ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени И.И.Мечникова

На правах рукописи

КУСИК ЛЮДМИЛА ИГОРЕВНА

УДК 517.925

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

01.01.02 - Дифференциальные уравнения
Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико - математических наук

Научный руководитель:
Евтухов Вячеслав Михайлович,
доктор физико-математических
наук, профессор.

Одесса – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Потребности современной науки приводят к необходимости дальнейшего развития теории существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений. Такие уравнения возникают при описании многих явлений природы, а также используются при построении математических моделей реальных процессов. Важную роль в разработке методов исследования поведения решений нелинейных уравнений сыграли полученные с конца XIX по конец XX века результаты для уравнения Эмдена – Фаулера и обобщенных уравнений типа Эмдена – Фаулера. Среди этих работ следует особо отметить работы Р. Фаулера, Ф.В. Аткинсона, И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия, В.А. Кондратьева, Н.А. Изобова, И.В. Асташовой, С. Белогорца (S. Belohorec), С.Д. Талиаферро (S.D. Taliaferro), Дж. Вонга (J.S.W. Wong), А.В. Костина, В.М. Евтухова. Работы большинства из перечисленных, а также многих других авторов, выполненные для нелинейных дифференциальных уравнений, были систематизированы и в полной мере отражены в монографии И.Т. Кигурадзе и Т.А. Чантурия "Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений" (М.: Наука. 1990). В этой монографии для уравнений второго порядка и уравнений более высоких порядков общего вида приведены условия существования решений со степенной асимптотикой, двусторонние асимптотические оценки для правильных кнезеровских, быстро растущих, а также сингулярных решений первого и второго родов.

Для уравнений n-го порядка со степенными нелинейностями в работах А.В. Костина был разработан метод установления асимптотических представлений, основанный на формальном применении формул Г. Харди. Для обобщенных уравнений типа Эмдена – Фаулера n-го порядка В.М. Евтуховым введен достаточно широкий класс неколеблющихся $P_\omega(\lambda_0)-$решений. При этом для двучленного уравнения n-го порядка со степенными нелинейностями были установлены асимптотические формулы для всех $n+2$-х возможных типов таких решений, а также выяснен вопрос о наличии и количестве решений с найденными асимптотическими представлениями.

Начиная с 80-х годов XX века, в связи с активным развитием созданной И. Караматой (J. Karamata) в 1930 году теории правильно меняющихся функций, появились первые результаты об асимптотическом поведении решений двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с отличными от степенных правильно меняющимися нелинейностями. Среди первых результатов в этом направлении необходимо отметить работы В. Авакумовича (V.G. Avakumovič), В. Марича (V. Marič), М. Томича (M. Tomič), Дж.С.В Уонга (J.S.W. Wong), С.Д. Талиаферро (S.D. Taliaferro). В исследованиях указанных авторов были получены асимптотические формулы для ограниченных, стремящихся к нулю при $t \to \infty$ решений двучленного дифференциального уравнения

$$y'' = p(t)\varphi(y),$$

где $p:[a,+\infty[\to]0,+\infty[-$ непрерывная функция, $\varphi:]0,+\infty[\to]0,+\infty[-$ непрерывная правильно меняющаяся в нуле функция.

В работах В.М. Евтухова и Л.А. Кирилловой впервые при $t \uparrow \omega$ был исследован вопрос об асимптотике $P_\omega(Y_0,\lambda_0)-$ решений такого двучленного уравнения в случае, когда $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $p:[a,\omega[\to \mathbb{R}\setminus\{0\}-$ непрерывная функция, $\varphi:\Delta Y_0 \to]0,+\infty[-$непрерывная правильно меняющаяся в Y_0 функция, где $Y_0 \in \{0,\pm\infty\}$, ΔY_0 $-$односторонняя окрестность Y_0. Этот класс решений является конкретизированным для данного типа уравнений класса $P_\omega(\lambda_0)-$решений, введенного ранее в работах В.М. Евтуховым при изучении асимптотики решений двучленного уравнения n-го порядка со степенными нелинейностями. Заметим, что класс $P_\omega(Y_0,\lambda_0)-$решений охватывает как решения, стремящиеся к нулю при $t \uparrow \omega$, так и неограниченные в левой окрестности ω. Полученные для $\omega < +\infty$ результаты позволяют описывать асимптотику и сингулярных решений.

Разработанная методика изучения асимптотического поведения $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ – решений таких уравнений была позже распространена в работах В.М. Евтухова и М.А. Белозеровой на дифференциальное уравнение второго порядка более общего вида

$$y'' = p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'),$$

где $p:[a,\omega[\to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ – непрерывная функция, $\varphi_i:\Delta Y_i \to]0,+\infty[$ – непрерывные правильно меняющиеся в Y_i $(i=0,1)$ функции, где $Y_i \in \{0,\pm\infty\}$, ΔY_i – односторонняя окрестность Y_i $(i=0,1)$, $\omega \le +\infty$. Были установлены асимптотические представления при $t\uparrow\omega$ для $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – решений такого уравнения, а также необходимые и достаточные условия их существования.

В дальнейшем асимптотика $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – решений исследовалась для уравнений, содержащих в правой части сумму слагаемых с правильно меняющимися относительно неизвестной функции и её производной первого порядка нелинейностями, в работах В.М. Евтухова и А.А. Козьмы. Здесь существенно использовались установленные условия, гарантирующие, что на изучаемом классе решений при $t\uparrow\omega$ правая часть уравнения эквивалентна правой части уравнения, рассмотренного В.М. Евтуховым и М.А. Белозеровой.

Следует однако отметить, что в работах, посвященных $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ – и $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – решениям уравнений указанных типов, исследования проводились при некоторых дополнительных ограничениях на гладкость как коэффициентов, так и нелинейностей.

В силу вышеизложенного актуальным и естесственным представляется исследование $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка общего вида, которые при $t\uparrow\omega$ являются асимптотически близкими к двучленным уравнениям с правильно меняющимися нелинейностями из работ В.М. Евтухова, М.А. Белозеровой, без дополнительных ограничений на гладкость коэффициентов и нелинейностей.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Направление исследований, выбранное в диссертации, является составной частью темы "Исследование асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений аналитическими и качественными методами", которая выполняется на кафедре дифференциальных уравнений Одесского национального университета имени И. И. Мечникова (номер госрегистрации 0109U003665).

Цель исследования – распространение методики, разработанной В.М.Евтуховым, изучения двучленных уравнений на уравнения второго порядка общего вида, которые при $t \uparrow \omega$ являются асимптотически близкими к двучленным с правильно меняющимися нелинейностями.

Объект исследования – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида

$$y'' = f(t, y, y'), \tag{0.1}$$

где $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, Δ_{Y_i} $(i \in \{0,1\})$ – односторонняя окрестность Y_i, Y_i $(i \in \{0,1\})$ равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Предмет исследования. Для уравнения (0.1) исследовать при $t \uparrow \omega$ асимптотическое поведение $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений и их производных первого порядка, в случае, когда на каждом из возможных типов $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений $f(t, y(t), y'(t)) = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y(t)) \varphi_1(y'(t))(1 + o(1))$, где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ – непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta Y_i \to]0, +\infty[$ – непрерывные правильно меняющиеся в Y_i функции порядков σ_i $(i = 0,1)$. По своим асимптотическим свойствам множество всех $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений распадается на четыре непрересекающихся подмножества, соответствующих значениям λ_0: $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ (неособый случай) и $\lambda_0 \in \{0, 1, \pm\infty\}$ (особые случаи).

Задачи исследования – установление необходимых, достаточных условий существования всех возможных типов $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений уравнения (0.1), а также асимптотических представлений для таких решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$ с выяснением вопроса о количестве решений с найденными представлениями.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы теории дифференциальных уравнений, классического анализа, теории правильно меняющихся функций, линейной алгебры, асимптотические методы, а также современные результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научная новизна полученных результатов. Все результаты диссертации являются новыми.

К основным из них относятся следующие:

1) В каждом из случаев $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 = \pm\infty$ указаны условия на функцию f, гарантирующие при $t \uparrow \omega$ ее эквивалентность на $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решении произведению $\alpha_0 p(t)\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))$, где $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p: [a,\omega[\to]0,+\infty[$ – непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta Y_i \to]0,+\infty[$ – непрерывные правильно меняющиеся в Y_i функции порядков σ_i $(i = 0,1)$, $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$.

2) В каждом из случаев $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 = \pm\infty$ получены необходимые, а также достаточные условия существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений уравнения (0.1) и установлены асимптотические представления для таких решений и их производных первого порядка, записанные в неявном виде, кроме того, выяснено количество этих решений.

3) Приведены дополнительные условия на нелинейности φ_0, φ_1, позволяющие найденные в неявном виде асимптотические представления переписать в явном виде.

4) Для каждого $t_* \in]a,\omega[$ найдены условия существования сингулярных $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений уравнения (0.1), а также асимптотические представления при $t \uparrow t_*$ таких решений и их производных первого порядка.

5) Получены признаки существования исчезающих на бесконечности решений одного класса двумерных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка, используемые для установления наличия $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0) -$ решений уравнения (0.1).

Практическое значение полученных результатов. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации и разработанные в ней методы исследования могут быть использованы при изучении асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих в правой части сумму слагаемых с правильно меняющимися относительно неизвестной функции и её производной первого порядка нелинейностями, а также дифференциальных уравнений более общего вида.

Личный вклад соискателя. Все основные результаты получены автором самостоятельно. Научному руководителю В.М. Евтухову в совместных работах принадлежат постановка задачи, выбор направлений исследования и общее руководство работой.

Апробация результатов диссертации. Результаты работы докладывались на международной конференции "Интегральные уравнения и их применения" (Одесса, 2005 г.), на восьмой Крымской Международной математической школе "Метод функций Ляпунова и его приложения" (Алушта, 2006г.), на международной математической конференции им. В.Я. Скоробогатько (Дрогобыч, 2007, 2012, 2015 гг.), на "Конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача" (Львов, 2009 г.), на международной математической конференции "Dinamical system modelling and stability investigation" (Киев, 2013), на международной научно - практической конференции "Математика в современном техническом университете" (Киев, 2013 г.), на международной конференции " Боголюбовські читання DIF – 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" (Севастополь, 2013 г.), в международной летней математической школе памяти В.А. Плотникова (Одесса, 2013 г.), на международной конференции "Internatinal Workshop QUALITDE" (Тбилиси, 2014 г.), на XII, XVI, XVII международной научной конференции имени академика М. Кравчука (Киев, 2008, 2015, 2016 гг.), на международной научной конференции «Диференціальні рівняння та їх застосування” (Ужгород, 2012, 2016 гг.), неоднократно на научных семинарах в Одесском национальном университете имени Ильи Ильича Мечникова, Одесском национальном морском университете, а также на научном семинаре факультета прикладной математики Черновецкого национального университета имени Юрия Федьковича.

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в пяти статьях ([27], [28], [66], [67], [73]), входящих в перечень, утвержденный ДАК Украины, и в 16 материалах и тезисах международных математических конференций ([61] – [65], [68] – [72] [74], [75],[106] – [108]).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, которые разбиты на параграфы, выводов и списка использованных источников из 124 наименований. Полный объем работы составляет 145 страниц.

ГЛАВА I.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЙ ИССЛЕДОВАНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

§ 1.1. Обзор исследований дифференциальных уравнений со степенными нелинейностями и уравнений общего вида

Дифференциальные уравнения второго порядка играют важную роль во всех разделах естествознания. Например, при построении статистической модели атома с большим числом электронов, основанной на теории Томаса – Ферми, возникает одно из таких уравнений. Исходным для модели является предположение о непрерывном сферически - симметричном распределении плотности заряда $\rho(r)$ в атоме. Энергия электрона записывается в виде

$$\varepsilon(p,r)=\frac{p^2}{2m}+e\varphi(r),$$

где $r-$радиус - вектор точки, $e,m-$заряд и масса электрона, $p-$его импульс, $\varphi(r)-$электростатический потенциал, определяемый уравнением Пуассона: $\nabla^2\varphi(r)=-4\pi\rho(r)$. При переходе к безразмерным переменным было получено уравнение

$$y''=y^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}$$

с граничными условиями $y\to 1$ при $t\to 0$, $y\to 0$ при $t\to\infty$. Уравнение Томаса - Ферми является частным случаем уравнения Эмдена

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2}{t}\frac{dy}{dt}+y^{\sigma}=0 \tag{1.1}$$

или в самосопряженной форме

$$\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{dy}{dt}\right)+t^2y^{\sigma}=0,\quad \sigma>0,\quad \sigma\neq 1.$$

Точка $t=0$ является для уравнения Эмдена особой. Заменой переменной $t=\dfrac{1}{\xi}$ уравнение (1.1) сводится к виду $\dfrac{d^2y}{d\xi^2}+\dfrac{y^{\sigma}}{\xi^4}=0$, а заменой $y=\dfrac{\eta}{t}-$ к виду

$\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{\eta^\sigma}{t^{\sigma-1}}=0$. После замены переменных $t=e^{-\tau}$, $y=e^{\mu\tau}$, $\mu=\frac{2}{\sigma-2}$ и последующего понижения порядка подстановкой $u'=v(u)$ получаем автономное уравнение первого порядка $\frac{dv}{du}=1-2\mu-\frac{\mu(\mu-1)u+u^\sigma}{v}$. Уравнение (1.1) было получено Эмденом в связи с изучением условия равновесия политропного газового шара. Эта задача сводится к задаче существования у уравнения (1.1) с начальными условиями $y(0)=1$, $y'(0)=0$ решения, определенного на некотором отрезке $[0,t_0]$, $0<t_0<\infty$ и обладающего свойствами $y(t)>0$ при $0\le t<t_0$, $y(t_0)=0$.

Более общим, чем уравнение Эмдена является уравнение Фаулера

$$\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{dy}{dt}\right)+t^n y^\sigma=0,\quad n>0,\quad \sigma>0$$

и уравнение Эмдена - Фаулера

$$\frac{d}{dt}\left(t^\rho\frac{dy}{dt}\right)\pm t^n y^\sigma=0, \tag{1.2}$$

где $\rho,n,\sigma\ne 1-$действительные параметры. При $\rho\ne 1$ уравнение (1.2) заменой переменных может быть преобразовано к виду

$$y''=\pm t^k y^\sigma, \tag{1.3}$$

где k зависит от ρ,n,σ. Это уравнение применяется при изучении процессов ядерной физики, газовой динамики, механики жидкости, релятивистской механики.

Впервые описание структуры решений уравнения (1.3) при $\sigma>1$ и произвольном $k\in\mathbb{R}$ дал Р. Фаулер в работах [100, 101, 102]. Методика исследования такого уравнения описана в монографии Р. Беллмана [8]. Опираясь на решение из известного класса, подбиралось преобразование, приводящее уравнение (1.3) к автономному, которое, в свою очередь, сводилось уравнению I - го порядка. Это дало возможность, используя теорию Г. Харди, описать асимптотическое поведение всех неколеблющихся решений уравнения (1.3). Кроме того, подобный подход позволил применять теорию Г. Харди к уравнениям, содержащим сумму слагаемых со степенными нелинейностями. Особенно эффективной данная методика оказалась для изучения асимптотики решений дифференциального уравнения первого порядка разрешенного относительно производной, правая часть которого представляет собой отношение многочленов от аргумента и искомой функции. Отметим, что иначе Р. Фаулером устанавливалась асимптотика колеблющихся решений уравнения (1.3).

Исследование асимптотических свойств уравнения (1.3) отражены также в работах Е. Хопфа [105], Е. Милна [115], Дж. Сансоне [118], З. Нехари [116] и изложены в монографиях Р. Беллмана [8] и Дж. Сансоне [78].

Если же $\rho = 1$ в уравнении (1.2), то (см. [8], гл.7) оно может быть приведено заменой $t = \ln\tau$, $v = y(t(\tau))$ к виду $v'' = \pm e^{(n+1)\tau} v^{\sigma}$. Подобные уравнения стали возникать в ядерной физике в первой половине XX века.

Исторически потребности практики привели к необходимости изучения уравнения

$$y'' = \alpha_0 p(t) |y|^{\sigma} \operatorname{sign} y, \tag{1.4}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $p : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ − непрерывная функция. Изучение колеблющихся решений уравнения (1.4), проведенное Ф.В. Аткинсоном в 1955 году (см. [88]) при $\sigma > 1$, привело к установлению критерия колеблемости всех правильных решений этого уравнения. Метод исследования асимптотического поведения неколеблющихся решений уравнения (1.4) впервые был предложен И.Т. Кигурадзе в работе [43]. Преобразование

$$y(t) = V(\tau)\xi(\tau), \quad \tau = \tau(t), \tag{1.5}$$

примененное к уравнению (1.4) с последующим выбором функций V и τ, позволило свести данное дифференциальное уравнение к уравнению, близкому к автономному и установить при $\sigma > 1$ и некоторых естественных ограничениях на функцию p признаки ограниченности и неограниченности всех ненулевых решений, условия исчезновения в бесконечности всех решений, вывести асимптотические формулы для всех правильных и сингулярных неколеблющихся решений уравнения (1.4).

Исследованием асимптотических свойств и условий существования правильных колеблющихся и неколеблющихся, сингулярных (I и II рода) решений уравнения (1.4) при $\sigma > 1$ занимались И.Т. Кигурадзе [40, 42, 44], Д.В. Изюмова [31, 32, 33, 34], Г.Г. Квиникадзе [37, 38, 39], Н.А. Изобов [28, 29, 30], М.М. Арипов [1, 2], Л.В. Клебанов [49], В.А. Кондратьев и В.С. Самовол [56], К.В. Коффман и Д.В. Ульрих [95], К.В. Коффман и Дж.С.В Уонг (J.S.W. Wong) [96], П. Уолтмен [122], Дж. Батлер [94], Я. Курцвель [76], М. Ясны [87], Дж.С.В Уонг (J.S.W. Wong) [124].

Своё распространение на случай $0 < \sigma < 1$ идея И.Т. Кигурадзе нашла в работах Т.А. Чантурия [81, 82, 83, 84, 85, 86]. Аналогичные результаты были получены и в работах С. Белогорца (S. Belohorec) [90, 91, 92], Дж.В. Хейделя [104], Киу-Лянг Чиу [98], Дж.С.В Уонга (J.S.W. Wong) [124]. В случае $\sigma < 0$ следует отметить исследования С.Д. Талиаферро (S.D. Taliaferro) [119].

Дальнейшее изучение обобщенного уравнения Эмдена – Фаулера связано с работами А.В. Костина [57]. Учитывая приближения Харди $\frac{v''}{v} \approx \left(\frac{v'}{v}\right)^2$, А.В. Костин подобрал функции V и ξ в преобразовании (1.5) так, чтобы свести уравнение (4) к специальному уравнению вида

$$\xi'' + \beta\big(2 + A(\tau)\big)\xi' + \big(1 + A(\tau)\big)\xi = |\,\xi\,|^{\sigma}\, sign\,\xi, \quad \beta \in \{-1,1\} \qquad (1.6)$$

и получил при $\sigma > 1$ асимптотику правильных неколеблющихся решений уравнения (4) в случае существования конечного предела $\lim\limits_{\tau\to+\infty} A(\tau)$. Если же $\lim\limits_{\tau\to+\infty} A(\tau) = \pm\infty$ (особый случай), то с помощью дополнительного преобразования уравнение (1.6) сводилось к уравнению, допускающему изучение.

Методика А.В. Костина в работах А.В. Костина, В.М. Евтухова [58] и

В.М. Евтухова [10, 11, 12, 13] была усовершенствована при изучении более общего, чем (1.4), уравнения вида

$$y'' = \alpha_0 p(t) \,|\, y \,|^{\sigma} |\, y' \,|^{\lambda} \, sign \; y, \tag{1.7}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $\sigma, \lambda \in \mathbb{R}$, $p:[a,\omega) \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$. При некоторых естественных ограничениях на функцию p были указаны условия существования и асимптотика всех неколеблющихся решений дифференциального уравнения (1.7) для произвольных показателей σ и λ. Многие из полученных здесь результатов оказались новыми даже для уравнения (1.4), так как охватывали случай отрицательного σ и позволяли более детально исследовать особые случаи. Кроме того, результаты для сингулярных решений в силу $\omega \leq +\infty$ выделялись как следствия из установленных основных теорем.

В полной мере перенести методику исследования уравнений второго порядка типа Эмдена — Фаулера на уравнения третьего порядка (см., например, [3, 80]) не удавалось, что привело к необходимости разработки новых методов исследования двучленных дифференциальных уравнений высших порядков. Один из подходов исследования был заимствован из теории линейных дифференциальных уравнений. Так, изучая дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = p(t) y, \tag{1.8}$$

где $p:\left[0,+\infty\right) \to R$ – непрерывная функция, И.Т. Кигурадзе [45] предложил классификацию его неколеблющихся решений. Напомним, что решение уравнения (1.8) называется колеблющимся, если оно имеет бесконечное число нулей, и неколеблющимся – в противном случае.

Лемма 1.1. *Пусть соблюдается неравенство* $p(t) \leq 0$ *(* $p(t) \geq 0$ *) при* $t \in \left[0,+\infty\right)$, *p отлична от нуля на множестве положительной меры в любой окрестности* $+\infty$, *т.е.*

$$mes\{s \geq t : p(s) \neq 0\} > 0 \quad при \quad t \geq 0,$$

и $y-$ *решение уравнения (1.8), удовлетворяющее условию*

$$y(t)>0 \quad при \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

Тогда существуют числа $t_1 \in [t_0,+\infty[$ *и* $l \in \{0,...,n\}$ *такие, что* $l+n$ *нечетно (четно) и*

$$\begin{aligned} y^{(i)}(t)>0 \quad &при \quad t \geq t_1 \quad (i=0,...,l-1), \\ (-1)^{i+l} y^{(i)}(t)>0 \quad &при \quad t \geq t_1 \quad (i=l,...,n-1), \\ (-1)^{n+l} y^{(n)}(t)>0 \quad &при \quad t \geq t_1. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Такая же классификация неколеблющихся решений, заданных на полуоси $[0,+\infty)$, имеет место и для решений общего дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = f(t,y,...,y^{(n-1)}), \tag{1.10}$$

где $f[a,+\infty[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}-$непрерывная функция ($a>0$) и на множестве $[a,+\infty[\times R^n$ выполнено одно из следующих неравенств

$$f(t,y,...,y^{(n-1)})y \leq 0 \quad или \quad f(t,y,...,y^{(n-1)})y \geq 0. \tag{1.11}$$

Поэтому естественным представляется изучение каждого класса неколеблющихся решений уравнения (1.10) из леммы 1.1 в отдельности. Однако кроме монотонных решений на полуоси у уравнения (1.10) могут быть и колеблющиеся решения, а также непродолжаемые вправо колеблющиеся и неколеблющиеся, заданные как на конечном, так и на бесконечном промежутке, решения. Это позволило И.Т. Кигурадзе дать классификацию всех возможных типов решений уравнения (10).

Определение 1.1. *Решение* y *уравнения* (1.10) *называется правильным, если оно задано в некоторой окрестности* $+\infty$ *и при любом* t *из этой окрестности удовлетворяет условию*

$$sup\{|u(s)|: s \geq t\} > 0,$$

причем такое решение называется

1) колеблющимся (неколеблющимся), если оно имеет (не имеет)

При $l=0$ ($l=n$) отпадает неравенство, выписанное в первой (второй) строке.

последовательность нулей, сходящуюся к $+\infty$;

2) быстро растущим, если $\lim\limits_{t\to+\infty} |y^{(n-1)}(t)| = +\infty$, *и медленно растущим, если* $\lim\limits_{t\to+\infty} |y^{(n-1)}(t)| < +\infty$;

3) кнезеровским, если $(-1)^i y^{(i)}(t) y(t) \geq 0$ *при* $t \geq t_0$ $(i = 0,...,n-1)$.

Определение 1.2. *Пусть* $f(t,0,...,0) = 0$ *при* $t \geq a$. *Решение* y *уравнения (1.10), заданное на некотором промежутке* $[t_*,+\infty[\subset[a,+\infty[$ *называется сингулярным решением первого рода, если существует* $t^* \in]t_*,+\infty[$ *такое, что*

$$max\{|y(\tau)| : t \leq \tau \leq t^*\} > 0 \quad \text{при} \quad t_* < t < t^* \quad \text{и} \quad y(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geq t^*,$$

причем такое решение называется колеблющимся (неколеблющимся), если оно имеет (не имеет) последовательность нулей, сходящуюся к t^*.

Определение 1.3. *Пусть* $f(t,0,...,0) = 0$ *при* $t \geq a$. *Решение* y *уравнения* (1.10), *заданное на некотором конечном промежутке* $[t_*,t^*[\subset[a,+\infty[$ *называется сингулярным решением второго рода, если*

$$\limsup_{t\to t^*} |y^{n-1}(t)| = +\infty,$$

причем такое решение называется колеблющимся (неколеблющимся), если оно имеет (не имеет) последовательность нулей, сходящуюся к t^*.

Для каждого типа решений уравнения (1.10) разработаны методы исследования, получены условия существования, а также асимптотические оценки в окрестности особой точки для бысро растущих и кнезеровских решений, а также асимптотические формулы для решений уравнения (1.10) со степенной асимптотикой. Приведем некоторые результаты, сформулированные в [45].

Теорема 1.1 (существования быстро растущих решений). *Пусть*

$$(-1)^m f(t,x_1,...,x_n) \geq g(t)|x_k|^\lambda \text{ при } t \geq a, \; (-1)^m x_i \geq \frac{\delta t^{n-i}}{(n-i)!} \quad (i = 1,...,n) \quad (1.12)$$

и

$$\int_a^{+\infty} f_\delta(t;r)dt < +\infty \quad при \quad r > \delta,$$

где $m \in \{0,1\}$, $\lambda \in]1,+\infty[$, $k \in \{1,...,n\}$, $\delta \in]0,+\infty[$, $g \in C([a,+\infty[) -$ *неотрицательная функция, отличная от нуля на множестве положительной меры в любой окрестности* $+\infty$ *и*

$$f_\delta(t;r) = max\left\{| f(t,x_1,...,x_n)|: \frac{\delta}{(n-i)!} \le (-1)^m t^{i-n} x_i \le \frac{r}{(n-i)!} \ \ (i=1,...,n)\right\}.$$

Пусть, кроме того, для уравнения (1.10) задача Коши $y^{(i-1)}(t_0) = c_i \ \ (i=1,...,n)$ *однозначно разрешима, если только* $t_0 \ge a$ *и* $(-1)^m c_i > \dfrac{\delta t_0^{n-i}}{(n-i)!} \quad (i=1,...,n)$.

Тогда (1.10) *обладает* $(n-1)$*-параметрическим семейством быстро растущих решений, удовлетворяющих условию*

$$(-1)^m y^{(n-1)}(t) \to +\infty \quad при \quad t \to +\infty. \qquad (1.13)$$

Также получены асимптотические оценки быстро растущих решений (1.10) и односторонние оценки этих решений в некоторой окрестности $+\infty$.

Теорема 1.2 (существования кнезеровских решений). *Пусть*

$$f(t,0,...,0) = 0 \quad при \quad t \ge a$$

и для некоторых $m \in \{0,1\}$ *и* $r \in]0,+\infty[$ *соблюдается неравенство*

$$(-1)^{m+n} f(t,x_1,...,x_n) \ge 0 \quad при \quad t \ge a, \qquad 0 \le (-1)^{m+i-1} x_i \ge rt^{1-i} \ \ (i=1,...,n).$$

Тогда уравнение (1.10) *имеет континуум кнезеровских решений, удовлетворящих условиям*

$$(-1)^{m+i} y^{(i)}(t) \ge 0 \ при \ t \ge a \ \ (i=0,...,n-1).$$

Теорема 1.3 (о решениях со степенной асимптотикой). *Пусть* $f:[a,+\infty[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} -$ *непрерывная функция и существуют* $l \in \{1,...,n\}$, $r \in]0,+\infty[$, $\alpha \ne 0$ *и измеримая функция* $f^*:[a,+\infty[\to [0,+\infty[$*, такие, что*

$$| f(t,y_1,y_2,...,y_n)| \le f^*(t) \ \ при \ \ t \ge a, \ \left| y_k - \alpha\frac{(l-1)!}{(l-k)!}t^{l-k}\right| \le rt^{l-k} \ \ (k=1,...,l),$$

$$|y_k| \le r t^{l-k} \ \ (k = l+1,\dots,n) \ \ и \ \int_a^{+\infty} t^{n-l} f^*(t)dt < +\infty.$$

Тогда уравнение (1.10) имеет решение y, *допускающее асимптотическое представление*

$$y^{(k-1)}(t) = \alpha \frac{(l-1)!}{(l-k)!} t^{l-k} + o(t^{l-k}) \quad (k=1,\dots,l), \ y^{(k-1)}(t) = o(t^{l-k}) \ \ (k = l+1,\dots,n).$$

Особенно эффективными данные результаты оказались для двучленного дифференциального уравнения Эмдена — Фаулера

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) |y|^\sigma \operatorname{sign} y,$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $0 < \sigma \ne 1$, $p:[a,\omega) \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty$. Точные асимптотические формулы в окрестности особой точки для важных классов правильных неколеблющихся решений уравнений высших порядков были получены А.В. Костиным, В.М. Евтуховым .

А.В.Костин в работах [59], [60] выделяет для нелинейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i(t) y^{\sigma_{0i}} (y')^{\sigma_{1i}} \dots (y^{(n-1)})^{\sigma_{n-1 i}} + f_1(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\sum_{i=k+1}^{m} p_i(t) y^{\sigma_{0i}} (y')^{\sigma_{1i}} \dots (y^{(n-1)})^{\sigma_{n-1 i}} + f_2(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})}, \tag{1.14}$$

где $\sigma_{ji} \in R$ $(i = 1,\dots,m; \ j = 0,\dots n-1)$, $p_i : [a,+\infty[\to C \setminus \{0\}$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции, $f_1, f_2 : [a,+\infty[\times C^n \to C$ – малые в некотором смысле непрерывные функции, класс решений, удовлетворяющих формальному применению формул Г.Харди (см. [9], гл. V, стр. 322-343)

$$\frac{y^{(i)}(t)}{y(t)} \sim c_i \left(\frac{y'(t)}{y(t)} \right)^i \quad (i \ge 1, \ \ c_i \ne 0) \quad при \quad t \to +\infty.$$

Для таких решений получены асимптотические представления при $t \to +\infty$, а также достаточные условия их существования. С учетом этих работ А.В. Костина в дальнейшем при изучении дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) |y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1} \dots |y^{(n-1)}|^{\sigma_{n-1}} \operatorname{sign} \ y \tag{1.15}$$

где $n \geq 2$, $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{n-1} \in \mathbb{R}$, $\sigma_0 + \sigma_1 + ... + \sigma_{n-1} \neq 1$, $p:[a,+\infty[\to]0,+\infty[-$ непрерывная функция ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$) в работах В.М. Евтухова (см. [14], [15], [16], [17]) впервые был выделен и достаточно подробно исследован класс $P_\omega(\lambda_0)-$решений.

Определение 1.4. *Решение уравнения* (1.15)*, заданное на промежутке* $[t_0,\omega[\subset[a,\omega[$, *называется* $P_\omega(\lambda_0)-$*решением, если оно удовлетворяет следующим условиям: 1)* $y^{(n-1)}(t) \neq 0$ *при* $t \in [t_0,\omega[$*; 2) для каждого* $k \in \{0,...,n-1\}$ *либо* $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = 0$*, либо* $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \pm\infty$*;*

3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lambda_0 = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n)}(t)y^{(n-2)}(t)}.$$

Вводился (см. [17]) также $P_\omega(\lambda_0)-$класс n раз непрерывно дифференцируемых функций, каждая из которых обладает свойствами 2), 3) определения $P_\omega(\lambda_0)-$решения, а условие 1) заменено на $y^{(n)}(t) \neq 0$ при $t \in [t_0,\omega[$. Оказалось, что множество всех функций из класса $P_\omega(\lambda_0)-$ функций по своим асимптотическим свойствам распадается на $n+2$ непересекающихся подмножества, соответствующих следующим значениям λ_{n-1}^0: $\lambda_{n-1}^0 \in \Lambda_{n-1}$ (особые случаи); $\lambda_{n-1}^0 \notin \Lambda_{n-1}$ (неособый случай), где

$$\Lambda_{n-1} = \left\{0, 1/2, 2/3, ..., (n-2)/(n-1), \pm\infty\right\}.$$

Такое разбиение класса $P_\omega(\lambda_0)-$функций на подмножества вытекает из установленных априорных свойств этих функций, для формулировки которых потребуются обозначения

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases} \quad a_{0i} = (n-i)\lambda_{n-1}^0 - (n-i-1), \; i = 1,...,n-1,$$

$$\lambda_i(y)(t) = \frac{[y^{(i)}(t)]^2}{y^{(i+1)}(t)y^{(i-1)}(t)}, \quad i \in \{1,...,n-2\}.$$

Лемма 1.2. *Пусть* y *из* $P_\omega(\lambda_0)-$*класса функций. Тогда: 1) если* $\lambda_0 \notin \Lambda_{n-1}$*, то при* $t\uparrow\omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[(\lambda_{n-1}^0 - 1)\pi_\omega(t)]^{n-k}}{\prod\limits_{i=k}^{n-1} a_{0i}} y^{(n-1)}(t), \quad k = 1,\dots,n-1,$$

2) если $\lambda_0 = \pm\infty$, то при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические представления

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-k}}{(n-k)!} y^{(n-1)}(t), \quad k = 1,\dots,n-1, \quad y^{(n)}(t) = o\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right),$$

3) если $\lambda_0 = (n-i-1)/(n-i)$ для некоторого $i \in \{1,\dots,n-2\}$, то при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические представления

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{i-k}}{(i-k)!} y^{(i-1)}(t) \quad (k = 1,\dots,i-1),$$

$$y^{(k)}(t) \sim (-1)^{k-i} \frac{(k-i)!}{[\pi_\omega(t)]^{k-i}} y^{(i)}(t) \quad (k = i+1,\dots,n),$$

$$y^{(i)}(t) = o\left(\frac{y^{(i-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right), \quad \left(\lambda_i(y)(t)\right) = o\left(\frac{\lambda_i(y)(t)}{\pi_\omega(t)}\right),$$

4) если $\lambda_0 = 1$, то при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические представления

$$y^{(k-1)}(t) \sim y^{(n-1)}(t)\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n)}(t)}\right)^{n-k}, \quad k = 1,\dots,n-1,$$

5) если $\lambda_0 = 0$, то при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические представления

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-k-1}}{(n-k-1)!} y^{(n-2)}(t), \quad k = 1,\dots,n-2, \quad y^{(n-1)}(t) = o\left(\frac{y^{(n-2)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right).$$

Более того, если существует $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \dfrac{y^{(n)}(t)\pi_\omega(t)}{y^{(n-1)}(t)}$, то при $t \uparrow \omega$

$$y^{(n)}(t) \sim -\frac{y^{(n-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}, \quad \left(\lambda_{n-2}(y)(t)\right) = o\left(\frac{\lambda_{n-2}(y)(t)}{\pi_\omega(t)}\right).$$

Опираясь на эту лемму для каждого из возможных типов $P_\omega(\lambda_0)-$ решений уравнения (1.15) были установлены асимптотические представления этих решений и их производных до порядка $n-1$ включительно, а также необходимые условия существования таких решений.

Позже идея "удачной" классификации решений была перенесена В.М. Евтуховым на уравнение (1.10), где $f:[a,+\infty[\times D\to R-$непрерывная функция, $-\infty<a<\omega\le+\infty$, $D=\{(y_1,...,y_n)\in R^n:0<|y_i|<+\infty, i=1,...,n\}$. В [18] получены точные асимптотические формулы для тех решений y уравнения (1.10), каждое из которых определено на некотором промежутке $[t_0,\omega[\subset[a,\omega[$ и удовлетворяет условиям 1), 2) определения 1.4. Для описания результатов исследований введем множество $\Omega_{0\delta}=[\alpha_0,\omega[\times D_\delta$, где

$$\alpha_0\in[\alpha,\omega[\ D_\delta=\{(z_1,...,z_n)\in R^n:|z_i|\le\delta<1,\ i=1,...,n\},$$

функции

$$\varphi_{k1}(t)=\frac{\psi(t)[(\lambda_{n-1}^0-1)\pi_\omega(t)]^{n-k}}{\prod\limits_{j=k}^{n-1}a_{0j}}\quad(k=1,...,n),\quad \lambda_{n-1}^0\notin\Lambda_{n-1};$$

$$\varphi_{k2}(t)=\frac{\psi(t)[\pi_\omega(t)]^{n-k}}{(n-k)!},\qquad \varphi_{k3}(t)=\psi(t)\left(\frac{\psi(t)}{\psi'(t)}\right)^{n-k}\quad(k=1,...,n);$$

$$\varphi_{k3+i}(t)=\frac{\psi(t)[\pi_\omega(t)]^{n-i}}{(n-i)!}\quad(k=1,...,i;\ i=1,...,n-1);$$

$$\varphi_{k3+i}(t)=\frac{(-1)^{k-i-1}(k-i-1)!\,\psi'(t)}{[\pi_\omega(t)]^{k-i-1}}\quad(k=i+1,...,n;\ i=1,...,n-1),$$

где $a_{0j}=(n-j)\lambda_{n-1}^0-(n-j-1)$, *а множество* Λ_{n-1} *и функция* π_ω *определены выше.*

В.М.Евтухов получил асимптотические представления для правильных неколеблющихся решений уравнения (1.10), описываемых в терминах существования некоторой непрерывно или дважды непрерывно дифференцируемой функции $\psi:[\alpha,\omega[\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$, обладающей наперед заданными свойствами. При этом вводятся следующие условия (A_j) $(j=\overline{1,...,n+2})$:

(A_j) $(j\in\{1,2,3\})$. На некотором множестве $\Omega_{0\delta}$ имеет место соотношение

$$\frac{f(t,\varphi_{1j}(t)[1+z_1],...,\varphi_{nj}(t)[1+z_n])}{\psi'(t)} = b_{0j}(t) + \sum_{k=1}^{n} b_{kj}(t) z_k + Z_j(t,z_1,...,z_n),$$

где функции $b_{kj} : [\alpha_0,\omega[\to \mathbb{R}$ $(k = 0,1,...,n)$ непрерывны и обладают свойствами

$$\lim_{t\uparrow\omega} b_{0j}(t) = 1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} b_{kj}(t) = b_{kj}^0 = const \quad (k = 1,...,n), \qquad (16_j)$$

а функция $Z_j : \Omega_{0\delta} \to \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что

$$\frac{Z_j(t,z_1,...,z_n)}{\sum_{k=1}^{n} |z_k|} \to 0 \ \textit{равномерно} \qquad \textit{по } t \in [\alpha_0,\omega[. \qquad (17_j)$$

(A_{3+i}) $(i \in \{1,...,n\})$. На некотором множестве $\Omega_{0\delta}$ имеет место соотношение

$$\frac{(-1)^{n-i}[\pi_\omega(t)]^{n-i} f(t,\varphi_{1i+3}(t)[1+z_1],...,\varphi_{ni+3}(t)[1+z_n])}{(n-i)!\,\psi'(t)} = b_{0i+3}(t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} b_{ki+3}(t) z_k + Z_{i+3}(t,z_1,...,z_n),$$

где функции $b_{ki+3} : [\alpha_0,\omega[\to \mathbb{R}$ $(k = 0,1,...,n)$ и $Z_{3+i} : \Omega_{0\delta} \to \mathbb{R}$ непрерывны и таковы, что соблюдаются условия (16_{3+i}), (17_{3+i}).

Одним из результатов работы [18] для уравнения (1.10) является установленная

Теорема 1.4. *Пусть существует непрерывно дифференцируемая функция* $\psi : [\alpha,\omega[\to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *такая, что*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{1}{\lambda_{n-1}^0 - 1}, \quad \lambda_{n-1}^0 \notin \Lambda_{n-1} \qquad (1.18)$$

и соблюдается условие (A_1). *Тогда, если алгебраическое уравнение*

$$\sum_{k=1}^{n} b_{k1}^0 \prod_{i=k}^{n-1} a_{0i} \prod_{j=1}^{k-1} (a_{0j} + \rho) = (1+\rho) \prod_{j=1}^{n-1} (a_{0j} + \rho)$$

не имеет корней с нулевой действительной частью, то у дифференциального уравнения (1.10) существует решение, допускающее при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y^{(k-1)}(t) = \varphi_{k1}(t)[1 + o(1)] \quad (k = 1,...,n).$$

В силу условия (1.18) и вида функции φ_{k1} $(k=1,...,n)$ решение, указанное в теореме 1.4, является $P_\omega(\lambda_0)-$решением уравнения (1.10) при $\lambda_{n-1}^0 \notin \Lambda_{n-1}$, т.е. в неособом случае. Аналогичного типа теоремы получены при некоторых иных ограничениях на функцию $\psi:[\alpha,\omega[\to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и выполнении соответствующих условий (A_2), (A_3) или (A_3+i) $(i=1,2,...,n-1)$. Указанными теоремами охватываются все решения y уравнения (1.10), для которых существует конечный или равный $\pm\infty$ предел $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$.

§1.2. Правильно меняющиеся функции и их применение к изучению дифференциальных уравнений

Понятие правильно меняющейся функции было введено И. Караматой (Jovan Karamata) [106] в 1930 году и восходит к трудам Э. Ландау (E. Landau, 1911), Ж. Валирона (G. Valiron, 1913), Дж. Пойа (G. Polya, 1917) и др. Такие функции предполагалось использовать при доказательствах теорем Тауберова типа, известные сегодня как Караматы тауберовы теоремы. Развитая самим Karamata, а также его учениками теория правильно меняющихся функций нашла свое применение в математическом анализе (особенно в теории рядов, рядов Фурье, в интегральных преобразованиях типа свертки), теории чисел, теории функции действительного и комплексного переменного, а с 1968 года с выходом монографии В.Феллера (W. Feller) [99] теории вероятности и ее приложениях.

Прежде чем перейти к обзору исследований в теории дифференциальных уравнений с использованием правильно и быстро меняющихся функций, введем необходимые для этой цели и дальнейшего основные понятия и факты из теории И.Караматы.

Определение 1.5. *Измеримая функция $\varphi:[a,\infty)\to(0,+\infty)$ называется правильно меняющейся при $y\to Y_0$ (Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0} – односторонняя окрестность Y_0), если существует такое число $\sigma\in\mathbb{R}$, что* *для произвольного* $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(\lambda y)}{\varphi(y)} = \lambda^{\sigma}. \qquad (1.19)$$

При этом число σ *называется порядком функции* φ *при* $y \to Y_0$.

