная объемом* λ, *то*

$$\int f\,d\mu \leqslant \Delta(f)$$

для любой функции f из $\mathscr{L}_+$.

Доказательство. Так как $\int f\,d\mu$ и $\Delta(f)$ зависят от *f* линейно, то достаточно доказать это неравенство для функций *f*, подчиненных для всех *x* из *X* условию $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Фиксируем целое положительное число n и полагаем для $i = 1, ..., n$

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad f(x) < \frac{i-1}{n}, \\ \dfrac{f(x) - \frac{i-1}{n}}{\frac{1}{n}} = nf(x) - (i-1), & \text{если} \quad \frac{i-1}{n} < f(x) \leqslant \frac{i}{n}, \\ 1, & \text{если} \quad \frac{i}{n} \leqslant f(x). \end{cases}$$

Так как

$$f_i = ([nf - (i-1)] \cup 0) \cap 1 = ([nf - (i-1)] \cap 1) \cup 0,$$

то все f_i принадлежат $\mathscr{L}_+$. Если в какой-либо точке x

$$\frac{j-1}{n} \leqslant f(x) \leqslant \frac{j}{n},$$

то

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant j-1, \\ 0 & \text{при} \quad j+1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

откуда следует, что $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ всюду на X.

Положим $U_i = \left\{x : f(x) > \frac{i}{n}\right\}, \quad i = 0, 1, \ldots, n;$ тогда U_i — ограниченные открытые множества, такие, что $U_i \subset f_i$ и, в силу теоремы 1, $\mu(U_i) \leqslant \Delta(f_i), \quad i = 1, \ldots, n.$ Так как $U_0 \supset U_1 \supset \ldots \supset U_n = 0,$ то

$$\Lambda(f)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda(f_i)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu(U_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)\mu(U_i)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}\left[\mu(U_i)-\mu(U_{i+1})\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{n}\mu(U_i-U_{i+1})-\frac{1}{n}\mu(U_1)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{U_i-U_{i+1}}f\,d\mu-\frac{1}{n}\mu(U_1)=$$

$$=\int\limits_{U_1}f\,d\mu-\frac{1}{n}\mu(U_1)\geqslant\int f\,d\mu-\frac{1}{n}\mu(U_0).$$

Так как $\mu(U_0)<\infty$, а *n* произвольно, то теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* Λ *— положительный линейный функционал на* $\mathscr{L}$. *Если*

$$\lambda(C)=\inf\{\Lambda(f): C\subset f\in\mathscr{L}_+\},$$

где $C \in \mathbf{C}$, *и если* μ — *борелевская мера, индуцированная объемом* λ, *то для любого компактного множества С и для любого положительного числа* ε *существует функция* f_0 *из* $\mathscr{L}_+$, *такая, что* $C \subset f_0$ *и*

$$\Delta(f_0) \leqslant \int f_0 \, d\mu + \varepsilon.$$

Доказательство. Выберем функцию f_0 из $\mathscr{L}_+$ таким образом, чтобы

$$C \subset f_0 \quad \text{и} \quad \Delta(f_0) \leqslant \lambda(C) + \varepsilon;$$

при этом будут выполняться неравенства

$$\Delta(f_0) \leqslant \mu(C) + \varepsilon \leqslant \int f_0 \, d\mu + \varepsilon. \quad *$$

Теорема 4. *Для всякого положительного линейного функционала* Λ *существует такая борелевская мера* μ, *что*

$$\Delta(f) = \int f \, d\mu$$

для всех f из $\mathscr{L}$.

Доказательство. Для множеств *С* из **С** положим

$$\lambda(C) = \inf\{\Delta(f) : C \subset f \in \mathscr{L}_+\}$$

и возьмем борелевскую меру μ, индуцированную объемом λ. Пусть *f*— произвольная функция из $\mathscr{L}$.

Возьмем компактное множество С, такое, что $\{x : f(x) \neq 0\} \subset C$, и положительное число ε. Согласно теореме 3, существует функция f_0 из $\mathscr{L}_+$, обладающая следующими свойствами:

$$C \subset f_0 \quad \text{и} \quad \Delta(f_0) \leqslant \int f_0 \, d\mu + \varepsilon.$$

Заметим, что так как $C \subset f_0$, то $ff_0 \geqslant f$. Если *с* — такая положительная постоянная, что $|f(x)| \leqslant c$ для всех *x* из *X*, то функция $(f + c) f_0$ принадлежит $\mathscr{L}_+$ и, в силу теоремы 2,

$$\Delta(f)+c\Delta(f_0)=\Delta((f+c)f_0)\geqslant\int(f+c)f_0\,d\mu=$$
$$=\int f\,d\mu+c\int f_0\,d\mu.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta(f)\geqslant\int f\,d\mu+c\left[\int f_0\,d\mu-\Delta(f_0)\right]\geqslant\int f\,d\mu-c\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то $\Delta(f)\geqslant\int f\,d\mu$ (т. е. теорема 2 распространяется на все функции f из $\mathscr{L}$).. Применив это неравенство к функции —f, мы получим обратное неравенство для f.

Теорема 5. *Пусть* μ — *регулярная борелевская мера. Если*

$\Delta(f)=\int f\,d\mu,$ *где* $f\in\mathscr{L}$, *и*

$\lambda(C)=\inf\{\Delta(f):C\subset f\in\mathscr{L}_+\}$, *где*

$C\in\mathbf{C}$, *то* $\mu(C)=\lambda(C)$ *для любого C из* **C**. *Отсюда, в частности, следует, что представление положительного линейного функционала в виде интеграла по регулярной борелевской мере единственно.*

Доказательство. Очевидно, что $\mu(C)\leqslant\lambda(C)$. Если $C\in\mathbf{C}$ и ε>0, то, так как μ регулярна, существует такое содержащее C ограниченное открытое множество U, что $\mu(U)\leqslant\mu(C)+\varepsilon$.

Пусть f — функция из $\mathfrak{F}$, равная единице на С и нулю на X—U; тогда $C\subset f\in\mathscr{L}_+$ и

$$\lambda(C)\leqslant\Delta(f)=\int f\,d\mu\leqslant\mu(U)\leqslant\mu(C)+\varepsilon;$$

так как ε произвольно, то теорема доказана.

1. Если x_0 — точка из X, $\Lambda(f)=f(x_0)$ для любой f из $\mathscr{L}$ и $\mu(E)=\chi_E(x_0)$ для борелевских множеств E, то $\Lambda(f)=\int f\,d\mu.$

2. Если μ_0 — бэровская мера, $\Lambda(f) = \int f \, d\mu_0$ для f из $\mathscr{L}$ и если μ — борелевская мера, такая, что $\Lambda(f) = \int f \, d\mu$, то $\mu(E) = \mu_0(E)$ для любого бэровского множества E.

3. Пусть μ_0—бэровская мера и $\Lambda(f) = \int f \, d\mu_0$ для f из $\mathscr{L}$.

Положим

$$\lambda_*(U) = \sup \{\Lambda(f) : U \supset f \in \mathscr{L}+\}$$

для произвольного U из $\mathbf{U}$ и

$$\mu^*(E) = \inf \{\lambda_*(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\}$$

для произвольного σ-ограниченного множества E. Тогда $\mu^*(E) = \mu_0(E)$ для любого бэровского множества E.

4. Пусть X—компактное пространство, полученное путем присоединения символа ∞ к дискретному пространству целых положительных чисел. В этом случае функция f, принадлежащая $\mathscr{L}$, представляет собой последовательность $\{f(n)\}$ действительных чисел, сходящуюся к $f(\infty)$. Наиболее общий положительный линейный функционал имеет в этом случае вид

$$\Lambda(f) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant \infty} f(n) \Lambda_n,$$

где $\sum_n \Lambda_n$ —произвольный сходящийся ряд положительных чисел.

5. Линейный функционал Λ на $\mathscr{L}$ называется *ограниченным,* если существует такое постоянное число k, что $|\Lambda(f)| \leqslant k \sup \{|f(x)| : x \in X\}$ для любой функции f из $\mathscr{L}$. Всякий ограниченный линейный функционал представляется в виде разности двух положительных линейных функционалов. Доказательство этого предложения нетривиально; его можно получить, построив аналог жордановского разложения обобщенной меры.

6. Если X—компактное пространство, то всякий положительный линейный функционал на $\mathscr{L}$ ограничен.

12. МЕРА ХААРА

12.1. ОТКРЫТЫЕ ПОДГРУППЫ

Прежде чем излагать теорию меры в топологических группах, мы приведем в этом параграфе три топологические теоремы, находящие важное применение в теории меры. Эти теоремы касаются открытых подгрупп; подгруппа Z топологической группы X называется *открытой* если Z представляет собой открытое подмножество. Мы покажем, что все топологические свойства группы X присущи всякой ее открытой подгруппе Z; прочие свойства находят свое отражение в строении класса левых смежных подмножеств по Z, топология его оказывается дискретной. Мы покажем, кроме того, что всякая локально компактная топологическая группа обладает достаточно малой открытой подгруппой, т. е. такой открытой подгруппой, в которой не могут иметь места патологические явления, связанные с поведением меры „на бесконечности".

Теорема 1. *Для того чтобы подгруппа Z топологической группы X была открытой, необходимо и достаточно, чтобы ее открытое ядро* Z^0 *было не пусто.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Докажем его достаточность. Так как по условию $Z^0 \neq 0$, то существует элемент z_0, входящий в Z^0. Если z — произвольный элемент из Z, то $zz_0^{-1} \in Z$ и, следовательно, $zz_0^{-1}Z = Z$. Таким образом, $zz_0^{-1}Z^0 = Z^0$, откуда

$$z = (zz_0^{-1})z_0 \in Z^0.$$

Так как элемент z из Z был выбран произвольно, то $Z \subset Z^0$, т. е. Z — открытое множество.

Теорема 2. *Если Z — открытая подгруппа топологической группы X, то соединение любого класса левых смежных подмножеств по Z одновременно замкнуто и открыто в X.*

Доказательство. Так как дополнение соединения произвольного класса левых смежных множеств само является соединением такого рода, а всякое множество, обладающее открытым дополнением, замкнуто, то достаточно доказать, что любое соединение левых смежных подмножеств представляет собой открытое множество. Далее, соединение открытых множеств непременно открыто, поэтому достаточно доказать, что всякое левое смежное подмножество открыто, а это, в свою очередь, непосредственно вытекает из того, что сама подгруппа Z является открытым множеством.

Теорема 3. *Если E— любое борелевское множество в локально компактной топологической группе X, то в X существует такая σ-компактная открытая подгруппа* Z, *что* $E \subset Z$.

Доказательство. В силу теоремы 1 § 11.2, достаточно доказать, что если $\{C_n\}$—последовательность компактных множеств в *X*, то все C_n, $n = 1,2,\ldots$, заключены в некоторой σ-компактной открытой подгруппе Z.

Пусть *D* — компактное множество, содержащее некоторую окрестность единичного элемента *e*. Положим $D_0 = D$ и

$$D_{n+1} = D_n^{-1} D_n \cup C_{n+1}$$

для $n = 0,1,2,\ldots$ Пусть $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n;$ тогда множество Z

σ-компактно, содержит внутренние точки и покрывает все C_n.

Доказательство теоремы будет завершено, если мы покажем, что $Z^{-1}Z \subset Z.$

Прежде всего докажем, что если $e \in D_n$ для всех n — 0, 1, 2,..., то $D_n \subset D_{n+1}$. В самом деле, если $e \in D_n$, то $e \in D_n^{-1}$; тогда, предположив, что $x \in D_n$, получим

$$x \in D_n^{-1} x \subset D_n^{-1} D_n \subset D_{n+1}.$$

Так как $e \in D_0$, то $D_n \subset D_{n+1}$ при любом $n = 0,1,2,\ldots$

Если *x* и *y* — любые два элемента из Z, то *x* и *y* оба принадлежат некоторому D_n и, согласно выводу предыдущего абзаца,

$$x^{-1} y \in D_n^{-1} D_n \subset D_{n+1} \subset Z.$$

12.2. СУЩЕСТВОВАНИЕ МЕРЫ ХААРА

Мерой Хаара называется борелевская мера μ в локально компактной топологической группе *X*, обладающая следующими свойствами: $\mu(U) > 0$ для любого непустого борелевского открытого множества *U* и $\mu(xE) = \mu(E)$ для любого борелевского множества *E*. В этом параграфе мы докажем, что во всякой локально компактной топологической группе существует хотя бы одна мера Хаара.

Второе условие, фигурирующее в определении меры Хаара, можно назвать левой инвариантностью (или инвариантностью относительно левых переносов). Заметим, что первое условие равносильно требованию, чтобы μ не равнялась нулю тождественно. Можно, очевидно, предположить, что $e \in U$. Если теперь $\mu(U) = 0$, где U — некоторое непустое борелевское открытое множество, а C — любое компактное множество, то класс $\{xU : x \in C\}$ образует открытое покрытие множества C. Так как C компактно, то в нем содержится такое конечное подмножество $\{x_1, \ldots, x_n\}$, что $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i U$ и, в силу инвариантности меры μ слева,

$$\mu(C) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i U) = n\mu(U) = 0.$$

Если же μ равна нулю на всех компактных множествах, то она равна нулю и на всех борелевских множествах. Таким образом, можно сказать, что мера Хаара есть инвариантная слева борелевская мера, не равная тождественно нулю.

Прежде чем осуществить построение меры Хаара, отметим еще наличие некоторой асимметрии в ее определении. Левые и правые переносы в группе совершенно симметричны, поэтому выделение именно левых переносов в нашем определении кажется неестественным. То, что мы здесь определили, лучше было бы назвать „левой мерой Хаара"; одновременно следовало бы ввести „правую меру Хаара" и подробно изучить связь между той и другой. Действительно, в дальнейшем мы иногда будем пользоваться этими более точными терминами. Однако в большинстве случаев, в частности в вопросе существования, имеет место полная симметрия между правыми и левыми мерами Хаара, и именно это обстоятельство оправдывает „несимметричный" подход к ним. В самом деле, так как отображение группы X самой на себя, переводящее x в x^{-1}, сохраняя все групповые и топологические свойства, преобразует все „левые" свойства в „правые" и наоборот, то из всякой „левой теоремы" следует соответстующая „правая теорема" и обратно. В частности, нетрудно убедиться в том, что если μ — левая мера Хаара, то функция множества ν, определенная для любого борелевского множества E равенством $\nu(E) = \mu(E^{-1})$, представляет собой правую меру Хаара; обратно, если μ — правая мера Хаара, то ν — левая.

