МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ І.І. МЕЧНИКОВА

КУСІК *Людмила Ігорівна*

УДК 517.925

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Одеса – 2016

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі вищої і прикладної математики Одеського національного морського університету Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
ЄВТУХОВ В'ячеслав Михайлович,
Одеський національний університет
імені І.І. Мечникова,
завідувач кафедри диференціальних рівнянь.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
ПЕТРИШИН Роман Іванович,
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, перший проректор;

доктор фізико-математичних наук, професор
ТЕПЛІНСЬКИЙ Юрій Володимирович,
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, завідувач кафедри математики.

Захист відбудеться «_7_» _жовтня_ 2016 р. о _15^{00}_ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К41.051.05 при Одеському національному університеті імені І.І. Мечникова за адресою: 65026, м. Одеса, вул. Дворянська, 2, Інститут математики, економіки, механіки, ауд. 73.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Одеського національного університету імені І.І. Мечникова (65026, м. Одеса, вул. Преображенська, 24).

Автореферат розісланий «_6_» _вересня_ 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради, Вайсфельд Н.Д.
доктор фіз.-мат. наук, професор

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Потреби сучасної науки призводять до необхідності подальшого розвитку асимптотичної теорії істотно нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь. Важливу роль у розробці методів дослідження поведінки розв’язків нелінійних рівнянь зіграли отримані з кінця XIX по кінець XX століття результати для рівняння Емдена – Фаулера і узагальнених рівнянь типу Емдена–Фаулера другого і вищих порядків. Серед цих робіт слід особливо відзначити праці Р. Фаулера, Ф.В. Аткінсона, І.Т. Кігурадзе, Т.А. Чантурія, С. Белогорця (S. Belohorec), С.Д. Талиаферро (S.D. Taliaferro), Дж. Вонга (J.S.W. Wong), О.В. Костіна, В.М. Євтухова. Дослідження вказаних, а також багатьох інших авторів, що виконані для нелінійних диференціальних рівнянь, були систематизовані і повною мірою відображені у монографії І.Т. Кігурадзе и Т.А. Чантурія "Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений" (М.: Наука. 1990). У цій монографії І.Т. Кігурадзе була запропонована класифікація нелінійних рівнянь за осциляційними властивостями їх розв’язків, вказані умови існування правильних і сингулярних розв’язків (першого і другого родів), двосторонні асимптотичні оцінки для правильних кнезеровських, швидко зростаючих, а також сингулярних розв’язків, наведені умови існування розв’язків зі степеневою асимптотикою в околі нескінченності. Крім того, тут наведено відомі результати про асимптотичну поведінку коливних і неколивних розв’язків узагальнених рівнянь типу Емдена – Фаулера другого порядку.

Для рівнянь n-го порядку зі степеневими нелінійностями в роботах О.В. Костіна був розроблений метод встановлення асимптотичних зображень, що базується на використанні формул Г. Харді. Для узагальнених рівнянь типу Емдена–Фаулера n-го порядку В.М. Євтухов ввів достатньо широкий клас неколивних $P_\omega(\lambda_0)-$розв’язків, який за своїми асимптотичними властивостями при $t\uparrow\omega$ розпадається (в залежності від значень λ_0) на $n+2$ неперетинних множини. При цьому були встановлені необхідні і достатні умови існування кожного з $n+2$-х можливих типів $P_\omega(\lambda_0)-$розв’язків, а також асимптотичні зображення при $t\uparrow\omega$ таких розв’язків і їх похідних до порядку $n-1$ включно.

Залучення теорії І. Карамати (J. Karamata) правильно змінних функцій дало перші результати при встановленні В. Авакумовичем (V.G. Avakumovič, 1947 р.) асимптотичної поведінки прямуючих до нуля при $t\to+\infty$ розв’язків двочленних диференціальних рівнянь другого порядку з правильно змінним при $t\to+\infty$ коефіцієнтом і степеневою нелінійністю, а починаючи з 80-х рр. XX-го сторіччя у роботах В. Марича (V. Marič), М. Томича (M. Tomič), Дж. Вонга (J.S.W. Wong), С.Д. Талиаферро (S.D. Taliaferro)) — також з довільним знакосталим неперервним коефіцієнтом і правильно змінною в нулі нелінійністю.

В роботах В.М. Євтухова и Л.О. Кирилової вперше при $t\uparrow\omega$ $(\omega\le+\infty)$ була встановлена асимптотика $P_\omega(Y_0,\lambda_0)-$розв’язків двочленного рівняння другого порядку у випадку довільного знакосталого неперервного на проміжку $[t_0,\omega[$

коефіцієнта і правильно змінною при $y \to Y_0$ ($Y_0 \in \{0, \pm\infty\}$) нелінійністю. Клас $P_\omega\left(Y_0, \lambda_0\right)-$розв'язків є конкретизованим для такого типу рівнянь класом $P_\omega(\lambda_0)-$розв'язків, що був уведений раніше у роботах В.М. Євтухова при дослідженні асимптотики розв'язків двочленного рівняння n-го порядку зі степеневими нелінійностями. Зауважимо, що клас $P_\omega\left(Y_0, \lambda_0\right)-$розв'язків охоплює як розв'язки, що прямують до нуля при $t \uparrow \omega$, так і необмежені у деякому лівому околі ω. Крім того, отримані результати дозволяють описати і асимптотику сингулярних розв'язків таких рівнянь. Розроблена В.М. Євтуховим методика вивчення асимптотичної поведінки $P_\omega\left(Y_0, \lambda_0\right)-$розв'язків двочленних рівнянь пізніше була поширена в роботах В.М. Євтухова і М.О. Білозерової на диференціальне рівняння другого порядку більш загального виду

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y'),$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[-$ неперервна функція, функції $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[-$ двічі неперервне диференційовані, нормалізовані правильно змінні при $y^{(i)} \to Y_i$ $(i = 0,1)$ порядків σ_i $(i = 0,1)$, де $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} – однобічний окіл Y_i, $(i = 0,1)$, $\sigma_1 + \sigma_1 \neq 1$. Були отримані асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для кожного з типів $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язків і їх похідних першого порядку, а також необхідні і достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язків такого рівняння.

Надалі у роботах В.М. Євтухова і О.О. Козьми асимптотика $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язків була досліджена для рівнянь, що містять в правій частині суму доданків з нормалізованими правильно змінними відносно невідомої функції і її похідної першого порядку нелінійностями. В цих працях істотно використані встановлені умови, що гарантували еквівалентність при $t \uparrow \omega$ правої часті рівняння на кожному з можливих типів $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язків одному доданку.

Актуальною на теперішній час залишається проблема поширення методики дослідження $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язків двочленних рівнянь вказаних типів на рівняння другого порядку загального виду. В деякої мірі ця проблема є вирішеною у даному дисертаційному дослідженні.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках наукової теми «Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь якісними і аналітичними методами» (номер державної реєстрації 0109U003665), яка виконується на кафедрі диференціальних рівнянь Інституту математики, економіки та механіки Одеського національного університету імені І.І. Мечникова.

Мета і задачі дослідження. ***Метою роботи*** є поширення методики дослідження $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язків двочленного рівняння з правильно змінними нелінійностями на дослідження $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку загального виду, які при $t \uparrow \omega$ в деякому сенсі є близькими до двочленних рівнянь з правильно змінними нелінійностями, що вивчено в роботах В.М. Євтухова і М.О. Білозерової.

Об'єктом дослідження є звичайне диференціальне рівняння виду

$$y'' = f(t, y, y'), \tag{1}$$

де $f:[a,\omega[\times\Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1}\to\mathbb{R}$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, Δ_{Y_i} $(i \in \{0,1\})$ – однобічний окіл Y_i, Y_i $(i\in\{0,1\})$ дорівнює або 0, або $\pm\infty$.