Обратим внимание на то, что определение правильно меняющейся функции было введено И. Караматой при $Y_0 = +\infty$. Случай, когда $Y_0 \neq +\infty$ может быть сведен к рассмотренному заменой $z = -y$ ($Z_0 = +\infty$) при $Y_0 = -\infty$ и заменой $y = z^{-1}$ ($Z_0 = \pm\infty$) при $Y_0 = 0$, в произвольной точке Y_0 заменой $y = z^{-1} + Y_0$, где $Z_0 = \pm\infty$.

Определение 1.6. *Правильно меняющаяся функция* $L(y)$ *порядка* $\sigma = 0$ *называется медленно меняющейся функцией.*

Известно (см. [79], Глава 1, п. 1.1, стр. 9-10), что функция φ является правильно меняющейся на бесконечности (в нуле) порядка σ тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$\varphi(y) = |y|^{\sigma} L(y), \qquad (1.20)$$

где $L-$ медленно меняющаяся на бесконечности (в нуле) функция. Таким образом, свойства медленно меняющихся функций определяют свойства соответствующих правильно меняющихся функций. Приведем некоторые результаты о медленно меняющихся функциях.

Теорема 1.5 (о представлении). *Функция* $L : \Delta_{Y_0} \to (0, +\infty) -$ *медленно меняющаяся при* $y \to Y_0$ *(*Y_0 *равно либо нулю, либо* $\pm\infty$*) тогда и только тогда, когда найдется число* $b \in \Delta_{Y_0}$*, такое, что имеет место представление*

$$L(y) = c(y) \exp\left\{ \int_b^y \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \right\} \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}(b),$$

где $\Delta_{Y_0}(b) -$ *одностороння окрестность* Y_0*, содержащая точку* b*,* $c -$ *измеримая на* $\Delta_{Y_0}(b)$ *функция, стремящаяся к отличной от нуля постоянной* *при* $y \to Y_0$, *и* $\varepsilon -$ *непрерывная функция на* $\Delta_{Y_0}(b)$, *стремящаяся к нулю при* $t \to Y_0$.

Теорема 1.6 (о равномерной сходимости). *Если* $L: \Delta_{Y_0} \to (0, +\infty) -$ *медленно меняющаяся при* $y \to Y_0$ *(*Y_0 *равно либо нулю, либо* $\pm\infty$*) функция, то для любого фиксированного отрезка* $[a, b]$, $0 < a < b < +\infty$, *соотношение (1.19) выполняется равномерно относительно* $\lambda \in [a, b]$.

Из теоремы 1.5 непосредственно вытекает

Лемма 1.3. *Пусть* $L: \Delta_{Y_0} \to (0, +\infty) -$ *непрерывно дифференцируемая функция (*$Y_0 \in \{0, \pm\infty\}$*), удовлетворяющая условию*

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{yL'(y)}{L(y)} = 0. \qquad (1.21)$$

Тогда L *является медленно меняющейся при* $y \to Y_0$.

Лемма 1.4. (см. [79], Глава 1, п. 1.2, стр. 10-15) *Пусть* $L: \Delta_{Y_0} \to (0, +\infty) -$ *медленно меняющаяся функция при* $y \to Y_0$ *(*$Y_0 \in \{0, \pm\infty\}$, $\Delta_{Y_0} -$ *односторонняя окрестность* Y_0*). Тогда существует непрерывно дифференцируемая медленно меняющаяся при* $y \to Y_0$ *функция* $L_0: \Delta_{Y_0} \to (0, +\infty)$, *такая, что*

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{L(y)}{L_0(y)} = 1, \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{yL_0'(y)}{L_0(y)} = 0 \ .$$

Примерами медленно меняющихся при $y \to Y_0$ (Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$) функций являются $|\ln|y||^{\gamma_1}$, $\ln^{\gamma_2}|\ln|y||$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\exp(|\ln|y||^{\gamma_3})$, $0 < \gamma_3 < 1$, $\exp\left(\dfrac{\ln|y|}{\ln|\ln|y||}\right)$, функции, имеющие отличный от нуля конечный предел при $y \to Y_0$, и др.

Лемма 1.5. (см. [79], Глава 1, п. 1.5, стр. 23-30) *Пусть* $L(y)$, $L_1(y)$,

$L_2(y)$ – медленно меняющиеся функции при $y \to Y_0$ ($Y_0 \in \{0, \pm\infty\}$). Тогда:

1) *для любого $\gamma > 0$*

$$\lim_{y \to Y_0} |y|^{\gamma} L(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad Y_0 = 0, \\ +\infty, & \text{если} \quad Y_0 = \pm\infty, \end{cases} \quad \lim_{y \to Y_0} |y|^{-\gamma} L(y) = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad Y_0 = 0, \\ 0, & \text{если} \quad Y_0 = \pm\infty; \end{cases}$$

2) $\lim\limits_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \dfrac{\ln L(y)}{\ln |y|} = 0;$

3) *функции $L_1(y) \cdot L_2(y)$, $L_1(y) + L_2(y)$, $L^{\alpha}(y)$ (для любого $\alpha \in (-\infty, +\infty)$), $L_1(L_2(y))$ (если $\lim\limits_{y \to Y_0} L_2(y) = Y_0$) являются медленно меняющимися при $y \to Y_0$;*

4) *для $\alpha \neq -1$ интеграл $\displaystyle\int_A^y |t|^{\alpha} L(t)dt = \frac{|y|^{\alpha+1} \operatorname{sign} y}{\alpha + 1} L(y)(1 + o(1))$ при $y \to Y_0$,*

где $A = y_0$ ($y_0 \in \Delta_{Y_0}$), если $\displaystyle\int_{Y_0}^{y_0} |t|^{\alpha} L(t)dt = \pm\infty$ и $A = Y_0$, если

$$\left| \int_{Y_0}^{y_0} |t|^{\alpha} L(t) \ dt \right| < +\infty;$$

5) *функция $l(y) = \displaystyle\int_A^y |t|^{-1} L(t) \ dt$ является медленно меняющейся при $y \to Y_0$,*

причем $\lim\limits_{y \to Y_0} \dfrac{L(y)}{l(y)} = 0$, где A определено в 4).

Отметим, что из леммы 1.3, формул (1.20), (1.21) для непрерывно дифференцируемой функции $\varphi : \Delta_{Y_0} \to (0, +\infty)$ ($Y_0 \in \{0, \pm\infty\}$), удовлетворяющей условию

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \sigma,$$

следует, что она является правильно меняющейся при $y \to Y_0$ порядка σ.

Замечание 1.1. *Очевидно, что функция $\varphi_0(y) = |y|^{\sigma} L_0(y)$, где L_0 определена в лемме 1.4, непрерывно дифференцируема на промежутке Δ_{Y_0} и* *удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\varphi(y)}{\varphi_0(y)}=1,\quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{y\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)}=\sigma.$$

Функции L_0, φ_0, указанные в замечании 1.1, называют соответственно нормализованными медленно, правильно меняющимися функциями при $y\to Y_0$ соответственно.

Кроме того, если t лежит в левой окрестности ω, то легко показать, что условие

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}=\sigma, \tag{1.22}$$

является достаточным, чтобы непрерывно дифференцируемая функция $y:[a,\omega[\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ являлась правильно меняющейся порядка σ, где функция $\pi_\omega(t)$ определена выше (см. стр. 20) при $t\uparrow\omega$.

Введенное для $Y_0=+\infty$ в [93] (см. [93], Ch.2, par.2.4, P.84) определение быстро меняющейся функции может быть обобщено на случай $Y_0=-\infty$, $Y_0=0$. Простейшими примерами быстро меняющейся при $y\to+\infty$ функциями может служить e^y (быстро растущая функция), функция e^{-y} (быстро убывающая), а при $y\to 0$ функции $e^{1/y}$ ($y\downarrow 0$) и $e^{-1/y}$ ($y\uparrow 0$). Легко доказать, что если непрерывно дифференцируемая функция y, определенная в левой окрестности ω ($\omega\le+\infty$), удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}=\pm\infty$, то тогда она является быстро меняющейся при $t\uparrow\omega$.

Теперь мы можем провести краткий экскурс в теорию дифференциальных уравнений, при исследовании которых использовались правильно и быстро меняющиеся функции. Впервые правильно меняющиеся функции были использованы в 1947 году В. Авакумовичем (V.G. Avakumovič) при рассмотрении обобщенного уравнения Эмдена – Фаулера

$$y''(t) = p(t)\,|\,y\,|^{\sigma}\,. \qquad (1.23)$$

В работе [89] была доказана

Теорема 1.7. *Пусть в уравнении (1.23)* $\sigma > 1$, $p -$ *положительная правильно меняющаяся на* ∞ *порядка* $n > -2$. *Тогда каждое положительное решение этого уравнения, стремящееся к нулю при* $t \to +\infty$, *допускает представление вида*

$$y(t) \sim \left(\frac{(1+\sigma+n)(n+2)}{(\sigma-1)^2} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \left(t^2 p(t) \right)^{-\frac{1}{\sigma-1}} \quad при \quad t \to +\infty.$$

Вплоть до середины 70-х XX столетия идея привлечения правильно и быстро меняющихся функций не находила своего дальнейшего развития. Толчком к использованию таких функций к описанию классов уравнений, а также свойств и поведения решений дифференциальных уравнений стало опубликование теории регулярно меняющихся функций в монографии 1976 года Е. Сенеты (Eugence Seneta). Так, работы В. Марича (V. Marič), М. Томича (M. Tomič), начиная с 1976 года (см., например, [110] –[113]), затрагивают изучение двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с правильно меняющимися в нуле нелинейностями, а для линейных дифференциальных уравнений второго порядка ставился вопрос о наличии и асимптотики правильно меняющихся, а также быстро меняющихся на $+\infty$ решений в работах Е. Омей (E. Omey, [117]), а позже в работах В. Марича (V. Marič), М. Томича (M. Tomič) и др. Результаты указанных исследований линейных, а также нелинейных уравнений отражены в монографии [114].

Отметим, что приведенное доказательство В. Авакумовичем (V.G. Avakumovič) теоремы 1.7 было громоздким. Только в 1991 году Дж. Гелюк (J.L.Geluk, [103]) с привлечением результатов для медленно меняющихся функций представил более простое её доказательсво. Следует отметить, что ни В. Авакумович (V.G. Avakumovič), ни Дж. Гелюк (J.L. Geluk) не исследовали случай $n \le -2$, а также не установили условия существования решений, асимптотику которых данные авторы описывали.

Вопрос о наличии решений уравнения

$$y''(t) = p(t)\varphi(y), \qquad (1.24)$$

стремящихся к нулю, был снят теоремой Дж. Вонга (J.S.W. Wong) [123]. Оказалось, что в предположении $y^{-1}\varphi(y)$ – возрастающая функция, $p:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$, $\varphi:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ – непрерывные функции, условие

$$\int_a^\infty tp(t)dt = \infty \quad (a \ge 0)$$

является необходимым и достаточным для существования положительных, стремящихся к нулю решений дифференциального уравнения (1.24).

Наличию решения при $t \to +\infty$ уравнения (1.24), которое вместе с производной первого порядка стремится к нулю, когда функция φ является непрерывной и правильно меняющейся в нуле, посвящена работа С.Д. Талиаферро (S.D. Taliaferro) [120].

Позже введенный класс О-регулярно меняющихся функций, являющийся расширением класса правильно меняющихся функций на бесконечности (в нуле), позволили получать оценки для некоторых соотношений, содержащих решения уравнения (1.24). Так, в работах В. Марича, М. Томича (V. Marič, M. Tomič) [120] и В. Марича (V. Marič) [123] для исчезающего в бесконечности решения уравнения (1.24) были установлены двухсторонние асимптотические оценки отношения $y(t)/\varphi(y(t))$.

Предполагая, что в уравнении (1.24) функция p – правильно меняющаяся порядка $n \ge -2$ на бесконечности, а φ – правильно меняющаяся порядка $\sigma > 1$ в нуле, и пользуясь представлениями (1.20), в [114] при $Y_0 = 0$ установлены порядок роста каждого решения, а также неявные асимптотические представления этих решений при $t \to +\infty$.

Следует также отметить результаты исследований В. Марича и З. Радасина (V. Marič, Z. Radašin), [113], С.Д. Талиаферро (S.D. Taliaferro) [121] и В. Марича(V. Marič) [114], в которых одна из функций либо p при

$t \to +\infty$, либо φ при $y \to 0$ являлась быстро меняющейся.

Позже в работах В.М. Евтухова и Л.А. Кирилловой (см. [20], [46] – [48]) для двучленного уравнения

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1.25}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p:[a,\omega) \to (0,+\infty)$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$ – непрерывная функция, $\varphi:\Delta_{Y_0} \to (0,+\infty)$ ($Y_0 \in \{0,\pm\infty\}$, Δ_{Y_0} – односторонняя окрестность Y_0) – дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi''(y)}{\varphi'(y)} = \sigma, \tag{1.26}$$

впервые была предпринята попытка изучения $P_\omega(\lambda_0)$ – решений, которые с учетом области определения функции φ обозначались как $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ – решения уравнения (1.25). Легко видеть, что в силу соотношения (1.26) нелинейность φ является правильно меняющейся при $y \to Y_0$ $(y \in \Delta_{Y_0})$ порядка $\sigma+1$. Разработанный здесь метод установления асимптотики и условий существования $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ – решений уравнения (1.25) был в дальнейшем усовершенствован в работах В.М. Евтухова и М.А. Белозёровой ([24], [4, 5, 6]) для дифференциального уравнения

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1.27}$$

где $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p:[a,\omega[\to]0,+\infty[$ – непрерывная функция, функции $\varphi_i:\Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ ($Y_i \in \{0,\pm\infty\}$, Δ_{Y_i} – односторонняя окрестность Y_i $(i=0,1)$) – дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{z\varphi_i'(z)}{\varphi_i(z)} = \sigma_i \ \ (\sigma_i \in R), \ \ \limsup_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}} \left|\frac{z\varphi_i''(z)}{\varphi_i'(z)}\right| < +\infty \ \ (i=0,1), \ \sigma_0+\sigma_1 \ne 1. \tag{1.28}$$

Отметим, что из условий (1.28) вытекает, что функции φ_i $(i=0,1)$ являются непрерывными правильно меняющимися при $y^{(i)} \to Y_i \quad (i=0,1)$ порядков $\sigma_i \quad (i=0,1)$. Описать здесь асимптотические свойства монотонных решений уравнения (1.26), во многом, стало возможным благодаря введенному классу $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решений уравнения (1.27), который является конкретизированным для уравнения (1.27) (с учетом области определения функций φ_0, φ_1) класса $P_\omega(\lambda_0)-$решений, описанном на странице 20.

Определение 1.7. *Решение у уравнения (1.27), заданное на промежутке* $[t_0,\omega[\subset[a,\omega[$, *называется* $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$*решением, где* $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, *если для него соблюдаются условия*

$$y^{(i)}(t)\in\Delta_{Y_i} \text{ при } t\in[t_0,\omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t)=Y_i \quad (i=0,1), \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)}=\lambda_0.$$

Приведем один из результатов исследований М.А. Белозёровой. Вводя обозначения

$$\lambda_0^i=\begin{cases}\lambda_0, \text{ если } i=0,\\ 1, \text{ если } i=1,\end{cases} \quad L_i(z)=\varphi_i(z)|z|^{-\sigma_i} \quad \left(i\in\{0,1\}\right),$$

$$I(t)=\int_{A_\omega}^t p(\tau)\left|\pi_\omega(\tau)\right|d\tau, \quad A_\omega=\begin{cases}a, \text{ если } \int_a^\omega p(\tau)\left|\pi_\omega(\tau)\right|d\tau=+\infty,\\ \omega, \text{ если } \int_a^\omega p(\tau)\left|\pi_\omega(\tau)\right|d\tau<+\infty,\end{cases}$$

(π_ω определена выше на стр. 20), в [7] доказывалась следующая

Теорема 1.8. *Для существования у уравнения* (1.27) $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$ *решений при* $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ *необходимо, а если*

$$\lambda_0\ne\sigma_1-1, \text{ либо } \lambda_0=\sigma_1-1 \text{ и } \lambda_0\left(\sigma_0+\sigma_1-1\right)>0,$$

то и достаточно выполнение условий

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}=\frac{\sigma_0+\sigma_1-1}{1-\lambda_0}, \quad Y_i=\begin{cases}\pm\infty, \text{ если } \alpha_0\lambda_0^i \operatorname{sign} y'(t)>0,\\ 0, \text{ если } \alpha_0\lambda_0^i \operatorname{sign} y'(t)<0\end{cases} \left(i=0,1\right),$$

$$\alpha_0\lambda_0 y_0^0>0, \ \exists b\in\left[a,\omega\right[: \alpha_0 y_1^0\left(1-\sigma_0-\sigma_1\right)I(t)>0 \quad \text{при} \quad t\in\left[b,\omega\right[.$$

Более того, при $t\uparrow\omega$ *каждое такое решение допускает асимптотические представление*

$$\frac{\left|y'(t)\right|^{-\sigma_0} y'(t)}{\varphi_1\left(y'(t)\right)L_0\left(y(t)\right)} = \alpha_0 \left|\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\right|^{-\sigma_0} \left(1-\sigma_0-\sigma_1\right) I(t)\left[1+o(1)\right],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\left(\lambda_0-1\right)\pi_\omega(t)}\left[1+o(1)\right].$$

Теорема 1.8 касается неособого случая $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Аналогичного типа результаты приведены и для особых случаев $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = \pm\infty$, $\lambda_0 = 1$.

При записи асимптотических представлений $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$решений уравнения (1.28) и их производных первого порядка использовалась неявная запись. Явная запись этих представлений предполагала выполнение дополнительного условия на функции φ_0, φ_1:

Определение 1.8. *Будем говорить, что непрерывная функция* $\varphi : \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ *вида* (1.20) *удовлетворяет условию* S, *если для любой непрерывно дифференцируемой медленно меняющейся при* $y \to Y_0$ *функции* $l : \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ *имеет место асимптотическое соотношение*

$$L(yl(y)) = L(y)[1+o(1)] \quad \text{\textit{при}} \quad y \to Y_0 \quad (y \in \Delta_{Y_0}).$$

Условию S заведомо удовлетворяют функции φ, для которых функция L имеет конечный предел при $y \to Y_0$, а также функции вида

$$\varphi(y) = |y|^\sigma |\ln y|^{\gamma_1}, \quad \varphi(y) = |y|^\sigma |\ln y|^{\gamma_1} |\ln|\ln y||^{\gamma_2},$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$, и многие другие.

Отметим, что в силу (1.28) и свойств правильно меняющихся функций дифференциальное уравнение (1.27) является асимптотически близким при $y^{(i)} \to Y_i \quad (i = 0,1)$ к обобщенному уравнению типа Эмдена–Фаулера

$$y'' = \alpha_0 p(t) |y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1},$$

асимптотическое поведение при $t \uparrow \omega$ решений которого достаточно подробно исследовано в [11].

Работы В.М. Евтухова и Л.А. Кирилловой, В.М. Евтухова и

М.А. Белозёровой, касающихся двучленных дифференциальных уравнений, стали предпосылкой изучения уравнений более сложного вида, например, дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих в правой части сумму слагаемых с правильно меняющимися относительно неизвестной функции и её производной первого порядка нелинейностями (см. [21, 22], [35, 36], [25], [50] – [55]). Так, при исследовании дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)[1 + r_i(t)]\varphi_{i0}(y)\varphi_{i1}(y'), \tag{1.29}$$

в работах В.М. Евтухова и А.А. Козьмы предполагалось, что $\alpha_i \in \{-1;1\}$ $(i = 1,...,m)$, $p_i : [a,\omega) \to (0,+\infty)$ $(i = 1,...,m;\ -\infty < a < \omega \le +\infty)$ – непрерывно дифференцируемые функции, $r_i : [a,\omega) \to \mathbb{R}$ $(i = 1,...,m)$ – непрерывные бесконечно малые при стремлении аргумента к особой точке функции, $\varphi_{ik} : \Delta_k \to (0,+\infty)$ $(k = 0,1;\ i = 1,\ldots,m)$ – непрерывно дифференцируемые правильно меняющиеся порядка σ_{ik} функции, для которых существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \varphi_{ik}(z)$,

где

$$\Delta_k = \begin{cases} либо\ [y_k^0, Y_k), \\ либо\ (Y_k, y_k^0], \end{cases} \quad y_k^0 \in \mathbb{R}, \quad Y_k = \begin{cases} либо\ 0, \\ либо\ \pm\infty \end{cases} (k = 0,1)$$

Для каждого из возможных случаев $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 = \pm\infty$ приведены условия, при выполнении которых на любом $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решении рассматриваемого уравнения его правая часть асимптотически эквивалентна одному слагаемому. В случае выполнения каждого из этих условий установлены необходимые и достаточные признаки существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений, а также получены асимптотические представления для таких решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$. В тех случаях, когда эти представления записаны в неявном виде, указаны дополнительные ограничения на нелинейности, которые позволяют записать асимптотику в явном виде.

Однако результаты исследований указанных авторов не охватывают случаи, когда дифференциальное уравнение второго порядка имеет более общий вид, например,

$$y'' = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(y)\varphi_{k1}(y')}{\sum\limits_{k=m+1}^{m+n} \alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(y)\varphi_{k1}(y')}, \tag{1.30}$$

где $\alpha_k \in \{-1,1\}$ $(k=\overline{1,m+n})$, $p_k : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(k=\overline{1,m+n})$ – непрерывные функции и $\varphi_{ki} : \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ $(k=\overline{1,n+m};\ i=0,1)$ – правильно меняющиеся при $z \to Y_i$ непрерывные функции порядков σ_{ki}.

Целью настоящей диссертационной работы является установление асимптотических представлений в окрестности особой точки $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений, а также условий существования этих решений для дифференциального уравнения второго порядка общего вида, асимптотически близкому в некотором смысле к уравнению (1.27). При этом предполагается снять дополнительные ограничения на гладкость коэффициентов p_k и нелинейностей φ_{ik} $(k=\overline{1,n+m},\ i=0,1)$, считая эти функции лишь непрерывными в области их определения. Этого можно достичь привлекая идеи работы В.М.Евтухова, А.М.Самойленко ([77]).

§ 1.3. Постановка задачи и основные результаты.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = f(t, y, y'), \tag{1.31}$$

где $f : [a,\omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$[1], Δ_{Y_i} $(i \in \{0,1\})$ – односторонняя окрестность Y_i, Y_i $(i \in \{0,1\})$ равно либо 0, либо $\pm\infty$. При этом также предполагается, что числа μ_i $(i=0,1)$, определяемые равенством

$$\mu_i = \begin{cases} -1, \ \textit{если} \ Y_i = -\infty \ \textit{либо} \ Y_i = 0 \ \textit{и} \ \Delta_{Y_i} - \textit{левая окрестность} \ 0, \\ 1, \ \textit{если} \ Y_i = +\infty \ \textit{либо} \ Y_i = 0 \ \textit{и} \ \Delta_{Y_i} - \ \textit{правая окрестность} \ 0, \end{cases}$$

таковы, что

$$\mu_0\mu_1 > 0 \quad \textit{при} \quad Y_0 = \pm\infty \quad \textit{и} \quad \mu_0\mu_1 < 0 \quad \textit{при} \quad Y_0 = 0. \tag{1.32}$$

Эти условия на μ_i $(i = 0,1)$ являются необходимыми для существования у уравнения (1.31) решений, определенных в левой окрестности ω, каждое из которых удовлетворяет условиям

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \ \textit{при} \qquad t \in [t_0, \omega[, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \ \ (i = 0,1). \tag{1.33}$$

Среди строго монотонных вместе с первыми производными в некоторой левой окрестности ω решений уравнения (1.31) можно выделить лишь решения, допускающие либо представления вида

$$y(t) = c_0 + o(1), \ y(t) = \pi_\omega(t)[c_1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{1.34}$$

где c_0, c_1 – отличные от нуля вещественные постоянные, либо удовлетворяющие условиям (1.33).

Вопрос о существовании у уравнения (1.31) решений с представлениями (1.34) может быть, в целом, решен или с использованием при $\omega = +\infty$ теоремы 1.3 или при $\omega \le +\infty$ идей, заложенных в работе [13].

Ввиду отсутствия для решений со свойствами (1.33) конкретных представлений возникает необходимость выделения из их множества наиболее широкого класса решений, допускающих получение таких представлений. Одним из таких классов решений является класс $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений, введеный на странице 31.

В данной диссертационной работе для уравнения (1.31) ставится задача установления асимптотики при $t \uparrow \omega$ всех возможных типов $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений уравнения (1.31). В зависимости от значений λ_0, конечных или равных $\pm\infty$, они обладают разными асимптотическими свойствами. При этом возникают неособые случаи, когда $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, и особые – когда $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 = \pm\infty$.

В каждом из перечисленных случаев на функцию f накладывается условие $(RN)_{\lambda_0}$ (RN–регулярная нелинейность), при выполнении которого f в окрестности особой точки на $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решении асимптотически эквивалентна функции $\alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')$, где $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $p:[a,\omega[\to]0,+\infty[-$ непрерывная функция, $\varphi_i:\Delta_{Y_i}\to]0,+\infty[$ $(i=0,1)-$ непрерывные правильно меняющиеся при $y^{(i)}\to Y_i$ $(i=0,1)$ функции порядков σ_i $(i=0,1)$. Отметим, что в условии $(RN)_{\lambda_0}$ функции p и φ_i $(i=0,1)$, а также постоянная α_0 зависят от выбора λ_0. Даже в неособом случае $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, рассмотренном в данной работе, при различных двух $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ соответствующие им функции p и φ_i $(i=0,1)$, а также α_0 являются, вообще говоря, различными. Это легко показать на примере из второй главы работы.

Следует заметить, что если при некотором λ_0 выполнено условие $(RN)_{\lambda_0}$, то получим уравнение типа (1.27). Однако в отличие от работ, посвященных двучленным дифференциальным уравнениям, здесь функции p и φ_i $(i=0,1)$ предполагаются непрерывными.

Основные результаты диссертационной работы содержатся в главах II-IV. Во второй главе рассмотрен неособый случай $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, когда при $t\uparrow\omega$ каждое $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решение и его производная являются согласно леммам 1.2 и 1.3 правильно меняющимися, отличными от медленно меняющихся.

В третьей главе описан особый случай $\lambda_0=1$, т.е. когда каждое $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решение при $t\uparrow\omega$ является согласно лемме 1.2 (п.4) быстро растущим. В четвертой главе исследуется особый случай: $\lambda_0=\pm\infty$, в пятой – особый случай: $\lambda_0=0,$. Если $\lambda_0=\pm\infty$, то производная $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решения при $t\uparrow\omega$ согласно леммам 1.2 (п.2), 1.3 является медленно меняющейся, а само решение – правильно меняющейся ненулевого порядка. В силу лемм 1.2 (п.5) и 1.3 для $\lambda_0=0$, каждое $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решение при $t\uparrow\omega$ является медленно меняющимся, тогда как производная такого решения есть правильно меняющейся ненулевого порядка функцией. Опираясь на вспомогательные утверждения (лемма 2.3, лемма 2.2) о существовании исчезающих на бесконечности решений одной двумерной системы неавтономных квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка для каждого случая $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 = \pm\infty$ сформулированы и доказаны теоремы (2.1, 3.1, 4.1, 5.1) об условиях существования и асимптотическом поведении в окрестности особой точки $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$решения уравнения (1.31) и его производной первого порядка при $t \uparrow \omega$ и соблюдении условия $(RN)_{\lambda_0}$. Полученные неявные представления для решений уравнения (1.31) и его производной первого порядка при соблюдении условий S на функции φ_i $(i = 0,1)$ установлены в явном виде (теоремы 2.2, 3.2, 4.2, 5.2). Результаты диссертационного исследования позволили также описать (следствия 2.1, 2.2, 3.1, 4.1, 4.2, 5.1, 5.2) асимптотическое поведение (в случае существования) некоторых типов сингулярных решений, а именно сингулярных $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$решений при $t \uparrow t_*$.

Определение 1.9. *Решение* y *уравнения* (1.31)*, заданное на промежутке* $[t_0, t_*[\subset [a, t_*[$ $(t_* \in]a, \omega[)$*, называется* $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$*решением, где* $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$*, если для него соблюдаются условия*

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \quad \text{при } t \in [t_0, t_*[, \qquad \lim_{t \uparrow t_*} y^{(i)}(t) = Y_i \ \ (i = 0,1)\ , \ \lim_{t \uparrow t_*} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)\, y''(t)} = \lambda_0.$$

Также полученные в работе результаты проиллюстрированы на уравнении (1.30) для каждого из случаев $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 = \pm\infty$ (следствия 2.3, 2.4, 2.5, 3.2, 3.3, 4.3, 4.4, 4.5, 5.3, 5.4, 5.5).

Результаты главы II отражены в работах [26], [27], [61], [62], [64], [65], [66], [68], [70], [106], [108], главы III – в работах [63], [66], [69],

[72], [73], главы IV, V – в работах [67], [71], [74], [75].

Выводы к главе I.

В §1.1 проведен обзор исследований дифференциальных уравнений со степенными нелинейностями, а также уравнений общего вида. § 1.2 посвящен основным свойствам правильно и медленно меняющихся функций, отмечены результаты исследований в области дифференциальных уравнений с привлечением этих функций. Проделанный в §§1.1–1.2. анализ существующих результатов для дифференциальных уравнений второго порядка позволил выявить класс уравнений общего вида, не изученный в литературе, который в некотором смысле близок к двучленным. Этому классу уравнений посвящена данная диссертационная работа. В частности изучаемое уравнение может охватывать уравнения вида (1.30). В §1.3. указан объект исследования, сформулированы задачи исследования, кратко изложено содержание глав диссертации.

ГЛАВА II.
УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕОСОБОМ СЛУЧАЕ: $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

§ 2.1. Формулировка основного результата

В данной главе рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = f(t, y, y'), \tag{2.1}$$

где $f:[a,\omega[\times\Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1}\to\mathbb{R}-$непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty$[1], Δ_{Y_i} $(i\in\{0,1\})-$односторонняя окрестность Y_i, Y_i $(i\in\{0,1\})$ равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Определение 2.1. *Решение* y *уравнения* (2.1), *заданное на промежутке* $[t_0,\omega[\subset[a,\omega[$, *называется* $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$*решением, где* $-\infty\le\lambda_0\le+\infty$, *если для него наряду с*

$$y^{(i)}(t)\in\Delta_{Y_i} \quad \text{при} \quad t\in[t_0,\omega[, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t)=Y_i \ \ (i=0,1) \tag{2.2}$$

соблюдается условие

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)}=\lambda_0.$$

Целью настоящей главы является исследование существования и поведения $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решений уравнения (2.1) при $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ и выполнении условия $(RN)_{\lambda_0}$, налагаемого на функцию f.

Определение 2.2. *Будем говорить, что функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)_{\lambda_0}$ *при* $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, *если существуют число* $\alpha_0\in\{-1,1\}$, *непрерывная функция* $p:[a,+\omega[\to]0,+\infty[$ *и непрерывные правильно меняющиеся при* $z\to Y_i$ $(i=0,1)$ *функции* $\varphi_i:\Delta Y_i\to]0,+\infty[$ *порядков*

---

[1] Считаем, что $a>1$ в случае $\omega=+\infty$, и $a>\omega-1$ - в случае $\omega<+\infty$.

σ_i $(i=0,1)$ *такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций* $z_i:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_i}$ $(i=0,1,\;\; t_0\in[a,\omega[)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_i(t)=Y_i \quad (i=0,1), \tag{2.3}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_0'(t)}{z_0(t)}=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_1'(t)}{z_1(t)}=\frac{1}{\lambda_0-1}, \tag{2.4}$$

имеет место представление

$$f(t,z_0(t),z_1(t))=\alpha_0 p(t)\varphi_0(z_0(t))\varphi_1(z_1(t))[1+o(1)] \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{2.5}$$

где

$$\pi_\omega(t)=\begin{cases} t, & \textit{если } \omega=+\infty,\\ t-\omega, & \textit{если } \omega<+\infty.\end{cases}$$

Обратим внимание на то, что в определении 2.2 выбор α_0 и функций p, φ_i $(i=0,1)$ зависят от выбора $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Кроме того, из определений 1.5, 2.2, соотношения (1.22) следует, что $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решение уравнения (2.1), а также его производная при $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ и $t\uparrow\omega$ являются правильно меняющимися порядков $\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0-1}$, $\dfrac{1}{\lambda_0-1}$ соответственно.

Для формулировки основного результата в предположении, что $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ и функция f удовлетворяет условию $(RN)_{\lambda_0}$, положим

$$I_0(t)=\int_{A_0}^{t}p(\tau)d\tau, \quad I_1(t)=\int_{A_1}^{t}\pi_\omega(\tau)p(\tau)d\tau,$$

$$Q(t)=\begin{cases} I_0(t), \; \textit{если } 1-\sigma_0\lambda_0-\sigma_1\neq 0,\\ \pi_\omega^{-1}(t)I_1(t), \; \textit{если } 1-\sigma_0\lambda_0-\sigma_1=0,\end{cases}$$

$$\gamma=\begin{cases} 1-\sigma_0\lambda_0-\sigma_1, \; \textit{если } 1-\sigma_0\lambda_0-\sigma_1\neq 0,\\ \lambda_0-1, \; \textit{если } 1-\sigma_0\lambda_0-\sigma_1=0,\end{cases}$$

где пределы интегрирования $A_i\in\{a;\omega\}$ $(i=0,1)$ и выбраны так, чтобы интегралы I_i $(i=0,1)$ стремились либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $t\uparrow\omega$;

$$\mu_i = \begin{cases} -1, \ \textit{если} \ Y_i = -\infty \ \textit{либо} \ Y_i = 0 \ \textit{и} \ \Delta_{Y_i} - \textit{левая окрестность} \ 0, \\ 1, \ \textit{если} \ Y_i = +\infty \ \textit{либо} \ Y_i = 0 \ \textit{и} \ \Delta_{Y_i} - \ \textit{правая окрестность} \ 0, \end{cases}$$

причем

$$\mu_0\mu_1 > 0 \quad \textit{при} \quad Y_0 = \pm\infty \quad \textit{и} \quad \mu_0\mu_1 < 0 \quad \textit{при} \quad Y_0 = 0. \qquad (2.6)$$

Заметим, что числа μ_0, μ_1 определяют знаки любого $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$решения уравнения (2.1) и его производной в некоторой левой окрестности ω. При этом, следует отметить, что условия (2.6) являются необходимыми для существования у уравнения (2.1) решений, заданных на промежутке $[t_0,\omega[\subset[a,\omega[$ и удовлетворяющих условиям (2.2). Кроме того, при выполнении условия $(RN)_{\lambda_0}$ знак второй производной любого $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$решения уравнения (2.1) в некоторой левой окрестности ω совпадает со значением α_0. Тогда с учетом (2.6), имеем

$$\alpha_0\mu_1 > 0 \quad \textit{при} \quad Y_1 = \pm\infty \quad \textit{и} \quad \alpha_0\mu_1 < 0 \quad \textit{при} \quad Y_1 = 0. \qquad (2.7)$$

Основным результатом данной главы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ *и функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)_{\lambda_0}$, *причем порядки* $\sigma_i \ (i=0,1)$ *правильно меняющихся при* $y^{(i)} \to Y_i \ (i=0,1)$ *функций* $\varphi_i \ (i=0,1)$ *таковы, что* $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$. *Тогда для существования у дифференциального уравнения* (2.1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$*решений необходимо, а если выполнено одно из следующих условий*

$$\textit{либо} \ \lambda_0 \neq \sigma_1 - 1, \quad \textit{либо} \ \lambda_0 = \sigma_1 - 1 \ \textit{и} \quad (1-\sigma_1)(1-\sigma_0-\sigma_1) > 0, \qquad (2.8)$$

то и достаточно, чтобы наряду с неравенствами (2.6), (2.7) соблюдались условия

$$\alpha_0\mu_1\gamma Q(t) > 0, \quad \mu_0\mu_1\lambda_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t\in[a,\omega[\qquad (2.9)$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{Q(t)} = \frac{\gamma}{\lambda_0 - 1}, \qquad (2.10)$$

$$\mu_0 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} = Y_0, \qquad \mu_1 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} = Y_1. \tag{2.11}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = \alpha_0\gamma Q(t)[1+o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0(1+o(1))}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)} \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{2.12}$$

причем таких решений существует однопараметрическое семейство, если выполняется неравенство $\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)<0$ *и двухпараметрическое семейство, если* $\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)>0$ *и* $\mu_0\mu_1(\lambda_0+1-\sigma_1)\lambda_0>0.$

Заметим, что асимптотические представления (2.12) записаны в неявном виде. Укажем условия, при которых эти представления могут быть переписаны в явном виде.

Замечание 2.1. (см. [76]) *Если функция* φ_i $(i\in\{0,1\})$ *удовлетворяет условию* S, *а функция* $z:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_i}$ *непрерывно дифференцируемая и такая, что*

$$\lim_{t\uparrow\omega} z(t) = Y_i, \qquad \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\big[r+o(1)\big] \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega,$$

где $r-$*отличная от нуля вещественная постоянная,* $\xi-$*непрерывно дифференцируемая в некоторой левой окрестности* ω *вещественная функция, для которой* $\xi'(t)\neq 0$, *то*

$$L_i(z(t)) = L_i\left(\mu_i|\xi(t)|^r\right)\ [1+o(1)] \ \textit{при}\ t\uparrow\omega,$$

поскольку в данном случае

$$z(t) = v(t)l(v(t)), \ \textit{где}\ v(t) = \mu_i|\xi(t)|^r,$$

и

$$\lim_{\substack{v\to Y_i\\ v\in\Delta_{Y_i}}} \frac{v\,l'(v)}{l(v)} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{v(t)\,l'(v(t))}{l(v(t))} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{v(t)\left(\dfrac{z(t)}{v(t)}\right)'}{\left(\dfrac{z(t)}{v(t)}\right)v'(t)} = \lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\xi(t)z'(t)}{r\xi'(t)z(t)}-1\right] = 0.$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, *функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)_{\lambda_0}$, $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$ *и функции* φ_i $(i = 0,1)$ *удовлетворяют условию* S. *Тогда каждое* $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$*решение (в случае их существования) дифференциального уравнения* (2.1) *допускает при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y(t) = \mu_0 \left| \frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}{\lambda_0} \right|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} L(t)[1 + o(1)],$$
$$y'(t) = \mu_1 \left| \frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}{\lambda_0} \right|^{\frac{\sigma_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}} L(t)[1 + o(1)], \qquad (2.13)$$

где

$$L(t) = \left| \gamma Q(t) L_0\left(\mu_0 \,|\, \pi_\omega(t) \,|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}} \right) L_1\left(\mu_1 \,|\, \pi_\omega(t) \,|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}} \right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}.$$

Доказательство теоремы 2.1, а также установление основных результатов других глав базируется на некоторых признаках существования исчезающих на бесконечности решений системы двух квазилинейных уравнений первого порядка.

§ 2.2. Вспомогательное утверждение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$z_i' = f_i(x) + \sum_{j=1}^{2} p_{ij}(x) z_j + g_i(x) \sum_{j=1}^{2} r_{ij}(x, z_1, z_2) \quad (i = 1,2), \qquad (2.14)$$

где $f_i, g_i : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$, $p_{ij} : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ $(i, j = 1,2)$, $r_{ij} : \Omega^2_{ab} \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1,2)-$непрерывные функции, $\Omega^2_{ab} = [a, +\infty[\times R^2_b$, $R^2_b = \{(z_1, z_2) : |\, z_i \,| \leq b,\ i = 1,2\}$, $b-$некоторая положительная постоянная. При этом будем также предполагать, что функции r_{ij} $(i, j = 1,2)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{x\to+\infty} r_{i1}(x,z_1,z_2)=0 \ \ (i=1,2) \ \textit{равномерно по} \ (z_1,z_2)\in R_b^2, \tag{2.15}$$

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0} \frac{r_{i2}(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|}=0 \ \ (i=1,2) \ \textit{равномерно по} \ \ x\in[a,+\infty[. \tag{2.16}$$

Введем для системы (2.14) вспомогательные функции, полагая

$$F_i(x)=\int_{\alpha_i}^{x} f_i(\tau)e^{\int_\tau^x p_{ii}(s)ds}\,d\tau,\quad G_i(x)=\int_{\beta_i}^{x} |g_i(\tau)|\,e^{\int_\tau^x p_{ii}(s)ds}\,d\tau \ \ (i=1,2),$$

$$P_{ij}(x)=\int_{\alpha_{ij}}^{x} |p_{ij}(\tau)|\,e^{\int_\tau^x p_{ii}(s)ds}\,d\tau \ \ (i\ne j,\ i,j=1,2),$$

где

$$\alpha_i=\begin{cases} a, \ \textit{если} \ \int_a^{+\infty} f_i(\tau)e^{-\int_a^\tau p_{ii}(s)ds}\,d\tau \ \ \textit{сходится}, \\ +\infty, \ \textit{если} \ \int_a^{+\infty} f_i(\tau)e^{-\int_a^\tau p_{ii}(s)ds}\,d\tau \ \ \textit{расходится}, \end{cases}$$

$\beta_i,\alpha_{ij}=\{a,+\infty\}$ и выбраны так, чтобы интегралы $\int_a^{+\infty}|g_i(\tau)|\,e^{-\int_a^\tau p_{ii}(s)ds}\,d\tau$ и $\int_a^{+\infty}|p_{ij}(\tau)|\,e^{-\int_a^\tau p_{ii}(s)ds}\,d\tau$ соответственно стремились либо к нулю, либо к $+\infty$.

Лемма 2.1. *Пусть функции* r_{ij} $(i,j=1,2)$ *удовлетворяют условиям* (2.15), (2.16)*, а функции* F_i,G_i $(i=1,2)$ *и* P_{ij} $(i\ne j,\ i,j=1,2)$ *таковы, что*

$$\lim_{x\to+\infty}F_i(x)=0, \qquad \limsup_{x\to+\infty}|G_i(x)|<+\infty \quad (i=1,2), \tag{2.17}$$

$$\limsup_{x\to+\infty}|P_{ij}(x)|=P_{ij}^0=\mathrm{const} \quad (i\ne j,\ i,j=1,2). \tag{2.18}$$

Пусть, кроме того, соблюдаются неравенства

$$|P_{21}^0|<1,\ |P_{12}^0P_{21}^0|<1. \qquad (2.19)$$

Тогда система дифференциальных уравнений (2.14) *имеет хотя бы одно решение* $(z_1,z_2):[x_0,+\infty[\to R_b^2$ *(*$x_0\ge a$*), стремящееся к нулю при* $x\to+\infty$.