Пусть E— произвольное ограниченное множество, а F — произвольное множество, такое, что $F^0 \neq 0$; определим „отношение" $E : F$ как наименьшее целое положительное число n, обладающее следующим свойством: в X есть множество $\{x_1, \ldots, x_n\}$, состоящее из n элементов, такое, что $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i F.$ Легко видеть, что, так как E ограничено и $F^0 \neq 0$, то такое конечное n существует; кроме того, если множество A ограничено и в то же время содержит внутренние точки, то

$$E : F \leqslant (E : A)(A : F).$$

Наш подход к построению меры Хаара оправдывается следующими соображениями. Как было показано в предыдущей главе, для того чтобы в локально компактной топологической группе задать борелевскую меру, достаточно построить некоторый объем λ, т. е. функцию множества на **C**, обладающую известными свойствами аддитивности. Для компактного множества C и непустого открытого множества U отношение C: U служит мерой сравнения размеров C и U. Умножая C: U на некоторый множитель, зависящий от размеров множества U, и затем совершая в этом произведении некоторый предельный переход, в предположении, что U неограниченно уменьшается, мы получим в качестве предела значение X на множестве C.
Сказанное в предыдущем абзаце не вполне точно. Чтобы обнаружить это и заодно сделать последующее изложение более наглядным, рассмотрим такой пример. Пусть X—эвклидова плоскость, μ — лебеговская мера и C—произвольное компактное множество. Внутренность круга произвольного радиуса $r > 0$ обозначим U_r и положим $n(r) = C : U_r$. При этом, очевидно, $n(r)\pi r^2 \geqslant \mu(C)$. Известно, что $\lim\limits_{r \to 0} n(r)\pi r^2$ существует, но равен не $\mu(C)$, а $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\mu(C)$. Иначе говоря, при заданной мере, принимающей значение πr^2 на U_r, указанный процесс приводит к новой мере, отличающейся от исходной некоторым постоянным множителем. С целью исключить этот множитель мы будем рассматривать вместо С: U частное двух отношений $\frac{C : U}{A : U}$, где A — некоторое фиксированное компактное множество с внутренними точками.
Теорема 1. *Каковы бы ни были непустое открытое множество U и компактное множество A, имеющее внутренние точки, функция множества λ_U, определенная на компактных множествах C равенством*

$$\lambda_U(C) = \frac{C:U}{A:U},$$

неотрицательна, конечна, монотонна, полуаддитивна и инвариантна слева; кроме того, она обладает тем свойством, что если C и D — любые компактные множества, для которых

$CU^{-1} \cap DU^{-1} = 0,$ *то*

$$\lambda_U(C \cup D) = \lambda_U(C) + \lambda_U(D).$$

Доказательство. Все перечисленные здесь свойства функции λ_U, кроме, может быть, последнего, вытекают непосредственно из определения отношения C: U. Для доказательства последнего утверждения подвергнем U левому переносу с помощью некоторого элемента x; заметим, что если $C \cap xU \neq 0,$ то $x \in CU^{-1},$ и если $D \cap xU \neq 0,$ то $x \in DU^{-1}.$ Следовательно, никакое xU не может пересекаться одновременно с C и D, а отсюда и вытекает последнее указанное в теореме свойство функции λ_U.

Теорема 2. *Во всякой локально компактной топологической группе X существует хотя бы одна регулярная мера Хаара.*

Доказательство. В силу теорем 5 и 7 § 11.4, достаточно построить инвариантный слева объем, не равный тождественно нулю. В силу теоремы 3 § 11.4, мера, индуцированная таким объемом, не равна нулю тождественно. Это и будет искомая регулярная мера Хаара.

Пусть A — какое-нибудь фиксированное компактное множество и **N** — класс всех окрестностей единичного элемента. Для любой окрестности U из **N** возьмем соответствующую функцию λ_U, определенную на компактных множествах C равенством

$$\lambda_U = \frac{C:U}{A:U}.$$

Так как $C:U \leqslant (C:A)(A:U),$ то

$$0 \leqslant \lambda_U(C) \leqslant C:A$$

для любого C из **C**. Согласно теореме 1, функция λ_U отличается от объема только тем, что она может не быть аддитивной. Сейчас, прибегнув к теореме Тихонова о компактности произведения.пространств, мы выделим такую функцию, предельную для функций λ_U, которая обладает всеми свойствами объема, в том числе свойством аддитивности.

Каждому множеству C из **C** поставим в соответствие замкнутый интервал $[0, \; C:A]$ и возьмем тихоновское произведение Ф всех таких интервалов. Ф представляет собой компактное хаусдорфово пространство, точками которого служат действительные функции φ, определенные на **C**; при этом $0 \leqslant \varphi(C) \leqslant C : A$ для любого C из **C**. Функция λ_U, при любом фиксированном U из **N**, представляет собой точку пространства Ф.

Для любого U из **N** пусть $\Delta(U)$ означает множество всех тех функций λ_V, для которых $V \subset U$, т. е.

$$\Delta(U) = \{\lambda_V : U \supset V \in \mathbf{N}\}.$$

Если $\{U_1, \ldots, U_n\}$ —любой конечный класс окрестностей единичного элемента, т. е. любой конечный подкласс класса **N**, то $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ также является окрестностью единичного элемента и

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \subset U_j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \Delta(U_i)$$

и, так как всякое $\Delta(U)$ содержит λ_U и, следовательно, непусто, то любой конечный подкласс класса множеств вида $\Delta(U)$, где $U \in \mathbf{N}$, имеет непустое пересечение. В силу компактности пространства Ф, существует точка λ, принадлежащая пересечению замыканий всех $\Delta(U)$:

$$\lambda \in \bigcap \{\overline{\Delta(U)} : U \in \mathbf{N}\}.$$

Мы покажем, что эта функция λ и есть искомый объем.

Ясно, что $0 \leqslant \lambda(C) \leqslant C : U < \infty$ для любого C из **C**.

Покажем, что функция λ монотонна; для этого заметим, что при любом фиксированном C из **C** функция ξ_C, определенная на Ф равенством $\xi_C(\varphi) = \varphi(C)$, непрерывна, а потому, каковы бы ни были компактные множества C и D, множество

$$\Delta = \{\varphi : \varphi(C) \leqslant \varphi(D)\} \subset \Phi$$

замкнуто. Если $C \subset D$ и $U \in \mathbf{N}$, то $\lambda_U \in \Delta$ и, следовательно, $\Delta(U) \subset \Delta$, а так как Δ замкнуто, то $\lambda \in \overline{\Delta(U)} \subset \Delta$; таким образом, λ монотонна.

Доказательство полуаддитивности функции λ проводится с помощью вполне аналогичного рассуждения; поэтому мы его опускаем и переходим к доказательству того, что λ аддитивна. Пусть C и D — непересекающиеся компактные множества; тогда существует окрестность U единичного элемента e, такая, что $CU^{-1} \cap DU^{-1} = 0.$

Если $V \in \mathbf{N}$ и $V \subset U$, то $CV^{-1} \cap DV^{-1} = 0$, и (см. теорему 1)

$\lambda_V (C \cup D) = \lambda_V (C) + \lambda_V (D).$

Это означает, что при $V \subset U$ функция λ_V принадлежит замкнутому множеству $\Delta' = \{\varphi : \varphi (C \cup D) = \varphi (C) + \varphi (D)\}$ и, следовательно, $\Delta (U) \subset \Delta'.$

Отсюда вытекает, что $\lambda \in \overline{\Delta (U)} \subset \Delta'$, т. е. λ аддитивна.

Еще раз повторяя рассуждение такого типа, мы докажем, что λ *(A)* = 1 (в силу того, что $\lambda_U (A) = 1$ при любом U из **N**). Таким образом, функция λ, относительно которой мы уже знаем, что она является объемом, не равна нулю тождественно. Инвариантность функции λ слева следует из соответствующего свойства всех λ_U.

1. Существование правой меры Хаара можно получить, опираясь на существование левой меры Хаара, если ввести группу $\hat{X}$, двойственную к X в следующем смысле. По определению, $\hat{X}$ состоит из тех же элементов и обладает такой же топологией, что и X, а произведение элемента x на элемент y, т. е. xy, в $\hat{X}$ определяется как произведение y на x, т. е. yx, в X.
2. Мера Хаара, очевидно, не единственна, так как если μ — мера Хаара, то $c\mu$, где c — любое положительное число, также представляет собой меру Хаара.
3. Если функция λ_U, где $U \in \mathbf{N}$, определена так, как в теореме 1, то для любого компактного множества С, содержащего хотя бы одну внутреннюю точку, выполняются неравенства

$0 < \frac{1}{A : C} \leqslant \lambda_U (C).$ Отсюда следует, что $\lambda_U (C) > 0$, коль скоро $C^0 \neq 0.$

4. Приведем известный пример группы, в которой левые и правые меры Хаара существенно различны. Пусть X—множество всех матриц вида

$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $0 < x < \infty$ и $-\infty < y < \infty$; легко видеть, что относительно обычного матричного умножения X является группой.

Если X топологизирована естественным образом как полуплоскость эвклидовой плоскости, то X оказывается локально компактной топологической группой. Если мы положим для произвольного борелевского множества E

$$\mu(E) = \int\int_E \frac{1}{x^2}\,dx\,dy \quad \text{и} \quad \nu(E) = \int\int_E \frac{1}{x}\,dx\,dy$$

(где интегралы берутся по лебеговской мере в плоскости), то μ и ν будут представлять собой соответственно левую и правую меры Хаара. Так как $\mu(E^{-1}) = \nu(E)$, то на этом примере мы видим, что могут существовать измеримые множества E, для которых $\mu(E) < \infty$ и $\mu(E^{-1}) = \infty$.

5. C и D — компактные множества; следует ли из $\mu(C) = \mu(D) = 0$, что

$$\mu(CD) = 0?$$

6. Пусть μ — мера Хаара в X; для того чтобы группа X была дискретной, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(\{x\}) \neq 0$ хотя бы для одного x из X.

7. Всякая локально компактная топологическая группа X удовлетворяет условию, сформулированному в упр. 10 § 6.5 (см. § 12.1).

8. Если мера Хаара в X конечна, то группа X компактна.

9. Если μ — мера Хаара в X, то следующие четыре условия взаимно-эквивалентны: а) группа X σ-компактна, б) мера μ вполне σ-конечна, в) всякий класс непересекающихся непустых открытых борелевских множеств конечен или счетен, г) для любого непустого открытого борелевского множества U существует последовательность $\{x_n\}$ элементов из X, такая, что

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n U.$$

12.3. ИЗМЕРИМЫЕ ГРУППЫ

Топологическая группа, по определению, представляет собой группу X с топологией, удовлетворяющей некоторой аксиоме отделимости, и обладающую тем свойством, что отображение (произведения $X \times X$ на X), которое переводит (x, y) в $x^{-1}y$, непрерывно. Здесь для нас будет более полезно другое определение, содержащее требование, чтобы отображение S (произведения $X \times X$ самого на себя), заданное равенством $S(x, y) = (x, xy)$, было гомеоморфизмом. Оба эти определения эквивалентны. В самом деле, если X—топологическая группа в смысле первого определения, то отображение S непрерывно; а так как оно, очевидно, взаимно-однозначно и $S^{-1}(x, y) = (x^{-1}, x^{-1}y)$, то и S^{-1} непрерывно, т. е. S представляет собой гомеоморфизм. Если, наоборот, дано, что S есть гомеоморфизм, то S^{-1} непрерывно; непрерывным будет и отображение, состоящее из S^{-1} с последующим проектированием $X \times X$ на X. (В том случае, когда X—числовая прямая и групповой операцией служит сложение, отображение S имеет простой геометрический смысл: оно смещает любую точку (x, y) плоскости в вертикальном направлении на отрезок, равный x.)

Назовем теперь *измеримой группой* пространство $(X, \mathbf{S}, \mu)$ с σ-конечной мерой, обладающее следующими свойствами: а) μ не равна тождественно нулю, б) X есть группа, в) σ-кольцо $\mathbf{S}$ и мера μ инвариантны относительно левых переносов в X и г) отображение $\mathbf{S}$ произведения $X \times X$ самого на себя, определенное равенством $S(x, y) = (x, xy)$, переводит измеримые множества в измеримые. (Инвариантность $\mathbf{S}$ относительно левых переносов означает, конечно, что $xE \in \mathbf{S}$ при любых x из X и E из $\mathbf{S}$; измеримыми множествами в $X \times X$ называются, как обычно, множества, принадлежащие σ -кольцу $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$.)

Если X—локально компактная группа, $\mathbf{S}$ — класс всех бэровских множеств в X и μ — мера Хаара, то $(X, \mathbf{S}, \mu)$ представляет собой измеримую группу; это вытекает из того, что S есть гомеоморфизм (следовательно, S преобразует бэровские множества в бэровские множества), а класс всех бэровских множеств в $X \times X$ совпадает с $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ (в силу теоремы 5 § 11.2). Дальнейшее исследование измеримых групп имеет своей целью выяснение того, какие сведения о топологической группе можно извлечь, изучая ее лишь с точки зрения теории меры.

Если X—любое измеримое пространство (в частности, если X—любая измеримая группа), то взаимно-однозначное отображение R произведения $X \times X$ самого на себя, определенное равенством $R(x, y) = (y, x)$, преобразует измеримые множества в измеримые; чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что если E — измеримый прямоугольник, то $R(E)$ и $R^{-1}(E)$ $(= R(E))$ также являются измеримыми прямоугольниками. Так как произведение двух отображений, переводящих измеримые множества в измеримые, обладает тем же свойством, то в нашем распоряжении оказывается значительный запас таких отображений — именно всевозможные произведения степеней *S* и *R*. Помимо преобразования S мы часто будем пользоваться еще его „отражением" $T = R^{-1}SR$; заметим, что $T(x, y) = (yx, y)$.

До конца этого параграфа мы будем предполагать, что $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(X, \mathbf{S}, \nu)$—измеримые группы, μ и ν — меры (вообще говоря, различные), *R, S* и *T*—отображения, описанные в предыдущих абзацах.

Теорема 1. *Если E — любое множество в X×X, то*

$$(S(E))_x = xE_x \quad \text{и} \quad (T(E))^y = yE^y$$

для любых x и y из X.

Доказательство. Утверждение, касающееся *S*, следует из равенства

$$\chi_{S(E)}(x, y) = \chi_E(x, x^{-1}y),$$

а также из того факта, что $y \in (S(E))_x$ тогда и только тогда, когда $\chi_{S(E)}(x, y) = 1$, и $x^{-1}y \in E_x$ тогда и только тогда, когда $\chi_E(x, x^{-1}y) = 1$.

Утверждение, относящееся к *T*, доказывается подобным же образом.