Предметом дослідження є $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – розв'язки диференціального рівняння (1) в разі, коли на кожному із можливих типів $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – розв'язків має місце зображення

$$f(t,y(t),y'(t)) = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))(1+o(1)) \quad при \quad t\uparrow\omega, \tag{2}$$

де $\alpha_0 \in\{-1,1\}$, $p:[a,+\omega[\to]0,+\infty[$ – неперервна функція, $\varphi_i:\Delta Y_i \to]0,+\infty[$ – неперервні правильно змінні в Y_i $(Y_i\in\{0,\pm\infty\}$, Δ_{Y_i} – однобічний окіл Y_i, $i=0,1)$ функції порядків σ_i $(i=0,1)$. За своїми асимптотичними властивостями множина всіх $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – розв'язків розпадається на чотири підмножини, що не перетинаються та відповідають значенням λ_0: $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ (неособливий випадок) і $\lambda_0\in\{0,\ 1,\ \pm\infty\}$ (особливі випадки).

Задачі дослідження полягають у встановленні умов, при яких диференціальне рівняння (1) є близьким у деякому сенсі до двочленного з правильно змінними нелінійностями. При виконанні вказаних умов і певних обмеженнях на нелінійності одержання необхідних, а також достатніх умов існування всіх можливих типів $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – розв'язків рівняння (1), з'ясування питання про їх кількість, отримання асимптотичних зображень $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – розв'язків, а також їх похідних першого порядку при $t\uparrow\omega$.

Методи дослідження. В дисертаційній роботі використовуються методи теорії диференціальних рівнянь, класичного математичного аналізу, теорії правильно змінних функцій, лінійної алгебри, асимптотичні методи, сучасні результати теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Обґрунтованість та достовірність отриманих результатів забезпечується застосуванням відомих методів теорії диференціальних рівнянь у поєднанні з сучасними результатами звичайних диференціальних рівнянь, строгими доведеннями сформульованих теорем і висновків з них, а також узгодженістю з вже відомими в літературі роботами.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними результатами, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, є наступні:

- в кожному з випадків $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $\lambda_0=0$, $\lambda_0=1$, $\lambda_0=\pm\infty$ при $\sigma_0+\sigma_1\ne1$ вказано умови на функцію f, при яких на кожному $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – розв'язку має місце зображення (2);
- в кожному з випадків $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $\lambda_0=0$, $\lambda_0=1$, $\lambda_0=\pm\infty$ отримано необхідні, достатні умови існування $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – розв'язків рівняння (1), встановлено в неявному вигляді при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення для цих розв'язків та їх похідних першого порядку, а також з'ясовано питання про кількість розв'язків з одержаними зображеннями;

- вказано додаткові умови на нелінійності φ_0, φ_1, при яких одержано явні асимптотичні формули для $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$розв'язків та їх похідних першого порядку при $t\uparrow\omega$;
- для кожного $t_*\in]a,\omega[$ встановлено умови існування сингулярних $P_{t*}(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$розв'язків рівняння (1), а також асимптотику цих розв’язків та їх похідних першого порядку при $t\uparrow t_*$;
- отримано нові результати про існування зникаючих у нескінченості розв'язків однієї двовимірної системи квазілінійних неавтономних диференціальних рівнянь першого порядку, які носять допоміжний характер і були використані для встановлення існування $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$розв'язків рівняння (1).

Підкреслимо, що додаткові обмеження на гладкість коефіцієнтів і нелінійностей, що виникали у попередніх дослідженнях, у дисертаційній роботі знято.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Одержані результати та запропонована в ній методика дослідження можуть бути використані при встановленні асимптотичних властивостей розв'язків диференціальних рівнянь невивчених у літературі, зокрема рівнянь виду

$$y''=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(y)\varphi_{k1}(y')}{\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(y)\varphi_{k1}(y')}, \tag{3}$$

де $\alpha_k\in\{-1,1\}\;(k=\overline{1,m+n})$, $p_k:[a,\omega[\to]0,+\infty[\;(k=\overline{1,m+n})-$неперервні функції, $\varphi_{ki}:\Delta_{Y_i}\to]0,+\infty[\;\;(k=\overline{1,n+m};i=0,1)\;\;(Y_i\in\{0,\pm\infty\},\;\Delta_{Y_i}-$ однобічний окіл Y_i, $i=0,1)$ правильно змінні при $z\to Y_i$ неперервні функції порядків σ_{ki}. Крім того, отримані результати можуть сприяти подальшому розвитку асимптотичної теорії істотно нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь, а також застосовуватися для дослідження конкретних нелінійних диференціальних рівнянь, що виникають в теоретичній фізиці, механіці, тощо.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи є новими, отримані автором самостійно і опубліковані в п’яти роботах [1–5]. У сумісних роботах [1], [4] науковому керівнику В.М. Євтухову належить визначення загальної ідеї дослідження і постановки задач, а формулювання теорем та доведення всіх наведених тверджень належить здобувачу. Роботи [2], [4] прореферовано в міжнародній наукометричній базі SCOPUS.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідались автором на таких наукових конференціях: Міжнародній науковій конференції «Диференціальні рівняння та їх застосування» (Одеса, 2005 р.); на восьмій Кримській Міжнародній математичній школі "Метод функцій Ляпунова та його застосування" (Алушта, 2006 р.); на Міжнародній математичній конференції імені В.Я. Скоробогатько (Дрогобич, 2007, 2012, 2015 рр.); на "Конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача" (Львів, 2009 р.); на Міжнародній науковій конференції "Dinamical system modelling and stability investigation" (Київ, 2013); на Міжнародній науково - практичній конференції "Математика у сучасному технічному університеті" (Київ, 2013 р.); на Міжнародній літній школі пам'яті В.О. Плотнікова (Одеса, 2013 р.); на Міжнародній науковій конференції " Боголюбовські читання DIF - 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" (Севастополь, 2013 р.); на Міжнародній конференції з якісної теорії диференціальних рівнянь «QUALITDE – 2014» (Тбілісі, 2014 р.); на XII, XVI, XVII Міжнародних наукових конференціях імені академіка М. Кравчука (Київ, 2008, 2015, 2016 рр); на Міжнародній науковій конференції «Диференціальні рівняння та їх застосування» (Ужгород, 2012, 2016 рр.). У повному обсязі робота доповідалась на науковому семінарі факультету прикладної математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, на науковому семінарі кафедри диференціальних рівнянь Одеського національного університету імені І.І. Мечникова та на семінарі кафедри вищої та прикладної математики Одеського національного морського університету.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 20 працях, з них статті [1–5] – у фахових виданнях, [6–20] – матеріали та тези наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'ятьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 124 найменувань. Загальний обсяг роботи становить 145 сторінок основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, сформульовано задачі дослідження, визначено наукову новизну отриманих результатів, зазначено особистий внесок здобувача, апробацію роботи та публікації.

Перший розділ дисертації містить огляд літератури, щодо вивчення асимптотичної поведінки неколивних розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь зі степеневими нелінійностями та рівнянь загального виду (підрозділ 1.1) і правильно змінними нелінійностями (підрозділ 1.2). В результаті аналізу даних досліджень цілком природно виділено неавтономні диференціальні рівняння виду (1), що еквівалентне в деякому сенсі двочленному. В підрозділі 1.3 для таких рівнянь визначено клас $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язків та поставлено задачу про встановлення умов існування таких розв'язків, а також про асимптотику $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язків і їх похідних першого порядку при $t \uparrow \omega$, викладено короткий зміст отриманих в роботі результатів.