Более того, существует целое $k-$*параметрическое семейство* $(k\in\{1,2\})$ *таких решений, если среди функций* p_{ii} $(i=1,2)$ *имеется* k *функций, для которых*

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x p_{ii}(s)ds=-\infty. \qquad (2.20)$$

Доказательство. Полагая $B_0=max\{|P_{21}^0|,|P_{12}^0P_{21}^0|\}$, подберем с учетом (2.19) числа $q\in]B_0,1[$, $x_1\ge a$, $\varepsilon_{02}>0$ таким образом, чтобы соблюдались неравенства

$$B_i(x)\le q\ \ (i=1,2)\ \ \textit{при}\ \ x\ge x_1, \qquad (2.21)$$

где

$$B_2(x)=2\varepsilon_{02}|G_2(x)|+|P_{21}(x)|,\ B_1(x)=2\varepsilon_{02}|G_1(x)|+\left|\int_{\alpha_{12}}^x B_2(\tau)|p_{12}(\tau)|e^{\int_\tau^x p_{11}(s)ds}d\tau\right|.$$

Для числа $\varepsilon_{02}>0$ в силу (2.16) найдется $b_0\in]0,b]$, такое, что на множестве $\Omega_{ab_0}^2$ выполняются неравенства

$$|r_{i2}(x,z_1,z_2)|<\varepsilon_{02}(|z_1|+|z_2|) \qquad (i=1,2). \qquad (2.22)$$

Далее, выберем постоянные c_i^0 $(i=1,2)$, взяв в качестве c_i^0 $(i\in\{1,2\})$ произвольное отличное от нуля вещественное число в случае, когда соблюдается условие (2.20), и полагаем $c_i^0=0-$в противном случае. При таком их выборе существуют в силу условий (2.17) и (2.18) числа $x_2\ge x_1$ и $\varepsilon_{01}>0$ такие, что

$$A_2(x,c_2^0)\le b_0(1-q),\ A_1(x,c_1^0,c_2^0)\le b_0(1-q) \qquad \textit{при} \qquad x\ge x_2, \qquad (2.23)$$

где

$$A_2(x,c_2^0)=|c_2^0|e^{\int_a^x p_{22}(s)ds}+|F_2(x)|+\varepsilon_{01}|G_2(x)|,$$

$$A_1(x,c_1^0,c_2^0)=|c_1^0|e^{\int_a^x p_{11}(s)ds}+|F_1(x)|+\varepsilon_{01}|G_1(x)|+\left|\int_{\alpha_{12}}^x A_2(\tau,c_2^0)|p_{12}(\tau)|e^{\int_a^x p_{11}(s)ds}d\tau\right|.$$

Наконец, учитывая (2.15), подберем число $x_0 \geq x_2$ таким, чтобы на множестве $\Omega_{x_0 b}$ соблюдались неравенства

$$|r_{i1}(x,z_1,z_2)|<\varepsilon_{01} \qquad (i=1,2). \tag{2.24}$$

Пусть $C_{loc}\left([x_0,+\infty[;\mathbb{R}^2\right)$ – пространство непрерывных вектор-функций $z=(z_i)_{i=1}^2:[x_0,+\infty[\to\mathbb{R}^2$ с топологией равномерной сходимости на замкнутых отрезках из $[x_0,+\infty[$, а S – -подмножество тех из них, для которых $|z_i(x)|\leq b_0$ $(i=1,2)$ при $x\in[x_0,+\infty[$.

Выбрав произвольным образом постоянные c_1,c_2, удовлетворяющие неравенствам $0\leq|c_i|\leq|c_i^0|$ $(i=1,2)$, рассмотрим оператор $\Phi=(\Phi_i)_{i=1}^2:S\to C_{loc}\left([x_0,+\infty[;\mathbb{R}^2\right)$, определяемый рекуррентными соотношениями:

$$\Phi_2(z)(x)=c_2\ e^{\int_a^x p_{22}(s)ds}+F_2(x)+\int_{\alpha 21}^x p_{21}(\tau)z_1(\tau)e^{\int_\tau^x p_{22}(s)ds}d\tau+$$

$$+\int_{\beta_2}^x g_2(\tau)\sum_{j=1}^2 r_{2j}\left(\tau,z_1(\tau),z_2(\tau)\right)e^{\int_\tau^x p_{22}(s)ds}d\tau, \tag{2.25}$$

$$\Phi_1(z)(x)=c_1e^{\int_a^x p_{11}(s)ds}+F_1(x)+\int_{\alpha 12}^x p_{12}(\tau)\Phi_2(z)(\tau)e^{\int_\tau^x p_{11}(s)ds}d\tau+$$

$$+\int_{\overline{\beta}_1}^{x} g_1(\tau)\sum_{j=1}^{2} r_{1j}(\tau,z_1(\tau),z_2(\tau))e^{\int_{\tau}^{x} p_{11}(s)ds}\,d\tau,$$

где каждый из пределов интегрирования $\overline{\beta}_i$ $(i=1,2)$, $\overline{\alpha}_{12}$, $\overline{\alpha}_{21}$ равен x_0, если соответствующий ему из пределов интегрирования β_i $(i=1,2)$, α_{12}, α_{21} был до этого выбран равным a, и остается равным $+\infty-$ в противном случае.

Для любого $z\in S$ в силу (2.21) – (2.23)

$$|\Phi_2(z)(x)|\le A_2(x,c_2^0)+b_0B_2(x)\le b_0 \ \ при \ \ x\in[x_0,+\infty[,$$

и

$$|\Phi_1(z)(x)|\le A_1(x,c_1^0,c_2^0)+b_0B_1(x)\le b_0 \ \ при \ \ x\in[x_0,+\infty[.$$

Поэтому $\Phi(S)\subset S$.

Далее установим непрерывность оператора Φ.

Пусть $z^k=(z_i^k)_{i=1}^2\in S$ $(k=0,1,2,\dots)$ и $\lim\limits_{k\to+\infty} z^k(x)=z^0(x)$ равномерно на каждом конечном отрезке промежутка $[x_0;+\infty[$. Тогда в силу непрерывности функций r_{ij} $(i,j=1,2)$ на множестве Ω_{ab}^2

$$\lim_{k\to+\infty} r_{ij}\left(x,z_1^k(x),z_2^k(x)\right)=r_{ij}\left(x,z_1^0(x),z_2^0(x)\right) \tag{2.26}$$

равномерно на каждом конечном отрезке $[x_0;+\infty[$.

Покажем, что для произвольных $\varepsilon>0$ и $x_*>x_0$ при любом $i\in\{1,2\}$ существует натуральное число K_i, такое что

$$|\Phi_i(z^k)(x)-\Phi_i(z^0)(x)|<\varepsilon \qquad при \qquad k>K_i \qquad и \qquad x\in[x_0,x_*]. \tag{2.27}$$

Отсюда будет следовать, что $\lim\limits_{k\to+\infty}\Phi(z^k)(x)=\Phi(z^0)(x)$ равномерно на каждом конечном отрезке из $[x_0;+\infty[$, и тем самым будет доказана непрерывность оператора Φ.

В силу второго из условий (2.17), а также условия (2.18) найдется постоянная $M>0$, такая что при $x\in[x_0,+\infty[$ выполняются неравенства $|P_{ij}(x)|<M$ $(i,j=1,2)$, $|G_i(x)|<M$ $(i=1,2)$.

Выберем произвольным образом числа $\varepsilon > 0$, $x_* \in [x_0, +\infty[$ и установим сначала существование натурального числа K_2 для которого соблюдается (2.27) при $i = 2$.

В силу (2.25) имеем

$$\left|\Phi_2(z^k)(x) - \Phi_2(z^0)(x)\right| \le \left|\int\limits_{\overline{\alpha}21}^{x} |p_{21}(\tau)| |z_1^k(\tau) - z_1^0(\tau)| e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{\beta_2}^{x} |g_2(\tau)| \sum_{j=1}^{2} |r_{2j}(\tau, z_1^k(\tau), z_2^k(\tau)) - r_{2j}(\tau, z_1^0(\tau), z_2^0(\tau))| e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau\right|.$$

Для первого слагаемого, стоящего справа, рассмотрим в отдельности два случая, когда $\overline{\alpha}21 = x_0$ и $\overline{\alpha}21 = +\infty$.

Пусть $\overline{\alpha}21 = x_0$. Поскольку $\lim\limits_{k\to+\infty} z^k(x) = z^0(x)$ равномерно на каждом конечном отрезке из промежутка $[x_0; +\infty[$, то существует $K_{21}(\varepsilon)$ такое, что для любого $k > K_{21}(\varepsilon)$ и $x \in [x_0, x_*]$ будет выполнено неравенство $|z_1^k(x) - z_1^0(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Поэтому при $k > K_{21}$ и $x \in [x_0, x_*]$

$$\int\limits_{x_0}^{x} |p_{21}(\tau)| |z_1^k(\tau) - z_1^0(\tau)| e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau \le \frac{\varepsilon}{2M} \int\limits_{x_0}^{x} |p_{21}(\tau)| e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau = \frac{\varepsilon}{2M} |P_{21}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если же $\overline{\alpha}21 = +\infty$, то выберем достаточно большое число $x_1 > x_*$ так, чтобы соблюдалось неравенство

$$\int\limits_{x_1}^{+\infty} |p_{21}(\tau)|\, e^{-\int\limits_{x_0}^{\tau} p_{22}(s)ds} d\tau \le \frac{\varepsilon}{8b_0M} \int\limits_{x_*}^{+\infty} |p_{21}(\tau)|\, e^{-\int\limits_{x_0}^{\tau} p_{22}(s)ds} d\tau$$

и подберем натуральное $K_{21}(\varepsilon)$ таким, чтобы

$$|z_1^k(x)-z_1^0(x)|<\frac{\varepsilon}{4M} \quad \text{при } k>K_{21} \quad \text{и } x\in[x_0,x_1].$$

Тогда при $x\in[x_0,x_*]$ и $k>K_{21}$ будем иметь

$$\int\limits_{+\infty}^{x} |p_{21}(\tau)||z_1^k(\tau)-z_1^0(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau =$$

$$=e^{\int\limits_{x_0}^{x} p_{22}(s)ds}\left(\int\limits_{x}^{x_1} |p_{21}(\tau)||z_1^k(\tau)-z_1^0(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau+\int\limits_{x_1}^{+\infty} |p_{21}(\tau)||z_1^k(\tau)-z_1^0(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau\right)\le$$

$$\le e^{\int\limits_{x_0}^{x} p_{22}(s)ds}\left(\frac{\varepsilon}{4M}\int\limits_{x}^{x_1} |p_{21}(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau+2b_0\int\limits_{x_1}^{+\infty} |p_{21}(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau\right)\le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{4M} e^{\int\limits_{x_0}^{x} p_{22}(s)ds}\left(\int\limits_{x}^{x_1} |p_{21}(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau+\int\limits_{x_*}^{+\infty} |p_{21}(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau\right)\le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2M} e^{\int\limits_{x_0}^{x} p_{22}(s)ds}\int\limits_{x}^{+\infty} |p_{21}(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau=\frac{\varepsilon}{2M}|P_{21}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая теперь, что $\lim\limits_{k\to+\infty} r_{2j}(x,z_1^k(x),z_2^k(x))=r_{2j}(x,z_1^0(x),z_2^0(x)) \quad (j=1,2)$ равномерно на каждом конечном отрезке промежутка $[x_0;+\infty[$, аналогично предущему устанавливаем существование натурального K_{22} такого, что при $k>K_{22}$ и $x\in[x_0,x_*]$ соблюдается неравенство

$$\left|\int\limits_{\beta_2}^{x} |g_2(\tau)|\sum_{j=1}^{2}|r_{2j}(\tau,z_1^k(\tau),z_2^k(\tau))-r_{2j}(\tau,z_1^0(\tau),z_2^0(\tau))|e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Из вышеизложенного ясно, что

$$\left|\Phi_2(z^k)(x)-\Phi_2(z^0)(x)\right|<\varepsilon \text{ при } k>K_2=\max\{K_{21},K_{22}\} \text{ и } x\in[x_0,x_*].$$

Таким же способом с использованием уже установленного факта, что $\lim\limits_{k\to+\infty}\Phi_2(z^k)(x)=\Phi_2(z^0)(x)$ равномерно на любом отрезке из промежутка $[x_0,+\infty[$, доказываем при любых $\varepsilon>0$ и $x_*\in[x_0,+\infty[$ существование натурального K_1, для которого соблюдается неравенство (2.27) при $i=1$.

Далее покажем, что функции из множества образов $\Phi(S)$ являются равностепенно непрерывными и равномерно ограниченными на каждом отрезке из промежутка $[x_0,+\infty[$. Вследствие того, что Φ отображает ограниченное множество S в себя, функции из $\Phi(S)$ равномерно ограничены на $[x_0,+\infty[$. Кроме того, в силу (2.25) для любой функции $z\in S$

$$\Phi_2'(z)(x)=f_2(x)+p_{21}(x)z_1(x)+p_{22}(x)\Phi_2(z)(x)+g_2(x)\sum_{j=1}^{2}r_{2j}(x,z_1(x),z_2(x)),$$

$$\Phi_1'(z)(x)=f_1(x)+\sum_{j=1}^{2}p_{1j}(x)\Phi_j(z)(x)+g_1(x)\sum_{j=1}^{2}r_{1j}(x,z_1(x),z_2(x)).$$

Отсюда с учетом условий $z\in S$, $\Phi(S)\subset S$, (2.22) и (2.24) имеем

$$|\Phi_i'(z)(x)|\le|f_i(x)|+b_0\sum_{j=1}^{2}|p_{ij}(x)|+|g_i(x)|(\varepsilon_{01}+2b_0\varepsilon_{02})\ \ (i=1,2)\ \ \textit{при}\ x\in[x_0,+\infty[.$$

Поэтому ввиду непрерывности функций f_i, g_i $(i=1,2)$, p_{ij} $(i,j=1,2)$ на промежутке $[x_0,+\infty[$ для любых $x_*\ge x_0$ и $x^*\ge x_*$ существует число $M_*>0$, не зависящее от $z\in S$, такое, что $|\Phi_i'(z)(x)|\le M_*$ $(i=1,2)$ при $x\in[x_*,x^*]$. Отсюда следует, что функции из множества образов $\Phi(S)$ равностепенно непрерывны на каждом конечном отрезке из $[x_0,+\infty[$.

Таким образом, для Φ выполнены все условия теоремы Шаудера - Тихонова (см. [96], Ch.I, par.2, P. 9). Значит, существует $z\in S$, для которого верно равенство $\Phi(z)=z$. Эта вектор-функция $z:[x_0,+\infty[\to R^2_{b_0}$, очевидно, является решением системы (2.14). Покажем, что это решение стремится к нулю при $x\to+\infty$. Допустим противное. Тогда

$\max\limits_{i=1,2}\{\limsup\limits_{x\to+\infty}|z_i(x)|\} = \limsup\limits_{x\to+\infty}|z_l(x)| = c_0 > 0 \quad (c_o \le b_0)$ и, следовательно, для некоторой возрастающей последовательности $\{x_k\}$, такой, что $x_k \ge x_0$, $x_k \to +\infty$ справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{k\to+\infty}|z_l(x_k)| = c_0$. Поэтому для числа $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{c_0(1-q)}{1+q}\right[$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что соблюдаются неравенства

$$|z_l(x_k)| > c_0 - \varepsilon \text{ при } k \ge N, \quad z_i(x)| < c_0 + \varepsilon \ (i=1,2) \text{ при } x \ge x_N. \qquad (2.28)$$

В силу второго из этих неравенств, а также (2.17), (2.18) и (2.22) из (2.25) с учетом того, что $z \in S$ и $\Phi_i(z) = z_i \ (i=1,2)$, получим неравенства

$$|z_i(x)| \le \tilde{A}_i(z)(x) + (c_0+\varepsilon)\tilde{B}_i(x) \ (i=1,2) \quad \text{при } x \ge x_N, \quad (2.29)$$

в которых

$$\tilde{A}_2(z)(x) = C_2 e^{\int_a^x p_{22}(s)ds} + |F_2(x)| + \left|\int_{\tilde{\beta}_2}^x |g_2(\tau)||r_{21}(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau))| e^{\int_\tau^x p_{22}(s)ds} d\tau\right|,$$

$$\tilde{A}_1(z)(x) = C_1 e^{\int_a^x p_{11}(s)ds} + |F_1(x)| + \left|\int_{\tilde{\beta}_1}^x |g_1(\tau)||r_{11}(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau))| e^{\int_\tau^x p_{11}(s)ds} d\tau\right| +$$

$$+ \left|\int_{\tilde{\alpha}_{12}}^x |p_{12}(\tau)| \tilde{A}_2(z)(\tau) e^{\int_\tau^x p_{11}(s)ds} d\tau\right|,$$

$$\tilde{B}_2(x) = 2\varepsilon_{02}\left|\int_{\tilde{\beta}_2}^x |g_2(\tau)| e^{\int_\tau^x p_{22}(s)ds} d\tau\right| + \left|\int_{\tilde{\alpha}_{21}}^x |p_{21}(\tau)| e^{\int_\tau^x p_{22}(s)ds} d\tau\right|,$$

$$\tilde{B}_2(x) = 2\varepsilon_{02}\left|\int\limits_{\tilde{\beta}_2}^{x} |g_2(\tau)| e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau\right| + \left|\int\limits_{\tilde{\alpha}_{21}}^{x} |p_{21}(\tau)| e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau\right|,$$

$$\tilde{B}_1(x) = 2\varepsilon_{02}\left|\int\limits_{\tilde{\beta}_1}^{x} |g_1(\tau)| e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{11}(s)ds} d\tau\right| + \left|\int\limits_{\tilde{\alpha}_{12}}^{x} |p_{12}(\tau)| B_2(\tau) e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{11}(s)ds} d\tau\right|,$$

где каждая из постоянных C_i $(i \in \{1,2\})$ не меньше $|c_i|$ при выполнении условия (2.20) и равна нулю – в противном случае, а каждый из пределов интегрирования $\tilde{\beta}_i$ $(i \in \{1,2\})$, $\tilde{\alpha}_{12}$, $\tilde{\alpha}_{21}$ равен x_N $(+\infty)$, если в (2.25) соответственно предел интегрирования $\overline{\beta}_i$ $(i \in \{1,2\})$, $\overline{\alpha}_{12}$, $\overline{\alpha}_{21}$ был равен x_0 $(+\infty)$.

Ввиду условий (2.15), (2.17), (2.18), (2.20) и леммы 1.2 из работы [19] $\lim\limits_{x \to +\infty} \tilde{A}_i(z)(x) = 0$ $(i = 1,2)$, а согласно условиям (2.21) $\tilde{B}_i(x) < q$ $(i = 1,2)$ при $x \in [x_N, +\infty[$. Поэтому из (2.29) с учетом первого из неравенств (2.28) имеем

$$c_0 - \varepsilon < \tilde{A}_l(x_k) + (c_0 + \varepsilon)q \quad \text{при } k \geq N,$$

откуда следует, что $c_0(1-q) - \varepsilon(1+q) < \tilde{A}_l(x_k)$ при $k \geq N$, чего быть не может поскольку здесь в силу выбора числа ε слева стоит положительное число, а выражение, стоящее справа стремится к нулю при $k \to +\infty$. Полученное противоречие доказывает, что решение $z \in S$ операторного уравнения $\Phi(z) = z$ стремится к нулю при $x \to +\infty$. Это решение в силу (2.25) зависит также от постоянных c_i $(i = 1,2)$, которые выбирались произвольными фиксированными вещественными числами, удовлетворяющими неравенствам $0 \leq |c_i| \leq |c_i^0|$ $(i = 1,2)$, где $c_i^0 \neq 0$, если соблюдается условие (2.20) и $c_i^0 = 0$ в противном случае. Значит, при наличии k функций p_{ii} $(i \in \{1,2\})$, для которых выполняется условие (2.20) система дифференциальных уравнений (2.14) имеет $k-$параметрическое семейство решений $(z_i)_{i=1}^2 : [x_0, +\infty[\to R_{b_0}$, стремящихся к нулю при $x \to +\infty$.

Лемма полностью доказана.

Из данной леммы с использованием лемм 1.1 – 1.3 из работы [18] непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть функции* f_i, g_i $(i=1,2)$, p_{ij} $(i,j=1,2)$ *допускают представления в виде суммы двух непрерывных на промежутке* $[a,+\infty[$ *функций*

$$f_i(x)=\sum_{\nu=1}^{2} f_{\nu i}(x),\ g_i(x)=\sum_{\nu=1}^{2} g_{\nu i}(x),\ p_{ij}(x)=\sum_{\nu=1}^{2} p_{\nu ij}(x)$$

таких, что соблюдаются следующие условия:

1) *при любом* $i \in \{1,2\}$

$$\int_a^{+\infty} |f_{2i}(x)|\,dx<\infty,\ \int_a^{+\infty} |g_{2i}(x)|\,dx<\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\int_a^x p_{2ii}(\tau)\ d\tau=const,$$

$$\int_a^{+\infty} |p_{2ij}(x)|\,dx<\infty\ \ (j\neq i, j\in\{1,2\});$$

2) *для некоторого множества* $M \subset \{1,2\}$ *при любом* $i \in M$

$p_{1ii}(x)\neq 0$ *в некоторой окрестности* $+\infty$, $\int_a^{+\infty} p_{1ii}(\tau)d\tau=\pm\infty$,

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{f_{1i}(x)}{p_{1ii}(x)}=0,\quad \limsup_{x\to+\infty}\frac{g_{1i}(x)}{p_{1ii}(x)}=G_i^0=const,$$

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{p_{1ij}(x)}{p_{1ii}(x)}=P_{ij}^0=const\ \ (j\neq i, j\in\{1,2\})$$

и при любом $i \in \{1,2\}\setminus M$

$$f_{1i}(x)\equiv 0,\ g_{1i}(x)\equiv 0,\ p_{1ij}(x)\equiv 0\ \ (j=1,2).$$

Пусть, кроме того, выполняются условия (2.15), (2.16) и постоянные, определяемые следующим образом

$$B_2^0=\begin{cases}0, & \text{если}\ \ 2\notin M,\\ |P_{21}^0|, & \text{если}\ \ 2\in M,\end{cases}\qquad B_1^0=\begin{cases}0, & \text{если}\ \ 1\notin M,\\ B_2^0\,|P_{12}^0|, & \text{если}\ \ 1\in M,\end{cases}$$

таковы, что $B_i^0 < 1$ *при* $i \in M$ *. Тогда система дифференциальных уравнений* (2.14) *имеет по крайней мере одно решение* $(z_i)_{i=1}^2 : [x_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ $(x_0 \geq a)$, *стремящееся к нулю при* $x \to +\infty$, *причем таких решений существует целое* $k-$*параметрическое семейство, если среди функций* p_{1ii} $(i \in M)$ *имеется k функций, которые отрицательны в некоторой окрестности* $+\infty$.

С использованием леммы 2 и преобразований из доказательства теоремы 2.1 работы [19] легко может быть установлено также следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Пусть соблюдаются условия* (2.15)*,* (2.16)*,* $g_i(x) \equiv 1$ $(i = 1, 2)$, $\int\limits_a^{+\infty} |f_i(x)| dx < +\infty$ $(i = 1, 2)$, *функции* p_{ij} $(i, j = 1, 2)$ *представимы в виде* $p_{ij}(x) = p_{ij}^0 + q_{ij}(x)$, *где* p_{ij}^0 $(i, j = 1, 2) -$ *вещественные постоянные, а* $q_{ij} : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2) -$ *непрерывные функции такие, что* $\int\limits_a^{+\infty} |q_{ij}(x)| dx < +\infty$ $(i, j = 1, 2)$. *Пусть, кроме того, алгебраическое уравнение*

$$\rho^2 - (p_{11}^0 + p_{22}^0)\rho + p_{11}^0 p_{22}^0 - p_{12}^0 p_{21}^0 = 0 \tag{2.30}$$

не имеет корней с нулевой действительной частью. Тогда система дифференциальных уравнений (2.14) *имеет по крайней мере одно решение* $(z_i)_{i=1}^2 : [x_0, +\infty[\to \mathbb{R}(x_0 \geq a)$, *стремящееся к нулю при* $x \to +\infty$, *причем таких решений существует целое двухпараметрическое семейство в случае, когда* $p_{11}^0 p_{22}^0 - p_{12}^0 p_{21}^0 > 0$ *и* $p_{11}^0 + p_{22}^0 < 0$, *и однопараметрическое семейство, когда* $p_{11}^0 p_{22}^0 - p_{12}^0 p_{21}^0 < 0$.

Замечание 2.2. *Из этой леммы в частном случае, когда* $f_i(x) \equiv 0$ $(i = 1, 2)$ *и* $q_{ij}(x) \equiv 0$ $(i, j = 1, 2)$ *вытекает лемма 1 из работы [23].*

§ **2.3. Доказательство теорем**

Доказательство теоремы 2.1. *Необходимость.* Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ и $y:[t_0,\omega[\to \Delta_{Y_0}$ – произвольное $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решение уравнения (2.1). Тогда существует число $t_1 \in [t_0,\omega[$ такое, что $y^{(k)}(t)\neq 0$ $(k=0,1,2)$, $\mathrm{sign}\, y^{(k)}(t)=\mu_k$ $(k=0,1)$ при $t\in[t_1,\omega[$. Кроме того, из равенства $\left(\frac{y(t)}{y'(t)}\right)=1-\frac{y(t)y''(t)}{(y'(t))^2}$ и условий (2.2), (2.3) определения $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решения непосредственно вытекает, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1},\qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}=\frac{1}{\lambda_0-1}. \tag{2.31}$$

Отсюда, в частности, следует, что имеет место второе из асимптотических представлений (2.12) и соблюдаются условия (2.11).

В силу (2.31) и условия $(RN)_{\lambda_0}$, которому удовлетворяет функция f, из (2.1) имеем

$$y''(t)=\alpha_0 p(t)\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))[1+o(1)] \quad \textit{при } t\uparrow\omega,$$

или

$$\frac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}=\alpha_0 p(t)[1+o(1)] \quad \textit{при } t\uparrow\omega. \tag{2.32}$$

Если $1-\sigma_0\lambda_0-\sigma_1\neq 0$, то интегрируя данное соотношение на промежутке от A_0 до t, получим

$$\int_{A_0}^{t}\frac{y''(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}=\alpha_0 I_0(t)[1+o(1)] \quad \textit{при } t\uparrow\omega. \tag{2.33}$$

Сравним интеграл, стоящий слева с функцией $\dfrac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}$, где $\varphi_{ii}:\Delta_{Y_i}\to]0,+\infty[-$непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие по свойствам правильно меняющихся функций (см. Гл. I, стр. 27) условиям

$$\lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}}\frac{\varphi_i(z)}{\varphi_{ii}(z)}=1,\quad \lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}}\frac{z\varphi'_{ii}(z)}{\varphi_{ii}(z)}=\sigma_i\quad (i=0,1). \tag{2.34}$$

В силу правила Лопиталя и условий (2.34), (2.3)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}}{\displaystyle\int_{A_0}^{t}\frac{y''(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{y''(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}}{\dfrac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}}\times$$

$$\times\left[1-\frac{[y'(t)]^2}{y''(t)y(t)}\frac{y(t)\varphi_{00}'(y(t))}{\varphi_{00}(y(t))}-\frac{y'(t)\varphi'_{11}(y'(t))}{\varphi_{11}(y'(t))}\right]=1-\lambda_0\sigma_0-\sigma_1.$$

Поэтому из (2.33) с учетом (2.34) следует, что

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}=\alpha_0(1-\lambda_0\sigma_0-\sigma_1)I_0(t)[1+o(1)]\ \text{при}\ t\uparrow\omega. \tag{2.35}$$

Если же $1-\lambda_0\sigma_0-\sigma_1=0$, то умножая обе части (2.32) на $\pi_\omega(t)$ и интегрируя на промежутке от A_1 до t, получим

$$\int_{A_1}^{t}\frac{y''(\tau)\pi_\omega(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}=\alpha_0 I_1(t)[1+o(1)]\ \text{при}\ t\uparrow\omega.$$

Отсюда с учетом того, что в силу правила Лопиталя и условий (2.34), (2.3), (2.31)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{y'(t)\pi_\omega(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}}{\displaystyle\int_{A_1}^{t}\frac{y''(\tau)\pi_\omega(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{y''(t)\pi_\omega(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}}{\dfrac{y''(t)\pi_\omega(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}}\times$$

$$\times\left[1-\frac{[y'(t)]^2}{y''(t)y(t)}\frac{y(t)\varphi_{00}'(y(t))}{\varphi_{00}(y(t))}-\frac{y'(t)\varphi'_{11}(y'(t))}{\varphi_{11}(y'(t))}+\frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)y''(t)}\right]=\lambda_0-1,$$

имеем

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}=\frac{\alpha_0(\lambda_0-1)}{\pi_\omega(t)}I_1(t)[1+o(1)]\ \ \text{при}\ t\uparrow\omega. \tag{2.36}$$

Согласно введенным вспомогательным обозначениям асимптотические соотношения (2.35) и (2.36) записываются в виде одного соотношения

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = \alpha_0\gamma Q(t)[1+o(1)] \;\; при \;\; t\uparrow\omega.$$

Следовательно имеет место первое из асимптотических представлений (2.12). Кроме того, отсюда и (2.32) в силу второго из предельных соотношений (2.31) вытекает справедливость условия (2.10). Знаковые условия (2.9) вытекают из (2.12), если учесть, что $sign\, y^{(i)}(t) = \mu_i \;\; (i=0,1)$ при $t\in[t_1,\omega[$.

Достаточность. Пусть наряду с (2.6), (2.7), (2.9) – (2.11) соблюдается одно из условий (2.8). Покажем, что в этом случае дифференциальное уравнение (2.1) имеет $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решения, допускающие представления (2.12), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Сначала, рассматривая соотношение

$$\frac{y}{\pi_\omega(t)\varphi_{00}(y)\varphi_{11}\left(\dfrac{\lambda_0(1+v_2)}{\lambda_0-1}\dfrac{y}{\pi_\omega(t)}\right)} - \frac{\alpha_0\gamma(\lambda_0-1)Q(t)(1+v_1)}{\lambda_0(1+v_2)} = 0, \tag{2.37}$$

в котором $\varphi_{ii}:\Delta_{Y_i}\to]0,+\infty[\;\; (i=0,1)-$непрерывно дифференцируемые функции вида $\varphi_{ii}(z)=|z|^{\sigma_i}L_{ii}(z) \;\; (i=0,1)$, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}}\frac{L_i(z)}{L_{ii}(z)}=1, \quad \lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}}\frac{zL'_{ii}(z)}{L_{ii}(z)}=0 \quad (i=0,1), \tag{2.38}$$

а также условиям (2.34), установим, что оно однозначно определяет заданную на множестве $D_0=[t_0,\omega[\times V_0$, где $t_0\in[a,\omega[$ и $V_0=\{(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2:|v_i|\le 1/2 \;\; (i=1,2)\}$, непрерывно дифференцируемую неявную функцию $y=Y(t,v_1,v_2)$ следующего вида

$$Y(t,v_1,v_2)=\mu_0\,|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z(t,v_1,v_2)}, \tag{2.39}$$

где функция z такова, что

$$|z(t,v_1,v_2)|\le\frac{1}{2}\min\left\{\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right|,\left|\frac{1}{\lambda_0-1}\right|\right\} \; при \;\; (t,v_1,v_2)\in D_0$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega} z(t,v_1,v_2)=0 \quad \textit{равномерно по} \ (v_1,v_2)\in V_0.$$

Для этого, полагая в (2.37)

$$y=\mu_0\,|\,\pi_\omega(t)\,|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z}, \tag{2.40}$$

получим с учетом вида функций φ_{ii} $(i=0,1)$ и знаковых условий (2.9) соотношение вида

$$\frac{|\,\pi_\omega(t)\,|^{\frac{(1-\lambda_0\sigma_0-\sigma_1)}{\lambda_0-1}+(1-\sigma_0-\sigma_1)z}}{\left|\frac{\lambda_0(1+v_2)}{\lambda_0-1}\right|^{\sigma_1} L_{00}\left(\mu_0\,|\,\pi_\omega(t)\,|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z}\right)L_{11}\left(\mu_1\left|\frac{\lambda_0(1+v_2)}{\lambda_0-1}\right|\,|\,\pi_\omega(t)\,|^{\frac{1}{\lambda_0-1}+z}\right)}=\left|\frac{\gamma(\lambda_0-1)(1+v_1)}{\lambda_0(1+v_2)}\right|\,|\,Q(t)\,|,$$

откуда в результате логарифмирования находим

$$\left[\frac{1}{\lambda_0-1}(1-\lambda_0\sigma_0-\sigma_1)+(1-\sigma_0-\sigma_1)z\right]\ln|\,\pi_\omega(t)\,|=\ln|\,Q(t)\,|+\ln\left(\left|\frac{\lambda_0(1+v_2)}{\lambda_0-1}\right|^{\sigma_1-1}\right)+$$

$$\ln|\,\gamma(1+v_1)\,|++\ln\left(L_{00}\left(\mu_0\,|\,\pi_\omega(t)\,|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z}\right)L_{11}\left(\mu_1\left|\frac{\lambda_0(1+v_2)}{\lambda_0-1}\right|\,|\,\pi_\omega(t)\,|^{\frac{1}{\lambda_0-1}+z}\right)\right).$$

Отсюда, учитывая, что $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$, имеем

$$z=a(t)+b(t,v_1,v_2)+Z(t,v_2,z) \tag{2.41}$$

где

$$a(t)=(1-\sigma_0-\sigma_1)^{-1}\left[\frac{\ln|\,Q(t)\,|}{\ln|\,\pi_\omega(t)\,|}-\frac{1}{\lambda_0-1}(1-\lambda_0\sigma_0-\sigma_1)\right],$$

$$b(t,v_1,v_2)=\frac{\ln\left(\left|\frac{\lambda_0(1+v_2)}{\lambda_0-1}\right|^{\sigma_1-1}|\,\gamma(1+v_1)\,|\right)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\ln|\,\pi_\omega(t)\,|},$$

$$Z(t,v_2,z)=\frac{\ln\left[L_{00}\left(\mu_0\,|\,\pi_\omega(t)\,|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z}\right)L_{11}\left(\mu_1\left|\frac{\lambda_0(1+v_2)}{\lambda_0-1}\right|\,|\,\pi_\omega(t)\,|^{\frac{1}{\lambda_0-1}+z}\right)\right]}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\ln|\,\pi_\omega(t)\,|}.$$

Поскольку согласно условиям (2.11)

$$\mu_0 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z} = Y_0, \quad \mu_1 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}+z} = Y_1 \quad при \ |z| \le d,$$

где $d = \dfrac{1}{2}\min\left\{\left|\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right|, \left|\dfrac{1}{\lambda_0-1}\right|\right\}$, то правая часть соотношения (2.37) определена и непрерывно дифференцируема на множестве $\Omega = [t_1,\omega[\times V_0 \times Z_0$, где t_1 – некоторое число из промежутка $[a,\omega[$ и $Z_0 = \{z \in \mathbb{R} : |z| \le d\}$.

В (2.41)

$$\lim_{t\uparrow\omega} b(t, v_1, v_2) = 0 \ \textit{равномерно по} \ (v_1, v_2) \in V_0 \tag{2.42}$$

и в силу свойств медленно меняющихся функций (см. Гл. I, стр. 16, лемма 1.5)

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z(t, v_2, z) = 0 \ \textit{равномерно по} \ z \in Z_0 \ \textit{и} \ v_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \tag{2.43}$$

С использованием правила Лопиталя и условия (2.10) находим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\ln|Q(t)|}{\ln|\pi_\omega(t)|} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) Q'(t)}{Q(t)} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t) p(t)}{Q(t)} = \dfrac{1 - \lambda_0\sigma_0 - \sigma_1}{\lambda_0 - 1}, & \textit{если} \ 1 - \lambda_0\sigma_0 - \sigma_1 \ne 0, \\ \lim\limits_{t\uparrow\omega} \left[\dfrac{\pi_\omega(t) p(t)}{Q(t)} - 1\right] = 0, & \textit{если} \ 1 - \lambda_0\sigma_0 - \sigma_1 = 0, \end{cases}$$

и, поэтому

$$\lim_{t\uparrow\omega} a(t) = 0. \tag{2.44}$$

Кроме того, имеем

$$\frac{\partial Z(t, v_2, z)}{\partial z} = \frac{1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} \left[\frac{\mu_0 |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z} L_{00}'\left(\mu_0 |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z}\right)}{L_{00}\left(\mu_0 |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+z}\right)} + \right.$$

$$+\frac{\mu_1\left|\frac{\lambda_0(1+v_2)}{\lambda_0-1}\right||\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}+z} L_{11}'\left(\mu_1\left|\frac{\lambda_0(1+v_2)}{\lambda_0-1}\right||\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}+z}\right)}{L_{11}\left(\mu_1\left|\frac{\lambda_0(1+v_2)}{\lambda_0-1}\right||\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}+z}\right)}\Bigg].$$

Отсюда с учетом вторых из условий (2.38) следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\partial Z(t,v_2,z)}{\partial z}=0 \ \textit{равномернро по } z\in Z_0 \textit{ и } v_2\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

В силу (2.42)–(2.44) существует число $t_2\in[t_1,\omega[$ такое, что на множестве $[t_2,\omega[\times V_0\times Z_0$ соблюдается неравенство

$$|a(t)+b(t,v_1,v_2)+Z(t,v_2,z)|\le d \qquad (2.45)$$

и выполняется условие Липшица

$$\begin{gathered}\left|Z(t,v_2,z_1)-Z(t,v_2,z_2)\right|\le 1/2\left|z_1-z_2\right| \\ \textit{при } t\in[t_2,\omega[,\ v_2\in[-1/2,1/2] \textit{ и } z_1,z_2\in Z_0\end{gathered} \qquad (2.46)$$

Подобрав таким образом число t_2, обозначим через $\mathbf{B}$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $D=[t_2,\omega[\times V_0$ функций $z:D\to\mathbb{R}$ с нормой

$$\|z\|=\sup\{|z(t,v_1,v_2)|:(t,v_1,v_2)\in D\}.$$

Выделим из него подпространство $\mathbf{B}_0$ тех функций из $\mathbf{B}$, для которых $\|z\|\le d$, и рассмотрим на $\mathbf{B}_0$, выбрав предварительно произвольным образом число $\nu\in(0,1)$, оператор

$$\Phi(z)(t,v_1,v_2)=z(t,v_1,v_2)-\nu\left[z(t,v_1,v_2)-a(t)-b(t,v_1,v_2)-Z(t,v_2,z(t,v_1,v_2)\right]. \qquad (2.47)$$

Для любого $z\in\mathbf{B}_0$ в силу условия (2.45) имеем

$$|\Phi(z)(t,v_1,v_2)|\le(1-\nu)|z(t,v_1,v_2)|+\nu d\le d \ \textit{ при } (t,v_1,v_2)\in D.$$

Следовательно, $\|\Phi(z)\|\le d$, т.е. $\Phi(\mathbf{B}_0)\subset\mathbf{B}_0$.

Пусть теперь $z_1,z_2\in\mathbf{B}_0$. Тогда в силу (2.45) при $(t,v_1,v_2)\in D$

$$|\Phi(z_1)(t,v_1,v_2)-\Phi(z_2)(t,v_1,v_2)|\le(1-\nu)|z_1(t,v_1,v_2)-z_2(t,v_1,v_2)|+$$
$$+\nu|Z(t,v_2,z_1(t,v_1,v_2))-Z(t,v_2,z_2(t,v_1,v_2)|\le$$

$$\le (1-\nu)\,|\,z_1(t,v_1,v_2) - z_2(t,v_1,v_2)\,| + \frac{\nu}{2}\,|\,z_1(t,v_1,v_2) - z_2(t,v_1,v_2)\,| \le \left(1-\frac{\nu}{2}\right)\|z_1 - z_2\|.$$

Откуда следует, что $\|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)\| \le \left(1-\frac{\nu}{2}\right)\|z_1 - z_2\|$.

Тем самым показано, что оператор Φ отображает пространство $\mathbf{B}_0$ в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная функция $z \in \mathbf{B}_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (2.47) эта непрерывная на множестве D функция является единственным решением уравнения (2.41), удовлетворяющим условию $\|z\| \le d$. Из (2.41) с учетом этого условия и (2.42) – (2.44) следует, что данное решение стремится к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$. Непрерывная дифференцируемость этого решения на множестве $D_0 = [t_0, \omega[\times V_0$, где $t_0 -$некоторое число из промежутка $[t_2, \omega[$ непосредственно вытекает из известной локальной теоремы о существовании неявной функции, определяемой соотношением (2.41). В силу замены (2.40) полученной функции z соответствует функция Y вида (2.39), которая является решением уравнения (2.37).