Теорема 2. *Отображения S и T преобразуют* $(X \times X, \mathbf{S} \times \mathbf{S}, \mu \times \nu)$ *само на себя с сохранением меры.*

Доказательство. Пусть *E* — измеримое множество в *X*×*X.* Тогда, согласно теореме Фубини и теореме 1,

$$(\mu \times \nu)(S(E)) = \int \nu((S(E))_x)\, d\mu(x) = \int \nu(xE_x)\, d\mu(x) =$$
$$= \int \nu(E_x)\, d\mu(x) = (\mu \times \nu)(E);$$

таким образом, *S* сохраняет меру. Соответствующее свойство отображения *T* устанавливается подобным же образом с помощью сечений $(T(E))^y$.

Теорема 3. *Если* $Q = S^{-1}RS$, *то*

$$(Q(A \times B))_{x^{-1}} = xA \cap B^{-1}$$

и

$$(Q(A \times B))^{y^{-1}} = \begin{cases} Ay, & \text{когда } x \in B, \\ 0, & \text{когда } x \overline{\in} B. \end{cases}$$

Доказательство. Заметим, что $Q(x, y) = (xy, y^{-1})$ и $Q^{-1} = Q$.

Мы имеем равенства

$$\chi_{Q(A\times B)}(x^{-1}, y) = \chi_{A\times B}(x^{-1}y, y^{-1}) = \chi_{xA}(y)\chi_B(y^{-1});$$

далее, $y \in (Q(A \times B))_{x^{-1}}$ в том и только том случае, если $\chi_{Q(A\times B)}(x^{-1}, y) = 1$, а $y \in xA \cap B^{-1}$ в том и только том случае, если $\chi_{xA}(y)\chi_B(y^{-1}) = 1$. Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Второе утверждение следует из равенств

$$\chi_{Q(A\times B)}(x, y^{-1}) = \chi_{A\times B}(xy^{-1}, y) = \chi_{Ay}(x)\chi_B(y)$$

и из того факта, что $y \in (Q(A \times B))^{y^{-1}}$ тогда и только тогда, когда $\chi_{Q(A\times B)}(x, y^{-1}) = 1$, а $x \in Ay$ и $y \in B$ тогда и только тогда, когда $\chi_{Ay}(x)\chi_B(y) = 1$.

Теорема 4. *Если A — измеримое множество в X (положительной меры) и $y \in X$, то Ay— измеримое множество (положительной меры) и A^{-1}—измеримое множество (положительной меры). Если f — измеримая функция, A — измеримое множество положительной меры и для любого x из X*

$$g(x) = \frac{f(x^{-1})}{\mu(Ax)},$$

то g—измеримая функция.

Доказательство. Множество Ay измеримо, так как если B — какое-нибудь измеримое множество, содержащее элемент y, то, согласно теореме 3, Ay представляет собой сечение измеримого множества $Q(A \times B)$, где $Q = S^{-1}RS$. Чтобы доказать остальные утверждения теоремы, воспользуемся тем, что Q отображает $(X \times X, \mathbf{S} \times \mathbf{S}, \mu \times \nu)$ само на себя с сохранением меры. Поэтому, если $\mu(A) > 0$, то, согласно теореме 3,

$$0 < (\mu(A))^2 = (\mu \times \nu)\ (Q(A \times A)) = \int \mu(x^{-1}A \cap A^{-1})\, d\mu(x)$$

и, следовательно, $x^{-1}A \cap A^{-1}$ хотя бы при одном x имеет положительную меру. Иначе говоря, мы доказали, что если A — измеримое множество положительной меры, то A^{-1} содержит измеримое подмножество B положительной меры. (Отсюда, в частности, когда мы установим измеримость A^{-1} 1, сразу будет следовать, что $\mu(A^{-1}) > 0$.) Так как $y^{-1}B \subset y^{-1}A^{-1}$, коль скоро $B \subset A^{-1}$ и $\mu(y^{-1}B) = \mu(B)$, то, еще раз воспользовавшись полученным выводом, мы обнаружим существование измеримого множества *C* положительной меры, такого, что $C \subset (y^{-1}B)^{-1} \subset (y^{-1}A^{-1})^{-1} = Ay$. Все утверждения, касающиеся множества *Ay,* таким образом, доказаны. Для доказательства измеримости A^{-1} заметим, что если $\mu(A) > 0$, то, в силу теоремы 3 и только что установленных результатов,

$$\{y : \mu((Q(A \times A))^y) > 0\} = A^{-1}.$$

Итак, если $\mu(A) > 0$, то множество A^{-1} измеримо. Если же $\mu(A) = 0$ то измеримость A^{-1} следует из равенства $A^{-1} = (A \cup B)^{-1} - B^{-1}$, где *B* — измеримое множество, такое, что $\mu(B) > 0$ и $B \cap A = 0$.

Из уже установленных результатов вытекает, что если функция *f* измерима и $\hat{f}(x) = f(x^{-1})$, то функция $\hat{f}$ также измерима.

Если *A* и *B*—измеримые множества, $f_0(y) = \mu((Q(A \times B))^y)$ и $\hat{f}_0(y) = f_0(y^{-1})$, то функции f_0 и $\hat{f}_0$ измеримы и, в силу теоремы 3,

$$\hat{f}_0(y) = \mu(Ay)\chi_B(y).$$

Иначе говоря, мы доказали, что если $h(y) = \mu(Ay)$, то функция *h* измерима на всяком измеримом множестве и, следовательно, $\frac{1}{h}$ обладает тем же свойством.

Теорема 5. *Если A и B — измеримые множества положительной меры, то существуют измеримые множества C_1 и C_2 положительной меры и элементы* x_1, y_1, x_2 *и* y_2, *такие, что*

$$x_1C_1 \subset A, \quad y_1C_1 \subset B, \quad C_2x_2 \subset A, \quad C_2y_2 \subset B.$$

Доказательство. Если $\mu(B) > 0$, то $\mu(B^{-1}) > 0$, следовательно, $(\mu \times \mu)(A \times B^{-1}) = \mu(A)\mu(B^{-1}) > 0$. В силу теоремы 3, множество $x^{-1}A \cap B$ при любом *x* измеримо и хотя бы при одном *x* имеет положительную меру. Если элемент x_1

таков, что $\mu(x_1^{-1}A \cap B) > 0,$ и $y_1 = e$, то, положив

$C_1 = x_1^{-1}A \cap B,$ получим $x_1C_1 \subset A$ и $y_1C_1 \subset B.$

Применяя этот результат к множествам A^{-1} и B^{-1}, мы найдем множество C_0 и точки x_0, y_0, такие, что $x_0C_0 \subset A^{-1}$ и $y_0C_0 \subset B^{-1}$; теперь мы можем положить

$$C_2 = C_0^{-1}, \ x_2 = x_0^{-1}, \ y_2 = y_0^{-1}.$$

Теорема 6. *Если A и B — измеримые множества и* $f(x) = \mu(x^{-1}A \cap B)$, *то функция f измерима и*

$$\int f \, d\mu = \mu(A)\,\mu(B^{-1}).$$

Если $g(x) = \mu(xA \,\Delta\, B)$ *и* $\varepsilon < \mu(A) + \mu(B)$, *то множество* $\{x : g(x) < \varepsilon\}$ *измеримо.*

Первая часть этого предложения называется иногда *теоремой о среднем.*

Доказательство. К первому утверждению нас приведут следующие соображения: если, как и выше, $Q = S^{-1}RS$, то Q отображает $(X \times X, \ \mathbf{S} \times \mathbf{S}, \ \mu \times \mu)$ само на себя с сохранением меры и при этом

$$f(x) = \mu\left((Q(A \times B^{-1}))_x\right).$$

Если $\hat{f}(x) = f(x^{-1})$, то $\hat{f}$ —измеримая функция. Отсюда, а также из равенства

$$\{x : g(x) < \varepsilon\} = \left\{x : \hat{f}(x) > \frac{1}{2}(\mu(A) + \mu(B) - \varepsilon)\right\}$$

следует второе утверждение.

1. Является ли измеримой группой декартово произведение двух измеримых групп?

2. Если μ — мера Хаара в компактной группе X, причем мощность X выше мощности континуума, то $(X, \ \mathbf{S}, \ \mu)$ не является измеримой группой. [Указание. Пусть $D = \{(x, y) : x = y\} = S(X \times \{e\})$. Если допустить, что D принадлежит классу S × S, то существует счетный класс **R** измеримых прямоугольников, такой, что $D \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$. Пусть **E** — (счетный) класс сторон прямоугольников,

принадлежащих **R**. Так как $D \in \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{E}) \times \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{E})$, то любое сечение множества D принадлежит классу **S** (**E**). Но мощность класса **S** (**E**) не превосходит мощности континуума (см. утверждение „в" в упр. 9 § 2.6), что противоречит предположению относительно мощности пространства X].

3. Пусть μ — мера Хаара в локально компактной группе X, E— произвольное бэровское множество в X, x — произвольный элемент из X; тогда если одно из чисел

$$\mu(E), \quad \mu(xE), \quad \mu(Ex) \quad \text{и} \quad \mu(E^{-1})$$

равно нулю, то и остальные равны нулю.

4. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$—измеримая группа, причем мера μ вполне конечна; если A — измеримое множество, такое, что $\mu(xA - A) = 0$ при любом x из X, то либо $\mu(A) = 0$, либо $\mu(X - A) = 0$. [Указание. Примените к множествам A и $X - A$ теорему о среднем.] Этот результат, в соответствующей формулировке, справедлив и без предположения, что μ конечна; на языке эргодической теории это означает, чго измеримая группа, если ее рассматривать как группу преобразований, сохраняющих меру, самой на себя, обладает свойством метрической транзитивности.

5. Если μ — мера Хаара в компактной группе X, то для любого бэровского множества E и для любого x

$$\mu(E) = \mu(xE) = \mu(Ex) = \mu(E^{-1}).$$

12.4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ МЕРЫ ХААРА

В этом параграфе мы покажем, что мера Хаара, по существу говоря, единственна.

Теорема 1. *Если* μ *и* ν *— две меры, такие, что* $(X, \mathbf{S}, \mu)$ *и* $(X, \mathbf{S}, \nu)$ *представляют собой измеримые группы, и если множество E из* **S** *таково, что* $0 < \nu(E) < \infty$, *то, какова бы ни была неотрицательная измеримая функция f на X,*

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \mu(E) \int \frac{f(y^{-1})}{\nu(Ey)}\, d\nu(y).$$

Этот результат интересен своей качественной стороной: всякий интеграл относительно меры μ выражается в виде некоторого интеграла относительно меры ν.

Доказательство. Если $g(y) = \frac{f(y^{-1})}{\nu(Ey)}$, то, в силу результатов предыдущего параграфа, функция g, так же как f, неотрицательна и измерима. Положим, как и раньше,

$$S(x, y) = (x, xy) \quad \text{и} \quad T(x, y) = (yx, y).$$

S и T отображают пространство с мерой $(X \times X,\ \mathbf{S} \times \mathbf{S},\ \mu \times \mu)$ само на себя с сохранением меры; поэтому так же ведет себя и отображение $S^{-1}T$. Так как $S^{-1}T(x, y) = (yx, x^{-1})$, то, согласно теореме Фубини,

$$\mu(E) \int g(y)\, d\nu(y) = \int \chi_E(x)\, d\mu(x) \int g(y)\, d\nu(y) =$$

$$= \int \chi_E(x)\, g(y)\, d(\mu \times \nu)(x, y) = \int \int \chi_E(yx)\, g(x^{-1})\, d\nu(y)\, d\mu(x) =$$

$$= \int g(x^{-1})\, \nu(Ex^{-1})\, d\mu(x).$$

Так как $g(x^{-1})\, \nu(Ex^{-1}) = f(x)$, то теорема доказана.

Теорема 2. *Если* μ *и* ν *— две меры, такие, что* $(X, \mathbf{S}, \mu)$ *и* $(X, \mathbf{S}, \nu)$ *представляют собой измеримые группы, и если* $0 < \nu(E) < \infty$, *где E— некоторое множество из* **S**, *то для любого F из* S

$$\mu(E)\, \nu(F) = \nu(E)\, \mu(F).$$

Заметим, что это — настоящая теорема единственности. Она утверждает, что, каково бы ни было множество *F* из **S**,

$\mu(F) = c\nu(F)$, где $c = \frac{\mu(E)}{\nu(E)}$ —неотрицательная постоянная, т. е. μ и ν отличаются лишь постоянным множителем.

Доказательство. Пусть *f*—характеристическая функция множества *F*. Так как теорема 1 верна, в частности, тогда, когда мера μ совпадает с ν, то

$$\int f(x)\, d\nu(x) = \nu(E) \int \frac{f(y^{-1})}{\nu(Ey)}\, d\nu(y).$$

Умножив на μ *(E)* и применив теорему 1, получим отсюда равенство

$$\mu(E) \int f(x)\, d\nu(x) = \nu(E) \int f(x)\, d\mu(x).$$

Теорема 3. *Если* μ *и* ν*—регулярные меры Хаара в локально компактной топологической группе X, то существует конечная положительная постоянная с, такая, что* $\mu(E) = c\nu(E)$ *для любого борелевского множества E.*

Доказательство. Если S_0—класс всех бэровских множеств E в X, то (X, S_0, μ) и (X, S_0, ν) представляют собой измеримые группы, и, согласно теореме 2, $\mu(E) = c\nu(E)$ для любого бэровского множества E, где c — некоторая конечная неотрицательная постоянная. Взяв в качестве E любое ограниченное открытое бэровское множество, мы обнаружим, что $c>0$. Если же две регулярные борелевские меры (в нашем случае μ и $c\nu$) совпадают на бэровских множествах, то они совпадают и на всех борелевских множествах (см. теорему 8 § 11.3).

1. Мера Хаара мультипликативной группы всех отличных от нуля действительных чисел абсолютно непрерывна относительно лебеговской меры. Что является ее производной в смысле Радона — Никодима?

2. Если μ и ν — мера Хаара соответственно в локально компактных группах X и Y, а λ — мера Хаара в $X\times Y$, то на бэровских множествах в $X\times Y$ мера λ отличается от $\mu\times\nu$ постоянным множителем.

3. Теорему единственности меры Хаара для измеримой группы с конечной мерой можно доказать, опираясь на свойство метрической транзитивности, установленное в упр. 4 § 12,3. Предположим, что меры μ и ν инвариантны слева и $\nu \ll \mu$; тогда существует неотрицательная измеримая функция f, такая, что

$$\nu(E) = \int_E f(x)\, d\mu(x)$$

для любого измеримого множества E. Отсюда следует, что

$$\nu(yE) = \int_{yE} f(x)\, d\mu(x) = \int_E f(y^{-1}x)\, d\mu(x)$$

и, так как ν инвариантна слева, $f(x) = f(y^{-1}x)\ [\mu]$.