Означення 1. *Розв'язок y рівняння* (1)*, що визначений на проміжку* $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$*, називаємо* $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$*розв'язком , де* $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$*, якщо виконані наступні умови*

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \quad при \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \ \ (i = 0,1), \tag{4}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t) y''(t)} = \lambda_0. \tag{5}$$

В силу апріорних властивостей $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язків залежно від значень λ_0, скінчених чи рівних $\pm\infty$, такі розв'язки мають різні асимптотичні властивості. При цьому виникають неособливі випадки, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, і особливі – коли $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$ та $\lambda_0 = \pm\infty$. В кожному з вказаних випадків на функцію f вперше накладено умову $(RN)_{\lambda_0}$ ($RN-$ регулярна нелінійність), при виконані якої f на кожному $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язку має зображення (2).

При розгляді рівняння (1) припускаємо, що числа $\mu_i \ (i = 0,1)$, які визначаємо наступним чином

$$\mu_i = \begin{cases} -1, \ якщо \ Y_i = -\infty \ або \ Y_i = 0 \ і \ \Delta_{Y_i} - лівий \ окіл \ 0, \\ 1, \ якщо \ Y_i = +\infty \ або \ Y_i = 0 \ і \ \Delta_{Y_i} - \ правий \ окіл \ 0, \end{cases}$$

задовольняють нерівності

$$\mu_0 \mu_1 > 0 \quad при \quad Y_0 = \pm\infty \quad і \quad \mu_0 \mu_1 < 0 \quad при \quad Y_0 = 0. \tag{6}$$

Треба відзначити, що при виконанні умови $(RN)_{\lambda_0}$ знак другої похідної будь-якого $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язку рівняння (1) у деякому лівому околі ω співпадає із значенням α_0. Тоді із врахуванням (6), маємо

$$\alpha_0 \mu_1 > 0 \quad при \quad Y_1 = \pm\infty \quad і \quad \alpha_0 \mu_1 < 0 \quad при \quad Y_1 = 0. \tag{7}$$

Умови (6) на $\mu_i \ (i = 0,1)$ є необхідними для існування у рівняння (1) розв'язків, які визначені на проміжку $[t_0, \omega[$ і задовольняють умови (4). Серед строго монотонних з похідними першого порядку в деякому лівому околі ω розв'язків рівняння (1) крім розв'язків, що задовольняють умови (4), можна відокремити лише розв'язки, зображення яких допускають вид

$$y(t) = c_0 + o(1), \quad y(t) = \pi_\omega(t)[c_1 + o(1)] \quad при \quad t \uparrow \omega,$$

де c_0, c_1- ненульові дійсні сталі, $\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & якщо \ \omega = +\infty, \\ t - \omega, & якщо \ \omega < +\infty. \end{cases}$

Другий розділ дисертації присвячено дослідженню $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язків рівняння (1) в неособливому випадку, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. У цьому випадку кожний

$P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язок рівняння (1) і його похідна першого порядку є нормалізованими правильно змінними функціями відмінних від нуля порядків при $t\uparrow\omega$. В підрозділі 2.1 сформульовано основні результати другого розділу.
Для формулювання основних результатів підрозділу 2 уведемо обмеження на функцію f.

Означення 2. *Будемо казати, що функція f задовольняє умову $(RN)_{\lambda_0}$ при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, якщо існують число $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p:[a,\omega[\to]0,+\infty[-$неперервна функція, $\varphi_i : \Delta Y_i \to]0,+\infty[-$неперервні правильно змінні в Y_i функції порядків σ_i $(i=0,1)$, такі, що для будь-яких неперервно диференційовних функцій $z_i:[t_0,\omega[\to \Delta_{Y_i}$ $(i=0,1,\ t_0\in[a,\omega[)$, що задовольняють умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_i(t) = Y_i \quad (i=0,1), \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_0'(t)}{z_0(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_1'(t)}{z_1(t)} = \frac{1}{\lambda_0-1},$$

має місце зображення

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \alpha_0 p(t)\varphi_0(z_0(t))\varphi_1(z_1(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{8}$$

Підкреслимо, що в означенні 2 вибір α_0 і функцій p, φ_i $(i=0,1)$ залежить від вибору $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Припускаючи, що функція f задовольняє умову $(RN)_{\lambda_0}$ при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, позначимо

$$\beta = sign\ \pi_\omega(t),\ \ L_i(z) = \varphi_i(z)|z|^{-\sigma_i} \quad (i=0,1), \tag{9}$$

$$I_0(t) = \int_{A_0}^{t} p(\tau)d\tau, \quad I_1(t) = \int_{A_1}^{t} \pi_\omega(\tau)p(\tau)d\tau, \quad Q(t) = \begin{cases} I_0(t), \ \text{якщо}\ 1-\sigma_0\lambda_0-\sigma_1 \neq 0, \\ \pi_\omega^{-1}(t)I_1(t), \ \text{якщо}\ 1-\sigma_0\lambda_0-\sigma_1 = 0, \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} 1-\sigma_0\lambda_0-\sigma_1, \ \text{якщо}\ 1-\sigma_0\lambda_0-\sigma_1 \neq 0, \\ \lambda_0 - 1, \ \text{якщо}\ 1-\sigma_0\lambda_0-\sigma_1 = 0, \end{cases}$$

де границі інтегрування $A_i \in \{a;\omega\}$ $(i=0,1)$ та обрані так, щоб інтеграли I_i $(i=0,1)$ прямували або до нуля, або до $\pm\infty$ при $t\uparrow\omega$.

Теорема 2.1. *Нехай функція f задовольняє умову $(RN)_{\lambda_0}$, причому порядки σ_i $(i=0,1)$ правильно змінних при $y^{(i)} \to Y_i$ $(i=0,1)$ функцій φ_i $(i=0,1)$ такі, що $\sigma_0+\sigma_1 \neq 1$. Тоді для існування у диференціального рівняння* (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$ *розв'язків необхідно, а якщо виконана одна з наступних умов*

$$\text{або}\ \lambda_0 \neq \sigma_1 - 1, \ \text{або} \quad \lambda_0 = \sigma_1 - 1 \ \text{і} \ (1-\sigma_1)(1-\sigma_0-\sigma_1) > 0,$$

то і достатньо, щоб поряд із нерівностями (6)*,* (7) *були виконані умови*

$$\alpha_0\mu_1\gamma Q(t)>0, \quad \mu_0\mu_1\lambda_0(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)>0 \quad при \quad t\in[a,\omega[,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p(t)}{Q(t)}=\frac{\gamma}{\lambda_0-1}, \qquad \mu_0\lim_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}=Y_0, \qquad \mu_1\lim_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}=Y_1.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}=\alpha_0\gamma Q(t)[1+o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{\lambda_0(1+o(1))}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)} \quad при \ t\uparrow\omega, \tag{10}$$

причому таких розв'язків існує однопараметрична сім'я, якщо виконана нерівність $\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)<0$ *і двопараметрична сім'я, якщо*

$$\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)>0 \quad і \quad \mu_0\mu_1(\lambda_0+1-\sigma_1)\lambda_0>0.$$

Зауважимо, що асимптотичні зображення (10) записано в неявному вигляді. Вкажемо додаткові обмеження на нелінійності, які дозволяють переписати зображення (10) в явному вигляді.