Теперь, применяя к дифференциальному уравнению (2.1) преобразование

$$y(t) = Y(t, v_1(\tau), v_2(\tau)), \quad y'(t) = \frac{\lambda_0[1 + v_2(\tau)]}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} Y(t, v_1(\tau), v_2(\tau)), \tag{2.48}$$

где

$$\tau = \beta \ln|\pi_\omega(t)|, \ \beta = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases}$$

и учитывая, что функции (2.48) при $t \in [t_0, \omega[$ и $(v_1(\tau), v_2(\tau)) \in V_0$ являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))} = \alpha_0 \gamma Q(t)[1+v_1(\tau)], \\ \dfrac{y'(t)}{y(t)} = \dfrac{\lambda_0[1+v_2(\tau)]}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}, \end{cases} \tag{2.49}$$

получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v_1' = \beta[q(\tau)G(\tau,v_1,v_2)\big(1-H_1(\tau,v_1,v_2)\big)- \\ \qquad -\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0-1}H_0(\tau,v_1,v_2)(1+v_1)(1+v_2)-h(\tau)(1+v_1)], \\ v_2' = \beta\left[q(\tau)G(\tau,v_1,v_2)\dfrac{1+v_2}{1+v_1}-\dfrac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)}(1+v_2)^2+1+v_2\right], \end{cases} \tag{2.50}$$

в которой

$$q(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{\gamma Q(t)}, \quad h(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t)Q'(t)}{Q(t)},$$

$$H_0(\tau(t),v_1,v_2) = \frac{Y(t,v_1,v_2)\varphi_{00}'(Y(t,v_1,v_2))}{\varphi_{00}(Y(t,v_1,v_2))},$$

$$H_1(\tau(t),v_1,v_2) = \frac{\lambda_0(1+v_2)Y(t,v_1,v_2)\varphi_{11}'\left(\dfrac{\lambda_0(1+v_2)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}Y(t,v_1,v_2)\right)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)\varphi_{11}\left(\dfrac{\lambda_0(1+v_2)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}Y(t,v_1,v_2)\right)},$$

$$G(\tau(t),v_1,v_2) = \frac{f\left(t, Y(t,v_1,v_2), \dfrac{\lambda_0(1+v_2)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}Y(t,v_1,v_2)\right)}{\alpha_0 p(t)\varphi_{00}\big(Y(t,v_1,v_2)\big)\varphi_{11}\left(\dfrac{\lambda_0(1+v_2)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}Y(t,v_1,v_2)\right)}.$$

Здесь функция $\tau(t) = \beta \ln|\pi_\omega(t)|$ обладает свойствами

$$\tau:[t_0,\omega[\to]0,+\infty[, \ \tau'(t)>0 \ \text{\textit{при}} \ t\in[t_0,\omega[, \ \lim_{t\uparrow\omega}\tau(t)=+\infty.$$

Поэтому в силу условия (2.10)

$$\lim_{\tau\to+\infty} q(\tau) = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p(t)}{\gamma Q(t)} = \frac{1}{\lambda_0-1}, \quad \lim_{\tau\to+\infty} h(\tau) = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)Q'(t)}{Q(t)} = \frac{1-\lambda_0\sigma_0-\sigma_1}{\lambda_0-1}. \tag{2.51}$$

Поскольку согласно условиям (2.11) и представлению (2.39)

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y(t,v_1,v_2) = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\lambda_0(1+v_2)}{\lambda_0-1}\frac{Y(t,v_1,v_2)}{\pi_\omega(t)} = Y_1 \ \text{\textit{равномерно по}} \ (v_1,v_2)\in V_0, \tag{2.52}$$

то ввиду вторых из условий (2.34)

$$\lim_{t\uparrow\omega} H_i(\tau(t),v_1,v_2)=\sigma_i \quad (i=0,1) \quad \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0. \qquad (2.53)$$

Следовательно, имеют место представления

$$H_i(\tau,v_1,v_2)=\sigma_i+r_i(\tau,v_1,v_2) \;\; (i=0,1), \qquad (2.54)$$

где

$$\lim_{\tau\to+\infty} r_i(\tau,v_1,v_2)=0 \;\; (i=0,1) \;\; \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0.$$

Получим теперь представление для функции G. Из соотношения (2.37), которому удовлетворяет функция $y=Y(t,v_1,v_2)$, непосредственно следует, что

$$\frac{\pi_\omega(t)[Y(t,v_1,v_2]'_t}{Y(t,v_1,v_2)}\big[1-H_0(\tau(t),v_1,v_2)-H_1(\tau(t),v_1,v_2)\big]=$$
$$=-H_1(\tau(t),v_1,v_2)+1+\frac{\pi_\omega(t)Q'(t)}{Q(t)}$$

и поэтому согласно условиям (2.51) – (2.53)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)[Y(t,v_1,v_2)]'_t}{Y(t,v_1,v_2)}=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1} \;\; \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left[\dfrac{Y(t,v_1,v_2)}{\pi_\omega(t)}\right]'_t}{\dfrac{Y(t,v_1,v_2)}{\pi_\omega(t)}}=\frac{1}{\lambda_0-1} \;\; \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0.$$

Тогда в силу условия $(RN)_{\lambda_0}$, которому удовлетворяет функция f, и условий (2.34), (2.52)

$$\lim_{t\uparrow\omega} G(\tau(t),v_1,v_2)=1 \;\; \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0,$$

т.е. имеет место представление

$$G(\tau,v_1,v_2)=1+r_2(\tau,v_1,v_2),$$

где

$$\lim_{\tau\to+\infty} r_2(\tau,v_1,v_2)=0 \;\; \textit{равномерно по} (v_1,v_2)\in V_0. \qquad (2.55)$$

Используя теперь это представление, представления (2.54), а также условия

(2.51), перепишем систему дифференциальных уравнений (2.50) в виде

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{\beta\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\left[\varepsilon_1(\tau, v_1, v_2) + \dfrac{\sigma_1 - 1}{\lambda_0} v_1 - \sigma_0 v_2 + V_1(v_1, v_2)\right], \\ v_2' = \dfrac{\beta\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\left[\varepsilon_2(\tau, v_1, v_2) - \dfrac{1}{\lambda_0} v_1 - v_2 + V_2(v_1, v_2)\right] \end{cases} \tag{2.56}$$

где

$$\varepsilon_1(\tau, v_1, v_2) = \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}\left[q(\tau) - \frac{1}{\lambda_0 - 1}\right][1 + r_2(\tau, v_1, v_2)][1 - \sigma_1 - r_1(\tau, v_1, v_2)] +$$

$$+\frac{1}{\lambda_0}[(1-\sigma_1) r_2(\tau, v_1, v_2) - r_1(\tau, v_1, v_2) - r_1(\tau, v_1, v_2) r_2(\tau, v_1, v_2)] -$$

$$-(1 + v_1)(1 + v_2) r_0(\tau, v_1, v_2) - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}\left[h(\tau) - \frac{1 - \lambda_0\sigma_0 - \sigma_1}{\lambda_0 - 1}\right](1 + v_1),$$

$$\varepsilon_2(\tau, v_1, v_2) = \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}\left[\left(q(\tau) - \frac{1}{\lambda_0 - 1}\right)(1 + r_2(\tau, v_1, v_2)) + \frac{1}{\lambda_0 - 1} r_2(\tau, v_1, v_2)\right]\frac{1 + v_2}{1 + v_1},$$

$$V_1(v_1, v_2) = -v_1 v_2,\ V_2(v_1, v_2) = \frac{1}{\lambda_0}\left[\frac{1 + v_2}{1 + v_1} - 1 - v_2 + v_1\right] - v_2^2.$$

Здесь в силу (2.51), (2.54) и (2.55)

$$\lim_{\tau \to +\infty} \varepsilon_i(\tau, v_1, v_2) = 0 \ \ (i = 1, 2) \ \ \textit{равномерно по} \ (v_1, v_2) \in V_0.$$

Кроме того,

$$\lim_{|v_1| + |v_2| \to 0} \frac{\partial V_i(v_1, v_2)}{\partial v_j} = 0 \ \ (i, j = 1, 2)$$

и характеристическое уравнение матрицы коэффициентов, стоящих при v_1, v_2 в уравнениях системы, имеет вид

$$\rho^2 + \beta\frac{\lambda_0 + 1 - \sigma_1}{\lambda_0 - 1}\rho + \frac{\lambda_0(1 - \sigma_0 - \sigma_1)}{(\lambda_0 - 1)^2} = 0.$$

В силу выполнения одного из условий (2.8) это уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью.

Тем самым, показано, что для системы (2.56) выполнены все условия леммы 2.3. Согласно этой лемме у системы дифференциальных уравнений

(2.56) существует хотя бы одно решение $(v_1, v_2):[\tau_1, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ $(\tau_1 \geq \tau_0)$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$, причем таких решений существует однопараметрическое семейство, если соблюдается неравенство $\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1) < 0$, и двухпараметрическое семейство, если соблюдаются неравенства

$$\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1) > 0 \ и \ \beta(\lambda_0 - 1)(\lambda_0 + 1 - \sigma_1) > 0.$$

Каждому такому решению в силу замен (2.48) соответствует $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решение y дифференциального уравнения (2.1), допускающее асимптотические представления (2.12), причем в силу знака числа β и второго из знаковых условий (2.9) справедливо утверждение теоремы о количестве таких решений.

Теорема полностью доказана.

Доказательство теоремы 2.2. При установлении теоремы 2.1 было показано, что для существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений y дифференциального уравнения (2.1) необходимо, чтобы соблюдались условия (2.9)–(2.11) и чтобы каждое такое решение допускало асимптотические представления (2.12). Кроме того, было показано, что для таких решений имеют место предельные соотношения (2.31).

Поскольку функции φ_i $(i = 0,1)$ удовлетворяют условию S, то в силу предельных соотношений (2.31) и замечания 2.2 функции L_i $(i = 0,1)$ из формул $\varphi_i(z) = |z|^{\sigma_i} L_i(z)$ допускают при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$L_0(y(t)) = L_0\left(\mu_0 |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}}\right)[1 + o(1)],$$

$$L_1(y'(t)) = L_1\left(\mu_1 |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}}\right)[1 + o(1)].$$

Используя эти представления, $\varphi_i(z)=|z|^{\sigma_i}L_i(z)$, а также второе из представлений (2.12), перепишем первое из представлений (2.12) в виде

$$\frac{\lambda_0 y(t)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)\,|\,y(t)|^{\sigma_0+\sigma_1}\left|\dfrac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}\right|^{\sigma_1}}=$$

$$=\alpha_0\gamma Q(t)L_0\left(\mu_0\,|\,\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)L_1\left(\mu_1\,|\,\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\right)[1+o(1)].$$

Отсюда с учетом знаковых условий (2.9) и второго из представлений (2.12) получаем представления (2.13).

§ **2.4. Асимптотическое поведение сингулярных $P_{t_*}(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – решений уравнения (2.1) в случаях $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$**

Теоремы 2.1, 2.2 позволяют описывать поведение в окрестности особой точки не только правильных, но и некоторых типов сингулярных, а именно $P_{t_*}(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – решений (см. определение 1.9).

Определение 2.3. *Пусть* $t_*\in]a,\omega[$, $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. *Будем говорить, что функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)^*_{\lambda_0}$, *если существуют числа* $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $A_*>0$ *и непрерывные правильно меняющиеся при* $z\to Y_i$ $(i=0,1)$ *функции* $\varphi_i:\Delta_{Y_i}\to]0,+\infty[$ $(i=0,1)$ *порядков* σ_i $(i=0,1)$, *такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций* $z_i:[t_0,t_*[\to\Delta_{Y_i}$ $(i=0,1,\ t_0\in[a,t_*[)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t\uparrow t_*}z_i(t)=Y_i\quad(i=0,1),\qquad \lim_{t\uparrow t_*}\frac{(t-t_*)z_0'(t)}{z_0(t)}=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1},\quad \lim_{t\uparrow t_*}\frac{(t-t_*)z_1'(t)}{z_1(t)}=\frac{1}{\lambda_0-1},$$

имеет место представление

$$f(t,z_0(t),z_1(t))=\alpha_0A_*\varphi_0(z_0(t))\varphi_1(z_1(t))[1+o(1)]\ \textit{при}\ t\uparrow t_*.$$

Предполагая, что функция f удовлетворяет условию $(RN)^*_{\lambda_0}$ поставим вопрос о наличии у уравнения (2.1) $P_{t_*}(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решений. Имеем

$$\pi_\omega(t)=t-t_*,\ \pi_\omega(t)<0 \quad при \quad t\in[a,t_*[,$$

$$I_0(t)\sim A_*(t-t_*),\ I_1(t)\sim\frac{A_*(t-t_*)^2}{2} \quad при \quad t\uparrow t_*,$$

$$Q(t)\sim\begin{cases} A_*(t-t_*), & если\ 1-\sigma_0\lambda_0-\sigma_1\neq 0 \\ \dfrac{A_*(t-t_*)}{2}, & если\ 1-\sigma_0\lambda_0-\sigma_1=0, \end{cases} \quad при\ t\uparrow t_*.$$

Кроме того, из предельного соотношения (2.10) следует, что у уравнения (2.1) есть $P_{t_*}(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решения лишь в случае, когда $1-\sigma_0\lambda_0-\sigma_1\neq 0$.

Следствие 2.1. *Пусть* $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ *и функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)^*_{\lambda_0}$, *причем порядки* σ_i $(i=0,1)$ *правильно меняющихся при* $y^{(i)}\to Y_i$ $(i=0,1)$ *функций* φ_i $(i=0,1)$ *таковы, что* $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$. *Тогда для существования у дифференциального уравнения* (2.1) $P_{t_*}(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$*решений наряду с* (2.6), (2.7) *необходимо выполнение следующих условий*

$$\lambda_0=\frac{2-\sigma_1}{1+\sigma_0},\ \sigma_0\neq -1,\ \sigma_1\neq 2, \tag{2.57}$$

$$\mu_0\lim_{t\uparrow t_*}(t_*-t)^{\frac{2-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}=Y_0,\ \mu_1\lim_{t\uparrow t_*}(t_*-t)^{\frac{1+\sigma_0}{2-\sigma_1}}=Y_1, \tag{2.58}$$

$$\alpha_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)(1+\sigma_0)<0,\ \mu_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)(2-\sigma_1)<0. \tag{2.59}$$

Для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\begin{gathered}\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}=\frac{\alpha_0A_*(1-\sigma_0-\sigma_1)}{1+\sigma_0}(t-t_*)[1+o(1)],\\ \frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{(2-\sigma_1)(1+o(1))}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(t-t_*)} \qquad при\ t\uparrow t_*.\end{gathered} \tag{2.60}$$

Если же наряду с (2.6), (2.7), (2.57) – (2.59) *выполнено одно из условий*

$$либо\ \frac{2-\sigma_1}{1+\sigma_0}\neq\sigma_1-1,\ либо\ \frac{2-\sigma_1}{1+\sigma_0}=\sigma_1-1\quad и\quad (1-\sigma_1)(1-\sigma_0-\sigma_1)>0,$$

то уравнение (2.1) *имеет* $P_{t_*}\left(Y_0, Y_1, \dfrac{2-\sigma_1}{1+\sigma_0}\right)$*−решения, допускающие представления* (2.60)*, причем таких решений существует однопараметрическое семейство, если выполняется неравенство*

$$(2-\sigma_1)(1+\sigma_0)(1-\sigma_0-\sigma_1) < 0$$

и двухпараметрическое семейство, если

$$(2-\sigma_1)(1+\sigma_0)(1-\sigma_0-\sigma_1) > 0 \text{ и } \mu_0\mu_1(2-\sigma_1)(3-2\sigma_1+\sigma_0-\sigma_0\sigma_1) > 0.$$

Следствие 2.2. *Пусть функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)^*_{\lambda_0}$, $\sigma_0+\sigma_1 \neq 1$, $\sigma_0 \neq -1$, $\sigma_1 \neq 2$ *и функции* φ_i $(i=0,1)$ *удовлетворяют условию* S. *Тогда каждое* $P_{t_*}\left(Y_0, Y_1, \dfrac{2-\sigma_1}{1+\sigma_0}\right)$*−решение (в случае их существования) дифференциального уравнения* (2.1) *допускает при* $t \uparrow t_*$ *асимптотические представления*

$$y(t) = \mu_0 \left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{2-\sigma_1}\right|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \left(\left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\right| A_*(t_*-t)^{-\sigma_1}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} L(t)[1+o(1)],$$

$$y'(t) = \mu_1 \left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{2-\sigma_1}\right|^{\frac{\sigma_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \left(\left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\right| A_*(t_*-t)^{\sigma_0}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} L(t)[1+o(1)],$$

где

$$L(t) = \left(L_0\left(\mu_0(t_*-t)^{\frac{2-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right) L_1\left(\mu_1(t_*-t)|^{\frac{1+\sigma_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}, \quad L_i(z) = \frac{\varphi_i(z)}{|z|^{\sigma_i}}.$$

§ **2.5. Пример одного класса уравнений вида (2.1)**

В качестве примера, иллюстрирующего результаты главы II, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' = \frac{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \varphi_{k0}(y) \varphi_{k1}(y')}{\sum_{k=m+1}^{m+n} \alpha_k p_k(t) \varphi_{k0}(y) \varphi_{k1}(y')}, \tag{2.61}$$

где $\alpha_k \in \{-1,1\}$ $(k = \overline{1,m+n})$, $p_k : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(k = \overline{1,m+n})$ – непрерывные функции и $\varphi_{ki} : \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ $(k = \overline{1,n+m};\ i = 0,1)$ – правильно меняющиеся при $z \to Y_i$ непрерывные функции порядков σ_{ki}.

Допустим, что $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ и для некоторых $i \in \{1,\ldots,m\}$ и $j \in \{m+1,\ldots,m+n\}$ соблюдаются неравенства

$$\begin{gathered} \limsup_{t\uparrow\omega} \left[\frac{\ln p_k(t) - \ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||} \right] < \frac{\beta}{\lambda_0 - 1} \left[\lambda_0(\sigma_{i0} - \sigma_{k0}) + \sigma_{i1} - \sigma_{k1} \right] \\ \textit{при } k \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{i\}, \\ \limsup_{t\uparrow\omega} \left[\frac{\ln p_k(t) - \ln p_j(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||} \right] < \frac{\beta}{\lambda_0 - 1} \left[\lambda_0(\sigma_{j0} - \sigma_{k0}) + \sigma_{j1} - \sigma_{k1} \right] \\ \textit{при } k \in \{m+1,\ldots,m+n\} \setminus \{j\}, \end{gathered} \tag{2.62}$$

где $\beta = sign\ \pi_\omega(t)$.

Покажем, что в этом случае для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_s : [a,\omega[\to \Delta_{Y_s}$ $(s = 0,1)$, удовлетворяющих условиям (2.3) и (2.4),

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_k(t)\varphi_{k0}(z_0(t))\varphi_{k1}(z_1(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(z_0(t))\varphi_{i1}(z_1(t))} = 0 \ \textit{при } k \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{i\} \tag{2.63}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_k(t)\varphi_{k0}(z_0(t))\varphi_{k1}(z_1(t))}{p_j(t)\varphi_{j0}(z_0(t))\varphi_{j1}(z_1(t))} = 0 \qquad \textit{при } k \in \{m+1,\ldots,m+n\} \setminus \{j\}. \tag{2.64}$$

При вычислении этих пределов, не ограничивая общности, можем считать, что функции φ_{kl} правильно меняющиеся порядка σ_{kl}. Таким образом, справедливы при $z_s \to Y_s$ $\left(z_s \in \Delta_{Y_s} \right)$ представления

$$\varphi_{kl}(z_s) = |z_s|^{\sigma_{kl}} L_{kl}(z_s) \ \ (k = \overline{1,n+m};\ l,s = 0,1), \tag{2.65}$$

где L_{kl} – медленно меняющиеся при $z_s \to Y_s$ функции.

Полагая при $i \in \{1,\ldots,m\}$

$$R_k(t)=\frac{p_k(t)\varphi_{k0}(z_0(t))\varphi_{k1}(z_1(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(z_0(t))\varphi_{i1}(z_1(t))}\quad k\in\{1,\dots,m\}\setminus\{i\},$$

покажем, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega}R_k(t)=0$.

Учитывая (2.3), (2.4) при $t\uparrow\omega$ имеем

$$|z_0(t)|=|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+o(1)},\quad |z_1(t)|=|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}+o(1)},$$

поэтому с учетом (2.65) и свойств медленно меняющихся функций (см. Гл.I, лемма 1.5) справедливо равенство

$$\ln\varphi_{kl}(z_s)(t)=\ln|z_s(t)|\left(\sigma_{kl}+\frac{\ln L_{kl}(t)}{\ln|z_s(t)|}\right)=\ln|z_s(t)|\big(\sigma_{kl}+o(1)\big)=$$

$$=\begin{cases}\ln|\pi_\omega(t)|\left(\dfrac{\sigma_{k0}\lambda_0}{\lambda_0-1}+o(1)\right), \textit{если}\ s=0,\\ \ln|\pi_\omega(t)|\left(\dfrac{\sigma_{k1}}{\lambda_0-1}+o(1)\right), \textit{если}\ s=1\end{cases}\quad \textit{при}\ t\uparrow\omega.$$

Следовательно,

$$\ln R_k(t)=\ln\frac{p_k(t)}{p_i(t)}+\frac{\ln|\pi_\omega(t)|}{\lambda_0-1}\big((\sigma_{k0}-\sigma_{i0})\lambda_0+\sigma_{k1}-\sigma_{i1}+o(1)\big)=$$

$$=\beta\ln|\pi_\omega(t)|\left[\frac{\ln p_k(t)-\ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}+\frac{\beta}{\lambda_0-1}\big(\big(\sigma_{k0}-\sigma_{i0}\big)\lambda_0+\sigma_{k1}-\sigma_{i1}\big)+o(1)\right].$$

Теперь, учитывая, что $sign\ \pi_\omega(t)=\beta$ и выполняются первые из неравенств (2.62), приходим к выводу, что выражение в квадратных скобках отрицательно, т.е. $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\ln R_k(t)=-\infty$, откуда вытекает $\lim\limits_{t\uparrow\omega}R_k(t)=0$. Это означает, что соблюдается предельное соотношение (2.63).

Используя второе из соотношений (2.62), аналогичным образом устанавливается справедливость предельного соотношения (2.64).

В силу установленных предельных соотношений (2.63) и (2.64) функция

$$f(t,y,y')=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(y)\varphi_{k1}(y')}{\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(y)\varphi_{k1}(y')}$$

удовлетворяет условию $(RN)_{\lambda_0}$, поскольку для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_s:[a,\omega[\to\Delta_{Y_s}$ $(s=0,1)$, удовлетворяющих условиям (2.3) и (2.4),

$$f(t,z_0(t),z_1(t))=\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}(z_0(t))\varphi_{i1}(z_1(t))}{\alpha_j p_j(t)\varphi_{j0}(z_0(t))\varphi_{j1}(z_1(t))}\times\frac{1+\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\frac{\alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(z_0(t))\varphi_{k1}(z_1(t))}{\alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}(z_0(t))\varphi_{i1}(z_1(t))}}{1+\sum\limits_{\substack{k=m+1\\k\neq j}}^{m}\frac{\alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(z_0(t))\varphi_{k1}(z_1(t))}{\alpha_j p_j(t)\varphi_{j0}(z_0(t))\varphi_{j1}(z_1(t))}}=$$

$$=\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}(z_0(t))\varphi_{i1}(z_1(t))}{\alpha_j p_j(t)\varphi_{j0}(z_0(t))\varphi_{j1}(z_1(t))}[1+o(1)]\quad при\quad t\uparrow\omega,$$

т.е. имеет место представление

$$f(t,z_0(t),z_1(t))=\alpha_0 p(t)\varphi_0(z_0(t))\varphi_1(z_1(t))[1+o(1)]\ \ при\ t\uparrow\omega,$$

где

$$\alpha_0=\alpha_i\alpha_j,\ p(t)=\frac{p_i(t)}{p_j(t)},\ \varphi_0(z)=\frac{\varphi_{i0}(z)}{\varphi_{j0}(z)},\ \varphi_1(z)=\frac{\varphi_{i1}(z)}{\varphi_{j1}(z)}. \tag{2.66}$$

Здесь φ_k $(k=0,1)$ – правильно меняющиеся при $z\to Y_k$ функции порядков $\sigma_k=\sigma_{ik}-\sigma_{jk}$ $(k=0,1)$. Поэтому к уравнению (2.61) применимы теоремы 2.1 и 2.2. Чтобы их сформулировать введем вместо γ, I_0, I_1 и Q следующие вспомогательные обозначения

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}1-(\sigma_{i0}-\sigma_{j0})\lambda_0-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}, & если\quad 1-(\sigma_{i0}-\sigma_{j0})\lambda_0-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}\neq 0,\\ \lambda_0-1, & если\quad 1-(\sigma_{i0}-\sigma_{j0})\lambda_0-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}=0,\end{cases}$$

$$I_{0ij}(t)=\int\limits_{A_{0ij}}^{t}\frac{p_i(\tau)}{p_j(\tau)}d\tau,\ I_{1ij}(t)=\int\limits_{A_{1ij}}^{t}\frac{\pi_\omega(\tau)p_i(\tau)}{p_j(\tau)}d\tau,$$

$$Q_{ij}(t)=\begin{cases} I_{0ij}(t), & \text{если } 1-(\sigma_{i0}-\sigma_{j0})\lambda_0-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}\neq 0, \\ \pi_\omega^{-1}(t)I_{1ij}(t), & \text{если } 1-(\sigma_{i0}-\sigma_{j0})\lambda_0-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}=0, \end{cases}$$

где пределы интегрирования $A_{kij}\in\{a;\omega\}$ $(k=0,1)$ и выбраны так, чтобы интегралы I_{kij} $(k=0,1)$ стремились либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $t\uparrow\omega$.

Следствие 2.3. *Пусть* $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, *для некоторых* $i\in\{1,\ldots,m\}$ *и* $j\in\{m+1,\ldots,m+n\}$ *соблюдаются неравенство* $\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\sigma_{i1}-\sigma_{j1}\neq 1$ *и условия* (2.62). *Тогда для существования у дифференциального уравнения* (2.61) $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$*решений необходимо, а если выполнено одно из следующих условий*

либо $\lambda_0\neq\sigma_{i1}-\sigma_{j1}-1$,

либо $\lambda_0=\sigma_{i1}-\sigma_{j1}-1$ *и* $(1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})>0$,

то и достаточно, чтобы наряду со знаковыми условиями (2.6), (2.7) *и*

$\alpha_i\alpha_j\mu_1\gamma_{ij}Q_{ij}(t)>0,\ \mu_0\mu_1\lambda_0(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)>0$ *при* $t\in[a,\omega[$

выполнялись условия

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p_i(t)}{p_j(t)Q_{ij}(t)}=\frac{\gamma_{ij}}{\lambda_0-1}, \tag{2.67}$$

$$\mu_0\lim_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}=Y_0,\quad \mu_1\lim_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}=Y_1.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\frac{y'(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}=\alpha_i\alpha_j\gamma_{ij}Q_{ij}(t)[1+o(1)],$$

$\dfrac{y'(t)}{y(t)}=\dfrac{\lambda_0(1+o(1))}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}$ *при* $t\uparrow\omega$, *причем таких решений существует однопараметрическое семейство, если выполняется неравенство* $\lambda_0(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})<0$ *и двухпараметрическое семейство, если*

$$\lambda_0(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})>0 \text{ и } \mu_0\mu_1(\lambda_0+1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})\lambda_0>0.$$

Следствие 2.4. *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ *и для некоторых* $i \in \{1,\dots,m\}$ *и* $j \in \{m+1,\dots,m+n\}$ *соблюдаются неравенство* $\sigma_{i0} - \sigma_{j0} + \sigma_{i1} - \sigma_{j1} \neq 1$ *и условия* (2.62). *Пусть, кроме того, функции* $\dfrac{\varphi_{i0}}{\varphi_{j0}}$ *и* $\dfrac{\varphi_{i1}}{\varphi_{j1}}$ *удовлетворяют условию* S. *Тогда каждое* $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$*решение дифференциального уравнения* (2.61) *(в случае их существования) допускает при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y(t) \sim \mu_0 \left| \frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}{\lambda_0} \right|^{\frac{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}} L(t),$$

$$y'(t) \sim \mu_1 \left| \frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}{\lambda_0} \right|^{\frac{\sigma_{i0}-\sigma_{j0}}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}} L(t),$$

где

$$L(t) = \left| \gamma_{ij} Q_{ij}(t) L_{0ij}\left(\mu_0 \,|\, \pi_\omega(t) \,|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}} \right) L_{1ij}\left(\mu_1 \,|\, \pi_\omega(t) \,|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}} \right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}},$$

$$L_{kij}(z) = \frac{\varphi_{ki}(z)}{\varphi_{kj}(z)} |\, z \,|^{\sigma_{kj} - \sigma_{ki}} \quad (k = 0,1).$$

Замечание 2.4. *Если в дифференциальном уравнении* (2.61) *функции* $p_k : [a,\omega[\to]0,+\infty[\ (k = \overline{1,m+n})$ *также являются непрерывными и правильно меняющимися порядков* ρ_k $(k = \overline{1,m+n})$ *при* $t \uparrow \omega$, *то в силу свойств таких функций неравенства* (2.62) *примут особенно простой вид*

$$\beta(\rho_k - \rho_i) < \frac{\beta}{\lambda_0 - 1}\left[\lambda_0(\sigma_{i0} - \sigma_{k0}) + \sigma_{i1} - \sigma_{k1} \right] \qquad \text{при } k \in \{1,\dots,m\} \setminus \{i\},$$

$$\beta(\rho_k - \rho_j) < \frac{\beta}{\lambda_0 - 1}\left[\lambda_0(\sigma_{j0} - \sigma_{k0}) + \sigma_{j1} - \sigma_{k1} \right] \qquad \text{при } k \in \{m+1,\dots,m+n\} \setminus \{j\}.$$

Кроме того, условия (2.67) *при* $\rho_i - \rho_j \neq -1$, $\sigma_{i1} - \sigma_{j1} \neq 2$, $\sigma_{i0} - \sigma_{j0} \neq -1$ *служат для определения* λ_0*:* $\lambda_0 = \dfrac{2 - \sigma_{i1} + \sigma_{j1}}{1 + \sigma_{i0} - \sigma_{j0}}$.

С использованием следствий 2.1, 2.2 для уравнения (2.61) может быть решен вопрос о наличии и асимптотике сингулярных $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений при $t \uparrow \omega$ и $t_* < \omega$.

Следствие 2.5. *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ *и для некоторых* $i \in \{1,...,m\}$, $j \in \{m+1,...,m+n\}$ *соблюдаются неравенства:* $\sigma_{i0} - \sigma_{j0} + \sigma_{i1} - \sigma_{j1} \neq 1$,

$$(\lambda_0 - 1)\left[\lambda_0(\sigma_{i0} - \sigma_{k0}) + \sigma_{i1} - \sigma_{k1}\right] < 0 \text{ } при \text{ } k \in \{1,\dots,m\} \setminus \{i\},$$

$$(\lambda_0 - 1)\left[\lambda_0(\sigma_{j0} - \sigma_{k0}) + \sigma_{j1} - \sigma_{k1}\right] < 0 \qquad при \text{ } k \in \{m+1,\dots,m+n\} \setminus \{j\}.$$

Тогда для существования у дифференциального уравнения (2.61) $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – *решений наряду с* (2.6), (2.7) *необходимо выполнение следующих условий*

$$\lambda_0 = \frac{2 - \sigma_{i1} + \sigma_{j1}}{1 + \sigma_{i0} - \sigma_{j0}}, \quad \sigma_{i0} - \sigma_{j0} \neq -1, \quad \sigma_{i1} - \sigma_{j1} \neq 2, \tag{2.68}$$

$$\mu_0 \lim_{t \uparrow t_*} (t_* - t)^{\frac{2 - \sigma_{i1} + \sigma_{j1}}{1 - \sigma_{i0} + \sigma_{j0} - \sigma_{i1} + \sigma_{j1}}} = Y_0, \quad \mu_1 \lim_{t \uparrow t_*} (t_* - t)^{\frac{1 + \sigma_{i0} - \sigma_{j0}}{2 - \sigma_{i1} + \sigma_{j1}}} = Y_1, \tag{2.69}$$

$$\begin{gathered} \alpha_0 \mu_1 (1 - \sigma_{i0} + \sigma_{j0} - \sigma_{i1} + \sigma_{j1})(1 + \sigma_{i0} - \sigma_{j0}) < 0, \\ \mu_0 \mu_1 (1 - \sigma_{i0} + \sigma_{j0} - \sigma_{i1} + \sigma_{j1})(2 - \sigma_{i1} + \sigma_{j1}) < 0. \end{gathered} \tag{2.70}$$

Для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\begin{cases} \dfrac{y'(t)\varphi_{i1}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{j0}(y'(t))} = \dfrac{\alpha_{i0} A_* (1 - \sigma_{i0} + \sigma_{j0} - \sigma_{i1} + \sigma_{j1})}{\alpha_{j0}(1 + \sigma_{i0} - \sigma_{j0})}(t - t_*)[1 + o(1)], \\ \dfrac{y'(t)}{y(t)} = \dfrac{(2 - \sigma_{i1}) + \sigma_{j1}(1 + o(1))}{(1 - \sigma_{i0} + \sigma_{j0} - \sigma_{i1} + \sigma_{j1})(t - t_*)} \text{ } при \text{ } t \uparrow t_*. \end{cases} \tag{2.71}$$

Если же наряду с (2.6), (2.7), (2.68) – (2.70) *выполнено одно из условий*

$$либо \text{ } \frac{2 - \sigma_{i1} + \sigma_{j1}}{1 + \sigma_{i0} - \sigma_{j0}} \neq \sigma_{i1} - \sigma_{j1} - 1, \text{ } либо$$

$$\frac{2 - \sigma_{i1} + \sigma_{j1}}{1 + \sigma_{i0} - \sigma_{j0}} = \sigma_{i1} - \sigma_{j1} - 1 \text{ } и \text{ } \frac{(1 - \sigma_{i1} + \sigma_{j1})}{(1 - \sigma_{i0} + \sigma_{j0} - \sigma_{i1} + \sigma_{j1})} > 0,$$

то уравнение (2.61) *имеет* $P_{t_*}\left(Y_0, Y_1, \frac{2-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}{1+\sigma_{i0}-\sigma_{j0}})\right)$ *–решения, допускающие представления* (2.71)*, причем таких решений существует однопараметрическое семейство, если выполняется неравенство*

$$(2-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})(1+\sigma_{i0}-\sigma_{j0})(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})<0$$

и двухпараметрическое семейство, если

$$(2-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})(1+\sigma_{i0}-\sigma_{j0})(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})>0 \quad и$$

$$\frac{\mu_0\mu_1(2-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})}{(3-2(\sigma_{i1}-\sigma_{j1})+\sigma_{i0}-\sigma_{j0}-(\sigma_{i0}-\sigma_{j0})(\sigma_{i1}-\sigma_{j1}))}>0.$$

Выводы к главе II

Во второй главе исследовано асимптотическое поведение $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений уравнения (2.1) при $t \uparrow \omega$ для $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. В этом случае каждое $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решение и его производная первого порядка при $t \uparrow \omega$ являются правильно меняющимися функциями порядков, отличных от нуля. Основным результатом данной главы является теорема 2.1. При соблюдении условия $(RN)_{\lambda_0}$ установлены необходимые, а также достаточные условия существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений уравнения (2.1), а также асимптотическое поведение этих решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$, выяснено количество семейств $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений. Приведенные в этой теореме асимптотические представления записаны в неявном виде. В теореме 2.2 установлены дополнительные условия на функции φ_0, φ_1, позволяющие получить асимптотику указанных в теореме 2.1 решений в явном виде.

Кроме того, при доказательстве теоремы 2.1 на одном из этапов исследования возникает необходимость установления существования у некоторой специальной системы неавтономных квазилинейных дифференциальных уравнений исчезающих на бесконечности решений. В

§2.2 получены для такого типа систем признаки наличия, стремящихся к нулю решений при $t \to +\infty$ (лемма 2.1, лемма 2.2, лемма 2.3). С их использованием в §2.3 доказаны основные теоремы главы. Теоремы 2.1, 2.2 в §2.4 позволили указать условия существования $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$решений и асимптотические представления этих сингулярных решений и их производных первого порядка при $t \uparrow t_*$ и $a < t_* < \omega$. В последнем §2.5 установленные результаты проиллюстрированы на важном классе дифференциальных уравнений вида (2.61). При этом установлены ограничения на правую часть уравнения (2.61), при которых условие $(RN)_{\lambda_0}$ заведомо выполнено.

ГЛАВА III.
УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$РЕШЕНИЙ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ: $\lambda_0=1$

Данная глава посвящена изучению асимптотического поведения в окрестности особой точки, а также условий существования $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$ решений дифференциального уравнения (2.1).

§ 3.1. Основной результат

Определение 3.1. *Будем говорить, что функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)_1$, *если существуют число* $\alpha_0\in\{-1,1\}$, *непрерывная функция* $p:[a,\omega[\to]0,+\infty[$ *и непрерывные правильно меняющиеся при* $z\to Y_i$ $(i=0,1)$ *функции* $\varphi_i:\Delta_{Y_i}\to]0,+\infty[$ $(i=0,1)$ *порядков* σ_i $(i=0,1)$, *такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций* $z_i:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_i}$ $(i=0,1,\ t_0\in[a,\omega[)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t\uparrow\omega}z_i(t)=Y_i,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_i'(t)}{z_i(t)}=\pm\infty\ (i=0,1),\qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{z_0'(t)z_1(t)}{z_0(t)z_1'(t)}=1,\tag{3.1}$$

имеет место представление

$$f(t,z_0(t),z_1(t))=\alpha_0p(t)\varphi_0(z_0(t))\varphi_1(z_1(t))[1+o(1)]\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega.\tag{3.2}$$

Из выполнения условия $(RN)_1$ вытекает, что каждое $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$решение уравнения (2.1), а также его производная являются быстро меняющимися при $t\uparrow\omega$.

Введем вспомогательные функции, полагая

$$I_0(t)=\int_{A_0}^{t}p(\tau)\ d\tau,\ I_1(t)=\int_{A_1}^{t}I_0(\tau)d\tau,$$

где пределы интегрирования $A_i\in\{a,\omega\}$ $(i=0,1)$ выбраны так, чтобы каждая функция $I_i(t)$ $(i=0,1)$ $I_i(t)$ $(i=0,1)$ стремилась либо к 0, либо к $\pm\infty$ при $t\uparrow\omega$.

Теорема 3.1. *Пусть функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)_1$ *и в представлении* (3.2) *порядки* σ_i $(i = 0,1)$ *функций* φ_i $(i = 0,1)$ *такие, что* $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$. *Тогда для существования у дифференциального уравнения* (2.1) $P_\omega(Y_0, Y_1, 1) -$ *решений необходимо, а если выполнено одно из следующих условий*

$$\text{либо } \sigma_1 \neq 2, \text{ либо } \sigma_1 = 2 \text{ и } 1 - \sigma_0 - \sigma_1 < 0, \tag{3.3}$$

то и достаточно, чтобы соблюдались знаковые условия (2.6), (2.7) и

$$\alpha_0 \mu_1 (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_0(t) > 0 \text{ при } t \in]a, \omega[, \ \alpha_0 \mu_0 > 0, \tag{3.4}$$

а также условия

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p(t) I_1(t)}{I_0^2(t)} = 1, \tag{3.5}$$

$$Y_i = \mu_i \lim_{t \uparrow \omega} | I_{1-i}(t) |^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \quad (i = 0,1). \tag{3.6}$$

Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ *имеют место ("грубые") асимптотические представления*

$$y^{(i)}(t) = \mu_i | I_{1-i}(t) |^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1} + o(1)} \ (i = 0,1) \text{ при } t \uparrow \omega, \tag{3.7}$$

а также представления вида

$$\frac{y(t)}{\varphi_0(y(t)) \varphi_1\left(\dfrac{I_0(t) y(t)}{(1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_1(t)} \right)} = \alpha_0 (1 - \sigma_0 - \sigma_1)^2 I_1(t)[1 + o(1)], \tag{3.8}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I_0(t)(1 + o(1))}{(1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_1(t)}; \tag{3.9}$$

причем таких решений существует однопараметрическое семейство, если $1 - \sigma_0 - \sigma_1 < 0$ *и двухпараметрическое семейство, если* $1 - \sigma_0 - \sigma_1 > 0$ *и* $\alpha_0 \mu_1 (\sigma_1 - 2) < 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0} -$ произвольное $P_\omega(Y_0, Y_1, 1) -$ решение уравнения (2.1). Тогда из определения

$P_\omega(Y_0, Y_1, 1)-$решения следует, что для этого решения выполнено предельное равенство

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y(t)y''(t)}{[y'(t)]^2}=1. \tag{3.10}$$

Также из определения $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)-$решения с учетом (3.10) вытекает существование числа $t_1\in[t_0,\omega[$ такого, что $y^{(k)}(t)\neq 0$ $(k=0,1,2)$, $\mathrm{s}ign\, y^{(k)}(t)=\mu_k$ $(k=0,1)$, $\mu_0 y''(t)>0$ при $t\in[t_1,\omega[$ и соблюдается неравенство (2.6). В силу (3.10) для $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)-$ решения при $t\in[t_1,\omega[$ имеем

$$\frac{y'(t)}{y(t)}\sim\frac{y''(t)}{y'(t)} \quad при \quad t\uparrow\omega. \tag{3.11}$$

Используя соотношение (3.10) покажем, что для $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)-$решения

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}=\pm\infty. \tag{3.12}$$

Из (3.10) и тождества $\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)'\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-2}=\frac{y(t)y''(t)}{(y'(t))^2}-1$ следует

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)'\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-2}=\phi(t),\ \phi(t)=o(1)\ при\ t\uparrow\omega.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке $[t_1,t]\subset[a,\omega[$, имеем

$$-\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-1}+C=\int_{t_1}^{t}\phi(\tau)\ d\tau, \tag{3.13}$$

где $C-$некоторая постоянная. Рассмотрим сначала случай $\omega=+\infty,$ т. е. когда $\pi_\omega(t)=t.$ Разделив обе части (3.13) на t и переходя к пределу при $t\to+\infty,$ получим

$$-\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-1}}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\int_{t_1}^{t}\phi(\tau)\ d\tau}{t}.$$

Здесь в силу правила Лопиталя в форме Штольца при $t\to+\infty,$ правая часть стремится к нулю, откуда находим $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{y(t)}{t\ y'(t)}=0.$ Отсюда с учетом того, что функции $y(t),\ y'(t)$ сохраняют знак, имеем представление (3.12) для $\omega=+\infty.$

Если же $\omega<+\infty$, то $\pi_\omega(t)=t-\omega$ и в (3.13) $\int\limits_{t_1}^{t}\phi(\tau)\ d\tau=C_1+\int\limits_{\omega}^{t}\phi(\tau)\ d\tau$, C_1 – некоторая постоянная. Поэтому

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-1}=C-C_1-\int\limits_{\omega}^{t}\phi(\tau)\ d\tau, \tag{3.14}$$

откуда следует, что функция $\left(\dfrac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-1}$ стремится к постоянной при $t\uparrow\omega$.