Если $N_t = \{x : f(x) < t\}$ то

$$\mu(yN_t - N_t) = \mu(\{x : f(y^{-1}x) < t\} - \{x : f(x) < t\}) = 0.$$

Таким образом, для любого действительного числа t либо $\mu(N_t) = 0$, либо $\mu(N_t') = 0$. Отсюда следует, что f постоянна почти всюду $[\mu]$ и $\nu = c\mu$.. Если не предполагать, что ν абсолютно непрерывна относительно μ, то вместо μ следует рассмотреть $\mu+\nu$. Так же как в упр. 4 § 12,3, в этом рассуждении можно освободиться от предположения, что меры конечны.

4. Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — измеримая группа, а E и F— измеримые множества в X, то существуют последовательности элементов $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ из X и последовательность измеримых множеств $\{A_n\}$, такие, что а) $\{x_nA_n\}$ представляет собой последовательность непересекающихся подмножеств множества E и $\{y_nA_n\}$ — последовательность непересекающихся подмножеств F, б) по меньшей мере одно из измеримых множеств

$$E_0 = E - \bigcup_{n=1}^{\infty} x_nA_n \quad \text{и} \quad F_0 = F - \bigcup_{n=1}^{\infty} y_nA_n$$

имеет меру нуль. [Указание. Если E или F имеет меру нуль, то утверждение тривиально. Если E и F— множества положительной меры, то, согласно теореме 5 § 12.3, можно указать такие x_1, y_1 и A_1, что $\mu(A_1) > 0,\ x_1A_1 \subset E,\ y_1A_1 \subset F$. Если $E - x_1A_1$ или $F - y_1A_1$ имеет меру нуль, то утверждение тривиально. Если оба эти множества имеют положительную меру, то мы снова воспользуемся теоремой 5 § 12.3. Доказательство завершается применением трансфинитной (хотя и счетной) индукции.]

С помощью этой теоремы можно получить еще одно доказательство теоремы единственности. Для этого нужно подробно рассмотреть отображение множества значений μ на множество значений ν, которое получится, если при любом измеримом E числу $\mu(E)$ поставить в соответствие число $\nu(E)$. Если μ и ν — левые меры Хаара, то такое отображение взаимнооднозначно.

5. Пусть μ — регулярная мера Хаара в локально компактной группе X. Каков бы ни был элемент x из X, функция множества μ_x, заданная на борелевских множествах E равенством $\mu_x(E) = \mu(Ex)$, также представляет собой регулярную меру Хаара. Отсюда, в силу теоремы единственности, следует, что $\mu(Ex) = \Delta(x)\mu(E)$, где $0 < \Delta(x) < \infty$. Отметим следующие свойства функции $\Delta(x)$:

а) $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y);\quad \Delta(e) = 1.$

б) Если x принадлежит центру группы X, то $\Delta(x) = 1.$

в) Если x — какой-нибудь коммутатор или если x принадлежит коммутанту группы X, то $\Delta(x) = 1$.

г) Функция $\Delta(x)$ непрерывна. [Указание. Пусть C — компактное множество положительной меры и ε — произвольное положительное число. Так как мера μ регулярна, то существует такое ограниченное открытое множество U, что $C \subset U$ и $\mu(U) \leqslant (1+\varepsilon)\,\mu(C)$. Пусть V—окрестность единичного элемента e, обладающая тем свойством, что $V = V^{-1}$ и $CV \subset U$; тогда если $x \in V$, то

$$\Delta(x)\,\mu(C)=\mu(Cx)\leqslant\mu(U)\leqslant(1+\varepsilon)\,\mu(C)$$

и

$$\frac{\mu(\Delta)}{\Delta(x)}=\mu(Cx^{-1})\leqslant\mu(U)\leqslant(1+\varepsilon)\,\mu(C),$$

откуда

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\leqslant\Delta(x)\leqslant 1+\varepsilon.]$$

д) Мы получаем еще одно доказательство тождества мер, инвариантных слева, и мер, инвариантных справа, в компактной группе *X,* так как, в силу „а" и „г", множество $\Delta(X)$ оказывается компактной мультипликативной группой положительных чисел.

е) Для любого борелевского множества *E*

$$\mu(E^{-1})=\int\limits_E\frac{1}{\Delta(x)}\,d\mu(x).$$

[Указание. В силу теоремы единственности, для мер, инвариантных *справа,*

$$\mu(E^{-1})=c\int\limits_E\frac{1}{\Delta(x)}\,d\mu(x),$$

где *c* — некоторая положительная постоянная. Отсюда для любой интегрируемой функции *f*

$$\int f(x^{-1})\,d\mu(x)=c\int\frac{f(x)}{\Delta(x)}\,d\mu(x).$$

Взяв $f(x^{-1})$ вместо $f(x^{-1})$, положив $g(x^{-1})=\dfrac{f(x)}{\Delta(x)}$ и

воспользовавшись последним равенством, получим

$$\frac{1}{c}\int g(x^{-1})\,d\mu(x)=c\int g(x^{-1})\,d\mu(x).]$$

ж) Если $\Gamma(x)$— „правый аналог" функции $\Delta(x)$, т. е. если $\nu(xE)=\Gamma(x)\,\nu(E)$, где ν — мера, инвариантная справа, то

$$\Gamma(x)=\frac{1}{\Delta(x)}.$$

6. *Относительно инвариантной* мерой влокально компактной группе *X* называется бэровская мера *ν*, не равная тождественно нулю и обладающая тем свойством, что для любого фиксированного *x* из *X* мера ν_x, определенная равенством $\nu_x(E) = \nu(xE)$, отличается от *ν* постоянным, не равным нулю множителем. Для того чтобы мера *ν* была относительно инвариантна, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$\nu(E) = \int_E \varphi(y)\, d\mu(y),$$

где μ — некоторая мера Хаара, а φ — непрерывный гомоморфизм группы *X* в мультипликативную группу положительных чисел. [Указание. Если φ неотрицательна, непрерывна,
$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ и

$$\nu(E) = \int_E \varphi(y)\, d\mu(y),$$

то

$$\nu(E) = \int_{xE} \varphi(y)\, d\mu(y) = \int_E \varphi(xy)\, d\mu(y) =$$

$$= \int_E \varphi(x)\varphi(y)\, d\mu(y) = \varphi(x)\nu(E).$$

Если, обратно, $\nu(xE) = \varphi(x)\nu(E)$, то (см. упр. 5)
$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ и φ непрерывна; следовательно, существует

$$\tilde{\mu}(E) = \int_E \varphi(y^{-1})\, d\nu(y)$$

и, в силу теоремы единственности, $\tilde{\mu} = \mu$.]

7. Если μ — σ-конечная инвариантная слева мера на бэровских множествах в локально компактной группе *X*, то она отличается от меры Хаара (на бэровских множествах) постоянным множителем. Отсюда, в частности, следует, что на компактных множествах μ конечна. [Указание. Если μ не равна тождественно нулю, то $(X, \mathbf{S}_0, \mu)$, где S_0 — класс всех бэровских множеств, представляет собой измеримую группу.]

13. МЕРА И ТОПОЛОГИЯ В ГРУППАХ

13.1. ЗАДАНИЕ ТОПОЛОГИИ ПОСРЕДСТВОМ МЕРЫ

В предыдущей главе мы показали, что в любой локально компактной группе можно задать инвариантную слева бэровскую меру (или инвариантную слева регулярную борелевскую меру), притом, по существу, единственным образом. В этой главе мы обнаружим теснейшую связь между свойствами группы как пространства с мерой и как топологического пространства. В частности, в итоге ряда отдельных теорем мы получим, что не только мера может быть задана на основе топологических свойств группы, но и обратно, топологические понятия в группе могут быть определены в терминах теории меры. Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что *X*—локально компактная топологическая группа, μ — регулярная мера Хаара в *X* и $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$, где *E* и *F* — произвольные борелевские множества в *X*.

Теорема 1. *Если E — борелевское множество конечной меры и* $f(x) = \rho(xE, E)$, *то функция f непрерывна.*

Доказательство. Пусть ε>0; в силу регулярности меры μ, существуют компактное множество С и открытое борелевское множество *U*, содержащее С, такие, что $\rho(E, C) < \frac{\varepsilon}{4}$ и $\rho(U, C) < \frac{\varepsilon}{4}$. Пусть *V*—окрестность единичного элемента *e*, такая, что *V*—*V*[-1] и $VC \subset U$. Если $y^{-1}x \in V$, то и $x^{-1}y \in V$, откуда

$$\rho(xC, yC) = \mu(xC - yC) + \mu(yC - xC) =$$
$$= \mu(y^{-1}xC - C) + \mu(x^{-1}yC - C) \leqslant$$
$$\leqslant 2\mu(VC - C) \leqslant 2\mu(U - C) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$|\rho(xE, E) - \rho(yE, E)| \leqslant$$
$$\leqslant \rho(xE, yE) \leqslant \rho(xE, xC) + \rho(xC, yC) + \rho(yC, yE) < \varepsilon.$$

Из теоремы 1 вытекает, что, каковы бы ни были борелевское множество *E* конечной меры и положительное число ε, $\{x : \rho(xE, E) < \varepsilon\}$ представляет собой открытое множество.

Следующий результат состоит в том, что открытых множеств такого рода достаточно много.

Теорема 2. *Если U — любая окрестность единичного элемента e, то существует бэровское множество E конечной положительной меры и положительное число* ε, *такие, что*

$$\{x : \rho(xE, E) < \varepsilon\} \subset U.$$

Доказательство. Пусть *V*—окрестность единичного элемента, такая, что $VV^{-1} \subset U$, и *E* — бэровское множество конечной положительной меры, содержащееся в *V*. Если $0 < \varepsilon < 2\mu(E)$, то

$$\{x : \rho(xE, E) < \varepsilon\} \subset \{x : xE \cap E \neq 0\} = EE^{-1} \subset VV^{-1} \subset U.$$

Из теорем 1 и 2 следует, что класс множеств вида $\{x : \rho(xE, E) < \varepsilon\}$ представляет собой базис в точке *e,* и, следовательно, мы действительно имеем возможность описать все топологические свойства группы *X* в терминах теории меры. В качестве примера такого описания мы сформулируем условие ограниченности.

Теорема 3. *Множество A ограничено тогда и только тогда, когда существуют бэровское множество E конечной положительной меры и число* ε, *такие, что* $0 \leqslant \varepsilon < 2\mu(E)$ *и*

$$A \subset \{x : \rho(xE, E) \leqslant \varepsilon\}.$$

Доказательство. Чтобы установить достаточность высказанного здесь условия, покажем, что если *E* — бэровское множество конечной положительной меры и $0 \leqslant \varepsilon < 2\mu(E)$, то множество $\{x : \rho(xE, E) < \varepsilon\}$ ограничено. Возьмем положительное число δ, такое, что $4\delta < 2\mu(E) - \varepsilon$, и выберем в *E* компактное подмножество *C,* удовлетворяющее условию: $\mu(E) - \delta < \mu(C)$. Тогда

$$\rho(xC, C) \leqslant \rho(xC, xE) + \rho(xE, E) + \rho(E, C) < 2\delta + \rho(xE, E),$$

откуда

$$\{x : \rho(xE, E) \leqslant \varepsilon\} \subset \{x : \rho(xC, C) \leqslant \varepsilon + 2\delta\}.$$

Так как $\varepsilon + 2\delta < 2\mu(C)$, то

$$\{x : \rho(xE, E) \leqslant \varepsilon\} \subset \{x : \mu(xC \cap C) \neq 0\} \subset CC^{-1}.$$

Теперь докажем необходимость условия; пусть *C*—компактное множество, содержащее *A,* а *D* — какое-нибудь компактное множество положительной меры. Выберем бэровское множество *E* конечной положительной меры так, чтобы $E \supset C^{-1}D \cup D$. Так как $D \subset E$ и, когда $x \in C$, $D \subset xC^{-1}D \subset xE$, то $D \subset xE \cap E$, когда $x \in C$. Отсюда

$$A \subset C \subset \{x : D \subset xE \cap D\} \subset \{x : \rho(xE, E) \leqslant \varepsilon\},$$

где $\varepsilon = 2(\mu(E) - \mu(D))$.

1. Справедливы теоремы, аналогичные теоремам 1, 2 и 3, если в этих последних вместо $\rho(xE, E)$ взять $\mu(xE \cap F)$, где E и F— бэровские множества конечной положительной меры.
2. Если фиксировать борелевское множество E конечной меры и положить $f(x) = xE$, то определенное таким образом отображение f группы X в метрическое пространство множеств конечной меры непрерывно.
3. Для любого борелевского множества E конечной меры существует окрестность U единичного элемента e, такая, что $U \subset EE^{-1}$.
4. Группа X сепарабельна тогда и только тогда, когда метрическое пространство ее измеримых подмножеств конечной меры сепарабельно.
5. Если для произвольного ограниченного борелевского множества E положить

$$f_U(x) = \frac{\mu(E \cap U_x)}{\mu(U_x)},$$

где U — любая ограниченная окрестность единичного элемента e, а x — произвольная точка, то, когда $U \to e$, f_U сходится в среднем (и, следовательно, по мере) к χ_E. Другими словами, для всякого положительного числа ε существует ограниченная окрестность V единичного элемента, такая, что если $U \subset V$, то

$$\int |f_U - \chi_E|\, d\mu < \varepsilon.$$

Этот результат можно назвать *теоремой о точках плотности* в топологических группах. [Указание. Возьмем в качестве V такую окрестность единичного элемента, чтобы при любом выборе точки y из V выполнялось неравенство $\rho(yE, E) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда если $U \subset V$ и F — любое борелевское множество, то

$$\frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{\mu(U)} \int\limits_U \int\limits_F |\chi_E(yx) - \chi_E(x)|\, d\mu(x)\, d\mu(y) \geqslant$$

$$\geqslant \left| \int\limits_F d\mu(x) \int\limits_U \frac{1}{\mu(U)} \chi_{Ex^{-1}}(y)\, d\mu(y) - \int\limits_F \chi_E(x)\, d\mu(x) \int\limits_U \frac{d\mu(y)}{\mu(U)} \right| =$$

$$= \left| \int\limits_F (f_U(x) - \chi_E(x))\, d\mu(x) \right|.$$

(Напоминаем, что

$$\frac{\mu(A)}{\mu(B)} = \frac{\mu(Ax)}{\mu(Bx)},$$

каковы бы ни были борелевские множества A и B и точка x из X; см. упр. 5 § 12.4.) Теперь остается воспользоваться полученным неравенством, взяв в качестве F сначала множество $\{x : f_U(x) - \chi_E(x) > 0\}$, а затем — множество $\{x : f_U(x) - \chi_E(x) < 0\}$.]