Означення 3. *Будемо казати, що неперервна функція* $\varphi:\Delta_{Z_0}\to]0,+\infty[$ *виду* $\varphi(z)=|z|^\sigma L(z)$, *де функція* $L:\Delta_{Z_0}\to]0,+\infty[-$ *повільно змінна в* Z_0 , Z_0 *дорівнює або нулю, або* $\pm\infty$, $\Delta_{Z_0}-$*односторонній окіл* Z_0, *задовольняє умову* S, *якщо для будь-якої неперервно диференційовної функції* $l:\Delta_{Z_0}\to]0,+\infty[$, *для якої* $\lim\limits_{z\to Z_0}\frac{z\,l'(z)}{l(z)}=0$ *має місце асимптотичне зображення*

$$L(zl(z))=L(z)[1+o(1)] \qquad при \quad z\to Z_0 \quad (z\in\Delta_{Z_0}).$$

Теорема 2.2. *Нехай функція* f *задовольняє умову* $(RN)_{\lambda_0}$, $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$ *і функції* φ_i $(i=0,1)$ *задовольняють умову* S. *Тоді кожний* $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$ *розв'язок (в разі існування) диференціального рівняння* (1) *допускає при* $t\uparrow\omega$ *асимптотичні зображення*

$$y(t)=\mu_0\left|\frac{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}{\lambda_0}\right|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}L(t)[1+o(1)], \quad y'(t)=\mu_1\left|\frac{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}{\lambda_0}\right|^{\frac{\sigma_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}}L(t)[1+o(1)],$$

де

$$L(t)=\left|\gamma Q(t)L_0\left(\mu_0|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)L_1\left(\mu_1|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}.$$

Для доведення основних результатів другого та інших розділів в підрозділі 2.2. встановлено допоміжне твердження про існування зникаючих у нескінченності розв'язків однієї двовимірної системи квазілінійних неавтономних диференціальних рівнянь першого порядку. В підрозділі 2.3 доведено основні результати підрозділу 2.

Теореми 2.1, 2.2 для $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ дозволили отримати поведінку не тільки правильних, а також деяких типів сингулярних $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язків рівняння (1), а саме непродовжних вправо розв'язків $y:[t_0, t_*[\to \mathbb{R}$, що задовольняють умови (4) і (5) з заміною в них ω на t_*, де $t_* < \omega$. В цьому випадку замість умови $(RN)_{\lambda_0}$ на f накладено умову $(RN)_{\lambda_0}{}^*$, тобто з заміною в означенні 2 ω на t_*, а в зображенні (8) $p(t)$ на $\lim\limits_{t \uparrow t_*} p(t) = A_* = const > 0$. Підкреслимо, що цей клас сингулярних розв'язків рівняння (1) є новим. В підрозділі 2.4 у наслідках 2.1, 2.2 для будь-якого значення $t_* \in]a, \omega[$ приведені умови існування та асимптотичні зображення при $t \uparrow t_*$ таких розв'язків рівняння (1).

Наслідок 2.1. *Нехай функція* f *задовольняє умову* $(RN)^*{}_{\lambda_0}$, $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$. *Тоді для існування у диференціального рівняння (1)* $P_{t_*}\left(Y_0, Y_1, \lambda_0\right)-$ *розв'язків необхідно, а якщо виконана одна з наступних умов*

$$\text{або} \quad \frac{2-\sigma_1}{1+\sigma_0} \neq \sigma_1 - 1, \quad \text{або} \quad \frac{2-\sigma_1}{1+\sigma_0} = \sigma_1 - 1 \quad \text{і} \quad (1-\sigma_1)(1-\sigma_0-\sigma_1) > 0,$$

то і достатньо, щоб поряд із нерівностями (6), (7) *були виконані умови*

$$\lambda_0 = \frac{2-\sigma_1}{1+\sigma_0},\ \sigma_0 \neq -1,\ \sigma_1 \neq 2,$$

$$\mu_0 \lim_{t \uparrow t_*} (t_* - t)^{\frac{2-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} = Y_0, \quad \mu_1 \lim_{t \uparrow t_*} (t_* - t)^{\frac{1+\sigma_0}{2-\sigma_1}} = Y_1,$$

$$\alpha_0 \mu_1 (1-\sigma_0-\sigma_1)(1+\sigma_0) < 0, \quad \mu_0 \mu_1 (1-\sigma_0-\sigma_1)(2-\sigma_1) < 0.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = \frac{\alpha_0 A_* (1-\sigma_0-\sigma_1)}{1+\sigma_0}(t - t_*)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{(2-\sigma_1)(1+o(1))}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(t-t_*)} \qquad \text{при } t \uparrow t_*,$$

причому таких розв'язків існує однопараметрична сім'я, якщо виконана нерівність $(2-\sigma_1)(1+\sigma_0)(1-\sigma_0-\sigma_1) < 0$ *і двопараметрична сім'я, якщо* $(2-\sigma_1)(1+\sigma_0)(1-\sigma_0-\sigma_1) > 0$ *і* $\mu_0\mu_1(2-\sigma_1)(3-2\sigma_1+\sigma_0-\sigma_0\sigma_1) > 0$.

Наслідок 2.2. *Нехай функція* f *задовольняє умову* $(RN)^*_{\lambda_0}$, $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$, $\sigma_0\neq -1$, $\sigma_1\neq 2$ *і функції* $\varphi_i\ (i=0,1)$ *задовольняють умову* S. *Тоді кожний* $P_{t_*}\left(Y_0, Y_1, \dfrac{2-\sigma_1}{1+\sigma_0}\right)-$*розв'язок (в разі існування) диференціального рівняння* (1) *допускає при* $t\uparrow t_*$ *асимптотичні зображення*

$$y(t)=\mu_0\left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{2-\sigma_1}\right|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\left(\left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\right|A_*(t_*-t)^{-\sigma_1}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}L(t)[1+o(1)],$$

$$y'(t)=\mu_1\left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{2-\sigma_1}\right|^{\frac{\sigma_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\left(\left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\right|A_*(t_*-t)^{\sigma_0}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}L(t)[1+o(1)],$$

де

$$L(t)=\left(L_0\left(\mu_0(t_*-t)^{\frac{2-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)L_1\left(\mu_1(t_*-t)|^{\frac{1+\sigma_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}.$$

Також за допомогою теорем 2.1, 2.2, наслідків 2.1, 2.2 в підрозділі 2.5 встановлена при $t\uparrow\omega$ асимптотична поведінка $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$розв'язків (наслідки 2.3, 2.4) і при $t\uparrow t_*$ сингулярних $P_{t_*}(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$розв'язків (наслідок 2.5) важливого класу диференціальних рівнянь (3) при виконані нерівностей

$$\limsup_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\ln p_k(t)-\ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}\right]<\frac{\beta}{\lambda_0-1}\left[\lambda_0(\sigma_{i0}-\sigma_{k0})+\sigma_{i1}-\sigma_{k1}\right]\ \text{\textit{при}}\ k\in\{1,\dots,m\}\setminus\{i\},$$

$$\limsup_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\ln p_k(t)-\ln p_j(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}\right]<\frac{\beta}{\lambda_0-1}\left[\lambda_0(\sigma_{j0}-\sigma_{k0})+\sigma_{j1}-\sigma_{k1}\right]\text{\textit{при}}\ k\in\{m+1,\dots,m+n\}\setminus\{j\}.$$

У **розділі 3** дисертації встановлено умови існування $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$розв'язків рівняння (1) в особливому випадку, коли $\lambda_0=1$, тобто коли розв'язок та його похідна першого порядку є швидко змінними функціями при $t\uparrow\omega$.