Если в (3.14) $C-C_1\neq 0$, то при $t\uparrow\omega$ получим $\dfrac{y'(t)}{y(t)}=\dfrac{1}{C-C_1}+o(1).$

Следовательно, $\ln|y(t)|\to const$ при $t\uparrow\omega$, чего быть не может, так как в силу определения $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решения левая часть этого соотношения стремится к $\pm\infty$. Поэтому (3.14) имеет вид

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-1}=-\int\limits_{\omega}^{t}\phi(\tau)\ d\tau.$$

Деля обе части последнего равенства на $\pi_\omega(t)$ и переходя к пределу при $t\uparrow\omega$, придем ввиду правила Лопиталя к соотношению (3.12) для $\omega<+\infty$, откуда с учетом условия (3.10) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\ y''(t)}{y'(t)}=\pm\infty. \tag{3.15}$$

Теперь в силу (3.12), (3.15) из (2.1) и условия $(RN)_1$, которому удовлетворяет функция f, на решении y имеем

$$y''(t)=\alpha_0 p(t)\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))[1+o(1)]\quad при\quad t\uparrow\omega,$$

или

$$\frac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}=\alpha_0 p(t)[1+o(1)]\ \ при\ t\uparrow\omega. \tag{3.16}$$

Отсюда в силу неравенства $\mu_0 y''(t)>0$ при $t\in[t_1,\omega]$ имеем второе знаковое условие (3.4). Кроме того, интегрируя (3.16) на промежутке от A_0 до t, получим

$$\int_{A_0}^{t}\frac{y''(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}=\alpha_0 I_0(t)[1+o(1)] \quad при \quad t\uparrow\omega. \tag{3.17}$$

Сравним интеграл $\int_{A_0}^{t}\frac{y''(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}$ с функцией $\frac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}$, где $\varphi_{ii}:\Delta_{Y_i}\to]0,+\infty[$ $(i=0,1)$ – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие (см. Гл.I) условиям (2.34). Так как функция $I_0(t)$ при $t\uparrow\omega$ стремится либо к нулю, либо к бесконечности, то ввиду (3.17) также себя ведет $\int_{A_0}^{t}\frac{y''(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}$. Если $\int_{A_0}^{t}\frac{y''(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}\to\pm\infty$ при $t\uparrow\omega$, то в силу правила Лопиталя в форме Штольца, условий (2.34) и определения $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$ – решения, имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}}{\displaystyle\int_{A_0}^{t}\frac{y''(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{y''(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}}{\dfrac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}}\times$$
$$\times\left[1-\frac{[y'(t)]^2}{y''(t)y(t)}\frac{y(t)\varphi_{00}'(y(t))}{\varphi_{00}(y(t))}-\frac{y'(t)\varphi_{11}'(y'(t))}{\varphi_{11}(y'(t))}\right]==1-\sigma_0-\sigma_1. \tag{3.18}$$

Допустим теперь, что $\lim_{t\uparrow\omega}\int_{A_0}^{t}\frac{y''(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}=0$. Тогда ввиду (3.17) $A_0=\omega$, т.е. $\int_a^\omega p(\tau)d\tau$ сходится. Исходя из вида производной функции $\frac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}$ (см. (3.17)), условий (2.34), определения $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$ – решения, $1-\sigma_0-\sigma_1\neq 0$, замечаем, что в некоторой левой окрестности ω эта функция строго монотонна. Поэтому для функции $\dfrac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}$ при $t\uparrow\omega$ существует конечный или равный $\pm\infty$ предел. Предположим, что этот предел не равен нулю. Тогда из (3.16) имеем

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} \sim \frac{\alpha_0 p(t)}{\dfrac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}} \sim \varphi(t)p(t) \quad при \quad t\uparrow\omega,$$

где

$$\lim_{t\uparrow\omega}\varphi(t) = const \neq 0,$$

откуда с учетом того, что $A_0=\omega$, получим $\ln|y'(t)|\to const$ при $t\uparrow\omega$, чего быть не может в силу (2.2) и $Y_1\in\{0,\infty\}$. Таким образом, $\dfrac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}\to 0$ при $t\uparrow\omega$ и ввиду правила Лопиталя имеет место (3.18). Поэтому соотношение (3.17) с учетом $1-\sigma_0-\sigma_1\neq 0$, (3.17) может быть переписано в виде

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t)[1+o(1)], \tag{3.19}$$

откуда вытекает первое знаковое условие (3.4). Кроме того, интегрируя (3.19) на промежутке от A_1 до t, имеем

$$\int_{A_1}^{t}\frac{y'(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))} = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)[1+o(1)] \ \ при \ t\uparrow\omega. \tag{3.20}$$

Сравнивая интеграл $\displaystyle\int_{A_1}^{t}\frac{y'(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}$ с функцией $\dfrac{y(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}$ и рассуждая аналогично предыдущему, в силу (2.34) и правила Лопиталя получим при $t\uparrow\omega$

$$\frac{y(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = (1-\sigma_0-\sigma_1)[1+o(1)]\int_{A_1}^{t}\frac{y'(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau)).}$$

Отсюда с учетом (3.20) вытекает

$$\frac{y(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)^2 I_1(t)[1+o(1)] \quad при \quad t \uparrow \omega. \tag{3.21}$$

Из соотношений (3.19) и (3.21) следует выполнение условия (3.9), откуда в свою очередь, с учетом определения функций $I_0(t), I_1(t)$ при $t \uparrow \omega$ имеем

$$\ln|y(t)| = \frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\ln|I_1(t)|(1+o(1)).$$

Поэтому справедливо представление (3.7) при $i=0$.

Следствием соотношений (3.16) и (3.21) является представление

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{p(t)(1+o(1))}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t)} \quad при \quad t \uparrow \omega, \tag{3.22}$$

откуда с учетом определения $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$решения получаем при $i=1$ предельное равенство (3.6) и представление (3.7). Условие (3.5) вытекает из соотношений (3.9), (3.11), (3.22).

Так как функция φ_1 является правильно меняющейся порядка σ_1, то имеем

$$\varphi_1(z) = |z|^{\sigma_1} L_1(z), \tag{3.23}$$

где $L_1 -$медленно меняющаяся при $z \to Y_1$. В силу теоремы о равномерной сходимости медленно меняющихся функций (см. теорему 1.5) и (3.9) находим

$$\varphi_1(y'(t)) = |y'(t)|^{\sigma_1} L_1(y'(t)) = \left|\frac{I_0(t)(1+o(1))y(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right|^{\sigma_1} \times L_1\left(\frac{I_0(t)(1+o(1))y(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right) =$$

$$= \left|\frac{I_0(t)y(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right|^{\sigma_1} L_1\left(\frac{I_0(t)y(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right)(1+o(1)) =$$

$$= \varphi_1\left(\frac{I_0(t)y(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right)(1+o(1)) \quad при \quad t \uparrow \omega.$$

Ввиду последнего равенства из (3.19) с учетом (3.9), получим представление (3.8).

Достаточность. Пусть наряду с (3.4) – (3.6), (2.6), (2.7) соблюдается одно из условий (3.3). Покажем, что в этом случае дифференциальное уравнение (2.1) имеет $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$решения, допускающие при $t\uparrow\omega$ представления (3.7), (3.8), (3.9), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Заметим сначала, что $\dfrac{I_0'(t)}{I_0(t)}\sim\dfrac{I_1'(t)}{I_1(t)}$ при $t\uparrow\omega$, поэтому в силу (3.5)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\ln|I_0(t)|}{\ln|I_1(t)|}=1. \tag{3.24}$$

Рассмотрим теперь с учетом $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$ соотношение

$$\frac{y}{\varphi_{00}(y)\varphi_{11}\left(\dfrac{I_0(t)y}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right)}-\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)^2 I_1(t)(1+v_1)=0 \tag{3.25}$$

в котором $\varphi_{ii}:\Delta_{Y_i}\to]0,+\infty[$ $(i=0,1)-$непрерывно дифференцируемые функции вида

$$\varphi_{ii}(z)=|z|^{\sigma_i}\,L_{ii}(z)\quad (i=0,1), \tag{3.26}$$

удовлетворяющие условиям (2.34),

$$\lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}}\frac{L_i(z)}{L_{ii}(z)}=1,\ \lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}}\frac{zL_{ii}'(z)}{L_{ii}(z)}=0\quad (i=0,1). \tag{3.27}$$

Покажем, что (3.25) однозначно определяет заданную на множестве $D_0=[t_0,\omega[\times V_1$, где $t_0\in[a,\omega[$ и $V_1=\{v_1\in R:|v_1|\le 1/2\}$, непрерывно дифференцируемую неявную функцию $y=Y(t,v_1)$ вида

$$Y(t,v_1)=\mu_0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z(t,v_1)}, \tag{3.28}$$

где функция z такова, что $|z(t,v_1)|\le\dfrac{1}{2|1-\sigma_0-\sigma_1|}$ *при* $(t,v_1)\in D_0$ и

$$\lim_{t\uparrow\omega}z(t,v_1)=0\ \textit{равномерно по}\ v_1\in V_1.$$

Для этого, полагая в (3.25)

$$y=\mu_0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}, \tag{3.29}$$

получим с учетом (3.26) и знаковых условий (3.4) соотношение

$$\frac{|I_1(t)|^{1+\sigma_1+(1-\sigma_0-\sigma_1)z}|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\sigma_1}}{\left|I_0(t)\right|^{\sigma_1} L_{00}\left(\mu_0 |I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)L_{11}\left(\mu_1\left|\frac{I_0(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right| |I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)}=$$

$$=(1-\sigma_0-\sigma_1)^2\left|1+v_1\right| |I_1(t)|,$$

откуда в результате логарифмирования находим

$$\left(1+\sigma_1+z(1-\sigma_0-\sigma_1)\right)\ln|I_1(t)|=\ln|I_1(t)|+(2-\sigma_1)\ln|1-\sigma_0-\sigma_1|+\ln\left|1+v_1\right|+$$

$$+\sigma_1\ln|I_0(t)|+\ln\left(L_{00}\left(\mu_0 |I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)L_{11}\left(\mu_1\left|\frac{I_0(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right| |I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)\right).$$

Отсюда следует, что

$$z=a(t)+b(t,v_1)+Z(t,z) \tag{3.30}$$

где

$$a(t)=(1-\sigma_0-\sigma_1)^{-1}\left[\sigma_1\frac{\ln|I_0(t)|}{\ln|I_1(t)|}-\sigma_1+\frac{(2-\sigma_1)\ln|1-\sigma_0-\sigma_1|}{\ln|I_1(t)|}\right],$$

$$b(t,v_1)=\frac{\ln\left|1+v_1\right|}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\ln|I_1(t)|},$$

$$Z(t,z)=\frac{\ln\left(L_{00}\left(\mu_0\left|I_1(t)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+s}\right)L_{11}\left(\mu_1\left|\frac{I_0(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right|\left|I_1(t)\right|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+s}\right)\right)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\ln|I_1(t)|}.$$

Поскольку согласно условиям (3.6)

$$\mu_0\lim_{t\uparrow\omega}|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}=Y_0 \quad npu \quad |z|\le d,$$

где $d=(2|1-\sigma_0-\sigma_1|)^{-1}$, то с учетом (3.24) имеем

$$\mu_1\lim_{t\uparrow\omega}\left|\frac{I_0(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right||I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}=\frac{\mu_1}{|1-\sigma_0-\sigma_1|}\lim_{t\uparrow\omega}|I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}|I_1(t)|^z\times$$

$$\times\lim_{t\uparrow\omega}\left|\frac{I_0(t)}{I_1(t)}\right|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}=\frac{\mu_1}{|1-\sigma_0-\sigma_1|}\lim_{t\uparrow\omega}|I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}|I_1(t)|^z\ \lim_{t\uparrow\omega}e^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}(ln|I_0(t)-ln|I_1(t)|)}=$$

$$=\frac{\mu_1}{|1-\sigma_0-\sigma_1|}\lim_{t\uparrow\omega}|I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}|I_1(t)|^z=Y_1.$$

Поэтому правая часть соотношения (3.29) определена и непрерывно дифференцируема на множестве $\Omega=[t_1,\omega[\times V_1\times Z_0$, где t_1 – некоторое число из промежутка $[a,\omega[$ и $Z_0=\{z\in R:|z|\le d\}$.

В (3.30)

$$\lim_{t\uparrow\omega}b(t,v_1)=0 \ \textit{равномерно по} \ v_1\in V_1, \tag{3.31}$$

а также в силу (3.26)

$$\lim_{t\uparrow\omega}a(t)=0. \tag{3.32}$$

Так как ввиду (3.24)

$$|I_0(t)||I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+o(1)}\sim|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+o(1)} \ \textit{при} \ t\uparrow\omega,$$

то в силу свойств медленно меняющихся функций (см. Гл. I) верны равенства

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\ln\left(L_{00}\left(\mu_0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)\right)}{\ln|I_1(t)|}=0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\ln\left(L_{11}\left(\mu_1|I_0(t)||I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)\right)}{\ln|I_1(t)|}=0 \ \textit{равномерно по} \ z\in Z_0,$$

т.е. справедливо соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega}Z(t,z)=0 \ \textit{равномерно по} \ z\in Z_0. \tag{3.33}$$

Также находим

$$\frac{\partial Z(t,z)}{\partial z}=\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\left[\frac{\mu_0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}L'_{00}\left(\mu_0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)}{L_{00}\left(\mu_0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)}+\right.$$

$$+\frac{\mu_1\left|\dfrac{I_0(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right| |I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z} L'_{11}\left(\mu_1\left|\dfrac{I_0(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right| |I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)}{L_{11}\left(\mu_1\left|\dfrac{I_0(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right| |I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)}\Bigg].$$

Отсюда с учетом вторых из условий (3.27) следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\partial Z(t,z)}{\partial z}=0 \ \ \textit{равномерно по } z\in Z_0.$$

В силу (3.31) – (3.35) существует число $t_2\in[t_1,\omega[$ такое, что на множестве $[t_2,\omega[\times V_1\times Z_0$ соблюдается неравенство

$$|a(t)+b(t,v_1)+Z(t,z)|\le d \tag{3.34}$$

и выполняется условие Липшица

$$|Z(t,z_1)-Z(t,z_2)|\le\frac{1}{2}|z_1-z_2| \quad \textit{при } t\in[t_2,\omega[\textit{ и } z_1,z_2\in Z_0 \ . \tag{3.35}$$

Подобрав таким образом число t_2, обозначим через $\mathbf{B}$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $D=[t_2,\omega[\times V_1$ функций $z:D\to R$ с нормой $\|z\|=\sup\{|z(t,v_1)|:(t,v_1)\in D\}$. Пусть $\mathbf{B}_0$ подпространство тех функций из $\mathbf{B}$, для которых $\|z\|\le d$. Выбрав предварительно произвольным образом число $\nu\in(0,1)$, рассмотрим на $\mathbf{B}_0$ оператор

$$\Phi(z)(t,v_1)=z(t,v_1)-\nu\left[z(t,v_1)-a(t)-b(t,v_1)-Z(t,z(t,v_1))\right]. \tag{3.36}$$

Для любого $z\in\mathbf{B}_0$ в силу условия (3.34) имеем

$$|\Phi(z)(t,v_1)|\le(1-\nu)|z(t,v_1)|+\nu d\le d \quad \textit{при} \quad (t,v_1)\in D.$$

Следовательно, $\|\Phi(z)\|\le d$, т.е. $\Phi(\mathbf{B}_0)\subset\mathbf{B}_0$.

Пусть теперь $z_1,z_2\in\mathbf{B}_0$. Тогда в силу (3.35) при $(t,v_1)\in D$

$$|\Phi(z_1)(t,v_1)-\Phi(z_2)(t,v_1)|\le(1-\nu)|z_1(t,v_1)-z_2(t,v_1)|+\nu|Z(t,z_1(t,v_1))-Z(t,z_2(t,v_1)|\le$$
$$\le(1-\nu)|z_1(t,v_1)-z_2(t,v_1)|+\nu/2|z_1(t,v_1)-z_2(t,v_1)|\le\left(1-\nu/2\right)\|z_1-z_2\|.$$

Откуда следует, что $\|\Phi(z_1)-\Phi(z_2)\|\le\left(1-\nu/2\right)\|z_1-z_2\|$.

Тем самым, показано, что оператор Φ отображает пространство $\mathbf{B}_0$ в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная функция $z \in \mathbf{B}_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (3.36) эта непрерывная на множестве D функция является единственным решением уравнения (3.30), удовлетворяющим условию $\|z\| \le d$. Из (3.30) с учетом этого условия и (3.31) – (3.33) следует, что данное решение стремится к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $v_1 \in V_1$. Непрерывная дифференцируемость этого решения на множестве $D_0 = [t_0, \omega[\times V_1$, где t_0 – некоторое число из промежутка $[t_2, \omega[$, непосредственно вытекает из известной локальной теоремы о существовании неявной функци, определяемой соотношением (3.30). В силу замены (3.29) полученной функции z соответствует функция Y вида (3.28), которая является решением уравнения (3.25). Теперь, применяя к дифференциальному уравнению (2.1) преобразование

$$y(t) = Y(t, v_1(\tau)), \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I_0(t)[1 + v_2(\tau)]}{(1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_1(t)}, \tag{3.37}$$

где

$$\tau = \beta \ln |I_0(t)|, \ \beta = \mathrm{s}ign \ \ (\mu_1 \alpha_0 (1 - \sigma_0 - \sigma_1)),$$

и учитывая, что функция (3.28) при $t \in [t_0, \omega[$ и $(v_1(\tau), v_2(\tau)) \in V_0$, $V_0 = \{(v_1, v_2) \in R^2 : | v_i | \le 1/2 \ \ (i = 1, 2)\}$ является решением уравнения

$$\frac{y(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}\left(\dfrac{I_0(t) y(t)}{(1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_1(t)}\right)} = \alpha_0 (1 - \sigma_0 - \sigma_1)^2 I_1(t)[1 + v_1(\tau)], \tag{3.38}$$

получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v_1' = \\ = \beta\left[\dfrac{q(\tau)(1+v_1)(1+v_2)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\big(1-H_0(\tau,v_1)-H_1(\tau,v_1)\big)-(1+v_1)\big(q(\tau)+H_1(\tau,v_1)(1-q(\tau))\big)\right., \\ v_2' = \\ = \beta\left[\dfrac{G(\tau,v_1,v_2)\Phi_0(\tau,v_1)\Phi_1(\tau,v_1,v_2)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\dfrac{(1+v_2)^{\sigma_1}}{1+v_1}-\dfrac{q(\tau)(1+v_2)^2}{1-\sigma_0-\sigma_1}-(1-q(\tau))(1+v_2)\right], \end{cases} \tag{3.39}$$

в которой

$$q(\tau(t)) = \frac{I_0^2(t)}{p(t)I_1(t)}, \quad H_0(\tau(t),v_1) = \frac{Y(t,v_1)\varphi_{00}'(Y(t,v_1))}{\varphi_{00}(Y(t,v_1))},$$

$$H_1(\tau(t),v_1) = \frac{I_0(t)Y(t,v_1)\varphi_{11}'\left(\dfrac{I_0(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)\varphi_{11}\left(\dfrac{I_0(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)},$$

$$G(\tau(t),v_1,v_2) = \frac{f\left(t, Y(t,v_1), \dfrac{I_0(t)[1+v_2]}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)}{\alpha_0 p(t)\varphi_0\big(Y(t,v_1)\big)\varphi_1\left(\dfrac{I_0(t)[1+v_2]}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)},$$

$$\Phi_0(\tau(t),v_1) = \frac{\varphi_0\big(Y(t,v_1)\big)}{\varphi_{00}\big(Y(t,v_1)\big)},$$

$$\Phi_1(\tau(t),v_1,v_2) = \frac{\varphi_1\left(\dfrac{I_0(t)[1+v_2]}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)}{(1+v_2)^{\sigma_1}\varphi_{11}\left(\dfrac{I_0(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)}.$$

Здесь функция $\tau(t) = \beta\ln|I_0(t)|$ обладает свойствами

$$\tau : [t_0,\omega[\to]0,+\infty[, \ \tau'(t) > 0 \ \textit{при} \ t \in [t_0,\omega[, \ \lim_{t\uparrow\omega}\tau(t) = +\infty.$$

Поэтому в силу условия (3.5)

$$\lim_{\tau\to+\infty} q(\tau) = \lim_{t\uparrow\omega} q(\tau(t)) = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_0^2(t)}{p(t)I_1(t)} = 1. \tag{3.40}$$

Поскольку согласно условиям (3.6) и представлению (3.28)

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y(t,v_1) = Y_0 \ \ \textit{равномерно по} \ v_1 \in V_1, \tag{3.41}$$

то с учетом (3.4), (3.29) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_0(t)Y(t,v_1)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}=Y_1 \text{ } \textit{равномерно по } v_1\in V_1. \qquad (3.42)$$

Поэтому из условий (2.34), (3.41), (3.42) находим

$$\lim_{t\uparrow\omega}H_i(\tau(t),v_1)=\sigma_i \quad (i=0,1) \text{ } \textit{равномерно по } v_1\in V_1.$$

Следовательно, имеют место представления

$$H_i(\tau,v_1)=\sigma_i+r_i(\tau,v_1) \quad (i=0,1), \qquad (3.43)$$

где

$$\lim_{\tau\to+\infty}r_i(\tau,v_1)=0 \quad (i=0,1) \text{ } \textit{равномерно по } v_1\in V_1.$$

В силу (3.41), (3.42) с учетом (3.23), (3.26), (2.34) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\Phi_0(\tau(t),v_1)=1 \text{ } \textit{равномерно по } v_1\in V_1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\Phi_1(\tau(t),v_1,v_2)=1 \text{ } \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0,$$

и поэтому справедливы представления

$$\Phi_0(\tau(t),v_1)=1+r_2(\tau(t),v_1), \quad \Phi_1(\tau(t),v_1,v_2)=1+r_3(\tau(t),v_1,v_2), \qquad (3.44)$$

где

$$\lim_{\tau\to+\infty}r_2(\tau,v_1)=0 \text{ } \textit{равномерно по } v_1\in V_1,$$

$$\lim_{\tau\to+\infty}r_3(\tau,v_1,v_2)=0 \text{ } \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0.$$

Покажем теперь, что имеет место соотношение

$$G(\tau,v_1,v_2)=1+r_4(\tau,v_1,v_2), \qquad (3.45)$$

где

$$\lim_{\tau\to+\infty}r_4(\tau,v_1,v_2)=0 \text{ } \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0.$$

Аналогично доказательству предельных равенств (3.12) легко показать, что следствием условия (3.5) и определения функций I_0, I_1 являются соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_0(t)}=\pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_0(t)}{I_1(t)}=\pm\infty. \qquad (3.46)$$

Из соотношения (3.25), которому удовлетворяет функция Y, вытекает

$$\frac{\left(Y(t,v_1)\right)_t'}{Y(t,v_1)}\cdot\frac{I_1(t)}{I_0(t)}\left(1-H_0(\tau(t),v_1)-H_1(\tau(t),v_1)\right)-H_1(\tau(t),v_1)\left(\frac{I_1(t)p(t)}{I_0^2(t)}-1\right)=1.$$

Откуда в силу (3.43), (3.5), (3.6)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(Y(t,v_1)\right)_t'}{Y(t,v_1)}\cdot\frac{I_1(t)}{I_0(t)}=\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\ \ \textit{равномерно по } v_1\in V_1. \qquad (3.47)$$

Учитывая (3.46) из этого соотношения находим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(Y(t,v_1)\right)_t'}{Y(t,v_1)}=\pm\infty\ \ \textit{равномерно по } v_1\in V_1. \qquad (3.48)$$

Следствием (3.5), (3.47) является предельное равенство

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{I_0(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\left(Y(t,v_1)\right)_t'}{\left(\dfrac{I_0(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)_t'Y(t,v_1)}=1\qquad \textit{равномерно по } v_1\in V_1. \qquad (3.49)$$

Из (3.48), (3.49) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{I_0(t)[1+v_2]}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)_t'}{\dfrac{I_0(t)[1+v_2]}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)}=\pm\infty\ \ \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0.$$

Тогда в силу (3.48), (3.49), последнего соотношения и условия $(RN)_1$, которому удовлетворяет функция f, имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}G(\tau(t),v_1,v_2)=1\ \ \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0,$$

т.е. справедливо представление (3.45). Используя теперь соотношения (3.43)–(3.45), а также условия (3.40), перепишем систему дифференциальных уравнений (3.39) в виде

$$\begin{cases} v_1'=\beta\left[\varepsilon_1(\tau,v_1,v_2)+v_2+\tilde{V}_1(v_1,v_2)\right], \\ v_2'=\beta\left[\varepsilon_2(\tau,v_1,v_2)-\dfrac{v_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+\dfrac{(\sigma_1-2)v_2}{1-\sigma_0-\sigma_1}+\tilde{V}_2(v_1,v_2)\right], \end{cases} \qquad (3.50)$$

где

$$\varepsilon_1(\tau,v_1,v_2)=\frac{(1+v_1)(1+v_2)\big(r_0(\tau,v_1)+r_1(\tau,v_1)\big)}{1-\sigma_0-\sigma_1}+\big(q(\tau)-1\big)(1+v_1)\times$$

$$\times\left(\frac{(1+v_2)(1-H_0(\tau,v_1)-H_1(\tau,v_1))}{1-\sigma_0-\sigma_1}-1-H_0(\tau,v_1)\right),$$

$$\varepsilon_2(\tau,v_1,v_2)=(1+v_2)(q(\tau)-1)-\frac{(q(\tau)-1)(1+v_2)^2}{1-\sigma_0-\sigma_1}+\frac{(1+v_2)^{\sigma_1}}{(1+v_1)(1-\sigma_0-\sigma_1)}\times$$
$$\times\big\{((1+r_2(\tau,v_1))(1+r_4(\tau,v_1,v_2))-1)+r_3(\tau,v_1,v_2)(1+r_2(\tau,v_1))(1+r_4(\tau,v_1,v_2))\big\},$$

$$\tilde{V}_1(v_1,v_2)=v_1v_2,\ \tilde{V}_2(v_1,v_2)=\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\big(r_5(v_1,v_2)-v_2^2\big),$$

$$r_5(v_1,v_2)=\frac{(1+v_2)^{\sigma_1}}{1+v_1}-1+v_1-\sigma_1v_2.$$

Здесь в силу (3.40), (3.43) – (3.45)

$$\lim_{\tau\to+\infty}\varepsilon_i(\tau,v_1,v_2)=0\ \ (i=1,2)\ \ \textit{равномерно по}\ (v_1,v_2)\in V_0.$$

Кроме того,

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0}\frac{\partial\tilde{V}_i(v_1,v_2)}{\partial v_j}=0\ \ (i,j=1,2)$$

и характеристическое уравнение матрицы коэффициентов, стоящих при v_1, v_2 в уравнениях системы, имеет вид

$$\rho^2-\beta\frac{\sigma_1-2}{1-\sigma_0-\sigma_1}\rho+\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}=0.$$

Ввиду выполнения одного из условий (3.3) это уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью.

Таким образом, система (3.50) удовлетворяет всем условиям леммы 2.3. Согласно этой лемме у системы дифференциальных уравнений (3.50) существует хотя бы одно решение $(v_1,v_2):[\tau_3,+\infty[\to\mathbb{R}^2$ $(\tau_3\ge\tau_0)$, стремящееся к нулю при $\tau\to+\infty$, причем таких решений существует однопараметрическое семейство, если соблюдается неравенство

$1-\sigma_0-\sigma_1<0$, и двухпараметрическое семейство, если соблюдаются неравенства

$$1-\sigma_0-\sigma_1>0 \ \ и \ \ \beta(\sigma_1-2)<0.$$

Каждому такому решению в силу замен (3.37) соответствует решение $y:[t_4,\omega[\to\Delta_{Y_0}$ $(t_4\geq t_0)$ дифференциального уравнения (2.1), допускающее асимптотические представления (3.7), (3.8), (3.9), причем в силу знака числа β и первого из знаковых условий (3.4) справедливо утверждение теоремы о количестве таких решений. Кроме того, из вида уравнения (2.1), условия (3.5), а также условия $(RN)_1$, которому удовлетворяет функция f, следует справедливость предельного равенства (3.10), т. е. найденное решение является $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$решением уравнения (2.1).

Теорема полностью доказана.

Выясним теперь, при каких условиях полученные в теореме асимптотические представления (3.8), (3.9) могут быть записаны в явном виде.

Теорема 3.2 *Пусть функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)_1$ *и функции* $\varphi_i\,(i=0,1)$ *в представлении* (3.2) *порядков* σ_i $(i=0,1)$, $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$, *удовлетворяют условию* S. *Тогда каждое* $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$*решение (в случае их существования) дифференциального уравнения* (2.1) *допускает при* $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$y(t)=\mu_0\Big(|1-\sigma_0-\sigma_1|^{2-\sigma_1}|I_0(t)|^{\sigma_1}|I_1(t)|^{1-\sigma_1}\Big)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}L(t)(1+o(1)),$$

$$y'(t)=\mu_1\Big(|1-\sigma_0-\sigma_1|^{1+\sigma_0}|I_0(t)|^{1-\sigma_0}|I_1(t)|^{\sigma_0}\Big)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}L(t)(1+o(1)), \qquad (3.51)$$

$$L(t)=\left(L_0\left(\mu_0\,|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)L_1\left(\mu_1\,|I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}.$$

Доказательство. При установлении теоремы 3.1 было показано, что для существования $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$решений у дифференциального уравнения (2.1) необходимо, чтобы соблюдались условия (3.4) – (3.6) и чтобы каждое такое решение допускало асимптотические представления (3.8), (3.9). Кроме того, было показано, что для таких решений имеют место предельные соотношения (3.22).

Учитывая, что в соотношении (3.8) при $t\uparrow\omega$ ввиду (3.9)

$$\varphi_1\left(\frac{I_0(t)y(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right)=\varphi_1\left(y'(t)\right)(1+o(1)),$$

перепишем (3.8) в силу (3.23) при $t\uparrow\omega$ в виде

$$\frac{\mu_0\,|\,y(t)\,|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{L_0(y(t))L_1(y'(t))}=\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)^2\left|\frac{I_0(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right|^{\sigma_1}I_1(t)[1+o(1)]. \qquad (3.52)$$

Поскольку функции φ_i $(i=0,1)$ удовлетворяют условию S, то в силу предельных соотношений (3.9), (3.22) и замечания 2.2 функции L_i $(i=0,1)$ из формул (3.23) допускают при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$L_0(y(t))=L_0\left(\mu_0\,|\,I_1(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)[1+o(1)],\ L_1(y'(t))=L_1\left(\mu_0\,|\,I_1(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)[1+o(1)].$$

Используя эти представления, (3.52), (3.9), знаковые условия (3.4), получаем соотношения (3.51).

Теорема доказана.

§ **3.2. О существовании сингулярных $P_{t_*}(Y_0,Y_1,1)-$решений уравнения 2.1**

Определение 3.2. *Пусть* $t_*\in]a,\omega[$, $\lambda_0=1$. *Будем говорить, что функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)_1^*$, *если существуют числа* $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $A_*>0$ *и непрерывные правильно меняющиеся при* $z\to Y_i$ $(i=0,1)$ *функции* $\varphi_i:\Delta_{Y_i}\to]0,+\infty[$ $(i=0,1)$ *порядков* σ_i $(i=0,1)$, *такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций* $z_i:[t_0,t_*[\to\Delta_{Y_i}$ $(i=0,1,\ t_0\in[a,t_*[)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t\uparrow t_*} z_i(t) = Y_i \;, \; \lim_{t\uparrow t_*} \frac{(t-t_*)z_i'(t)}{z_i(t)} = \pm\infty \quad (i=0,1), \quad \lim_{t\uparrow t_*} \frac{z_0'(t)z_1(t)}{z_0(t)z_1'(t)} = 1,$$

имеет место представление

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \alpha_0 A_* \varphi_0(z_0(t))\varphi_1(z_1(t))[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow t_*.$$

Предположим, что функция f удовлетворяет условию $(RN)_1^*$. Очевидно, что при $t \uparrow t_*$ функция $I_0(t) \sim A_*(t-t_*)$, $I_1(t) \sim A_*(t-t_*)^2/2$, поэтому условие (3.5) не выполняется, и из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. *Пусть* $t_* \in]a,\omega[$. *Тогда дифференциальное уравнение (2.1) не имеет сингулярных* $P_{t_*}(Y_0,Y_1,1)-$ *решений.*

$\S$3.3. Об асимптотике $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$решений дифференциального уравнения 2.61

Продемонстрируем результаты $\S$3.1 на примере дифференциального уравнения (2.61). Предположим, что соблюдаются неравенства

$$\limsup_{t\uparrow\omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||} < +\infty, \quad \mu_0\mu_1\left[\sigma_{k0} - \sigma_{i0} + \sigma_{k1} - \sigma_{i1}\right] < 0 \text{ при}$$

$$k \in \{1,\dots,m\} \setminus \{i\}, \qquad (3.53_i)$$

$$\limsup_{t\uparrow\omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_j(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||} < +\infty, \quad \mu_0\mu_1\left[\sigma_{k0} - \sigma_{j0} + \sigma_{k1} - \sigma_{j1}\right] < 0 \text{ при}$$

$$k \in \{m+1,\dots,m+n\} \setminus \{j\}, \quad (3.53_j)$$

где $\beta = sign\ \pi_\omega(t)$.

Докажем, что $i-$ое ($i \in \{1,\dots,m\}$) и $j-$ое ($j \in \{m+1,\dots,m+n\}$) слагаемые соответственно числителя и знаменателя правой части уравнения являются главными слагаемыми, т.е. для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_s : [a,\omega[\to \Delta_{Y_s}$ $(s=0,1)$, удовлетворяющих условиям (3.1), будут выполняться предельные соотношения (2.63), (2.64).

В силу того, что функции φ_{kl} правильно меняющиеся порядка σ_{kl} имеем при $z_s \to Y_s$ $\left(z_s \in \Delta_{Y_s}\right)$ представления (2.65).

Полагая при $i \in \{1,\dots,m\}$

$$R_k(t) = \frac{p_k(t)\varphi_{k0}(z_0(t))\varphi_{k1}(z_1(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(z_0(t))\varphi_{i1}(z_1(t))} \quad k \in \{1,\dots,m\} \setminus \{i\},$$

покажем, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega} R_k(t) = 0$.

Учитывая (3.1), $sign\, \pi_\omega(t) = \beta$, $sign\, z_0(t) = \mu_0$, $sign\, z_1(t) = \mu_1$, $\alpha_0\mu_0 > 0$, а также правило Лопиталя имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\ln|z_s(t)|}{\beta\ln|\pi_\omega(t)|} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\beta\pi_\omega(t)z_s{}'(t)}{z_s(t)} = \mu_0\mu_1(+\infty) \quad (s = 0,1).$$

Следовательно,

$$\ln R_k(t) = \ln\frac{p_k(t)}{p_i(t)} + \ln|z_0(t)|\left((\sigma_{k0} - \sigma_{i0})\right) + \ln|z_1(t)|\left(\sigma_{k1} - \sigma_{i1}\right) + o(1) =$$

$$= \beta\ln|\pi_\omega(t)|\left[\frac{\ln p_k(t) - \ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||} + \mu_0\mu_1\left(\sigma_{k0} - \sigma_{i0} + \sigma_{k1} - \sigma_{i1}\right) + o(1)\right].$$

В силу неравенств (3.53_i), приходим к выводу, что выражение в квадратных скобках отрицательно, т.е. соблюдается предельное соотношение (2.63). Аналогично доказываем соотношение (2.64).

Теперь из доказанных соотношений (2.64) и (2.65) вытекает, что функция $f(t,y,y') = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(y)\varphi_{k1}(y')}{\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(y)\varphi_{k1}(y')}$ удовлетворяет условию $(RN)_1$, т.е. имеет место при $t\uparrow\omega$ представление (3.2), где

$$\alpha_0 = \alpha_i\alpha_j, \quad p(t) = \frac{p_i(t)}{p_j(t)}, \quad \varphi_0(z) = \frac{\varphi_{i0}(z)}{\varphi_{j0}(z)}, \quad \varphi_1(z) = \frac{\varphi_{i1}(z)}{\varphi_{j1}(z)}.$$

Здесь φ_k $(k = 0,1)$ – правильно меняющиеся при $z \to Y_k$ функции порядков $\sigma_k = \sigma_{ik} - \sigma_{jk}$ $(k = 0,1)$. Поэтому к уравнению (2.61) применимы теоремы 3.1

и 3.2. Введем вместо I_0, I_1 функции I_{0ij}, I_{1ij}, полагая

$$I_{0ij}(t)=\int\limits_{A_{0ij}}^{t}\frac{p_i(\tau)}{p_j(\tau)}d\tau,\quad I_{1ij}(t)=\int\limits_{A_{1ij}}^{t}I_{0ij}(\tau)\,d\tau,$$

где пределы интегрирования $A_{kij}\in\{a,\omega\}$ $\left(k=0,1\right)$ выбраны так, чтобы каждая функция I_{0ij}, I_{1ij} стремилась либо к 0, либо к $\pm\infty$ при $t\uparrow\omega$.

Следствие 3.2. *Пусть для некоторых* $i\in\{1,\dots,m\}$ *и* $j\in\{m+1,\dots,m+n\}$ *соблюдается неравенство* $\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\sigma_{i1}-\sigma_{j1}\neq 1$ *и условия* (3.53$_i$), (3.53$_j$). *Тогда для существования у дифференциального уравнения* (2.1) $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$*решений необходимо, а если выполнено одно из следующих условий*

$$\text{либо } \sigma_{i1}-\sigma_{j1}\neq 2,\ \text{ либо } \sigma_{i1}-\sigma_{j1}=2 \text{ и } 1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}<0,$$

то и достаточно, чтобы соблюдались знаковые условия (2.6), (2.7),

$$\alpha i\alpha_j\mu_1(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})I_{0ij}(t)\qquad \text{при}\qquad t\in]a,\omega[,\qquad \alpha_i\alpha_j\mu_0>0,$$

а также условия

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)I_{1ij}(t)}{p_j(t)I_{0ij}^2(t)}=1,\quad Y_k=\mu_i\lim_{t\uparrow\omega}|I_{k-i\,ij}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}\quad (k=0,1).$$

Более того, для каждого такого решения при $t\uparrow\omega$ имеют место ("грубые") асимптотические представления

$$y^{(k)}(t)=\mu_i\,|I_{1-k\,ij}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}+o(1)}\quad (k=0,1)\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

а также представления вида

$$\frac{y(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}\left(\dfrac{I_{0ij}(t)y(t)}{(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})I_{1ij}(t)}\right)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}\left(\dfrac{I_{0ij}(t)y(t)}{(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})I_{1ij}(t)}\right)}=$$

$$=\alpha_i\alpha_j(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})^2I_{1ij}(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{I_{0ij}(t)(1+o(1))}{(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})I_{1ij}(t)};$$

причем таких решений существует однопараметрическое семейство, если $1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}<0$ *и двухпараметрическое семейство, если* $1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}>0$ *и* $\alpha_i\alpha_j\mu_1(\sigma_{i1}-\sigma_{j1}-2)<0.$

Следствие 3.3. *Пусть для некоторых* $i\in\{1,\dots,m\}$ *и* $j\in\{m+1,\dots,m+n\}$ *соблюдается неравенство* $\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\sigma_{i1}-\sigma_{j1}\neq 1$, *и условия* (3.53$_i$), (3.53$_j$). *Пусть, кроме того, функции* $\frac{\varphi_{i0}}{\varphi_{j0}}$ *и* $\frac{\varphi_{i1}}{\varphi_{j1}}$ *удовлетворяют условию* S. *Тогда каждое* $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$*решение дифференциального уравнения* (2.61) *(в случае существования) допускает при* $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$y(t)=L(t)(1+o(1))\times$$

$$\times\mu_0\left(|1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}|^{2-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}|I_{0ij}(t)|^{\sigma_{i1}-\sigma_{j1}}|I_{1ij}(t)|^{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}},$$

$$y'(t)=L(t)(1+o(1))\times$$

$$\times\mu_1\left(|1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}|^{1+\sigma_{i0}-\sigma_{j0}}|I_{0ij}(t)|^{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}}|I_{1ij}(t)|^{\sigma_{i0}-\sigma_{j0}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}},$$

$$L(t)=\left(L_0\left(\mu_0|I_{1ij}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}\right)L_1\left(\mu_1|I_{0ij}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}.$$

Замечание 3.1. *Если в дифференциальном уравнении* (2.61) *функции* $p_k:[a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(k=\overline{1,m+n})$ *также являются непрерывными и правильно меняющимися порядков* ρ_k $(k=\overline{1,m+n})$ *при* $t\uparrow\omega$, *то неравенства* (3.53$_i$), (3.53$_j$) *примут вид*

$$\beta(\rho_k-\rho_i)<+\infty,\quad \mu_0\mu_1\left[\sigma_{k0}-\sigma_{i0}+\sigma_{k1}-\sigma_{i1}\right]<0\ \text{ при }\ k\in\{1,\dots,m\}\setminus\{i\},$$

$$\beta(\rho_k-\rho_j)<+\infty\ ,\ \mu_0\mu_1\left[\sigma_{k0}-\sigma_{j0}+\sigma_{k1}-\sigma_{j1}\right]<0\ \text{ при }\ k\in\{m+1,\dots,m+n\}\setminus\{j\}.$$

Выводы к главе III

В третьей главе исследован вопрос о существовании и асимптотическом поведении $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$решений уравнения (2.1) при $t\uparrow\omega$ в особом случае $\lambda_0=1$. В отличие от всех остальных случаев здесь каждое $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$решение уравнения (2.1), а также его производная являются быстро меняющимися при $t\uparrow\omega$ функциями. Основным результатом данной главы является теорема 3.1. При соблюдении условий $(RN)_1$ установлены необходимые, а также достаточные условия существования $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$ решений уравнения (2.1), а также асимптотическое поведение этих решений и их производных первого порядка при $t\uparrow\omega$. Также в данной теореме указано количество таких решений. В доказательстве теоремы 3.1 используется вспомогательная лемма 2.3. Асимптотические представления $P_\omega(Y_0,Y_1,1)-$решения и его производной даны при $t\uparrow\omega$ в неявном виде, а также приведены "грубые" явные их представления. В теореме 3.2 указаны дополнительные условия на функции φ_0, φ_1, позволяющие получить асимптотику полученных в теореме 3.1 решений в явном виде. В §3.2 исследуется вопрос о существовании сингулярных $P_{t_*}(Y_0,Y_1,1)-$решений уравнения (2.1) при соблюдении условий $(RN)_1^*$, $t_*\uparrow\omega$ и $a<t_*<\omega$. В §3.3 результаты главы проиллюстрированы на классе дифференциальных уравнений вида (2.61). Кроме того, установлены ограничения на правую часть уравнения (2.61), при которых условие $(RN)_1$ заведомо выполнено.

ГЛАВА IV.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$ РЕШЕНИЙ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ: $\lambda_0=\pm\infty$

В данной главе для дифференциального уравнения (2.1) исследован вопрос существования и поведения $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$решений. В этом случае при $t\uparrow\omega$ само решение является правильно меняющейся функцией, отличного от нуля порядка, а его производная – медленно меняющейся функцией.