6. Если ν — любая конечная обобщенная мера, заданная на бэровских множествах в X, то существует такое бэровское множество N_ν, что $\nu(E) = \nu(E \cap N_\nu)$, каково бы ни было бэровское множество E (см. упр. 3 § 4.1). *Сверткой* двух конечных обобщенных мер λ и ν называется функция $\lambda * \nu$, заданная на бэровских множествах E равенством

$$(\lambda * \nu)(E) = \int\limits_{N_\lambda \times N_\nu} \chi_E(xy)\, d(\lambda \times \nu)(x, y).$$

В том случае, когда λ и ν являются неопределенными интегралами (относительно меры Хаара μ) интегрируемых функций f и g, их свертка $\lambda * \nu$ также представляет собой неопределенный интеграл функции h, где

$$h(y) = \int f(x)\, g(x^{-1}y)\, d\mu(x).$$

7. Если λ и ν — конечные обобщенные меры, то

$$(\lambda * \nu)(E) = \int\limits_{N_\lambda} \nu(x^{-1}E)\, d\lambda(x).$$

Если группа X—абелева, то $\lambda * \nu = \nu * \lambda.$

8. Если λ и ν — конечные меры, заданные на бэровских множествах в локально компактной, σ-компактной абелевой группе X, то

$$\int \lambda(xE)\,d\nu(x) = \int \nu(xE^{-1})\,d\lambda(x).$$

[Указание. Если $\bar{\nu}(E) = \nu(E^{-1})$,то

$$\int \lambda(xE)\,d\nu(x) = \int \lambda(x^{-1}E)\,d\bar{\nu}(x), \quad \int \nu(xE^{-1})\,d\lambda(x) = \int \bar{\nu}(x^{-1}E)\,d\lambda(x),$$

и требуемый результат следует из равенства $\lambda * \bar{\nu} = \overline{\nu * \lambda}$.]

9. Если f и g— ограниченные непрерывные монотонные функции на числовой прямой, то (см. упр. 4 §5.3)

$$\int_a^b f\,dg + \int_a^b g\,df = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a),$$

т. е. справедливо обычное правило интегрирования по частям. [Указание. Примените результат упр. 8, положив $E = \{x : -\infty < x < 0\}$, к мерам λ и v, индуцированным соответственно функциями f u g.]

13.2. ВЕЙЛЕВСКАЯ ТОПОЛОГИЯ

Мы убедились в том, что произвольная локально компактная группа X представляет собой измеримую группу, если измеримость понимать в смысле Бэра, и, более того, сама топология локально компактной группы однозначно определяется строением X как измеримой группы. В этом параграфе мы рассмотрим обратную задачу: в заданной измеримой группе X определить топологию так, чтобы X стала локально компактной топологической группой. Мы увидим, что эта задача разрешима.

Всюду в этом параграфе рассматривается фиксированная измеримая группа $(X, \mathbf{S}, \mu)$; как обычно, мы полагаем $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$, где E и F — измеримые множества. Пусть, далее, **A** обозначает класс всех множеств вида EE^{-1}, где E — произвольное измеримое множество конечной положительной меры, а **N** — класс всех множеств вида $\{x : \rho(xE, E) < \varepsilon\}$, где E — произвольное измеримое множество конечной положительной меры и в — положительное число, такое, что $0 < \varepsilon < 2\mu(E)$.

Теорема 1. *Если* $N = \{x : \rho(xE, E) < \varepsilon\} \in \mathbf{N}$, *то всякое измеримое множество F положительной меры содержит измеримое подмножество G конечной положительной меры, такое, что*

$GG^{-1} \subset N.$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда F имеет конечную меру. Если $T(x, y) = (yx, y)$, то $T(E \times F)$— измеримое множество конечной меры в $X \times X$; следовательно, в $X \times X$ существует множество A, представляющее собой соединение конечногочисла измеримых прямоугольников, для которого

$$\frac{\varepsilon}{4}\mu(F) > \rho(T(E \times F), A) =$$

$$= \int\int |\chi_{T(E\times F)}(x, y) - \chi_A(x, y)|\, d\mu(x)\, d\mu(y) \geqslant$$

$$\geqslant \int_F \int |\chi_E(y^{-1}x) - \chi_A(x, y)|\, d\mu(x)\, d\mu(y).$$

Положим

$$C = \left\{ y : \int |\chi_E(y^{-1}x) - \chi_A(x, y)|\, d\mu(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\};$$

тогда $\mu(F \cap C) \leqslant \frac{1}{2}\mu(F)$ и, следовательно,

$$\mu(F - C) \geqslant \frac{1}{2}\mu(F) > 0.$$

Если $y \in F - C$, то

$$\rho(yE, A^y) = \int |\chi_E(y^{-1}x) - \chi_A(x, y)|\, d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как A представляет собой соединение конечного числа измеримых прямоугольников, то существует лишь конечное число различных множеств вида A^y; обозначим их $A_1, \ldots, A_n$. То, что мы доказали, можно теперь записать в виде

$$F - C \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ y : \rho(yE, A_i) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Так как $\frac{\varepsilon}{2} < \mu(E) = \mu(yE)$, то, согласно теореме 7 § 12.3, множества $\left\{ y : \rho(yE, A_i) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$ измеримы и, в силу неравенства $\mu(F - C) > 0$, хотя бы одно из них пересекается с $F—C$ по множеству положительной меры. Положим

$$G_0 = (F - C) \cap \left\{ y : \rho(yE, A_i) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

и фиксируем значение *i* так, чтобы $\mu(G_0) > 0$. Множество G_0, очевидно, измеримо, имеет конечную меру и $G_o \subset F$. Если $y_1 \in G_0^{-1}$ и $y_2 \in G_0^{-1}$, то

$$\rho(y_1 y_2^{-1} E, E) = \rho(y_2^{-1} E, y_1^{-1} E) \leqslant$$

$$\leqslant \rho(y_2^{-1} E, A_i) + \rho(y_1^{-1} E, A_i) < \varepsilon,$$

так что $G_0^{-1} G_0 \subset N$. Таким образом, мы установили существование множества G_0, обладающего всеми свойствами, указанными в теореме, с той лишь разницей, что вместо $GG^{-1} \subset N$ имеет место соотношение $G_0^{-1} G_0 \subset N$. Если теперь вместо *F* взять множество F^{-1}, а соответствующее его подмножество записать в виде G^{-1}, то G будет обладать всеми требуемыми свойствами.

Теорема 1 утверждает, в частности, что всякое множество из класса **N** содержит некоторое подмножество, принадлежащее классу **A**.

Следующая теорема содержит обратный результат.

Теорема 2. *Если* $A = EE^{-1} \in \mathbf{A}$, $0 < \varepsilon < 2\mu(E)$ *и* $N = \{x : \rho(xE, E) < \varepsilon\}$, *то* $N \in \mathbf{N}$ *и* $N \subset A$.

Доказательство. Первое утверждение тривиально; чтобы доказать второе, достаточно заметить, что

$$N \subset \{x : xE \cap E \neq 0\} = EE^{-1}.$$

Теорема 3. *Если* $N = \{x : \rho(xE, E) < \varepsilon\} \in \mathbf{N}$, *то N—измеримоемножество положительной меры. Если* $\mu(N^{-1}) < \infty$, *то и*

$\mu(N) < \infty$.

Доказательство. Так как $N = \left\{x : \mu(xE \cap E) > \mu(E) - \frac{\varepsilon}{2}\right\}$,

то измеримость *N* следует из теоремы 7 § 12.3. Неравенство $\mu(N) > 0$ следует из теоремы 1: пусть G— измеримое множество положительной меры, такое, что $GG^{-1} \subset N$; тогда, в частности, $Gy^{-1} \subset N$ при любом *y* из G. Последнее утверждение теоремы следует из неравенств

$$\left(\mu(E)-\frac{\varepsilon}{2}\right)\mu(N)\leqslant\int\limits_N \mu(xE\cap E)\,d\mu(x)\leqslant$$
$$\leqslant\int \mu(xE\cap E)\,d\mu(x)=\mu(E)\,\mu(E^{-1}).$$

Теорема 4. *Для любых двух множеств A и B из* **A** *существует множество C, также принадлежащее классу* **A**, *такое, что* $C\subset A\cap B$.

Доказательство. Пусть $A=EE^{-1}$ и $B=FF^{-1}$, где *E* и *F*—измеримые множества конечной положительной меры. В силу теоремы 5 §12.3, можно выбрать измеримое множество *G* конечной положительной меры и два элемента *x* и *y* таким образом, что

$$Gx\subset E \quad \text{и} \quad Gy\subset F.$$

Если $C=GG^{-1}$, то $C\in$ **A** и

$$C=(Gx)(Gx)^{-1}\subset A, \qquad C=(Gy)(Gy)^{-1}\subset B.$$

Прежде чем ввести в *X* обещанную топологию, нам придется определить еще одно понятие. Мы помним, что в определении измеримой группы вовсе не фигурировали свойства отделимости, играющие существенную роль в определении топологической группы. Аксиому отделимости в топологической группе можно сформулировать так: для любого отличного от *e* элемента *x* существует окрестность *U* элемента *e*, такая, что $x\overline{\in}U$.
Руководствуясь этими соображениями, а также результатами § 13.1, мы дадим следующее определение: будем говорить, что измеримая группа обладает *свойством отделимости,* если для любого отличного от *e* элемента *x* существует такое измеримое множество *E* конечной положительной меры, что $\rho(xE,\,E)>0$.

Теорема 5. *Если в измеримой группе X, обладающей свойством отделимости, взять класс* **N** *в качестве базиса в точке e, то, с заданной таким образом топологией, X оказывается топологической группой.*

Такую топологию в измеримой группе условимся называть *вейлевской топологией.*

Доказательство. Мы проверим, что **N** обладает свойствами „а"— „д", определяющими базис в точке *е,* которые перечислены ранее. Пусть $x_0 \in X,\ x_0 \neq e$ и E — измеримое множество конечной положительной меры, такое, что $\rho(x_0 E, E) > 0.$ Если ε удовлетворяет неравенствам $0 < \varepsilon < \rho(x_0 E, E),$ то $\varepsilon < 2\mu(E).$ Если мы положим $N = \{x : \rho(xE, E) < \varepsilon\},$ то $N \in \mathbf{N}$ и, очевидно, $x_0 \overline{\in} N.$

Если $N \in \mathbf{N}$ и $M \in \mathbf{N}$, то, согласно теореме 1, существуют множества A и В из **А**, содержащиеся соответственно в N и M. В силу теоремы 4, класс **А** содержит такое множество С, что $C \subset A \cap B.$

Воспользовавшись теоремой 2, мы найдем множество *К,* обладающее такими свойствами: $K \in \mathbf{N}$ и

$$K \subset C \subset A \cap B \subset N \cap M.$$

Если $N = \{x : \rho(xE, E) < \varepsilon\},$ то возьмем

$$M = \left\{x : \rho(xE, E) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Для любых двух элементов x_0 и y_0 из M будемиметь

$$\rho(x_0 y_0^{-1} E, E) \leqslant \rho(y_0^{-1} E, E) + \rho(x_0^{-1} E, E) =$$

$$= \rho(y_0 E, E) + \rho(x_0 E, E) < \varepsilon,$$

откуда следует, что $MM^{-1} \subset N.$

Если $N \in \mathbf{N}$ и $x \in X_y$ то, в силу теоремы 1, существует измеримое множество E конечной положительной меры, такое, что $EE^{-1} \subset N.$ Применив к множеству $(xE)(xE)^{-1},$ принадлежащему классу **А**, теорему 2, мы обнаружим существование множества M из **N**, которое удовлетворяет условию

$$\mathrm{M} \subset (xE)(xE)^{-1} = xEE^{-1}x^{-1} \subset xNx^{-1}.$$

Наконец, если $N = \{x : \rho(xE, E) < \varepsilon\} \in \mathbf{N}$ и $x_0 \in N,$ то $\rho(x_0 E, E) < \varepsilon.$

Так как $\varepsilon < 2\mu(E),$ то $\varepsilon - \rho(x_0 E, E) < 2\mu(x_0 E);$ отсюда, если

$$M = \{x : \rho(xx_0 E, x_0 E) < \varepsilon - \rho(x_0 E, E)\},$$

то $M \in$ N. Так как

$$Nx_0^{-1} = \{xx_0^{-1} : \rho(xE, E) < \varepsilon\} = \{x : \rho(xx_0 E, E) < \varepsilon\},$$

то, каково бы ни было x из M,

$$\rho(xx_0E, E) \leqslant \rho(xx_0E, x_0E) + \rho(x_0E, E) <$$
$$< \varepsilon - \rho(x_0E, E) + \rho(x_0E, E) = \varepsilon.$$

Таким образом, $x \in Nx_0^{-1}$, следовательно, $Mx_0 \subset N.$

Теорема 6. *Если X — измеримая группа со свойством отделимости, то X локально ограничена относительно своей вейлевской топологии. Если измеримое множество E содержит непустое открытое множество, то* $\mu(E) > 0$; *если измеримое множество E*

ограничено, то $\mu(E) < \infty.$

Доказательство. Пусть N_0 — произвольное множество конечной меры из **N** (см. теорему 3), а M_o — множество из **N**, такое, что $M_0M_0^{-1} \subset N_0.$ Покажем, что множество M_o ограничено. Допустим противное: тогда существует множество N из **N** и последовательность $\{x_n\}$ элементов из M_o, такие, что

$$x_{n+1} \overline{\in} \bigcup_{i=1}^{n} x_iN, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Согласно теореме 1, существует множество E конечной положительной меры, обладающее следующими свойсгвами:
$E \subset M_0^{-1}$ и $EE^{-1} \subset N.$
Последовательность $\{ x_n \}$ такова, что множества $x_1 E, x_2E,\ldots$ не пересекаются, а так как $x_nE \subset M_0M_0^{-1} \subset N_0$, то $\mu(N_0) = \infty.$ Полученное противоречие доказывает первое утверждение теоремы.

То, что измеримое множество с непустым открытым ядром имеет положительную меру, вытекает из теоремы 3. Последнее утверждение доказываемой теоремы следует из теоремы 3 и из того факта, что ограниченное множество может быть покрыто конечным числом множеств вида xN, где N принадлежит классу **N**.