Означення 4. *Будемо казати, що функція* f *задовольняє умову* $(RN)_1$, *якщо існують число* $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $p:[a,\omega[\to]0,+\infty[-$ *неперервна функція,* $\varphi_i:\Delta Y_i\to]0,+\infty[-$ *неперервні правильно змінні в* Y_i *функції порядків* σ_i $(i=0,1)$, *такі, що для будь-яких неперервно диференційовних функцій* $z_i:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_i}$ $(i=0,1,\ \ t_0\in[a,\omega[)$, *що задовольняють умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_i(t)=Y_i \quad (i=0,1),\qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_i'(t)}{z_i(t)}=\pm\infty\ \ (i=0,1),\qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{z_0'(t)z_1(t)}{z_0(t)z_1'(t)}=1,$$

має місце зображення (8).

Для формулювання результатів розділу 3 поряд з (9) покладемо

$$I_0(t)=\int_{A_0}^{t}p(\tau)\ d\tau,\qquad I_1(t)=\int_{A_1}^{t}I_0(\tau)\,d\tau,$$

де границі інтегрування $A_i\in\{a;\omega\}$ $(i=0,1)$ та обрані так, щоб інтеграли I_i $(i=0,1)$ прямували або до нуля, або до $\pm\infty$ при $t\uparrow\omega$.

Основні результати розділу 3 сформульовано в підрозділі 3.1.

Теорема 3.1. *Нехай функція* f *задовольняє умову* $(RN)_1$, *причому порядки* σ_i $(i=0,1)$ *правильно змінних при* $y^{(i)}\to Y_i$ $(i=0,1)$ *функцій* φ_i $(i=0,1)$ *такі, що* $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$. *Тоді для існування у диференціального рівняння* (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$ *розв'язків необхідно, а якщо виконана одна з наступних умов*

$$\text{або } \sigma_1\neq 2, \text{ або } \sigma_1=2 \text{ і } 1-\sigma_0-\sigma_1<0,$$

то і достатньо, щоб поряд із нерівностями (6), (7) *були виконані умови*

$$\alpha_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t)>0 \ \text{ при } t\in]a,\omega[,\ \alpha_0\mu_0>0\ ,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p(t)I_1(t)}{I_0^2(t)}=1,\qquad Y_i=\mu_i\lim_{t\uparrow\omega}|I_{1-i}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\qquad (i=0,1).$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце „наближені" зображення

$$y^{(i)}(t)=\mu_i\,|I_{1-i}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+o(1)}\quad (i=0,1)\quad \text{при } t\uparrow\omega,$$

а також асимптотичні зображення

$$\frac{y(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1\left(\dfrac{I_0(t)y(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right)}=\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)^2I_1(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{I_0(t)(1+o(1))}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\qquad \text{при}\quad t\uparrow\omega\ \ ,$$

причому таких розв'язків існує однопараметрична сім'я, якщо $1-\sigma_0-\sigma_1<0$ *і двопараметрична сім'я, якщо* $1-\sigma_0-\sigma_1>0$ *і* $\alpha_0\mu_1(\sigma_1-2)<0$.

Теорема 3.2. *Нехай функція* f *задовольняє умову* $(RN)_1$, $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$ *і функції* φ_i $(i=0,1)$ *задовольняють умову* S. *Тоді кожний* $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$*розв'язок (в разі існування) диференціального рівняння* (1) *допускає при* $t\uparrow\omega$ *асимптотичні зображення*

$$y(t)=\mu_0\Big(|1-\sigma_0-\sigma_1|^{2-\sigma_1}|I_0(t)|^{\sigma_1}|I_1(t)|^{1-\sigma_1}\Big)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}L(t)(1+o(1)),$$

$$y'(t)=\mu_1\Big(|1-\sigma_0-\sigma_1|^{1+\sigma_0}|I_0(t)|^{1-\sigma_0}|I_1(t)|^{\sigma_0}\Big)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}L(t)(1+o(1)),$$

де

$$L(t)=\left(L_0\left(\mu_0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)L_1\left(\mu_1|I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}.$$

З теореми 3.1 випливає наслідок 3.1 (підрозділ 3.2) про відсутність сингулярних $P_{t_*}(Y_0,Y_1,1)-$розв'язків рівняння (1), де $t_*\in]a,\omega[$. У наслідках 3.2, 3.3 (підрозділ 3.3) дано при $t\uparrow\omega$ асимптотику правильних $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$розв'язків рівняння (3) при виконанні нерівностей

$$\limsup_{t\uparrow\omega}\frac{\ln p_k(t)-\ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}<+\infty,\quad \mu_0\mu_1\big[\sigma_{k0}-\sigma_{i0}+\sigma_{k1}-\sigma_{i1}\big]<0 \text{ при } k\in\{1,\dots,m\}\setminus\{i\},$$

$$\limsup_{t\uparrow\omega}\frac{\ln p_k(t)-\ln p_j(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}<+\infty,\quad \mu_0\mu_1\big[\sigma_{k0}-\sigma_{j0}+\sigma_{k1}-\sigma_{j1}\big]<0$$

$$\text{при}\quad k\in\{m+1,\dots,m+n\}\setminus\{j\}.$$

У **розділі 4** дисертації встановлено умови існування $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$ розв'язків рівняння (1) в особливому випадку, коли $\lambda_0=\pm\infty$, тобто коли $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$розв'язок є при $t\uparrow\omega$ правильно змінною ненульового порядку функцією, а його похідна першого порядку – повільно змінною.

Означення 5. *Будемо казати, що функція* f *задовольняє умову* $(RN)_\infty$, *якщо існують число* $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $p:[a,\omega[\to]0,\infty[-$*неперервна функція,* $\varphi_i:\Delta Y_i\to]0,+\infty[-$*неперервні правильно змінні в* Y_i *функції порядків* σ_i $(i=0,1)$, *такі, що для будь-яких неперервно диференційовних функцій* $z_i:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_i}$ $(i=0,1,\ t_0\in[a,\omega[)$, *що задовольняють умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_i(t)=Y_i \quad (i=0,1), \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_0'(t)}{z_0(t)}=1, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_1'(t)}{z_1(t)}=0,$$

має місце зображення (8).

В підрозділі 4.1 викладено основні результати розділу 4 — а саме: теореми 4.1, 4.2.

Теорема 4.1. *Нехай функція* f *задовольняє умову* $(RN)_\infty$, *функція* φ_0 *задовольняє умову* S, *причому порядки* σ_i $(i=0,1)$ *правильно змінних при* $y^{(i)}\to Y_i$ $(i=0,1)$ *функцій* φ_i $(i=0,1)$ *такі, що* $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$. *Тоді для існування* $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$ *розв'язків диференціального рівняння* (1) *необхідно і достатньо, щоб поряд із нерівностями* (6), (7) *були виконані умови*

$$\mu_0\mu_1\pi_\omega(t)>0,\ \alpha_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)I_\infty(t)>0 \ \ при \ \ t\in]a_\infty,\omega[,$$

$$\mu_0\lim_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)|=Y_0, \quad \mu_1\lim_{t\uparrow\omega}|I_\infty(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}=Y_1,\ \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'_\infty(t)}{I_\infty(t)}=0,$$

де $I_\infty(t)=\int\limits_{A_\infty}^{t}p(\tau)\varphi_0\left(\mu_0\,|\pi_\omega(\tau)|\right)d\tau$, *границя інтегрування* $A_\infty\in\{a;\omega\}$ *та обрана так, щоб інтеграл* I_∞ *прямував або до нуля, або до* $\pm\infty$ *при* $t\uparrow\omega$.