§ 4.1. Основной результат

Определение 4.1. *Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию $(RN)_\infty$, если существуют число $\alpha_0\in\{-1,1\}$, непрерывная функция $p:[a,\omega[\to]0,+\infty[$ и непрерывные правильно меняющиеся при $z\to Y_i$ $(i=0,1)$ функции $\varphi_i:\Delta Y_i\to]0,+\infty[$ порядков σ_i $(i=0,1)$, такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_i:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_i}$ $(i=0,1,$ $t_0\in[a,\omega[)$, удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_i(t)=Y_i\quad (i=0,1),\qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_0'(t)}{z_0(t)}=1,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_1'(t)}{z_1(t)}=0,\qquad (4.1)$$

имеет место представление

$$f(t,z_0(t),z_1(t))=\alpha_0 p(t)\varphi_0(z_0(t))\varphi_1(z_1(t))[1+o(1)]\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega.\qquad (4.2)$$

Теорема 4.1. *Пусть функция f удовлетворяет условию $(RN)_\infty$ и в представлении* (4.2) *порядки σ_i $(i=0,1)$ функций φ_i $(i=0,1)$ такие, что $\sigma_0+\sigma_1\neq1$. Пусть, корме того, функция φ_0 удовлетворяет условию S. Тогда для существования у дифференциального уравнения* (2.1) *$P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$решений необходимо и достаточно, чтобы наряду со* *знаковыми условиями* (2.6), (2.7) *соблюдались также условия*

$$\mu_0\mu_1\pi_\omega(t)>0,\ \alpha_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)I_\infty(t)>0 \ \text{при} \ t\in]a_\infty,\omega[, \tag{4.3}$$

$$\mu_0\lim_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)|=Y_0,\quad \mu_1\lim_{t\uparrow\omega}|I_\infty(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}=Y_1, \tag{4.4}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'_\infty(t)}{I_\infty(t)}=0, \tag{4.5}$$

где

$$I_\infty(t)=\int_{A_\infty}^{t}p(\tau)\varphi_0\left(\mu_0|\pi_\omega(\tau)|\right)d\tau,$$

предел интегрирования $A_\infty=\begin{cases} a_\infty, & \text{если} \int_{a_\infty}^{\omega}p(\tau)\varphi_0\left(\mu_0|\pi_\omega(\tau)|\right)d\tau=+\infty,\\ \omega, & \text{если} \int_{a_\infty}^{\omega}p(\tau)\varphi_0\left(\mu_0|\pi_\omega(\tau)|\right)d\tau<+\infty,\end{cases}$

$a_\infty\in[a,\omega[$ *выбрано так, чтобы функция* $\varphi_0\left(\mu_0|\pi_\omega(t)|\right)$ *была определена на* $[a_\infty,\omega[$.

Более того, для каждого $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$*решения имеют место асимптотические представления*

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_0}}{\varphi_1(y'(t))}=\alpha_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)I_\infty(t)[1+o(1)],\quad \frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{1+o(1)}{\pi_\omega(t)} \ \text{при} \ t\uparrow\omega, \tag{4.6}$$

причем таких решений существует при $\omega=+\infty$ *двухпараметрическое семейство, если* $\mu_1\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)>0$ *и однопараметрическое семейство, если* $\mu_1\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)<0$, *а при* $\omega<+\infty$ *и* $\mu_1\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)>0$ – *однопараметрическое семейство таких решений.*

В силу определения и свойств правильно меняющейся функции (см. Главу I) каждая из функций φ_i $(i=0,1)$ допускает представление вида

$$\varphi_i(z)=|z|^{\sigma_i}\ L_i(z), \tag{4.7}$$

где $L_i:\Delta_{Y_i}\to]0,+\infty[-$ непрерывная медленно меняющаяся при $z\to Y_i$

функция, и существуют непрерывно дифференцируемые медленно меняющиеся при $z \to Y_i$ $(i = 0,1)$ функции $L_{ii} : \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{L_i(z)}{L_{ii}(z)} = 1, \quad \lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{z L'_{ii}(z)}{L_{ii}(z)} = 0 \;\; (i = 0,1). \tag{4.8}$$

При этом ясно, что функции

$$\varphi_{ii}(z) = |z|^{\sigma_i} L_{ii}(z) \quad (i = 0,1) \tag{4.9}$$

непрерывно дифференцируемы на промежутке Δ_{Y_i} и таковы, что

$$\lim_{\substack{z \to Y \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{\varphi_i(z)}{\varphi_{ii}(z)} = 1, \quad \lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{z \varphi'_{ii}(z)}{\varphi_{ii}(z)} = \sigma_i \quad (i = 0,1). \tag{4.10}$$

Далее выберем число $b \in \Delta_{Y_0}$ таким, чтобы соблюдалось неравенство

$$|b| < 1 \quad при \; Y_1 = 0, \quad b > 1 \; (b < -1) \quad при \; Y_1 = +\infty \quad (Y_1 = -\infty),$$

и введем функцию

$$\Phi(u) = \int_B^u \frac{|s|^{-\sigma_0} \, ds}{\varphi_1(s)}, \; где \; B = \begin{cases} b, \; если \left| \displaystyle\int_b^{Y_1} \frac{|s|^{-\sigma_0} \, ds}{\varphi_1(s)} \right| = +\infty, \\ Y_1, \; если \left| \displaystyle\int_b^{Y_1} \frac{|s|^{-\sigma_0} \, ds}{\varphi_1(s)} \right| < +\infty. \end{cases}$$

Так как $\Phi'(u) > 0$ при $u \in \Delta_{Y_1}$, то $\Phi : \Delta_{Y_1}(b) \to \Delta_{Z_1}(c)$, где

$$\Delta_{Y_1}(b) = [b, Y_1[, \;\; \Delta_{Z_1}(c) = [c, Z_1[, \; если \; \Delta_{Y_1} - \; левая \;\; окрестность \;\; Y_1,$$

$$\Delta_{Y_1}(b) =]Y_1, b], \;\; \Delta_{Z_1}(c) =]Z_1, c], \;\; если \; \Delta_{Y_1} - \; правая \;\; окрестность \;\; Y_1,$$

$$c = \int_B^b \frac{|s|^{-\sigma_0} \, ds}{\varphi_1(s)}, \quad Z_1 = \begin{cases} 0, & если \quad B = Y_1, \\ +\infty, & если \quad B = b < Y_1, \\ -\infty, & если \quad B = b > Y_1, \end{cases}$$

причем

$$\lim_{\substack{u \to Y_1 \\ u \in \Delta_{Y_1}(b)}} \Phi(u) = Z_1, \tag{4.11}$$

и существует обратная непрерывно дифференцируемая возрастающая функция $\Phi^{-1}:\Delta_{Z_1}(c)\to\Delta_{Y_1}(b),$ такая, что

$$\lim_{\substack{z\to Z_1\\ z\in\Delta_{Z_1(c)}}}\Phi^{-1}(z)=Y_1. \tag{4.12}$$

Используя (4.7), (4.10) и правило Лопиталя, находим

$$\lim_{\substack{y'\to Y_1\\ y'\in\Delta_{Y_1}}}\frac{|y'|^{1-\sigma_0}\ \mu_1}{\varphi_1(y')\Phi(y')}=\lim_{\substack{y'\to Y_1\\ y'\in\Delta_{Y_1}}}\frac{|y'|^{1-\sigma_0}\ \mu_1}{\varphi_{11}(y')\Phi(y')}=\lim_{\substack{y'\to Y_1\\ y'\in\Delta_{Y_1}}}\frac{\dfrac{(1-\sigma_0)|y'|^{-\sigma_0}}{\varphi_{11}(y')}-\dfrac{|y'|^{1-\sigma_0}\ \varphi'_{11}(y')\ \mu_1}{\varphi^2_{11}(y')}}{\dfrac{|y'|^{-\sigma_0}}{\varphi_{11}(y')}}=$$

$$=\lim_{\substack{y'\to Y_1\\ y'\in\Delta_{Y_1}}}\left(1-\sigma_0-\frac{y'\varphi'_{11}(y')}{\varphi_{11}(y')}\right)=1-\sigma_0-\sigma_1,$$

т.е.

$$\Phi(y')\sim\frac{|y'|^{1-\sigma_0}\ \mu_1}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\varphi_1(y')}\quad при\quad y'\to Y_1 \tag{4.13}$$

Поскольку $\lim\limits_{\substack{u\to Y_1\\ u\in\Delta_{Y_1}}}\dfrac{u\Phi'(u)}{\Phi(u)}=1-\sigma_0-\sigma_1$, то функция Φ является правильно меняющейся порядка $1-\sigma_0-\sigma_1$. Легко проверить, что функция $\Phi^{-1}(z)$ будет нормализированной правильно меняющейся функцией порядка $\left(1-\sigma_0-\sigma_1\right)^{-1}$ при $z\to Z_1$. Поэтому справедливо представление

$$\Phi^{-1}(z)=|z|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+o(1)}\ при\ z\to Z_1,\quad z\in\Delta_{Z_1}. \tag{4.14}$$

Доказательство теоремы 4.1. *Необходимость.* Пусть $y:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_0}$ – произвольное $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$решение уравнения (2.1). Тогда существует число $t_1\in[t_0,\omega[$ такое, что $y^{(k)}(t)\neq 0\ (k=0,1,2)$, $sign\ y^{(k)}(t)=\mu_k(k=0,1)$ при $t\in[t_1,\omega[$ и соблюдаются неравенства (2.6). Из равенства, верного для любого $t\in[t_0,\omega[$,

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)'\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-2}=\frac{y(t)y''(t)}{(y'(t))^2}-1$$

в силу определения $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$решения следует, что

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)'\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-2}=-1+o(1)\ \ при\ t\uparrow\omega,$$

откуда в результате интегрирования по аналогии с доказательством формулы (3.11) приходим ко второму из асимптотических представлений (4.6), отсюда, в свою очередь, вытекает первое из предельных равенств (4.4) и второе из знаковых условий (4.3). Теперь для $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$решения с использованием второго из соотношений (4.6) получим при $t\uparrow\omega$

$$\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}=\frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}=o(1),$$

т.е.

$$\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}=o(1)\quad при\quad t\uparrow\omega. \tag{4.15}$$

Таким образом, в силу второго из условий (4.6) и равенства (4.15) $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$ решение и его производная при $t\in[t_0,\omega[$ удовлетворяют условиям (4.1), (4.2) определения 4.1. Так как функция f удовлетворяет условию $(RN)_\infty$, из уравнения (2.1) имеем

$$y''(t)=\alpha_0 p(t)\varphi_1(y'(t))\varphi_0(y(t))(1+o(1))\ \ при\ t\uparrow\omega. \tag{4.16}$$

Следовательно, $\alpha_0 y''(t)>0$ при $t\in[t_0,\omega[$, откуда в силу определения $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$ решения и условия (2.6) вытекает знаковое условие (2.7). Далее, учитывая, что y правильно меняющаяся функция порядка σ_0, а φ_0 удовлетворяет условию S и справедливо (4.6), (4.15), имеем при $t\uparrow\omega$

$$\varphi_0(y(t))=|y(t)|^{\sigma_0}L_0(y(t))=|y'(t)|^{\sigma_0}|\pi_\omega(t)|^{\sigma_0}\times$$
$$\times * L_0\left(\mu_0|y'(t)||\pi_\omega(t)|(1+o(1))\right)(1+o(1))=$$

$$=|y'(t)|^{\sigma_0}|\pi_\omega(t)|^{\sigma_0}\, L_0\left(\mu_0|\pi_\omega(t)|\right)(1+o(1))=$$
$$=|y'(t)|^{\sigma_0}\,\varphi_0\left(\mu_0|\pi_\omega(t)|\right)(1+o(1)).$$

Условие (4.16) с использованием соотношений (4.6), (4.15), (4.17) может быть переписано в виде

$$y''(t)=\alpha_0 p(t)|y'(t)|^{\sigma_0}\,\varphi_0\left(\mu_0|\pi_\omega(t)|\right)\varphi_1(y'(t))(1+o(1)) \text{ при } t\uparrow\omega.$$

Отсюда

$$\frac{y''(t)|y'(t)|^{-\sigma_0}}{\varphi_1(y'(t))}=\alpha_0 p(t)\varphi_0\left(\mu_0|\pi_\omega(t)|\right)(1+o(1)) \text{ при } t\uparrow\omega. \tag{4.18}$$

Интегрируя (4.18) на промежутке от A_∞ до t, получим в силу постоянства знака правой части равенства (4.18) на основании теорем из [[9]] (см. [[9]], Глава V, § 3, П. 3, Предложение 6, С.293) соотношение

$$\int_{A_\infty}^{t}\frac{y''(\tau)|y'(\tau)|^{-\sigma_0}}{\varphi_1(y'(\tau))}d\tau=\alpha_0 I_\infty(t)(1+o(1)) \text{ при } t\uparrow\omega. \tag{4.19}$$

Сделав в интеграле $\int_{A_\infty}^{t}\frac{y''(\tau)|y'(\tau)|^{-\sigma_0}}{\varphi_1(y'(\tau))}d\tau$ замену $s=y'(t)$, получим интеграл $\int_{y'(A_\infty)}^{y'(t)}\frac{|s|^{-\sigma_0}}{\varphi_1(s)}ds$, который с учетом $\lim\limits_{t\uparrow\omega}y'(t)=Y_1$ представляет собой $\Phi(y'(t))$. В силу (4.13), (4.19) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{|y'(t)|^{1-\sigma_0}}{\varphi_1(y'(t))}}{\displaystyle\int_{A_\infty}^{t}\frac{y''(\tau)|y'(\tau)|^{-\sigma_0}\,d\tau}{\varphi_1(y'(\tau))}}=\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)\neq 0. \tag{4.20}$$

Поэтому из (4.19), (4.20) вытекает первое из асимптотических представлений (4.6). Из соотношений (4.18), (4.19) в силу (4.20), (4.10), находим, что

$$\frac{y''(t)}{y'(t)}=\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\frac{I'_\infty(t)}{I_\infty(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{4.21}$$

Домножив обе части (4.21) на $\pi_\omega(t)$, используя (4.15), $1-\sigma_0-\sigma_1\neq 0$, получим соотношение (4.5). Кроме того, из (4.21) следует

$ln|y'(t)| \sim \dfrac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1} ln|I_\infty(t)|$ при $t \uparrow \omega$. В силу выбора A_∞, $1-\sigma_0-\sigma_1 \neq 0$ имеем второе из предельных равенств (4.4).

Достаточность. Пусть соблюдаются условия (4.3) – (4.5) и (2.6), (2.7). Покажем, что в этом случае дифференциальное уравнение (2.1) имеет хотя бы одно $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)-$решение, допускающее представления (2.6), и выясним количество таких решений.

Применяя к дифференциальному уравнению (2.1) преобразование

$$\Phi(y'(t)) = \alpha_0 I_\infty(t)(1+v_1(\tau)), \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+v_2(\tau)}{\pi_\omega(t)}, \tag{4.22}$$

где

$$\tau = \beta \ln|\pi_\omega(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1, & если\ \omega = +\infty, \\ -1, & если\ \omega < +\infty, \end{cases}$$

получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v_1' = \beta h(\tau)\left[-1 - v_1 + H_0(\tau, v_1, v_2) G(\tau, v_1, v_2)(1+v_2)^{-\sigma_0}\right], \\ v_2' = \beta\left[-v_2 - v_2^2 + +h(\tau) H_0(\tau, v_1, v_2) H_1(\tau, v_1) G(\tau, v_1, v_2)(1+v_2)^{1-\sigma_0}\right] \end{cases} \tag{4.23}$$

в которой

$$h(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t) I'_\infty(t)}{I_\infty(t)}, \quad H_0(\tau(t), v_1, v_2) = \frac{L_0\left(\dfrac{\pi_\omega(t) Y^{[1]}(t, v_1)}{1+v_2}\right)}{L_0\left(\mu_0 |\pi_\omega(t)|\right)},$$

$$H_1(\tau(t), v_1) = \frac{\alpha_0 I_\infty(t) \varphi_1\left(Y^{[1]}(t, v_1)\right)}{\mu_1 \left|Y^{[1]}(t, v_1)\right|^{1-\sigma_0}}, \quad Y^{[1]}(t, v_1) = \Phi^{-1}\left(\alpha_0 I_\infty(t)(1+v_1)\right),$$

$$G(\tau(t), v_1, v_2) = \frac{f\left(t, \dfrac{\pi_\omega(t) Y^{[1]}(t, v_1)}{1+v_2}, Y^{[1]}(t, v_1)\right)}{\alpha_0\, p(t)\, \varphi_0\left(\dfrac{\pi_\omega(t) Y^{[1]}(t, v_1)}{1+v_2}\right) \varphi_1\left(Y^{[1]}(t, v_1)\right)}.$$

Здесь функция $\tau(t) = \beta \ln|\pi_\omega(t)|$ обладает свойствами

$$\tau : [t_0, \omega[\to]0, +\infty[, \ \tau'(t) > 0 \ \ при \ t \in [t_0, \omega[, \ \lim_{t \uparrow \omega} \tau(t) = +\infty.$$

Поэтому в силу условия (4.5)

$$\lim_{\tau\to+\infty} h(\tau) = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I'_\infty(t)}{I_\infty(t)} = 0. \tag{4.24}$$

В силу условий (4.4), второму из условий (4.3), (4.11), замены (4.22)

$$Z_1 = \lim_{t\uparrow\omega} \alpha_0 I_\infty(t)$$

и существует $t_0 \in [a,\omega[$ такое, что

$$\alpha_0 I_\infty(t)(1+v_1) \in \Delta_{Z_1}(c) \quad \textit{при} \quad t\in[t_0,\omega[\;\; \textit{и} \;\; |v_1| \le 1/2,$$

где Z_1 и $\Delta_{Z_1}(c)$ определены в §4.1. Поэтому $Y^{[1]}(t,v_1) \in \Delta_{Y_1}(b)$, $\operatorname{sign} Y^{[1]}(t,v_1) = \mu_1$ при $t\in[t_0,\omega[$ и $|v_1| \le 1/2$, а также ввиду (4.12), (4.14)

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y^{[1]}(t,v_1) = Y_1 \qquad \textit{равномерно по} \quad {}_1 \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y^{[1]}(t,v_1) = Y_1 \qquad \textit{равномерно по } v_1 \in \left[-1/2, 1/2\right]. \tag{4.25}$$

Учитывая условия (4.4), (4.3) можно t_0 выбрать так, чтобы при $t\in[t_0,\omega[$ функция $\mu_0 |\pi_\omega(t)| \in \Delta_{Y_0(b)}$ и $\pi_\omega(t) Y^{[1]}(t,v_1)\left(1+v_2\right)^{-1} \in \Delta_{Y_0(b)}$ при $(v_1,v_2)\in V_0$, $V_0 = \left[-1/2,1/2\right]\times\left[-1/2,1/2\right]$.

Из (4.25), (4.3), (4.22) имеем, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) Y^{[1]}(t,v_1)}{1+v_2} = Y_0 \;\; \textit{равномерно} \;\; \textit{по} \;\; (v_1,v_2)\in V_0. \tag{4.26}$$

Так как в силу (4.25), (4.13), (4.22) равномерно по $v_1 \in \left[-1/2, 1/2\right]$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\mu_1 |Y^{[1]}(t,v_1)|^{1-\sigma_0}}{I_\infty(t)\varphi_1\left(Y^{[1]}(t,v_1)\right)} = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)(1+v_1) \tag{4.27}$$

то имеет место равенство

$$H_1(t,v_1) = \frac{\dfrac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1} + r_1(t,v_1)}{1+v_1}, \tag{4.28}$$

в котором функция r_1 удовлетворяет условию

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_1(t,v_1) = 0 \;\; \textit{равномерно} \;\; \textit{по} \;\; v_1 \in \left[-1/2,1/2\right].$$

Получим теперь представление для функции G. Так как

$$\left[Y^{[1]}(t,v_1)\right]_t' = \frac{\alpha_0(1+v_1)I_\infty(t)\varphi_1\left(Y^{[1]}(t,v_1)\right)}{|\,Y^{[1]}(t,v_1)\,|^{-\sigma_0}},$$

то

$$\frac{\pi_\omega(t)\left[Y^{[1]}(t,v_1)\right]_t'}{Y^{[1]}(t,v_1)} = (1+v_1)h(t)H_1(t,v_1).$$

Поэтому, учитывая соотношения (4.24), (4.27), имеем, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left[Y^{[1]}(t,v_1)\right]_t'}{Y^{[1]}(t,v_1)} = 0 \quad \textit{равномерно по } v_1 \in \left[-1/2, 1/2\right]$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left[\dfrac{\pi_\omega(t)Y^{[1]}(t,v_1)}{1+v_2}\right]_t'}{\dfrac{\pi_\omega(t)Y^{[1]}(t,v_1)}{1+v_2}} = 1 + \lim_{t\uparrow\omega}h(t)H_1(t,v_1) = 1 \;\; \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0.$$

Тогда в силу условия $(RN)_\infty$, которому удовлетворяет функция f, и условий (4.10), (4.25), (4.26)

$$\lim_{t\uparrow\omega}G(\tau(t),v_1,v_2) = 1 \;\; \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0,$$

т.е. имеет место представление

$$G(\tau,v_1,v_2) = 1 + r_2(\tau,v_1,v_2), \tag{4.29}$$

где

$$\lim_{\tau\to+\infty}r_2(\tau,v_1,v_2) = 0 \;\; \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0.$$

Далее ввиду теоремы 1.6 (см. Глава I), а также соотношений (4.25), (4.26), (4.4), условия S на функцию φ_0 получим

$$\lim_{t\uparrow\omega} L_0\left(\frac{\pi_\omega(t)Y^{[1]}(t,v_1)}{1+v_2}\right) = \lim_{t\uparrow\omega} L_0\left(\pi_\omega(t)Y^{[1]}(t,v_1)\right) =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}L_0\left(\pi_\omega(t)Y^{[1]}(t,0)\right) = \lim_{t\uparrow\omega}L_0\left(\mu_0\,|\,\pi_\omega(t)|\right) \;\; \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0.$$

Отсюда

$$\lim_{t\uparrow\omega} H_0(\tau(t),v_1,v_2)=1 \quad \text{равномерно} \quad \text{по}\ (v_1,v_2)\in V_0,$$

откуда справедливо представление

$$H_0(\tau,v_1,v_2)=1+r_0(\tau,v_1,v_2), \tag{4.30}$$

где

$$\lim_{\tau\to+\infty} r_0(\tau,v_1,v_2)=0 \ \text{равномерно} \ \text{по}\ (v_1,v_2)\in V_0.$$

Используя теперь представления (4.28) – (4.30), а также условия (4.24), перепишем систему дифференциальных уравнений (4.23) в виде

$$\begin{cases} v_{i'} = f_i(\tau)+\sum\limits_{j=1}^{2} p_{ij}(\tau)v_j + g_i(\tau)\big(\varepsilon_i(\tau,v_1,v_2)+V_i(v_1,v_2)\big), \\ i=1,2 \end{cases} \tag{4.31}$$

где

$$p_{11}(\tau)=-\beta h(\tau), \quad p_{12}(\tau)=-\beta\sigma_0 h(\tau), \ p_{21}(\tau)=-\frac{\beta h(\tau)}{1-\sigma_0-\sigma_1},$$

$$p_{22}(\tau)=\beta\left(-1+\frac{(1-\sigma_0)h(\tau)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right),$$

$$f_1(\tau)=0, \ f_2(\tau)=\frac{\beta h(\tau)}{1-\sigma_0-\sigma_1}, \ g_1(\tau)=\beta h(\tau), \ g_2(\tau)=\beta,$$

$$\varepsilon_1(\tau,v_1,v_2)=\big(1-\sigma_0 v_2+r_3(v_2)\big)\big(r_0(\tau,v_1,v_2)+r_2(\tau,v_1,v_2)+r_0(\tau,v_1,v_2)r_2(\tau,v_1,v_2)\big),$$

$$\varepsilon_2(\tau,v_1,v_2)=h(\tau)\left(\frac{r_4(v_1,v_2)}{1-\sigma_0-\sigma_1}+(1+(1-\sigma_0)v_2-v_1+r_4(v_1,v_2))\times\right.$$
$$\times\Big(r_1(\tau,v_1,v_2)(1+r_0(\tau,v_1,v_2))(1+r_2(\tau,v_1,v_2))+$$
$$\left.\left.+\frac{r_2(\tau,v_1,v_2)+r_0(\tau,v_1,v_2)+r_0(\tau,v_1,v_2)r_2(\tau,v_1,v_2)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right)\right),$$

$$V_1(v_1,v_2)=r_3(v_2), \quad V_2(v_1,v_2)=-v_2^2, \quad r_3(v_2)=(1+v_2)^{-\sigma_0}-1+\sigma_0 v_2,$$
$$r_4(v_1,v_2)=(1+v_2)^{1-\sigma_0}\left(1+v_1\right)^{-1}-1+v_1-(1-\sigma_0)v_2.$$

Здесь в силу (4.28) – (4.30)

$$\lim_{\tau\to+\infty} \varepsilon_i(\tau,v_1,v_2)=0 \ \ (i=1,2) \ \text{равномерно} \ \text{по}\ (v_1,v_2)\in V_0.$$

Кроме того,

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0}\frac{\partial V_i(v_1,v_2)}{\partial v_j}=0 \ \ (i,j=1,2),$$

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{f_i(\tau)}{p_{ii}(\tau)}=0 \ \ (i=1,2),\ \lim_{\tau\to+\infty}\frac{g_i(\tau)}{p_{ii}(\tau)}=-1 \ \ (i=1,2),$$

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{p_{12}(\tau)}{p_{11}(\tau)}=\sigma_0,\ \lim_{\tau\to+\infty}\frac{p_{21}(\tau)}{p_{22}(\tau)}=0,\quad \int_a^{+\infty}|\,p_{ii}(t)\,|\,dt=+\infty \ \ (i=1,2).$$

Тем самым, показано, что для системы (4.31) выполнены все условия леммы 2.2. Согласно этой лемме у системы дифференциальных уравнений (4.31) существует хотя бы одно решение $(v_1,v_2):[\tau_1,+\infty[\to\mathbb{R}^2_{1/2}(\tau_1\ge\tau_0)$, стремящееся к нулю при $\tau\to+\infty$. Каждому такому решению в силу замен (4.22) соответствует $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$решение y дифференциального уравнения (2.1), допускающее асимптотические представления (4.6). Выясним теперь количество таких решений. Определяя количество отрицательных функций среди $-\beta$ и $-\beta h(t)$ находим число параметрических семейств решений системы дифференциальных уравнений (4.31).

Теорема полностью доказана.

Используя замечание 2.2 можно указать условия, при которых асимптотические представления (4.6) могут быть записаны в явном виде.

Теорема 4.2. *Пусть $\lambda_0=\pm\infty$, функция f удовлетворяет условию $(RN)_\infty$ и функции φ_i $(i=0,1)$ удовлетворяют условию S. Тогда каждое $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$решение (в случае их существования) дифференциального уравнения (2.1) допускает при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления*

$$y(t)=(1+o(1))\times$$

$$\times\mu_0\,|\,\pi_\omega(t)\,|\left(|1-\sigma_0-\sigma_1\,\|\,I_\infty(t)\,|\,L_1\left(\mu_1\,|\,I_\infty(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}, \qquad (4.32)$$

$$y'(t)=\mu_1\left(|1-\sigma_0-\sigma_1\,\|\,I_\infty(t)\,|\,L_1\left(\mu_1\,|\,I_\infty(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}(1+o(1)).$$

Доказательство. При установлении теоремы 4.1 было показано, что для наличия у дифференциального уравнения (2.1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)-$решений необходимо выполнение условий (4.3) – (4.5). Каждое такое решение допускает асимптотические представления (4.6). Было показано, что для таких решений имеют место предельные соотношения (4.21).

Поскольку функция φ_1 удовлетворяет условию S, то в силу соотношений (4.21) и замечания 2.1 функция L_1 из формул (4.7) допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотическое представление

$$L_1(y'(t)) = L_1\left(\mu_1 \,|\, I_\infty(t) \,|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)[1+o(1)] \ .$$

Используя последнее представление, знаковые условия (4.4), перепишем (4.6) в виде (4.32).

Теорема доказана.

§ 4.2. Асимптотическое поведение сингулярных $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$решений уравнения (2.1) в случае $\lambda_0 = \pm\infty$

Определение 4.2. *Пусть* $t_* \in]a, \omega[$, $\lambda_0 = \pm\infty$. *Будем говорить, что функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)_\infty^*$, *если существуют числа* $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $A_* > 0$ *и непрерывные правильно меняющиеся при* $z \to Y_i$ $(i = 0,1)$ *функции* $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i = 0,1)$ *порядков* σ_i $(i = 0,1)$, *такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций* $z_i : [t_0, t_*[\to \Delta_{Y_i}$ $(i = 0,1,\ t_0 \in [a, t_*[)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t \uparrow t_*} z_i(t) = Y_i \ \ (i = 0,1), \quad \lim_{t \uparrow t_*} \frac{(t-t_*) z(t)_0'}{z_0(t)} = 1, \quad \lim_{t \uparrow t_*} \frac{(t-t_*) z_1'(t)}{z_1(t)} = 0,$$

имеет место представление

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \alpha_0 A_* \varphi_0(z_0(t)) \varphi_1(z_1(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow t_*.$$

Очевидно, что функция f удовлетворяет условию $(RN)_\infty^*$, если f удовлетворяет условию $(RN)_\infty$, в котором ω заменено на t_*, $\pi_\omega(t) = t - t_*$ и в представлении (4.2) $\lim\limits_{t \uparrow t_*} p(t) = p(t_*) = A_* > 0$. Поэтому при выяснении вопроса о наличии и асимптотики сингулярных $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \pm\infty) -$решений уравнения (2.1) может быть использована теорема 4.1. Так как $\pi_\omega(t) = t - t_*$, то при $t \in [a, t_*[$ функция $\pi_\omega(t) < 0$. При $t \uparrow t_*$ интеграл $I_\infty(t) \sim A_* \overline{I_\infty}(t)$, где $\overline{I_\infty}(t) = \int\limits_{A_\infty}^{t} (t_* - \tau)^{\sigma_0} L_0(\mu_0(t_* - \tau))d\tau$, $L_0 -$медленно меняющаяся при $t \uparrow t_*$ функция. Поэтому $\overline{I_\infty} -$правильно меняющаяся функция порядка $\sigma_0 + 1$ и предельное равенство (4.5) выполнено (см. Глава I, лемма 1.5) тогда и только тогда, когда $\sigma_0 = -1$.

Следствие 4.1. *Пусть функция f удовлетворяет условию $(RN)_\infty^*$, функция φ_0 удовлетворяет условию S. Тогда для существования у дифференциального уравнения* (2.1) *$P_{t_*}(Y_0, Y_1, \pm\infty) -$решения необходимо и достаточно, чтобы наряду со знаковыми условиями* (2.6), (2.7) *соблюдались следующие условия:*

$$\mu_0\mu_1 < 0,\ \alpha_0\mu_1(2 - \sigma_1)\overline{I_\infty}(t) > 0 \quad \text{\textit{при}} \quad t \in]a_\infty, t_*[,$$

$$\sigma_0 = -1,\ \sigma_1 \neq 2, \quad Y_0 = 0, \quad Y_1 = \mu_1 \lim_{t \uparrow t_*} |\overline{I_\infty}(t)|^{\frac{1}{2-\sigma_1}}.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\frac{(y'(t))^2}{\varphi_1(y'(t))} = \alpha_0\mu_1(2 - \sigma_1)A_*\overline{I_\infty}(t)[1 + o(1)], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1 + o(1)}{(t - t_*)} \quad \text{\textit{при}} \quad t \uparrow t_*,$$

причем таких решений существует однопараметрическое семейство при $\alpha_0\mu_1(2 - \sigma_1) > 0$.

Следствие 4.2. *Пусть $\lambda_0 = \pm\infty$, функция f удовлетворяет условию*

$(RN)_\infty^*$ и функции φ_i $(i = 0,1)$ удовлетворяют условию S. Тогда каждое $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \pm\infty)-$ решение (в случае их существования) дифференциального уравнения (2.1) допускает асимптотические представления

$$y(t) = \mu_0(t_* - t)\left(|\,2-\sigma_1\,|\,A_*\,|\,\overline{I_\infty}(t) L_1\left(\mu_1 A_*\,|\,\overline{I_\infty}(t)\,|^{\frac{1}{2-\sigma_1}} \right)\right)^{\frac{1}{2-\sigma_1}} (1+o(1)),$$

$$y'(t) = \mu_1\left(|\,2-\sigma_1\,|\,A_*\,|\,\overline{I_\infty}(t)\,|\,L_1\left(\mu_1 (A_*\,|\,\overline{I_\infty}(t)\,|)^{\frac{1}{2-\sigma_1}} \right)\right)^{\frac{1}{2-\sigma_1}} (1+o(1)) \qquad \text{\textit{при} } t \uparrow t_*.$$

§ **4.3. Об асимптотике $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)-$решений дифференциального уравнения 2.61**

Иллюстрацией результатов § 3.1 может служить дифференциальное уравнение (2.61). Предположим, что для некоторых $i \in \{1,\ldots,m\}$ и $j \in \{m+1,\ldots,m+n\}$ соблюдаются неравенства

$$\begin{gathered} \limsup_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\ln p_k(t) - \ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}\right] < \beta\left[\sigma_{k0} - \sigma_{i0}\right] \\ \text{\textit{при} } k \in \{1,\ldots,m\}\setminus\{i\}, \\ \limsup_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\ln p_k(t) - \ln p_j(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}\right] < \beta\left[\sigma_{k0} - \sigma_{j0}\right] \\ \text{\textit{при} } k \in \{m+1,\ldots,m+n\}\setminus\{j\}, \end{gathered} \tag{4.33}$$

где $\beta = sign\,\pi_\omega(t)$. Легко показать, что и в этом случае для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_s : [a,\omega[\to \Delta_{Y_s}$ $(s = 0,1)$, удовлетворяющих условиям (4.1), будут выполняться предельные соотношения (2.63), (2.64), т.е. $i-$ое и $j-$ое слагаемые соответственно числителя и знаменателя правой части уравнения являются главными. В силу свойства медленно меняющихся функций, указанного в главе I, при вычислении этих пределов, не ограничивая общности, можем считать, что функции φ_{kl} правильно меняющиеся порядка σ_{kl}. Таким образом, справедливы при $z_s \to Y_s$ $\left(z_s \in \Delta_{Y_s}\right)$ представления

$$\varphi_{kl}(z_s) = \left|z_s\right|^{\sigma_{kl}} L_{kl}(z_s) \ \ (k = \overline{1, n+m};\ l, s = 0{,}1), \tag{4.34}$$

где L_{kl} – медленно меняющиеся при $z_s \to Y_s$ функции.

Полагая при $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$R_k(t) = \frac{p_k(t)\varphi_{k0}(z_0(t))\varphi_{k1}(z_1(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(z_0(t))\varphi_{i1}(z_1(t))} \quad k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\},$$

покажем, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega} R_k(t) = 0$.

Учитывая (4.1), (4.2) при $t \uparrow \omega$ имеем

$$|z_0(t)| = |\pi_\omega(t)|^{1+o(1)}, \quad |z_1(t)| = |\pi_\omega(t)|^{o(1)},$$

поэтому с учетом (4.34) и свойств медленно меняющихся функций (см. Глава I, лемма 1.5) справедливо равенство

$$\ln\varphi_{kl}(z_s(t)) = \ln|z_s(t)|\left(\sigma_{kl} + \frac{\ln L_{kl}(t)}{\ln|z_s(t)|}\right) = \ln|z_s(t)|\big(\sigma_{kl} + o(1)\big) =$$

$$= \begin{cases} \ln|\pi_\omega(t)|\big(\sigma_{k0} + o(1)\big), \textit{если } s = 0, \\ \ln|\pi_\omega(t)|\big(o(1)\big), \textit{если } s = 1 \end{cases} \textit{при } t \uparrow \omega.$$

Следовательно,

$$\ln R_k(t) = \ln\frac{p_k(t)}{p_i(t)} + \ln|\pi_\omega(t)|\big((\sigma_{k0} - \sigma_{i0}) + o(1)\big) =$$

$$= \beta\ln|\pi_\omega(t)|\left[\frac{\ln p_k(t) - \ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||} + \beta\big(\sigma_{k0} - \sigma_{i0} + o(1)\big)\right].$$

Теперь, учитывая, что $sign\ \pi_\omega(t) = \beta$ и выполняются первые из неравенств (4.33), приходим к выводу, что выражение в квадратных скобках отрицательно, т.е. $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \ln R_k(t) = -\infty$, откуда вытекает $\lim\limits_{t\uparrow\omega} R_k(t) = 0$. Это означает, что соблюдается предельное соотношение (2.63).

Аналогичным образом устанавливается справедливость предельного соотношения (2.64).

Поэтому в силу соотношений (2.63) и (2.64) функция

$$f(t,y,y')=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(y)\varphi_{k1}(y')}{\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(y)\varphi_{k1}(y')}$$

удовлетворяет условию $(RN)_\infty$, поскольку для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_s:[a,\omega[\to\Delta_{Y_s}$ $(s=0,1)$, удовлетворяющих условиям (4.1), имеем

$$f(t,z_0(t),z_1(t))=\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}(z_0(t))\varphi_{i1}(z_1(t))}{\alpha_j p_j(t)\varphi_{j0}(z_0(t))\varphi_{j1}(z_1(t))}\times\frac{1+\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\dfrac{\alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(z_0(t))\varphi_{k1}(z_1(t))}{\alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}(z_0(t))\varphi_{i1}(z_1(t))}}{1+\sum\limits_{\substack{k=m+1\\k\neq j}}^{m}\dfrac{\alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(z_0(t))\varphi_{k1}(z_1(t))}{\alpha_j p_j(t)\varphi_{j0}(z_0(t))\varphi_{j1}(z_1(t))}}=$$

$$=\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}(z_0(t))\varphi_{i1}(z_1(t))}{\alpha_j p_j(t)\varphi_{j0}(z_0(t))\varphi_{j1}(z_1(t))}[1+o(1)]\quad при\quad t\uparrow\omega,$$

т.е. имеет место при $t\uparrow\omega$ представление (4.2), где

$$\alpha_0=\alpha_i\alpha_j,\ p(t)=\frac{p_i(t)}{p_j(t)},\ \varphi_0(z)=\frac{\varphi_{i0}(z)}{\varphi_{j0}(z)},\ \varphi_1(z)=\frac{\varphi_{i1}(z)}{\varphi_{j1}(z)}. \tag{4.35}$$

Здесь φ_k $(k=0,1)$ – правильно меняющиеся при $z\to Y_k$ функции порядков $\sigma_k=\sigma_{ik}-\sigma_{jk}$ $(k=0,1)$. Поэтому к уравнению (2.61) применимы теоремы 4.1 и 4.2. Введем вместо I_∞ функцию $I_{\infty ij}$, полагая

$$I_{\infty ij}(t)=\int\limits_{A_{\infty ij}}^{t}\frac{p_i(\tau)}{p_j(\tau)}\frac{\varphi_{0i}\left(\mu_0\,|\,\pi_\omega(\tau)|\right)}{\varphi_{0j}\left(\mu_0\,|\,\pi_\omega(\tau)|\right)}d\tau,$$

где предел интегрирования $A_{\infty ij}\in\{a_\infty;\omega\}$ и выбран так, чтобы интеграл $I_{\infty ij}$, стремился либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $t\uparrow\omega$ и функция $\dfrac{\varphi_{0i}\left(\mu_0\,|\,\pi_\omega(t)|\right)}{\varphi_{0j}\left(\mu_0\,|\,\pi_\omega(t)\right)}$ была определена на $[a_\infty,\omega[$.

Следствие 4.3. *Пусть для некоторых* $i\in\{1,\dots,m\}$ *и* $j\in\{m+1,\dots,m+n\}$ *соблюдаются неравенство* $\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\sigma_{i1}-\sigma_{j1}\neq1$ *и* *условия* (4.33)*, функция* $\dfrac{\varphi_{i0}}{\varphi_{j0}}$ *удовлетворяет условию* S. *Тогда для существования у дифференциального уравнения* (2.61) $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$ *−решения необходимо и достаточно, чтобы соблюдались знаковые условия* (2.6)*,* (2.7) *и при* $t\in]a_\infty,\omega[$

$$\mu_0\mu_1\pi_\omega(t)>0,\quad \alpha_i\alpha_j\mu_1(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})I_{\infty ij}(t)>0,$$

а также

$$\mu_0\lim_{t\uparrow\omega}|I_{\infty ij}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}|\pi_\omega(t)|=Y_0,\qquad \mu_1\lim_{t\uparrow\omega}|I_{\infty ij}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}=Y_1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'_{\infty ij}(t)}{I_{\infty ij}(t)}=0.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}+\sigma_{jo}}\varphi_{j1}(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))}=\alpha_{i0}\alpha_{j0}\mu_1(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})I_{\infty ij}(t)[1+o(1)],$$
$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{1+o(1)}{\pi_\omega(t)}\ \text{ при } t\uparrow\omega,$$

причем таких решений существует при $\omega=+\infty$ *двухпараметрическое семейство, если* $\mu_1\alpha_i\alpha_j(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})>0$ *и однопараметрическое семейство, если* $\mu_1\alpha_i\alpha_j(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})<0$*, а при* $\omega<+\infty$ *и* $\mu_1\alpha_i\alpha_j(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})>0-$ *однопараметрическое семейство решений.*

Следствие 4.4. *Пусть для некоторых* $i\in\{1,\dots,m\}$ *и* $j\in\{m+1,\dots,m+n\}$ *соблюдаются неравенство* $\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\sigma_{i1}-\sigma_{j1}\neq 1$ *и условия* (4.33)*. Пусть, кроме того, функции* $\dfrac{\varphi_{i0}}{\varphi_{j0}}$ *и* $\dfrac{\varphi_{i1}}{\varphi_{j1}}$ *удовлетворяют условию* S. *Тогда каждое* $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$ *решение дифференциального уравнения* (2.61) *(в случае существования) допускает при* $t\uparrow\omega$

асимптотические представления

$$y(t)=\mu_0\,|\pi_\omega(t)|\,L_{\infty ij}(t)(1+o(1)), \qquad y'(t)=\mu_1 L_{\infty ij}(t)(1+o(1)),$$

$$L_{\infty ij}(t)=\left(|1-\sigma_{\infty ij}\,||\,I_{\infty ij}(t)\,|\,L_{1ij}\left(\mu_1\,|\,I_{\infty ij}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{\infty ij}}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{\infty ij}}},$$

$$\sigma_{\infty ij}=\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\sigma_{i1}-\sigma_{j1},\ L_{1ij}(z)=\frac{\varphi_{1i}(z)}{\varphi_{1j}(z)}\,|\,z\,|^{\sigma_{1j}-\sigma_{1i}}.$$

Замечание 4.1. *Если в дифференциальном уравнении* (2.61) *функции* $p_k:[a,\omega[\to]0,+\infty[\ (k=\overline{1,m+n})$ *также являются непрерывными и правильно меняющимися порядков* ρ_k $(k=\overline{1,m+n})$ *при* $t\uparrow\omega$, *то неравенства* (4.33) *примут вид*

$$\beta(\rho_k-\rho_i)<\beta\left[\sigma_{i0}-\sigma_{k0}\right] \text{ при } k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{i\},$$

$$\beta(\rho_k-\rho_j)<\beta\left[\sigma_{j0}-\sigma_{k0}\right] \text{ при } k\in\{m+1,\ldots,m+n\}\setminus\{j\}.$$

Используя следствие 4.1 и замечание 4.1 можно указать условия существования и асимптотические представления $P_{t_*}(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$решений уравнения 2.61, в котором $\lim\limits_{t\uparrow t_*}p_k(t)=A_{*k}>0\ (k=1,...,m+n)$.