Результат, содержащийся в теореме 6, в известном смысле нельзя улучшить. Однако ему можно придать более полезную форму, если воспользоваться тем, что всякая локально ограниченная группа может быть представлена как всюду плотная подгруппа некоторой локально компактной группы. Соответствующая формулировка содержится в теореме 8. Предварительно, однако, мы установим некоторый вспомогательный результат, касающийся произвольных (т. е. необязательно инвариантных слева или справа) бэровских мер в локально компактных группах.

Теорема 7. *Пусть* μ — *произвольная бэровская мера в локально компактной группе X. Если Y — множество всех тех элементов y, для которых* $\mu(yE) = \mu(E)$ *при любом бэровском множестве E, то Y представляет собой замкнутую подгруппу группы X.*

Доказательство. То, что Y является подгруппой, тривиально. Для того чтобы доказать, что Y замкнуто, рассмотрим произвольный фиксированный элемент y_0 из $\overline{Y}$ и произвольное компактное бэровское множество C. Если U—какое-нибудь открытое бэровское множество, содержащее y_0C, то существует окрестность V единичного элемента e, такая, что $Vy_0C \subset U$. Так как Vy_0 представляет собой окрестность элемента y_0, то Y содержит элемент y, такой, что $y \in Vy_0$.

Так как $yC \subset Vy_0C \subset U$, то

$$\mu(C) = \mu(yC) \leqslant \mu(U),$$

откуда, в силу регулярности меры μ, получаем $\mu(C) \leqslant \mu(y_0C)$.

Применив это рассуждение к элементу y_0^{-1} и множеству y_0C (вместо y_0 и C), мы получим обратное неравенство. Итак, $\mu(C) = \mu(y_0C)$, каково бы ни было C. Отсюда следует, что $\mu(E) = \mu(y_0E)$ для любого бэровского множества E, т. е. элемент y_0 принадлежит множеству Y.

Массивной подгруппой мы будем называть подгруппу, одновременно являющуюся массивным подмножеством группы (см. § 4.1).

Теорема 8. *Если* $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — *измеримая группа, обладающая свойством отделимости, то существует локально компактная топологическая группа* $\hat{X}$ *с мерой Хаара* $\hat{\mu}$, *определенной в классе* $\hat{\mathbf{S}}$ *всех бэровских множеств, такая, что X представляет собой массивную подгруппу группы* $\hat{X}$, $\mathbf{S} \supset \hat{\mathbf{S}} \cap X$ *и* $\mu(E) = \hat{\mu}(\hat{E})$, *коль скоро* $\hat{E} \in \hat{\mathbf{S}}$ *и* $E = \hat{E} \cap X$.

Доказательство. Пусть $\hat{X}$ —пополнение группы X относительно ее вейлевской топологии. Тогда $\hat{X}$ будет представлять собой локально компактную группу, содержащую X в качестве плотной подгруппы. Рассмотрим класс всех тех множеств $\hat{E}$ в $\hat{X}$, для которых $\hat{E} \cap X \in \mathbf{S}$. Ясно, что этот класс является σ-кольцом; чтобы показать, что это σ -кольцо содержит все бэровские множества, мы установим, что оно содержит некоторый базис группы $\hat{X}$.

Пусть $\hat{x}$ —произвольный элемент группы $\hat{X}$, а $\hat{U}$ —произвольная окрестность единичного элемента $\hat{e}$ в $\hat{X}$. Возьмем окрестность $\hat{V}$ элемента $\hat{e}$, такую, что $\hat{V}^{-1}\hat{V} \subset \hat{U}$. Так как $\hat{V} \cap X$ представляет собой открытое множество в X, то $\hat{V} \cap X$ содержит некоторое измеримое открытое (в X) множество W. Так как (согласно определению группы $\hat{X}$) топология в X является относительной топологией X как подпространства пространства $\hat{X}$, то в $\hat{X}$ существует такое открытое множество $\hat{W}$, что $W = \hat{W} \cap X$...

Множество $\hat{W}$ можно всегда заменить множеством $\hat{W} \cap \hat{V}$, поэтому, не нарушая общности, мы можем сразу предположить, что $\hat{W} \subset \hat{V}$. В силу того, что X плотно в $\hat{X}$, в X существует такая точка x, что $x \in \hat{x}\,\hat{W}^{-1}$; отсюда

$$\hat{x} \in x\hat{W} \subset \hat{x}\,\hat{W}^{-1}\hat{W} \subset \hat{x}\,\hat{V}^{-1}\hat{V} \subset \hat{x}\,\hat{U}.$$

Определим теперь на множествах $\hat{E}$ из $\hat{\mathbf{S}}$ меру $\hat{\mu}$, положив

$\hat{\mu}(\hat{E}) = \mu(\hat{E} \cap X)$. Легко видеть, что $\hat{\mu}$ оказывается бэровской мерой в $\hat{X}$. Так как $\hat{\mu}(x\hat{E}) = \hat{\mu}(\hat{E})$, когда $x \in X$ и $\hat{E} \in \hat{S}$, то, в силу теоремы 7, мера $\hat{\mu}$ инвариантна слева. Согласно теореме единственности, $\hat{\mu}$ совпадает на $\hat{S}$ с мерой Хаара в группе $\hat{X}$. Отсюда следует, что если $\hat{E} \in \hat{S}$ и $\hat{E} \cap X = 0$, то $\hat{\mu}(\hat{E}) = \mu(\hat{E} \cap X) = 0$, т. е. множество *X* массивно в $\hat{X}$.

1. Пусть *X*—локально компактная топологическая группа, **S** — класс всех ее бэровских множеств, μ— заданная на **S** мера Хаара. Пусть, далее, $\tilde{X} = X \times X$ и $\tilde{S}$—класс всех множеств вида *E*×*X,* где *E* ∈ **S**. Если $\tilde{\mu}(E \times X) = \mu(E)$, то $(\tilde{X}, \tilde{S}, \tilde{\mu})$ оказывается измеримой группой, не обладающей свойством отделимости. Какой степенью общности обладает этот прием построения измеримых групп без свойства отделимости?

2. Если *X*—измеримая группа со свойством отделимости, то множество *E* в *X* ограничено (в смысле вейлевской топологии в *X)* тогда и только тогда, когда существует измеримое множество *A* конечной положительной меры, такое, что *EA* содержится в измеримом множестве конечной меры.

3. Справедлива ли теорема 7 для борелевских мер?

4. Всегда ли инвариантна подгруппа *Y,* описанная в теореме 7?

5. В предположениях теоремы 7, положим $f(x) = \mu(xE)$ для любого *x* из *X* и для произвольного бэровского множества *E*. Непрерывна ли функция *f*?

6. Приведем нетривиальный пример массивной подгруппы. Пусть *X*—числовая прямая, рассмотрим локально компактную топологическую группу *X*×*X*. Множество *B* в *X* назовем *линейно независимым,* если из соотношения вида $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0, \quad x_i \in B, \quad i = 1, \ldots, n,$ с рациональными r_i, следует, что $r_1 = \ldots = r_n = 0$:

а) Если E—борелевское множество в $X\times X$ положительной меры и B — линейно независимое множество в X мощности, меньшей мощности континуума, то существует такая, принадлежащая E, точка (x, y), что множество $B \cup \{x\}$ линейно независимо. [Указание. Можно указать такое y, при котором мера сечения E^y положительна, следовательно, E^y имеет мощность континуума.]

б) в $X\times X$ существует такое множество С, что (I) $C \cap E \neq 0$, каково бы ни было борелевское множество E в $X\times X$ положительной меры, (II) множество значений первой координаты точек из C линейно независимо, (III) с любой вертикальной прямой C имеет не более одной точки пересечения. [Указание. C можно построить с помощью трансфинитной индукции, вполне упорядочив класс всех борелевских множеств положительной меры в $X\times X$ и воспользовавшись только что полученным результатом „а".]

в) *Базисом Гамеля* называется линейно независимое множество B в X, обладающее следующим свойством: для всякого x из X в B существует такое конечное подмножество $\{x_1, \ldots, x_n\}$, что

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i,$$ где $\{r_1, \ldots, r_n\}$— некоторое множество

рациональных чисел. Представление x в виде линейной комбинации элементов из B с рациональными коэффициентами единственно, Всякое линейно независимое множество содержится в некотором базисе Гамеля. [Указание. Воспользоваться трансфинитной индукцией или леммой Цорна.]

г) В силу „б" и „в", в $X\times X$ существует множество С, обладающее свойствами (I), (II) и (III), указанными в „б", и такое, что множество B значений первой координаты точек из C образует базис Гамеля. Пусть $$x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i,$$ где r_i рациональны, и

$$(x_i, y_i) \in C, \quad i = 1, \ \ldots, \ n;$$ положим

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i y_i.$$

Тогда множество $Z = \{(x, y) : y = f(x)\}$ (т. е. график функции f) представляет собой массивную подгруппу группы $X\times X$,

13.3. ФАКТОР-ГРУППЫ

Всюду в этом параграфе предполагается, что *X*—локально компактная топологическая группа; μ— мера Хаара в *X; Y*—некоторый компактный нормальный делитель группы *X;* ν — мера Хаара в *Y,* такая, что $\nu(Y) = 1$; π — проекция группы *X* на фактор-группу $\hat{X} = X/Y.$

Большинство результатов этого параграфа справедливо в предположении, что *Y* — замкнутый (не обязательно компактный) нормальный делитель. Однако мы ограничиваемся случаем компактного *Y,* во первых, потому, что это предположение достаточно для наших целей, а во-вторых, потому, что доказательства в этом случае, сравнительно с общим, несколько проще.

Теорема 1. *Если компактное множество C в X представляет собой соединение произвольного класса смежных подмножеств по Y, а U — открытое множество, содержащее C, то в* $\hat{X}$ *существует такое открытое множество* $\hat{V}$, *что*

$$C \subset \pi^{-1}(\hat{V}) \subset U.$$

Доказательство. Не нарушая общности, можно предположить, что *U* — ограниченное множество. Если мы положим $X_0 = \overline{UY}$, то множество X_0 окажется компактным. Мы утверждаем, что X_0, так же как *UY,* является соединением некоторого класса смежных подмножеств относительно *Y.* Для того чтобы это установить, допустим, что $x_1 \in X$ и $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ (так что $x_1^{-1} x_2 \in Y$); мы должны показать, что при этом $x_2 \in X_0$. Если *V*—произвольная окрестность точки x_2, то $V x_2^{-1} x_1$ является окрестностью точки x_1 и, следовательно, $UY \cap V x_2^{-1} x_1 \neq 0$. Так как $x_1^{-1} x_2 \in Y$, то

$$UY \cap V = UY x_1^{-1} x_2 \cap V x_2^{-1} x_1 x_1^{-1} x_2 =$$
$$= (UY \cap V x_2^{-1} x_1) x_1^{-1} x_2 \neq 0;$$

окрестность *V* точки x_2 была выбрана произвольно, поэтому $x_2 \in X_0$.

Так как *C* является соединением некоторого класса смежных подмножеств по *Y,* то

$$\pi(X_0 - C) \cap \pi(C) = \pi((X_0 - U) \cap C) = 0.$$

Множества $\pi(X - C)$ и $\pi(C)$ компактны, а $\pi(U)$ представляет собой открытое множество, содержащее $\pi(C)$, поэтому в $\hat{X}$ существует такое открытое множество $\hat{V}$, что

$$\pi(C) \subset \hat{V} \subset \pi(U) \subset \pi(X_0) \text{ и } \hat{V} \cap \pi(X_0 - U) = 0.$$

Если $x \in \pi^{-1}(\hat{V})$, так что $\pi(x) \in \hat{V}$, то $\pi(x) \bar{\in} \pi(X_0 - U)$ и, следовательно, $x \bar{\in} X_0 - U$. Однако $x \in X_0$; отсюда следует, что $x \in U$. Таким образом,

$$C \subset \pi^{-1}(\hat{V}) \subset U.$$

Теорема 2. *Если* $\hat{C}$ *— компактное множество в* $\hat{X}$, *то* $\pi^{-1}(\hat{C})$ *представляет собой компактное множество в X; если* $\hat{E}$ *—бэровское (или борелевское) множество в* $\hat{X}$, *то* $\pi^{-1}(\hat{E})$ *представляет собой бэровское (соотв. борелевское) множество в X.*

Доказательство. Предположим, что **K** — какое-нибудь открытое покрытие множества $\pi^{-1}(\hat{C})$. При любом $\hat{x}$ из $\hat{C}$ множество $\pi^{-1}(\{\hat{x}\})$ представляет собой смежное подмножество по *Y*, следовательно, оно компактно; поэтому **K** содержит конечный подкласс $\mathbf{K}(\hat{x})$, такой, что $\pi^{-1}(\{\hat{x}\}) \subset U(\hat{x}) = \bigcup \mathbf{K}(\hat{x})$. В силу теоремы 1,

$$\pi^{-1}(\{\hat{x}\}) \subset V(\hat{x}) = \pi^{-1}(\hat{V}(\hat{x})) \subset U(\hat{x}),$$

где $\hat{V}(\hat{x})$—некоторое открытое множество в $\hat{X}$. Так как $\hat{C}$ компактно, то $\hat{C}$ содержит такое конечное подмножество $\{\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n\}$, что

$$\hat{C} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \hat{V}(\hat{x}_i);$$

отсюда

$$\pi^{-1}(\hat{C}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(\hat{x}_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup \mathrm{K}(\hat{x}_i),$$

следовательно, $\pi^{-1}(\hat{C})$ компактно.

Утверждение теоремы, касающееся бэровских и борелевских множеств, вытекает из первого, только что доказанного утверждения, а также из следующих замечаний: прообраз (при отображении π) множества типа G_δ является множеством типа G_δ; класс всех тех множеств в $\hat{X}$, прообразы которых принадлежат какому-либо фиксированному σ -кольцу, представляет собой σ-кольцо.

Из теоремы 2 следует, что если измеримость множеств, как в *X,* так и в $\hat{X}$, понимать в смысле Бэра или в смысле Бореля, то преобразование π оказывается измеримым. Таким образом, по отношению К измеримым множествам π^{-1} ведет себя удовлетворительно. А что происходит с мерой множеств при таком отображении? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 3. *Если* $\hat{\mu} = \mu\pi^{-1}$*,то* $\hat{\mu}$ *является мерой Хаара в* $\hat{X}$.

Доказательство. Так как прообразы (при отображении π) компактных множеств и непустых открытых множеств соответственно компактны и открыты, то $\hat{\mu}$ конечна на компактных множествах и положительна на непустых открытых борелевских множествах.

Остается доказать, что мера $\hat{\mu}$ инвариантна слева.