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_0}}{\varphi_1(y'(t))}=\alpha_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)I_\infty(t)[1+o(1)], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{1+o(1)}{\pi_\omega(t)} \ \ при\ t\uparrow\omega,$$

причому таких розв'язків існує при $\omega=+\infty$ *двопараметрична сім'я, якщо* $\mu_1\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)>0$ *та однопараметрична сім'я, якщо* $\mu_1\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)<0$, *а при* $\omega<+\infty$ *та* $\mu_1\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)>0$ *однопараметрична сім'я цих розв'язків.*

Теорема 4.2. *Нехай функція* f *задовольняє умову* $(RN)_\infty$, $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$ *і функції* φ_i $(i=0,1)$ *задовольняють умову* S. *Тоді кожний* $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$*розв'язок (в разі існування) диференціального рівняння* (1) *допускає при* $t\uparrow\omega$ *асимптотичні зображення*

$$y(t)=\mu_0\,|\pi_\omega(t)|\left(|1-\sigma_0-\sigma_1|\,|I_\infty(t)|\,L_1\left(\mu_1\,|I_\infty(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}(1+o(1)),$$

$$y'(t)=\mu_1\left(|1-\sigma_0-\sigma_1\|I_\infty(t)|L_1\left(\mu_1|I_\infty(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}(1+o(1)).$$

Теореми 4.1, 4.2 для $\lambda_0=\pm\infty$ у підрозділі 4.2 дозволили отримати поведінку сингулярних $P_{t_*}(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$розв'язків рівняння (1) при $t\uparrow t_*$, $t_*\in]a,\omega[$ (наслідки 4.1, 4.2) та у підрозділі 4.3 – асимптотику при $t\uparrow\omega$ правильних $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$розв'язків (наслідок 4.3, 4.4) і при $t\uparrow t_*$ сингулярних $P_{t_*}(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$ розв'язків рівняння (3) (наслідок 4.5), якщо виконані нерівності

$$\limsup_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\ln p_k(t)-\ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)\|}\right]<\beta\left[\sigma_{k0}-\sigma_{i0}\right]\qquad \text{при}\quad k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{i\},$$

$$\limsup_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\ln p_k(t)-\ln p_j(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)\|}\right]<\beta\left[\sigma_{k0}-\sigma_{j0}\right]\qquad \text{при}\quad k\in\{m+1,\ldots,m+n\}\setminus\{j\}.$$

У заключному **розділі 5** дисертації встановлено умови існування $P_\omega\left(Y_0,Y_1,\lambda_0\right)-$розв'язків рівняння (1) в особливому випадку, коли $\lambda_0=0$, тобто коли $P_\omega\left(Y_0,Y_1,0\right)-$розв'язок є при $t\uparrow\omega$ повільно змінною функцією, а його похідна першого порядку правильно змінною ненульового порядку функцією .

Означення 5. *Будемо казати, що функція* f *задовольняє умову* $(RN)_0$, *якщо існують число* $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $p:[a,\omega[\to]0,+\infty[-$ *неперервна функція,* $\varphi_i:\Delta Y_i\to]0,+\infty[-$ *неперервні правильно змінні в* Y_i *функції порядків* σ_i $(i=0,1)$, *такі, що для будь-яких неперервно диференційовних функцій* $z_i:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_i}$ $(i=0,1,\ t_0\in[a,\omega[)$, *що задовольняють умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega}z_i(t)=Y_i\quad(i=0,1),\qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_0'(t)}{z_0(t)}=0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_1'(t)}{z_1(t)}=-1,$$

має місце зображення (8).

При виконанні умови $(RN)_0$ поряд з (9) покладемо

$$I_0(t)=\int_{A_0}^{t}p(\tau)\,d\tau,\quad I_{00}(t)=\int_{A_{00}}^{t}\left(|I_0(\tau)|L_1\left(\mu_1|I_0(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}d\tau,$$

$A_0 \in \{a,\omega\}$ і $A_{00} \in \{a_0,\omega\}$ вибрані так, щоб $I_0(t)$, $I_{00}(t)$ відповідно прямували до нуля або $\pm\infty$, $A_{00} \in \{a_0,\omega\}$ $\left(a_0 \in [a,\omega[\right)$, $a_0 \in [a,\omega[$ і вибране (в разі існування) так, щоб функція $L_1\left(\mu_1 | I_0(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\right)$ була визначеною на $[a_0,\omega[$.

В підрозділі 5.1 доведено теореми 5.1, 5.2.

Теорема 5.1. *Нехай функція* f *задовольняє умову* $(RN)_0$, *функція* φ_1 *задовольняє умову* S, *причому порядки* σ_i $(i=0,1)$ *правильно змінних при* $y^{(i)} \to Y_i$ $(i=0,1)$ *функцій* φ_i $(i=0,1)$ *такі, що* $\sigma_0+\sigma_1 \neq 1$. *Тоді для існування* $P_\omega(Y_0,Y_1,0)-$ *розв'язків диференціального рівняння* (1), *для яких існує* $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$, *необхідно і достатньо, щоб поряд із нерівностями* (6), (7) *були виконані умови*

$$\alpha_0\mu_1(1-\sigma_1)I_0(t)>0,\ \mu_0\mu_1(1-\sigma_1)(1-\sigma_0-\sigma_1)I_{00}(t)>0 \text{ при } t\in]a_0,\omega[,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_0'(t)}{I_0(t)}=\sigma_1-1,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_{00}'(t)}{I_{00}(t)}=0,\ \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_{00}''(t)}{I_{00}'(t)}=-1.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_0}}{\varphi_1(y'(t))}=\alpha_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)I_\infty(t)[1+o(1)],\qquad \frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{1+o(1)}{\pi_\omega(t)} \text{ при } t\uparrow\omega,$$

причому таких розв'язків існує при $\omega=+\infty$ *двопараметрична сім'я, якщо* $\sigma_1>1$ *і* $\mu_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)<0$ *та однопараметрична сім'я, якщо* $\mu_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)>0$, *а при* $\omega<+\infty$ – *двопараметрична сім'я, якщо* $\sigma_1<1$ *і* $\mu_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)>0$ *та однопараметрична сім'я цих розв'язків, якщо* $\mu_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)<0$.

Теорема 5.2. *Нехай* $\sigma_1\neq 1$, $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$, *функція* f *задовольняє умову* $(RN)_0$ *і функції* φ_i $(i=0,1)$ *задовольняють умову* S. *Тоді кожний* $P_\omega(Y_0,Y_1,0)-$ *розв'язок (в разі існування) диференціального рівняння* (1), *для якого існує* $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$, *допускає при* $t\uparrow\omega$ *асимптотичні зображення*

$$y(t)=\mu_0\left(|1-\sigma_1|L_0\left(\mu_0|I_{00}(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}I_{00}(t)\right|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}(1+o(1)),$$

$$y'(t)=\mu_1\left(|1-\sigma_1|\,L_0\left(\mu_0\,|I_{00}(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{(1-\sigma_0-\sigma_1)}}\left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}I_{00}(t)\right|^{\frac{\sigma_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\times$$

$$\times\left(|I_0(t)|\,L_1\left(\mu_1\,|I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(1+o(1)).$$

Теореми 5.1, 5.2 для $\lambda_0=0$ у підрозділі 5.2 дозволили отримати поведінку при $t\uparrow t_*$ сингулярних $P_{t_*}(Y_0,Y_1,0)-$розв'язків рівняння (1) (наслідки 5.1, 5.2) та у підрозділі 5.3 – асимптотику при $t\uparrow\omega$ правильних $P_\omega(Y_0,Y_1,0)-$розв'язків (наслідок 5.3, 5.4) і при $t\uparrow t_*$ сингулярних $P_{t_*}(Y_0,Y_1,0)-$ розв'язків (наслідок 5.5) рівняння (7), якщо виконані нерівності

$$\limsup_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\ln p_k(t)-\ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}\right]<\beta\left[\sigma_{i1}-\sigma_{k1}\right]\qquad при\quad k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{i\},$$

$$\limsup_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\ln p_k(t)-\ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}\right]<\beta\left[\sigma_{j1}-\sigma_{k1}\right]\qquad при\quad k\in\{m+1,\ldots,m+n\}\setminus\{j\}.$$

ВИСНОВКИ

Залучення правильно змінних функцій створило новий етап у розвитку теорії нелінійних диференціальних рівнянь. В останні 30 років для двочленних диференціальних рівнянь другого і вищих порядків з правильно змінними нелінійностями отримано значну кількість важливих результатів, що є подальшим кроком вивчення рівнянь зі степеневими нелінійностями (класичне рівняння Емдена – Фаулера) та узагальнених рівнянь Емдена – Фаулера, які активно вивчались продовж минулого століття.