Следствие 4.5. *Пусть для некоторых* $i\in\{1,...,m\}$, $j\in\{m+1,...,m+n\}$ *соблюдаются неравенства*

$$\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\sigma_{i1}-\sigma_{j1}\neq 1,$$

$$\beta\left[\sigma_{i0}-\sigma_{k0}\right]>0 \text{ при } k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{i\},$$

$$\beta\left[\sigma_{j0}-\sigma_{k0}\right]>0 \text{ при } k\in\{m+1,\ldots,m+n\}\setminus\{j\},$$

функция $\dfrac{\varphi_{i0}}{\varphi_{j0}}$ *удовлетворяет условию* S. *Тогда для существования у дифференциального уравнения* (2.61) $P_{t_*}(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$*решений необходимо и достаточно, чтобы наряду со знаковыми условиями* (2.6), (2.7) *соблюдались следующие условия:*

$$\mu_0\mu_1 < 0, \quad \alpha_i\alpha_j\mu_1(2-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}-)\overline{I_{\infty ij}}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a_\infty, t_*[,$$

$$\sigma_{i0}-\sigma_{j0} = -1, \; \sigma_{i1}-\sigma_{j1}- \neq 2, \;\; Y_0 = 0, \; Y_1 = \mu_1 \lim_{t\uparrow t_*} |\overline{I_{\infty ij}}(t)|^{\frac{1}{2-\sigma_{i1}-\sigma_{j1}}},$$

где

$$\overline{I_{\infty ij}}(t) = \int_{A_\infty}^{t} (t_*-\tau)^{\sigma_{i0}-\sigma_{j0}} \frac{L_{0i}(\mu_0(t_*-\tau))}{L_{0j}(\mu_0(t_*-\tau))} d\tau.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\frac{(y'(t))^2\varphi_{j1}(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))} = \alpha_i\alpha_j\mu_1(2-\sigma_{i1}-\sigma_{j1})\frac{A_{*i}}{A_{*j}}\overline{I_{\infty ij}}(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+o(1)}{(t-t_*)} \;\; \text{при} \; t\uparrow t_*,$$

причем таких решений существует однопараметрическое семейство при $\alpha_i\alpha_j\mu_1(2-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}) > 0$.

Выводы к главе IV

В данной главе исследован вопрос о существовании и асимптотическом поведении $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$решений уравнения (2.1) при $t\uparrow\omega$ в особом случае $\lambda_0 = \pm\infty$, когда при выполнении условия $(RN)_\infty$ каждое $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)-$решение уравнения (2.1) является правильно меняющейся ненулевого порядка при $t\uparrow\omega$ функцией, а его производная – медленно меняющейся функцией. Сформулирован в предположении соблюдения условия $(RN)_\infty$ на функцию f и условия S на функцию φ_0 основной результат данной главы – теорема 4.1 о необходимых и достаточных условиях существования и асимптотическом поведении $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)-$решений уравнения (2.1) и его производной первого порядка при $t\uparrow\omega$. В доказательстве теоремы 4.1 используется вспомогательная лемма 2.2, также на ее основании сделан вывод о количестве таких решений. Отметим, что асимптотические представления $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)-$решений и их производных первого порядка даны при $t \uparrow \omega$ в неявном виде. В теореме 4.2 указаны дополнительные ограничения на функцию φ_1, позволяющие получить асимптотику приведенных в теореме 4.1 решений в явном виде. § 4.2 посвящен асимптотическому поведению сингулярных $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ – решений уравнения (2.1) при $t \uparrow t_*$ и $a < t_* < \omega$. В § 4.3 результаты главы проиллюстрированы на классе дифференциальных уравнений вида (2.61). При этом установлены ограничения на правую часть уравнения (2.61), при которых условие $(RN)_\infty$ заведомо выполнено.

ГЛАВА V.
УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – РЕШЕНИЙ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ: $\lambda_0=0$

В этой главе исследован вопрос существования и поведения $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$ – решений дифференциального уравнения (2.1), т.е. в случае, когда само решение является медленно меняющейся, а его производная правильно меняющейся функцией ненулевого порядка при $t\uparrow\omega$.

§ 5.1. Основной результат

Определение 5.1. *Будем говорить, что функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)_0$*, если существуют число* $\alpha_0\in\{-1,1\}$*, непрерывная функция* $p:[a,\omega[\to]0,+\infty[$ *и непрерывные правильно меняющиеся при* $z\to Y_i$ $(i=0,1)$ *функции* $\varphi_i:\Delta Y_i\to]0,+\infty[$ *порядков* σ_i $(i=0,1)$*, такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций* $z_i:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_i}$ $(i=0,1,\ t_0\in[a,\omega[)$*, удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_i(t)=Y_i\quad (i=0,1),\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_0'(t)}{z_0(t)}=0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_1'(t)}{z_1(t)}=-1,\tag{5.1}$$

имеет место представление

$$f(t,z_0(t),z_1(t))=\alpha_0 p(t)\varphi_0(z_0(t))\varphi_1(z_1(t))[1+o(1)]\quad при\quad t\uparrow\omega.\tag{5.2}$$

В случае выполнения условия $(RN)_0$ положим

$$I_0(t)=\int_{A_0}^{t}p(\tau)\,d\tau\,,\quad A_0=\begin{cases}a_0,\ если\ \int_a^\omega p(\tau)\,d\tau=+\infty,\\ \omega,\ если\ \int_a^\omega p(\tau)\,d\tau<+\infty,\end{cases}$$

$$I_{00}(t)=\int_{A_{00}}^{t}\left(|I_0(\tau)|\,L_1\!\left(\mu_1|I_0(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}d\tau,$$

$$A_{00}=\begin{cases} a_0, \ \textit{если} \ \int\limits_{a_0}^{\omega}\left(|I_0(\tau)|L_1\left(\mu_1|I_0(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}d\tau=+\infty, \\ \omega, \ \textit{если} \ \int\limits_{a_0}^{\omega}\left(|I_0(\tau)|L_1\left(\mu_1|I_0(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}d\tau<+\infty, \end{cases}$$

$L_1(z)=\varphi_1(z)|z|^{-\sigma_1}$, $a_0\in[a,\omega[$ и выбрано (в случае существования) так, чтобы функция $L_1\left(\mu_1|I_0(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\right)$ была определена на $[a_0,\omega[$.

Кроме того, выберем число $b_0\in\Delta_{Y_0}$ таким, чтобы соблюдалось неравенство

$$|b_0|<1 \ \textit{при} \ Y_0=0, \ \ b_0>1 \ (b_0<-1) \ \ \textit{при} \ \ Y_0=+\infty \ \ (Y_0=-\infty)$$

и введем функцию $\Phi_0(y)=\int\limits_{B_0}^{y}(\varphi_0(z))^{-\frac{1}{1-\sigma_1}}dz,$ где $B_0=b_0$, если $\left|\int\limits_{b_0}^{Y_0}\frac{dz}{(\varphi_0(z))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}\right|=+\infty$ и $B_0=Y_0$, если $\left|\int\limits_{b_0}^{Y_0}\frac{dz}{(\varphi_0(z))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}\right|<+\infty$. Так как $\Phi_0'(y)>0$ при $y\in\Delta_{Y_0}$, то $\Phi_0:\Delta_{Y_0}(b_0)\to\Delta_{Z_0}(c_0)$, где

$\Delta_{Y_0}(b_0)=[b_0,Y_0[,\quad \Delta_{Z_0}(c_0)=[c_0,Z_0[,\quad$ *если* $\Delta_{Y_0}-$ *левая окрестность* Y_0,
$\Delta_{Y_0}(b_0)=]Y_0,b_0],\quad \Delta_{Z_0}(c_0)=]Z_0,c_0],\quad$ *если* $\Delta_{Y_0}-$ *правая окрестность* Y_0,

$$c_0=\int\limits_{B_0}^{b_0}(\varphi_0(z))^{-\frac{1}{1-\sigma_1}}dz, \qquad Z_0=\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b_0)}}\Phi_0(y)=\begin{cases} 0, & \textit{если} \quad B_0=Y_0, \\ +\infty, & \textit{если} \quad B_0=b_0<Y_0, \\ -\infty, & \textit{если} \quad B_0=b_0>Y_0, \end{cases}$$

причем существует обратная непрерывно дифференцируемая возрастающая функция $\Phi_0^{-1}:\Delta_{Z_0}(c_0)\to\Delta_{Y_0}(b_0)$, такая, что

$$\lim_{\substack{z\to Z_0\\ z\in\Delta_{Z_0}(b_0)}}\Phi_0^{-1}(z)=Y_0. \tag{5.3}$$

Используя представления (4.9), условия (4.10) и правило Лопиталя, находим

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y}{\left(\varphi_0(y)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\Phi_0(y)} = \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\dfrac{y}{\left(\varphi_{00}(y)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}}{\Phi_0(y)} = \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\dfrac{1}{\left(\varphi_{00}(y)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} - \dfrac{y\ \varphi_{00}'(y)}{(1-\sigma_1)\left(\varphi_{00}(y)\right)^{1+\frac{1}{1-\sigma_1}}}}{\dfrac{1}{\left(\varphi_0(y)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}} =$$

$$= \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1},$$

т.е.

$$\Phi_0(y) = \frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\frac{y}{\left(\varphi_0(y)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}(1+o(1)) \quad при \quad y\to Y_0. \tag{5.4}$$

Отсюда

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\Phi_0'(y)}{\Phi_0(y)} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1},$$

поэтому функция Φ_0 является нормализованной правильно меняющейся функцией порядка $\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}$ при $y\to Y_0$, а обратная к ней при $z\to Z_0$ – нормализованной правильно меняющейся функцией порядка $\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}$, т.е. имеет место представление

$$\Phi_0^{-1}(z) = |z|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+o(1)} \quad при \quad z\to Z_0, \quad z\in\Delta_{Z_0}. \tag{5.5}$$

Теорема 5.1. *Пусть функция f удовлетворяет условию $(RN)_0$, $\sigma_1\neq 1$, $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$. Пусть, кроме того, функция φ_1 удовлетворяет условию S. Тогда для существования у дифференциального уравнения* (2.1) *$P_\omega(Y_0,Y_1,0)$ – решения, для которого существует $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$, необходимо и достаточно, чтобы наряду со знаковыми условиями* (2.6), (2.7) *при $t\in]a_0,\omega[$ выполнялись неравенства*

$$\alpha_0\mu_1(1-\sigma_1)I_0(t)>0, \quad \mu_0\mu_1(1-\sigma_1)(1-\sigma_0-\sigma_1)I_{00}(t)>0, \tag{5.6}$$

а также соблюдались условия

$$\mu_0 \lim_{t\uparrow\omega} |I_{00}(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} = Y_0, \quad \mu_1 \lim_{t\uparrow\omega} |I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} = Y_1, \tag{5.7}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_0'(t)}{I_0(t)} = \sigma_1 - 1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_{00}'(t)}{I_{00}(t)} = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_{00}''(t)}{I_{00}'(t)} = -1. \tag{5.8}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_1}}{\varphi_0(y(t))} = \alpha_0 \mu_1 (1-\sigma_1) I_0(t) L_1\left(\mu_1 |I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \right)[1+o(1)],$$

$$\text{при } t\uparrow\omega \tag{5.9}$$

$$\frac{y(t)}{\left(\varphi_0(y(t))\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \mu_1 |1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} I_{00}(t)[1+o(1)],$$

причем таких решений при $\omega = +\infty$ *существует двухпараметрическое семейство, если* $\sigma_1 > 1$ *и* $\mu_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1) < 0$*, и однопараметрическое семейство, если* $\mu_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1) > 0$*, а при* $\omega < +\infty -$ *двухпараметрическое семейство, если* $\sigma_1 < 1$ *и* $\mu_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1) > 0$ *и однопараметрическое семейство, если* $\mu_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1) < 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y:[t_0,\omega[\to \Delta_{Y_0}$ — произвольное $P_\omega(Y_0,Y_1,0)-$решение уравнения (2.1), для которого существует $\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)}$. Тогда $y^{(k)}(t) \neq 0 \quad (k=0,1,2)$, $\mathrm{s}ign\, y^{(k)}(t) = \mu_k \ (k=0,1)$ при $t\in[t_0,\omega[$ и соблюдаются неравенства (2.6). Кроме того, ввиду леммы 1.2 (см. Глава I) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = -1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = 0 \quad \text{при } t\uparrow\omega. \tag{5.10}$$

Поэтому $P_\omega(Y_0,Y_1,0)-$решение и его производная на $[t_0,\omega[$ удовлетворяют условиям (5.1) определения 5.1. Так как функция f удовлетворяет условию $(RN)_0$, то справедливо равенство

$$y''(t)=\alpha_0 p(t)\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))(1+o(1)) \ \textit{при} \ t\uparrow\omega \ ,$$

откуда $\alpha_0 y''(t)>0$ при $t\in[t_0,\omega[$ и с учетом условия (2.6) имеем знаковое условие (2.7). Последнее предельное равенство перепишем в виде

$$\frac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}=\alpha_0 p(t)(1+o(1)) \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{5.11}$$

Интегрируя представление (5.1) на промежутке от A_0 до t при $t\uparrow\omega$ на основании теорем из [[9]] (см. [[9]], Глава V, § 3, П. 3, Предложение 6, С.293) получим соотношение

$$\int_{A_0}^{t}\frac{y''(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}=\alpha_0 I_0(t)(1+o(1)) \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{5.12}$$

Сравним $\displaystyle\int_{A_0}^{t}\frac{y''(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}$ с функцией $\displaystyle\frac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}$, где $\varphi_{ii}:\Delta_{Y_i}\to]0,+\infty[$ $(i=0,1)-$непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям (4.10). Так как функция $\displaystyle\frac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}$ в силу условий (5.10) ведет себя как $|\pi_\omega(t)|^{\sigma_1-1+o(1)}$ при $t\uparrow\omega$, следовательно при $t\uparrow\omega$ стремится либо к нулю, либо к бесконечности. Применяя правило Лопиталя в форме Штольца и учитывая условия (4.10) и определение $P_\omega(Y_0,Y_1,0)-$решения, имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}}{\displaystyle\int_{A_0}^{t}\frac{y''(\tau)\,d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{y''(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}}{\dfrac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}}\times$$

$$\times\left[1-\frac{[y'(t)]^2}{y''(t)y(t)}\frac{y(t)\varphi_{00}'(y(t))}{\varphi_{00}(y(t))}-\frac{y'(t)\varphi_{11}'(y'(t))}{\varphi_{11}(y'(t))}\right]=1-\sigma_1.$$

Поэтому из предельного равенства (5.12) с учетом (4.10) следует соотношение

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = \alpha_0(1-\sigma_1)I_0(t)(1+o(1)) \quad при \quad t \uparrow \omega, \tag{5.13}$$

откуда, в свою очередь, вытекает первое из знаковых условий (5.6).

Далее из соотношений (5.11), (5.13), первого условия (5.10), находим

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} \sim \frac{I_0'(t)}{(1-\sigma_1)I_0(t)} \sim \frac{-1}{\pi_\omega(t)} \quad при \quad t \uparrow \omega, \tag{5.14}$$

откуда следует первое из условий (5.8). Также из соотношения (5.14) получим первое из знаковых соотношений (5.6). Кроме того, следствием эквивалентностей (5.14) является второе из условий (5.7).

Так как функция φ_1 удовлетворяет условию S, то в силу соотношения (5.14), замечания 2.1 придем к равенству

$$L_1(y'(t)) = L_1\left(\mu_1 |I_0|^{\frac{1}{\sigma_1-1}}\right)(1+o(1)) \quad при \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому из представлений (5.13) и

$$\varphi_1(y'(t)) = |y'|^{\sigma_1} L_1\left(\mu_1 |I_0|^{\frac{1}{\sigma_1-1}}\right)(1+o(1)) \quad при \quad t \uparrow \omega$$

имеем первое из соотношений (5.9), которое можно переписать при $t \uparrow \omega$ также в виде

$$\frac{|y'(t)|}{\left(\varphi_0(y(t))\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} \sim \left(|1-\sigma_1||I_0(t)|L_1\left(\mu_1|I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}. \tag{5.15}$$

Интегрируя последнее соотношение на промежутке от A_{00} до t на основании теорем из [[9]] (см. [9], Глава V, § 3, П. 3, Предложение 6, С.293), имеем

$$\int_{A_{00}}^{t} \frac{|y'(\tau)|\,d\tau}{\left(\varphi_0(y(\tau))\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = |1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} I_{00}(t)(1+o(1)) \quad при \quad t \uparrow \omega. \tag{5.16}$$

Сделав теперь в интеграле, стоящем в левой части предельного равенства (5.16), замену $z = y(\tau)$, учитывая, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0$, получим в силу (5.4) второе из представлений (5.9), второе из знаковых условий (5.6). Из соотношения (5.15), второго из представлений (5.9) будем иметь

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\frac{I_{00}'(t)}{I_{00}(t)}(1+o(1)) \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{5.17}$$

Предельное равенство (5.17) влечет, что $\ln|y(t)|\sim\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\ln|I_{00}(t)|$ при $t\uparrow\omega$, откуда в силу выбора числа A_{00} приходим к первому из условий (5.7). Кроме того, следствием соотношений (5.17), (5.10) является второе из предельных равенств (5.8). Третье из условий (5.8) легко получить непосредственной проверкой, учитывая медленное изменение функции $L_1(z)$ при $z\to Y_1$ и первое из предельных равенств (5.8). Отметим также, что ввиду (5.4) и второго из (5.9) имеем

$$Z_0=\lim_{t\uparrow\omega}\Phi_0(y(t))=\mu_1|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\lim_{t\uparrow\omega}I_{00}(t). \tag{5.18}$$

Достаточность. Пусть соблюдаются условия (2.6), (2.7), (5.6) – (5.8). Покажем, что в этом случае дифференциальное уравнение (2.1) имеет хотя бы одно $P_\omega(Y_0,Y_1,0)-$решение, допускающее представления (5.9), причем, для него существует $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$. Выясним также вопрос о количестве таких решений.

Применяя к дифференциальному уравнению (2.1) преобразование

$$\Phi_0(y(t))=MI_{00}(t)(1+v_1(\tau)),\ \frac{y'(t)}{\left(\varphi_0(y(t))\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}=MI'_{00}(t)(1+v_2(\tau)),\ \tau=\gamma\ln|I_0(t)|, \tag{5.19}$$

где

$$M=\mu_1|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}},\ \gamma=\begin{cases}1, & \textit{если } \alpha_0\mu_1(1-\sigma_1)>0,\\ -1, & \textit{если } \alpha_0\mu_1(1-\sigma_1)<0,\end{cases}$$

получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v_1' = \gamma \dfrac{h_2(\tau)}{h_1(\tau)}\left(-v_1 + v_2\right) \\ v_2' = \gamma \{ \dfrac{-(1+v_2)}{h_1(\tau)} \left[h_3(\tau) + \dfrac{H_0(\tau,v_1,v_2) H_2(\tau,v_1,v_2)}{1-\sigma_1} \right] + \\ + \dfrac{1}{1-\sigma_1} H_1(\tau,v_1,v_2) G(\tau,v_1,v_2)(1+v_2)^{\sigma_1} \} \end{cases} \tag{5.20}$$

в которой

$$h_1(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t) I_0'(t)}{I_0(t)}, \quad h_2(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t) I_{00}'(t)}{I_{00}(t)}, \quad h_3(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t) I_{00}''(t)}{I_{00}'(t)},$$

$$H_0(\tau(t), v_1, v_2) = \frac{\pi_\omega(t) Y^{[1]}\left(t, v_1, v_2\right)}{Y\left(t, v_1\right)}, \quad H_1(\tau(t), v_1, v_2) = \frac{L_1\left(Y^{[1]}\left(t, v_1, v_2\right)\right)}{L_1\left(\mu_1 \,|\, I_0(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\right)},$$

$$H_2(\tau(t), v_1) = \frac{Y(t,v_1)\varphi_0'\left(Y(t,v_1)\right)}{\varphi_0\left(Y(t,v_1)\right)},$$

$$G(\tau(t), v_1, v_2) = \frac{f\left(t, Y(t,v_1), Y^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}{\alpha_0\, p(t)\varphi_0\left(Y(t,v_1)\right)\varphi_1\left(Y^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)},$$

$$Y(t,v_1) = \Phi_0^{-1}\left(MI_{00}(t)(1+v_1)\right), \quad Y^{[1]}(t,v_1,v_2) = \left(\varphi_0(Y(t,v_1))\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}} MI_{00}'(t)(1+v_2).$$

Так как функция $\tau(t) = \gamma \ln |\, I_0(t)\,|$ такая, что

$$\tau : [t_0, \omega[\to]0, +\infty[, \ \tau'(t) > 0 \quad при \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \tau(t) = +\infty,$$

то в силу условия (5.8)

$$\lim_{\tau\to+\infty} h_1(\tau) = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_0'(t)}{I_0(t)} = \sigma_1 - 1, \qquad \lim_{\tau\to+\infty} h_2(\tau) = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_{00}'(t)}{I_{00}(t)} = 0,$$
$$\lim_{\tau\to+\infty} h_3(\tau) = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_{00}''(t)}{I_{00}'(t)} = -1. \tag{5.21}$$

Поскольку согласно соотношениям (5.6), (5.7), (5.18)

$$\lim_{t\uparrow\omega} MI_{00}(t) = Z_0$$

и существует $t_0 \in [a, \omega[$ такое, что

$$MI_{00}(t) \in \Delta_{Z_0}(c) \quad при \quad t \in [t_0, \omega[\quad и \quad |\, v_1 \,| \le 1/2,$$

где Z_0 и $\Delta_{Z_0}(c)$ определены перед доказательством теоремы 5.1. Поэтому $Y(t,v_1)\in\Delta_{Y_0}(b)$, $\operatorname{sign} Y(t,v_1)=\mu_0$ при $t\in[t_0,\omega[$ и $|v_1|\le 1/2$, а также ввиду (5.3), (5.5)

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y(t,v_1)=Y_0 \qquad \textit{равномерно по} \qquad v_1\in\left[-1/2,1/2\right]. \tag{5.22}$$

Кроме того, в силу свойств медленно меняющихся функций (лемма 1.5, теорема 1.6), которыми являются $I_{00}(t)$ при $t\uparrow\omega$, $L_i(z)$ при $z\to Y_i$ $(i=0,1)$, имеем равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$

$$\begin{gathered}\lim_{t\uparrow\omega} Y^{[1]}(t,v_1,v_2)=\lim_{t\uparrow\omega}\mu_1|I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\left(|M|(1+v_1)\right)^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}|I_{00}(t)|^{\frac{\sigma_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\times\\ \times\left(L_0(Y(t,v_1))L_1(\mu_1|I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}})\tilde{L}_0^{\sigma_0}(MI_{00}(t)(1+v_1))\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}=Y_1\ ,\end{gathered} \tag{5.23}$$

где

$$V_0=\left[-1/2,1/2\right]\times\left[-1/2,1/2\right],\ \tilde{L}_0(z)=\Phi_0^{-1}(z)\cdot|z|^{\frac{\sigma_1-1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}.$$

Ввиду теоремы 1.6, а также второго из условий (5.7), получим

$$\lim_{t\uparrow\omega} H_1(\tau(t),v_1,v_2)=1 \quad \textit{равномерно} \quad \textit{по} \quad (v_1,v_2)\in V_0,$$

откуда справедливо представление

$$H_1(\tau,v_1,v_2)=1+r_1(\tau,v_1,v_2), \tag{5.24}$$

где

$$\lim_{\tau\to+\infty} r_1(\tau,v_1,v_2)=0 \quad \textit{равномерно} \quad \textit{по} \quad (v_1,v_2)\in V_0.$$

Следствием условий (4.10), (5.22) является соотношение

$$H_2(\tau,v_1,v_2)=\sigma_0+r_2(\tau,v_1,v_2), \tag{5.25}$$

где

$$\lim_{\tau\to+\infty} r_2(\tau,v_1,v_2)=0 \quad \textit{равномерно} \quad \textit{по} \quad (v_1,v_2)\in V_0.$$

Так как

$$\lim_{t\uparrow\omega} H_0(\tau(t),v_1,v_2)=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\big(L_0(Y(t,v_1))\big)^{\frac{1}{1-\sigma_1}} MI'_{00}(t)(1+v_2)}{\operatorname{sign}(Y(t,v_1))\,|Y(t,v_1)|^{\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}}}=$$

$$=\frac{\mu_0(1+v_2)}{1+v_1}\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{L_0(Y(t,0))}{\overset{\sim\,1-\sigma_0-\sigma_1}{L_0}(MI_{00}(t))}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}} h_3(\tau(t)),$$

то в силу (5.21) и свойств медленно меняющихся функций (Лемма 1.5)

$$\lim_{t\uparrow\omega} H_0(\tau(t),v_1,v_2)=0 \quad \textit{равномерно} \quad \textit{по} \quad (v_1,v_2)\in V_0. \tag{5.26}$$

Учитывая, что

$$\frac{\pi_\omega(t)\big(Y(t,v_1)\big)'_t}{Y(t,v_1)}=\frac{1+v_1}{1+v_2}H_0(t,v_1,v_2),$$

$$\frac{\pi_\omega(t)\big(Y^{[1]}(t,v_1,v_2)\big)'_t}{Y^{[1]}(t,v_1,v_2)}=\frac{1}{1-\sigma_1}\left(\frac{\pi_\omega(t)\big(Y(t,v_1)\big)_t}{Y(t,v_1)}H_2(\tau(t),v_1)\right)+h_3(\tau(t)),$$

используя (5.21), (5.25), (5.26), придем к равенствам

$$\begin{aligned}&\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\big(Y(t,v_1)\big)_t}{Y(t,v_1)}=0,\\ &\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\big(Y^{[1]}(t,v_1,v_2)\big)_t}{Y^{[1]}(t,v_1,v_2)}=-1 \ \textit{равномерно} \quad \textit{по}\ (v_1,v_2)\in V_0.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Теперь становится очевидным представление для функции G. Из условий (5.22), (5.23), (5.27), условия $(RN)_0$, которому удовлетворяет функция f, имеем

$$G(\tau,v_1,v_2)=1+r_3(\tau,v_1,v_2), \tag{5.28}$$

где

$$\lim_{\tau\to+\infty} r_3(\tau,v_1,v_2)=0 \quad \textit{равномерно} \quad \textit{по} \quad (v_1,v_2)\in V_0.$$

Используя представления (5.24) – (5.26), (5.28), перепишем систему дифференциальных уравнений (5.20) в виде

$$\begin{cases} v_1'=g_1(\tau)\big(p_{11}(\tau)v_1+p_{12}(\tau)v_2\big),\\ v_2'=g_2(\tau)\big(f_2(\tau)+p_{22}(\tau)v_2+\varepsilon_2(\tau,v_1,v_2)+V_2(v_2)\big),\end{cases} \tag{5.29}$$

где

$$g_1(\tau)=\frac{\gamma h_2(\tau)}{h_1(\tau)},\quad p_{11}(\tau)=-p_{12}(\tau)=-1,\qquad g_2(\tau)=\frac{\gamma}{1-\sigma_1},$$

$$p_{22}(\tau)=\sigma_1-\frac{(1-\sigma_1)h_3(\tau)}{h_1(\tau)},$$

$$f_2(\tau)=1-\frac{(1-\sigma_1)h_3(\tau)}{h_1(\tau)},\qquad \varepsilon_2(\tau,v_1,v_2)=\frac{-H_0(\tau,v_1,v_2)(1+v_2)\big(\sigma_0+r_2(\tau,v_1,v_2)\big)}{h_1(\tau)}+$$

$$+\big(r_1(v_1,v_2)+r_3(\tau,v_1,v_2)+r_1(\tau,v_1,v_2)r_3(\tau,v_1,v_2)\big)\big(1+\sigma_1 v_2+V_2(v_2)\big),$$

$$V_2(v_2)=(1+v_2)^{\sigma_1}-1-\sigma_1 v_2.$$

Здесь в силу (5.21), (5.24) – (5.26), (5.28)

$$\lim_{\tau\to+\infty}\varepsilon_2(\tau,v_1,v_2)=0\quad \textit{равномерно}\quad \textit{по}\quad (v_1,v_2)\in V_0,\ \lim_{|v_1|+|v_2|\to 0}\frac{\partial V_2(v_2)}{\partial v_j}=0$$

$(j=1,2)$,

$$\lim_{\tau\to+\infty}p_{11}(\tau)=-1=const,\ \lim_{\tau\to+\infty}p_{22}(\tau)=\sigma_1-1=const,$$

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{p_{12}(\tau)}{p_{11}(\tau)}=-1=const,$$

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{f_2(\tau)}{p_{22}(\tau)}=0,\qquad \int\limits_{\gamma\ln|I_0(t_0)|}^{\tau}g_2(\tau)p_{22}(\tau)\,d\tau\to\pm\infty\quad \textit{при}\quad \tau\to+\infty,$$

$$\int\limits_{\gamma\ln|I_0(t_0)|}^{\tau}g_1(\tau)p_{11}(\tau)d\tau=-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{I'_{00}(t)}{I_{00}(t)}dt=-\ln|I_{00}(t)|\big|_{t_0}^{t}\to\pm\infty\quad \textit{при}\quad \tau\to+\infty\quad (t\uparrow\omega).$$

Таким образом, для системы (5.29) выполнены условия леммы 2.2. Поэтому у этой системы дифференциальных уравнений существует хотя бы одно решение $(v_1,v_2):[\tau_1,+\infty[\to\mathbb{R}^2_{1/2}(\tau_1\ge\tau_0)$, стремящееся к нулю при $\tau\to+\infty$. Каждому такому решению в силу замен (5.19) и соотношению (5.4) соответствует $P_\omega(Y_0,Y_1,0)-$ решение y дифференциального уравнения (2.1), допускающее асимптотические представления (5.9). Так как функция f удовлетворяет условию $(RN)_0$ функция φ_1- условию S с учетом первого из равенств (5.8), первого из представлений (5.9) получим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}=-1,$$

Количество исчезающих при $\tau\to+\infty$ решений системы (5.29) легко найти по числу отрицательных в окрестности $+\infty$ из функций $-\frac{\gamma h_2(\tau)}{h_1(\tau)}$, $\frac{\gamma}{1-\sigma_1}\left(\sigma_1-\frac{(1-\sigma_1)h_3(\tau)}{h_1(\tau)}\right)$. Учитывая знаковые условия (5.6), (5.14) получим, $\operatorname{sign} I_{00}(t)=\operatorname{sign}\mu_0\mu_1(1-\sigma_1)(1-\sigma_0-\sigma_1)$, $\gamma=\operatorname{sign}(\sigma_1-1)\pi_\omega(t)$. Поэтому при $\omega=+\infty$ существует двухпараметрическое семейство решений системы (5.29), если $\sigma_1>1$ и $\mu_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)<0$ и однопараметрическое семейство, если $\mu_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)>0$, а при $\omega<+\infty-$двухпараметрическое семейство, если $\sigma_1<1$ и $\mu_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)>0$ и однопараметрическое семейство, если $\mu_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)<0$.

Теорема полностью доказана.

Теорема 5.2. *Пусть* $\sigma_1\neq1$, $\sigma_0+\sigma_1\neq1$, *функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)_0$ *и функции* φ_i $(i=0,1)$ *удовлетворяют условию* S. *Тогда каждое* $P_\omega(Y_0,Y_1,0)-$*решение (в случае существования) дифференциального уравнения* (2.1), *для которого существует* $\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$, *допускает при* $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$y(t)=\mu_0\left(|1-\sigma_1|L_0\left(\mu_0|I_{00}(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}I_{00}(t)\right|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}(1+o(1)),$$

$$y'(t)=\mu_1\left(|1-\sigma_1|L_0\left(\mu_0|I_{00}(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{(1-\sigma_0-\sigma_1)}}\left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}I_{00}(t)\right|^{\frac{\sigma_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\times \tag{5.30}$$

$$\times\left(|I_0(t)|L_1\left(\mu_1|I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(1+o(1)).$$

Доказательство. При установлении теоремы 5.1 было показано, что для наличия у дифференциального уравнения (2.1) $P_\omega(Y_0,Y_1,0)-$решений, для которого существует $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$, необходимо выполнение условий (5.6) – (5.8). Каждое такое решение допускает асимптотические представления (5.9). Было показано, что для таких решений имеют место предельные соотношения (5.17). Поскольку функция φ_0 удовлетворяет условию S, то в силу соотношений (5.17) и замечания 2.1 функция L_0 из формул (4.7) допускает при $t\uparrow\omega$ асимптотическое представление

$$L_0(y(t)) = L_0\left(\mu_0\,|\,I_{00}(t)\,|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)[1+o(1)]\ .$$

Используя это представление, знаковые условия (5.6), из соотношений (5.9) получим соотношения (5.30).

Теорема доказана.

§ 5.2. Асимптотическое поведение сингулярных $P_{t_*}(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решений уравнения (2.1) в случае $\lambda_0=0$

Определение 5.2. *Пусть* $t_*\in]a,\omega[$. *Будем говорить, что функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)_0^*$, *если существуют числа* $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $A_*>0$ *и непрерывные правильно меняющиеся при* $z\to Y_i$ $(i=0,1)$ *функции* $\varphi_i:\Delta_{Y_i}\to]0,+\infty[$ $(i=0,1)$ *порядков* σ_i $(i=0,1)$, *такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций* $z_i:[t_0,t_*[\to\Delta_{Y_i}$ $(i=0,1,\ t_0\in[a,t_*[)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t\uparrow t_*} z_i(t)=Y_i\ \ (i=0,1),\ \lim_{t\uparrow\omega}\frac{(t-t_*)z_0'(t)}{z_0(t)}=0,\ \ \lim_{t\uparrow\omega}\frac{(t-t_*)z_1'(t)}{z_1(t)}=-1,$$

имеет место представление

$$f(t,z_0(t),z_1(t))=\alpha_0A_*\varphi_0(z_0(t))\varphi_1(z_1(t))[1+o(1)]\quad при\quad t\uparrow t_*.$$

Ясно, что функция f удовлетворяет условию $(RN)_0^*$, если f удовлетворяет условию $(RN)_0$, в котором ω заменено на t_*, $\pi_\omega(t) = t - t_*$ и в представлении (5.2) $\lim\limits_{t \uparrow t_*} p(t) = p(t_*) = A_* > 0$. Поэтому при выяснении вопроса о наличии и асимптотики сингулярных $P_{t_*}(Y_0, Y_1, 0)-$решений уравнения (2.1) могут быть привлечены теоремы 5.1, 5.2. Так как $\pi_\omega(t) = t - t_*$, то при $t \in [a, t_*[$ функция $\pi_\omega(t) < 0$ и $I_0(t) < 0$, $\lim\limits_{t \uparrow t_*} I_0 = 0$, при $t \uparrow t_*$ функция $I_0(t) \sim A_*(t - t_*)$. Тогда $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \dfrac{\pi_\omega(t) I_0'(t)}{I_0(t)} = 1$, поэтому первое из условий (5.8) выполнено тогда и только тода, когда $\sigma_1 = 2$. Из вида функции $I_{00}(t)$ следует, что при $t \uparrow t_*$ соблюдается эквивалентность $I_{00}(t) \sim \overline{I_{00}}(t) / A_*$, где $\overline{I_{00}}-$ нормализованная правильно меняющаяся при $t \uparrow t_*$ функция вида $\overline{I_{00}}(t) = \int\limits_{A_{00}}^{t} \left((t_* - \tau)\ L_1(\mu_1 \left(A_*(t_* - \tau) \right))^{-1} \right)^{-1} d\tau$, $L_1(z) = \varphi_1(z) | z |^{-\sigma_1}$ – медленно меняющаяся функция. Тогда второе и третье из условий (5.8) заведомо выполнены.

Следствие 5.1. *Пусть* $t_* \in]a, \omega[$, $\sigma_1 \neq 1$, $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$ *функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)_0^*$, *функция* φ_1 *удовлетворяет условию* S. *Тогда для существования у дифференциального уравнения* (2.1) $P_{t_*}(Y_0, Y_1, 0)-$*решения, для которого существует конечный или бесконечный* $\lim\limits_{t \uparrow t_*} \dfrac{(t - t_*) y''(t)}{y'(t)}$, *необходимо и достаточно, чтобы наряду с условиями* (2.6), (2.7), $\sigma_1 = 2$ *выполнялись неравенства*

$$\alpha_0 \mu_1 > 0, \quad \mu_0 \mu_1 (1 + \sigma_0) \overline{I_{00}}(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, t_*[,$$

а также

$$\mu_0 \lim_{t \uparrow t_*} |\overline{I_{00}}(t)|^{\frac{1}{1+\sigma_0}} = Y_0, \quad Y_1 = \pm\infty.$$

Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow t_*$ *имеют место асимптотические представления*

$$y'(t)\varphi_0(y(t)) = \frac{\mu_1[1+o(1)]}{A_*(t_*-t)L_1\left(\mu_1\left(A_*(t_*-t)\right)^{-1}\right)},$$

$$y(t)\varphi_0(y(t) = \frac{\mu_0(1+\sigma_0)}{A_*}\ \overline{I_{00}}(t)[1+o(1)],$$

причем таких решений существует при $\mu_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)<0$ *однопараметрическое семейство.*

Следствие 5.2. *Пусть* $t_* \in]a,\omega[$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_0 \neq -1$, *функция* f *удовлетворяет условию* $(RN)_0^*$ *и функции* φ_i $(i=0,1)$ *удовлетворяют условию* S. *Тогда каждое* $P_{t_*}(Y_0,Y_1,0)-$*решение (в случае существования) дифференциального уравнения* (2.1)*, для которого существует конечный или бесконечный* $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{(t-t_*)y''(t)}{y'(t)}$, *допускает при* $t \uparrow t_*$ *асимптотические представления*

$$y(t) = \mu_0\left(L_0\left(\mu_0\left(\frac{|\overline{I_{00}}(t)|}{A_*}\right)^{\frac{1}{1+\sigma_0}}\right)\right)^{\frac{-1}{1+\sigma_0}}\left|\frac{1+\sigma_0}{A_*}\overline{I_{00}}(t)\right|^{\frac{1}{1+\sigma_0}}(1+o(1)),$$

$$y'(t) = (1+o(1))\times$$

$$\times\mu_1\left(L_0\left(\mu_0\left(\frac{|\overline{I_{00}}(t)|}{A_*}\right)^{\frac{1}{1+\sigma_0}}\right)\right)^{\frac{-1}{1+\sigma_0}}\left|\frac{1+\sigma_0}{A_*}\overline{I_{00}}(t)\right|^{\frac{-\sigma_0}{1+\sigma_0}}\left(A_*(t_*-t)L_1\left(\mu_1\left(A_*(t_*-t)\right)^{-1}\right)\right)^{-1}.$$

§ **5.3. Об асимптотике** $P_\omega(Y_0,Y_1,0)-$**решений дифференциального уравнения 2.61**

Продемонстрируем результаты § 5.1 , § 5.2 на примере дифференциального уравнения 2.61. Предположим, что для некоторых

$i \in \{1,\dots,m\}$ и $j \in \{m+1,\dots,m+n\}$ соблюдаются неравенства

$$\begin{aligned} &\limsup_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\ln p_k(t)-\ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}\right] < \beta\left[\sigma_{i1}-\sigma_{k1}\right] \ \textit{при} \ \ k \in \{1,\dots,m\}\setminus\{i\}, \\ &\limsup_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\ln p_k(t)-\ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}\right] < \beta\left[\sigma_{j1}-\sigma_{k1}\right] \ \textit{при} \ k \in \{m+1,\dots,m+n\}\setminus\{j\}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где $\beta = sign\,\pi_\omega(t)$. Очевидно, что и в этом случае для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_s : [a,\omega[\to \Delta_{Y_s}$ $(s=0,1)$, удовлетворяющих условиям (5.1), будут выполняться предельные соотношения (2.63), (2.64). Действительно, считая как и прежде функции φ_{kl} правильно меняющимися порядка σ_{kl} имеем при $z_s \to Y_s$ $\left(z_s \in \Delta_{Y_s}\right)$ представления (2.65). Полагая при $i \in \{1,\dots,m\}$

$$R_k(t) = \frac{p_k(t)\varphi_{k0}(z_0(t))\varphi_{k1}(z_1(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(z_0(t))\varphi_{i1}(z_1(t))} \quad k \in \{1,\dots,m\}\setminus\{i\},$$

покажем, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega} R_k(t) = 0$.

В силу (5.1), (5.2) при $t \uparrow \omega$ справедливы равенства

$$|z_0(t)| = |\pi_\omega(t)|^{o(1)}, \ |z_1(t)| = |\pi_\omega(t)|^{-1+o(1)},$$

поэтому с учетом (2.65) и свойств медленно меняющихся функций (Лемма 1.5) справедливо равенство

$$\ln\varphi_{kl}(z_s)(t) = \ln|z_s(t)|\left(\sigma_{kl} + \frac{\ln L_{kl}(t)}{\ln|z_s(t)|}\right) = \ln|z_s(t)|\big(\sigma_{kl}+o(1)\big) =$$

$$= \begin{cases} \ln|\pi_\omega(t)|\,o(1), \textit{если} \ s=0, \\ \ln|\pi_\omega(t)|\big(-\sigma_{k1}+o(1)\big), \textit{если} \ s=1 \end{cases} \quad \textit{при} \ t\uparrow\omega.$$

Следовательно,

$$\ln R_k(t) = \ln\frac{p_k(t)}{p_i(t)} + \ln|\pi_\omega(t)|\big(\sigma_{i1}-\sigma_{k1}+o(1)\big) = \beta\ln|\pi_\omega(t)| \times$$

$$\times\left[\frac{\ln p_k(t)-\ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||} + \beta\big(\sigma_{i1}-\sigma_{k1}+o(1)\big)\right].$$

Зная, что $\beta\pi_\omega(t) > 0$ и выполняются первые из неравенств (5.31), приходим к выводу, что выражение в квадратных скобках отрицательно, т.е. $\lim_{t\uparrow\omega}\ln R_k(t) = -\infty$, откуда вытекает $\lim_{t\uparrow\omega} R_k(t) = 0$. Это означает, что соблюдается предельное соотношение (2.63).