Пусть $\hat{E}$ —какое-нибудь борелевское множество в $\hat{X}$ и x_0 — такой элемент из *X,* что $\pi(x_0) = \hat{x}_0$. Если $x \in x_0\pi^{-1}(\hat{E})$, то, так как π является гомоморфизмом, $\pi(x) \in \hat{x}_0\hat{E}$ и

$$x_0\pi^{-1}(\hat{E}) \subset \pi^{-1}(\hat{x}_0\hat{E}).$$

Обратно, если $x \in \pi^{-1}(\hat{x}_0\hat{E})$, то $\pi(x) \in \hat{x}_0\hat{E}$ и

$$\pi(x_0^{-1}x) = \hat{x}_0^{-1}\pi(x) \in \hat{E}.$$

Отсюда следует, что $x_0^{-1}x \in \pi^{-1}(\hat{E})$ и, следовательно,

$$x \in x_0\pi^{-1}(\hat{E}).$$

Таким образом, мы показали, что

$$\pi^{-1}(\hat{x}_0\hat{E}) \subset x_0\pi^{-1}(\hat{E});$$

отсюда

$$\hat{\mu}(\hat{x}_0E) = \mu\pi^{-1}(\hat{x}_0\hat{E}) = \mu(x_0\pi^{-1}(\hat{E})) = \mu\pi^{-1}(\hat{E}) = \hat{\mu}(\hat{E}).$$

Теорема 4. *Если* $f \in \mathscr{L}_+(X)$ *и если*

$$g(x) = \int_Y f(xy)\,d\nu(y),$$

то $g \in \mathscr{L}_+(X)$, *и существует (единственная) функция* $\hat{g}$ *из* $\mathscr{L}_+(\hat{X})$ *такая, что g = gπ.*

Доказательство. Если $f_x(y) = f(xy)$, то, в силу непрерывности *f*, функция f_x непрерывна и, следовательно, интегрируема на *Y*. Функция *f* равномерно непрерывна, т. е. для всякого положительного числа е существует окрестность *U* единичного элемента, такая, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ для любых двух элементов x_1 и x_2, удовлетворяющих условию $x_1x_2^{-1} \in U$. При $x_1x_2^{-1} \in U$ имеем

$$(x_1y)(x_2y)^{-1} = x_1x_2^{-1} \in U,$$

откуда

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant \int_Y |f(x_1y) - f(x_2y)|\,d\nu(y) < \varepsilon;$$

итак, функция *g* непрерывна. Очевидно, что она неотрицательна; далее, так как $\{x : g(x) \neq 0\} \subset \{x : f(x) \neq 0\} \cdot Y$, то $g \in \mathscr{L}_+(X)$.

Если $\pi(x_1) = \pi(x_2)$, то $x_1^{-1}x_2 \in Y$ и, так как *ν* инвариантна слева,

$$g(x_1) = \int\limits_Y f(x_1 y)\,d\nu(y) = \int\limits_Y f(x_1(x_1^{-1}x_2 y))\,d\nu(y) = g(x_2).$$

Таким образом, равенство $\hat{g}(\hat{x}) = g(x)$, где $\hat{x} = \pi(x)$, однозначно определяет некоторую функцию $\hat{g}$ на $\hat{X}$. При этом, очевидно, $g = \hat{g}\pi$. Для любого открытого множества *M* на числовой прямой

$\{\hat{x} : \hat{g}(\hat{x}) \in M\} = \pi(\{x : g(x) \in M\})$

(см. теорему 1 § 8.1); поэтому, так как π— открытое отображение, функция $\hat{g}$ непрерывна. Так как те отображает ограниченное множество $\{x : g(x) \neq 0\}$ на некоторое ограниченное множество в $\hat{X}$, то $\hat{g} \in \mathscr{L}_+(\hat{X})$; единственность $\hat{g}$ обеспечивается тем, что те отображает *X* на все $\hat{X}$ целиком.

Теорема 5. *Если С — компактное бэровское множество в X и если* $g(x) = \nu(x^{-1}C \cap Y)$, *то существует (единственная) измеримая в смысле Бэра интегрируемая функция* $\hat{g}$ *на* $\hat{X}$, *такая, что* $g = \hat{g}\pi$. *Если С представляет собой соединение некоторого класса смежных подмножеств по Y, то* $\int \hat{g}\,d\hat{\mu} = \mu(C)$.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — убывающая последовательность функций из $\mathscr{L}_+(X)$, такая, что $\lim\limits_n f_n(x) = \chi_C(x)$ для всех *x* из *X*. Если

$$g_n(x) = \int\limits_Y f_n(xy)\,d\nu(y), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

то $\{g_n\}$ также представляет собой убывающую последовательность функций из $\mathscr{L}_+(X)$ (см. теорему 4) и, хотя бы в силу теоремы об ограниченно сходящихся последовательностях, для любого x из X

$$\lim_n g_n(x) = \int_Y \chi_C(xy)\, d\nu(y) = \int_Y \chi_{x^{-1}C}(y)\, d\nu(y) =$$

$$= \nu(x^{-1} C \cap Y) = g(x).$$

В силу теоремы 4, при любом целом положительном n существует функция $\hat{g}_n$ из $\mathscr{L}_+(\hat{X})$, такая, что $g_n = \hat{g}_n \pi$. Так как последовательность $\{\hat{g}_n\}$ — убывающая, то при любом x существует $\hat{g}(x) = \lim_n \hat{g}_n(x)$; при этом, очевидно, $g = \hat{g}\pi$.

Так как (см. теорему 3 § 8.1)

$$\int \hat{g}\, d\hat{\mu} = \int g\, d\mu = \int \nu(x^{-1} C \cap Y)\; d\mu(x) = \mu(C).$$

и

$$\{x : \nu(x^{-1}C \cap Y) \neq 0\} \subset \{x : x^{-1}C \cap Y\} = CY,$$

то, в силу того, что мера ν конечна, функция g интегрируема. Пусть, наконец, C представляет собой соединение произвольного класса смежных подмножеств по Y; тогда

$$x^{-1} C \cap Y = \begin{cases} Y, & \text{если } x \in C, \\ 0, & \text{если } x \overline{\in} C. \end{cases}$$

Отсюда

$$\int \hat{g}\, d\hat{\mu} = \int g\, d\mu = \int \nu(x^{-1} C \cap Y)\; d\mu(x) = \mu(C).$$

Теорема 6. *Если для любого бэровского множества E в X*

$$g_E(x) = \nu(x^{-1} E \cap Y),$$

то существует (единственная) измеримая в смысле Бэра функция $\hat{g}_E$ на $\hat{X}$, такая, что $g_E = \hat{g}_E \pi$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что (в силу определения топологии в Y) $x^{-1} E \cap Y$ всегда представляет собой бэровское множество в Y, так что $g_E(x)$ определено при любом x.

Пусть **E** — класс всех тех множеств *E,* для которых справедливо утверждение теоремы. Тогда, согласно теореме 5, все компактные бэровские множества будут принадлежать **E**. В силу элементарных свойств (конечной) меры *v*, класс **E** замкнут относительно образования собственных разностей, соединений конечного числа непересекающихся множеств, а также соединений и пересечений монотонных последовательностей множеств. Отсюда следует, что **E** охватывает все бэровские множества.

Теорема 7. *Пусть E — любое бэровское множество в X. Если* $\hat{g}_E$ *—(единственная) измеримая в смысле Бэра функция на* $\hat{X}$, *такая, что*

$$\hat{g}_E(\pi(x)) = \nu(x^{-1}E \cap Y) = g_E(x)$$

при любом x из X, то

$$\int \hat{g}_E \, d\hat{\mu} = \mu(E).$$

Доказательство. Для произвольного бэровского множества *E* положим

$$\lambda(E) = \int \hat{g}_E \, d\hat{\mu} = \int \nu(x^{-1}E \cap Y)\, d\mu(x).$$

Так как функция λ, очевидно, неотрицательна и конечна на любом компактном бэровском множестве (см. теорему 5), то λ представляет собой бэровскую меру в *X*. Пусть $x_0 \in X$; тогда

$$\lambda(x_0E) = \int g_{x_0E}(x)\, d\mu(x) = \int \nu(x^{-1}x_0E \cap Y)\, d\mu(x) =$$
$$= \int \nu((x_0^{-1}x)^{-1}E \cap Y)\, d\mu(x) = \int g_E(x_0^{-1}x)\, d\mu(x) =$$
$$= \int g_E(x)\, d\mu(x) = \lambda(E),$$

т. е. λ инвариантна слева. Согласно теореме единственности, $\lambda(E) = c\mu(E)$, где *c* — некоторая постоянная.

Если C—компактное множество, являющееся соединением какого-нибудь класса смежных подмножеств по *Y*, то, в силу теоремы 5, $\lambda(C) = \mu(C)$, а так как существуют такого рода множества C, для которых $\mu(C) > 0$, то *c* = 1.

13.4. РЕГУЛЯРНОСТЬ МЕРЫ ХААРА

Цель этого параграфа состоит в доказательстве того, что всякая мера Хаара регулярна. Здесь всюду (кроме последней теоремы) предполагается, что X—локально компактная и σ-компактная топологическая группа, а μ — инвариантная слева бэровская мера в X, не равная тождественно нулю (и, следовательно, принимающая положительные значения на всех непустых открытых бэровских множествах).

Полезно ввести следующее вспомогательное понятие: σ -кольцо **T** бэровских множеств назовем *инвариантным* σ *-кольцом,* если $xE \in$ **T** тогда, когда $E \in \mathbf{T}$ и $x \in X$, Так как класс всех бэровских множеств представляет собой инвариантное σ -кольцо и пересечение любой системы инвариантных σ -колец также является инвариантным σ -кольцом, то, каков бы ни был класс **E** бэровских множеств, существует инвариантное σ -кольцо, *порожденное* классом **E** (пересечение всех инвариантных σ -колец, содержащих **E**).

Теорема 1. *Если* **E** *— какой-нибудь класс бэровских множеств, а* **T** *— порожденное им инвариантное* σ *-кольцо, то* **T** *совпадает с* σ *-кольцом* **T**, *порожденным классом* $\{xE : x \in X,\ E \in \mathbf{E}\}$.

Доказательство. Так как $xE \in T$ при любых x из X и E из **T**, то $\mathbf{T_0} \subset \mathbf{T}$; достаточно поэтому доказать, что σ -кольцо $\mathbf{T}_0$ инвариантно. Пусть x_0 — какой-нибудь фиксированный элемент группы X. Класс всех тех бэровских множеств F, для которых $x_0 F \in \mathbf{T}_0$, представляет собой σ -кольцо; так как $x_0(xE) = (x_0x)E \in \mathbf{T}_0$, каковы бы ни были x из X и E из **E**, то это σ -кольцо содержит $\mathbf{T}_0$. Иначе говоря, мы доказали, что если $F \in \mathbf{T}_0$, то $x_0 F \in \mathbf{T}_0$.

Теорема 2. *Если* **E** *— какой-нибудь счетный класс бэровских множеств конечной меры и* **T** *— инвариантное* σ *-кольцо, порожденное классом* **E**, *то метрическое пространство* $\mathcal{G}$ *всех множеств, принадлежащих* **T** [*с метрикой* $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$], *сепарабельно.*

Доказательство. Так как всякое подпространство сепарабельного метрического пространства сепарабельно, то достаточно доказать, что существует σ -кольцо $\mathbf{T}_0$, содержащее **T** и обладающее счетным числом производящих элементов конечной меры (см. теорему 2 § 8.2). X представляет собой бэровское множество, поэтому $X\times E$ есть бэровское множество в $X\times X$, каково бы ни было бэровское множество E из **E**. Если мы положим $S(x, y) = (x, xy)$, то $S(X \times E)$

также будет бэровским множеством при любом E из Е. Следовательно, для любого E из **E** найдется счетный класс $\mathbf{R}_E$ прямоугольников конечной меры, такой, что $S(X \times E) \in \mathbf{S}(\mathbf{R}_E)$. Если T_o — σ-кольцо, порожденное классом сторон всех прямоугольников из всевозможных $\mathbf{R}_E$, $E \in$ **E,** то, очевидно,

$$S(X \times E) \in \mathbf{T}_0 \times \mathbf{T}_0,$$

каково бы ни было E из **E**. Так как любое сечение множества из $\mathbf{T}_0 \times \mathbf{T}_0$ принадлежит $\mathbf{T}_o$, то для произвольного E из **E** и произвольного x из X

$$xE = x(X \times E)_x = (S(X \times E))_x \in \mathbf{T}_0,$$

откуда, в силу теоремы 1, следует, что $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}_0$. •

Теорема 3. *Если* **T** — *инвариантное* σ *-кольцо, f—измеримая* (**T**) *функция из* $\mathcal{L}$, *а y — элемент из X, такой, что* $\rho(yE, E) = 0$ *для любого E из* **T**, *то* $f(y^{-1}x) = f(x)$ *при любом x из X.*

Доказательство. Пусть E — произвольное множество конечной меры из **T**. Тогда

$$0 = \rho(yE, E) = \int |\chi_{yE}(x) - \chi_E(x)| \, d\mu(x) =$$

$$= \int |\chi_E(y^{-1}x) - \chi_E(x)| \, d\mu(x).$$

Отсюда следует, что

$$\int |g(y^{-1}x) - g(x)| \, d\mu(x) = 0$$

для любой измеримой (**T**) интегрируемой простой функции g. Так как f может быть аппроксимирована функциями такого рода, то

$$\int |f(y^{-1}x) - f(x)| \, d\mu(x) = 0.$$

Подинтегральная функция в последнем равенстве принадлежит $\mathcal{L}_+$, поэтому требуемое тождество следует из теоремы 2 § 11.6.

Теорема 4. *Пусть* **T** — *инвариантное* σ *-кольцо, порожденное принадлежащими ему множествами конечной меры и содержащее хотя бы одно множество положительной меры. Если* **E** — *класс множеств, плотный в метрическом пространстве множеств конечной меры из* **T**, *и если*

$$Y = \{ y : \rho(yE, E) = 0,\ E \in \mathbf{E} \},$$

то Y представляет собой компактный нормальный делитель в X.

Доказательство. Если $Y_0 = \{y : \rho(yE, E) = 0, E \in \mathbf{T}\}$, то, очевидно, $Y_0 \subset Y$. С другой стороны, если E_o— множество конечной меры, принадлежащее **T**, то для произвольного положительного ε существует множество *E* из **E**, такое, что

$\rho(E_0, E) < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда, если $y \in Y$, то

$$0 \leqslant \rho(yE_0, E_0) \leqslant \rho(yE_0, yE) + \rho(yE, E) + \rho(E, E_0) < \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то $y \in Y_0$, т. е. $Y = Y_o$.