К теперішньому часу виникає питання про узагальнення отриманих результатів для двочленних рівнянь другого порядку з правильно змінними нелінійностями на рівняння загального виду, яке в деякому сенсі є близьким до двочленного з правильно змінними нелінійностями.

Дисертаційна робота стосується дослідження асимптотичної при $t\uparrow\omega$ поведінки $P_\omega\left(Y_0,Y_1,\lambda_0\right)-$розв'язків рівняння (1). За своїми асимптотичними властивостями множина всіх таких розв'язків розпадається на 4 неперетинних множини, що відповідають наступним значенням λ_0 : $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ (неособливий випадок); $\lambda_0=0,1,\pm\infty$ (особливі випадки).

Для кожного з чотирьох можливих типів $P_\omega\left(Y_0,Y_1,\lambda_0\right)-$розв'язків рівняння (1) вперше одержано умови, при виконанні яких рівняння (1) еквівалентне при $t\uparrow\omega$

двочленному. При виконанні цих умов для рівняння виду (1) отримано необхідні і достатні умови існування таких розв'язків, встановлено асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення $P_{\omega}\left(Y_0, Y_1, \lambda_0\right)-$розв'язків і їх похідних першого порядку, а також з'ясовано питання про кількість таких розв'язків. Треба відзначити, що отримані раніш результати для двочленних рівнянь другого порядку з правильно змінними нелінійностями випливають як наслідки з результатів даної роботи. Також на відміну від попередніх робіт з використанням основних результатів дисертації для будь-якого $t_* \in]a, \omega[$ одержано умови існування і асимптотичні при $t \uparrow t_*$ зображення сингулярних $P_{t_*}\left(Y_0, Y_1, \lambda_0\right)-$розв'язків рівняння (1). Крім того, результати роботи проілюстровано на важливому класі рівнянь виду (3), права частина якого є відношенням сум, що містять доданки з добутків неперервних коефіцієнтів та правильно змінних при $t \uparrow \omega$ нелінійностей відносно розв'язка та його похідної першого порядку. Підкреслимо, що на сьогоднішній день рівняння типу (3) в літературі не вивчено.

Всі отримані в роботі результати є новими навіть для частинного випадку двочленного рівняння.

Одержані в дисертаційній роботі результати, а також розроблена в ній методика можуть бути використані при дослідженні асимптотичних властивостей розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь більш загального, ніж (3) виду. Крім того, можливе застосування результатів даної дисертації при дослідженні конкретних нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь, що виникають на практиці, а також для уточнень математичних моделей реальних процесів.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ

1. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка /В.М. Евтухов, Л.И. Кусик //Вісник Од. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2009. – 14, вип. 20. – С. 57 – 74.

2. *Кусик Л.И.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка/ Л.И. Кусик // Нелінійні коливання. – 2011, – Т. 14 – № 3, – С. 333 – 349.

Те саме: *Kusik L.I.* Asymptotic representations of solutions of one class of nonlinear differential equations of the second order / L.I. Kusik// Nonlin. Osc. –2012. – Vol. 14, № 3. – P. 350 – 368.

3. *Кусик Л.И.* Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ Л.И. Кусик // Вісник Од. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2012. – Т.17. – Вип. 1– 2 (13 – 14).– С. 80 – 97.

4. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка /В.М. Евтухов, Л.И. Кусик// Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 4. – С. 424 – 438.

Те саме: *Evtuhkov V.M.* Asymptotic representations of solutions of second-order differential equations/ V.M. Evtukhov and L.I. Kusik// Differ. Eq. –2013. –Vol. 49, № 4. – P. 406 – 419.

5. *Кусик Л.И.* Условия существования и асимптотика некоторого класса решений дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ Л.И. Кусик // Математичні студії. – 2014. – Т. 41, № 2. – С. 184 – 197.

6. *Кусик Л.И.* Асимптотические представления решений одного класса систем квазилинейных дифференциальных уравнений / Л.И.Кусик // Интегральные уравнения и их применения: Международная конференция, 29 июня – 4 июля 2005 г.: Программа международной конференции. – Одесса, 2005. – С. 13.

7. *Кусик Л.И.* Асимптотика решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений II порядка/ Л.И.Кусик // Метод функций Ляпунова и его приложения: Восьмая Крымская международная математическая школа, 10 – 17 сентября 2006 г.: тезисы докладов. – Симферополь, 2006. – С. 98.

8. *Кусик Л.И.* Асимптотические представления $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$ – решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка/ Л.И.Кусик // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька, 24 – 28 вересня 2007 р.: тези доповідей. – Львів, 2007. – С. 158.

9. *Кусик Л.И.* О существовании исчезающих решений одного класса систем дифференциальных уравнений второго порядка/ Л.И.Кусик // Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 15 – 17 травня 2008 р.: матеріали конференції. – Київ, 2008. – С. 227.

10. *Кусік Л.І.* Асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – розв'язків одного классу диференціальних рівнянь другого порядку/ Л.І. Кусік // Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача, 25 – 27 травня 2009 р.: тези доповідей. – Львів, 2009. – С. 213 – 215.

11. *Кусик Л.И.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка / Л.И.Кусик // Міжнародна наукова конференція „Диференціальні рівняння та їх застосування”: матеріали конференції.—Ужгород, 2012. – С. 52.

12. *Кусик Л.И.* Об условиях существования и асимптотике одного класса решений дифференциальных уравнений второго порядка/ Л.И.Кусик // Міжнародна наукова-практична конференція "Математика в сучасному технічному університеті", 19 – 20 квітня 2013 р.: матеріали конференції. – Київ, 2013. – С. 68 – 69.

13. *Кусик Л.И.* Условия существования исчезающих на бесконечности решений одного класса систем дифференциальных уравнений/ Л.И.Кусик //Dynamical system modelling and stability investigation: XVI International Conference, May 29 – 31, 2013: Abstract of conference reports. – Kiev, 2013. – P. 102.

14. *Кусик Л.И.* Условия существования и асимптотические представления одного класса решений дифференциальных уравнений второго порядка/ Л.И.Кусик// Международная летняя математическая школа памяти В. А. Плотникова, 15 – 22 июня 2013 г.: тезисы докладов. – Одесса, 2013. – С. 74.

15. *Кусик Л.И.* Асимптотические представления некоторого класса решений дифференциальных уравнений второго порядка/ Л.И.Кусик// "Боголюбовські читання DIF — 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з

нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23 – 30 червня 2013 р.: тези доповідей. – Севастополь, 2013. – С. 129 – 130.

16. *Кусик Л.И.* Условия существования одного класса сингулярных решений дифференциальных уравнений второго порядка/ Л.И. Кусик // Шестнадцатая международная научная конференция имени академика М. Кравчука, 14 – 15 мая 2015 г.: материалы конференции. – Киев, 2015. – С. 150 – 152.