Аналогичным образом устанавливается справедливость предельного соотношения (2.64). Тогда $i-$ое и $j-$ое слагаемые соответственно числителя и знаменателя правой части уравнения (2.61) на каждом $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)-$решении являются главными, поэтому функция

$$f(t,y,y') = \frac{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(y)\varphi_{k1}(y')}{\sum_{k=m+1}^{m+n} \alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(y)\varphi_{k1}(y')}$$

удовлетворяет условию $(RN)_0$, так как для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_s : [a,\omega[\to \Delta_{Y_s}$ $(s = 0,1)$, удовлетворяющих условиям (5.1), имеет место при $t \uparrow \omega$ представление (2.5), где

$$\alpha_0 = \alpha_i \alpha_j,\ p(t) = \frac{p_i(t)}{p_j(t)},\ \varphi_0(z) = \frac{\varphi_{i0}(z)}{\varphi_{j0}(z)},\ \varphi_1(z) = \frac{\varphi_{i1}(z)}{\varphi_{j1}(z)}. \tag{5.32}$$

Здесь φ_k $(k = 0,1)$- правильно меняющиеся при $z \to Y_k$ функции порядков $\sigma_k = \sigma_{ik} - \sigma_{jk}$ $(k = 0,1)$. Поэтому к уравнению (2.61) применимы теоремы 5.1 и 5.2. Введем вместо I_0, I_{00} функции I_{ij0} I_{ij00} полагая

$$I_{ij0}(t) = \int_{A_{ij0}}^{t} \frac{p_i(\tau)}{p_j(\tau)} d\tau,\quad I_{ij00}(t) = \int_{A_{ij00}}^{t} \left(|I_{ij0}(\tau)| \left(\frac{L_{i1}\left(\mu_1 |I_{ij0}(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}\right)}{L_{j1}\left(\mu_1 |I_{ij0}(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}\right)} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}} d\tau$$

где пределы интегрирования $A_{ij0} \in \{a;\omega\}$, $A_{ij00} \in \{a_0;\omega\}$ $(a_0 \in [a,\omega[)$ и выбраны так, чтобы интегралы I_{ij0}, I_{ij00} стремились либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$.

Следствие 5.3. *Пусть для некоторых* $i \in \{1,...,m\}$, $j \in \{m+1,...,m+n\}$ *соблюдаются неравенства* $\sigma_{i0} - \sigma_{j0} + \sigma_{i1} - \sigma_{j1} \neq 1$, $\sigma_{i1} - \sigma_{j1} \neq 1$ *и условия* (5.31), *функция* $\varphi_{i1}/\varphi_{j1}$ *удовлетворяет условию* S. *Тогда для существования у дифференциального уравнения* (2.61) $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)-$*решения, для которого существует* $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$, *необходимо и достаточно, чтобы соблюдались знаковые условия* (2.6), (2.7) *и при* $t\in]a,\omega[$

$$\alpha_i\alpha_j\mu_1(1-\sigma_{i1}-\sigma_{j1})I_{ij0}(t)>0,$$

$$\mu_0\mu_1(1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})I_{ij00}(t)>0,$$

$$\mu_0\lim_{t\uparrow\omega}|I_{ij00}(t)|^{\frac{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}=Y_0,\quad \mu_1\lim_{t\uparrow\omega}|I_{ij0}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}=Y_1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'_{ij0}(t)}{I_{ij0}(t)}=\sigma_{i1}-\sigma_{j1}-1,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'_{ij00}(t)}{I_{ij00}(t)}=0,\ \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I''_{ij00}(t)}{I'_{ij00}(t)}=-1.$$

Более того, для каждого такого решения при $t\uparrow\omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}\varphi_{j0}(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))}=$$

$$=\alpha_{i0}\alpha_{j0}\mu_1(1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})I_{ij0}(t)\frac{L_{i1}\left(\mu_1|I_{ij0}(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}\right)}{L_{j1}\left(\mu_1|I_{ij0}(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}\right)}[1+o(1)],$$

$$\frac{y(t)\big(\varphi_{j0}(y(t))\big)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}}{\big(\varphi_{i0}(y(t))\big)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}}=$$

$$=\mu_1|1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}\frac{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}\ I_{ij00}(t)[1+o(1)],$$

причем таких решений при $\omega=+\infty$ *существует двухпараметрическое семейство, если* $\sigma_{i1}-\sigma_{j1}>1$ *и* $\mu_0\mu_1(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})<0$, *однопараметрическое семейство*, *если* $\mu_0\mu_1(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})>0$, *а при* $\omega<+\infty-$*двухпараметрическое семейство, если* $\sigma_{i1}-\sigma_{j1}<1$ *и* $\mu_0\mu_1(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})>0$, *однопараметрическое семейство, если*

$\mu_0\mu_1(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1})<0$.

Следствие 5.4. *Пусть для некоторых* $i\in\{1,...,m\}$, $j\in\{m+1,...,m+n\}$ *соблюдаются неравенства* $\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\sigma_{i1}-\sigma_{j1}\neq 1$, $\sigma_{i1}-\sigma_{j1}\neq 1$ *и условия* (5.31). *Пусть, кроме того, функции* $\varphi_{i0}/\varphi_{j0}$ *и* $\varphi_{i1}/\varphi_{j1}$ *удовлетворяют условию* S. *Тогда каждое* $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$ *−решение дифференциального уравнения* (2.61), *для которого существует* $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$ *(в случае существования) допускает при* $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$y(t)=(1+o(1))\times$$

$$\times\mu_0\Big(|1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}|\,L(t)\Big)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}\left|\frac{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}I_{ij00}(t)\right|^{\frac{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}},$$

$$y'(t)=\mu_1\Big(|1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}|\,L(t)\Big)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}\left|\frac{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}I_{ij00}(t)\right|^{\frac{\sigma_{i0}-\sigma_{j0}}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}\times$$

$$\times\Big(|I_{ij0}(t)|\,L_{1ij}(t)\Big)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}(1+o(1)),$$

$$L(t)=\frac{L_{i0}\left(\mu_0\,|I_{ij00}(t)|^{\frac{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}\right)}{L_{j0}\left(\mu_0\,|I_{ij00}(t)|^{\frac{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}\right)},\quad L_{1ij}(t)=\frac{L_{i1}\left(\mu_1\,|I_{ij0}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}\right)}{L_{j1}\left(\mu_1\,|I_{ij0}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}}}\right)}.$$

Замечание 5.1. *Если в дифференциальном уравнении* (2.61) *функции* $p_k:[a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(k=\overline{1,m+n})$ *также являются непрерывными и правильно меняющимися порядков* ρ_k $(k=\overline{1,m+n})$ *при* $t\uparrow\omega$, *то неравенства* (5.31) *примут вид*

$$\beta(\rho_k-\rho_i)<\beta\big[\sigma_{i1}-\sigma_{k1}\big]\ \text{при}\ k\in\{1,\dots,m\}\setminus\{i\},$$
$$\beta(\rho_k-\rho_j)<\beta\big[\sigma_{j1}-\sigma_{k1}\big]\ \text{при}\ k\in\{m+1,\dots,m+n\}\setminus\{j\}.$$

Используя следствие 5.1 и замечание 5.1 укажем условия существования и асимптотику $P_{t_*}(Y_0,Y_1,0)-$решений уравнения 2.61, в котором $\lim\limits_{t\uparrow t_*} p_k(t) = A_{*k} > 0 \ \ (k = 1,...,m+n)$.

Следствие 5.5. *Пусть* $t_* \in]a,\omega[$ *и для некоторых* $i \in \{1,...,m\}$, $j \in \{m+1,...,m+n\}$ *соблюдаются неравенства* $\sigma_{i0} - \sigma_{j0} \neq -1, \ \sigma_{i1} - \sigma_{j1} = 2$,

$\beta\left[\sigma_{i1} - \sigma_{k1}\right] > 0$ *при* $k \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{i\}$,

$\beta\left[\sigma_{j1} - \sigma_{k1}\right] > 0$ *при* $k \in \{m+1,\ldots,m+n\} \setminus \{j\}$,

функция $\varphi_{i1}/\varphi_{j1}$ *удовлетворяет условию* S. *Тогда для существования у дифференциального уравнения (2.61)* $P_{t_*}(Y_0, Y_1, 0) -$ *решений, для которых существует конечный или бесконечный* $\lim\limits_{t\uparrow t_*} \dfrac{(t-t_*)y''(t)}{y'(t)}$, *необходимо и достаточно, чтобы наряду с* (2.6), (2.7) *соблюдались следующие условия:*

$\alpha_0\mu_1 > 0, \ \mu_0\mu_1(1+\sigma_{i0}-\sigma_{j0})\overline{I_{00}}(t) > 0$ *при* $t \in]a, t_*[$,

$\mu_0 \lim\limits_{t\uparrow t_*} |\overline{I_{00}}(t)|^{\frac{1}{1+\sigma_{i0}-\sigma_{j0}}} = Y_0, \ Y_1 = \pm\infty.$

Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow t_*$ *имеют место асимптотические представления*

$$\frac{y'(t)\varphi_{i0}(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))} = \frac{\mu_1 A_{j*} L_{j1}\left(\dfrac{\mu_1 A_{j*}}{A_{i*}(t_*-t)}\right)[1+o(1)]}{A_{i*}(t_*-t) L_{i1}\left(\dfrac{\mu_1 A_{j*}}{A_{i*}(t_*-t)}\right)},$$

$$\frac{y(t)\varphi_{i0}(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))} = \frac{\mu_0(1+\sigma_{i0}-\sigma_{j0})A_{j*}}{A_{i*}} \ \overline{I_{00}}(t)[1+o(1)],$$

где

$$\overline{I_{00}}(t) = \int\limits_{A_{00}}^{t} \frac{L_{j1}\left(\dfrac{\mu_1 A_{j*}}{A_{i*}(t_*-t)}\right)}{(t_*-\tau) L_{i1}\left(\dfrac{\mu_1 A_{j*}}{A_{i*}(t_*-t)}\right)} d\tau,$$

причем таких решений существует при $\mu_0\mu_1(1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}-\sigma_{i1}+\sigma_{j1}) < 0$ *однопараметрическое семейство.*

Выводы к главе V

В пятой главе исследован вопрос о существовании и асимптотическом поведении $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений уравнения (2.1) при $t \uparrow \omega$ в особом случае $\lambda_0 = 0$. Каждое $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решение уравнения (2.1) при $t \uparrow \omega$ и выполнении условия $(RN)_0$ является медленно меняющейся функцией, а его производная – правильно меняющейся ненулевого порядка функцией. В §5.1 в предположении соблюдения условия $(RN)_0$ на функцию f и условия S на функцию φ_1 доказан основной результат данной главы – теорема 5.1. Здесь сформулированы необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений уравнения (2.1) и приведено асимптотическое поведение этих решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$. При доказательстве теоремы была использована вспомогательная лемма 2.2. Заметим, что асимптотические представления $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений и его производной даны при $t \uparrow \omega$ в неявном виде. В теореме 5.2 указаны дополнительные условия на функцию φ_0, позволяющие получить асимптотику указанных в теореме 5.1 решений в явном виде. В §5.2 указаны условия существования сингулярных $P_{t_*}(Y_0, Y_1, 0)$ – решений уравнения (2.1) и приведена асимптотика таких решений и их производных первого порядка при $t \uparrow t_*$ и $a < t_* < \omega$. В §5.3 результаты главы проиллюстрированы на классе дифференциальных уравнений вида (2.61). Здесь также установлены ограничения на правую часть уравнения (2.61), при которых условие $(RN)_0$ заведомо выполнено.

ВЫВОДЫ

Началом важного этапа развития асимптотической теории существенно нелинейных дифференциальных уравнений стало изучение уравнения Эмдена — Фаулера, которое представляет собой двучленное дифференциальное уравнение второго порядка со степенным коэффициентом и степенной нелинейностью. Асимптотические свойства решений такого уравнения описаны в работах Р.Эмдена, Р.Фаулера, Е. Хопфа, Е. Милна, Дж. Сансоне, З. Нехари. Результаты изучения этих, а также других авторов подытожены в монографиях Р. Беллмана "Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений" (М.: ИЛ, 1954) и Дж. Сансоне "Обыкновенные дифференциальные уравнения" (М.: ИЛ, 1954). Необходимость практики привела к переходу от классического уравнения Эмдена –Фаулера к двучленным обобщенным уравнениям Эмдена – Фаулера второго и высших порядков. Среди работ, посвященных изучению этого уравнения, отметим исследования И.Т. Кигурадзе, Д.В. Изюмовой, Г.Г. Квиникадзе, Н.А. Изобова, М.М. Арипова, Л.В. Клебанова, В.А. Кондратьева и В.С. Самовола, А.В.Костина, В.М.Евтухова, Дж.С.В Уонга (J.S.W. Wong), С.Д. Талиаферро (S.D. Taliaferro), С. Белогорца (S. Belohorec) и др. Работы этих и других авторов явились предпосылкой для изучения дифференциальных уравнений n-го порядка общего вида. Основные результаты, полученные в течение 1955 – 1990-х гг. для двучленных уравнений Эмдена – Фаулера, а также уравнений общего вида, в полной мере отражены в монографии И.Т. Кигурадзе, Т.А.Чантурия "Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений" (М.: Наука, 1990). В этой монографии даны признаки существования правильных и сингулярных (I, II родов), колеблющихся, неколеблющихся решений, а также приведены асимптотические свойства решений в окрестности особой точки. Выявленное многообразие решений дифференциального уравнения n-го порядка привело И.Т. Кигурадзе к методологической находке: классифицировать решения линейного дифференциального уравнения и изучать каждый класс отдельно. Позже подобный подход был распространен на дифференциальные уравнения n-го порядка, правая часть которого имеет знак, совпадающий со знаком решения или противоположный ему.

Привлечение теории И. Караматы (J. Karamata) правильно меняющихся функций к исследованию дифференциальных уравнений привело к ряду результатов. Впервые правильно меняющиеся функции были использованы в 1947 году В. Авакумовичем (V.G. Avakumovič) для описания асимптотического поведения исчезающих в бесконечности решений обобщенного уравнения Эмдена – Фаулера с положительным правильно меняющимся в окрестности $+\infty$ коэффициентом и степенной нелинейностью. В 80-х гг. XX ст. в работах В. Марича (V. Marič), М. Томича (M. Tomič) изучаются двучленные дифференциальные уравнения второго порядка с правильно меняющимися в нуле нелинейностями. Для таких уравнений указаны двусторонние оценки решений, стремящихся к нулю при $t \to +\infty$. Дальнейшее изучение двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с правильно меняющимися нелинейностями, правая часть которых сохраняет в окрестности особой точки (как конечной, так и равной $\pm\infty$) знак, проведено на выделенном В.М. Евтуховым классе $P_\omega(\lambda_0)-$ решений, возникшем при исследовании обобщенных уравнений Эмдена – Фаулера n-го порядка. В работах В.М. Евтухова и Л.А. Кирилловой, В.М. Евтухова и М.А. Белозеровой получены точные асимптотические представления для всех возможных типов $P_\omega(\lambda_0)-$ решений (как ограниченных, так и неограниченных) в окрестности особой точки для дифференциальных уравнений II порядка с правильно меняющимися нелинейностями. Результаты В.М. Евтухова и М.А. Белозёровой, касающихся двучленных дифференциальных уравнений, стали предпосылкой изучения уравнений более сложного вида, например, дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих в правой части сумму слагаемых с правильно меняющимися относительно неизвестной функции и её производной первого порядка нелинейностями. Исследованиями таких уравнений позже занимались В.М. Евтухов и В.А. Касьянова, В.М. Евтухов и А.А. Козьма. Проведенный анализ существующих результатов для двучленных дифференциальных уравнений второго порядка позволил выявить неизученный класс уравнений, частными случаями которого являются уравнения из работ В.М. Евтухова и М.А. Белозёровой, В.М. Евтухова и А.А. Козьмы. Кроме того, в отличие от предыдущих исследований, используя идеи работ В.М. Евтухова, А.М. Самойленко, сняты ограничения на гладкость коэффициентов и нелинейностей (все эти функции предполагаются лишь непрерывными в областях их определения).

Для уравнения (2.1) в диссертационной работе класс $P_\omega(\lambda_0)-$решений конкретизирован до класса $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решений, где $Y_i\in\{0,\pm\infty\}$ $(i=0,1)$. Множество всех $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решений по своим асимптотическим свойствам распадается на 4 непересекающихся класса, соответствующих следующим значениям λ_0: $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ — неособый случай, $\lambda_0=0$, $\lambda_0=1$, $\lambda_0=\pm\infty$ – особые случаи. В данной диссертационной работе были получены следующие результаты:

1) В каждом из случаев $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $\lambda_0=0$, $\lambda_0=1$, $\lambda_0=\pm\infty$ на правую часть уравнения (2.1) накладывались ограничения $(RN)_{\lambda_0}$, при котором уравнение (2.1) при $t\uparrow\omega$ становилось близким в некотором смысле к двучленному.

2) Для всех возможных случаев значений λ_0 получены необходимые, а также достаточные условия существования $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решений, установлено асимптотическое поведение (в неявном виде) этих решений и их производных первого порядка при $t\uparrow\omega$. Выяснен вопрос о количестве $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)-$решений.

3) Указаны дополнительные ограничения на медленно меняющиеся

составляющие нелинейностей, при которых неявные асимптотические представления для $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений и их производных могут быть записаны в явном виде.

4) Для произвольного t_* из области определения коэффициентов описано асимптотическое поведение сингулярных (в случае существования) $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений при $t \uparrow t_*$.

5) Полученные результаты продемонстрированы на важном классе уравнений (2.61). Указаны условия, при которых уравнения вида (2.61) в каждом из случаев $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 = \pm\infty$ близки к двучленным.

6) Получены новые признаки существования исчезающих на бесконечности решений одной двумерной системы неавтономных квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка, используемые для установления результатов данной диссертационной работы.

Приведенные в 1) – 5) результаты для дифференциального уравнения вида (2.1) получены впервые, являются новыми и строго обоснованными.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] *Арипов М. М.* Метод "эталонных" уравнений (ВКБ -метод) для нелинейных уравнений второго порядка / М.М. Арипов // Изв. АН УзССР. Сер. Физ.-мат. – 1970. – № 4. – С. 3 – 8.

[2] *Арипов М. М.* О решении обыкновенного нелинейного уравнения второго порядка / М.М. Арипов // Изв. АН УзССР. Сер. Физ.-мат. – 1970. – № 7. – С. 6 – 8.

[3] *Арипов М.М.* Асимптотическое поведение решений нелинейного дифференциального уравнения $y''' = g(x)y^n$ / М.М. Арипов, Т. Каюмов // Изв. АН УзССР. – 1982. – 6. – С. 6 – 8.

[4] *Белозерова М.А.* Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ М.А. Белозерова // Математичні студії. – 2008. – Т.29, №1. – С. 52 – 62.

[5] *Білозерова М.О.* Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями у деякому сенсі близькими до степеневих [текст]/ М.О. Білозерова // Науковий вісник Чернівецького університету. – Чернівці: "Рута". – 2008. – Вип.374. – С. 34 – 43.

[6] *Белозерова М.А.* Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями близкими к степенным [текст]/ М.А. Белозерова // Нелінійні коливання. – 2009. – Т.12, №1. – С. 3 – 15.

[7] *Белозерова М.А.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями в некотором смысле близкими к степенным: дис. ... кан. физ.- мат. наук: 01.01.02 / Белозерова Мария Александровна. – Одесса, 2009. – 121 с.

[8] *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Беллман. – Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1954. – 216 с.

[9] *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного / Н. Бурбаки. –

М.: Наука, 1965. – 424 с.

[10] *Евтухов В.М.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка/ В.М. Евтухов // Докл. АН СССР. – 1977. – 233., № 4. – С. 531 – 534.

[11] *Евтухов В.М.* Асимптотическое поведение решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена - Фаулера: дис. ... канд. физ.- мат. наук: 01.01.02 / Евтухов Вячеслав Михайлович. – Одесса, 1980. – 154 с.

[12] *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / В.М. Евтухов // Сообщ. АН ГССР. – 1982. – 106, № 3. – С. 473 – 476.

[13] *Евтухов В.М.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка / В.М. Евтухов // Math. Nachr. – 1984. – Bd. 115. – P. 215 – 236.

[14] *Евтухов В.М.* Асимптотические свойства монотонных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка / В.М. Евтухов // Докл. расшир. заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И.Н. Векуа ТГУ. – 1988. – 3, № 3. – С. 62 – 65.

[15] *Евтухов В.М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена - Фаулера $n-$ го порядка / В.М. Евтухов // Докл. АН России. – 1992. – 324, № 2. – С. 258 – 260.

[16] *Евтухов В.М.* Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения $n-$го порядка типа Эмдена - Фаулера / В.М. Евтухов // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – 145, № 2. – С. 269 – 273.

[17] *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Евтухов Вячеслав Михайлович. – Киев, 1998. – 295 с.

[18] *Евтухов В.М.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений $n-$го порядка /В.М. Евтухов //Укр.мат.конгресс–2001, Диференціальні рівняння і нелінійні коливання. Праці. – Київ. – 2002. – С. 15 – 33.

[19] *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов // Дифференц.уравнения. – 2003. – 39, № 4. – С. 433 – 444.

[20] *Евтухов В.М.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / В.М. Евтухов, Л.А. Кириллова // Дифференц. уравнения. – 2005. – 41, №8. – С. 1053 – 1061.

[21] *Евтухов В.М.* Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. I/ В.М. Евтухов, В.А. Касьянова// Укр. Мат. журнал. – 2005. – 57, №3. – С. 338 – 355.

[22] *Евтухов В.М.* Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. II/ В.М. Евтухов, В.А. Касьянова// Укр. Мат. журнал. – 2006. – 58, №7. – С. 901 – 921.

[23] *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / В. М. Евтухов, В. М. Харьков // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 10. – С. 1311 – 1323.

[24] *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ В.М. Евтухов, М.А. Белозёрова // Укр.Мат.журнал – 2008. – Т. 60, № 3. – С. 310 –331.

[25] *Евтухов В.М.* Признаки существования и асимптотика некоторых классов решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ В.М. Евтухов, А.А. Козьма // Укр.Мат.журнал –

2011. – Т. 63, № 7.– С. 924 – 938.

[26] *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка /В.М. Евтухов, Л.И. Кусик //Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2009. – 14, вип. 20. – С. 57 – 74.

[27] *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка /В.М.Евтухов, Л.И.Кусик// Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 4. – С. 424 – 438.

[28] *Изобов Н.А.* Об уравнениях Эмдена – Фаулера с неограниченными бесконечно продолжимыми решениями / Н.А. Изобов // Мат. заметки. – 1984. – Т. 35, № 2. – С. 189 – 198.// Мат. заметки. – 1984. – Т. 35, № 6. – С. 829 – 839.

[29] *Изобов Н.А.* О кнезеровских решениях/ Н.А. Изобов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 4. – С. 581 – 588.

[30] *Изобов Н.А.* О продолжимых и непродолжимых решениях уравнения Эмдена - Фаулера/ Н.А. Изобов // Докл. расшир. заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И.Н. Векуа Тбилис. гос. ун-та. – 1985. – Т. 1, № 3. – С. 43 – 46.

[31] *Изюмова Д.В.* Об условиях колеблемости и неколеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / Д.В. Изюмова // Дифференц. уравнения. – 1966. – 11, № 12. – С. 1572 – 1586.

[32] *Изюмова Д.В.* Заметки о колеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / Д.В. Изюмова // Сообщ. АН ГССР. – 1967. – 17, № 1. – С. 19 – 24.

[33] *Изюмова Д.В.* Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Д.В. Изюмова // Тр. Тбилис. ун-та. – 1968. – Т. 129. – С. 157 – 178.

[34] *Изюмова Д.В.* Некоторые замечания о решениях уравнения $u'' + a(t) f(u) = 0$ / Д.В. Изюмова, И.Т. Кигурадзе // Дифференц. уравнения. –

1968. – 4, № 4. – С. 589 – 605.

[35] *Касьянова В.О.* Асимптотичні зображення зникаючих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку [текст]/ В.О. Касьянова // Наук. вісник Чернів. ун-ту. Математика – 2004, – вип. 228 – С. 15 – 29.

[36] *Касьянова В.О.* Асимптотичне поводження розв'язків істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку [текст]/ В.О. Касьянова // Наук. вісник Чернів. ун-ту. Математика – 2005, – вип. 239 – С. 66 – 81.

[37] *Квиникадзе Г.Г.* О быстро растущих решениях нелинейных обыкно венных дифференциальных уравнений / Г.Г. Квиникадзе, И.Т. Кигурадзе // Сообщ. АН ГССР. – 1982. – 106, № 3. – С. 465 – 468.

[38] *Квиникадзе Г.Г.* Об исчезающих в бесконечности решениях задачи Кнезера / Г.Г. Квиникадзе // Сообщ. АН ГССР. – 1985. – 118, № 2. – С. 241 – 244.

[39] *Квиникадзе Г.Г.* О кнезеровских решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Г.Г. Квиникадзе // Докл. расшир. заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И.Н. Векуа ТГУ. – 1985. – 1, № 3. – С. 47 – 53.

[40] *Кигурадзе И.Т.* Об асимптотических свойствах решений уравнения $u'' + a(t)u^n = 0$ / И.Т. Кигурадзе // Сообщ. АН ГССР. – 1963. – 30, № 2. – С. 129 –136.

[41] *Кигурадзе И.Т.* О колеблемости решений уравнения $\frac{d^m u}{dt^m} + a(t)\,|u|^n\ sign\,u = 0$ / И.Т. Кигурадзе // Мат. сб. – 1964. – 65, № 2. – С. 172 – 187.

[42] *Кигурадзе И.Т.* О неколеблющихся решениях уравнения $u'' + a(t)\,|u|^n\ sign\,u = 0$ / И.Т. Кигурадзе // Сообщ. АН ГССР. – 1964. – 35, № 1. – С. 15 – 22.

[43] *Кигурадзе И.Т.* Асимптотические свойства решений одного

нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена - Фаулера / И.Т. Кигурадзе // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – 29, № 5. – С. 965 – 986.

[44] *Кигурадзе И.Т.* Заметка о колеблемости решений уравнений $u'' + (at) | u |^n \ sign\, u = 0$ / И.Т. Кигурадзе // Căs. pĕst. mat. – Тр. Тбилис. ун-та. – 1967. – Т. 92, № 3. – S. 343 – 350.

[45] *Кигурадзе И.Т.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия. – М.: Наука, 1990. – 430 с.

[46] *Кириллова Л.О.* Асимптотичні властивості розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які близькі до рівнянь типу Емдена-Фаулера / Л.О. Кирилова // Науковий вісник Чернівецького університету. – Чернівці: "Рута". – 2004. – 228. – С. 30 – 35.

[47] *Кириллова Л.А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / Л.А. Кириллова // Нелінійні коливання. – 2005. – 8, №1. – С. 18 – 28.

[48] *Кириллова Л.А.* Асимптотические представления решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка, асимптотически близких к уравнениям типа Эмдена-Фаулера: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Кириллова Людмила Александровна. – Одесса, 2009.

[49] *Клебанов Л.В.* Локальное поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л.В. Клебанов // Дифференц. уравнения. – 1977. – 7, № 8. – С. 1393 – 1397.

[50] *Козьма А.А.* Асимптотические представления одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ А.А. Козьма // Нелінійні коливання – 2006, – т. 9 – № 4, – С. 490 – 501.

[51] *Козьма О.О.* Асимптотичне поводження розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку [текст]/ О.О. Козьма // Наук. вісник Чернів. ун-ту. Математика – 2008, – вип. 374 С. 55 – 65.

[52] *Козьма А.А.* Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ А.А. Козьма // Вісник Одеського нац. ун-ту. – 2009. – Т.14. – Вип.20. Матем. і механ. – С. 75 – 90.

[53] *Козьма А.А.* Условия существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ А.А. Козьма // Вісник Одеського нац. ун-ту. – 2010. – Т.15. – Вип.19. Матем. і механ. – С. 77 – 87.

[54] *Козьма А.А.* Условия существования и асимптотика одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ А.А. Козьма // Математичні студії. – 2011. – Т.36, №2. – С. 176 – 187.

[55] *Козьма А.А.* Асимптотическое поведение одного класса решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ А.А. Козьма // Нелінійні коливання – 2011, – т. 14 – № 4, – С. 468 – 481.

[56] *Кондратьев В.А.* О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена - Фаулера / В.А. Кондратьев, В.С. Самовол // Дифференц. уравнения. – 1981. – 17, № 4. – С. 749 – 750.

[57] *Костин А.В.* Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена - Фаулера / А.В. Костин // Докл. АН СССР. – 1971. – 200, № 1. – С. 28 – 31.

[58] *Костин А.В.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения / А.В. Костин, В.М. Евтухов // Докл. АН СССР. – 1976. – 231, № 5. – С. 1059 – 1062.

[59] *Костин А.В.* Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / А.В. Костин // Дифференц. уравнения. – 1987. – 23, № 3. – С. 524 – 526.

[60] *Костин А.В.* Асимптотика правильных решений обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Костин

Александр Васильевич. – Киев, 1991.

[61] *Кусик Л.И.* Асимптотические представления решений одного класса систем квазилинейных дифференциальных уравнений / Л.И.Кусик // Интегральные уравнения и их применения: Международная конференция, 29 июня – 4 июля 2005 г.: Программа международной конференции. – Одесса, 2005, С. 13.

[62] *Кусик Л.И.* Асимптотика решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений II порядка/ Л.И.Кусик // Метод функций Ляпунова и его приложения: Восьмая Крымская международная математическая школа, 10 – 17 сентября 2006 г.: тезисы докладов. – Симферополь, 2006, С. 98.

[63] *Кусик Л.И.* Асимптотические представления $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)-$решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка/ Л.И.Кусик // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька, 24 – 28 вересня 2007 р.: тези доповідей. – Львів, 2007, С. 158.

[64] *Кусик Л.И.* О существовании исчезающих решений одного класса систем дифференциальных уравнений второго порядка/ Л.И.Кусик // Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 15 – 17 травня 2008 р.: матеріали конференції. – Київ, 2008, С. 227.

[65] *Кусік Л.І.* Асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$розв'язків одного класудиференціальних рівнянь другого порядку/ Л.І. Кусік // Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача, 25 – 27 травня 2009 р.: тези доповідей. – Львів, 2009, С. 213 – 215.

[66] *Кусик Л.И.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ Л.И.Кусик // Нелінійні коливання – 2011, – т. 14 – № 3, – С. 333 – 349.

[67] *Кусик Л.И.* Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

[текст]/ Л.И.Кусик // Вісник Одеського нац. ун-ту. – 2012. – Т.17. – Вип. 1–2 (13–14). Матем. і механ. – С. 80 – 97.

[68] *Кусик Л.И.* Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / Л.И.Кусик // Міжнародна наукова конференція „Диференціальні рівняння та їх застосування” : матеріали конференції.—Ужгород, 2012, С. 52.

[69] *Кусик Л.И.* Об условиях существования и асимптотике одного класса решений дифференциальных уравнений второго порядка/ Л.И.Кусик // Міжнародна наукова-практична конференція "Матетматика в сучасному технічному університеті", 19 – 20 квітня 2013 р.: матеріали конференції. – Київ, 2013, С. 68 – 69.

[70] *Кусик Л.И.* Условия существования исчезающих на бесконечности решений одного класса систем дифференциальных уравнений/ Л.И.Кусик //Dynamical system modelling and stability investigation: XVI International Conference, May 29 – 31, 2013: Abstract of conference reports. – Kiev, 2013, P. 102.

[71] *Кусик Л.И.* Условия существования и асимптотические представления одного класса решений дифференциальных уравнений второго порядка/ Л.И.Кусик// Международная летняя математическая школа памяти В. А. Плотникова, 15 – 22 июня 2013 г.: тезисы докладов. – Одесса, 2013, С. 74.

[72] *Кусик Л.И.* Асимптотические представления некоторого класса решений дифференциальных уравнений второго порядка/ Л.И.Кусик// "Боголюбовські читання DIF - 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23 – 30 червня 2013 р.: тези доповідей. – Севастополь, 2013, С. 129 – 130.

[73] *Кусик Л.И.* Условия существования и асимптотика некоторого класса решений дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ Л.И. Кусик // Математичні студії. – 2014. – Т.41, №2. – С. 184 – 197.

[74] *Кусик Л.И.* Условия существования одного класса сингулярных решений дифференциальных уравнений второго порядка/ Л.И. Кусик // // Шестнадцатая международная научная конференция имени академика М. Кравчука, 14 – 15 мая 2015 г.: материалы конференции. – Киев, 2015, С. 150 – 152.

[75] *Кусик Л.И.* Асимптотические представления одного класса решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно меняющимися нелинейностями/ Л.И.Кусик// Семнадцатая международная научная конференция имени академика М. Кравчука, 19 – 20 мая 2016 г.: материалы конференции. – Киев, 2016, С. 181 – 184.

[76] *Курцвейль Я.* Заметка по колеблющимся решениям уравнения $y'' + f(x)y^{2n-1} = 0$ / Я. Курцвейль // Čas. pěst. mat. – 1960. – Т. 85, № 3. – С. 357 – 358.

[77] *Самойленко А.М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями/ В.М. Евтухов, А.М. Самойленко // Дифференц. уравнения. – 2011. – 47, №.5 – С. 628 – 650.

[78] *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Дж. Сансоне. – Пер. с итал. – М.: ИЛ, 1954. – Т. 2. – 415 с.

[79] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета. – М.: Наука, 1985. – 141с.

[80] *Стойкова Г.А.* Применение формул Харди к исследованию асимптотического поведения решений некоторых классов обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Стойкова Галина Александровна. – Одесса, 1980.

[81] *Чантурия Т.А.* Асимптотика решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / Т.А. Чантурия // Сообщ. АН ГССР. – 1970 – 57, № 2. – С. 289 – 292.

[82] *Чантурия Т.А.* Об асимптотическом представлении решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / Т.А. Чантурия

// Дифференц. уравнения. – 1970. – 6, № 6. – С. 948 – 961.

[83] *Чантурия Т.А.* Об асимптотическом представлении решений уравнения $u'' = a(t)|u|^n \, sign\, u$ / Т.А. Чантурия // Дифференц. уравнения. – 1972. – 8, № 7. – С. 1195 – 1206.

[84] *Чантурия Т.А.* Об асимптотическом поведении колеблющихся решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Т.А. Чантурия // Дифференц. уравнения. – 1975. – 11, № 7. – С. 1232 – 1245.

[85] *Чантурия Т.А.* Замечание об асимптотическом поведении возмущенных линейных систем дифференциальных уравнений / Т.А. Чантурия // Тр. Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа Тбилис. гос. ун-та. – 1975. – Т. № 7. – С. 29 – 34.

[86] *Чантурия Т.А.* О некоторых асимптотических свойствах решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Т.А. Чантурия // Докл. АН СССР. – 1977. – 235, № 5. – С. 1049 – 1052.

[87] *Ясный М.* О существовании колеблющихся решенияй нелинейного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + f(x)y^{2n-1} = 0$ / М. Ясный // Čas. pěst. mat. – 1960. – Т. 85, № 1. – С. 78 – 83.

[88] *Atkinson F.V.* On second-order non-linear oscillations [text]/F.V. Atkinson// Pasif.J.Math– 1955. – V.5, №1. –P. 643 – 647.

[89] *Avakumovič V.G.* Sur l'equation differentielle de Tomas - Fermi /V.G. Avakumovič // Publ. Inst.Math. (Beograd) – 1947. – 1. – P. 101–113.

[90] *Belohorec Š.* Oscilatorcké riešenia istej nelineárnej rovnice druhého rádu / Š. Belohorec // Mat. Fuz. čas. – 1961. – 11, № 4. – S. 250 – 255.

[91] *Belohorec Š.* Neoscilatorcké ries′enia istej nelineárnej differensiálnej rovnice druhého rádu / Š. Belohorec // Mat. Fuz. čas. – 1962. – 12, № 4. – S. 253 – 262.

[92] *Belohorec Š.* On some properties of the equation $y''(x) + f(x)y^{\alpha}(x) = 0, \;\; 0 < \alpha < 1$ / Š. Belohorec // Math. Cas. – 1967. – 17, № 1.

– S. 10 – 19.

[93] *Bingham N.H.* Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications /N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L.Teugels // Cambridge university press. Cambridge. 1987. – 494 p.

[94] *Butler G. J.* Oscillation theorems for a non-linear analogus of Hille's equation / G.J. Butler// Quart. J. Math. – 1976. – V. 27, № 106. – P. 159 – 171.

[95] *Coffman C.V.* On the conditions of solutions of a certain non-linear differential equation / C.V. Coffman, D.F. Ullrich// Monatsh. Math. – 1967. V. 71, № 5. – P. 385 – 392.

[96] *Coffman C.V.* On a second order nonlinear oscillation problem / C.V. Coffman, J.S.W. Wong // Trans. Amer. Math Soc. – 1970. – 147, № 2. – P. 357 – 366.

[97] *Coppel W.A.* Stability and asymptotic behavior of differential equations / W.A. Coppel // Boston: Heats and company. – 1965. – 166 p.

[98] *Chiou Kuo-Liang.* The existence of oscillatory solutions for the equations $d^2y/dt^2 + q(t)y^r = 0$, $0 < r < 1$ / Chiou Kuo-Liang // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. –V. 35, № 1. – P. 120 – 122.

[99] *Feller W.* An introduction to probability theory and its applications/ W. Feller// V. 1, New York: John Wiley and Sons, 1968. – 528 p.

[100] *Fowler R.H.* The form near infinity of real continuous solutions of a certain differential equation of the second order / R.H. Fowler// Quart. J. Pure Appl. Math. – 1914. – V. 45. – P. 289 – 350.

[101] *Fowler R.H.* The solutions of Emden's and similar differential equations / R.H. Fowler // Month. Notices. Roy. Astr. Soc. – 1930. – V. 91. – P. 63 – 91.

[102] *Fowler R.H.* Further studies of Emden's and similar differential equations / R.H. Fowler // Quart. J. Math. – 1931. – V. 2, № 2. – P. 259 – 288.

[103] *Geluk J.L.* Note on a theorem of Avakumovič /J.L. Geluk// PAMS. – 1991. – 112. – P.429 – 431.

[104] *Heidel J.W.* Uniqueness, conditions and nonoscillation for a second

order differential equation / J.W. Heidel // Pacif.J. Math. – 1970. V. 32, № 3. – P. 715 – 721.

[105] *Hopf E.* On Emden's differential equation / E. Hopf // Monthly Notices of the Royal Astr. Soc. – 1931. – V. 91. – P. 653 – 663.

[106] *Karamata J.* Sur une mode des croissance règuliére des fonction / J. Karamata// Math(Cluj). – 1930. – 4. – P. 38 – 53.

[107] *Kusik L.I.* Asymptotic representations of one class of singular solutions of second-order differential equations / L.I. Kusik //International Workshop QUALITDE – 2014, December 18 – 20, Tbilisi, Georgia. – 2014. – P. 89 – 91.

[108] *Kusik L.I.* Asymptotic representations of one class of singular solutions of second-order differential equations / L.I. Kusik // International V. Skoroboyatko Mathematical Conference, Lviv, – 2015. – P. 92.

[109] *Kusik L.I.* Asymptotic representations of solutions of second-order differential equations / L.I. Kusik // International Scientific Conference "DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THERE APPLICATIONS", Uzhhorod, – 2016. – P. 27.

[110] *Marič V.* Asymptotic properties of solutions of the equations $y'' = f(x)\varphi(y)$ / V. Marič, M. Tomič // Math. Z. – 1976. – 149. – P. 261 – 266.

[111] *Marič V.* Regular variation and asymptotic properties of solutions of nonlinear differential equations / V. Marič, M. Tomič // Publ. Inst. Math. – 1977. – 21, № 35 – P. 119 – 129.

[112] *Marič V.* Asymptotics of solutions of a generalized Tomas - Fermi equations / V. Marič, M. Tomič // J.Differential Equation. — 1980. — 35. — P. 36 - 44.

[113] *Marič V.* On asymptotic - behavior of solutions of the equation $y'' = f(x)\varphi(\psi(y))$ [текст]/ V. Marič, Z. Radašin// Clasnik. Mat. Fiz. Astr. – 1988. – 23(43). – P. 27–34.

[114] *Marič V.* Regular variation and differential equations (Seria: Lecture Notes in Mathematics Series) / V. Marič – Springer–Verlag. New York LLC. –

2000. – 140 p.

[115] *Miln E. A.* Note on steady - state distribution wich are given by solutions of Emden's differential equations / E.A. Miln // Montly Not. of the Royal Artr. Soc. – 1931. – V. 91. – P. 751 – 756.

[116] *Nehari Z.* On a class of nonlinear second - oder differential equations / Z. Nehari // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95, № 1. – P. 101 – 123.

[117] *Omey E.* Regular variation and its applications to second order linear differential equations/ E. Omey// Bull. Soc. Math. Belg. – 1981. – 32. – P. 207–229.

[118] *Sansone G.* Sull soluzioni di Emden della equazione di Fowler / G. Sansone // Rend. Sem. Mat. di Roma; ser. 5. – 1940. – V. 1. – P. 163 – 176.

[119] *Taliaferro S.D.* asymptotic bahavior of solutions of $y'' = \varphi(t) y^{\lambda}$ / S.D. Taliaferro// J.Math.Anal.Appl. – 1978. – 66. – P. 95 – 134.

[120] *Taliaferro S.D.* Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \Phi(t) f(y)$ / S.D. Taliaferro // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – 12. – P. 853 – 865.

[121] *Taliaferro S.D.* Asymptotic behavior of positive decreasing solutions of $y'' = F(t, y, y')$ [текст]/ S.D. Taliaferro // Geometric analysis and nonlinear PDE. Lecture notes in pure and app. math. M. Dekker New York. – 1993. P. 105 – 127.

[122] *Waltman P.* An oscillation criterion for a nonlinear second order equation / P. Waltman // J. Math. Anal. and Appl. – 1965. – V. 10, № 2. – P. 439 – 441.

[123] *Wong J.S.W.* Some stability conditions for $x'' + \alpha(t) f(x) = 0$ / J.S.W. Wong // SIAM. J.Appl. Math. – 1967. – 15, № 4. – P. 889 – 892.

[124] *Wong J.S.W.* Remarks on nonoscillation theorems for a second order nonlinear differential equation / J.S.W. Wong // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – V. 83, № 3. – P. 541 – 546.