Если y_1 и y_2— точки из *Y*, а *E* принадлежит классу **T**, то

$$0 \leqslant \rho(y_1^{-1} y_2 E, E) \leqslant \rho(y_1^{-1} y_2 E, y_2 E) + \rho(y_2 E, E).$$

Так как $y_2 E \in \mathbf{T}$ и $\rho(y_1^{-1} y_2 E, y_2 E) = \rho(y_2 E, y_1 y_2 E)$, то $y_1^{-1} y_2 \in Y$; таким образом, *Y* является подгруппой группы *X*.

Пусть $y \in Y, x \in X$ и $E \in \mathbf{E}$, тогда $xE \in \mathbf{T}$ и

$\rho(x^{-1} yxE, E) = \rho(yxE, xE) = 0$; следовательно, *Y* представляет собой нормальный делитель.

Если E_o — множество из **T**, ограниченное и положительной меры, то равенство $\rho(yE_0, E_0) = 0$, выполняющееся при любом *y* из *Y*, влечет за собой соотношение $yE_0 \cap E_0 \neq 0$. Таким образом, $y \in E_0 E_0^{-1}$ и, следовательно, *Y* заключено в ограниченном множестве $E_0 E_0^{-1}$. Докажем, что *Y* замкнуто (и, следовательно, компактно); для этого достаточно заметить, что

$$Y = \bigcap_{E \in \mathbf{E}} \{y : \rho(yE, E) = 0\},$$

и воспользоваться теоремой 1 § 13.1.

Для любого бэровского множества E в X существует компактный нормальный делитель Y, являющийся бэровским множеством, такой, что E представляет собой соединение некоторого класса смежных подмножеств по Y.

Доказательство. Пусть $\{C_i\}$ — последовательность компактных бэровских множеств, такая, что $E \in \mathbf{S}(\{C_i\})$ и хотя бы одно из C_i имеет положительную меру. Для любого *f* возьмем убывающую последовательность функций $\{f_{ij}\}$ из $\mathscr{L}_+(X)$, сходящуюся к $\chi_{C_i}(x)$ при любом x из X. Каково бы ни было положительное рациональное число r, $\{x : f_{ij}(x) \geqslant r\}$ представляет собой компактное бэровское множество; инвариантное σ-кольцо, порожденное классом всех множеств такого вида, обозначим **Т**. Согласно теореме 2, метрическое пространство, образованное множествами конечной меры, принадлежащими Т, сепарабельно; возьмем последовательность $\{E_n\}$, плотную в этом метрическом пространстве. Если

$$Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{y : \rho(yE_n, E_n) = 0\},$$

то, в силу теоремы 4, Y будет компактным нормальным делителем группы X и, по теореме 1 § 13.1, бэровским множеством. Так как все f_{ij} измеримы (**Т**), то, в силу теоремы 3, $f_{ij}(y^{-1}x) = f_{ij}(x)$ при любых y из Y и x из X. Отсюда следует, что $\chi_{C_i}(y^{-1}x) = \chi_{C_i}(x)$, т. е. $yC_i = C_i$ при любом y из Y и любом i=l, 2, ... Так как, каков бы ни был y из Y, класс всех тех множеств F, для которых $yF = F$, представляет собой σ-кольцо, то $yE = E$. Следовательно, $E = YE = \bigcup_{x \in E} Yx$, т. е. E является соединением некоторого класса смежных подмножеств по нормальному делителю Y.

Теорема 6. *Если {e} — бэровское множество, то группа X сепарабельна.*

Доказательство. Пусть $\{U_n\}$ — последовательность ограниченных открытых множеств, такая, что $\{e\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Как мы видели выше, можно, не нарушая общности, предположить, что

$$\overline{U}_{n+1} \subset U_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Существует последовательность компактных множеств $\{C_i\}$, такая, что $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Так как каждое C_i компактно, то для любых i и nможно выделить в C_i такое конечное подмножество $\{x_{ij}^{(n)}\}$, что

$$C_i\subset\bigcup_j x_{ij}^{(n)}U_n\,.$$

Докажем теперь, что счетный класс $\{x_{ij}^{(n)}U_n\}$ представляет собой базис группы X. Покажем сначала, что если U—произвольная окрестность e, то $e\in U_n\subset U$ при некотором значении n. В самом деле, так как

$$\{e\}=\bigcap_n U_n=\bigcap_n \overline{U}_n$$

и $e\in U$, то

$$\bigcap_n(\overline{U}_n-U)=\bigcap_n \overline{U}_n-U=0.$$

Так как $\{\overline{U}_n-U\}$—убывающая последовательность компактных множеств с пустым пересечением, то при некотором значении n множество U_n—U (содержащееся в $\overline{U}_n-U)$ оказывается пустым. Предположим, что x — произвольный элемент из X, а V—любая его окрестность. Так как $x^{-1}V$ является окрестностью e, то существует такая окрестность U элемента e, что $U^{-1}U\subset x^{-1}V$. Как показано в предыдущем абзаце, $e\in U_n-U$ при некотором n. Так как

$x\in\bigcup_{i=1}^{n} C_i$, то $x\in C_i$ при некотором i и, следовательно,

$x\in x_{ij}^{(n)}U_n$ при некотором j. Отсюда следует, что $x_{ij}^{(n)}\in xU_n^{-1}$ и

$$x\in x_{ij}^{(n)}U_n\subset xU_n^{-1}U_n\subset xU^{-1}U\subset xx^{-1}V=V.$$

Теоремы 5 и 6 дают следующий весьма полезный результат.

Теорема 7. *Для любого бэровского множества E в X существует такой компактный нормальный делитель Y, что E представляет* *собой соединение некоторого класса смежных подмножеств по Y, а фактор-группа X/Y сепарабельна.*

Доказательство. В силу теоремы 5, существует компактный нормальный делитель *Y*, являющийся одновременно бэровским множеством, такой, что *E* представляет собой соединение некоторого класса смежных подмножеств по *Y*. Пусть $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, где $\{U_n\}$ — последовательность открытых множеств. Тогда для любого целого положительного *n* в фактор-группе $\hat{X} = X/Y$ существует такое открытое множество $\hat{U}_n$, что

$$Y \subset \pi^{-1}(\hat{U}_n) \subset U_n,$$

где π — проекция *X* на $\hat{X}$ (см. теорему 1 § 13.3).

Отсюда $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi^{-1}(\hat{U}_n)$ и, следовательно

$$\{\hat{e}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n;$$

сепарабельность группы $\hat{X}$ следует из теоремы 6.

Теорема 8. *Всякая мера Хаара регулярно пополнима.*

Доказательство. Достаточно показать, что в любом ограниченном открытом множестве *U* содержится такое бэровское множество *E,* что *U* — *E* может быть покрыто бэровским множеством меры нуль. Для заданного *U* выберем бэровское множество $E(\subset U)$ таким образом, чтобы значение μ(*E*) было наибольшим. Согласно теореме 7, в *X* содержится компактный нормальный делитель *Y,* такой, что *E* представляет собой соединение некоторого класса смежных подмножеств по *Y*, и фактор-группа $\hat{X} (= X/Y)$ сепарабельна.

Положим $F = \pi^{-1}\pi(U - E)$, где π — проекция *X* на $\hat{X}$; покажем, что *F* является бэровским множеством меры нуль. В силу того, что *E* есть соединение смежных подмножеств по *Y*, имеет место равенство $\pi(U - E) = \pi(U) - \pi(E)$; будучи открытым множеством в сепарабельном пространстве, *π(U)* является бэровским множеством в $\hat{X}$ (см. теорему 5 § 11.1). Из равенства $F = \pi^{-1}\pi(U) - E$ вытекает, что и *F* представляет собой бэровское множество.

Так как открытые бэровские множества в *X* образуют базис, то для всякой точки *x* из *U—E* существует открытое бэровское множество *V(x),* такое, что $x \in V(x) \subset U$. Класс множеств $\{\pi(V(x)) : x \in V - E\}$ образует открытое покрытие множества $\pi(U - E)$, поэтому, в силу сепарабельности $\hat{X}$, существует такая последовательность точек $\{x_i\}$ из *U—E*, что

$$\pi(U - E) \subset \bigcup_i \pi(V(x_i)).$$

Так как $\pi(U - E) = \pi(U) - \pi(E)$, то

$$\pi(U - E) \subset \left(\bigcup \pi(V(x_i))\right) - \pi(E) = \bigcup_i \pi(V(x_i) - E).$$

Отсюда следует, что для доказательства теоремы достаточно теперь установить равенство

$$\mu(\pi^{-1}(\pi(V - E)) = 0$$

для любого открытого бэровского множества *V,* заключенного в U. Для того чтобы это доказать, заметим прежде всего, что проведенное нами рассуждение, относившееся к *U,* применимо и к V.

Если *V*—открытое бэровское множество, содержащееся в *U,* то, в силу выбора *E*, $\mu(V - E) = 0$. Пусть *ν* — мера Хаара в *Y*, причем $\nu(Y) = 1$; положим $\hat{\mu} = \mu\pi^{-1}$ и

$$g(x) = \nu(x^{-1}(V - E) \cap Y).$$

Тогда (см. теорему 7 § 13.3) существует (неотрицательная) измеримая в смысле Бэра функция $\hat{g}$ на $\hat{X}$, такая, что $g = \hat{g}\pi$ и

$$0 = \mu(V - E) = \int \hat{g}\, d\hat{\mu} = \int g\, d\mu \geqslant \int_{\pi^{-1}\pi(V - E)} \nu(x^{-1}(V - E) \cap Y)\, d\mu(x) \geqslant 0.$$

Из равенства

$$x^{-1}(V-E)\cap Y=(x^{-1}V\cap Y)-(x^{-1}E\cap Y)$$

следует, что если $x\in V$, то $e\in x^{-1}V\cap Y$, и если $x\overline{\in}E$, то

$x^{-1}E\cap Y=0$.

Таким образом, если $x\in V-E$, то $x^{-1}(V-E)\cap Y$

представляет собой непустое открытое множество в Y. Отсюда если

$x\in\pi^{-1}\pi(V-E)$, так что $\pi(x)=\pi(x_0)$ при некотором

x_0 из $V—E$, то

$$g(x)=\hat{g}(\pi(x))=\hat{g}(\pi(x_0))=g(x_0)>0$$

и, в силу теоремы 4 §5.3, $\mu(\pi^{-1}\pi(V-E))=0$.

Теорема 9. *Любая инвариантная слева борелевская мера* μ *в произвольной локально компактной (не обязательно* σ*-компактной) топологической группе X регулярно пополнима.*

Доказательство. Для любого борелевского множества E в X существует такая σ -компактная открытая подгруппа Z, что $E\subset Z$. Согласно теореме 8, мера μ регулярно пополнима на Z, поэтому Z содержит подмножества A и /?, являющиеся бэровскими множествами в Z и обладающие следующими свойствами:

$$A\subset E\subset B \quad \text{и} \quad \mu(B-A)=0.$$

Так как подгруппа Z одновременно замкнута и открыта в X, то A и B представляют собой бэровские множества также и в X.

Литература

1. Александров П.С., Колмогоров А. Введение в теорию функций действительного переменного. Изд.3-е, переработ. М. - Л., Гостехтеориздат., 1938г.

2. Брудно А.Л. Теория функций действительного переменного. Избранные главы.М., "Наука", 1971

3. Гливенко В.И. Интеграл Стилтьеса. - М., 1936, 216с.

4. Гохман Э.Х. Интеграл Стилтьеса и его приложения. Государственное издательство физ. - мат. литературы, М., 1958

5. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. - М.: Издательство "Факториал Пресс", 2002. - 160с.

6. Камке Э. Интеграл Лебега-Стилтьеса. Перевод с немецкого Г.П. Сафроновой. Под ред. И.П. Натансона. - М.: Государственное издательство физ. - мат. литературы, 1959г.

7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: Учебник для вузов. - 6-е изд., испр. - М.: Наука, Главная редакция физ. - мат. Литературы, 1989. - 624 с.

8. Леонтьева Т.А. и др. Задачи по теории функций действительного переменного: Учеб. Пособие по спец. "Математика"/ Панферов В.С., Серов В.С. - М.: Изд-во МГУ, 1997 - 208с.

9. Макаров И.П. Теория функций действительной переменной. Под ред. И.Я. Верченко - М.: Государственное издательство "Высшая школа" - 1965

10. Медведев Ф.А. Развитие понятия интеграла. - М., "Наука", 1974г.

11. Песин И.Н. Развитие понятия интеграла, М., "Наука", 1966. - 207с.

12. Самородницкий А.А. Теория меры/ Сыктывкар. Гос. Университет. - Л.: Издательство ЛГУ, 1990. - 267с.

13. Теория функций вещественной переменной. И.П. Натансон. Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 1974

14. Теория функций и функциональный анализ: [Сборник статей/ Науч. ред. проф. Б.М. Гагаев]. - Казань: Издательство Казанского университета, 1976г. - 98с.

15. Тимофеев А.Ф. Интегрирование функций. М. - Л. Издательство технико-теоретической литературы, 1948

16. Толстов Г.П. Мера и интеграл. Главная редакция физ. - мат. Литературы, "Наука", 1976г

17. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В трех томах. Том III/ - СПб.: Издательство Лань, 1997. - 672с.

18. Фролов Н.А. Теория функций действительного переменного. Учебное пособие для пединститутов. Изд-во 2-е, М., Учпедгиз, 1961

19. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т.2. Пер. с латинского. - М., Гостехтеориздат., 1957. - 368с.

20. go. mail

21. www.aggregateria

22 Кац Б.А. *Об интегрировании по неспрям.ляемой кривой //* Вопр. мат., мех. сплош. сред и применения мат. методов в стр-ве. - М.: МИСИ, 1992. - С. 63-69.
23 Кац Б.А. *Об одной версии краевой задачи Римана на фрактальной кривой* // Изв. вузов. Математика. - 1994. - №4. С. 10-20.

- *Вулих, Б. З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной (введение в теорию интеграла). — М.: Наука, 1973. — 352 с.

- П. Халмош. Теория меры. М.: Издательство иностранной литературы, 1953. — 282 с. http://icm.krasn.ru/refextra.php?id=3787 (книга в 2011 году является библиографической редкостью)
- А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа Наука, 1976.
- Богачев В. И., Основы теории меры, 2-е изд., в двух томах, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Москва-Ижевск, 2006.
- В. И. Богачев, О. Г. Смолянов. Действительный и функциональный анализ. Издательства: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009 г. 724 стр. ISBN 978-5-93972-742-6.
- Богачев В. И., Гауссовские меры, Наука, Москва, 1997.
- Богачев В. И., Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Москва, 2008.