17. *Кусик Л.И.* Асимптотические представления одного класса решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно меняющимися нелинейностями/ Л.И.Кусик// Семнадцатая международная научная конференция имени академика М. Кравчука, 19 – 20 мая 2016 г.: материалы конференции. – Киев, 2016. – С. 181 – 184.

18. *Kusik L.I.* Asymptotic representations of one class of singular solutions of second-order differential equations / L.I. Kusik //International Workshop QUALITDE - 2014, December 18 – 20, Tbilisi, Georgia. – 2014. – P. 89 – 91.

19. *Kusik L.I.* Asymptotic representations of one class of singular solutions of second-order differential equations / L.I. Kusik // International V. Skoroboyatko Mathematical Conference, Lviv, 2015. – P. 92.

20. *Kusik L.I.* Asymptotic representations of solutions of second-order differential equations / L.I. Kusik// International Scientific Conference "Differential Equations And Their Applications ", Uzhhorod, 2016. – P. 27.

АНОТАЦІЯ

Кусік Л.І. Асимптотичні зображення розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Одеський національний морський університет, Одеса, 2016.

В дисертаційній роботі досліджено асимптотичну при $t\uparrow\omega$ поведінку $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – розв'язків диференціального рівняння виду

$$y''=f(t,y,y'),$$

де $f:[a,\omega[\times\Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1}\to\mathbb{R}$ – неперервна функція, $-\infty<a<\omega\le+\infty$, Δ_{Y_i} $(i\in\{0,1\})$ – однобічний окіл Y_i, Y_i $(i\in\{0,1\})$ дорівнює або 0, або $\pm\infty$.

Для кожного з 4-х можливих типів $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – розв'язків одержано умови, при виконанні яких на цих розв'язках рівняння, що вивчаємо, еквівалентне при $t\uparrow\omega$ в деякому сенсі двочленному. При виконанні даних умов встановлено необхідні й достатні умови існування $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – розв'язків та отримано неявні, а за певних умов і явні зображення при $t\uparrow\omega$ цих розв'язків і їх похідних першого порядку, а також з'ясоване питання про кількість розв'язків з вказаною асимптотикою. Для будь-якого $t_*\in]a,\omega[$ одержано умови існування і асимптотичні при $t\uparrow t_*$ зображення сингулярних $P_{t_*}(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – розв'язків рівняння, що

досліджуємо. Результати роботи проілюстровано на рівнянні, що не вивчено в літературі.

Ключові слова: правильно змінні функції, диференціальні рівняння з правильно змінними нелінійностями, $P_\omega\left(Y_0, Y_1, \lambda_0\right)$ – розв'язок, сингулярний $P_{t_*}\left(Y_0, Y_1, \lambda_0\right)$ – розв'язок, асимптотичне зображення.

АННОТАЦИЯ

Кусик Л.И. Асимптотические представления решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Одесский национальный морской университет, Одесса, 2016.

В диссертационной работе исследуется при $t \uparrow \omega$ асимптотическое поведение $P_\omega\left(Y_0, Y_1, \lambda_0\right)$ – решений уравнения вида

$$y'' = f(t, y, y'),$$

где $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, Δ_{Y_i} $(i \in \{0,1\})$ – односторонняя окрестность Y_i, Y_i $(i \in \{0,1\}) \in \{0, \pm\infty\}$.

По своим асимптотическим свойствам множество таких решений распадается на четыре подмножества, соответствующих следующим значениям λ_0: $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ – неособый случай, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 = \pm\infty$ – особые случаи. Для каждого из возможных типов $P_\omega\left(Y_0, Y_1, \lambda_0\right)$ – решений получены условия, при выполнении которых изучаемое уравнение в некотором смысле при $t \uparrow \omega$ близко к двучленному с правильно меняющимися нелинейностями. При соблюдении данных условий найдены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega\left(Y_0, Y_1, \lambda_0\right)$ – решений и установлены неявные, а при некоторых дополнительных ограничениях на нелинейности и явные при $t \uparrow \omega$ представления этих решений и их производных первого порядка. Кроме того, выяснен вопрос о количестве решений с указанной асимптотикой. В отличие от опубликованных ранее работ здесь привлечение теории правильно меняющихся функций позволило снять ограничения на гладкость как коэффициентов, так и нелинейностей.

Для произвольного $t_* \in]a, \omega[$ найдены условия существования и асимптотические при $t \uparrow t_*$ представления сингулярных $P_{t_*}\left(Y_0, Y_1, \lambda_0\right)$ – решений исследуемого уравнения.

Результаты работы проиллюстрированы на ранее не изученном в литературе классе дифференциальных уравнений

$$y'' = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \varphi_{k0}(y) \varphi_{k1}(y')}{\sum\limits_{k=m+1}^{m+n} \alpha_k p_k(t) \varphi_{k0}(y) \varphi_{k1}(y')},$$

где $\alpha_k \in \{-1,1\}$ $(k=\overline{1,m+n})$, $p_k:[a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(k=\overline{1,m+n})$ – непрерывные функции, $\varphi_{ki}:\Delta_{Y_i}\to]0,+\infty[$ $(k=\overline{1,n+m}; i=0,1)$ – правильно меняющиеся при $z\to Y_i$ $\left(Y_i\in\{0,1\},\ i=0,1\right)$ непрерывные функции порядков σ_{ki}. Указаны условия существования правильных $P_\omega\left(Y_0,Y_1,\lambda_0\right)$ – решений (сингулярных $P_{t_*}\left(Y_0,Y_1,\lambda_0\right)$ – решений) этого уравнения, а также получена асимптотика этих решений (в случае существования) при $t\uparrow\omega$ (при $t\uparrow t_*$) и их производных первого порядка.

Ключевые слова: правильно меняющиеся функции, дифференциальные уравнения с правильно меняющимися нелинейностями, $P_\omega\left(Y_0,Y_1,\lambda_0\right)$ – решения, сингулярное $P_{t_*}\left(Y_0,Y_1,\lambda_0\right)$ – решение, асимптотические представления.

ABSTRACT

L.I. Kusick. Asymptotic representations for solutions of nonlinear differential equations of second order. – Manuscript.

The thesis for the degree of the Candidate of physical and mathematical sciences on specialty 01.01.02 – differential equations. – Odesa National Marine University, Odesa, 2016.

The dissertation represents a study of asymptotic behavior of $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – solutions as $t\uparrow\omega$ of a differential equation

$$y''=f(t,y,y'),$$

where $f:[a,\omega[\times\Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1}\to R$ is continuous function, $-\infty<a<\omega\le+\infty$, Δ_{Y_i} $(i\in\{0,1\})$ is a one-side neighborhood of Y_i and Y_i $(i\in\{0,1\})$ is either 0 or $\pm\infty$.

For each of the four possible types of $P_\omega\left(Y_0,Y_1,\lambda_0\right)$ – solutions we obtained the conditions under which the studied equation is equivalent in some sense the two-term equation. When these conditions satellite we gave the necessary and sufficient conditions for existence of $P_\omega\left(Y_0,Y_1,\lambda_0\right)$ – solutions and obtained implicit (under supplementary conditions – explicit) representations of these solutions of the equation and them derivative of first order as $t\uparrow\omega$. Also we brought to light the question about the number of solutions with such asymptotics.

For each $t_*\in]a,\omega[$ we give necessary and sufficient conditions for existence of singular $P_{t_*}(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – solutions of the equation. The obtained results of thesis are illustrated on a new class equation which not been studied previously.

Keywords: regularly varying functions, essentially nonlinear, differential equations with regularly varying nonlinearities, a $P_\omega\left(Y_0,Y_1,\lambda_0\right)$ – solution, a singular $P_{t_*}(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – solution, asymptotic representations.